Optimal Theory and Method

最优化理论与方法

程春杰

杭州电子科技大学 自动化学院

科技馆512

Email: cjzhai@hdu.edu.cn

目录

- 线性规划中的对偶理论（难点、重点）
- 对偶单纯形法（重点）
- 灵敏度分析

目录

- 线性规划中的对偶理论（难点、重点）
- 对偶单纯形法（重点）
- 灵敏度分析

■ 线性规划中的对偶理论

- 什么是对偶问题
- 对偶问题的三种表达形式
- 对偶定理

■ 线性规划中的对偶理论

➢什么是对偶问题

线性规划中普遍存在**配对现象**，即对每一个线性规划问题，都存在另一个与它有密切关系的线性规划问题，其中之一称为**原问题**，而另一个称为它的**对偶问题**.

对偶理论深刻揭示了每对问题中原问题与对偶问题的**内在联系**，为进一步深入研究线性规划的理论与算法提供了**理论依据**

线性规划中的对偶理论

对偶问题的三种表达形式

1.对称形式的对偶

原问题:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \boldsymbol{cx} \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} \geqslant \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x} \geqslant \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

对偶问题:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \boldsymbol{wb} \\
\text{s.t.} \quad & \boldsymbol{wA} \leqslant \boldsymbol{c}, \\
& \boldsymbol{w} \geqslant \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{A}=(p_1,\cdots,p_n)$是 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维列向量

$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)$是 n 维行向量

$\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$ 是由原问题的变量组成的 n 维列向量

$\boldsymbol{w}=(w_1,\cdots,w_m)$是由对偶问题的变量组成的 m 维行向量

线性规划中的对偶理论

对偶问题的三种表达形式

1.对称形式的对偶

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leq \boxed{c}, \\ & w \geq 0. \end{aligned}$$

在原问题中，$Ax \geq b$包含m个不等式约束

其中每个约束条件记作 $A_i x \geq b_i$

在对偶问题中，$\omega A \leq c$包含n个不等式约束

每个约束条件记作 $\omega p_j \leq c_j$

对称形式的对偶：

原问题中约束条件的个数，恰好等于对偶变量的个数；原问题中变量的个数，恰好等于对偶问题中约束条件的个数

线性规划中的对偶理论

对偶问题的三种表达形式

1.对称形式的对偶

例子:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \geqslant 5, \\ & x_1 - 2x_2 \geqslant 1, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad c=\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{wb} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{wA} \leqslant \boldsymbol{c}, \\ & \boldsymbol{w} \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 5w_1 + w_2 \\ \text{s.t.} \quad & w_1 + w_2 \leqslant 1, \\ & w_1 - 2w_2 \leqslant -1, \\ & w_1, w_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

1.对称形式的对偶

现实中的例子:

某厂在计划期内安排生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。已知生产单位产品所需的设备台时及A、B两种原材料的消耗如下表。问应如何安排生产计划，使该工厂获利最多

	I	II	资源限制
设备台时	1	2	8
原材料A（kg）	4	0	16
原材料B（kg）	0	4	12
获利（元）	2	3	

某厂决定不生产Ⅰ、Ⅱ两种产品。而将其资源出售或出租，则出租的底价是多少?

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

1.对称形式的对偶

设x_1、x_2为计划期内产品I、II的产量

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 2x_1 + 3x_2 \\
\text{s.t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ 4x_1 \leqslant 16 \\ 4x_2 \leqslant 12 \\ x_1、x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

设$y_1, y_2, y_3 \geqslant 0$为出租生产设备单位台时的租金及出让A、B两种原材料的附加值（除成本外的收益）

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 8y_1 + 16y_2 + 12y_3 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 4y_2 \geqslant 2 \\
& 2y_1 + 4y_3 \geqslant 3
\end{aligned}
$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

2.非对称形式的对偶

原问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned}$$

对偶问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leqslant c. \\ & w\text{没有非负限制} \end{aligned}$$

非对称对偶：原问题中有m个等式约束，而且对偶问题中的m个变量无正负号限制，它们称为非对称对偶

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

2.非对称形式的对偶

原问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

对偶问题:

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leq c. \end{aligned}$$

w 没有非负限制

利用对称对偶的定义给出原问题的对偶问题推导过程

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leqslant c. \end{aligned}$$

2.非对称形式的对偶

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax \geqslant b, \\ & -Ax \geqslant -b, \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \qquad w=[u \quad v]$$

$$\overline{b}=\begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$ u、v为m为行向量

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geqslant \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned}$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leqslant c. \end{aligned}$$

