Optimal Theory and Method

最优化理论与方法

程春杰

杭州电子科技大学 自动化学院

科技馆512

Email: cjzhai@hdu.edu.cn

目录

目录

- 单纯形方法原理（考）
- 两段法与大M法（考）

■ 单纯形方法原理

- 单纯形法的基本思想
- 如何实现基本可行解的不断改进
- 单纯形方法具体的计算步骤
- 单纯形方法的收敛性
- 使用表格形式的单纯形法

■ 单纯形方法原理

$$\begin{aligned} \min \quad & f \overset{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

➢单纯形法的基本思想

①先找到一个基本可行解；

②寻找能使目标函数有所改善的下一个基本可行解；

③继续寻找更好的基本可行解，直到达到最优基本可行解。

要掌握单纯形法，必须解决对应的三个基本问题

①如何确定一个基本可行解；

②如何寻找一个更好的基本可行解；

③如何判断当前基本可行解是否为最优基本可行解

■ 单纯形方法原理

➢基本可行解的不断改进

考虑问题

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$

其中

A是m×n矩阵，秩为m

c是n维行向量

x是n维列向量

b≥0是m维列向量

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①**求基本可行解$x^{(0)}$：**

A=(p_1， p_2， …， p_n)

A分解成(B，N)(可能经列调换)，使B是基矩阵

$x^{(0)}=[B^{-1}b, 0]^T$是基本可行解

在$x^{(0)}$处的目标函数值

$$f_0 = cx^{(0)} = (c_B, c_N)\begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} = c_B B^{-1} b$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

设 $x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$ 是任一个可行解

由$Ax = b — > (B, N)(x_B, x_N)^T = b$

得$Bx_B + Nx_N = b$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

在该任一可行解$x = [x_B, x_N]^T$的目标函数值为

$$f = cx = (c_B, c_N)\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$(c_B B^{-1} N - c_N) x_N$$
$$= (c_B B^{-1}(p_m, p_r) - (c_m, c_r))(x_m, x_r)^T$$

$$= c_B x_B + c_N x_N$$
$$= c_B (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N x_N$$
$$= c_B B^{-1} b - (c_B B^{-1} N - c_N) x_N$$
$$= f_0 - \sum_{j \in R} (c_B B^{-1} p_j - c_j) x_j$$

R是非基变量下标集

$$= f_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j,$$

$$z_j = c_B B^{-1} p_j$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

在该任一可行解$x = [x_B, x_N]^T$的目标函数值为

$$f = f_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

适当选取自由未知量 $x_j\,(j \in R)$的数值就有可能使得

$$\sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j > 0$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①**从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：**

在n-m**个非基变量中，使**n-m-1**个非基变量为**0，**只有一个非基变量，比如x_k为正**

$$\sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j > 0$$

当 $x_j\ (j \in R)$取值相同时，$z_j - c_j$越大，目标函数下降越多，因此选择 x_k ,使

$$z_k - c_k = \max_{j \in R} \{ z_j - c_j \},$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \stackrel{\text{def}}{=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

x_k变为正数后

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$
$$= B^{-1}b - B^{-1}(\cdots, p_k, \cdots, p_m)\begin{bmatrix} 0 \\ x_k \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$= B^{-1}b - B^{-1}p_k x_k$$

$\bar{b} = B^{-1}b$

$y_k = B^{-1}p_k$

m维列向量

将x_B展开后

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

确定改进可行解$x = [x_B, x_N]^T$

$$x_N = (0, \cdots, 0, x_k, 0, \cdots, 0)^T$$

必须确定x_k

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

x_k越大f下降越多；但取值受到可行性的限制

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

当$y_{ik} \leqslant 0$时，

x_k可取任何正值

当$y_{ik} > 0$时，

$$x_{Bi} = \bar{b}_i - y_{ik} x_k \geqslant 0$$

$$x_k \leq \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$$

■ 单纯形方法原理

$$x_B=\begin{bmatrix}x_{B_1}\\x_{B2}\\\vdots\\x_{Bm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\vdots\\\bar{b}_m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}y_{1k}\\y_{2k}\\\vdots\\y_{mk}\end{bmatrix}x_k$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

