Optimal Theory and Method

最优化理论与方法

翟春杰

杭州电子科技大学 自动化学院

科技馆512

Email: cjzhai@hdu.edu.cn

目录

- **Zoutendijk可行方向法（考）**
- **Frank-Wolfe方法 （考）**
- **Rosen梯度投影法 （考）**

可行方向法的特点

■ 约束最优化方法

■ 无约束下降算法的推广

从可行点出发，沿着下降的可行方向进行搜索，求出使目标函数值下降的新的可行点。

■ 基本步骤

➢ 选择搜索方向

➢ 确定沿此方向移动的步长

本章主要探讨三种方法如何确定搜索方向和搜索步长!

回顾

- 可行方向
- 可行下降方向
- 起作用约束
- 约束非线性优化最优性条件

■ 回顾

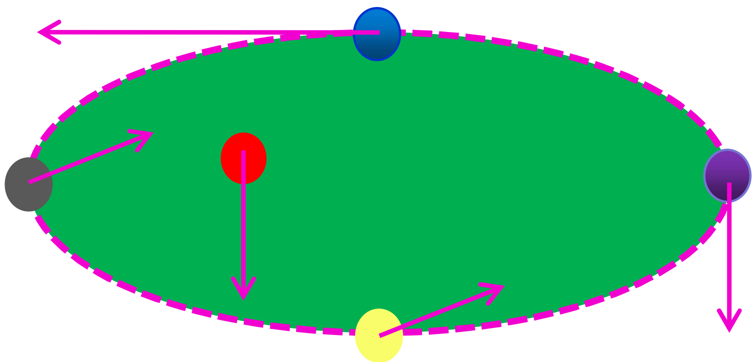
➢可行方向

设集合 $S\subset\mathbf{R}^n$,$\bar{x}\in \mathrm{cl}\ S$,d 是非零向量 ,若存在数 $\delta>0$,

若存在数 $\delta>0$, 使得对每个 $\lambda\in(0,\delta)$,都有

$$\bar{x}+\lambda d\in S,$$

则称 d 为集合 S 在 $\bar{x}$ 的可行方向 .



■ 回顾

➢可行下降方向

设 $f(\boldsymbol{x})$是定义在$\mathbf{R}^n$上的实函数，$\bar{\boldsymbol{x}}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{d}$是非零向量．

若存在数 $\delta>0$，使得对每个 $\lambda\in(0,\delta)$，都有

$$f(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d})<f(\bar{\boldsymbol{x}}),$$

则称$\boldsymbol{d}$为函数 $f(\boldsymbol{x})$在 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 处的下降方向．

可行下降方向需满足如下条件：

$$f(\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d})<f(\bar{\boldsymbol{x}}),$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}+\lambda\boldsymbol{d}\in S,$$

■ 回顾

➢起作用约束

考虑非线性规划问题

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(\boldsymbol{x}) \\
\text{s.t.} \quad & g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m.
\end{aligned}
$$

这个问题的可行域

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid g_i(\boldsymbol{x}) \geqslant 0,\ i = 1, \cdots, m\}.$$

有些约束，它们的下标集用 I 表示，成立等式，

$$g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) = 0, \quad i \in I.$$ 起作用约束

另一些约束成立严格不等式

$$g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0, \quad i \notin I.$$ 不起作用约束

■ 回顾

➢约束非线性优化最优性条件

Kuhn–Tucker条件：

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i\in I} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x}) = \mathbf{0},$$

$$w_i \geqslant 0, \quad i \in I.$$

Kuhn–Tucker条件等价形式：

$$\nabla f(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} w_i \nabla g_i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^{l} v_j \nabla h_j(\bar{x}) = \mathbf{0},$$

$$w_i g_i(\bar{x}) = 0, \quad i = 1, \cdots, m,$$

$$w_i \geqslant 0, \quad i = 1, \cdots, m,$$

目录

- **Zoutendijk可行方向法（考）**
- **Frank-Wolfe方法 （考）**
- **Rosen梯度投影法 （考）**

■ Zoutendijk可行方向法

- ➢线性约束下的下降可行方向
- ➢线性约束下的最优步长
- ➢线性约束下Zoutendijk法的步骤
- ➢非线性约束下的下降可行方向
- ➢非线性约束下的最优步长
- ➢非线性约束下Zoutendijk法的步骤

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的下降可行方向

◆ 线性约束的非线性规划问题一般表示为

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad &\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{Ex} = \mathbf{e} \end{aligned}$$

◆ 设 $\hat{\mathbf{x}}$ 是上述问题的可行解，在点 $\hat{\mathbf{x}}$ 处有 $\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_1, \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{x}} > \mathbf{b}_2$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$$

则非零向量 $\mathbf{d}$ 为 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的可行方向的充要条件是

$$\boxed{\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{Ed} = 0}$$

$$\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{Ed} = 0$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的下降可行方向

证明：必要性

设 $\hat{x}$ 是问题(12.1.1)的可行解

设非零向量 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向.

