Шишкова Анна, 301

Отчет по игре «Деление на 9…»

1. Описание игры.

Правила.

Два игрока по очереди (сначала первый, потом второй) записывают в одну строчку (слева направо) цифры от 1 до 5, пока не получится 2N-значное число, N обговаривается заранее. Если полученное число делится на 9, выигрывает второй игрок, если не делится – первый.

Например,

Играют Вася и Петя.
Длина числа равна 6, первым ходит Петя.
1) Петя ставит 2,
2) Вася ставит 1,
3) Петя – 4,
4) Вася – 2,
5) Петя – 3,
6) Вася – 5.
Получили число 214235.

Признак делимости на 9: число делится на 9 ⇔ сумма его цифр делится на 9.

2+1+4+2+3+5 = 17, число не делится на 9. Значит, победил Петя, который ходил первым.

Более того, на последнем ходе Вася ничего уже не мог сделать: сумма предыдущих пяти цифр равна 12 и ни 12+1=13, ни 12+2=14, ни 12+3=15, ни 12+4=16, ни 12+5=17 не делится на 9.

Казалось бы естественным, что второй игрок в проигрышном положении (ведь среди всех чисел лишь одно из девяти будет делиться на 9, а тут еще и ограничения по возможным ходам).

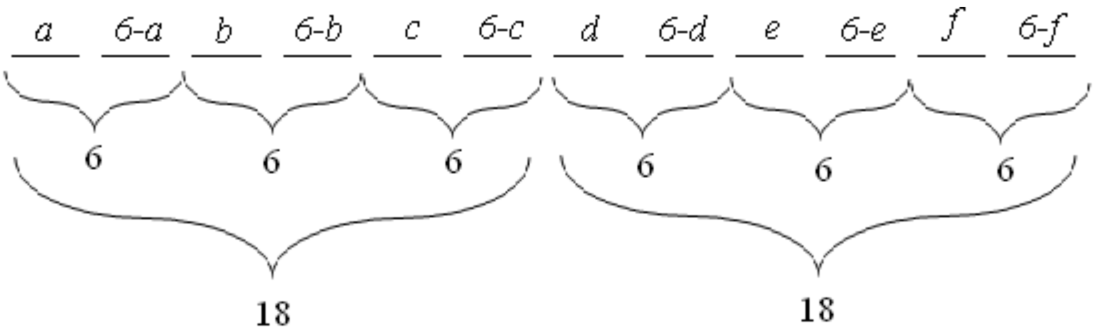
Но если бы Вася задумался раньше, он мог бы выиграть. Чтобы понять, как именно ему следовало бы действовать, перейдем к описанию выигрышных стратегий.

Выигрышные стратегии.

Здесь важна длина 2N полученного числа (она всегда четная: 2, 4, 6, 8, 10, 12…).

1.1 Если 2N делится на 3 ⇒ 2N $\vdots$ 6 (то есть длина числа равна 6, 12, 18, 24…), то второй всегда сможет выиграть. Для этого он всегда должен доводить сумму своей цифры и предыдущей до 6. То есть если противник поставил число a, то нужно поставить 6–a. Это всегда возможно, так как $1 \le a \le 5 \Leftrightarrow -5 \le a \le -1 \Leftrightarrow 6-5 = 1 \le a \le 6-1 = 5$.

Таким образом, каждая шестерка цифр разбивается на три пары, каждая из которых дает в сумме 6, и три таких пары дают в сумме 18 $\vdots$ 9.



18k $\vdots$ 9, то есть число, собранное из k шестерок цифр, которые в сумме равны 18, всегда будет делиться на 9. На рисунке k = 2.

Значит, Вася мог выиграть, придерживаясь указанной стратегии.

Пусть Петя, который ходит первым, ставит те же самые числа (мы уже показали, что его ходы ни на что не влияют при правильной игре Васи).

Как теперь будет ходить Вася, чтобы выиграть?