$x_k \le \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$ 为使$x_B \geqslant 0$，令

$$x_k=\min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\middle|\,y_{ik}>0\right\}=\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

$$x_{Bi}=\bar{b}_i-y_{ik}x_k=\bar{b}_i-y_{ik}\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

此时原基变量$x_{Br}=0$，得到新的可行解

$x=(x_{B1},\ \ldots,\ x_{Br-1},\ 0,\ x_{Br+1},\ \ldots,\ x_k,\ 0,\ \ldots,\ 0)^T$

■ 单纯形方法原理

$$x_B=\begin{bmatrix}x_{B_1}\\x_{B2}\\\vdots\\x_{Bm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\vdots\\\bar{b}_m\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}y_{1k}\\y_{2k}\\\vdots\\y_{mk}\end{bmatrix}x_k$$

➢基本可行解的不断改进

①从基本可行解$x^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解$x^{(1)}$：

基本可行解：非基变量均为0，基变量对应A矩阵的列线性无关

$x=(x_{Bl}, \ldots, x_{Br-1}, 0, x_{Br+1}, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T$

原来的基$B=(p_{B1}, \ldots, p_{Br}, \ldots, p_{Bm})$ m个列线性无关

由于 $y_k=B^{-1}p_k$，故$p_k=By_k=\sum_{i=1}^{m}y_{ik}p_{B_i}$，系数 $y_{rk}\neq 0$

用 p_k 取代 p_{B_r} 后，$p_{B_1},\cdots,p_k,\cdots,p_{B_m}$，线性无关

■ 单纯形方法原理

$$\begin{aligned} \min \quad & f \overset{\text{def}}{=} cx \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

➢基本可行解的不断改进

概括一下基本可行解改进的基本思路:

(1)在基本可行解$x^{(0)}$的基础上，构建任意一个可行解

$$\mathrm{x}^{(0)} = [\mathrm{B}^{-1}\mathrm{b},\ 0]^{\mathrm{T}} \qquad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \qquad x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

(2)考察该任一可行解和$x^{(0)}$所对应的目标函数之间的关系

$$f = f_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geq 0,$$

➢基本可行解的不断改进

概括一下基本可行解改进的基本思路：

(3)确定改进规则，即只让一个非基变量为正，其余为0

$$f = f_0 - \sum_{j \in R} (z_j - c_j) x_j$$

(4)具体让哪一个非基变量为正，选择对应的最大正系数

$$z_k - c_k = \max_{j \in R} \{ z_j - c_j \}$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➤基本可行解的不断改进

概括一下基本可行解改进的基本思路:

(5)根据约束，确定x_k具体值，以最小化

$$f = f_0 - (z_k - c_k)x_k$$

(6)对原基矩阵对应的变量进行运算，获得改进的基本可行解

$$x_B = \begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B2} \\ \vdots \\ x_{Bm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix} x_k$$

$$x_N = (0,\cdots,0,x_k,0,\cdots,0)^T$$

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} \boldsymbol{cx}$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$

➢基本可行解的不断改进

按照上面的方法，从基本可行解$x^{(0)}$出发，可以找到一个改进的基本可行解$x^{(1)}$，类似地，可以从基本可行解$x^{(1)}$出发，找到基本可行解$x^{(2)}$，直到所有的$z_j - c_j, j \in R$均为非正数，便找到了最优非基变量

最优基本可行解判别定理：

若在极小化问题中,对于某个基本可行解,所有 $z_j - c_j \leqslant 0$,则这个基本可行解是最优解;若在极大化问题中,对于某个基本可行解,所有 $z_j - c_j \geqslant 0$,则这个基本可行解是最优解.

$z_j - c_j = \boldsymbol{c_B B^{-1} p_j} - c_j$, $\quad j = 1, \cdots, n$.为判别数或检验数.