存在正数 δ,使得对每个 $\lambda \in (0,\delta)$,有 $\hat{x}+\lambda d$ 为可行点

$$A(\hat{x}+\lambda d) \geq b,$$

$$E(\hat{x}+\lambda d) = e.$$

$$A(\hat{x}+\lambda d) = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}(\hat{x}+\lambda d) = \begin{bmatrix} b_1 + \lambda A_1 d \\ A_2\hat{x} + \lambda A_2 d \end{bmatrix},$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的下降可行方向

$$\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{E}\mathbf{d} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 + \lambda \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{A}_2 \hat{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{A}_2 \boldsymbol{d} \end{bmatrix} \geqslant \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}.$$

由于 $\lambda > 0$,因此由上式得到 $\boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{d} \geqslant \mathbf{0}$

$$\boldsymbol{E}(\hat{\boldsymbol{x}} + \lambda \boldsymbol{d}) = \boldsymbol{e}. \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{E}\boldsymbol{d} = \mathbf{0}$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的下降可行方向

$$\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{Ed} = 0$$

充分性

设 $A_1 d \geq 0$， $Ed = 0$

由于 $A_2 \hat{x} > b_2$，则存在正数 δ，使得对于所有的 $\lambda \in [0, \delta)$，

$$A_2(\hat{x} + \lambda d) \geq b_2$$

$$\left.\begin{matrix} A_1 \hat{x} = b_1 \\ A_1 d \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A_1(\hat{x} + \lambda d) \geq b_1 \Rightarrow A(\hat{x} + \lambda d) \geq b$$

$$\left.\begin{matrix} Ed = 0 \\ E\hat{x} = e \end{matrix}\right\} \Rightarrow E(\hat{x} + \lambda d) = e$$

$\hat{x} + \lambda d$ 是可行点，因此 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的下降可行方向

◆ 如果非零向量 d同时满足

$$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} < 0 \\ \mathbf{A}_1\mathbf{d} \ge 0 \\ \mathbf{E}\mathbf{d} = 0 \end{cases}$$

则 d 是在 $\hat{\mathbf{x}}$ 处的可行下降方向

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad &\mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b} \\ &\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{e} \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \min_{\mathbf{d}}\quad & \nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ s.t.\quad & \mathbf{A}_1\mathbf{d} \ge 0 \\ & \mathbf{E}\mathbf{d} = 0 \\ & |\mathbf{d}_j| \le 1 \quad j = 1, \cdots, n \end{aligned}$$

下降方向

可行方向

线性规划算法

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的下降可行方向

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ s.t. \quad & \mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0 \\ & \mathbf{E}\mathbf{d} = 0 \\ & |\mathbf{d}_j| \leq 1 \quad j = 1,\cdots,n \end{aligned}$$

下降方向

可行方向

◆ 分析最优解

$\mathbf{d} = 0$ 可行解 ⟶ 最优值 $f \leq 0$

✓ 如果目标函数最优值$\nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} < 0$，则得到下降可行方向

✓ 否则，$\nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} = 0$ 得到的x为K-T点。

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的下降可行方向

◆定理12.1.2 考虑问题(12.1.1)，设x是可行解，在点x处有$A_1x=b_1$，$A_2x>b_2$，其中

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

则x为Kuhn—Tucker点的充要条件是问题(12.1.10)的目标函数最优值为零

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad &\mathbf{A}\mathbf{x}\ge \mathbf{b} \\ &\mathbf{E}\mathbf{x}=\mathbf{e} \end{aligned}$$

⬇

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{d}}\quad &\nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \\ s.t.\quad &\mathbf{A}_1\mathbf{d}\ge 0 \\ &\mathbf{E}\mathbf{d}=0 \\ &\left|\mathbf{d}_j\right|\le 1 \end{aligned}$$

