Optimal Theory and Method

最优化理论与方法

翟春杰

杭州电子科技大学 自动化学院

科技馆512

Email: cjzhai@hdu.edu.cn

目录

- 线性规划的标准形式
- 线性规划的图解法（考）
- 线性规划的基本性质（考）

目录

- 线性规划的标准形式
- 线性规划的图解法（考）
- 线性规划的基本性质（考）

■ 线性规划的标准形式

- 什么是线性规划问题的标准形式
- 如何把线性规划问题的非标准形式转化为标准形式
- 什么是松弛变量

■ 线性规划的标准形式

➢线性规划问题的标准形式

标准形式写法一

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t. \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \cdots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, \cdots, n$$

标准形式写法二

$$\min \mathbf{cx}$$

$$\mathbf{s.t} \quad \mathbf{Ax = b}$$

$$\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0}$$

矩阵	**A: m×n**
列向量	**x: n ×1**
	b: m ×1
行向量	**c: 1 ×n**

①目标最小化；②等式约束；③变量下限为0；④b非负——标准形式四要素

■ 线性规划的标准形式

➢非标准形式转化为标准形式

什么是非标准形式?

至少标准形式四要素有一个不满足——非标准形式

① **违反目标最小化要素**

max z：令 z ' = - z ,则 min z ' = - c x

② **违反b非负要素**

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \le 0$: 令左、右两端乘以-1，$b_i' = -b_i$，

$a_{ij}' = -a_{ij}$，则 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}'x_j = b_i'$

线性规划的标准形式

非标准形式转化为标准形式

③违反变量下限为0要素

如x_j无非负限制时，

可令$x_j = x_j' - x_j''$, $x_j' \geqslant 0$, $x_j'' \geqslant 0$

如x_j**有上下界时**，

如$x_j \geqslant l$时，　可令$x_j' = x_j - l$, 则 $x_j' \geqslant 0$

如 $x_j \leqslant u$时，可令$x_j' = u - x_j$, 则 $x_j' \geqslant 0$

■ 线性规划的标准形式

➢非标准形式转化为标准形式

④违反等式约束要素

若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$，引入**松弛变量**$x_{n+1} \ge 0$

目标函数不变，则$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+1} = b_i$

若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$，引入**松弛变量**$x_{n+1} \ge 0$

目标函数不变，则$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{n+1} = b_i$

线性规划的标准形式

➢松弛变量

$$
\begin{aligned}
\min\quad & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1,\\
& a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2,\\
& \cdots\\
& a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m,\\
& x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

①松弛变量的非负性

$x_{n+1},x_{n+2},\cdots,x_{n+m}\geq 0$ 为松弛变量

$$
\begin{aligned}
\min\quad & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
\text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1,\\
& a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2,\\
& \cdots\\
& a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m,\\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,\cdots,n+m.
\end{aligned}
$$