Снова длина числа равна 6, первым ходит Петя.

1) Петя ставит 2

2) Вася ставит 6-2 = 4

3) Петя – 4

4) Вася – 6-4 = 2

5) Петя – 3

6) Вася – 6-3 = 3.

Получили число 244233.

2+4+4+2+3+3 = 18, число делится на 9. Значит, победил Вася, который ходил вторым.

1.2. Но что будет, если Вася вдруг ошибется? Сможет ли Петя выиграть у него в таком случае? Да, сможет. Покажем, как именно. Петя может ошибиться, сделав сумму его цифры и предыдущей а) меньше 6-ти или б) больше 6-ти.

Допустим, в предыдущих k шестерках (k может быть и нулевым) сумма, как и положено, по 18.

Теперь в одной из пар текущей шестерки Вася ошибается и делает сумму а) меньше 6.

Тогда Петя доводит ее до 6 (то есть его ход: (6-*a*-*a1*), где *a* и *a1* – две предыдущие цифры. После этого он начинает ходить (6-x), где x – предыдущая цифра. Место, в котором ошибся Вася (в том числе, в какой из пар текущей шестерки), не принципиально, так как от перемены мест слагаемых сумма цифр, определяющая делимость на 9, не меняется.

$$\underbrace{\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ }_{18\,k}\quad \underbrace{\underline{a}\ \ \underline{a1<6\text{-}a}\ \ \underline{6\text{-}a\text{-}a1}}_{6}\quad \underbrace{\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ }_{6\,m}\quad \underline{\ ?\ }$$

$m \not\vdots\, 3$, т.к. $(m+2) \vdots\, 3$

(m+2) ⋮ 3, потому что изначально четная длина числа делилась на 3, мы его разбивали на шестерки и каждую шестерку – на три пары с суммой 6. Но ходом (6-*a*-*a1*) мы исключили две пары, оставив только m пар, поэтому 6m – не делится на 3.

Имеем: 18k ⋮ 9, 6 + 6m = 6(m+1) – не делится.

Тот, кто ходит последним, (Вася) хочет поставить x такое, чтобы 6 + 6m + x делилось на 9.

Наименьшая цифра, превращающая эту сумму в подходящую – 6:

6+6m+6 = 6(m+2) ⋮ 9, так как 6 ⋮ 6 и (m+2) ⋮ 3.

Но по условию игры можно ставить только цифры от 1 до 5 и Васе уже никак не выиграть.

Что делать Пете, если Вася ошибется и поставит сумму б) больше 6? Тогда Петя должен довести эту сумму до 12 (это всегда возможно, если уже есть сумма больше 6 и цифры от 1 до 5). А далее снова ходить (6-x).

$$\underbrace{\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ }_{18\,k}\quad \underbrace{\underline{a}\ \ \underline{a1>6\text{-}a}\ \ \underline{12\text{-}a\text{-}a1}}_{12}\quad \underbrace{\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ }_{6\,m}\quad \underline{\ ?\ }$$

$m \not\vdots\, 3$, т.к. $(m+2) \vdots\, 3$

Имеем:

$18k \vdots 9$

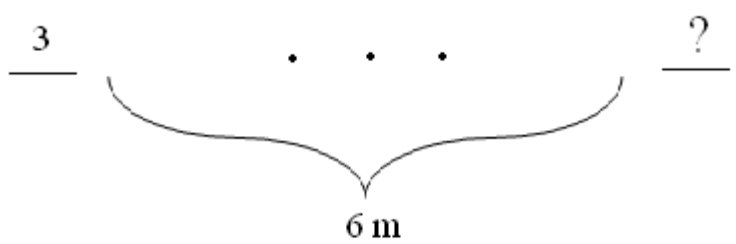
$12 + 6m = 6\cdot2+6m = 6(m+2)$ – тоже делится на 9.

