

## 摘要

在实际应用中，复杂系统具有模型复杂、规模大、变量多、约束多等特点，传统的控制方法无法满足复杂系统控制的要求。近些年来，分布式模型预测控制（Distributed Model Predictive Control，简称DMPC）以其优良的控制性能、有效处理约束的能力和结构的灵活性等优点得到了广泛关注，成为了处理大规模复杂系统的重要工具。目前，该方法尚处在研究初期，依然存在许多研究难点。例如，如何处理子系统之间的耦合，使得各个子系统的优化问题能在分布式结构下求解；如何设计每个子系统各自的终端成分，减小在线计算量；如何满足优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环稳定性。

本文以多智能体系统为研究对象，开展了分布式模型预测控制的系列研究，分别研究了多智能体系统的调节问题、一致问题和编队问题，主要研究成果如下：

1、研究了多个异构线性系统的分布式模型预测调节控制问题，智能体系统之间同时存在成本耦合和约束耦合。在每一个采样时刻，所有智能体同步更新。提出了改进的相容性约束，保证每个智能体实际轨迹和假设轨迹的一致性。通过求解李亚普诺夫方程得到终端权重矩阵，从而设计了终端成本；利用耦合约束的信息，设计了正定不变的终端集，并且保证终端集中的状态满足耦合约束。设计了分布式优化算法，保证局部约束和耦合约束的迭代可行性，以及整个系统的闭环稳定性。最后通过仿真实验比较了集中式模型预测控制方法和分布式模型预测控制方法的性能，对比表明在保证系统性能和集中式的性能接近的条件下，分布式方法大大缩短了优化时间，减小了在线计算量。

2、研究了多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制问题，智能体系统之间存在成本耦合，所有智能体共享一个参考轨迹。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界，保证系统的收敛性；在分布式结构下，利用参考轨迹，设计了每个智能体的终端成本、终端控制器和正定不变的终端集。提出了分布式优化算法，保证优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环收敛性。最后，以2-自由度机械臂为例，通过仿真实验验证了算法的有效性。

3、研究了多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制问题，每个智能体到达各自的目标位置形成队形，智能体系统之间存在耦合成本，且需要满足避碰约束。利用同步更新策略，设计了改进的相容性约束，包括位置相容性和状态相容性，同时提出了改进的避碰约束。充分利用系统模型的特点和编队目标，设计了分布式结构下的终端成分，

并且在终端集中依然能保证避碰约束的满足。提出了分布式优化算法，保证优化问题的迭代可行性、整个系统的闭环收敛性以及避碰约束的满足。最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

最后，归纳总结了本文的主要工作，并对今后的工作进行了展望。

**关键词:** 模型预测控制；分布式控制；终端成本；终端控制器；终端集。

## Abstract

In the practical applications, the complex systems have the features of complex model, large scale, a great amount of variables and constraints. However, the traditional control methods cannot satisfy the requirements of the complex systems. Over the past years, distributed model predictive control (DMPC) is becoming an important tool to handle the large-scale complex systems due to its good control performance, capability of handling constraints and the structural flexibility. In the embryonic stage, the research of DMPC is confronted with many difficulties. For example, how to deal with the couplings between subsystems in order to make the optimization problem of each subsystem solvable; how to design the terminal ingredients (terminal cost, terminal controller and positive invariant terminal set) for each subsystem; how to guarantee the recursive feasibility and the closed-loop stability of the whole system.

Motivated by this, this dissertation focuses on the research of DMPC for multi-agent systems and explores the problems of regulation, consensus and formation, respectively. The main contents and results in this dissertation are summarized as follows:

1. A DMPC algorithm is presented for the regulation of linear multi-agent systems with the coupled cost and coupled constraints. At each sampling time, all the agents are permitted to synchronously optimise. An improved compatibility constraint is constructed to ensure the consistency between the actual state trajectory of each agent and its assumed one. With the parameters of the coupled constraints, a positive invariant terminal set, which can definitely ensure the satisfaction of the coupled constraint, and an associated terminal cost (a local Lyapunov function) are designed in a distributed manner. By applying the proposed distributed optimization algorithm, the recursive feasibility with respect to both local and coupled constraints and the closed-loop stability of the whole system are guaranteed. In final, the numerical results of the comparisons between the DMPC algorithm and the centralised model predictive control (CMPC) are given to show the effectiveness of the proposed algorithm. The results show that the DMPC algorithm not only dramatically decreases the optimizing time but also maintains most of the control

performance of CMPC.

2. A DMPC algorithm is investigated for the consensus of second-order nonlinear multi-agent systems with coupled cost. All the agents share one reference trajectory. With the synchronous update strategy, a time-varying compatibility constraint, which plays an important to ensure the stability, is presented to ensure that the actual state trajectory of each subsystem does not deviate too much from its assumed one. Furthermore, a positively invariant terminal region and a corresponding auxiliary controller are developed for each agent. Given the designed terminal ingredients and compatibility constraints, the recursive feasibility and closed-loop stability of the whole system are guaranteed. A numerical example of 2-Degree-of-Freedom (2-DoF) robotic manipulator illustrates the efficacy of the proposed algorithm.

3. A DMPC algorithm is explored for the formation of second-order linear multi-agent systems with collision avoidance. With the synchronous update strategy, the improved compatibility constraints with respect to both the position compatibility and the state compatibility, are designed for each agent. The collision avoidance constraints are tightened by replacing the actual positions of each agent's neighbors with their assumed ones. By using the second-order model and the formation, the terminal ingredients are designed. Particularly, the states in the positively invariant terminal sets satisfy the collision avoidance constraints. By implementing the proposed distributed optimization algorithm, the recursive feasibility of the optimization problem, the closed-loop stability of the whole system and the collision avoidance between agents are guaranteed. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed algorithm.

At the end of this dissertation, the main results are concluded and the problems to be solved in the future are presented.

**Keywords:** Model predictive control (MPC); Distributed control; Terminal cost; Terminal controller; Terminal set.

## 目录

目录	V
第1章 绪论	1
1.1 背景与意义	1
1.2 模型预测控制概括	3
1.2.1 模型预测控制的发展历程	3
1.2.2 模型预测控制的基本原理	3
1.2.3 模型预测控制的基本研究现状	6
1.2.4 模型预测控制研究趋势	8
1.3 大规模复杂系统的模型预测控制	8
1.3.1 集中式模型预测控制	9
1.3.2 分散式模型预测控制	10
1.3.3 分布式模型预测控制	11
1.4 分布式模型预测控制的应用	14
1.5 预备知识	15
1.5.1 基本概念	15
1.5.2 函数定义	16
1.5.3 相关定理	16
1.6 本文主要研究工作和章节安排	17
第2章 多个线性系统的分布式模型预测调节控制	19
2.1 引言	19
2.2 问题的描述	20
2.3 分布式协同模型预测控制	21
2.3.1 相容性约束的设计	23
2.3.2 终端成分的设计	24
2.3.3 分布式实现算法	26
2.4 主要结果	27
2.5 仿真结果和分析	29
2.6 本章小结	34

第3章 多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制 . . . . .	35
3.1 引言 . . . . .	35
3.2 问题的描述 . . . . .	36
3.3 分布式模型预测控制 . . . . .	37
3.3.1 相容性约束的设计 . . . . .	38
3.3.2 终端成分的设计 . . . . .	39
3.3.3 分布式实现算法 . . . . .	42
3.4 主要结果 . . . . .	43
3.5 仿真结果和分析 . . . . .	45
3.6 本章小结 . . . . .	49
第4章 多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制 . . . . .	51
4.1 引言 . . . . .	51
4.2 问题的描述 . . . . .	52
4.3 分布式协同模型预测控制 . . . . .	53
4.3.1 相容性约束的设计 . . . . .	53
4.3.2 避碰约束的设计 . . . . .	54
4.3.3 终端成分的设计 . . . . .	55
4.3.4 分布式实现算法 . . . . .	58
4.4 主要结果 . . . . .	59
4.5 仿真结果和分析 . . . . .	61
4.6 本章小结 . . . . .	64
第5章 总结与展望 . . . . .	67
5.1 研究工作总结 . . . . .	67
5.2 工作展望 . . . . .	68
参考文献 . . . . .	69
攻读硕士学位期间发表论文与研究成果清单 . . . . .	79
致谢 . . . . .	81

## 第1章 绪论

### 1.1 背景与意义

目前，系统结构的复杂、任务需求的复杂、作业环境的复杂成为了控制理论和实践所面临的难题<sup>[1-3]</sup>。例如在深空探测领域，空间飞行器自身规模庞大，集机械技术、电子技术、信息技术、计算机技术、控制技术等于一体，内部结构极其复杂，系统模型往往具有非线性、耦合等特点；同时空间飞行器往往承担复杂的飞行任务，复杂的飞行任务又被分解为数量众多且需要密切协作的子任务。另外，太空环境复杂多变，地磁场、宇宙射线、太空垃圾等因素对飞行器系统造成了众多难以估计的干扰。传统的控制方法和技术难以实现对带有干扰的非线性强耦合系统的有效控制，亟需新的控制理论来解决上述难题。

面对复杂多变的任务需求，一般有以下两种解决方案。一是通过增强系统的机动性，完善系统的功能来满足任务的需求。这种方案势必增加系统的复杂程度，不仅增加研发和生产成本，同时也带来了新的技术难题。除此之外，单个系统在环境感知、信息处理等方面往往具有难以弥补的缺陷。二是由多个成本低、结构简单、感知和通信能力有限的系统密切协同来完成复杂任务。与前者相比，这种方案具有明显的优势：首先，网络通信技术的发展为多系统协同的实现提供了可能性，系统之间可以通过通信实现信息的传递和共享；其次，多系统协同降低了任务实现的风险，子系统的失效不会造成整个系统的瘫痪；最后，多系统协作增强了整个系统的空间作业能力和空间感知能力<sup>[4]</sup>。但是，多系统的协同控制也存在新的难题，例如如何实现系统的稳定性、如何实现任务分解、如何满足子系统的耦合约束等都是现在的研究热点和难点，也是本课题的出发点。一般情况下，多系统的协同控制被广义地称为多智能体系统的协同控制<sup>[5]</sup>。

需要注意的是，以上提到的两种方案不存在相互替代的关系，在不同背景下都具有广泛的应用。前者以机器人系统为例，从简单的工业机器人到现在的智能机器人，机器人结构和功能不断完善，所承担的任务日益复杂，不仅可以在工厂流水线作业降低人力成本，而且可以在餐厅服务替代传统的服务员。后者在多飞行器协同<sup>[6]</sup>、多机器人协同<sup>[7]</sup>等领域都有重要应用。以Robocup<sup>[8]</sup>即机器人世界杯足球锦标赛为例，如图1-1所示，



图 1.1 Robocup小型组比赛

该项赛事致力于通过多个机器人之间的协同实现机器人足球队战胜人类足球队的目标。除此之外，如图1-2所示，美国NASA将飞行器编队作为一种减少飞行器空气阻力的方法。这要求对每个飞行器进行精确地位置调度，以使它们保持在计算出的最佳位置<sup>[9]</sup>。协调聚集也在军事作战<sup>[10]</sup>中得到应用，通过对每个飞行器规划全局最佳路径，来减少飞行器在雷达下的暴露时间。在近十年中，多移动机器人的研究在其他一些新的应用领域也得到了蓬勃的发展，例如移动传感器网络<sup>[11]</sup>和交通运输系统<sup>[12]</sup>。

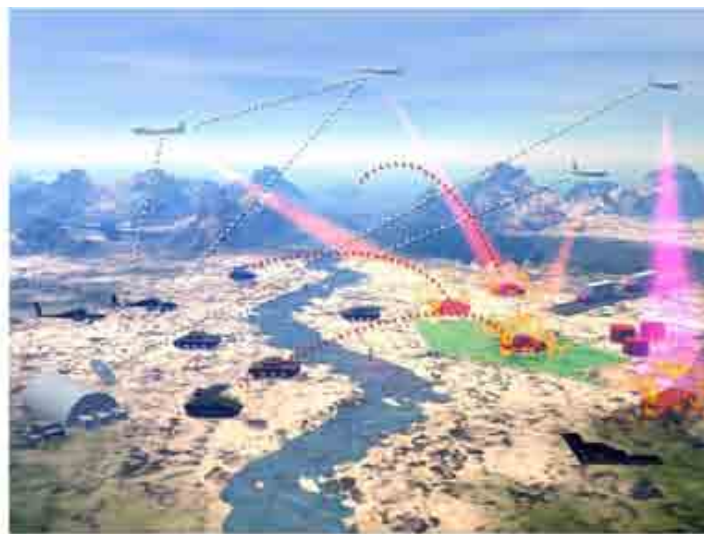


图 1.2 无人机无人坦克军事作战模拟图

在实际系统中，系统的状态和输入往往有限，即存在系统约束<sup>[13]</sup>，而传统的控制理论大多不考虑约束的存在。作为目前唯一能显式处理约束的控制方法，模型预测控制（Model Predictive Control，简称MPC）自诞生以来就备受关注，在诸多领域都有应用，尤其是在过程控制领域更是创造了巨大的经济效益。在多智能体系统的研究中，除了子



系统内部的约束之外，子系统之间也存在耦合，分布式模型预测控制<sup>[14]</sup>成为了解决该问题的一种有效方法，受到了广大学者的关注和研究，但是目前研究成果较少。总之，研究多智能体系统的分布式模型预测控制具有十分重要的理论意义和实际意义。

## 1.2 模型预测控制概括

### 1.2.1 模型预测控制的发展历程

模型预测控制是20世纪70年代在工业过程控制领域中出现的一类新型计算机控制算法，已经成为处理复杂约束变量控制问题的公认标准<sup>[15-17]</sup>。它的出现对复杂工业过程的优化控制产生的巨大的影响，为工业控制领域带来了巨大的经济效益。其发展可以概括为以下几个阶段：20世纪70年代Cutler和Ramaker<sup>[18]</sup>提出模型预测控制的雏形，在过程控制中得到应用；80年代工业预测控制理论得到发展，开始研究优化问题的可行性问题，并在慢动态系统中得到应用；自90年代模型预测控制理论得到蓬勃发展，迭代可行性和闭环稳定性满足的条件被提出；自21世纪开始，鲁棒模型预测控制<sup>[19]</sup>、非线性模型预测控制<sup>[20]</sup>和混合模型预测控制<sup>[21]</sup>得到了广泛的研究，并取得到丰富的成果；2010年后，随机模型预测控制<sup>[22]</sup>、自适应模型预测控制<sup>[23-25]</sup>、分布式模型预测控制<sup>[26-30]</sup>以及经济模型预测控制<sup>[31-33]</sup>引起了学者的重视，目前这些研究尚处于研究初期，仍存在许多研究难点。

### 1.2.2 模型预测控制的基本原理

模型预测控制的工作原理可以简单地描述为<sup>[34]</sup>：在每一个采样时刻，根据获得的系统的当前状态，在线求解一个有限时域开环优化问题。在下一个采样时刻，重复上述过程：用新的测量值刷新优化问题并重新求解。其中，系统的当前状态为最优控制问题的初始状态，解得的最优控制序列只将第一个元素作用于被控对象上，这是它与其他常见控制算法最大的不同。

不失一般性，以离散系统为例，模型预测控制的基本框架为：

$$\begin{aligned} J^*(k, x^*, u^*) &= \min_{u(\cdot)} J(k, x, u) \\ &= \min_{u(\cdot)} \sum_{l=0}^{N-1} L(x(k+l|k), u(k+l|k)) + L_f(x(k+N|k)) \end{aligned}$$