②松弛变量不体现在目标函数中，不影响目标函数数值

③松弛变量只体现在约束中，把不等式约束转化为等式约束

目录

- 线性规划的标准形式
- 线性规划的图解法（考）
- 线性规划的基本性质（考）

■ 线性规划的图解法

- 图解法的适用范围
- 图解法的步骤
- 图解法求得的最优解

■ 线性规划的图解法

➢适用范围

图解法适用于变量个数较少的线性规划问题

➢图解法的步骤

①由约束条件绘出约束对应的可行域

②画出目标函数的等值线

③判断等值线的移动方向，并平移到临界点（边）

④确定问题的解是单个点还是无穷多点，求最优值

线性规划的图解法

图解法的步骤

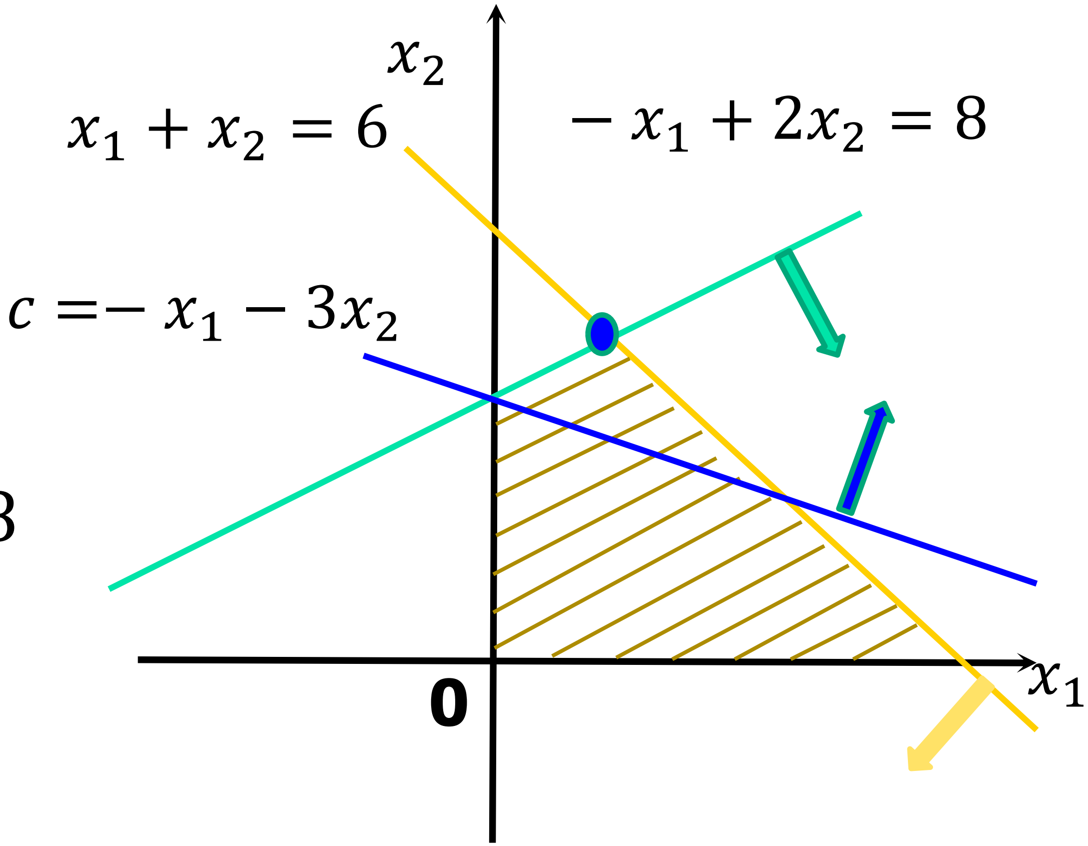
例1：

$$\min_{x_1,x_2} c = -x_1 - 3x_2$$

$$s.t.\quad x_1 + x_2 \le 6$$

$$-x_1 + 2x_2 \le 8$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

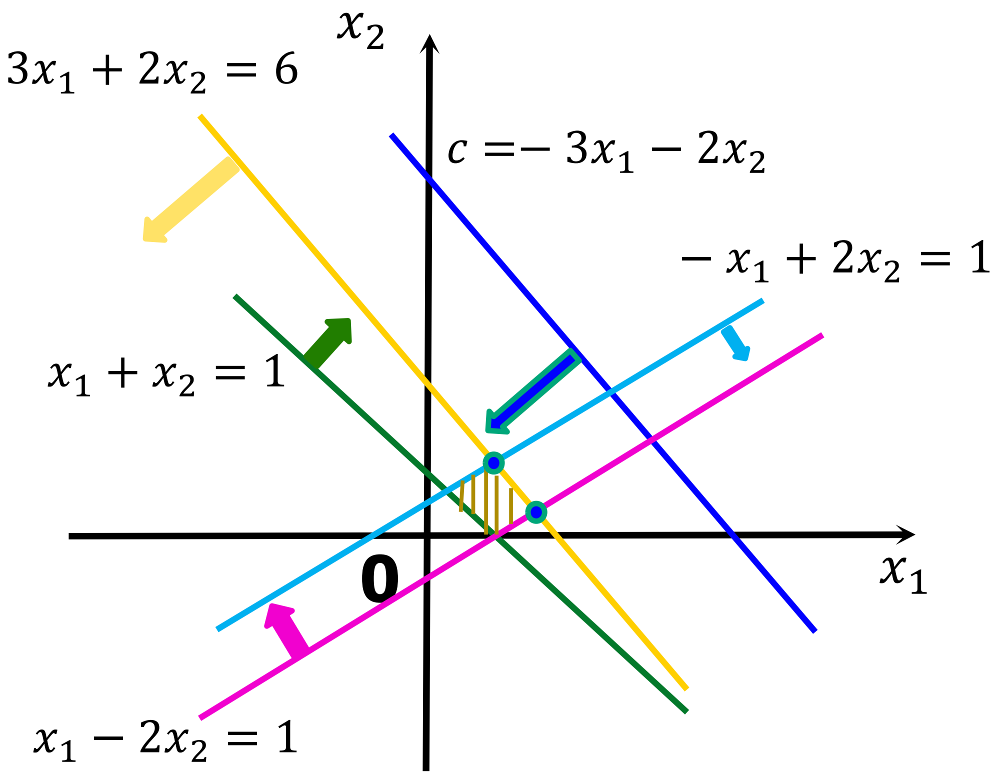


■ 线性规划的图解法

➢图解法的步骤

练习题1：

$$\min \quad -3x_1-2x_2$$
$$\begin{aligned} s.t.\quad & 3x_1+2x_2\leqslant 6,\\ & x_1-2x_2\leqslant 1,\\ & x_1+x_2\geqslant 1,\\ & -x_1+2x_2\leqslant 1,\\ & x_1,x_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