2.非对称形式的对偶

$$\bar{A}=\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \qquad \bar{w}=[u \quad v]$$

$$\bar{b}=\begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$$ u、v为m为行向量

$$\begin{aligned} \max \quad & ub - vb \\ \text{s.t.} \quad & uA - vA \leqslant c, \\ & u, v \geqslant 0. \end{aligned}$$

令 $w = u - v$，显然 w 没有非负限制，于是得到

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leqslant c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\max \quad wb$$
$$\text{s.t.} \quad wA \leqslant c.$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

2.非对称形式的对偶

例子:

$$\begin{aligned} \min \quad & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ & 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ & x_1, x_2, x_3 \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \qquad c=\begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\max \quad wb$$
$$\text{s.t.} \quad wA \leqslant c.$$

$$\begin{aligned} \max \quad & 4w_1 + 5w_2 \\ \text{s.t.} \quad & w_1 + 3w_2 \leqslant 5, \\ & w_1 + 2w_2 \leqslant 4, \\ & w_1 + w_2 \leqslant 3. \end{aligned}$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leqslant c. \end{aligned}$$

实际中有许多线性规划问题同时含有"≥"，"≤"及"="型几种约束条件.

设原问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & A_1 x \geqslant b_1, \\ & A_2 x = b_2, \\ & A_3 x \leqslant b_3, \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

A_1： $m_1 \times n$矩阵， A_2： $m_2 \times n$， A_3： $m_3 \times n$

b_1， b_2和b_3分别是m_1维， m_2维和m_3维列向量

c是n维行向量， x是n维列向量。

■ 线性规划中的对偶理论

$$\max \quad wb$$
$$\text{s.t.} \quad wA \leqslant c.$$

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

引入松弛变量,写成等价形式:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & A_1 x - x_s = b_1, \\ & A_2 x = b_2, \\ & A_3 x + x_t = b_3, \\ & x, x_s, x_t \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$\min \quad cx + 0 \cdot x_s + 0 \cdot x_t$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A_1 & -I_{m_1} & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$
$$x, x_s, x_t \geqslant 0,$$

松弛变量:

x_s: m_1维列向量

x_t: m_3维列向量

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leqslant c. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + 0 \cdot x_s + 0 \cdot x_t \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} A_1 & -I_{m_1} & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_s \\ x_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \\ & x, x_s, x_t \geqslant 0, \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & -I_{m_1} & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad c = [c \quad 0 \quad 0]$$

$$w = [w_1 \quad w_2 \quad w_3]$$

$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 \\ \text{s.t.} \quad & (w_1, w_2, w_3) \begin{bmatrix} A_1 & -I_{m_1} & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix} \leqslant [c, 0, 0], \end{aligned}$$

$$\max \quad wb$$
$$\text{s.t.} \quad wA \leqslant c.$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

$$\max \quad w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3$$
$$\text{s.t.} \quad (w_1, w_2, w_3)\begin{bmatrix} A_1 & -I_{m_1} & 0 \\ A_2 & 0 & 0 \\ A_3 & 0 & I_{m_3} \end{bmatrix} \leqslant [c, 0, 0],$$

⬇

$$\max \quad w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3$$
$$\text{s.t.} \quad w_1 A_1 + w_2 A_2 + w_3 A_3 \leqslant c,$$
$$w_1 \geqslant 0,$$
$$w_3 \leqslant 0,$$
$$w_2 \text{无限制},$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

$$\begin{aligned} \max \quad & wb \\ \text{s.t.} \quad & wA \leqslant c. \end{aligned}$$

3.一般情形的对偶

设原问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & cx \\ \text{s.t.} \quad & A_1 x \geqslant b_1, \\ & A_2 x = b_2, \\ & A_3 x \leqslant b_3, \\ & x \geqslant 0, \end{aligned}$$

对偶问题为

$$\begin{aligned} \max \quad & w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 \\ \text{s.t.} \quad & w_1 A_1 + w_2 A_2 + w_3 A_3 \leqslant c, \\ & w_1 \geqslant 0, \\ & w_3 \leqslant 0, \\ & w_2 \text{无限制}, \end{aligned}$$

■ 线性规划中的对偶理论

$$\max \quad wb$$
$$\text{s.t.} \quad wA \leqslant c.$$

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

原问题（或对偶问题）		对偶问题（或原问题）
目标函数**max z**		**min**
n个变量: ≥ **0** ≤ **0** 无约束	同向 ↔	**n**个约束: ≥ ≤ =
m个约束: ≤ ≥ =	反向 ↔	**m**个变量: ≥ **0** ≤ **0** 无约束
c / b		**b / c**