⬇

X为K-T点充要条件

$$\nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d}=0$$

Zoutendijk方法的迭代截止条件

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的最优搜索步长

设 $\mathbf{x}^{(k)}$是可行解，$\mathbf{d}^{(k)}$ 为 $\mathbf{x}^{(k)}$处一下降可行方向，则后继点

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k \mathbf{d}^{(k)}$$

◆ 搜索步长 λ_k 取值的原则

➢ 保持迭代点的可行性

➢ 使目标函数值尽可能地小

■ Zoutendijk可行方向法

$$\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{E}\mathbf{d} = 0$$

➢线性约束下的最优搜索步长

$$\begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}^{(k)}) \\ s.t\quad & \mathbf{A}(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}^{(k)}) \geq \mathbf{b} \\ & \mathbf{E}(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}^{(k)}) = \mathbf{e} \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}^{(k)}) \geq \mathbf{b}_1 (\text{多余}) \\ \mathbf{A}_2(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}^{(k)}) \geq \mathbf{b}_2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \mathbf{E}\mathbf{d}^{(k)} = 0(\text{多余})$$

$$\downarrow$$

$$\begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}^{(k)}) \\ s.t\quad & \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{A}_2\mathbf{d}^{(k)} \geq \mathbf{b}_2 \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

令

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{x}^{(k)}$$

$$\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{A}_2\mathbf{d}^{(k)}$$

$$\rightarrow \begin{aligned} \min\ & f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda \mathbf{d}^{(k)}) \\ s.t\quad & \lambda \hat{\mathbf{d}} \geq \hat{\mathbf{b}} \\ & \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的最优搜索步长

$$\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{Ed} = 0$$

$$\lambda\hat{\mathbf{d}} \geq \hat{\mathbf{b}} \xrightarrow{\text{计算上界}} \lambda_{\max} = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \middle| \hat{d}_i < 0 \right\} & \text{当}\hat{d} \ngeq 0 \\ \infty & \text{当}\hat{d} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\min\ f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda\mathbf{d}^{(k)}) \\ &s.t \quad \lambda\hat{\mathbf{d}} \geq \hat{\mathbf{b}} \\ &\qquad\ \ \lambda \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\min\ f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda\mathbf{d}^{(k)}) \\ &s.t \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_{\max} \end{aligned}$$

一维搜索

$$\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{E}\mathbf{d} = 0$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的迭代步骤

1。给定初始可行点$x^{(1)}$，置k=1

2。在点$x^{(k)}$处把A和b分解成

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_1x^{(k)}=b_1 \\ A_2x^{(k)}>b_2 \end{matrix}$$

计算$\nabla f(x^{(k)})$

确定$x^{(k)}$处的A_1, A_2, b_1, b_2

3。求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\ & \nabla f(x^{(k)})^T d \\ \text{s.t}\ & A_1 d \geqslant 0 \\ & Ed = 0 \\ & -1 \leqslant d_j \leqslant 1 \quad j=1,\ldots,n \end{aligned}$$

⇒ 得最优解$d^{(k)}$

确定$x^{(k)}$处的最优下降可行方向$d^{(k)}$

■ Zoutendijk可行方向法

$$\mathbf{A}_1\mathbf{d} \geq 0, \mathbf{E}\mathbf{d} = 0$$

➢线性约束下的迭代步骤

4。如果$\nabla f(x^{(k)})^T d^{(k)} = 0$，则停止计算，$x^{(k)}$为K—T点;否则, 进行步5

5。利用(12.1.22)至(12.1.24)计算λ_{max},然后，在$[0, \lambda_{max}]$上作一维搜索：

确定$x^{(k)}$处沿方向$d^{(k)}$最大允许步长λ_{max}

$$\min f(x^{(k)} + \lambda d^{(k)})$$

$$\text{s.t} \quad 0 \leq \lambda \leq \lambda_{max}$$

从$x^{(k)}$处沿方向$d^{(k)}$进行一维搜索

得最优解λ_k，令$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}$

6。置$k:=k+1$，返回步2

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的例子

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1^2+x_2^2-2x_1-4x_2+6 \\
\text{s.t} \quad & -2x_1+x_2+1\geqslant 0 \\
& -x_1-x_2+2\geqslant 0 \\
& x_1 \geqslant 0 \\
& x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

取初始可行点$\mathbf{x}^{(1)}=(0,\ 0)^T$

第1次迭代：区分紧约束：

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix} b_1=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} b_2=\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的例子

求在$x^{(1)}$处的下降可行方向

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla f(x^{(1)})^T d \\ \text{s.t} \quad & A_1 d \geqslant 0 \\ & |d_j| \leqslant 1,\ j=1,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & -2d_1 - 4d_2 \\ \text{s.t} \quad & d_1 \geqslant 0 \\ & d_2 \geqslant 0 \\ & -1 \leqslant d_1 \leqslant 1 \\ & -1 \leqslant d_2 \leqslant 1 \end{aligned}$$