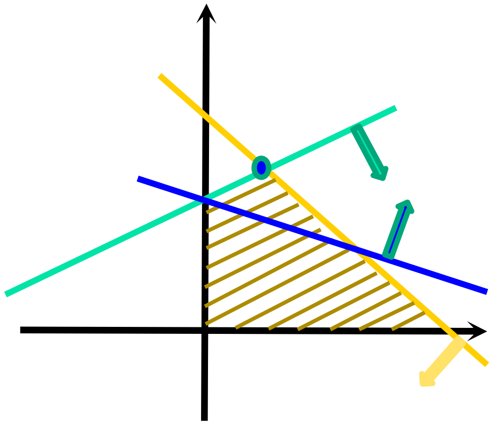


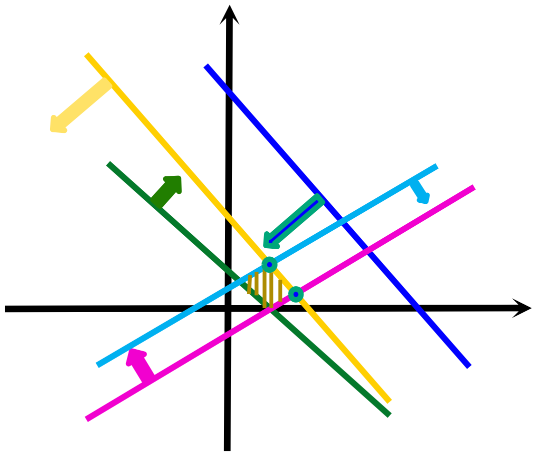
■ 线性规划的图解法

➢适用范围

图解法适用于变量个数较少的线性规划问题

➢图解法求得的最优解





①有一个最优解，对应一个最优值

②有无穷多的最优解，对应一个最优值

目录

- 线性规划的标准形式
- 线性规划的图解法（考）
- 线性规划的基本性质（考）

■ 线性规划的基本性质

➢线性规划的可行域特点

➢线性规划的最优极点

➢线性规划的最优基本可行解

➢线性规划中可行域的极点与基本可行解的关系

■ 线性规划的基本性质

➢可行域特点

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &\text{s.t}\quad Ax=b \\ &\qquad\ \ x\geqslant 0 \end{aligned}$$

线性规划约束条件均为线性等式及不等式

证明：线性规划的可行域是凸集

证明：线性规划的可行域可表示为

$$S=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$$

任选$x^{(1)}$、$x^{(2)}\in S$**和**$\lambda\in[0,1]$,**则**$x^{(1)}$、$x^{(2)}$**两点线段的任意一点可记为**$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}$.