使得对于所有的  $l = 0, 1, \dots, N - 1$

$$x(k|k) = x(k), \quad (1.1)$$

$$x(k + l + 1|k) = f(x(k + l|k), u(k + l|k)), \quad (1.2)$$

$$x(k + l|k) \in \mathbb{X}, \quad (1.3)$$

$$u(k + l|k) \in \mathbb{U}, \quad (1.4)$$

$$x(k + N|k) \in \mathbb{X}_f, \quad (1.5)$$

其中  $L$  为阶段成本,  $L_f$  为终端成本,  $f$  为系统模型,  $\mathbb{X}$  和  $\mathbb{U}$  分别为状态和控制输入的允许集,  $\mathbb{X}_f$  为终端集。一般情况下, 模型预测控制的成本可以表达为二次型, 即

$$L(x(k + l|k), u(k + l|k)) = \|x(k + l|k)\|_Q^2 + \|u(k + l|k)\|_R^2, \quad (1.6)$$

$$L_f(x(k + N|k)) = \|x(k + N|k)\|_P^2, \quad (1.7)$$

其中正定矩阵  $Q$ 、 $R$  和  $P$  需要满足一定条件来确保系统的稳定性。

模型预测控制的主要特点可以概括为<sup>[35, 36]</sup>:

- (1) 依赖预测模型。模型预测控制是基于预测模型的控制方法, 预测模型可以是线性的或非线性的, 可以是单变量的或多变量的, 可以带延时的或不带延时的, 还可以是带约束的或不带约束的。广义地讲, 模型预测控制可以处理任意形式的模型。但是值得注意的是, 模型的准确性直接影响控制性能 (比如稳定性), 而模型的复杂程度也直接影响优化的实时性。
- (2) 滚动优化。模型预测控制采用滚动优化机制, 如图1.3所示, 在每一个采样时刻, 更新初始状态求解优化问题得到新的控制序列, 仅实施控制序列的第一个元素, 从而得到新的状态。因此, 模型预测控制又被称为滚动时域控制 (Receding Horizon Control, 简称RHC)。值得注意的是, 优化问题的目标可以是任意形式的, 可以是误差的平方和, 可以是误差绝对值的和, 可以是最大的误差, 还可以是具有特定意义的经济目标。从某种程度来说, 这种滚动优化机制是模型预测控制能显式处理约束的基础, 也是模型预测控制反馈校正形成闭环控制的前提。
- (3) 反馈校正。模型预测控制在每个采样时刻采样当前系统状态作为新的初始状态, 然后在线求解一个有限时域开环优化问题。初始状态的更新形成了反馈校正机制,

虽然模型预测控制中每一个单独的优化问题是开环的，但是反馈校正机制使得模型预测控制从整体上构成了闭环反馈，这和传统的闭环反馈不同。

- (4) 显式处理约束。模型预测控制是目前唯一能显式处理约束的控制方法，这是由滚动优化机制所决定的。一般来说，系统约束的形式可以是任意的，只要能保证优化问题的可行域非空即可。但是约束的具体形式直接决定了优化问题的复杂程度，如果约束过于复杂，模型预测控制的实时性将无法实现。

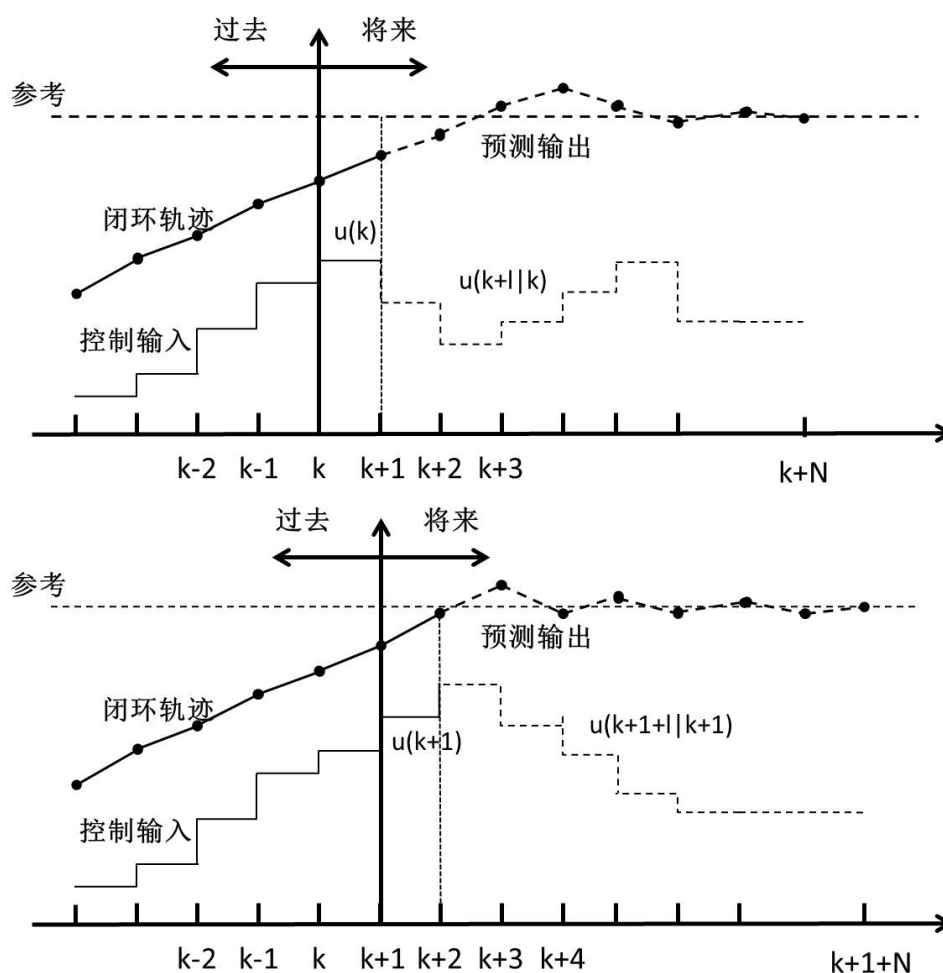


图 1.3 滚动时域控制

从总体上来说，模型预测控制的研究难点包括：

- (1) 实时性。模型预测控制的实时性依赖于求解优化问题的速度。除了凸优化问题之外，大部分优化问题都很难求解，或者求解速度很慢。为了提高模型预测控制的实

时性，除了提高硬件的处理速度之外，还需要研究先进的求解算法。目前除了慢动态系统之外，大部分系统对实时性的要求都很高。因此，模型预测控制的实时性直接决定了其未来的应用前景。

- (2) 闭环稳定性。由于模型和约束的不同，模型预测控制的稳定性有时难以满足。研究模型预测控制稳定性的主要思路是将系统的目标函数设定为李亚普诺夫函数，保证李亚普诺夫函数是单调递减。对于有限时域模型预测控制问题，文献[37]给出了保证系统稳定性时，终端成分需要满足的条件。
- (3) 迭代可行性。迭代可行性是模型预测控制得以实施的重要保证。如果优化问题不可行，那么整个系统的控制将失效，导致系统性能恶化。目前研究模型预测控制的迭代可行性的前提是假设优化问题初始可行。对于有限时域模型预测控制问题，文献[37]给出了保证系统迭代可行性时，终端成分需要满足的条件。

### 1.2.3 模型预测控制的基本研究现状

图1.4展现了确定系统的模型预测控制的不同情况。当不考虑系统不确定性时，目前针对线性系统的模型预测控制不仅理论成果丰富，而且在工业上也得到了广泛的应用，成熟的商业软件和实际案例一般都是针对线性系统的，这是因为现有的优化算法和硬件处理针对线性系统的优化问题时能满足实时性的要求。研究表明，线性无穷时域无约束模型预测控制和线性二次型调节器（Linear Quadratic Regulation，简称LQR）<sup>[38]</sup>等价。对于无约束的有限时域模型预测控制问题，可以通过动态规划求解控制器的显式结构，即可以得到状态反馈增益。对于带有约束的有限时域模型预测控制<sup>[39]</sup>，为了确保系统的稳定性，可以通过求解代数Riccati方程得到终端权重矩阵 $P$ ，终端控制器为简单的状态反馈形式，同时终端集为正定不变集。非线性模型预测控制方法在理论上也取得了丰富的成果，已经在原理上解决了稳定性和可行性等问题。对于带有约束的非线性模型预测控制<sup>[40]</sup>，为了满足稳定性和可行性的要求，一般假设系统方程 $f(\cdot)$ 二次连续可导，同时在平衡点附件将系统线性化得到系统矩阵和输入矩阵，通过求解Lyapunov方程得到终端权重矩阵 $P$ ，和线性系统一样，终端控制器也采用状态反馈形式。然而在工业上非线性模型预测控制应用尚少，主要原因有两方面：一是工业系统很难建立准确的非线性模型，机理建模成本高；二是现有的非线性优化算法难以满足工业现场实时性的要求。

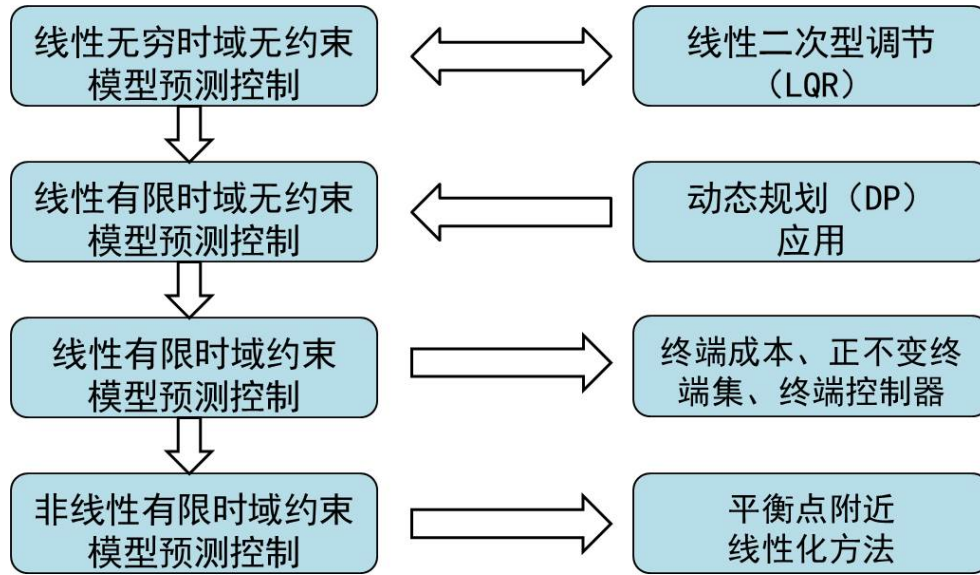


图 1.4 确定系统的模型预测控制

若使用理想的、精确的系统模型作为预测模型，模型预测控制获得的效果自然最好。然而，对于现实世界的控制对象，无论是工业过程还是社会系统，总是广泛存在着不确定因素和各种外界干扰，因此很难建立被控对象的精确模型。我们将含有不确定性的系统称为不确定系统。如果采用基于标称模型设计的模型预测控制器对不确定系统进行控制，其闭环系统的可行性、稳定性都可能受到影响，甚至会导致系统无可行解和不稳定。因此，研究针对不确定系统的模型预测控制器设计方法具有重要的现实意义，并且已经成为预测控制理论研究的重点。

针对不确定系统，目前主要存在两类不同的模型预测控制策略。一类是通过考虑模型不确定性的最糟糕情况来设计模型预测控制策略，进而保证对所有可能的不确定性实现该策略都是有效的，这种方法称为鲁棒模型预测控制。鲁棒模型预测控制的研究从上世纪90年代开始，到现在为止已经形成了丰富的成果<sup>[41-43]</sup>。 $\min\text{-max}$ <sup>[44-46]</sup>方法是一种典型的鲁棒模型预测控制方法，即在扰动或者不确定性达到最坏的情况下，通过最小化成本函数来计算最优控制作用，要求庞大的在线计算量。并且，由于最糟糕情况时不确定性可能是任意大的且在实际中往往不一定发生，因此针对最糟糕情况的不确定性进行控制器设计容易导致较强的保守性，甚至可能出现优化问题没有可行解<sup>[47]</sup>。另外，早期的鲁棒模型预测控制在假设状态可观的条件下采用状态反馈的形式。但是在实际中多数系统不满足系统可观条件，为此基于输出反馈的鲁棒模型预测控制得到了广泛的研究，而



且系统的可行性和稳定性成了新的难题。针对带有加性噪声的定常系统，文献[48]利用时变的状态估计器和基于Tube的输出反馈模型预测控制器保证了系统的迭代可行性和稳定性。

另一方面，如果已知系统不确定性的概率信息（例如，分布分布函数或一阶矩和二阶矩），并且将这些概率信息合理的应用到预测控制器的设计中，就可以得到保守性较低的设计，这种方法称为随机模型预测控制<sup>[49-52]</sup>。随机模型预测控制保守性低，而且带有概率约束的随机模型预测控制更具有现实意义。除了稳定性和可行性要求之外，庞大的计算量也是随机模型预测控制遇到的难题。针对带有随机约束的系统，文献[53]提出了一种随机Tube的模型预测控制策略，不仅可以满足系统的稳定性，而且降低了在线的计算量。总体上说，由于随机模型预测控制的研究难度大，尚处于研究初期。

#### 1.2.4 模型预测控制研究趋势

模型预测控制已经在慢动态的工程控制得到了广泛的应用，但是在实时性要求高的系统中应用时一般都不考虑约束，而且系统一般都做线性化处理。因此研究和发展约束模型预测控制的理论和高效算法已成为当务之急<sup>[54]</sup>。其中除了非线性模型预测控制之外，分布式模型预测控制研究也是一个重要的研究趋势，需要新的理论处理子系统耦合、不确定性、动态跟踪等问题<sup>[55-58]</sup>。而分布式模型预测控制的一个重点研究方向是如何将现有的涉及终端集、终端成本和终端控制器的理论推广和扩展到分布式模式下，而且这些元素相互解耦。除此之外，为了满足实时性要求，研究高效的优化算法也成为了新的研究热点，例如实时模型预测控制<sup>[59]</sup>就是一项重要成果。

### 1.3 大规模复杂系统的模型预测控制

一般情况下，大规模复杂系统组成单元多，模型复杂，变量多，约束多，一般的模型预测控制方法难以处理。随着通信技术的发展，除了传统的递阶控制结构外，近年来，研究者提出了不同结构的控制方法来处理此类问题。下面，我们以 $N_a$ 个动态解耦的线性时不变子系统为例分别对集中式、分散式和分布式三种控制结构下的模型预测控制进行介绍，并比较不同结构的优缺点。每个子系统模型为

$$x_i(k+1) = A_i x_i(k) + B_i u_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, N_a, \quad (1.8)$$

其中状态和控制约束分别为 $x_i \in \mathbb{X}_i$ 和 $u_i \in \mathbb{U}_i$ 。

### 1.3.1 集中式模型预测控制

考虑 $N_a$ 个动态解耦的子系统 (1.8)，整个系统的模型可以描述为：

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (1.9)$$

$$\text{其中 } x(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{N_a}(k) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & A_{N_a} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & B_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & B_{N_a} \end{bmatrix},$$

$$u(k) = \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ \vdots \\ u_{N_a}(k) \end{bmatrix}。 \text{ 整个系统需要满足的约束为： } x \in \mathbb{X} \triangleq \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 \times \dots \times \mathbb{X}_{N_a} \text{ 和 } u \in \mathbb{U} \triangleq \mathbb{U}_1 \times \mathbb{U}_2 \times \dots \times \mathbb{U}_{N_a}。 \text{ 集中式模型预测控制的结构图如图1.5所示。}$$