⇒ 最优解$d^{(1)}=(1,1)^T$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的例子

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min\left\{ \dfrac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i} \middle| \hat{d}_i < 0 \right\} & 当\hat{d} \not\geq 0 \\ \infty & 当\hat{d} \geq 0 \end{cases}$$

再求步长 λ_1

$$\hat{d} = A_2 d^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \min\left\{ \frac{-1}{-1}, \ \frac{-2}{-2} \right\} = 1$$

解一维搜索：

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(1)} + \lambda d^{(1)}) \triangleq 2\lambda^2 - 6\lambda + 6 \\ \text{s.t} \quad & 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{aligned}$$

➡ $\lambda_1 = 1$

令 $x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 d^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的例子

第2次迭代：区分紧约束：

$$A_1=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\quad A_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad b_1=\begin{bmatrix}-1\\ -2\end{bmatrix}\quad b_2=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

求在$x^{(2)}$处的下降可行方向

$$\begin{aligned}\min\quad & -2d_2\\ \text{s.t}\quad & -2d_1+d_2\geqslant 0\\ & -d_1-d_2\geqslant 0\\ & -1\leqslant d_1\leqslant 1\\ & -1\leqslant d_2\leqslant 1\end{aligned}$$

最优解$d^{(2)}=(-1, 1)^T$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的例子

$$\lambda_{max}=\begin{cases}\min\left\{\frac{\hat{b}_i}{\hat{d}_i}\middle|\hat{d}_i<0\right\} & 当\hat{d}\not\geq 0\\ \infty & 当\hat{d}\geq 0\end{cases}$$

再求步长 λ_2

$$\hat{b}=b_2-A_2x^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$$

$$\hat{d}=A_2d^{(2)}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

得 $\lambda_{max}=1$ 解一维搜索：

$$\min \quad f(x^{(2)}+\lambda d^{(2)})\triangleq 2\lambda^2-2\lambda+2$$

$$\text{s.t} \quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1$$

得 $\lambda_2=1/2$，令

$$x^{(3)}=x^{(2)}+\lambda_2d^{(2)}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢线性约束下的例子

第3次迭代：区分紧约束：

$$A_1=(-1,\ -1) \quad A_2=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad b_2=\begin{bmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$b_1=(-2)$$

求在$x^{(3)}$处的下降可行方向

$$\begin{aligned}\min\quad & -d_1-d_2\\ \text{s.t}\quad & -d_1-d_2\geq 0\\ & -1\leqslant d_1\leqslant 1\\ & -1\leqslant d_2\leqslant 1\end{aligned}$$

最优解$d^{(3)}=(0,\ 0)^T$

$\therefore x^{(3)}=(1/2,\ 3/2)^T$

是K-T点

凸规划→ $x^{(3)}$是最优解

目标函数的最优值: $f_{min}=f(x^{(3)})=3/2$

■ Zoutendijk可行方向法

➢非线性约束的下降可行方向

◆ 非线性约束的非线性规划问题一般表示为

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$s.t. \quad g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

◆ 下降可行方向

定理 12.1.3

设函数 $f(\boldsymbol{x})$, $g_i(\boldsymbol{x})(i \in I)$在 $\boldsymbol{x}$ 处可微，函数 $g_i(\boldsymbol{x})(i \notin I)$

如果

$$\nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \mathbf{d} < 0$$

$$\nabla g_i(\mathbf{x})^{\mathrm{T}} \mathbf{d} > 0 \quad i \in \mathbf{I}$$ **起作用约束集**

则 $\boldsymbol{d}$ 是下降可行方向.

Zoutendijk可行方向法

➢非线性约束下的可行下降方向

$$\nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} < 0$$

$$\nabla g_i(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} > 0 \quad i \in \mathbf{I}$$

求下降可行方向

$$\begin{aligned} &\min \quad \mathbf{z} \\ s.t. \quad &\nabla f(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} - \mathbf{z} \le 0 \\ &\nabla g_i(\mathbf{x})^{\mathrm{T}}\mathbf{d} + \mathbf{z} \ge 0 \quad i \in \mathbf{I} \\ &\left|\mathbf{d}_j\right| \le 1 \quad j = 1, 2, \cdots, n \end{aligned}$$

分析最优解 $(\bar{\mathbf{z}}, \bar{\mathbf{d}})$

- 如 $\bar{\mathbf{z}} < 0$，则 $\bar{\mathbf{d}}$ 是在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的下降可行方向
- 如 $\bar{\mathbf{z}} = 0$，相应的 $\bar{\mathbf{x}}$ 为Fritz John点