■ 单纯形方法原理

$$\min \quad f \overset{\text{def}}{=\!=} cx$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b,$$
$$x \geqslant 0,$$

➢单纯形法的计算步骤

首先要给定一个初始基本可行解．设初始基为B，然后执行下列主要步骤：

(1) 解 $Bx_B = b$，求得 $x_B = B^{-1}b = \bar{b}$，令 $x_N = 0$，计算目标函数值 $f = c_B x_B$．

(2) 求单纯形乘子 w，解 $wB = c_B$，得到 $w = c_B B^{-1}$．对于所有非基变量，计算判别数 $z_j - c_j = wp_j - c_j$．令 $z_k - c_k = \max\limits_{j \in R} \{ z_j - c_j \}$．若 $z_k - c_k \leqslant 0$，则对于所有非基变量 $z_j - c_j \leqslant 0$，现行基本可行解是最优解．否则，进行下一步．

(3) 解 $By_k = p_k$，得到 $y_k = B^{-1}p_k$，若 $y_k \leqslant 0$，即 y_k 的每个分量均非正数，

■ 单纯形方法原理

$$\begin{aligned} \min \quad & f \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

➢单纯形法的计算步骤

问题不存在有限最优解.否则,进行步骤(4).

(4) 确定下标 r,使

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0 \right\},$$

x_{B_r} 为离基变量,x_k 为进基变量.

用 $\boldsymbol{p}_k$ 替换 $\boldsymbol{p}_{B_r}$,得到新的基矩阵 $\boldsymbol{B}$,返回步骤(1).

■ 单纯形方法原理

$$\begin{aligned} \min \quad & f \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \end{aligned}$$

➢单纯形法的计算步骤

例子 用单纯形法解下列问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & -4x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leqslant 4, \\ & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 12, \\ & x_1 - x_2 \leqslant 3, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

求该问题的最优解和对应的最优值

■ 单纯形方法原理

➢单纯形法的计算步骤

解：把非标准形式标准化

引入松弛变量 x_3，x_4，x_5，把问题化成

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 5,
\end{aligned}
$$

■ 单纯形方法原理

➢单纯形法的计算步骤

给出矩阵A、c、b:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -4x_1 - x_2 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\
& x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 5,
\end{aligned}
$$

$$
A = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$\boldsymbol{c} = (-4, -1, 0, 0, 0) \qquad \boldsymbol{b} = (4, 12, 3)^T$

■ 单纯形方法原理

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

第一次迭代：

$$B=(p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},B^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$x_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 12\\ 3\end{bmatrix},\quad x_N=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

■ 单纯形方法原理

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

$$c=(-4,-1,0,0,0)$$

第一次迭代：

$$f_1=c_B x_B=(0,0,0)(4,12,3)^T=0,$$

$$w=c_B B^{-1}=(0,0,0)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(0,0,0),$$

非基变量对应的判别数：

$$z_1-c_1=wp_1-c_1=(0,0,0)(-1,2,1)^T+4=4,$$

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=(0,0,0)(2,3,-1)^T+1=1.$$

基变量对应的判别数均为0

■ 单纯形方法原理

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

第一次迭代：

因此最大判别数是 $z_1 - c_1 = 4$，下标 $k=1$.计算 $\boldsymbol{y}_1$，有

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x}_B = (4, 12, 3)^{\mathrm{T}}.$$

确定下标 r，有

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r1}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_2}{y_{21}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{31}}\right\} = \min\left\{\frac{12}{2}, \frac{3}{1}\right\} = \frac{3}{1},$$

因此 $r=3$.$\boldsymbol{x}_B$ 中第 3 个分量 x_5 为离基变量，x_1 为进基变量，

■ 单纯形方法原理

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

第二次迭代：

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_1)=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_4\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 6\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \bar{b}_3\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_2\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

■ 单纯形方法原理

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$c=(-4,-1,0,0,0)$$

➢单纯形法的计算步骤

第二次迭代：

$f_2=-12$，

$$w=c_B B^{-1}=(0,0,-4)\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=(0,0,-4),$$