① $A\left(\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\right)=\lambda Ax^{(1)}+(1-\lambda)Ax^{(2)}=b$.

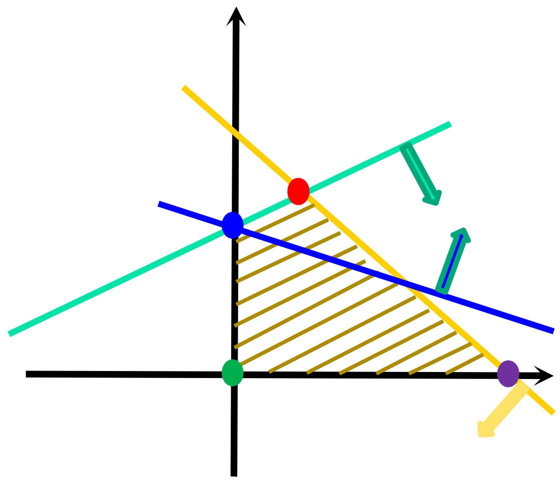
② **因为**$\lambda x^{(1)}\geq 0,(1-\lambda)x^{(2)}\geq 0$，**故** $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\geq 0$

综上， $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$，**由凸集定义知，线性规划的可行域为凸集。**

■ 线性规划的基本性质

➢最优极点

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &s.t \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$



线性规划如果存在最优解，那么线性规划的最优值一定能够在某极点上达到----线性规划的一般规律

■ 线性规划的基本性质

$$\min \ cx \quad \text{s.t} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

➢最优极点

有限最优值和有限最优解----线性规划

例1：

$$\min_{x_1,x_2} f = -x_1 - 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (+\infty, +\infty)$$

$$f^* = -x_1^* - 3x_2^* = -\infty$$

例2：

$$\min_{x_1,x_2} f = x_1 + 3x_2$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x^* = (x_1^*, x_2^*) = (6, 0)$$

$$f^* = x_1^* + 3x_2^* = 6$$

两类线性规划问题：

①最优值f^*不是有限值，最优解x^*也不是有限解

②最优值f^*是有限值，最优解x^*也是有限解

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &s.t \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢最优极点

定理:

①线性规划存在有限最优解的充要条件是所有$cd^{(j)}$为非负数。其中$d^{(j)}$为线性规划可行域的极方向。

②若线性规划存在有限最优解，则目标函数的最优值可在某个极点上达到。

接下来，咱们要给出这个定理的证明过程。

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &s.t\quad Ax=b \\ &\qquad\quad x\geqslant 0 \end{aligned}$$

➢最优极点

证明思路：

①∵定理提到了极点和极方向，∴对线性规划的标准形式进行转化，以包括线性规划可行域的极点和极方向。

② ∵线性规划中min cx的cd_j决定规划问题是否存在有限最优解，∴要对包括极点和极方向的线性规划问题进行关于cd_j的分类讨论。

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &s.t\quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢最优极点

证明过程：

设可行域的极点为 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(k)}$

极方向为 $\boldsymbol{d}^{(1)},\boldsymbol{d}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{d}^{(l)}$

根据表示定理（P12），任何可行点x可表示为：

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{x}^{(j)} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \boldsymbol{d}^{(j)},$$

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geqslant 0,\quad j = 1,\cdots,k,$$

$$\mu_j \geqslant 0,\quad j = 1,\cdots,l.$$

$$\begin{aligned} \min\ & \mathbf{cx} \\ \text{s.t}\ & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