Zoutendijk方法的迭代截止条件

■ Zoutendijk可行方向法

➢非线性约束下的最优步长

$$\min f(\mathbf{x})$$
$$s.t.\quad g_i(\mathbf{x}) \ge 0 \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

◆ 定理12.1.4：设x是问题（12.1.27）的可行解，$I=\{i|g_i(x)=0\}$则x是Fritz John点的充要条件是问题（12.1.31）的目标函数最优值等于零

■ 确定最优步长

$$\min\ f(\mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}^{(k)})$$
$$s.t\quad 0 \le \boldsymbol{\lambda} \le \boldsymbol{\lambda}_{\max}$$
$$\boldsymbol{\lambda}_{\max} = \sup\left\{\boldsymbol{\lambda} \mid g_i(\mathbf{x}^{(k)} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{d}^{(k)}) \ge 0, i = 1, \cdots, m\right\}$$

■ Zoutendijk可行方向法

➢非线性约束下的算法步骤

1。给定初始可行点$x^{(1)}$,置k=1。

2。令$I=\{i|g_i(x^{(k)})=0\}$， 解线性规划问题：

$$\min\ z$$

$$\nabla f(x^{(k)})^T d - z \leqslant 0$$

$$\nabla g_i(x^{(k)})^T d + z \geqslant 0,\quad i \in I$$

$$-1 \leqslant d_j \leqslant 1,\ j=1,2,\ldots,n$$

得最优解$(z_k，\ d^{(k)})$，若$z_k=0$，则停止计算，$x^{(k)}$为Fritz John点；否则，进行步3

确定$x^{(k)}$处的最优下降可行方向$d^{(k)}$

■ Zoutendijk可行方向法

➢非线性约束下的算法步骤

3。求解一维搜索问题:

$$\min f(x^{(k)}+\lambda d^{(k)})$$
$$\text{s.t} \quad 0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{\max}$$

$$\lambda_{\max}=\mathrm{SUP}\{\lambda \mid g_i(x^{(k)}+\lambda d^{(k)})\geq 0, i=1,\cdots,m\}$$

得最优解 λ_k **确定$x^{(k)}$处沿方向$d^{(k)}$最大允许步长λ_{max}**

4。令$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda_k d^{(k)}$, 置k:=k+1,

返回步2

目录

■ Frank-Wolfe 可行方向法

➢ Frank-Wolfe的基本原理

➢ Frank-Wolfe的下降可行方向

■ Frank-Wolfe 可行方向法

➢基本原理

◆ **求解线性约束问题的一种算法**

$$
\begin{aligned}
& \min f(\mathbf{x}) \\
s.t.\quad & \mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b} \\
& \mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{e}
\end{aligned}
$$

◆ **每次迭代，将目标函数 $f(x)$ 线性化，通过解线性规划求下降可行方向，进而沿此方向在可行域内作一维搜索。**

■ Frank-Wolfe 可行方向法

➢下降可行方向

线性化
$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^{(k)}) + \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^{(k)})$$
$$= \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + [f(\mathbf{x}^{(k)}) - \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^{(k)}]$$

求解线性规划

$$\begin{aligned} &\min \nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}\underline{\mathbf{x}} \\ s.t.\quad &\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\mathbf{x} \ge 0 \end{aligned}$$

分析线性规划的结果 $\mathbf{y}^{(k)}$

- **如** $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}(\mathbf{y}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}) = 0$ ，**停止迭代**
- **如** $\nabla f(\mathbf{x}^{(k)})^{\mathrm{T}}\underline{(\mathbf{y}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)})} < 0$ ，**则** $\mathbf{y}^{(k)}-\mathbf{x}^{(k)}$ **为下降可行方向**

■ Frank-Wolfe 可行方向法

➢最优步长

■ 确定最优步长

$$\min \ f(\mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)}))$$

$$s.t \quad \underline{0 \le \lambda_k \le 1}$$

■ 迭代

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \lambda_k(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k)})$$