非基变量对应的判别数：

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=(0,0,-4)(2,3,-1)^T+1=5,$$

$$z_5-c_5=wp_5-c_5=(0,0,-4)(0,0,1)^T-0=-4.$$

基变量对应的判别数均为0

■ 单纯形方法原理

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

第二次迭代：

最大判别数为 $z_2-c_2=5$，指标 $k=2$，计算 $\boldsymbol{y}_2$，有

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 3\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 5\\ -1\end{bmatrix},$$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r2}}=\min\left\{\frac{7}{1},\frac{6}{5}\right\}=\frac{6}{5}=\frac{\bar{b}_2}{y_{22}}$$

因此，$x_{B_r}=x_4$ 为离基变量．x_2 为进基变量．

用 $\boldsymbol{p}_2$ 替换 $\boldsymbol{p}_4$，得到新基．进行下一次迭代．

■ 单纯形方法原理

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

第三次迭代：

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix},$$

■ 单纯形方法原理

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

第三次迭代：

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_2\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{29}{5}\\ \frac{6}{5}\\ \frac{21}{5}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$f_3=-18.$$

■ 单纯形方法原理

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$c=(-4,-1,0,0,0)$$

➢单纯形法的计算步骤

第三次迭代:

$$w=c_B B^{-1}=(0,-1,-4)\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=(0,-1,-2),$$

非基变量对应的判别数:

$$z_4-c_4=wp_4-c_4=(0,-1,-2)(0,1,0)^{\mathrm{T}}=-1,$$

$$z_5-c_5=wp_5-c_5=(0,-1,-2)(0,0,1)^{\mathrm{T}}=-2.$$

非基变量对应的判别数:

$$z_1-c_1=(0,-1,-2)(-1,2,1)^T-(-4)=0$$

$$z_2-c_2=(0,-1,-2)(2,3,-1)^T-(-1)=0$$

$$z_3-c_3=(0,-1,-2)(1,0,0)^T-0=0$$

■ 单纯形方法原理

$$A=(p_1,p_2,p_3,p_4,p_5)=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

➢单纯形法的计算步骤

第三次迭代：

由于所有 $z_j-c_j\leqslant 0$，

$$\boldsymbol{x}_B=\begin{bmatrix}x_3\\ x_2\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{29}{5}\\ \frac{6}{5}\\ \frac{21}{5}\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

原问题的最优解和最优值为：

$$x_1=\frac{21}{5},\quad x_2=\frac{6}{5},\qquad f_{\min}=-18$$

■ 单纯形方法原理

➢单纯形法的收敛性

令 $z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\}$

每次迭代必出现下列三种情形之一：

(1) $z_k - c_k \leqslant 0$.这时现行基本可行解就是最优解 .

(2) $z_k - c_k > 0$ 且 $y_k \leqslant 0$.

当 x_k 无限增大时,目标函数值 $f \to -\infty$,问题属于无界

(3) $z_k - c_k > 0$ 且 $y_k \not\leqslant 0$.这时可求出新的基本可行解

若 $x_k = \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$, 则经迭代,目标函数值下降 .

■ 单纯形方法原理

➢单纯形法的收敛性

当极小化线性规划问题存在最优解时，对于非退化情形，在每次迭代中，均有

$$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{b}} > \boldsymbol{0},$$

$$x_k = \bar{b}_r / y_{rk} > 0,$$

经迭代，目标函数值减小，由于基本可行解的个数有限，因此经有限次迭代必能达到最优解

定理：对于非退化问题，单纯形方法经有限次迭代或达到最优基本可行解，或得出无界的结论.

$$\min \quad f \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{c x}$$
$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{A x} = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0},$$

■ 单纯形方法原理

➤使用表格形式的单纯形法

（1）构造单纯形表

记

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_B \\ \boldsymbol{x}_N \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_B, \boldsymbol{c}_N)$$

标准形的等价形式

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N = 0, \\ & \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_B \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_N \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N = 0, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_B \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_N \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

（1）构造单纯形表

对 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}$ **两边同左乘** $\boldsymbol{B}^{-1}$

$$\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

左乘 $\boldsymbol{c}_B$**，加入式** $f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N = 0$

得到

$$f + 0 \cdot \boldsymbol{x}_B + (\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_N)\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f \\
\text{s.t.} \quad & f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N = 0, \\
& \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x}_B \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_N \geqslant \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