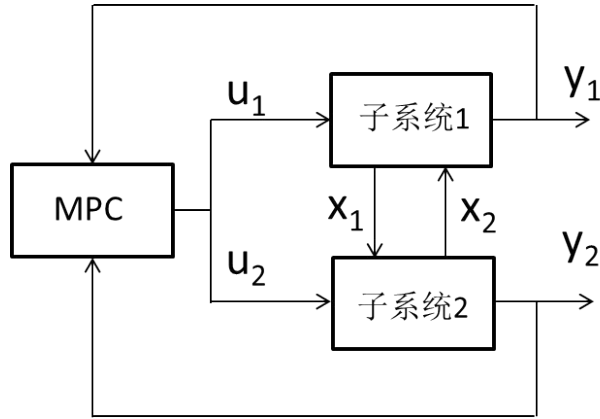


图 1.5 集中式模型预测控制

集中模型预测控制的优化问题可以描述为：

$$\min_{u(\cdot)} J(k, x, u) = \min_{u(\cdot)} \sum_{l=0}^{N-1} [\|x(k+l|k)\|_Q^2 + \|u(k+l|k)\|_R^2] + \|x(k+N|k)\|_P^2$$

使得对于所有的  $l = 0, 1, \dots, N - 1$

$$x(k|k) = x(k), \quad (1.10)$$

$$x(k + l + 1|k) = Ax(k + l|k) + Bu(k + l|k), \quad (1.11)$$

$$x(k + l|k) \in \mathbb{X}, \quad (1.12)$$

$$u(k + l|k) \in \mathbb{U}, \quad (1.13)$$

$$x(k + N|k) \in \mathbb{X}_f. \quad (1.14)$$

集中式模型预测控制需要求解整个系统的优化问题，因此得到的控制器是最优的，系统的性能也是最优的。但是如果控制器失效或者发生故障，整个系统将无法正常工作甚至瘫痪，这是集中式结构的最大隐患。除此之外，系统庞大的规模增加了在线计算负担，实时性更难以保证。

### 1.3.2 分散式模型预测控制

与集中式结构不同，分散式模型预测控制（Decentralized MPC）<sup>[60-65]</sup>将整个系统分割成若干子系统，每个子系统分别设计自己的控制器，控制器之间不存在信息交换，其结构如图1.6所示。

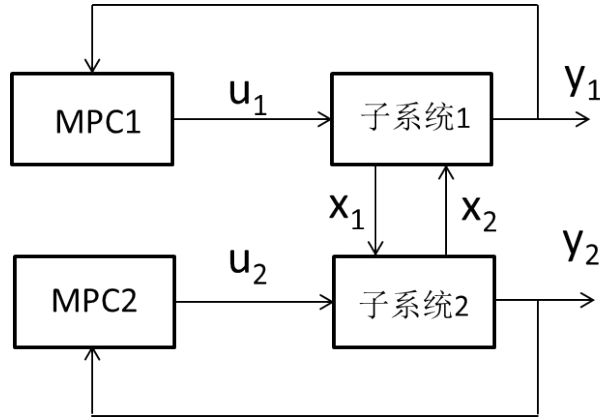


图 1.6 分散式模型预测控制

一般情况下，分散式模型预测控制的优化问题可以描述为：对于子系统  $i = 1, 2, \dots, N_a$

$$\min_{u_i(\cdot)} J_i(k, x_i, u_i) = \min_{u_i(\cdot)} \sum_{l=0}^{N-1} [\|x_i(k + l|k)\|_{Q_i}^2 + \|u_i(k + l|k)\|_{R_i}^2] + \|x_i(k + N|k)\|_{P_i}^2$$



使得对于  $l = 0, 1, \dots, N - 1$

$$x_i(k|k) = x_i(k), \quad (1.15)$$

$$x_i(k + l + 1|k) = A_i x(k + l|k) + B_i u_i(k + l|k), \quad (1.16)$$

$$x_i(k + l|k) \in \mathbb{X}_i, \quad (1.17)$$

$$u_i(k + l|k) \in \mathbb{U}_i, \quad (1.18)$$

$$x_i(k + N|k) \in \mathbb{X}_{if}. \quad (1.19)$$

2006年, Magni和Scattolon<sup>[66]</sup>针对受到衰减干扰影响的离散时间非线性系统, 提出了一种分散式模型预测控制算法。在设计分散式模型预测控制器时, 将不同子系统之间相互耦合作用的影响视为干扰项, 而干扰的大小依赖于系统状态的范数。针对具有控制输入约束的大规模线性过程, 文献[67]将线性过程的全局系统模型首先近似为若干个(可能重叠)的更小规模的子系统模型, 然后为每个子系统模型设计分散式模型预测控制器, 而子系统模型间的解耦程度则作为预测控制器设计中的一个调节参数。对于带有输入约束的开环渐近稳定系统 and 无约束的开环不稳定系统, 文献[67]分别给出了保证闭环稳定性的充分性条件。

与集中式模型预测控制相比, 分散式模型预测控制将系统规模降维, 减小了在线优化的计算量, 同时增强了系统的可靠性。

### 1.3.3 分布式模型预测控制

分布式模型预测控制<sup>[68-70]</sup>和分散式模型预测控制主要差异在于控制器是否有信息交换, 其结构如图1.7所示。目前, 分布式模型预测控制方法尚在研究初期, 得到了学者的广泛专注, 其主要优点为:

- (1) 与集中式模型预测控制相比, 分布式模型预测控制可以减小在线计算量, 提高系统的实时性。
- (2) 和分散式模型预测控制相比, 分布式模型预测控制允许子系统控制器之间进行通信和信息共享, 从而可以充分考虑子系统之间的耦合和协调等问题, 不仅具有更加广泛的现实意义, 而且可以使系统性能更优。

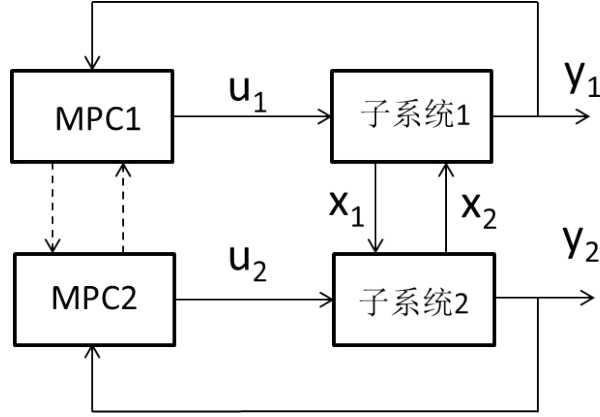


图 1.7 分散式模型预测控制

(3) 分布式模型预测控制还有可扩展性、可靠性高及易维护性等优点。

最近，文献[71, 72]总结了分布式模型预测控制现有的主要工作，分类列举了针对特定问题的分布式模型预测控制策略。分布式模型预测控制的耦合方式有三种：动态耦合、成本耦合和约束耦合。动态耦合指的是模型耦合，即子系统的动态模型中涉及其他子系统的状态<sup>[73]</sup>；成本耦合指的是子系统的阶段成本与其他系统有关，处理成本耦合大多采用同步更新<sup>[74]</sup>；约束耦合指的是多个子系统的状态或输入要满足一定的限制，处理此问题一般采用顺序更新<sup>[75]</sup>。分布式模型预测控制任务一般分为调节和非调节，调节是将所有系统的状态稳定到平衡点，非调节是指每个子系统的期望轨迹是动态的，比如动态跟踪、一致、编队等。分布式模型预测调节控制中，当耦合是动态耦合时，文献[73]给出了基于线性矩阵不等式形式的分布式终端集设计方法；当耦合是成本耦合时，文献[74]和[76]给出了同步更新条件下系统可行性和稳定性的充分条件；当耦合是约束耦合时，可以采用顺序更新方式，“冻结”其他系统的状态来保证约束的满足。在这里我们为了简化，我们假设子系统之间是动态解耦的。

将分布式模型预测控制可以分为协同分布式模型预测控制和非协同分布式模型预测控制，两者之间的差别主要在于是否具有全局性能指标。为了实现具有全局性能指标，每个系统对邻居系统的状态或输入有很强的依赖性，因此协同分布式模型预测控制需要很强的通信能力。相对而言，非协同分布式模型预测控制主要依赖于局部信息，所以对通信能力的要求较弱。在优化问题描述时，协同分布式模型预测控制和非协同分布式模型预测控制的差异体现在是否存在成本耦合。

非协同分布式模型预测控制的优化问题可以简单地描述为：对于子系统 $i =$

$1, 2, \dots, N_a$

$$\min_{u_i(\cdot)} J_i(k, x_i, u_i)$$

使得对于所有的  $l = 0, 1, \dots, N - 1$

$$x_i(k|k) = x_i(k), \quad (1.20)$$

$$x_i(k + l + 1|k) = A_i x(k + l|k) + B_i u_i(k + l|k), \quad (1.21)$$

$$x_i(k + l|k) \in \mathbb{X}_i, \quad (1.22)$$

$$g_k(x_i(k + l|k), u_i(k + l|k), x_j(k + l|k), u_j(k + l|k)) \leq 0, \quad k \in \mathcal{C}_i, \quad j \in \mathcal{N}_i \quad (1.23)$$

$$u_i(k + l|k) \in \mathbb{U}_i, \quad (1.24)$$

$$x_i(k + N|k) \in \mathbb{X}_{if}, \quad (1.25)$$

其中 (1.23) 为耦合约束,  $\mathcal{C}_i$  为子系统  $i$  的耦合集,  $\mathcal{N}_i$  为子系统  $i$  的邻居集合。

协同分布式模型预测控制的优化问题可以简单地描述为: 对于子系统  $i = 1, 2, \dots, N_a$

$$\min_{u_i(\cdot), u_j(\cdot)} J_i(k, x_i, u_i) + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j J_j(k, x_j, u_j)$$

使得对于所有的  $l = 0, 1, \dots, N - 1$

$$x_i(k|k) = x_i(k), \quad (1.26)$$

$$x_i(k + l + 1|k) = A_i x(k + l|k) + B_i u_i(k + l|k), \quad (1.27)$$

$$x_i(k + l|k) \in \mathbb{X}_i, \quad (1.28)$$

$$g_k(x_i(k + l|k), u_i(k + l|k), x_j(k + l|k), u_j(k + l|k)) \leq 0, \quad k \in \mathcal{C}_i, \quad j \in \mathcal{N}_i \quad (1.29)$$

$$u_i(k + l|k) \in \mathbb{U}_i, \quad (1.30)$$

$$x_i(k + N|k) \in \mathbb{X}_{if}, \quad (1.31)$$

其中  $\alpha_j$  为其他子系统成本权重的系数。

在分布式框架下, 子系统的优化更新方式主要有三种: 同步式、顺序式、迭代式。同步更新<sup>[74]</sup>即在更新时刻, 所有子系统都同时解优化问题得到自己的控制序列, 在同步更新模式下, 一般要设计每个系统的假设轨迹和相容性约束; 顺序更新<sup>[75, 77]</sup>即在每个更

新时刻，顺序求解子系统的优化问题得到次优的控制序列，同时其他子系统利用之前得到的最新预测控制输入，值得注意的是更新顺序可以是先验的也可以是随机的；迭代更新<sup>[55, 78]</sup>即每个子系统解优化问题之后将结果通信给邻居，在局部收敛性条件满足之前一直迭代优化。

分布式模型预测控制的可行性和稳定性条件是目前的研究难点。文献[75]针对带有耦合约束和有界加性噪声的多个线性系统，采用顺序更新的方式，设计了一种分布式协同鲁棒模型预测控制方案，保证了系统的可行性和稳定性。文献[79]将单个系统模型预测控制的稳定性条件推广到了多个系统的分布式模型预测控制稳定性条件：正不变终端集、合适的终端控制器以及整个系统的局部稳定性。尽管该文献设计了一种迭代算法来求解每个子系统的独立终端集，然而其保守性太强。在现有的文献中，仅有少数的文献针对特定的系统设计了子系统之间不存在耦合的终端集。文献[80]采用同步更新方式，主要研究了具有非完整性约束的多轮式小车的编队。为了满足[79]提出的稳定性条件，[80]利用参考轨迹设计了具有正定不变性的终端集和相应的终端控制器，并提出了在同步更新方式下的相容性约束，给出了系统的迭代可行性和渐进稳定性条件。

## 1.4 分布式模型预测控制的应用

分布式模型预测控制具有广泛的应用前景，在多机器人<sup>[55, 81]</sup>、多飞行器<sup>[82]</sup>以及物联网<sup>[63]</sup>等领域都有重要应用。Richards与How<sup>[55]</sup>研究分布式鲁棒模型预测控制以解决单体运动模型为线性时不变系统且运动中存在扰动时的协同问题，提出一种优化问题的分布式串行求解方案，证明了所得算法能够保证优化的可行性和各单体系统的稳定性。魏善碧、柴毅和丁宝苍<sup>[81]</sup>在研究多自主系统编队控制问题的分布式模型预测控制时，进一步改进了智能体动作的连贯性。针对一群性能受限的空间飞行器，Morgan等<sup>[82]</sup>提出了一种分散式模型预测控制方案来实现最优导航和队形重构。Yamaguchi等<sup>[83]</sup>为了实现多个非完整约束的移动机器人的编队，提出了一种分布式光滑时变的反馈控制器，实现多个子系统之间的协同。Lan和Yan等<sup>[84]</sup>提出了分布式混合控制策略来实现多个独轮小车的协同控制。当跟踪目标设置点改变时，Ferramosca等<sup>[85]</sup>给出了一种基于线性模型预测控制的协同分布式跟踪策略，这种策略能保证系统收敛到集中式最优点。Nascimento<sup>[86]</sup>给出了一种基于非线性编队模型的预测控制器设计方案。Dunbar和Murray<sup>[87]</sup>研究了一

组具有非线性动力学模型的子系统，设计了分布式的模型预测控制方法，只要初始时leader能与follower通信，即能保证leader-follower的串行稳定性，并且能处理更加严格的约束。Stewart等<sup>[88]</sup>针对有限数量的子系统，设计了一种线性模型预测方法，保证系统指数收敛，并且当终止优化迭代之后，系统仍保持稳定。

## 1.5 预备知识

本节将预先给出一些和本论文密切相关的基本概念、函数定义和定理。

### 1.5.1 基本概念

**定义 1.1** （开球）以 $x_c \in \mathbb{R}^n$ 为中心，以 $\epsilon > 0$ 为半径的开球定义为：

$$\mathcal{B}_\epsilon(x_c) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_c\| < \epsilon\}. \quad (1.32)$$

**定义 1.2** （内点）对于 $x \in \mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ ，如果存在 $\epsilon > 0$ 满足

$$\{y \mid \|y - x\| \leq \epsilon\} \subseteq \mathcal{C} \quad (1.33)$$

即存在一个以 $x$ 为中心的完全属于 $\mathcal{C}$ 的球，则称其为 $\mathcal{C}$ 的内点。

**定义 1.3** （内部） $\mathcal{C}$ 的内部所有内点组成的集合称为 $\mathcal{C}$ 的内部，记为 $\text{int}\mathcal{C}$ 。

**定义 1.4** （开集/闭集）如果 $\text{int}\mathcal{C} = \mathcal{C}$ ，即 $\mathcal{C}$ 的每一个点都是内点，则称 $\mathcal{C}$ 为开集。如果集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ 的补集 $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin \mathcal{C}\}$ 为开集，则称其为闭集。

**定义 1.5** （有界集）如果存在一个尺度半径 $r < \infty$ 和一个点 $x \in \mathbb{R}^n$ 使得集合 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}_r(x)$ ，则称集合 $\mathcal{C}$ 为有界集。

**定义 1.6** （紧集）集合 $\mathcal{C}$ 既为闭集又为有界集，称其为紧集。

**定义 1.7** （凸集）如果集合 $\mathcal{C}$ 中任意两点之间的线段仍在集合 $\mathcal{C}$ 内部，即对于任意 $x_1, x_2 \in \mathcal{C}$ 和 $0 \leq \theta \leq 1$ ，满足

$$\theta x_1 + (1 - \theta)x_2 \in \mathcal{C}, \quad (1.34)$$

那么称集合 $\mathcal{C}$ 为凸集。

**定义 1.8** （正定不变集）对于系统 $x(k+1) = f(x(k))$ ，如果 $x \in \mathcal{C}$ ， $f(x) \in \mathcal{C}$ ，则称 $\mathcal{C}$ 为正定不变集。

### 1.5.2 函数定义

**定义 1.9** (凸函数) 如果函数 $f$ 的定义域 $\mathcal{D}$ 是凸集, 且对于任意的 $(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ 和 $0 \leq \theta \leq 1$ , 满足

$$f(\theta x_1 + (1 - \theta)x_2) \leq \theta f(x_1) + (1 - \theta)f(x_2), \quad (1.35)$$