目录

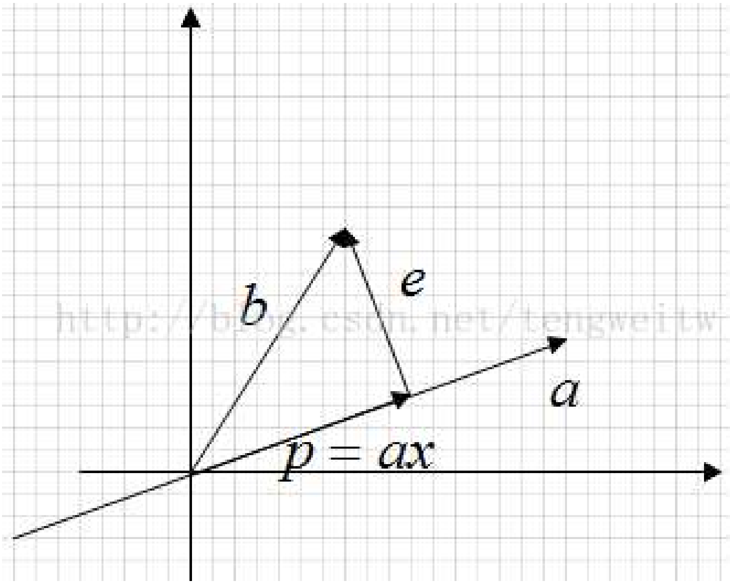
- **Zoutendijk可行方向法（考）**
- **Frank-Wolfe方法 （考）**
- **Rosen梯度投影法 （考）**

■ Rosen梯度投影法

- 什么是**投影**
- 什么是**投影矩阵**
- 梯度投影法的**基本思想**
- 梯度投影法的**步骤**

■ Rosen梯度投影法

➢投影——二维



向量b在向量a上的投影为p

$$e=b-p=b-xa$$

$$a^{\mathrm{T}}e=0\rightarrow a^{\mathrm{T}}(b-xa)=0$$

$$\rightarrow xa^{\mathrm{T}}a=a^{\mathrm{T}}b\rightarrow x=\frac{a^{\mathrm{T}}b}{a^{\mathrm{T}}a}$$

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{a}x=\boldsymbol{a}\frac{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$$

P为投影矩阵，且满足

$$P^{\mathrm{T}}=P$$

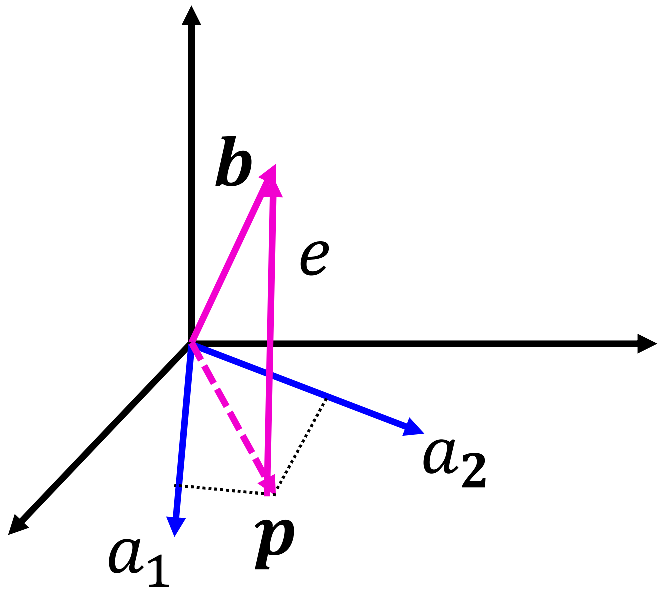
$$P^2=P$$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{p}\rightarrow\boldsymbol{P}=\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}$$

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{I}-\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}})\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{b}$$

■ Rosen梯度投影法

➢投影——三维



将b向量投影到平面A，得到p向量

$$\boldsymbol{p} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}，\ \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2),$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{p} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0} \to \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

P为投影矩阵，且满足

$$P^{\mathrm{T}} = P$$

$$P^2 = P$$

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}$$

■ Rosen梯度投影法

➢投影

$$A = (a_1, a_2)$$ 向A列向量投影的投影矩阵

$$P = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$$

$$e = b - A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b = (I - A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}})b$$

$$M = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}} \qquad M^{\mathrm{T}} = A = (a_1, a_2)$$

$$P = M^{\mathrm{T}}(MM^{\mathrm{T}})^{-1}M$$ 向M行向量投影的投影矩阵

$$e = b - A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}b = (I - M^{\mathrm{T}}(MM^{\mathrm{T}})^{-1}M)b$$

■ Rosen梯度投影法

➢投影矩阵

设 M 是 $m \times n$ 矩阵，秩为 m，y 为任意 n 维向量，令

$$P = M^{T}(MM^{T})^{-1}M,$$

$$Q = I - M^{T}(MM^{T})^{-1}M$$

Py 就是向量 y 在 M 的行向量所生成的子空间上的投影

Qy 则是向量 y 在 M 的零空间上的投影

矩阵 P 和 Q 有两个特性：

(1) 它们都是对称矩阵(这是显然的).