■ 线性规划的基本性质

➢最优极点

证明过程：

得到以λ_j, μ_j为变量的等价的线性规划如下：

$$\begin{aligned} \min\quad & \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^{(j)})\mu_j \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, k, \\ & \mu_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, l. \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{x}^{(j)} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \boldsymbol{d}^{(j)}$$

该等价线性规划包括极点和极方向

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min\ \mathbf{cx} \\ &\text{s.t}\quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\qquad\ \ \mathbf{x} \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢最优极点

证明过程：

当$\mu_j \geq 0$，可以任意大，若$cd^{(j)} < 0$，则等价线性规划问题不存在有限最优解和有限最优值—无研究必要

$$\begin{aligned} \min\quad & \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{cx}^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (\boldsymbol{cd}^{(j)})\mu_j \\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, k, \\ & \mu_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, l. \end{aligned}$$

当对于所有j，有$cd^{(j)} \geq 0$，则等价线性规划问题为极小化目标函数问题—研究的核心

■ 线性规划的基本性质

$$\min \ cx \quad \text{s.t} \quad Ax = b, \quad x \geqslant 0$$

➢最优极点

证明过程：

当对于所有j，有$cd^{(j)} \geq 0$，则$(cd^{(j)})\mu_j \geq 0$，考虑到其为极小化规划问题，取$\mu_j = 0, j = 1, 2, \cdots, l$，$(cd^{(j)})\mu_j = 0$

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{k}(cx^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l}(cd^{(j)})\mu_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, k, \\ & \mu_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, l. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{k}(cx^{(j)})\lambda_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, k, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\min \ \mathbf{cx} \\ &\text{s.t} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ &\qquad\quad \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

■ 线性规划的基本性质

➢最优极点

证明过程：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{cx}^{(j)})\lambda_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, k, \end{aligned}$$

在上述问题中，令

$$\boldsymbol{cx}^{(p)} = \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \boldsymbol{cx}^{(j)}.$$

显然，当 $\lambda_p = 1$ 及 $\lambda_j = 0, \quad j \neq p$

目标函数取极小值

■ 线性规划的基本性质

$$\min cx$$
$$\text{s.t} \quad Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$

➢最优极点

证明过程：

$$cx = \sum_{j=1}^{k}(cx^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l}(cd^{(j)})\mu_j \geqslant \sum_{j=1}^{k}(cx^{(j)})\lambda_j$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{k}(cx^{(p)})\lambda_j = cx^{(p)},$$

极点$x^{(p)}$是最优解

定理 2.2.2 设线性规划(2.1.2)的可行域非空，则有下列结论：

(1) 线性规划(2.1.2)存在有限最优解的充要条件是所有 $cd^{(j)}$ 为非负数．其中 $d^{(j)}$ 是可行域的极方向．

(2) 若线性规划(2.1.2)存在有限最优解，则目标函数的最优值可在某个极点上达到．

■ 线性规划的基本性质

- 什么是基本可行解
- 线性规划中基本可行解与极点之间的关系
- 基本可行解的存在条件

■ 线性规划的基本性质

$$\min\ cx$$
$$\text{s.t}\quad Ax = b$$
$$x \geqslant 0$$

➢基本可行解

对于任意一个标准线性规划，若rank(A)=m，则A的前m列向量存在两种情况——线性无关和线性相关

rank(A)=2的两个线性规划例子如下

$$\min\ x_1 + 2x_2 + 3x_3$$
s.t.
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4,$$
$$x_1 - x_2 + 3x_3 = 1,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\min\ x_1 + 3x_2 + 2x_3$$
s.t.
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &\text{s.t}\quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢基本可行解

当rank(A)=m时，可以通过列调换使得A的前m列线性无关，因此设$A = [B, N]$, 其中B是m阶可逆矩阵.

此外，记$x = [x_B, x_N]$，其中x_B的分量与B中的列对应， x_N的分量与N中的列对应.

■ 线性规划的基本性质

$$\min \mathbf{cx}$$
$$\text{s.t} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$
$$\mathbf{x} \geqslant 0$$

➢基本可行解

$$\min x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

s.t.

