Optimal Theory and Method

最优化理论与方法

程春杰

杭州电子科技大学 自动化学院

科技馆512

Email: cjzhai@hdu.edu.cn

目录

- 单纯形方法原理（考）
- 两段法与大M法（考）

目录

■ 两段法与大M法

➢什么时候使用两段法和大**M**法

➢什么是人工变量

➢什么是两段法

➢什么是大**M**法

■ 两段法与大M法

➢什么时候使用两段法与大M法

使用单纯形方法，需要给定一个初始基本可行解，以便从这个基本可行解出发，求改进的基本可行解

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

若 A 中含有m阶单位矩阵，则初始基本可行解立即得到，比如 $A = [I_m, N]$

那么 $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$ **就是一个基本可行解**

■ 两段法与大M法

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

➢什么时候使用两段法与大M法

若A中不包含m阶单位矩阵，就需要用某种方法求出一个基本可行解

两段法：第一阶段

大M法

$$\min \quad cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

■ 两段法与大M法

➢人工变量

介绍两阶段法之前，先引入人工变量的概念

设A中不包含m阶单位矩阵，为使约束方程的系数矩阵中含有m阶单位矩阵，把每个方程增加一个非负变量，令

$$Ax + x_a = b,$$
$$x \geq 0, \quad x_a \geq 0,$$

$$(A, I_m)\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = b,$$
$$x \geq 0, \quad x_a \geq 0.$$

显然， $\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ **是上式的一个基本可行解.**

■ 两段法与大M法

➢人工变量

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

$$Ax = b,\qquad Ax + x_a = b,$$

$$x \geq 0,\qquad x \geq 0,\quad x_a \geq 0,$$

若从右式已知的基本可行解出发，能够求出一个使 $x_a = 0$ 的基本可行解，那么就可得到原式的一个基本可行解

松弛变量是“合法”的变量.而人工变量的引入，改变了原来的约束条件，是“不合法”的变量

■ 两段法与大M法

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

➢两段法

两阶段法的第一阶段是用单纯形方法消去人工变量（如果可能的话），即把人工变量都变换成非基变量，求出原来问题的一个基本可行解

消去人工变量的一种方法是解下列第一阶段问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & e^{T} x_a \\ \text{s.t.} \quad & Ax + x_a = b, \\ & x \geq 0, \quad x_a \geq 0 . \end{aligned}$$

$e = (1, 1, \cdots, 1)^T$ 是分量全是 1 的 m 维列向量，

$x_a = (x_{n+1}, \cdots, x_{n+m})^T$ 是人工变量构成的 m 维列向量.

由于$x=0, x_a=b$是第一阶段问题的基本可行解，目标函数值有下界，原规划问题必存在最优基本可行解

■ 两段法与大M法

➢两段法

$$\begin{aligned}\min\quad & e^{T}x_a\\ \text{s.t.}\quad & Ax+x_a=b,\\ & x\geq 0,\quad x_a\geq 0\ .\end{aligned}$$

采用单纯形法求得第一阶段问题的最优基本可行解为 $(\bar{x}^{T},\bar{x}_a^{T})^{T}$，则存在以下三种情况：

(1) $\bar{x}_a\neq 0$,这时原线性规划无可行解

若原线性规划存在可行解$\hat{x}$，则$(x,x_a)^T=(\hat{x},0)^T$为第一阶段问题的可行解，在此点该问题的目标函数值

$$f=0\cdot\hat{x}+e^{T}\cdot 0=0<e^{T}\bar{x}_a\ ,$$

而 $e^{T}\bar{x}_a$ 是目标函数的最优值，矛盾．

$$\begin{aligned} \min \quad & e^T x_a \\ \text{s.t.} \quad & Ax + x_a = b, \\ & x \geq 0, \quad x_a \geq 0. \end{aligned}$$

■ 两段法与大M法

➢两段法

(2) $\bar{x}_a = 0$且x_a的分量都是非基变量.

这时m个基变量都是原来的变量,又知

$$\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

为第一阶段问题的基本可行解，因此$x=\bar{x}$ 是原线性规划问题的一个基本可行解。

(3) $\bar{x}_a = 0$且x_a的某些分量是基变量.