则称 $f(\cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为凸函数。

**定义 1.10** (凹函数) 如果函数 $-f(x)$ 是凸函数, 则 $f(\cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为凹函数。

**定义 1.11** (*Lipschitz*连续函数) 函数 $f$ 的定义域为 $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^m$ , 如果对于任意的 $(x_1, x_2) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ , 存在 $L > 0$ , 满足

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|, \quad (1.36)$$

则 $f(\cdot) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为*Lipschitz*连续函数。

### 1.5.3 相关定理

**定理 1.1** (*Weierstrass*定理) 假设 $f(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的, 且集合 $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ 是紧集, 则存在一个 $\hat{x} \in \mathbb{X}$ , 使得

$$f(\hat{x}) = \inf_{x \in \mathbb{X}} f(x), \quad (1.37)$$

即很容易定义 $\min_{x \in \mathbb{X}} f(x)$ 。

**定理 1.2** (终端成分需要满足的条件) 对于小节1.2.2中提到的具有一般形式的模型预测控制框架, 如果下面四个条件满足, 则优化问题的迭代可行性和系统的闭环稳定性可以得到保证:

- (1)  $\mathbb{X}_f$ 是包含原点的闭集, 且满足 $\mathbb{X}_f \subseteq \mathbb{X}$  ( $\mathbb{X}_f$ 中的元素满足状态约束);
- (2) 对于所有的 $x \in \mathbb{X}_f$ , 终端控制器 $\kappa_f(x) \in \mathbb{U}$  ( $\mathbb{X}_f$ 中的元素满足输入约束);
- (3) 对于所有的 $x \in \mathbb{X}_f$ ,  $f(x, \kappa_f(x)) \in \mathbb{X}_f$  ( $\mathbb{X}_f$ 是正定不变集);
- (4) 对于所有的 $x \in \mathbb{X}_f$ ,  $L_f(f(x, \kappa_f(x))) - L_f(x) + L(x) \leq 0$  ( $L_f$ 为局部*Lyapunov*函数)。

## 1.6 本文主要研究工作和章节安排

在实际应用中，受约束的大规模复杂系统广泛存在，研究和推广分布式模型预测控制理论十分必要。自2010年以来，分布式模型预测控制理论得到了广大学者的关注，目前已经取得了重要进展，但是依然存在许多研究难点，主要包括：

- (1) 如何处理子系统耦合。子系统耦合是广泛存在的，由于耦合部分的存在，在分布式结构下，如果没有合适的处理方式，耦合子系统的优化问题往往无法求解。因此选择合适的更新方式处理耦合部分使得优化问题可解是分布式模型预测控制的关键。
- (2) 如何设计解耦的终端成分。定理1.2给出了集中式结构下终端成分需要满足的条件。现有的很多工作是将此定理中的条件推广直接到分布式结构下，但是子系统的终端成分是耦合的，尤其是终端集，因此优化问题求解十分复杂。如何设计每个子系统对应的解耦的终端成分是分布式模型预测控制研究的一个重要挑战。
- (3) 如何满足迭代可行性和闭环稳定性。自上世纪90年代开始，模型预测控制的可行性和稳定性研究取得了丰富的研究成果。但是在分布式模型预测控制中，优化问题的迭代可行性与更新策略息息相关，而闭环稳定性的研究主要侧重的是整个系统的稳定性，而非单个子系统的稳定性。因此需要新的思路和技术来解决分布式模型预测控制的迭代可行性和闭环稳定性问题。

针对上述问题，本文以多智能体系统为研究对象，开展了分布式模型预测控制的系列研究，具体的研究内容以及结构安排如下：

### 第一章 绪论

主要介绍了课题的研究背景与研究意义，介绍了模型预测控制的概况，比较了集中式、分散式和分布式模型预测控制的优缺点，详细分析了分布式模型预测控制的研究现状，并给出了贯穿本文的预备知识以及本文的研究内容。

### 第二章 多个线性系统的分布式模型预测调节控制

主要研究了多个线性系统的分布式模型预测调节控制问题，智能体系统之间同时存在成本耦合和约束耦合。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界；设计了每

个智能体的终端成分，并给出了其需要满足的条件；给出了分布式优化算法；分析了优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环稳定性；最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

### 第三章 多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制

主要研究了多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制问题，智能体系统之间存在成本耦合。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界；利用参考轨迹，设计了每个智能体的终端成分，并给出了其需要满足的条件；给出了分布式优化算法；分析了优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环收敛性；最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

### 第四章 多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制

主要研究了多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制问题，智能体系统之间存在耦合成本，且需要满足避碰约束。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界和改进的避碰约束；充分利用编队目标，设计了每个智能体的终端成分，并给出了其需要满足的条件；给出了分布式优化算法；分析了优化问题的迭代可行性、整个系统的闭环收敛性以及避碰约束的满足情况；最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

### 第五章 总结和展望

对全文的研究工作进行了总结和展望。



## 第2章 多个线性系统的分布式模型预测调节控制

### 2.1 引言

调节是指设计合适的控制器，使系统状态收敛到平衡点。这是控制领域研究的基本问题。本章主要研究多个异构线性系统的分布式模型预测调节控制问题，其中智能体系统之间通过成本函数和约束相互耦合，且耦合约束是范数形式的。

对于存在成本耦合的多智能体系统，文献[74, 80]均采用同步更新策略，设计了对应的相容性约束，从而使得优化问题能分布式求解。耦合约束具有广泛的现实意义，例如多车系统需要满足避碰<sup>[80]</sup>，投资组合中需要保证无风险资产不为负<sup>[89]</sup>等。对于存在耦合约束的系统，文献[55]提出了一种顺序更新策略，每个智能体顺序求解各自的优化问题从而使耦合约束能得到满足。但是这种方式极大地增加了在线计算量和通信量负担。为此，文献[75]提出了一种新的“冻结”更新策略，即每一采用时刻只有一个智能体系统更新，其他系统采用其可行解，从而保证了耦合约束满足，虽然降低了计算量和通信量，但是和同步更新方式相比，其解是次优解，因此牺牲了整个系统的性能。

另外，范数形式的约束是一种重要的约束。例如，在多车系统中，用 $x_i$ 和 $x_j$ 分别表示车的位置， $\|x_i - x_j\| \geq 2r$ 表示车之间需要满足避碰，而 $\|x_i - x_j\| \leq 2R$ 表示车之间需要满足通信距离的限制<sup>[82, 90]</sup>。另外在投资组合问题<sup>[91, 92]</sup>中，投资组合权重向量的范数约束可以理解为在最小化投资组合方差的基础上，收缩无约束的卖空样本的规模，范数约束的引入降低了估计器的偏差。

以上是本章工作的主要动机。本章的主要贡献为：

- (1) 在分布式结构下，设计了解耦的终端成分，而且终端集内的状态满足耦合约束；
- (2) 采用同步更新方式，在文献[74, 80]的基础上，设计了改进的相容性约束上界，保证假设轨迹和实际轨迹的一致性；
- (3) 分析了局部约束和耦合约束的迭代可行性，以及整个系统的闭环稳定性，给出了严格的证明。

**符号 2.1**  $\mathbb{X}_i$ 和 $\mathbb{U}_i$ 分别表示状态允许集和输入允许集； $0 < T < \infty$ 表示预测时域； $0 < \delta = t_{k+1} - t_k \leq T$ 表示采样周期； $x(\tau|t_k)$ 在 $t_k$ 时刻预测 $\tau$ 时刻 $x$ 的值； $\|x\|$ 表示 $x$ 的2-范数，即 $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ ； $\|x\|_P^2 = x^T P x$ ； $\lambda_{\min}(P)$ 和 $\lambda_{\max}(P)$ 分别表示方阵 $P$ 的最小特征值和最大特征值。

## 2.2 问题的描述

考虑 $N_a$ 个动态解耦的线性时不变系统：

$$\dot{x}_i = A_i x_i + B_i u_i, \quad \forall i \in \mathbb{N}_a = \{1, 2, \dots, N_a\}, \quad (2.1)$$

其中 $x_i \in \mathbb{R}^n$ 和 $u_i \in \mathbb{R}^m$ 分别是智能体 $i$ 的状态和控制输入。

**假设 2.1** 对所有智能体 $i \in \mathbb{N}_a$ ， $(A_i, B_i)$ 是可镇定的。

假设2.1表示，存在线性反馈率 $u_i = K_i x_i$ ， $K_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 使得 $A_i + B_i K_i$ 的特征值全部严格位于复平面的左半开平面。

本章的控制目标是将所有智能体的状态镇定到原点。在本章中，所有能和智能体 $i$ 通信的其他智能体均认为是智能体 $i$ 的邻居。智能体和它的邻居之间通过成本函数和约束相互耦合。定义 $\mathcal{N}_i$ 和 $|\mathcal{N}_i|$ 分别为智能体 $i$ 的邻居集合和邻居的数量。为了方便，令 $x_{-i} = [x_{j_1}^T, \dots, x_{j_{|\mathcal{N}_i|}}^T]^T$ 表示智能体 $i$ 所有邻居状态组成的向量，其中 $j_k \in \mathcal{N}_i$ ， $k = 1, 2, \dots, |\mathcal{N}_i|$ 。进一步，定义集合 $\mathcal{N}_i^+ = \{\mathcal{N}_i, i\}$ 。

智能体 $i$ 对应的约束包括：

- 局部约束

$$x_i \in \mathbb{X}_i \quad \text{和} \quad u_i \in \mathbb{U}_i;$$

- $C_i$ 个耦合约束

$$G_{ij}(x_i, x_{-i}) \leq g_{ij}, \quad j \in \mathcal{C}_i = \{1, 2, \dots, C_i\}.$$

明显地，智能体 $i$ 的任何一个邻居 $k \in \mathcal{N}_i$ 也要满足涉及智能体 $k$ 的耦合约束 $G_{ij}$ 。这里暗含假设：每个耦合约束涉及的智能体之间均可相互通信。特别地，本章考虑的耦合约束具有特定的范数形式：

$$G_{ij}(x_i, x_{-i}) = \left\| \sum_{k \in \mathcal{N}_i^+} \alpha_{jk}^i x_k \right\|^2, \quad (2.2)$$

其中 $\alpha_{jk}^i$ 为给定的标量， $i \in \mathbb{N}_a$ ， $j \in \mathcal{C}_i$ ， $k \in \mathcal{N}_i^+$ 。容易看出， $g_{ij}$ 应满足 $g_{ij} > 0$ 。

根据Weierstrass定理，如果优化问题的成本对决策变量是连续的，并且约束构成的集合是紧集，那么该优化问题一定存在解。为此，给出以下假设。

**假设 2.2** 对于 $i = 1, 2, \dots, N_a$ ，集合 $\mathbb{X}_i$ 为闭集，集合 $\mathbb{U}_i$ 为紧集，它们均包括原点。

下面给出智能体 $i$ 的理想成本函数：

$$J_i(t_k, x_i, x_{-i}, u_i) = \int_{t_k}^{t_k+T} L_i(\tau|t_k, x_i, x_{-i}, u_i) d\tau + L_{if}(x_i(t_k + T|t_k)), \quad (2.3)$$

其中阶段成本为

$$L_i(\tau|t_k, x_i, x_{-i}, u_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|x_i(\tau|t_k) - x_j(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2 + \|x_i(\tau|t_k)\|_{Q_i^2}^2 + \|u_i(\tau|t_k)\|_{R_i}^2, \quad (2.4)$$

终端成本为 $L_{if}(x_i(t_k + T|t_k))$ 。 $L_{if}(x_i(t_k + T|t_k))$ 是连续可微的函数，其具体形式将在后面小节中设计。在阶段成本中 $Q_{ij}^1$ 和 $Q_i^2$ 为给定的正定矩阵， $R_i$ 是给定的半正定矩阵。

## 2.3 分布式协同模型预测控制

在存在耦合的情况下，其他智能体完成优化之前，更新智能体不可能收到其邻居的全部预测状态。为了使更新智能体的优化问题可解，本文采纳同步更新策略。在同步更新策略中，所有智能体同时求解各自的优化问题，邻居间传递的是假设状态，不是实际状态。为了简化，表2.1列出了一些定义在区间 $[t_k, t_k + T]$ 的变量。

不同于文献[74, 80]中的定义，本章中假设控制输入的定义如下：

$$\hat{u}_i(\tau|t_k) = \begin{cases} \tilde{u}_i(\tau|t_{k-1}) & \tau \in [t_k, t_{k-1} + T), \\ \kappa_i(x_i^\kappa(\tau|t_{k-1})) & \tau \in [t_{k-1} + T, t_k + T], \end{cases} \quad (2.5)$$

表 2.1 智能体 $i$ 的变量

$u_i^*(\tau t_k)$	最优控制输入
$x_i^*(\tau t_k)$	最优状态
$\tilde{u}_i(\tau t_k)$	可行控制输入
$\tilde{x}_i(\tau t_k)$	可行状态
$\hat{u}_i(\tau t_k)$	假设控制输入
$\hat{x}_i(\tau t_k)$	假设状态

其中 $\kappa_i(x_i^\kappa(\tau|t_{k-1}))$ 为终端控制器,  $x_i^\kappa(\tau|t_{k-1})$ 是起始于 $\tilde{x}_i(t_{k-1} + T|t_{k-1})$ 、控制输入为 $\kappa_i$ 时的状态。将假设控制输入作用于系统 (2.1), 可得假设状态如下:

$$\hat{x}_i(\tau|t_k) = \begin{cases} \tilde{x}_i(\tau|t_{k-1}) & \tau \in [t_k, t_{k-1} + T), \\ x_i^\kappa(\tau|t_{k-1}) & \tau \in [t_{k-1} + T, t_k + T]. \end{cases} \quad (2.6)$$

**注 2.1** 因为最优输入是特殊的可行解, 因此相比于[74, 80], 本章定义的假设控制输入更加具有普遍性。当用最优控制输入代替可行控制输入时, 本章的定义即与[74, 80]等价。

本章假设当最优控制输入可得到时, (2.5)–(2.6) 采纳 $u_i^*(\cdot)$ 和 $x_i^*(\cdot)$ 代替 $\tilde{u}(\cdot)$ 和 $\tilde{x}(\cdot)$ 。为了与 $x_{-i}$ 的定义一致, 定义 $\hat{x}_{-i}$ 为智能体 $i$ 的邻居的假设状态组成的向量。采用 $\hat{x}_{-i}$ 代替 $x_{-i}$ , 智能体 $i$ 的优化问题为:

**问题1** 在任意更新时刻 $t_k$ , 对于智能体 $i = 1, 2, \dots, N_a$ , 给定 $x_i(t_k)$ 和 $\hat{x}_{-i}(\tau|t_k)$ ,  $\tau \in [t_k, t_k + T]$ ,

$$J_i^*(t_k, x_i^*, \hat{x}_{-i}, u_i^*) = \min_{u_i(\tau|t_k)} J_i(t_k, x_i, \hat{x}_{-i}, u_i)$$