Минимальное, что нужно добавить, чтобы сумма снова делилась на 9, это саму цифру 9, но опять же по условию можно ставить только цифры от 1 до 5 и Вася проигрывает.

Итак, если длина числа делится на 3, то при безошибочной игре выигрывает тот, кто ходил вторым, а при его единственной ошибке первый игрок может перенять инициативу.

Дальнейшие возможные ошибки рассматривать не будем, так как предполагается, что компьютер ошибиться не может и при изначально выигрышном положении (длина числа делится на 3, первым ходит игрок, вторым – компьютер) компьютер выигрывает, а при изначально проигрышном (длина числа делится на 3, первым ходит компьютер, вторым – игрок) компьютер ждет, пока игрок хотя бы один раз ошибется, и (если это случается) снова выигрывает (иначе выигрывает игрок, придерживающийся описанной выше стратегии).

2.1. Теперь рассмотрим ситуацию, когда 2N не делится на 3, то есть длина числа равна 4, 8, 10, 14, 16, 20… . Тогда всегда сможет выиграть тот, кто ходит первым. Для этого он на первом ходе ставит цифру 3, а все оставшиеся ходы доводит сумму своей цифры и предыдущей до 6.



Если $6m \vdots 9$, то для того, чтобы получить сумму всех цифр, делящуюся на 9, на последнее место нужно поставить 6. Но это невозможно, выигрывает первый.

Если 6m не делится на 9, значит, $6m = 18k + 6$ (так как длина числа не делится на 3) и $3+3m = 9+18k \vdots 9$. Чтобы получить сумму всех цифр, делящуюся на 9, на последнее место нужно поставить 9, но это противоречии правилам игры. Снова выигрывает первый.

2.2. Сможет ли как-нибудь второй игрок помешать первому, если первый ошибется?

Первый может ошибиться, либо 1) поставив на первое место не 3: 1а) больше, чем 3, 1б) меньше, чем 3; либо 2) не довести сумму до 6: сделать ее 2а) больше, чем 6, 2б) меньше, чем 6.

И каждый из этих случаев может произойти в одной из двух различных ситуаций:

mod1 – N (половина длины числа) делится на 3 с остатком 1 и
mod2 – N делится на 3 с остатком 2.

Будем рассматривать в терминах «игрок-компьютер» (длина числа не делится на 3, игрок ходит первым => компьютер в проигрышном положении).

1) Пусть на первое место игрок поставил не 3, а другую цифру:

1а) больше, чем 3, то есть 4 или 5. В этом случае компьютер за один ход доводит сумму до 9: ставит (9-*a*), где *a* – первая цифра. В случае mod1 этого достаточно: уже есть сумма делящаяся на 9, а оставшуюся часть можно разбить на шестерки цифр с суммой 18 (как было описано выше), то есть далее компьютер всё время ходит (6-x), где x — предыдущая цифра на каждом ходу. В случае mod2 оставшаяся длина числа соответствует параметрам mod1, и мы сводим задачу к предыдущей (снова ждем ошибки пользователя, как будто игра началась только сейчас).

1б) Если на первое место игрок поставил цифру меньше, чем 3, то есть 1 или 2. В этом случае компьютер за два хода доводит сумму до 9: сначала (3-*a*), а на следующем ходе — (6-x). В случае mod2 этого достаточно: уже есть сумма делящаяся на 9, а оставшуюся часть можно разбить на шестерки цифр с суммой 18 (как было описано выше), то есть далее компьютер всё время ходит (6-x), где x — предыдущая цифра на каждом ходу. В случае mod1 оставшаяся длина числа соответствует параметрам mod2, и мы сводим задачу к предыдущей (снова ждем ошибки пользователя, как будто игра началась только сейчас).

2) Пусть на первое место игрок, как и положено, поставил 3. А дальше ошибся и не довел сумму до 6.