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4,$$
$$x_1 + 3x_2 - x_3 = 1,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{c} = [1,3,2]$$
$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$$

$$\min x_1 + 2x_3 + 3x_2$$

s.t.

$$x_1 + 2x_3 + 3x_2 = 4,$$
$$x_1 - x_3 + 3x_2 = 1,$$
$$x_1 \geq 0, x_3 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{c} = [1,2,3]$$
$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_3, x_2]^T$$

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min \ cx \\ &s.t \quad Ax = b \\ &\qquad\ \ x \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢基本可行解

基于以上假设

$$Ax = b$$

$$[B, N]\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b$$

$$B^{-1}(Bx_B + Nx_N) = B^{-1}b$$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

x_N是线性代数中的自由未知量，取不同的值就有不同的解，不妨取x_N =0

方程组$Ax = b$的解为

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &\text{s.t}\quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢基本可行解

定义：

$x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$为方程组$Ax=b$的一个基本解

- B称为基矩阵，简称基
- x_B的各分量成为基变量
- 基变量的全体$x_{B1}, x_{B2}, \cdots, x_{Bm}$称为一组基
- x_N的各分量成为非基变量

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min \ cx \\ &s.t \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢基本可行解

定义：如果$x_B = B^{-1}b \geq 0$，则$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$

为约束条件$Ax = b, x \geq 0$的一个基本可行解

相应地，

- B称为可行基矩阵
- $x_{B1}, x_{B2}, \cdots, x_{Bm}$称为一组可行基
- 若$B^{-1}b > 0$，基本可行解是非退化的
- 若$B^{-1}b \geq 0$，基本可行解是退化的

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{aligned} &\min \ cx \\ &s.t \quad Ax = b \\ &\qquad\quad x \geqslant 0 \end{aligned}$$

➢基本可行解

	$Ax=b$	$Ax=b, x\geq 0$
$x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$	基本解	基本可行解
B	基矩阵	可行基矩阵
$x_{B1}, x_{B2}, \cdots, x_{Bm}$	一组基	一组可行基
x_N	非基变量	非基变量
$B^{-1}b\geq 0$	无退化概念	可行解退化

■ 线性规划的基本性质

$$
\begin{aligned}
&\min\ cx \\
&\text{s.t}\quad Ax = b \\
&\qquad\quad x \geqslant 0
\end{aligned}
$$

➢基本可行解

例子： 考虑下列不等式定义的多面集：

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\
x_2 \leqslant 2, \\
x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{cases}
$$

引进松弛变量 x_3, x_4

化成
$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\
x_2 + x_4 = 2, \\
x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 4.
\end{cases}
$$

试求基本可行解

■ 线性规划的基本性质

➢基本可行解

解：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ x_2 + x_4 = 2, \\ x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 4. \end{cases}$$

方程组的系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于每确定一个基矩阵 $\boldsymbol{B}$,就能解得一个基本解

下面分别选择不同的基 $\boldsymbol{B}$，求出所有基本解，

再从中找出基本可行解.

■ 线性规划的基本性质

$$A = (p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢基本可行解

令 $B = (p_1, p_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得基本解

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

■ 线性规划的基本性质

$$A = (p_1, p_2, p_3, p_4) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢基本可行解

令 $$B = (p_1, p_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_N = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

得基本解

$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

■ 线性规划的基本性质

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢基本可行解

令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_1\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

得基本解

$$\boldsymbol{x}^{(3)}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\\ 4\\ 0\end{bmatrix}$$

■ 线性规划的基本性质

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢基本可行解

令 $B=(p_2,p_4)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，

$$x_B=\begin{bmatrix}x_2\\ x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -2\end{bmatrix}$$

$$x_N=\begin{bmatrix}x_1\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

得基本解

$$x^{(4)}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 4\\ 0\\ -2\end{bmatrix}$$

■ 线性规划的基本性质

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4)=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$