使得对于所有的 $\tau \in [t_k, t_k + T]$

$$x_i(t_k|t_k) = x_i(t_k), \quad (2.7)$$

$$\dot{x}_i(\tau|t_k) = A_i x_i(\tau|t_k) + B_i u_i(\tau|t_k), \quad (2.8)$$

$$x_i(\tau|t_k) \in \mathbb{X}_i, \quad (2.9)$$

$$u_i(\tau|t_k) \in \mathbb{U}_i, \quad (2.10)$$

$$G_{ij}(x_i(\tau|t_k), \hat{x}_{-i}(\tau|t_k)) \leq g_{ij}, \quad j \in \mathcal{C}_i \quad (2.11)$$

$$\|x_i(\tau|t_k) - \hat{x}_i(\tau|t_k)\|^2 \leq \xi_i^2(t_k), \quad (2.12)$$

$$x_i(t_k + T|t_k) \in \mathbb{X}_{if}, \quad (2.13)$$

其中 $\|x_i(\tau|t_k) - \hat{x}_i(\tau|t_k)\|^2 \leq \xi_i^2(t_k)$ 表示相容性约束，其反应了智能体 $i$ 实际轨迹和假设轨迹之间的一致性<sup>[76]</sup>。

### 2.3.1 相容性约束的设计

在同步更新策略中，相容性约束在保证整个系统的稳定性中起着至关重要的作用。下面，我们将设计相容性约束 (2.12)，给出明确的 $\xi_i(t_k)$ 。首先先定义两个相关变量。第一个为

$$\eta_i(t_k) = \max_{j \in \mathcal{N}_i} \max_{\tau \in [t_k, t_k+T]} \|\hat{x}_i(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|, \quad (2.14)$$

其表示在时间区间 $[t_k, t_k+T]$ 内智能体 $i$ 的假设轨迹与它的邻居的假设轨迹之间的最大偏差。第二个定义为：

$$\iota_i(t_k) = \min_{j \in \mathcal{N}_i} \min_{\tau \in [t_k, t_{k+1}]} \|\hat{x}_i(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|, \quad (2.15)$$

其表示在时间区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 内智能体 $i$ 的假设轨迹和它的邻居的假设轨迹之间的最小偏差。

同时，定义 $\Delta_i(t_k) = \frac{T-\delta}{\delta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\min}(Q_{ij}^1)} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\max}(Q_{ji}^1)(4\eta_j(t_k) + \eta_i(t_k))$ 。 $\xi_i(t_k)$ 的上界与 $\iota_i(t_k)$ 和 $\Delta_i(t_k)$ 有关，其具体形式为：

$$\nu_i(t_k) = \frac{2\iota_i(t_k) + \Delta_i(t_k) - \sqrt{(2\iota_i(t_k) + \Delta_i(t_k))^2 - 4\iota_i^2(t_k)}}{2}, \quad (2.16)$$

$\nu_i(t_k)$ 的作用为保证系统的稳定性，在后面章节中给出了详细说明。

由此， $\xi_i(t_k)$ 可设计为：

$$\xi_i(t_k) \leq \min\{\eta_i(t_k), \nu_i(t_k)\} = \nu_i(t_k). \quad (2.17)$$

**注 2.2** 当 $\iota_i(t_k)$ 为零，即智能体 $i$ 的假设轨迹和它邻居的假设轨迹之间有交叉时， $\xi_i(t_k)$ 为0。此时优化问题的最优解为假设控制输入。

**注 2.3** 文献[74, 76]中的相容性约束取决于收缩的采样周期 $\delta$ 。当所有子系统的状态趋向于原点时,  $\delta$ 趋向于0, 这意味着通信负担增加和相容性约束更紧。在本章和[80, 93]中,  $\delta$ 可以为不超过 $T$ 的任意常值, 相容性约束在保证系统的稳定性中起着重要作用。

### 2.3.2 终端成分的设计

许多研究MPC的文献指出终端成分（终端集、终端成本和终端控制器）在保证迭代可行性和闭环稳定性中起着至关重要的作用, 并且三个终端成分往往要联合设计。在给出本章的设计方案之前, 我们首先给出一个关于终端成分的假设。

**假设 2.3** 终端集 $\mathbb{X}_{if}$ 是集合 $\mathbb{X}_i$ 的子集。当 $x_i \in \mathbb{X}_{if}$ 时,  $K_i x_i \in \mathbb{U}_i$ 。

对智能体 $i$ , 终端集定义为:

$$\mathbb{X}_{if} = \{x \mid \|x\|_{P_i}^2 \leq \gamma_i\}, \quad (2.18)$$

终端成本定义为:

$$L_{if}(x) = \|x\|_{P_i}^2, \quad (2.19)$$

终端控制器为:

$$\kappa_i(x) = K_i x, \quad (2.20)$$

其中 $\gamma_i$ 为标量,  $P_i$ 为正定矩阵。下面的定理给出了如何设计 $P_i$ 和 $\gamma_i$ 。

**定理 2.1** 对于所有的 $i = 1, 2, \dots, N_a$ , 给定 $K_i$ 、 $Q_{ij}^1$ 、 $Q_{ji}^1$ 、 $Q_i^2$ 和 $R_i$ , 其中 $j \in \mathcal{N}_i$ , 定义 $\psi_i = A_i + B_i K_i$ 和 $\Lambda_i = 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (Q_{ij}^1 + Q_{ji}^1) + Q_i^2 + K_i^T R_i K_i$ 。如果 $P_i$ 是一个满足下面的李亚普诺夫方程的正定矩阵:

$$P_i \psi_i + \psi_i^T P_i + \Lambda_i = 0, \quad (2.21)$$

那么 $L_{if}$ 是一个局部李亚普诺夫函数 (Local Lyapunov function) <sup>[37]</sup>使得对于 $x_i(t) \in \mathbb{X}_{if}$ ,

$$\sum_{i=1}^N (\dot{L}_{if}(x_i) + L_i(t, x_i, x_{-i}, u_i)) \leq 0. \quad (2.22)$$

进一步地, 对于智能体 $i$ , 如果

$$\gamma_i = \min_{k \in \mathcal{N}_i^+} \min_{j \in \mathcal{C}_k} \frac{g_{kj} \lambda_{\min}(P_i)}{2(|\mathcal{N}_k| + 1)|\alpha_{ji}^k|^2}, \quad (2.23)$$

那么可以得到 $\mathbb{X}_{if}$ 是一个对应于终端控制器 $u_i = K_i x_i$ 的正定不变集, 同时终端集 $\mathbb{X}_{if}$ 中的所有状态都一定满足耦合约束 (2.11)。

**证明:** 首先, 我们将证明 $L_{if}$ 是一个对应于阶段成本 (2.4) 的局部李亚普诺夫函数。由不等式 $\|x_1 - x_2\|_Q^2 \leq 2(\|x_1\|_Q^2 + \|x_2\|_Q^2)$ 和终端控制器 $u_i = K_i x_i$ , 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_a} (\dot{L}_{if}(x_i) + L_i(t, x_i, x_{-i}, u_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{N_a} \{x_i^T P_i \dot{x}_i + \dot{x}_i^T P_i x_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|x_i(\tau|t_k) - x_j(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2 + \|x_i(\tau|t_k)\|_{Q_i^2}^2 + \|u_i(\tau|t_k)\|_{R_i}^2\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_a} \{x_i^T P_i \psi_i x_i + x_i^T \psi_i^T P_i x_i + 2x_i^T \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (Q_{ij}^1 + Q_{ji}^1)x_i + x_i^T (Q_i^2 + K_i^T R_i K_i)x_i\} \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_a} x_i^T (P_i \psi_i + \psi_i^T P_i + \Lambda_i)x_i. \end{aligned}$$

因为 $R_i$ 是半正定矩阵,  $Q_{ij}^1$ 和 $Q_i^2$ 是正定矩阵, 所以 $\Lambda_i$ 也是正定的。由此可得, 如果 $P_i$ 是通过求解李亚普诺夫方程 (2.21) 得到的, 那么我们保证 (2.22) 成立。

进一步地, 由于 $K_i$ 是镇定的反馈增益, 而 $P_i$ 是满足李亚普诺夫方程 (2.21) 的正定矩阵, 我们很容易得到 $\mathbb{X}_{if} = \{x \mid \|x\|_{P_i}^2 \leq \gamma_i\}$ 是一个对应于终端控制器 $u_i = K_i x_i$ 的正定不变集, 即当 $x_i(t_1) \in \mathbb{X}_{if}$ , 对于所有的 $t_2 > t_1$ ,  $x_i(t_2) \in \mathbb{X}_{if}$ 。根据不等式 $\|x_1 + x_2\|^2 \leq 2(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)$ , 由 (2.23) 可得, 对于所有的 $k \in \mathcal{N}_i^+$ ,  $x_k \in \mathbb{X}_{kf}$ 和 $j \in \mathcal{C}_i$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{2|\alpha_{jk}^i|^2 \|x_k\|_{P_k}^2}{\lambda_{\min}(P_k)} \leq \frac{g_{ij}}{|\mathcal{N}_i| + 1} \\ \implies & 2\|\alpha_{jk}^i x_k\|^2 \leq \frac{g_{ij}}{|\mathcal{N}_i| + 1} \\ \implies & 2 \sum_{k \in \mathcal{N}_i^+} \|\alpha_{jk}^i x_k\|^2 \leq g_{ij} \\ \implies & \left\| \sum_{k \in \mathcal{N}_i^+} \alpha_{jk}^i x_k \right\|^2 \leq g_{ij} \\ \implies & G_{ij}(x_i, x_{-i}) \leq g_{ij}. \end{aligned}$$

因此, 集合 $\mathbb{X}_{if}$ 中的所有状态一定满足耦合约束 (2.11)。

□

**注 2.4** 终端成本和终端集分别由参数 $\gamma_i$ 和 $P_i$ 决定, 而这些参数是可以离线计算得到的。其中,  $P_i$ 可通过求解李亚普诺夫方程 (2.21) 得到。不同于单个系统的李亚普诺夫方程<sup>[39]</sup>, 本章的李亚普诺夫方程涉及耦合成本中的权重参数。

### 2.3.3 分布式实现算法

在本小节中, 我们将首先分析系统间的通信要求。为了求解各自的优化问题, 每个智能体不仅需要得到邻居的假设轨迹, 而且需要得到邻居的参数, 即 (2.14) 中的 $\eta_j$ 。除此之外, 对于智能体 $i$ , 集合 $\mathcal{N}_i^+$ 中的所有智能体之间需要共享耦合信息, 包括 $g_{ij}$ 和 $\alpha_{ij}^k$ , 其目的是为了离线求解自己的终端集 $\mathbb{X}_{if}$ 。下面, 我们将给出同步分布式实现策略。

#### 算法1

**离线阶段:** 对于每个智能体 $i$ , 给定其参数 $\mathcal{N}_i$ 、 $\mathcal{C}_i$ 、 $Q_{ij}^1$ 、 $Q_i^2$ 、 $R_i$ 和其他耦合约束中的参数, 离线确定矩阵 $P_i$ 和终端集 $\mathbb{X}_{if}$ 。

**在线阶段:** 在初始时刻 $t_0$ , 给出初始最优控制输入 $u_i^*(\tau|t_0)$ 和初始最优状态轨迹 $x_i^*(\tau|t_0)$ ,  $\tau \in [t_0, t_0 + T]$ 。

(i) 在时间区间 $[t_k, t_{k+1})$ ,  $k \geq 0$ , 每个智能体 $i$

- 实施实际轨迹 $x_i(t) = x_i^*(t|t_k)$ ,  $t \in [t_k, t_{k+1})$ ;
- 计算假设的控制输入 $\hat{u}_i(\tau|t_{k+1})$ 和假设的状态轨迹 $\hat{x}_i(\tau|t_{k+1})$ ,  $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ ;
- 将 $\hat{x}_i(\cdot)$ 传递给它的邻居, 接收来自邻居 $j \in \mathcal{N}_i$ 的 $\hat{x}_j(\cdot)$ ;
- 分别根据 (2.14) 和 (2.15) 计算参数 $\eta_i(t_{k+1})$ 和 $\iota_i(t_k)$ ;
- 将 $\eta_i(t_{k+1})$ 传递它的邻居, 接收来自邻居 $j \in \mathcal{N}_i$ 的 $\eta_j(t_{k+1})$ ;

(ii) 在每个采样时刻 $t_{k+1}$ ,  $k \geq 0$ , 每个智能体 $i$

- 采样当前状态 $x_i(t_{k+1})$ , 根据 (2.16)–(2.17) 计算参数 $\nu_i(t_{k+1})$ 和 $\xi_i(t_{k+1})$ ;
- 求解**问题1**, 得到最优控制输入 $u_i^*(\tau|t_{k+1})$ 和最优状态轨迹 $x_i^*(\tau|t_{k+1})$ ,  $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 。

(iii) 返回(i)。



## 2.4 主要结果

本节主要分析整个系统的迭代可行性和闭环稳定性。

**定理 2.2** 在每个采样时刻 $t_k$ , 所有模型如 (2.1) 的智能体同步求解各自的优化问题。如果在初始时刻 $t_0$ , 每个智能体都存在一个可行解, 那么对于所有的 $t_k$ ,  $k \geq 1$ , 其优化问题均可行。进一步地, 整个系统是渐进稳定的, 即当 $t \rightarrow \infty$ , 对于所有的 $i = 1, 2, \dots, N_a$ ,  $x_i \rightarrow 0$ 。

**证明:** 首先, 我们证明智能体 $i$ 的迭代可行性。令 $\tilde{u}_i(\tau|t_k)$ 为可行的控制输入,  $\tilde{x}_i(\tau|t_k)$ 为可行的状态轨迹, 其中 $\tau \in [t_k, t_k + T]$ ,  $k \geq 0$ 。如果在 $t_k$ 时刻, 智能体 $i$ 的优化问题是可行的, 我们从 (2.5) 的定义可以得到时间间隔 $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 上的假设控制输入。令 $\tilde{u}_i(\tau|t_{k+1}) = \hat{u}_i(\tau|t_{k+1})$ 作为 $t_{k+1}$ 的控制输入。相应地, 令 $\tilde{x}_i(\tau|t_{k+1}) = \hat{x}_i(\tau|t_{k+1})$ 。我们很容易得到, 从时刻 $t_{k+1}$ 到 $t_{k+1} + T$ ,  $\tilde{u}_i(\cdot)$ 和 $\tilde{x}_i(\cdot)$ 满足约束 (2.8)–(2.10) 和 (2.12)。进一步地, 由2.1可得终端集中的状态一定满足耦合约束 (2.11)。所以,  $\tilde{u}_i(\cdot)$ 和 $\tilde{x}_i(\cdot)$ 可以保证耦合约束在区间 $[t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 满足。总之,  $\tilde{u}_i(\cdot)$ 在时刻 $t_{k+1}$ 对智能体 $i$ 是可行的, 即初始可行一定可得迭代可行。

下面, 我们证明整个系统的收敛性。李亚普诺夫函数定义为所有智能体最优成本的和, 即

$$J_{\Sigma}^*(t_k) = \sum_{i=1}^{N_a} J_i^*(t_k, x_i^*, \hat{x}_{-i}, u_i^*). \quad (2.24)$$

定义 $\tilde{u}_i(\tau|t_{k+1}) = \hat{u}_i(\tau|t_{k+1})$ ,  $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 为时刻 $t_{k+1}$ 的可行解。因此, 由 (2.22) 可得

$$\begin{aligned} & J_{\Sigma}^*(t_{k+1}) - J_{\Sigma}^*(t_k) \\ & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (J_i(t_{k+1}, \tilde{x}_i, \hat{x}_{-i}, \tilde{u}_i) - J_i^*(t_k, x_i^*, \hat{x}_{-i}, u_i^*)) \\ & = \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{t_{k+1}}^{t_k+T} (\|x_i^*(\tau|t_k) - x_j^*(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2 - \|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2) d\tau \right. \\ & \quad - \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_i(\tau|t_k, x_i^*, \hat{x}_{-i}, u_i^*) d\tau + \int_{t_k+T}^{t_{k+1}+T} L_i(\tau|t_k, x_i^\kappa, x_{-i}^\kappa, \kappa_i) d\tau \\ & \quad \left. + L_{if}(x_i^\kappa(t_{k+1} + T|t_k)) - L_{if}(x_i^*(t_k + T|t_k)) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (\|x_i^*(\tau|t_k) - x_j^*(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2 - \|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2) d\tau \right. \\
 &\quad \left. - \int_{t_k}^{t_k+1} L_i(\tau|t_k, x_i^*, \hat{x}_{-i}, u_i^*) d\tau \right\}. \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