(2) 它们都是幂等矩阵，即

$$P^2 = P, \quad Q^2 = Q$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的基本思想

◆ **从可行点出发，沿可行方向进行搜索**

➢ 当迭代出发点在**可行域内部**时，沿**负梯度方向**搜索。

➢ 当迭代出发点在某些**约束的边界**上时，将该点处的**负梯度投影到M的零空间**，M是以起作用约束或部分起作用约束的梯度为行构造成的矩阵。这样的投影是下降可行方向，再沿此投影方向搜索。

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的下降可行方向

起作用约束构成的矩阵M

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad &\mathbf{A}\mathbf{x} \ge \mathbf{b} \\ &\mathbf{E}\mathbf{x} = \mathbf{e} \end{aligned}$$

矩阵M不满秩

改成满秩

设 $\hat{\mathbf{x}}$ 是上述问题的可行解，在点 $\hat{\mathbf{x}}$ 处有 $\mathbf{A}_1\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}_1, \mathbf{A}_2\hat{\mathbf{x}} > \mathbf{b}_2$

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix}$，设 $\boxed{\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{E} \end{bmatrix}}$ 为满秩矩阵

$$\boxed{\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M}} \qquad \mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x}) \ne 0$$

选择 $\boxed{\mathbf{d} = -\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{x})}$，则d是下降可行方向。

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的下降可行方向

证明

• $\nabla f(x)^T d = -\nabla f(x)^T P \nabla f(x)$

$= -\|P \nabla f(x)\|^2 < 0 \qquad P \nabla f(x) \neq 0$

即d为下降方向

•根据假设，又有

$$M = \begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$$

$Md = -MP \nabla f(x)$

$= -M(I - M^T(MM^T)^{-1}M) \nabla f(x)$

$= (-M + M) \nabla f(x)$

$= 0$

即$A_1 d = 0$，$Ed = 0$：d是在x处的可行方向

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的下降可行方向

◆定理12．2．2 设x是问题(12．2．3)的一个可行解，在点x处，有$A_1x=b_1, A_2x>b_2$，其中

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\min f(\mathbf{x}) \\ s.t.\quad &\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b} \\ &\mathbf{Ex} = \mathbf{e} \end{aligned}$$

又设 $M=\begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$ 为满秩矩阵，

$P=I-M^T(MM^T)^{-1}M$ **投影矩阵**

$$W=(MM^T)^{-1}M\nabla f(x)=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$ **判别矩阵**

其中u和v分别对应于A_1和E

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的下降可行方向

设$P\nabla f(x)=0$，则

1．如果$u\geq 0$，那么x为K—T点；

2．如果u中含有负分量，不妨设$u_j<0$，

这时从A_1中去掉u_j对应的行，得到$\hat{A}_1$，令

$$\hat{M}=\begin{bmatrix}\hat{A}_1\\E\end{bmatrix}$$

$$\hat{P}=I-\hat{M}^T(\hat{M}\hat{M}^T)^{-1}\hat{M}$$

$$d=-\hat{P}\nabla f(x)$$

那么d为下降可行方向

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的步骤

1. 给定初始可行点$x^{(1)}$，置$k=1$。

2. 在点$x^{(k)}$处，将A和b分解成

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

使得$A_1x=b_1, A_2x>b_2$

3. 令

$$M=\begin{bmatrix} A_1 \\ E \end{bmatrix}$$

该点无起作用约束，沿负梯度方向搜索

如M是空的，则令 $P=I$ (单位矩阵);

否则，令 $P=I-M^T(MM^T)^{-1}M$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的步骤

4．令$d^{(k)}=-P\nabla f(x^{(k)})$.若$d^{(k)}\neq 0$，则转步6；若$d^{(k)}=0$，则进行步5

5．若M是空的，则停止计算，得到$x^{(k)}$；否则，令

$P=I,\nabla f(x^{(k)})=0$

$$W=(MM^T)^{-1}M\nabla f(x^{(k)})=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

如$u\geq 0$，则停止计算，$x^{(k)}$为K—T点；如u包含负分量，则选择一个负分量，比如u_j修正A_1，去掉A_1中对应u_j的行，返回步3

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的步骤

6．解下列问题，求步长λ_k

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x^{(k)}+\lambda d^{(k)}) \\ \text{s.t} \quad & 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{max} \end{aligned}$$