➢基本可行解

令 $$B=(p_3,p_4)=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},$$

$$x_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=B^{-1}b=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\2\end{bmatrix}$$

$$x_N=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

得基本解

$$x^{(5)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\\2\end{bmatrix}$$

■ 线性规划的基本性质

➢基本可行解

验证$\boldsymbol{x}^{(1)}$、$\boldsymbol{x}^{(2)}$、$\boldsymbol{x}^{(3)}$、$\boldsymbol{x}^{(4)}$、$\boldsymbol{x}^{(5)}$是否满足约束

$$x_j \geqslant 0,\quad j=1,\cdots,4.$$

$$\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}4\\2\\0\\0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}8\\0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}^{(3)}=\begin{bmatrix}0\\2\\4\\0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}^{(4)}=\begin{bmatrix}0\\4\\0\\-2\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}^{(5)}=\begin{bmatrix}0\\0\\8\\2\end{bmatrix}$$

■ 线性规划的基本性质

➢基本可行解

由上面这个例子可知：

① 基矩阵的个数有限，因此基本解只能存在有限个。

② 基本可行解也只能存在有限个。

③ 当A是m×n矩阵，A的秩为m时，基本可行解的个数不会超过$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

■ 线性规划的基本性质

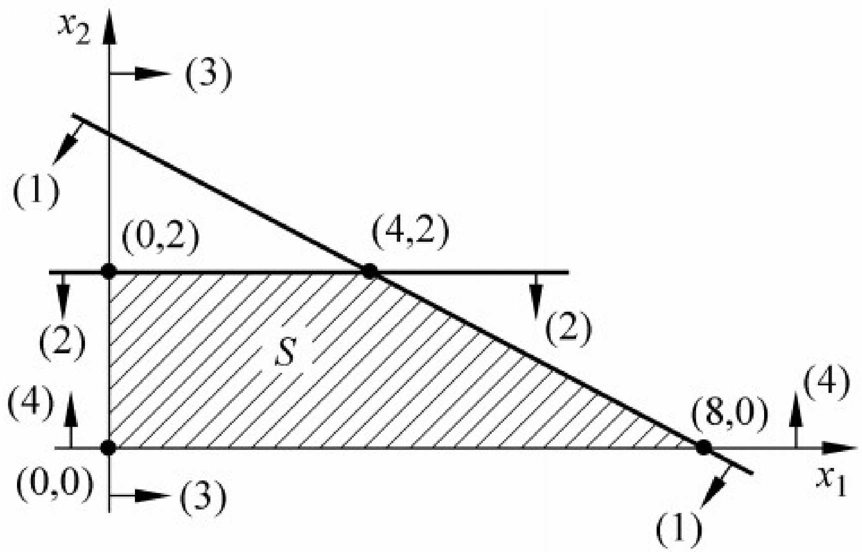
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

➢基本可行解与极点之间的关系

上面例子的基本可行解：

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{x}^{(5)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

上面例子中不等式多面集对应的可行域：



■每个基本可行解中，x_1和x_2的取值恰好与可行域的极点相对应

■基本可行解与可行域的极点之间总存在着对应关系

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

➢基本可行解与极点之间的关系

给出等价定理如下：

定理 2.2.3 令 $K=\{x \mid Ax=b, x\geqslant 0\}$，$A$ 是 $m\times n$ 矩阵，A 的秩为 m，则 K 的极点集与 $Ax=b, x\geqslant 0$ 的基本可行解集等价.

■由定理2.2.2 知，当线性规划存在最优解时，目标函数的最优值一定能在某个极点上达到

■由定理2.2.3 知，当线性规划可行域的极点就是一个基本可行解

■线性规划问题的求解，可归结为求最优基本可行解

■ 线性规划的基本性质

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \\ x_2 \leqslant 2, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

➢基本可行解的存在条件

若多面集

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

非空，则存在有限个极点

由于S的极点集与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 的基本可行解集等价，必存在基本可行解。

■ 作业

P35~36：

第**1**大题的**1**、**3**、**5**

第**2**大题的**1**、**3**