这时，可用主元消去法，把原来变量中的某些非基变量引进基，替换出基变量中的人工变量，再开始两阶段法的第二阶段。

■ 两段法与大M法

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

➢两段法

两阶段法的第二阶段：从得到的基本可行解出发，用单纯形方法求原线性规划的最优解。

例子1：用两阶段法求下列问题的最优解

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geq 2, \\ & x_1 - x_2 \geq 1, \\ & x_1 \leq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

解：

先引进松弛变量 x_4，x_5，x_6，把问题化成标准形式

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

■ 两段法与大M法

➢两段法

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ & x_1 - x_2 - x_4 = 1, \\ & x_1 + x_5 = 3, \end{aligned}$$

由于此标准形式中约束方程的系数矩阵并不包含 3 阶单位矩阵，因此还要引进人工变量 x_6，x_7.

$$\begin{aligned} \min \quad & x_6 + x_7 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 + x_6 = 2, \\ & x_1 - x_2 - x_4 + x_7 = 1, \\ & x_1 + x_5 = 3, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \cdots, 7. \end{aligned}$$

■ 两段法与大M法

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{cx} \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},
\end{aligned}
$$

➤两段法

仍然用主元消去法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	1	1	−1	0	0	1	0	2
x_7	$\boxed{1}$	−1	0	−1	0	0	1	1
x_5	1	0	0	0	1	0	0	3
	2	0	−1	−1	0	0	0	3

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_6	0	$\boxed{2}$	−1	1	0	1	−1	1
x_1	1	−1	0	−1	0	0	1	1
x_5	0	1	0	1	1	0	−1	2
	0	2	−1	1	0	0	−2	1

■ 两段法与大M法

➢两段法

$$\min \quad cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	0	0	0	-1	-1	0

判别数≤0 → 最优解→人工变量x6，x7都是非基变量

初始基本可行解：

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{3}{2}\right)$$

第一阶段结束后，修改最后的单纯形表

去掉人工变量 x_6 和 x_7 下面的列

把最后的判别数行按原来问题进行修正

■ 两段法与大M法

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\
& x_1 - x_2 - x_4 = 1, \\
& x_1 + x_5 = 3,
\end{aligned}
$$

➢两段法

第二阶段迭代

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{1}{2}}$	0	$\frac{1}{2}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$
	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	$\frac{5}{2}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad c_B = [-1, 2, 0] \quad p_3 = [-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^T$$

■ 两段法与大M法

$$\min \quad cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

➢两段法

第二阶段迭代

x_4	0	1	0	1	1	2
x_1	1	0	0	0	1	3
x_3	0	−1	1	0	1	1
	0	1	0	0	2	6

最优解$(x_1,x_2)=(3, 0)$

目标函数最优值 $f_{max}=6$

$$\min \quad \boldsymbol{cx}$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$

■ 两段法与大M法

➢两段法

例子2：用两阶段法求下列问题的最优解

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 2, \\
& -4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\
& x_1 - x_3 = 0, \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

解：引进松弛变量 x_4 ,把上述问题化成标准形式

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\
& -4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\
& x_1 - x_3 = 0,
\end{aligned}$$

■ 两段法与大M法

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

➢两段法

再引进人工变量 x_5，x_6，得到下列一阶段问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & x_5 + x_6 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ & -4x_1 + 4x_2 - x_3 + x_5 = 4, \\ & x_1 - x_3 + x_6 = 0, \\ & x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 6. \end{aligned}$$

先用单纯形法解一阶段问题，迭代如下：

■ 两段法与大M法

$$\min \quad cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

➢两段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	-1	$\boxed{2}$	1	1	0	0	2
x_5	-4	4	-1	0	1	0	4
x_6	1	0	-1	0	0	1	0
	-3	4	-2	0	0	0	4

x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	1
x_5	-2	0	-3	-2	1	0	0
x_6	$\boxed{1}$	0	-1	0	0	1	0
	-1	0	-4	-2	0	0	0

人工变量x_5, x_6,以零值出现在基变量中

■ 两段法与大M法

➢两段法

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

在开始第二阶段的迭代以前，可用原来变量（即非人工变量）把人工变量从基中驱赶出去

在进行这样步骤时，判别数行可以略去

$$\begin{array}{c|cccccc|c} x_2 & -\frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & -2 & 0 & -3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ x_6 & \boxed{1} & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & -1 & 0 & -4 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

主元可以先为 $y_{31}=1$ 或 $y_{33}=-1$

由于当人工变量以零值出现在基中时，相应行的右端为零，因此主元取负值时也不会破坏可行性

■ 两段法与大M法

$$\min \quad cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

➢两段法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
x_5	0	0	$\boxed{-5}$	-2	1	2	0
x_1	1	0	-1	0	0	1	0