其中λ_{max}由(12.1.24)确定。得解λ_k,令

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda_k d^{(k)}$$

置k:＝k＋1，返回步2

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \triangleq 2x_1^2+2x_2^2-2x_1x_2-4x_1-6x_2 \\
\text{s.t} \quad & -x_1-x_2 \geqslant -2 \\
& -x_1-5x_2 \geqslant -5 \\
& x_1 \geqslant 0 \\
& x_2 \geqslant 0
\end{aligned}
$$

取初始可行点$x^{(1)}=(0,\ 0)^T$。x处的梯度

$$
\nabla f(x)=\begin{bmatrix} 4x_1-2x_2-4 \\ 4x_2-2x_1-6 \end{bmatrix}
$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

第1次迭代

在点$x^{(1)}$的梯度为 $\nabla f(x^{(1)})=\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix}$

在$x^{(1)}$处起作用约束指标集$I=\{3,\ 4\}$，

将A,b分解为

$$A_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&-5\end{bmatrix}$$

$$b_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad b_2=\begin{bmatrix}-2\\-5\end{bmatrix}$$

投影矩阵

$$P=I-A_1^T(A_1A_1^T)^{-1}A_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

令 $d^{(1)}=-P\nabla f(x^{(1)})=(0,\ 0)^T$

$$W=(A_1A_1^T)^{-1}A_1\nabla f(x^{(1)})$$

$$=\begin{bmatrix}-4\\-6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}$$

修正A_1,去掉A_1中对应u_2=—6的行，即第2行，得到 $\hat{A}_1=(1,\ 0)$

再求投影矩阵

$$\hat{P}=I-\hat{A}_1^T(\hat{A}_1\hat{A}_1^T)^{-1}\hat{A}_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

令 $\hat{d}^{(1)} = -\hat{P}\nabla f(x^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$

求步长 λ_1 $\quad \min \ f(x^{(1)} + \lambda \hat{d}^{(1)})$

$$\text{s.t} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}$$

因 $\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \end{bmatrix}$ $\quad \hat{d} = A_2 \hat{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} -6 \\ -30 \end{bmatrix}$

$\lambda_{\max}$=min{-2/-6,-5/-30}=1/6

$$\rightarrow \begin{array}{l} \min \quad 72\lambda^2 - 36\lambda \\ \text{s.t} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{6} \end{array} \rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{6}$$

$$\rightarrow x^{(2)} = x^{(1)} + \lambda_1 \hat{d}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

第2次迭代

在$x^{(2)}$处起作用约束指标集I＝{2，3}，将A,b分解为

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$b_1=\begin{bmatrix}-5\\ 0\end{bmatrix} \quad b_2=\begin{bmatrix}-2\\ 0\end{bmatrix}$$

投影矩阵

$$P=I-A_1^T(A_1A_1^T)^{-1}A_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

令 $d^{(1)} = -P\nabla f(x^{(1)}) = (0, 0)^T$

$$W = (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(x^{(2)})$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{28}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

A_1去掉中对应u_2的行，即第2行，得到

$$\hat{A}_1 = (-1, -5)$$

$$\hat{P} = I - \hat{A}_1^T (\hat{A}_1 \hat{A}_1^T)^{-1} \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \frac{25}{26} & -\frac{5}{26} \\ -\frac{5}{26} & \frac{1}{26} \end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

$$\hat{d}^{(2)} = -\hat{P}\nabla f(x^{(2)}) = \frac{14}{13}\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow d^{(2)} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

去掉系数

$$\hat{b} = b_2 - A_2 x^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{d} = A_2 d^{(2)} = \begin{bmatrix} -4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_{\max} = \min\left\{\frac{-1}{-4}, \frac{-1}{-1}\right\} = \frac{1}{4}$$

$$x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\lambda \\ 1-\lambda \end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

$$\min \quad 62\lambda^2 - 28\lambda - 4$$

$$\text{s.t} \quad 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{7}{31}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \lambda d^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{35}{31} \\ \frac{24}{31} \end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

第3次迭代

在$x^{(3)}$处起作用约束指标集$I=\{3\}$，将A,b分解为

$$A_1=(-1,\ -5),\ A_2=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$b_1=(-5),\ b_2=\begin{bmatrix}-2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

投影矩阵

$$P=I-A_1^T(A_1A_1^T)^{-1}A_1=\frac{1}{26}\begin{bmatrix}25 & -5\\ -5 & 1\end{bmatrix}$$

■ Rosen梯度投影法

➢梯度投影法的例子

$$d^{(3)} = -P\nabla f(x^{(3)}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W = (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(x^{(3)}) = \frac{32}{31} > 0$$

$\therefore x^{(3)}$为K-T点

为凸规划，为整体最优点

■ 作业

P392、 P393：

2、4(2)、6(2)