根据不等式  $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$  和  $a^T P b \leq \lambda_{\max}(P) \|a\| \|b\|$ , 其中  $a, b \in \mathbb{R}^n$ ,  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  是正定的, 可得

$$\begin{aligned}
 &\sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (\|x_i^*(\tau|t_k) - x_j^*(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2 - \|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2) d\tau \right\} \\
 &\leq \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{t_k+1}^{t_k+T} \lambda_{\max}(Q_{ij}^1) (2\|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\| \|x_j^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\| \right. \\
 &\quad \left. + \|x_j^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|^2) d\tau \right\} \\
 &\leq \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{t_k+1}^{t_k+T} \lambda_{\max}(Q_{ij}^1) (2(\|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_i(\tau|t_k)\| + \|\hat{x}_i(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|) \right. \\
 &\quad \left. \times \|x_j^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\| + \|x_j^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|^2) d\tau \right\} \\
 &\leq \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \int_{t_k+1}^{t_k+T} \lambda_{\max}(Q_{ij}^1) (4\eta_i(t_k) \times \xi_j(t_k) + \eta_j(t_k) \times \xi_j(t_k)) d\tau \right\} \\
 &\leq \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \xi_i(t_k) (T - \delta) \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\max}(Q_{ji}^1) (4\eta_j(t_k) + \eta_i(t_k)) \right\}.
 \end{aligned}$$

另外, 由  $\xi_i(t_k) \leq \iota_i(t_k)$  可得

$$\begin{aligned}
 &\int_{t_k}^{t_k+1} L_i(\tau|t_k, x_i^*, \hat{x}_{-i}, u_i^*) d\tau \\
 &= \int_{t_k}^{t_k+1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|_{Q_{ij}^1}^2 + \|x_i^*(\tau|t_k)\|_{Q_i^2}^2 + \|u_i^*(\tau|t_k)\|_{R_i}^2 d\tau \\
 &\geq \int_{t_k}^{t_k+1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\min}(Q_{ij}^1) \|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_i(\tau|t_k) + \hat{x}_i(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\|^2 d\tau \\
 &\geq \int_{t_k}^{t_k+1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\min}(Q_{ij}^1) (\|\hat{x}_i(\tau|t_k) - \hat{x}_j(\tau|t_k)\| - \|x_i^*(\tau|t_k) - \hat{x}_i(\tau|t_k)\|)^2 d\tau \\
 &\geq \int_{t_k}^{t_k+1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\min}(Q_{ij}^1) (\iota_i(t_k) - \xi_i(t_k))^2 d\tau \\
 &= \delta \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \lambda_{\min}(Q_{ij}^1) (\iota_i(t_k) - \xi_i(t_k))^2. \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

由 (2.14)–(2.17), 可得对于所有的  $x_i, x_j \neq 0$ ,

$$J_{\Sigma}^*(t_{k+1}) - J_{\Sigma}^*(t_k) < 0. \quad (2.27)$$

所以, 整个系统是渐进稳定的。  $\square$

## 2.5 仿真结果和分析

本节旨在通过数值仿真证明**算法1**的有效性, 并给出了分布式模型预测控制 (DMPC) 和集中式模型预测控制 (CMPC) 的比较。仿真利用 ICLOCS<sup>[94]</sup> 和 IPOPT<sup>[95]</sup> 等工具箱在 Matlab 平台上进行。考虑5个动力学不同的智能体, 模型参数如下:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1.6 & 1.1 \\ -0.7 & 1.2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1.2 & 1 \\ -0.7 & 1.2 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1.1 \\ -0.5 & 1.5 \end{bmatrix}, \\ A_4 &= \begin{bmatrix} 1.3 & 1.1 \\ -0.7 & 2 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ -0.6 & 1.8 \end{bmatrix}, B_i = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, 5. \end{aligned}$$

考虑所有智能体全部耦合的情况, 即  $\mathcal{N}_i = \mathbb{N}_a / \{i\}$ 。权重矩阵为:  $Q_{ij}^1 = I$ ,  $Q_i^2 = I$  和  $R_i = 1$ 。耦合约束为:  $\|\sum_{i=1}^{N_a} x_i\|^2 \leq 1$ 。所有智能体对应的输入约束为:  $-1 \leq u_i \leq 1$ 。由定理2.1可得终端成分的参数为:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 43.21 & -24.54 \\ -24.54 & 18.49 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 46.71 & -30.03 \\ -30.03 & 23.95 \end{bmatrix}, P_3 = \begin{bmatrix} 63.60 & -38.53 \\ -38.53 & 28.52 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} P_4 &= \begin{bmatrix} 160.37 & -125.78 \\ -125.78 & 104.57 \end{bmatrix}, P_5 = \begin{bmatrix} 116.50 & -85.12 \\ -85.12 & 67.85 \end{bmatrix}, \\ \lambda_1 &= 0.337, \lambda_2 = 0.322, \lambda_3 = 0.372, \lambda_4 = 0.363, \lambda_5 = 0.365. \end{aligned}$$

控制时域  $T$  设为3, 采样周期  $\delta$  设为0.5。5个智能体的初始状态分别是:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= \begin{bmatrix} -2.5 & -2 \end{bmatrix}^T, x_2(0) = \begin{bmatrix} -1.5 & -3 \end{bmatrix}^T, x_3(0) = \begin{bmatrix} 2 & 1.5 \end{bmatrix}^T, \\ x_4(0) &= \begin{bmatrix} -3 & 3.5 \end{bmatrix}^T, x_5(0) = \begin{bmatrix} 4 & 3.5 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

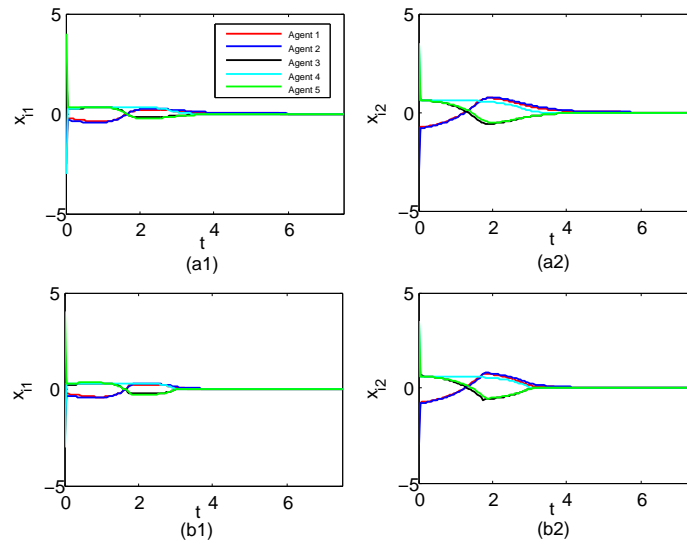


图 2.1 所有智能体的状态: (a1-a2)CMPC (b1-b2)DMPC

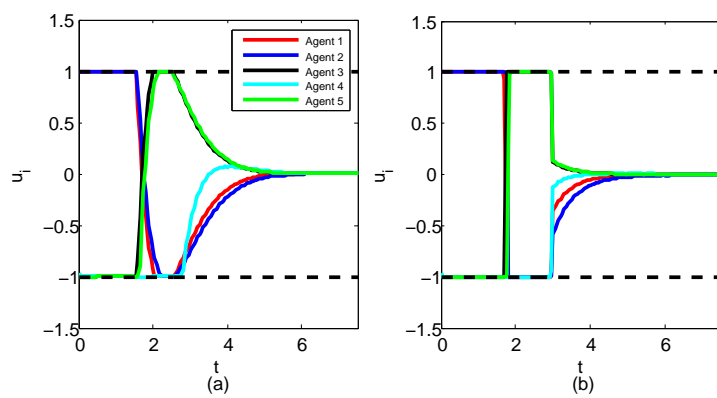


图 2.2 所有智能体的控制输入: (a)CMPC (b)DMPC

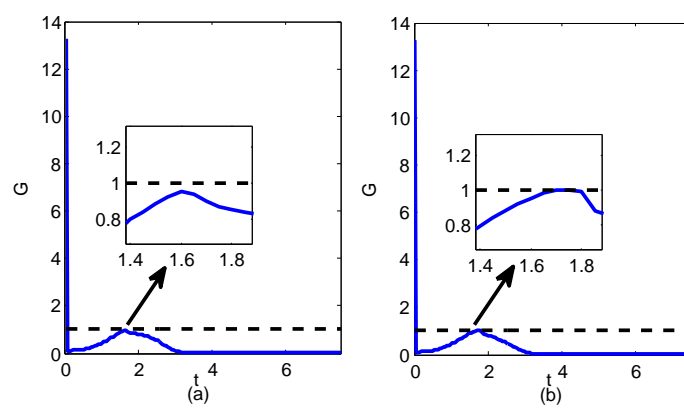


图 2.3 耦合约束: (a)CMPC (b)DMPC

图2.1-2.2分别展现了CDMPC和CMPC的状态轨迹和控制输入。我们可以看出，控制输入满足约束 $-1 \leq u_i \leq 1$ ，并且CDMPC和CMPC的控制性能接近。然而，CDMPC和CMPC之间的控制输入依然存在差异。从图2.3可见，耦合约束对CDMPC是活跃的，而对CMPC是非活跃的。另外，CDMPC的每一步平均优化时间是 $4.45s$ ，而CMPC的每一步平均优化时间是 $24.55s$ ，大概是CDMPC的5.5倍。因此，CDMPC不仅大大降低了优化时间，而且保留了CMPC的控制性能。除此之外，从图2.3可见，在CDMPC的控制下，整个系统的成本单调递减到0。

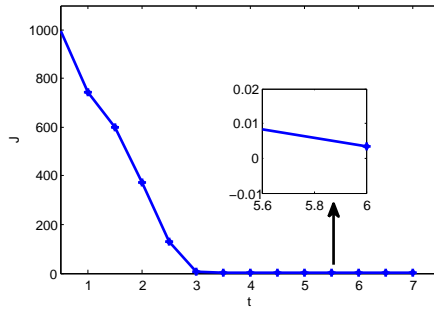


图 2.4 DMPC控制下整个系统的成本

## 2.6 本章小结

本章主要研究了多个异构线性系统的分布式模型预测调节控制问题，智能体系统之间同时存在成本耦合和约束耦合。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界；设计了每个智能体的终端成分，给出了其需要满足的条件，并且保证终端集中的状态满足耦合约束；设计了分布式优化算法，详细分析了局部约束和耦合约束的迭代可行性，以及整个系统的闭环稳定性；最后通过仿真实验比较了集中式模型预测控制方法和分布式模型预测控制方法的性能，对比表明在保证系统性能和集中式性能接近的条件下，分布式方法大大缩短了优化时间，减小了在线计算量。



## 第3章 多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制

### 3.1 引言

一致是指设计合适的控制器，使多个系统的状态收敛到同一轨迹，可以是静态的也可以是动态的。在某种程度上，上章研究的调节问题可以看作是一致问题的一个特殊情况，但是通常情况下，两个问题分开研究。本章主要研究了多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制问题，所有智能体共享一个参考轨迹。

在现存的文献中，分布式模型预测控制已经被用来研究多智能体系统的一致性。文献[96]利用逐步次梯度方法计算出最优一致点，并且给出了全局一致协议没有达成情况下系统收敛的条件。文献[97]提出了研究了一阶积分器和二阶积分器的一致问题，给出了最优路径的几何分析，保证了可行性和稳定性。文献[98]和[99]主要通过改变乘子的方向来保证多智能体系统一致的实现。以上工作主要研究的线性系统的一致问题，而实际应用中大部分系统是非线性系统的，其中二阶非线性系统可以表示很多实际系统，比如无人车、机械臂和飞行器等。另外目前多个非线性系统的分布式模型预测控制的文献很少，其终端成分的设计、可行性和稳定性的分析等均存在巨大挑战。

以上为本章工作的主要动机。本章的主要贡献为：

- (1) 在分布式结构下，假设系统是Lipschitz连续的，充分利用参考轨迹，设计了每个非线性系统的终端成分，包括终端成本、终端控制器和正定不变的终端集；
- (2) 采用同步更新方式，在上一章的基础上，设计了改进的相容性约束上界，保证假设轨迹和实际轨迹偏差有限；
- (3) 分析了优化问题的迭代可行性，以及整个系统的闭环稳定性，给出了严格的证明。

**符号 3.1**  $\mathbb{Z}_i$ 和 $\mathbb{U}_i$ 分别表示状态允许集和输入允许集； $0 < T < \infty$ 表示预测时域； $0 < \delta = t_{k+1} - t_k \leq T$ 表示采样周期； $z(\tau|t_k)$ 表示在 $t_k$ 时刻预测 $\tau$ 时刻 $z$ 的值； $\|z\|$ 表示向量 $z$ 的2-范数，即 $\|z\| = \sqrt{z^T z}$ 。

### 3.2 问题的描述

考虑 $N_a$ 个动态解耦的二阶非线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_i = v_i \\ \dot{v}_i = f(t, x_i, v_i) + u_i \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, N_a, \quad (3.1)$$

其中 $x_i, v_i \in \mathbb{R}^n$ 为智能体 $i$ 的状态， $u_i \in \mathbb{R}^n$ 为其控制输入。在特定情况下， $x_i$ 可以表示智能体 $i$ 的位置， $v_i$ 表示速度。

每个智能体 $i$ 被标记为图 $\mathcal{G} = \{\mathbb{N}_a, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ 的一个顶点，其中 $\mathbb{N}_a = \{1, 2, \dots, N_a\}$ 为顶点的集合，边的集合 $\mathcal{E} \subseteq \{(i, j) \in \mathbb{N}_a \times \mathbb{N}_a \mid i \neq j\}$ 表示智能体之间的连接拓扑，相邻矩阵 $\mathcal{A}$ 的元素 $a_{ij} \geq 0$ 被定义为 $a_{ij} > 0 \Leftrightarrow (i, j) \in \mathcal{E}$ 。假设图 $\mathcal{G}$ 为无向图，即 $a_{ij} = a_{ji}$ 。定义智能体 $i$ 的邻居的集合为 $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathbb{N}_a \mid (i, j) \in \mathcal{E}\}$ ，智能体 $i$ 的邻居的数量为 $|\mathcal{N}_i|$ 。不失一般性，本章假设智能体 $i$ 与其邻居通过约束或成本耦合，且智能体 $i$ 可以与其邻居通信。

假设参考轨迹由一个虚拟智能体产生：

$$\begin{cases} \dot{x}_r = v_r \\ \dot{v}_r = f(t, x_r, v_r), \end{cases} \quad (3.2)$$

其中 $x_r, v_r \in \mathbb{R}^n$ 为参考状态。在本章中，我们假设所有智能体都能提前获得参考轨迹。

定义 $z_i = [x_i^T, v_i^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ 和 $z_r = [x_r^T, v_r^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ 。进一步，令 $z_{-i} = [z_{j_1}^T, \dots, z_{j_{|\mathcal{N}_i|}}^T]^T$ 表示智能体 $i$ 所用的邻居的状态构成的向量，即 $j_k \in \mathcal{N}_i$ ，且 $k = 1, 2, \dots, |\mathcal{N}_i|$ 。整个系统的控制目标为：当 $t \rightarrow \infty$ ，对于所有的 $i, j = 1, \dots, N_a$ ， $\|z_i - z_j\| \rightarrow 0$ 且 $\|z_i - z_r\| \rightarrow 0$ 。