小束量性相同、小量束性相异、等式约束变量无限制

$$\max \quad \boldsymbol{wb}$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{wA} \leqslant \boldsymbol{c}.$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

写出下列线性规划问题的对偶问题：

$$\begin{aligned}
\max \quad & -x_1+x_2+x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1+x_2+2x_3 \leqslant 25, \\
& -x_1+2x_2-x_3 \geqslant 2, \\
& x_1-x_2+x_3=3, \\
& x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

解：

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)=(-1, 1, 1)$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leqslant 25, \\
& -x_1 + 2x_2 - x_3 \geqslant 2, \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\
& x_1, x_2 \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

第一步：对偶问题的目标

$$\min \ \mathbf{wb} = (w_1, w_2, w_3)\mathbf{b} = 25w_1 + 2w_2 + 3w_3$$

第二步：对偶问题的约束

$$\mathbf{wA} = (w_1 - w_2 + w_3, w_1 + 2w_2 - w_3, 2w_1 - w_2 + w_3)$$

$$w_1 - w_2 + w_3 \geq -1$$

$$w_1 + 2w_2 - w_3 \geq 1$$

$$2w_1 - w_2 + w_3 = 1$$

第三步：对偶变量的约束

$$w_1 \geq 0 \qquad w_2 \leq 0$$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶问题的三种表达形式

3.一般情形的对偶

原问题 →

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 25, \\
& -x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\
& x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\
& x_1, x_2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & 25w_1 + 2w_2 + 3w_3 \\
\text{s.t.} \quad & w_1 - w_2 + w_3 \geq -1, \\
& w_1 + 2w_2 - w_3 \geq 1, \\
& 2w_1 - w_2 + w_3 = 1, \\
& w_1 \geq 0, \quad w_2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

← **对偶问题**

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

由于不同形式的对偶可以互相转化，在此仅叙述并证明关于对称对偶的几个重要定理，其结论对于其他形式的对偶仍成立。

定理 4.1.1

设 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是(4.1.1)式和(4.1.2)式的可行解，则 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$.

证明 由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$.

由于 $\boldsymbol{c} \geqslant \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{x}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}$.

即知 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$.

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

定理 4.1.1

设 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是(4.1.1)式和(4.1.2)式的可行解，则 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$.

对于对偶中的两个问题，极小化问题给出极大化问题的目标函数值的上界；极大化问题给出极小化问题的目标函数值的下界。

推论 1 若 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解且 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$,则 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解.

设$x^{(*)}$为原问题的更优可行解，则$cx^{(*)} < cx^{(0)}$

又$cx^{(*)} \geq w^{(0)}b$，$w^{(0)}b \leq cx^{(*)} < cx^{(0)}$

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

推论 2 对偶规划原问题和对偶问题有最优解的充要条件是它们同时有可行解.

推论 3 若原问题的目标函数值在可行域上无下界,则对偶问题无可行解;反之,若对偶问题的目标函数值在可行域上无上界,则原问题无可行解;

定理 4.1.2

设原问题和对偶问题中有一个问题存在最优解,则另一个问题也存在最优解,且两个问题的目标函数的最优值相等.

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

证明

设原问题存在最优解.引进松弛变量,写成等价形式:

$$\begin{aligned}\min \quad & \boldsymbol{cx}\\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},\\ & \boldsymbol{v} \geqslant \boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

相应的最优基是 $\boldsymbol{B}$.

所有判别数均非正,即

$$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j - c_j \leqslant 0, \quad \forall j,$$

$\boxed{\text{其中 } \boldsymbol{w}^{(0)} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}}$

设这个最优解是

$$\boldsymbol{y}^{(0)} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(0)}\\ \boldsymbol{v}^{(0)}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{w}^{(0)}(-\boldsymbol{I}) \leqslant \boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A} \leqslant \boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{w}^{(0)} \geqslant \boldsymbol{0}.$$

可行解

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

证明

非基变量取值为零及目标函数中松弛变量的系数为零

$$w^{(0)}b = c_B B^{-1} b = c_B y_B^{(0)} = cx^{(0)},$$

$y_B^{(0)}$ 表示 $y^{(0)}$ 中基变量的取值

推论

设原问题存在一个对应基 B 的最优基本可行解,则单纯形乘子

$$w = c_B B^{-1}$$

是对偶问题的一个最优解 .