2а) Если сумма его цифры и предыдущей равна 10, в случае mod2 компьютер доводит её до 15. этого достаточно, так как теперь есть сумма 18 ⋮ 9, а оставшаяся часть длины числа делится на шестёрки, в которых каждую пару можно довести до 6. То есть в случае, когда в mod2 игрок ошибается, доведя сумму своей цифры и предыдущей до 10, компьютер ставит 5, а дальше ходит (6-x), где x – предыдущая цифра.

Если сумма цифры игрока и предыдущей больше 6, в обоих случаях (но для mod2 сумма не равна 10) компьютер доводит её до 12.

В случае mod1 этого достаточно, так как теперь 12 и можно сделать четное количество пар с суммой 6 (то есть ходить (6-x)). 3 + 12 + 12m = 15 + 12m, при делении на 9 получим 4n + 3, где n — целое для m = 3n + 1 — как раз половина остатка.

В случае mod2 нужно несколько раз (от нуля до двух раз, в зависимости от места, где ошибся игрок) сходить (6-x), чтобы получить сумму делящуюся на 9. После этого оставшаяся длина числа будет соответствовать параметрам mod1, и мы сводим задачу к предыдущей (снова ждем ошибки пользователя, как будто игра началась только сейчас).

2б) Если сумма цифры игрока и предыдущей меньше 6, компьютер доводит её до 6. В mod1 этого достаточно (дальше компьютер ходит (6-x)), а из mod2 происходит переход в состояние mod1 (снова ждем ошибки пользователя, как будто игра началась только сейчас).

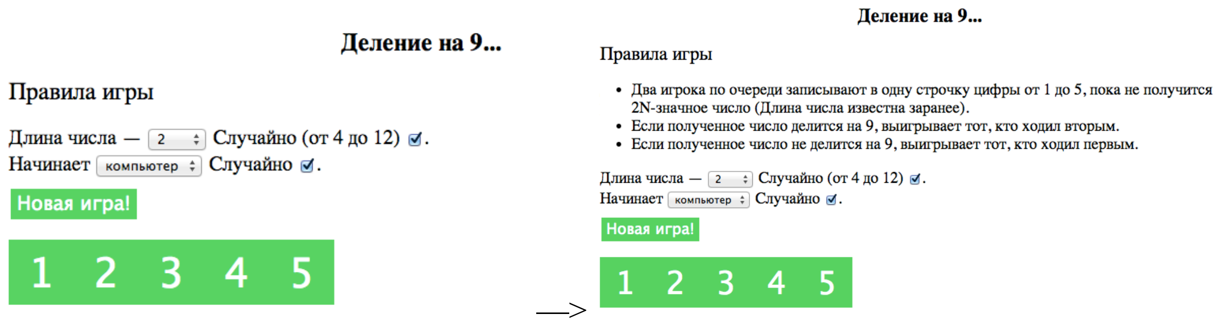
Итак, если длина числа не делится на 3, то при безошибочной игре выигрывает тот, кто ходил первым, и даже при некоторых ошибках второй не всегда может перенять инициативу.

Этот результат вполне предсказуем, ведь, как мы уже отмечали ранее, среди всех чисел лишь одно из девяти будет делиться на 9, а тут еще и ограничения по возможным ходам.

2. Инструкция по работе с программой.

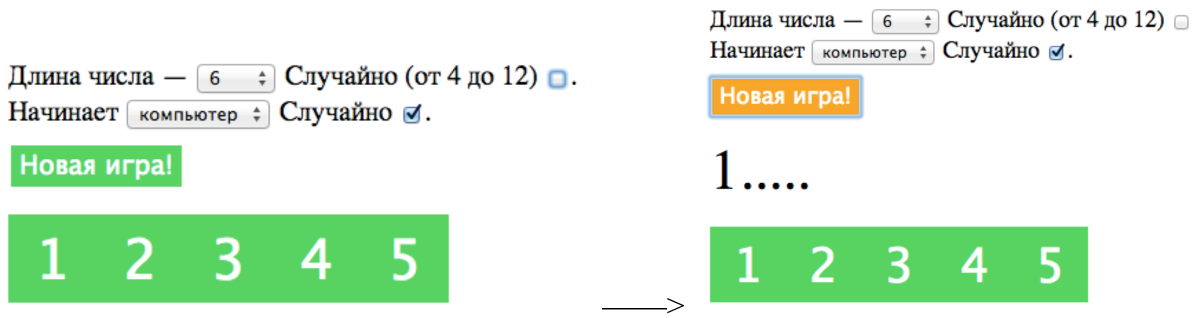
Для запуска программы не потребуется ничего, кроме браузера: в любом современном браузере нужно открыть файл index.html.