给定权重参数 $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 和 $\gamma_i$ ，智能体 $i$ 的理想成本函数定义为：

$$J_i(t_k, z_i, z_{-i}, z_r, u_i) = \int_{t_k}^{t_k+T} L_i(\tau|t_k, z_i, z_{-i}, z_r, u_i) d\tau + L_{if}(z_i(t_k+T|t_k), z_r(t_k+T)), \quad (3.3)$$

其中阶段成本

$$\begin{aligned} L_i(\tau|t_k, z_i, z_{-i}, z_r, u_i) &= \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \|z_i(\tau|t_k) - z_j(\tau|t_k)\|^2 \\ &\quad + \beta_i \|z_i(\tau|t_k) - z_r(\tau)\|^2 + \gamma_i \|u_i(\tau|t_k)\|^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

终端成本 $L_{if}(z_i(\tau|t_k), z_r(\tau))$ 为连续可微的函数。

表 3.1 智能体 $i$ 的变量

$u_i^*(\tau t_k)$	最优控制输入
$z_i^*(\tau t_k)$	最优状态
$\tilde{u}_i(\tau t_k)$	可行控制输入
$\tilde{z}_i(\tau t_k)$	可行状态
$\hat{u}_i(\tau t_k)$	假设控制输入
$\hat{z}_i(\tau t_k)$	假设状态

### 3.3 分布式模型预测控制

和上章类似，本章假设所有智能体同步求解各自的优化问题，然而在存在耦合成本的情况下，更新智能体不可能得到其邻居的实际预测状态，因此优化问题不可解。为了解决这个问题，我们引入假设轨迹的概念。代替传递实际的预测轨迹，每个智能体计算传递各自的假设轨迹给自己的邻居。为了区别假设输入和最优输入，我们首先给出一些符号说明，如表3.1所示。

相似地，分别定义最优预测轨迹和假设预测轨迹为 $z_i^*(\tau|t_k)$ 和 $\hat{z}_i(\tau|t_k)$ 。在MPC框架下，最优控制输入的第一部分一般被作为实际控制输入，即实施 $u_i^*(\tau|t_k)$ ， $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ ，我们可得到实际的状态 $z_i(\tau|t_k) = z_i^*(\tau|t_k)$ ， $\tau \in [t_k, t_{k+1}]$ 。

和[74, 76]类似，假设的参考轨迹定义为：

$$\hat{u}_i(\tau|t_k) = \begin{cases} u_i^*(\tau|t_{k-1}) & \tau \in [t_k, t_{k-1} + T) \\ \kappa_i(z_i^\kappa(\tau|t_{k-1}), z_r(\tau)) & \tau \in [t_{k-1} + T, t_k + T], \end{cases} \quad (3.5)$$

其中 $\kappa_i(z_i^\kappa(\tau|t_{k-1}), z_r(\tau))$ 是与终端状态 $z_i^\kappa(\tau|t_{k-1})$ 和参考状态 $z_r(\tau)$ 相关的终端控制器。而终端状态 $z_i^\kappa(\tau|t_{k-1})$ 是根据动力学方程 (3.1)，以 $z_i^\kappa(t_{k-1} + T|t_{k-1}) = z_i^*(t_{k-1} + T|t_{k-1})$ 为起始状态，输入为 $u_i(\tau|t_k) = \kappa_i(z_i^\kappa(\tau|t_{k-1}), z_r(\tau))$ 计算得到的。相应的，假设预测轨迹定义为：

$$\hat{z}_i(\tau|t_k) = \begin{cases} z_i^*(\tau|t_{k-1}) & \tau \in [t_k, t_{k-1} + T), \\ z_i^\kappa(\tau|t_{k-1}) & \tau \in [t_{k-1} + T, t_k + T]. \end{cases} \quad (3.6)$$

为了和 $z_i$ 一致, 令 $\hat{z}_{-i}$ 为智能体 $i$ 所有邻居假设状态构成的向量。

**问题2** 在 $t_k$ 时刻, 对于每个智能体 $i = 1, 2, \dots, N_a$ , 给定 $z_i(t_k)$ 、 $z_r(\tau)$ 和 $\hat{z}_{-i}(\tau|t_k)$ ,  $\tau \in [t_k, t_k + T]$ ,

$$J_i^*(t_k, z_i^*, \hat{z}_{-i}, z_r, u_i^*) = \min_{u_i(\tau|t_k)} J_i(t_k, z_i, \hat{z}_{-i}, z_r, u_i)$$

使得对于所有的 $\tau \in [t_k, t_k + T]$

$$z_i(t_k|t_k) = z_i(t_k), \quad (3.7)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_i(\tau|t_k) = v_i(\tau|t_k) \\ \dot{v}_i(\tau|t_k) = f_i(\tau, x_i(\tau|t_k), v_i(\tau|t_k)) + u_i(\tau|t_k), \end{cases} \quad (3.8)$$

$$z_i(\tau|t_k) \in \mathbb{Z}_i, \quad (3.9)$$

$$u_i(\tau|t_k) \in \mathbb{U}_i, \quad (3.10)$$

$$\|z_i(\tau|t_k) - \hat{z}_i(\tau|t_k)\|^2 \leq \xi_i^2(t_k), \quad (3.11)$$

$$z_i(t_k + T|t_k) \in \mathbb{Z}_{if}(t_k), \quad (3.12)$$

其中 $\mathbb{Z}_i$ 是凸集,  $\mathbb{U}_i$ 为包含原点的凸集, (3.11) 表示相容性约束,  $\mathbb{Z}_{if}(t_k)$  表示终端集。

### 3.3.1 相容性约束的设计

正如上章提到的, 相容性约束主要保证智能体的假设轨迹不能偏离实际轨迹过远。除此之外, 它在确保系统收敛性中也起到了重要作用。

令 $\sigma_i(t_k) = \max_{j \in \mathcal{N}_i} \max_{\tau \in [t_k, t_k + T]} \|\hat{z}_i(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|$  和  $\iota_i(t_k) = \min_{j \in \mathcal{N}_i} \min_{\tau \in [t_k, t_{k+1}]} \|\hat{z}_i(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|$ 。 $\sigma_i(t_k)$ 表示时间区间 $[t_k, t_k + T]$ 内智能体 $i$ 的假设轨迹和它的邻居的假设轨迹之间的最大偏差。相似地,  $\iota_i(t_k)$ 表示时间区间 $[t_k, t_{k+1}]$ 内智能体 $i$ 的假设轨迹和它的邻居的假设轨迹之间的最小偏差。

令 $\Delta_i(t_k) = \frac{T-\delta}{\delta \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_{ij}} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij} (2\sigma_j(t_k) + \sigma_i(t_k))$ 。为了保证收敛性, 相容性约束的上界需要满足下面不等式:

$$0 < \xi_i(t_k) < \frac{2\iota_i(t_k) + \Delta_i(t_k) - \sqrt{(2\iota_i(t_k) + \Delta_i(t_k))^2 - 4\iota_i^2(t_k)}}{2}. \quad (3.13)$$

注意, 3.13) 暗含 $\xi_i(t_k) < \iota_i(t_k) < \sigma_i(t_k)$ 。

**注 3.1** 当 $\iota_i(t_k) = 0$ ,  $\xi_i(t_k) = 0$ 。在这种情况下, 由迭代可行性可得假设输入是优化问题的最优解。

### 3.3.2 终端成分的设计

文献[79]的假设1提出了针对单个系统的终端元素需要满足的三个条件。下面，针对本章的控制目标，我们提出了相似的条件。

**定义 3.1** 终端集  $\mathbb{Z}_{if}(t_k) \subseteq \mathbb{Z}_i$  和终端控制器  $\kappa_i(\cdot)$  应满足：对于任意的  $z_i(t|t_k) \in \mathbb{Z}_{if}(t_k)$  和  $\tau > t$ ，应用  $u_i(\tau) = \kappa_i(z_i(\tau|t_k), z_r(\tau))$ ,

$$z_i(\tau|t_k) \in \mathbb{Z}_{if}(t_k), \quad (3.14)$$

$$\kappa_i(z_i(\tau|t_k), z_r(\tau)) \in \mathbb{U}_i, \quad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^{N_a} (\dot{L}_{if}(z_i(\tau|t_k), z_r(\tau)) + L_i(\tau|t_k, z_i, z_{-i}, z_r, u_i)) \leq 0. \quad (3.16)$$

条件 (3.14) 确保不变性；条件 (3.15) 表示输入约束满足；条件 (3.16) 确保局部收敛性。下面设计本章的终端集和相应的终端控制器。

- 终端成本为

$$L_{if}(z_i(\tau|t_k), z_r(\tau)) = \rho_i \|z_i(\tau|t_k) - z_r(\tau)\|^2, \quad (3.17)$$

其中  $\rho_i > 0$  为权重系数；

- 终端集为

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}_{if}(t_k) = \{z_i(\tau|t_k) \mid \|z_i(\tau|t_k) - z_r(\tau)\| \leq \|z_i(t_k) - z_r(t_k)\| \\ \text{且 } x_i(\tau|t_k) - x_r(\tau) = -\mu_i(v_i(\tau|t_k) - v_r(\tau))\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

其中  $\mu_i$  为正常数， $\tau \geq t_k$ ；

- 终端控制器为

$$\begin{aligned} \kappa_i(z_i(\tau|t_k), z_r(\tau)) = -(f(x_i(\tau|t_k), v_i(\tau|t_k)) \\ - f(x_r(\tau), v_r(\tau))) - k_i(v_i(\tau|t_k) - v_r(\tau)), \end{aligned} \quad (3.19)$$

其中  $k_i$  为正常数。

考虑以上的终端元素，给出以下假设来确保定义3.1中的条件满足。

**假设 3.1** 方程 (3.1) 和 (3.2) 中的非线性函数  $f(\cdot)$  满足局部 *Lipschitz* 条件，即

$$\|f(t, x, v) - f(t, y, z)\| \leq L_1\|x - y\| + L_2\|v - z\|. \quad (3.20)$$

**假设 3.2** 对于任意的  $z_i(\tau) \in \mathbb{Z}_{if}(t_k)$ ，终端控制器 (3.19) 满足  $\kappa_i(z_i(\tau), z_r(\tau)) \in \mathbb{U}_i$ 。

**注 3.2** 本章引入这个假设是因为我们不清楚  $\mathbb{U}_i$  的确切形式。类似的假设可以参见文献[39]。如果集合  $\mathbb{U}_i = \{u \mid u_{min} \leq u \leq u_{max}\}$ ，那么可以离线选择合适的反馈增益  $k_i$  使得假设3.2满足。

**定理 3.1** 给定参数  $a_{ij}$ 、 $\alpha_i$ 、 $\beta_i$  和  $\lambda_i$ ，在假设3.1和假设3.2下，如果  $\Lambda_{i1} + \Lambda_{i2} \leq 0$  且  $\mu_i k_i = 1$ ，其中

$$\begin{aligned} \Lambda_{i1} = & \rho_i - 2\rho_i k_i + \gamma_i k_i^2 + \gamma_i k_i L_1 + 2\gamma_i k_i L_2 + \gamma_i L_2^2 \\ & + \gamma_i L_1 L_2 + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij} + \beta_i, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$\Lambda_{i2} = \mu_i^2 (\rho_i + \gamma_i k_i L_1 + \gamma_i L_1^2 + \gamma_i L_1 L_2 + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij} + \beta_i), \quad (3.22)$$

那么定义3.1中的所有条件都能满足。

**证明:** 对于任意  $z_i(t) \in \mathbb{Z}_{if}(t_k)$ ， $t \geq t_k$  且  $\tau > t$ ，利用  $\kappa_i(\cdot)$  可得

$$\begin{aligned} & \dot{x}_i(\tau) - \dot{x}_r(\tau) + \mu_i(\dot{v}_i(\tau) - \dot{v}_r(\tau)) \\ &= (v_i(\tau) - v_r(\tau)) + \mu_i(f(\tau, x_i, v_i) + u_i(t) - f(\tau, x_r, v_r)) \\ &= (v_i(\tau) - v_r(\tau)) - \mu_i k_i (v_i(\tau) - v_r(\tau)) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

因此，对于  $\tau = t^+ = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (t + \Delta t)$ ，条件  $x_i(t) - x_r(t) = -\mu_i(v_i(\tau|t_k) - v_r(\tau))$  满足。另外，从假设3.2可得 (3.15) 满足。

下面，我们将证明条件 (3.16) 成立。利用不等式  $\|z_i - z_j\|^2 \leq 2\|z_i - z_r\|^2 + 2\|z_j - z_r\|^2$ ，如果

$$\sum_{i=1}^{N_a} (\dot{L}_{if} + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\|z_i - z_r\|^2 + \|z_j - z_r\|^2) + \beta_i \|z_i - z_r\|^2 + \gamma_i \|u_i\|^2) \leq 0, \quad (3.24)$$

那么条件 (3.16) 一定满足。

对于任意  $i \in \mathbb{N}_a$ ,

$$\begin{aligned}
 & \dot{L}_{if} + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ji}(\|z_i - z_r\|^2) + \beta_i \|z_i - z_r\|^2 + \gamma_i \|u_i\|^2 \\
 = & \dot{L}_{if} + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + \beta_i \|z_i - z_r\|^2 + \gamma_i \|u_i\|^2 \\
 = & 2\rho_i(x_i - x_r)^T(v_i - v_r) + 2\rho_i(v_r - v_i)^T(f(x_i, v_i) - f(x_r, v_r) + u_i) \\
 & + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + \beta_i \|z_i - z_r\|^2 + \gamma_i \|u_i\|^2 \\
 \leq & \rho_i \|x_i - x_r\|^2 + \rho_i \|v_i - v_r\|^2 - 2\rho_i k_i \|v_i - v_r\|^2 + \gamma_i \|k_i(v_i - v_r) + f(x_i, v_i) \\
 & - f(x_r, v_r)\|^2 + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + \beta_i \|z_i - z_r\|^2 \\
 \leq & \rho_i \|x_i - x_r\|^2 + \rho_i \|v_i - v_r\|^2 - 2\rho_i k_i \|v_i - v_r\|^2 + \gamma_i k_i^2 \|v_i - v_r\|^2 \\
 & + 2\gamma_i k_i L_1 \|x_i - x_r\| \|v_i - v_r\| + 2\gamma_i k_i L_2 \|v_i - v_r\|^2 + \gamma_i L_1^2 \|x_i - x_r\|^2 \\
 & + \gamma_i L_2^2 \|v_i - v_r\|^2 + 2\gamma_i L_1 L_2 \|x_i - x_r\| \|v_i - v_r\| + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) \\
 & + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij}(\|z_i - z_r\|^2) + \beta_i \|z_i - z_r\|^2 \\
 \leq & (\rho_i - 2\rho_i k_i + \gamma_i k_i^2 + \gamma_i k_i L_1 + 2\gamma_i k_i L_2 + \gamma_i L_2^2 + \gamma_i L_1 L_2 \\
 & + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij} + \beta_i) \|v_i - v_r\|^2 + (\rho_i + \gamma_i k_i L_1 \\
 & + \gamma_i L_1^2 + \gamma_i L_1 L_2 + 2\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij} + \beta_i) \|x_i - x_r\|^2 \\
 = & (\Lambda_{i1} + \Lambda_{i2}) \|v_i - v_r\|^2 \leq 0.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

因此, 不等式

$$\dot{L}_{if} \leq -\beta_i \|z_i - z_r\|^2 \tag{3.26}$$

成立。它意味着在终端集内, 应用终端控制器  $\kappa_i(\cdot)$ ,  $\|z_i - z_r\|^2$  将指数递减为 0, 即对于任意  $z_i(t) \in \mathbb{Z}_{if}(t_k)$ ,  $t \geq t_k$  且  $\tau > t$ ,  $\|z_i(\tau) - z_r(\tau)\|^2 < \|z_i(t) - z_r(t)\|^2 \leq \|z_i(t_k) - z_r(t_k)\|^2$ 。根据 (3.23) 和 (3.26) 可得, 条件 (3.14) 满足。□