再以 $y_{23}=-5$ 为主元，进行主元消去，得到

把判别数行增加进去

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
x_3	0	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	0

基变量均为原来的变量，得原问题的一个基本可行解
(x1，x2，x3，x4)=(0，1，0，0)

■ 两段法与大M法

$$\begin{aligned}\min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 2, \\ & -4x_1 + 4x_2 - x_3 = 4, \\ & x_1 - x_3 = 0, \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.\end{aligned}$$

➢两段法

第二阶段的初表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	1
x_3	0	0	1	$\frac{2}{5}$	0
x_1	1	0	0	$\frac{2}{5}$	0
	0	0	0	$-\frac{1}{10}$	-1

最优解是: (x1,x2,x3)=(0, 1, 0)

目标函数的最优值 $f_{\min} = -1$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad c_B = [-1, 0, 1] \quad p_4 = [\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}]^T$$

■ 两段法与大M法

$$\begin{aligned} \min\quad & cx \\ \text{s.t.}\quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

➢两段法

例子3：用两阶段法求下列问题的最优解

$$\begin{aligned} \max\quad & 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ & x_1 + x_4 = 2, \\ & 3x_1 + 2x_3 = 10, \\ & x_j \geq 0,\quad j = 1,\cdots,4\ . \end{aligned}$$

解： 引进人工变量 x_5 ,x_6 ,x_7 .解一阶段问题：

■ 两段法与大M法

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

➢两段法

$$\begin{aligned} \min \quad & x_5 + x_6 + x_7 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 + x_5 = 4, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 6, \\ & x_1 + x_4 = 2, \\ & 3x_1 + 2x_3 + x_7 = 10, \\ & x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 7 . \end{aligned}$$

得第一阶段最优表：

■ 两段法与大M法

➢两段法

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

x_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	2
x_1	1	0	0	1	0	0	0	2
x_7	0	0	0	0	-1	-1	1	0
	0	0	0	0	-2	-2	0	0

(1)人工变量均为零值

(2)基变量原来的系数均为0，不能进行基转换

(3)第4行约束无效，可直接略去

得到初始基本可行解 $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2, 2, 2, 0).$

$$\begin{aligned}\max\quad & 3x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ & x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ & x_1 + x_4 = 2, \\ & 3x_1 + 2x_3 = 10, \\ & x_j \geqslant 0,\quad j = 1,\cdots,4 .\end{aligned}$$

■ 两段法与大M法

➢两段法

去掉人工变量下面的列，得到第二阶段的初始单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	0	0	1	$-\frac{3}{2}$	2
x_2	0	1	0	$\frac{1}{2}$	2
x_1	1	0	0	1	2
	0	0	0	$\frac{13}{2}$	4

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad c_B = [-2, 1, 3] \quad p_4 = [-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1]$^$T$

■ 两段法与大M法

➢大M法

初始基本可行解未知的情况下，也可以采用另外一种求解方法———— 大 M 法

基本思想：在约束中增加人工变量 x_a，同时修改目标函数，加上罚项 $\mathrm{M}e^T x_a$，其中M 是很大的正数，这样，在极小化目标函数的过程中，由于大 M 的存在，将迫使人工变量离基.

$$\begin{array}{lll} \min & \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \min & \boldsymbol{cx} + M\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_a \\ \text{s.t.} & \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_a \geqslant \boldsymbol{0}, \end{array}$$

$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$，$M > 0$ 很大，

$\boldsymbol{e} = (1, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维列向量，分量全为 1.

■ 两段法与大M法

➢大M法

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + Me^{\mathrm{T}} x_a \\ \text{s.t.} \quad & Ax + x_a = b, \\ & x \geqslant 0, \quad x_a \geqslant 0, \end{aligned}$$

显然，右边的线性规划可行

$x=0, x_a=b$ 就是一个可行解.

用单纯形方法求解右边的线性规划，结果必为以下情形：

(1) 达到右边线性规划的最优解，且 $x_a = 0$. 此时，得到的x即为原规划问题的最优解.

■ 两段法与大M法

➢大M法

(2) 达到右边线性规划的最优解，且 $e^T x_a > 0$．此时，原规划问题无可行解．

因为如果原线性规划有可行解，比如说$\hat{x}$，则$x = \hat{x}$, $x_a = 0$是右边线性规划的可行解.

右边线性规划在这一点的目标函数值

$$Z = c\hat{x} + Me^{\mathrm{T}}\mathbf{0} = c\hat{x}.$$

设右边线性规划的最优解是 $\begin{bmatrix} \bar{x} \\ x_a \end{bmatrix}$,

最优值 $\bar{Z} = c\bar{x} + Me^{\mathrm{T}} x_a$.

