Optimal Theory and Method

最优化理论与方法

程春杰

杭州电子科技大学 自动化学院

科技馆512

Email: cjzhai@hdu.edu.cn

目录

目录

- 线性规划中的对偶理论（考）
- 对偶单纯形法（考）
- 灵敏度分析（考）

■ 灵敏度分析

- 为何进行灵敏度分析
- 系数向量**c**改变的影响
- 右端向量**b**改变的影响
- 约束矩阵**A**改变的影响

■ 灵敏度分析

➢为何进行灵敏度分析?

数学模型中的数据未知，需要根据实际情况进行估计和预测，很难做到十分准确。

研究数据的变化对最优解产生的影响，对解决实际问题有重要意义。

$$
\begin{aligned}
\min \quad & cx \\
\text{s.t.} \quad & Ax = b. \\
& x \geq 0.
\end{aligned}
$$

下面将简要介绍 c，A和 b 的变化所带来的影响。

■ 灵敏度分析

➤系数向量c改变的影响

线性规划的最优解： $x_B = B^{-1}b$，$x_N = 0$

线性规划的最优值： $f = c_B B^{-1} b$

(1) 非基变量 x_k的系数c_k改变为$\acute{c}_k$

c_B**不变** $\Longrightarrow$ $z_k = c_B B^{-1} p_k$**不变**

若$z_k - \acute{c}_k \leq 0$ **最优解和最优值都不变**

若$z_k - \acute{c}_k > 0$ x_k**为进基变量**

替换判别数后，采用单纯形法求最优解和最优值

■ 灵敏度分析

➢系数向量c改变的影响

(2) 基变量 x_k 的系数 c_k 改变为 $\acute{c}_k$

c_B改变 ⟹ $z_k = c_B B^{-1} p_k$改变 ⟹ 影响所有判别数

系数c_k改变为$\acute{c}_k$后，重新计算判别数，采用单纯形法求最优解和最优值

■ 灵敏度分析

➢系数向量c改变的影响

线性规划问题：

$$\max \quad -x_1+2x_2+x_3$$
$$\text{s.t} \quad x_1+x_2+x_3 \leqslant 6$$
$$2x_1-x_2 \leqslant 4$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0$$

最优单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	1	1	1	0	6
x_5	3	0	1	1	1	10
	3	0	1	2	0	12

(1) 把 $c_1=-1$改变为 $\acute{c}_1=4$,求新问题的最优解．

(2) 讨论c_2在什么范围内变化时原来的最优解也是新问题的最优解（最优值可以不同）．

■ 灵敏度分析

(1) 把 $c_1=-1$改变为 $\acute{c}_1=4$

➢系数向量c改变的影响

解： x_1**非基变量** $z_1-\acute{c}_1=c_BB^{-1}p_1-\acute{c}_1=2-4=-2$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	1	1	1	0	6
x_5	$\boxed{3}$	0	1	1	1	10
	−2	0	1	2	0	12

x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$
	0	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{56}{3}$

线性规划的最优解： $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(\frac{10}{3},\frac{8}{3},0,0,0)$，

线性规划的最优值： $f=\frac{56}{3}$

■ 灵敏度分析

(2) c_2在什么范围变化时最优解不变

➢系数向量c改变的影响

解：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	1	1	1	1	0	6
x_5	3	0	1	1	1	10
	3	0	1	2	0	12

x_2基变量，最优解不变等价于替换后，所有的判别数大于或等于0

$$\acute{z}_1 - c_1 = \acute{c}_B B^{-1} p_1 - c_1 = c_2 + 1 \geq 0$$

$$\acute{z}_2 - c_2 = \acute{c}_B B^{-1} p_2 - c_2 = 0$$

$$\acute{z}_3 - c_3 = \acute{c}_B B^{-1} p_3 - c_3 = c_2 - 1 \geq 0$$

$$\acute{z}_4 - c_4 = \acute{c}_B B^{-1} p_4 - c_4 = c_2 \geq 0$$

$$\acute{z}_5 - c_5 = \acute{c}_B B^{-1} p_5 - c_5 = 0$$

$$c_2 \geq 1$$

■ 灵敏度分析

➢系数向量b改变的影响

线性规划的最优解： $x_B = B^{-1}b$，$x_N = 0$

线性规划的最优值： $f = c_B B^{-1} b$

(1) $B^{-1}b' \geq 0$

原来的最优基仍是最优基，但是基变量的取值和目标函数最优值将发生变化

(2) $B^{-1}b'$**不全大于或等于0**

原来的最优基不再是最优基，但是所有判别数仍小于或等于零，现行的基本解是对偶可行的。

$B^{-1}b \Longrightarrow B^{-1}b'$

$c_B B^{-1} b \Longrightarrow c_B B^{-1} b'$

灵敏度分析

系数向量b改变的影响

线性规划问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1+x_2-4x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1+x_2+2x_3\leqslant 9 \\ & x_1+x_2-x_3\leqslant 2 \\ & -x_1+x_2+x_3\leqslant 4 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

最优单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

求新问题的最优解 .