Для того, чтобы посмотреть правила игры, нужно кликнуть по словам «Правила игры».

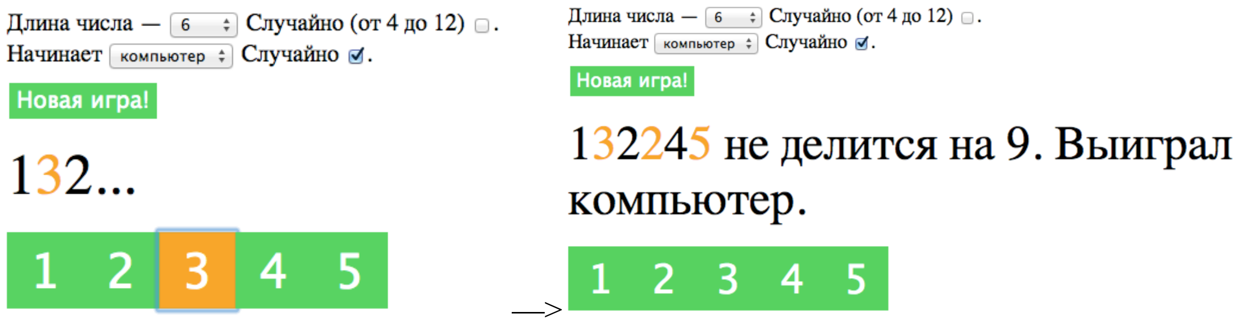


Далее выбираем длину числа из выпадающего списка (не забыв снять галочку «Случайно» справа) или оставляем случайный выбор от 4 до 12. Аналогично выбираем, кто ходит первым, нажимаем кнопку «Новая игра!».

После этого на экране появляются точки, соответствующие еще не написанным цифрам. Возможно, первая цифра уже стоит, если перым ходит компьютер.



Теперь нажимаем кнопки с цифрами 1, 2, 3, 4, 5, чтобы сделать ход. Сразу же появляется следующая цифра, поставленная компьютером. Когда число дописано (все точки заменены цифрами), на экране появляется результат игры.



Цифры, поставленные компьютером, — черные, а цифры, поставленные игроком, — оранжевые. Игру можно начать заново в любой момент, нажав кнопку «Новая игра!».

3. **Тесты**

Вот некоторые примеры игр. Последовательность ходов очевидна (см предыдущий пункт).

Игрок бездумно нажимает на кнопки:

Длина числа — 2 Случайно (от 4 до 12) ☑.
Начинает компьютер Случайно ☑.

Новая игра!

411335124154 не делится на 9. Выиграл компьютер.

Игрок изначально в проигрышном положении:

244215 делится на 9. Выиграл компьютер.

Игрок в выигрышном положении применил выигрышную тактику:

154251 делится на 9. Выиграл игрок.

Игрок в выигрышном положении, но ошибся на своем втором ходу (поставил четвертой цифрой 2, а не 3):

513214251244 не делится на 9. Выиграл компьютер.

Игрок в выигрышном положении применил выигрышную тактику:

3243315332 не делится на 9. Выиграл игрок.

Игрок в выигрышном положении, но ошибся на первом же ходу (поставил первой цифрой 2, а не 3):

2142513324 делится на 9. Выиграл компьютер.