矛盾

由于 M 是很大的正数，$e^{\mathrm{T}} x_a > 0$，因此 $Me^{\mathrm{T}} x_a$ 可以很大

■ 两段法与大M法

➢大M法

(3) 右边线性规划不存在有限最优值，在单纯形表中

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0,$$

$$\boldsymbol{y}_k \leqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_a = \boldsymbol{0},$$

此时，原线性规划无界

(4) 右边线性规划不存在有限最优值，在单纯形表中

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\} > 0, \quad \boldsymbol{y}_k \leqslant \boldsymbol{0},$$

有些人工变量不等于零，即 $\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_a > 0$.

此时，原线性规划无可行解

■ 两段法与大M法

➢大M法

	x_1	$\cdots$	x_p	x_{p+1}	$\cdots$	x_m	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_j	$\cdots$	
x_1	1	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	$\bar{b}_1$
$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_p	0	$\cdots$	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{pk}	$\cdots$	$y_{p,j}$	$\cdots$	$\bar{b}_p$
x_{p+1}	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	$y_{p+1,k}$	$\cdots$	$y_{p+1,j}$	$\cdots$	$\bar{b}_{p+1}$
$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$
x_m	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	y_{mj}	$\cdots$	$\bar{b}_m$
	0	$\cdots$	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$c_B\bar{b}$

表中 $x_1, \cdots, x_p$ 是原来问题的变量，$x_{p+1}, \cdots, x_m$ 是人工变量，根据人工变量不全为零的假设，必有 $\sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i > 0$.

易证 $\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \leqslant 0, \quad j = m+1, \cdots, n.$

现将最后 $m-p$ 个方程(它们都以表中数据为系数)相加，得到

$$\sum_{j=p+1}^{m} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} \left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \right) x_j = \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i$$

■ 两段法与大M法

$$\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \leqslant 0, \qquad j = m+1, \cdots, n.$$

➢大M法

若原来问题有可行解 $\hat{x} \geqslant 0$，则

$$\begin{bmatrix} x \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

是线性规划(3.2.7)的可行解

$$\sum_{j=p+1}^{m} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} \left(\sum_{i=p+1}^{m} y_{ij} \right) x_j = \sum_{i=p+1}^{m} \bar{b}_i$$

小于或等于0 **大于0**

因此原线性规划无可行解

■ 两段法与大M法

➢大M法

例子 用大 M 法求解下列问题：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \leqslant 11, \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 \geqslant 3, \\
& x_1 - 2x_3 = 1, \\
& x_1, x_2, x_3 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

解： 引进松弛变量 x_4, x_5 和人工变量 x_6, x_7，

用单纯形方法解下列问题：

■ 两段法与大M法

➢大M法

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 + x_2 - 3x_3 + M(x_6 + x_7) \\
\text{s.t.} \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\
& 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_5 + x_6 = 3, \\
& x_1 - 2x_3 + x_7 = 1, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 7.
\end{aligned}
$$

选择最大判别数时要注意 M 是很大的正数，它的数值可超过每个已知的正数

■ 两段法与大M法

➢大M法

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_4	1	-2	1	1	0	0	0	11
x_6	2	1	-4	0	-1	1	0	3
x_7	$\boxed{1}$	0	-2	0	0	0	1	1
	$3M-1$	$M-1$	$-6M+3$	0	$-M$	0	0	$4M$

x_4	0	-2	3	1	0	0	-1	10
x_6	0	$\boxed{1}$	0	0	-1	1	-2	1
x_1	1	0	-2	0	0	0	1	1
	0	$M-1$	1	0	$-M$	0	$1-3M$	$1+M$

■ 两段法与大M法

➢大M法

x_4	0	0	$\boxed{3}$	1	-2	2	-5	12
x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
x_1	1	0	-2	0	0	0	1	1
	0	0	1	0	-1	$1-M$	$-1-M$	2

x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$	4
x_2	0	1	0	0	-1	1	-2	1
x_1	1	0	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$	9
	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}-M$	$\frac{2}{3}-M$	-2

由于 M 是很大的正数，因此所有的判别数 $z_j-c_j\leqslant 0$，达到最优解．人工变量 $x_6=0$，$x_7=0$．原来问题的最优解$(x_1,x_2,x_3)=(9,1,4)$，

■ 作业

P119：

1(3)、2(8)