线性规划中的对偶理论

对偶定理

互补松弛性质

定理 4.1.3

设 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，那么 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 都是最优解的充要条件是，对所有 i 和 j，下列关系成立：

(1) 如果 $x_j^{(0)} > 0$，就有 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j = c_j$；

(2) 如果 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j < c_j$，就有 $x_j^{(0)} = 0$；

(3) 如果 $w_i^{(0)} > 0$，就有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)} = b_i$；

(4) 如果 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)} > b_i$，就有 $w_i^{(0)} = 0$.

其中 $\boldsymbol{p}_j$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列，$\boldsymbol{A}_i$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行.

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

(1) 如果 $x_j^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j=c_j$；

(2) 如果 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j<c_j$，就有 $x_j^{(0)}=0$；

(3) 如果 $w_i^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}=b_i$；

(4) 如果 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}>b_i$，就有 $w_i^{(0)}=0$.

证明

先证必要性．设 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解．

由于 $\boldsymbol{c}\geqslant\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{x}^{(0)}\geqslant\boldsymbol{0}$，则有 $\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}\geqslant\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}$．

由于 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}\geqslant\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}\geqslant\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}\geqslant\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$．

$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$．　　$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$．

$(c_j-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j)x_j^{(0)}=0 \longleftarrow (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(0)}=0$，

$w_i^{(0)}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}-b_i)=0 \longleftarrow \boldsymbol{w}^{(0)}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{b})=0$．

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

(1) 如果 $x_j^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j=c_j$；

(2) 如果 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j<c_j$，就有 $x_j^{(0)}=0$；

(3) 如果 $w_i^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}=b_i$；

(4) 如果 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}>b_i$，就有 $w_i^{(0)}=0$.

证明

再证充分性.设 $\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是原问题和对偶问题的可行解，

$$(c_j-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j)x_j^{(0)}=0 \longrightarrow (\boldsymbol{c}-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}^{(0)}=0,$$

$$w_i^{(0)}(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}-b_i)=0 \longrightarrow \boldsymbol{w}^{(0)}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{b})=0.$$

$$\longrightarrow \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \qquad \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}$$

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}.}$$

根据定理4.1.1的推论1，$\boldsymbol{x}^{(0)}$ 和 $\boldsymbol{w}^{(0)}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解.

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

(1) 如果 $x_j^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j=c_j$；

(2) 如果 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j<c_j$，就有 $x_j^{(0)}=0$；

(3) 如果 $w_i^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}=b_i$；

(4) 如果 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}>b_i$，就有 $w_i^{(0)}=0$。

例子：

给定线性规划问题，原问题为

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1+3x_2+x_3\\
\text{s.t.}\quad & 3x_1-x_2+x_3\geqslant 1,\\
& x_1+2x_2-3x_3\geqslant 2,\\
& x_1,x_2,x_3\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

它的对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max\quad & w_1+2w_2\\
\text{s.t.}\quad & 3w_1+w_2\leqslant 2,\\
& -w_1+2w_2\leqslant 3,\\
& w_1-3w_2\leqslant 1,\\
& w_1,w_2\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

对偶问题的最优解为

$$\bar{\boldsymbol{w}}=(w_1,w_2)=\left(\frac{1}{7},\frac{11}{7}\right).$$

试用互补松弛定理求原问题的最优解。

■ 线性规划中的对偶理论

➢对偶定理

(1) 如果 $x_j^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j=c_j$；

(2) 如果 $\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j<c_j$，就有 $x_j^{(0)}=0$；

(3) 如果 $w_i^{(0)}>0$，就有 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}=b_i$；

(4) 如果 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}>b_i$，就有 $w_i^{(0)}=0$.

例子：

$$\bar{\boldsymbol{w}}=(w_1,w_2)=\left(\frac{1}{7},\frac{11}{7}\right).$$

$3w_1+w_2\leqslant 2$ $\quad \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{c}_1$

$-w_1+2w_2\leqslant 3$ $\quad \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{c}_2$

$w_1-3w_2\leqslant 1$ $\quad \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_3<\boldsymbol{c}_3$ $\quad x_3^{(0)}=0$

$w_1^{(0)}>0 \longrightarrow A_1x^{(0)}=b_1$

$w_2^{(0)}>0 \longrightarrow A_2x^{(0)}=b_2$

$$\begin{cases}3x_1-x_2+x_3=1,\\ x_1+2x_2-3x_3=2.\end{cases}$$

原问题的最优解是 $\bar{\boldsymbol{x}}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{4}{7},\frac{5}{7},0\right)^{\mathrm{T}}$，

■ 作业

P119：

1(3)、2(8)