（1）构造单纯形表

原等式约束

$$
\begin{aligned}
f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N &= 0 \\
\boldsymbol{B} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N &= \boldsymbol{b}
\end{aligned}
$$

得到等价约束

$$
\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}
$$

$$
f + 0 \cdot \boldsymbol{x}_B + (\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} - \boldsymbol{c}_N) \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b}
$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - c_B x_B - c_N x_N = 0, \\ & B x_B + N x_N = b, \\ & x_B \geqslant 0, \quad x_N \geqslant 0. \end{aligned}$$

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

（1）构造单纯形表

于是得到等价的线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b, \\ & f + 0 \cdot x_B + (c_B B^{-1} N - c_N) x_N = c_B B^{-1} b, \\ & x_B \geqslant 0, \quad x_N \geqslant 0. \end{aligned}$$

将等式约束方程的系数置于表中，得单纯形表

	f	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$

■ 单纯形方法原理

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - c_B x_B - c_N x_N = 0, \\ & B x_B + N x_N = b, \\ & x_B \geqslant 0, \quad x_N \geqslant 0. \end{aligned}$$

➢使用表格形式的单纯形法

（1）构造单纯形表

	f	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

$\boxed{B^{-1}N\text{有 } n-m \text{ 个列}}$

$$\begin{aligned} B^{-1}N &= B^{-1}(p_{N_1}, p_{N_2}, \cdots, p_{N_{n-m}}) \\ &= (B^{-1}p_{N_1}, B^{-1}p_{N_2}, \cdots, B^{-1}p_{N_{n-m}}) \\ &= (y_{N_1}, y_{N_2}, \cdots, y_{N_{n-m}}), \end{aligned}$$

$\boxed{B^{-1}b\text{ 是 } m \text{ 维列向量}}$

$$B^{-1}b = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \cdots, \bar{b}_m)^{\mathrm{T}}$$

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f \\
\text{s.t.} \quad & f - c_B x_B - c_N x_N = 0, \\
& B x_B + N x_N = b, \\
& x_B \geqslant 0, \quad x_N \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

（1）构造单纯形表

	f	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f	1	0	$c_B B^{-1} N - c_N$	$c_B B^{-1} b$

$\boxed{c_B B^{-1} N - c_N}$：**1×(n-m)的行向量**

$$
\begin{aligned}
c_B B^{-1} N - c_N &= c_B B^{-1}(p_{N_1}, \cdots, p_{N_{n-m}}) - (c_{N_1}, \cdots, c_{N_{n-m}}) \\
&= (z_{N_1}, \cdots, z_{N_{n-m}}) - (c_{N_1}, \cdots, c_{N_{n-m}}) \\
&= (z_{N_1} - c_{N_1}, \cdots, z_{N_{n-m}} - c_{N_{n-m}}),
\end{aligned}
$$

非基变量判别数

$\boxed{c_B B^{-1} b \text{ 是在现行基本可行解处的目标函数值}}$

■ 单纯形方法原理

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - c_B x_B - c_N x_N = 0, \\ & B x_B + N x_N = b, \\ & x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0. \end{aligned}$$

➢使用表格形式的单纯形法

（1）构造单纯形表

	f	x_B	x_N	右端
x_B	0	I_m	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$
f	1	0	$c_B B^{-1}N - c_N$	$c_B B^{-1}b$

	x_{B_1}	$\cdots$	x_{B_r}	$\cdots$	x_{B_m}	$\cdots$	x_j	$\cdots$	x_k	$\cdots$	
x_{B_1}	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{1j}	$\cdots$	y_{1k}	$\cdots$	$\bar{b}_1$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_r}	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	y_{rj}	$\cdots$	y_{rk}	$\cdots$	$\bar{b}_r$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_{B_m}	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	y_{mj}	$\cdots$	y_{mk}	$\cdots$	$\bar{b}_m$
f	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	$z_j - c_j$	$\cdots$	$z_k - c_k$	$\cdots$	$c_B\bar{b}$