灵敏度分析

➢系数向量b改变的影响

解：

$$B=\begin{bmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\Longrightarrow B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0&-\frac{2}{3}\\0&1&1\\\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}b'=B^{-1}\begin{bmatrix}3\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix}\quad c_BB^{-1}b'=(1,0,-4)\begin{bmatrix}-1\\5\\2\end{bmatrix}=-9$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	−1
x_5	0	2	0	0	1	1	5
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2
	0	−4	0	−1	0	−2	−9

■ 灵敏度分析

➢系数向量b改变的影响

解:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\boxed{-\frac{2}{3}}$	-1
x_5	0	2	0	0	1	1	5
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	2
	0	-4	0	-1	0	-2	-9

x_6	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{3}{2}$
x_5	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{7}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{3}{2}$
	-3	-3	0	-2	0	0	-6

■ 灵敏度分析

➢约束矩阵A改变的影响

线性规划的最优解： $x_B = B^{-1}b$，$x_N = 0$

线性规划的最优值： $f = c_B B^{-1} b$

(1) 非基列p_j变为$\acute{p}_j$

影响判别数$z_j - c_j$和单纯性表的第j列y_j

$$\acute{z}_j - c_j = c_B B^{-1} \acute{p}_j - c_j$$

$$\acute{y}_j = B^{-1} \acute{p}_j$$

$\acute{z}_j - c_j \le 0$ ⟹ **最优解不变**

$\acute{z}_j - c_j > 0$ ⟹ **替代后，继续迭代，求最优解**

■ 灵敏度分析

➢约束矩阵A改变的影响

(2) 基列p_j变为$\acute{p}_j$

原来的基向量集合用 $\acute{p}_j$ 取代 p_j 后，有可能线性相关，因而不再构成基，即使线性无关，可以构成基，它的逆与原来基矩阵的逆 B可能差别很大.

由于基向量的改变将带来全面影响，因此在这种情况下，一般不去修改原来的最优表，而是重新计算

■ 灵敏度分析

➢增加新的约束

原有约束为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$，增加一个新的约束

$$\boldsymbol{p}^{m+1}\boldsymbol{x}\leqslant b_{m+1}\ ,$$

其中 $\boldsymbol{p}^{m+1}$ 是 n 维行向量

(1) 若原来的最优解满足新增加的约束，那么它也是新问题的最优解

(2) 若原来的最优解不满足新增加的约束，那么就需要把新的约束条件增加到原来的最优表中，再解新问题

灵敏度分析

增加新的约束

线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min \quad & x_1+x_2-4x_3 \\ \text{s.t} \quad & x_1+x_2+2x_3\leqslant 9 \\ & x_1+x_2-x_3\leqslant 2 \\ & -x_1+x_2+x_3\leqslant 4 \\ & -3x_1+x_2+6x_3\leqslant 17 \\ & x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ **增加的新约束.**

原问题的最优解： $(x_1,x_2,x_3)=(\frac{1}{3},0,\frac{13}{3})$

不满足新约束的条件，引松弛变量

$$-3x_1+x_2+6x_3+x_7=17$$

■ 灵敏度分析

➢增加新的约束

$$-3x_1+x_2+6x_3+x_7=17$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$
	0	-4	0	-1	0	-2	-17

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	0	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{13}{3}$
x_7	-3	1	6	0	0	0	1	17
	0	-4	0	-1	0	-2	0	-17

■ 灵敏度分析

$$-3x_1+x_2+6x_3+x_7=17$$

➢增加新的约束

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
x_5	0	2	0	0	1	1	0	6
x_3	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{13}{3}$
x_7	0	-4	0	-1	0	$\boxed{-4}$	1	-8
	0	-4	0	-1	0	-2	0	-17

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_1	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{3}$
x_5	0	1	0	$-\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{4}$	4
x_3	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{3}$
x_6	0	1	0	$\frac{1}{4}$	0	1	$-\frac{1}{4}$	2
	0	-2	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	-13

原问题的最优解：

$$(x_1,x_2,x_3)=(\frac{5}{3},0,\frac{11}{3})$$

■ 作业

P163、P164：

1(2)、4、7(2)