单纯形表中包含了单纯形方法所需要的全部数据

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - c_B x_B - c_N x_N = 0, \\ & B x_B + N x_N = b, \\ & x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0. \end{aligned}$$

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

（2）用单纯形表求解线性规划问题

①单纯形表含有m阶单位阵，可直接给一个基本可行解

$$x_B = \bar{b}, \qquad x_N = 0 \ .$$

②若$c_B B^{-1} N - c_N \leq 0$则现行基本可行解就是最优解

③若$c_B B^{-1} N - c_N \nleq 0$ 则用主元消去法求改进的基本可行解

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

（2）用单纯形表求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - c_B x_B - c_N x_N = 0, \\ & B x_B + N x_N = b, \\ & x_B \geq 0, \quad x_N \geq 0. \end{aligned}$$

主元消去法：（1）确定主元

※先选择进基变量。如在表的最后一行中，有

$z_k-c_k=\max z_j-c_j$ 则选择x_k→对应的列为主列

※再确定离基变量x_{Br},令

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0\right\}$$

第r行为主行

主元：y_{rk}

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f \\
\text{s.t.} \quad & f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N = 0, \\
& \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}, \\
& \boldsymbol{x}_B \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_N \geqslant \boldsymbol{0}.
\end{aligned}
$$

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

（2）用单纯形表求解线性规划问题

主元消去法：（2）主元消去

主行（第r行）除以主元，接着通过行变换把主列单位向量化，其中主元所处位置为1

$\boxed{\text{主元消去，实现了基的转换}\quad \mathbf{x_k \longleftrightarrow x_{Br}}}$

基变量的系数矩阵在表中总是单位矩阵，因此右端列b就是新的基变量取值

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

（2）用单纯形表求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min\quad & f \\ \text{s.t.}\quad & f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N = 0, \\ & \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_B \geq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_N \geq \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

主元消去前后在两个不同基下判别数及目标函数值分别有下列关系

$$(z_j - c_j)' = (z_j - c_j) - (y_{rj}/y_{rk})(z_k - c_k)$$

$$(\boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b})' = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{b} - (\bar{b}_r / y_{rk})(z_k - c_k)$$

$$\begin{aligned} \min \quad & f \\ \text{s.t.} \quad & f - \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{x}_B - \boldsymbol{c}_N \boldsymbol{x}_N = 0, \\ & \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}_B + \boldsymbol{N} \boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x}_B \geqslant \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x}_N \geqslant \boldsymbol{0}. \end{aligned}$$

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

例子：用单纯形表求解线性规划问题

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10, \\ & 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leqslant 8, \\ & -x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leqslant 4, \\ & x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 4. \end{aligned}$$

解：标准化处理

■ 单纯形方法原理

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\}$$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$$

➢使用表格形式的单纯形法

引进松弛变量 x_5，x_6，

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - 2x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 10, \\
& 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_5 = 8, \\
& -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_6 = 4, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \cdots, 6.
\end{aligned}$$

构造单纯形表 **$k=2, x_2$进基**

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	1	1	−2	1	0	0	10
x_5	2	−1	4	0	1	0	8
x_6	−1	$\boxed{2}$	−4	0	0	1	4
	−1	2	−1	0	0	0	0

主元y_{32}

$r=3, x_6$退基

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\}$$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$$

$k = 3, x_3$进基

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{3}{2}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	8
x_5	$\frac{3}{2}$	0	$\boxed{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	10
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	-2	0	0	$\frac{1}{2}$	2
	0	0	3	0	0	-1	-4

主元y_{23}

$r = 2, x_5$退基

■ 单纯形方法原理

➢使用表格形式的单纯形法

$$z_k - c_k = \max\{z_j - c_j\}$$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \mid y_{ik} > 0\right\}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{3}{2}$	0	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	8
x_3	$\frac{3}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	5
x_2	1	1	0	0	1	1	12
	$-\frac{9}{4}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$	-19

最优表

所有判别数$z_j - c_j \leq 0$→达到最优解

最优解： $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0，12，5，8)$

最优值： $f_{min}= -19$

■ 作业

P119：

1(3)、2(8)