**注 3.3** 本章的终端集和终端控制器相对严格。然而，和[102, 103]中的结果相比，本章设计的终端集可以保证不变性，从而有助于确保迭代可行性。除此之外，给定上述的终端元素，本章的优化问题是一个凸优化问题，能够有效求解。

### 3.3.3 分布式实现算法

在上一节，我们提出了**问题2**与给出了智能体的假设控制输入 (3.5) 和假设轨迹 (3.6)。下面，我们将详细地描述同步分布式实现算法。

#### 算法2

**离线阶段：**对于每个智能体 $i$ ，给定权重参数 $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 、 $\gamma_i$ 和 $\varphi_i$ ；选择合适的参数 $\rho_i$ 、 $k_i$ 和 $\mu_i$ 。

**在线阶段：**在初始时刻 $t_0$ ，给定初始最优解 $u_i^*(\tau|t_0)$ 和初始最优轨迹 $z_i^*(\tau|t_0)$ ， $\tau \in [t_0, t_0 + T]$ 。

(i) 在时间区间 $[t_k, t_{k+1})$ ， $k \geq 0$ ，每个智能体 $i$

- 实施实际轨迹 $z_i(t) = z_i^*(t|t_k)$ ， $t \in [t_k, t_{k+1})$ ；
- 计算假设控制输入 $\hat{u}_i(\tau|t_{k+1})$ 和假设轨迹 $\hat{z}_i(\tau|t_{k+1})$ ， $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ ；
- 将 $\hat{z}_i(\cdot)$ 传递给它的邻居，接收来自邻居 $j \in \mathcal{N}_i$ 的 $\hat{z}_j(\cdot)$ ；
- 计算 $\sigma_i(t_k)$ ， $\iota_i(t_k)$ ；
- 将 $\sigma_i(t_k)$ 传递给它的邻居，接收来自邻居 $j \in \mathcal{N}_i$ 的 $\sigma_j(t_k)$ ；
- 根据 (3.13) 计算 $\xi_i(t_k)$ 。

(ii) 在每个采样时刻 $t_k$ ， $k > 0$ ，每个智能体 $i$

- 采样当前状态 $z_i(t_k)$ ；
- 求解**问题2**，得到最优控制输入 $u_i^*(\tau|t_k)$ 和最优轨迹 $z_i^*(\tau|t_k)$ ， $\tau \in [t_k, t_k + T]$ 。

(iii) 返回(i)。

文献[74, 76]给出了一种得到初始最优解的方法。为了避免集中式MPC 复杂的计算，这些文献设定初始假设轨迹 $\hat{z}_i(\tau|t_0)$ 为 $z_i(t_0)$ ， $\tau \in [t_0, t_0 + T]$ ，然后求解优化问题可得初始最优解。另外，本章假设求解最优化问题的时间可以忽略不计。



### 3.4 主要结果

利用上节的分布式算法，闭环系统具有下面的迭代可行性和闭环稳定性。

**定理 3.2** 在每个采样时刻 $t_k$ ，每个动力学如 (3.1) 的智能体求解问题2。对于每个智能体，如果在初始时刻 $t_0$ 存在一个初始可行解，那么问题2在任意时刻 $t_k$ ， $k > 0$ 均是可行的。进一步地，整个多智能体系统是渐进稳定的，即当 $t \rightarrow \infty$ ，对于所有的 $i, j = 1, 2, \dots, N_a$ ， $\|z_i - z_j\| \rightarrow 0$ 且 $\|z_i - z_r\| \rightarrow 0$ 。

**证明:** 首先分析可行性。假设在 $t_k$ 时刻，对智能体 $i$ ，问题2是可行的。它的最优控制输入和最优轨迹分别为 $u_i^*(\tau|t_k)$ 和 $z_i^*(\tau|t_k)$ ， $\tau \in [t_k, t_k + T]$ 。定义 $\tilde{u}_i(\tau|t_{k+1})$ 为可行控制输入， $\tilde{z}_i(\tau|t_{k+1})$ 为相应的轨迹， $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 。

令 $\tilde{u}_i(\tau|t_{k+1}) = \hat{u}_i(\tau|t_{k+1})$ ， $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 。从终端集和终端控制器的定义可得，带入 $\tilde{u}_i(\cdot)$ ，问题2所有的约束都满足，即 $\hat{u}_i(\tau|t_{k+1})$ ， $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 是 $t_{k+1}$ 时刻的一个可行解。因此，初始可行意味着后续的所有优化问题均是可行的。

下面，我们证明闭环系统的稳定性。对于多智能体系统，定义李亚普诺夫函数为单个系统最优成本的和，即

$$J_{\Sigma}^*(t_k) = \sum_{i=1}^{N_a} J_i^*(t_k, z_i^*, \hat{z}_{-i}, u_i^*). \quad (3.27)$$

令 $\tilde{u}_i(\tau|t_{k+1}) = \hat{u}_i(\tau|t_{k+1})$ 为 $t_{k+1}$ 时刻的可行解， $\tau \in [t_{k+1}, t_{k+1} + T]$ 。因此，

$$\begin{aligned} & J_{\Sigma}^*(t_{k+1}) - J_{\Sigma}^*(t_k) \\ & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (J_i(t_{k+1}, \tilde{z}_i, \tilde{z}_{-i}, \tilde{u}_i) - J_i^*(t_k, z_i^*, \hat{z}_{-i}, u_i^*)) \\ & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (\alpha_i \sum_{j \in N_i} a_{ij} \int_{t_k}^{t_{k+1}+T} (\|z_i^*(\tau|t_k) - z_j^*(\tau|t_k)\|^2 - \|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|^2) d\tau \\ & \quad - \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_i(\tau|t_k, z_i^*, \hat{z}_j, z_r, u_i^*) d\tau + \int_{t_k+T}^{t_{k+1}+T} L_i(\tau|t_k, z_i^{\kappa}, z_j^{\kappa}, z_r, \kappa_i) d\tau \\ & \quad + L_{if}(z_i^{\kappa}(t_{k+1} + T|t_k), z_r(t_{k+1} + T)) - L_{if}(z_i^*(t_k + T|t_k), z_r(t_k + T))). \end{aligned} \quad (3.28)$$

由条件 (3.16) 可得

$$\begin{aligned}
 & J_{\Sigma}^*(t_{k+1}) - J_{\Sigma}^*(t_k) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (J_i(t_{k+1}, \tilde{z}_i, \tilde{z}_{-i}, \tilde{u}_i) - J_i^*(t_k, z_i^*, \hat{z}_{-i}, u_i^*)) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (\|z_i^*(\tau|t_k) - z_j^*(\tau|t_k)\|^2 - \|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|^2) d\tau \\
 & \quad - \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_i(\tau|t_k, z_i^*, \hat{z}_j, z_r, u_i^*) d\tau. \tag{3.29}
 \end{aligned}$$

根据  $\|z_i(\tau|t_k) - \hat{z}_i(\tau|t_k)\| \leq \xi_i(t_k) < \sigma_i(t_k)$  可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_a} (\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (\|z_i^*(\tau|t_k) - z_j^*(\tau|t_k)\|^2 - \|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|^2) d\tau) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (2\|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\| \|z_j^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\| \\
 & \quad + \|z_j^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|^2) d\tau) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (2(\|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_i(\tau|t_k)\| + \|\hat{z}_i(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|) \\
 & \quad \times \|z_j^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\| + \|z_j^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|^2) d\tau) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (2(\xi_i(t_k) + \sigma_i(t_k)) \times \xi_j(t_k) + \xi_j^2(t_k)) d\tau) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (\alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \int_{t_k+1}^{t_k+T} (2\sigma_i(t_k) \times \xi_j(t_k) + \sigma_j(t_k) \times \xi_j(t_k)) d\tau) \\
 & = \sum_{i=1}^{N_a} (\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \alpha_j a_{ij} (T - \delta) (2\sigma_j(t_k) \times \xi_i(t_k) + \sigma_i(t_k) \times \xi_i(t_k))). \tag{3.30}
 \end{aligned}$$

另外, 由  $\xi_i(t_k) < \iota_i(t_k)$  可得

$$\begin{aligned}
 & \int_{t_k}^{t_{k+1}} L_i(\tau|t_k, z_i^*, \hat{z}_j, z_r, u_i^*) d\tau \\
 & = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|^2 + \beta_i \|z_i^*(\tau|t_k) - z_r(\tau)\|^2 + \gamma_i \|u_i^*(\tau|t_k)\|^2 d\tau \\
 & \geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_i(\tau|t_k) + \hat{z}_i(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\|^2 d\tau
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\|\hat{z}_i(\tau|t_k) - \hat{z}_j(\tau|t_k)\| - \|z_i^*(\tau|t_k) - \hat{z}_i(\tau|t_k)\|)^2 d\tau \\
 &\geq \int_{t_k}^{t_{k+1}} \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\iota_i(t_k) - \xi_i(t_k))^2 d\tau \\
 &= \delta \alpha_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (\iota_i(t_k) - \xi_i(t_k))^2.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

根据相容性约束的上界 (3.13)，我们可以得出对于所有的  $z_i \neq z_j$ ,

$$J_{\Sigma}^*(t_{k+1}) - J_{\Sigma}^*(t_k) < 0. \tag{3.32}$$

因此，整个系统是渐进稳定的。  $\square$

### 3.5 仿真结果和分析

本节考虑文献[100]中2-自由度的机械臂模型作为仿真模型。为了简化，此仿真忽略摩擦力的影响。模型的形式如 (3.1) 所示，其中  $f = [-4.646 \sin x_{i1} \ 0]^T$ 。仿真利用工具箱 ICLOCS<sup>[94]</sup> 和 IPOPT<sup>[95]</sup> 在 Matlab 平台上进行。

关联矩阵  $\mathcal{A}$  取值为

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

另外， $L_1 = 4.646$ ， $L_2 = 0$ 。根据定理3.1，其他参数选取如下：

$$T = 3, \quad \delta = 0.5, \quad \alpha_i = \beta_i = 0.1, \quad \gamma_i = 0.01, \quad \rho_i = 5, \quad \mu_i = 0.6, \quad k_i = 1/0.6 = 1.67$$

$$\mathbb{U}_i = \{u_i \mid -2.5 \leq u_{i1}, u_{i2} \leq 2.5\}$$

这些参数能保证  $\Lambda_{i1} + \Lambda_{i2} < 0$ 。

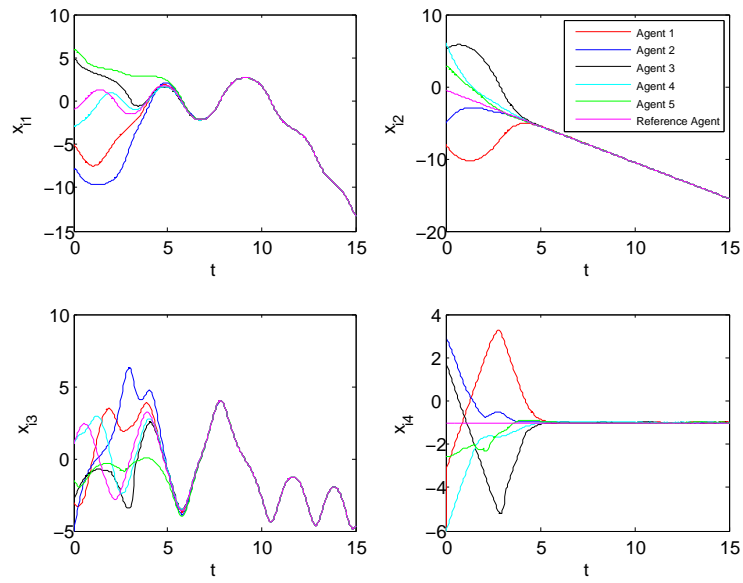


图 3.1 所有智能体的状态

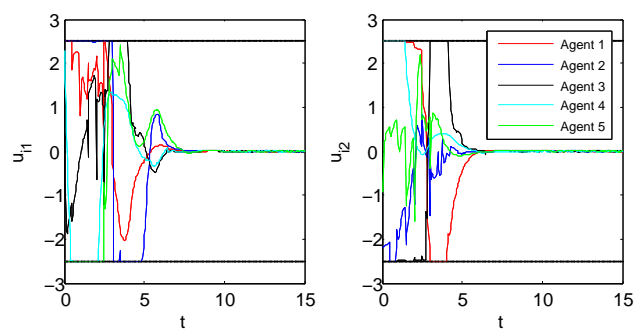


图 3.2 所有智能体的控制输入

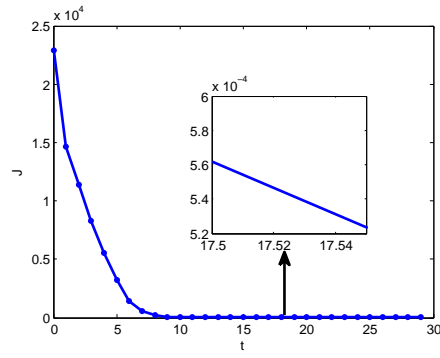


图 3.3 整个系统的成本

每个智能体的初始状态为：

$$\begin{aligned}
 z_1(0) &= \begin{bmatrix} -5 & -8 & -3 & -6 \end{bmatrix}^T, \\
 z_2(0) &= \begin{bmatrix} -8 & -5 & -5 & 3 \end{bmatrix}^T, \\
 z_3(0) &= \begin{bmatrix} 5 & 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}^T, \\
 z_4(0) &= \begin{bmatrix} -3 & 6 & 1 & -6 \end{bmatrix}^T, \\
 z_5(0) &= \begin{bmatrix} 6 & 3 & -1.5 & -2.5 \end{bmatrix}^T,
 \end{aligned}$$

参考智能体的初始状态为 $z_r(0) = \begin{bmatrix} -1 & -0.5 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ 。

仿真结果如图3.1-图3.3。图3.1表示每个智能体的状态均收敛到参考轨迹，从而实现了多智能体系统的一致。图3.2给出了每个智能体的控制输入轨迹，由图可知，控制输入满足输入约束。在图3.3中，我们可以看出整个系统的成本渐进收敛到0，因此整个系统是渐进稳定的。总的来说，仿真结果证明了所提出算法的有效性。

### 3.6 本章小结

本章主要研究了多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制问题，智能体系统之间存在成本耦合，所有智能体共享一个参考轨迹。利用同步更新策略，在上一章的基础上，提出了新的相容性约束上界；利用参考轨迹，设计了每个智能体的终端成分，并给出了其需要满足的条件；给出了分布式优化算法；分析了优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环收敛性；最后通过仿真实验验证了算法的有效性。





## 第4章 多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制

### 4.1 引言

编队是指设计合适的控制器，使得多个系统形成一定队形，编队既可以是动态的，也可以是静态的。编队控制是多智能体领域重要的问题。本章主要研究了多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制问题，每个智能体到达各自的目的地形成队形，同时智能体之间满足避碰约束。

目前，分布式模型预测控制已经被用来研究多智能体的编队控制问题<sup>[101, 102]</sup>。文献[103]利用模型预测控制研究了独轮车的跟踪问题，但是不能保证系统的可行性和稳定性。文献[76]利用同步更新策略，研究了非线性系统的编队问题，但是其相容性约束是收缩的，极大地增加了了解的保守性，而且没有考虑避碰问题。文献[80]和[93]分别研究了多个非线性系统和多个线性系统的编队问题，并考虑了避碰任务，但是要求每个智能体都已知公共的参考轨迹，这限制了系统之间的拓扑结构。另外，二阶线性系统可以表示典型的车辆运动学关系，所以研究二阶线性系统的编队具有重要的现实意义。

以上是本章工作的出发点。本章的主要贡献为：

- (1) 在分布式结构下，充分利用系统模型的特点和编队目标，设计了解耦的终端成分，而且终端集内的状态满足避碰约束；
- (2) 采用同步更新方式，在前两章的基础上，设计了改进的相容性约束上界，保证假设轨迹和实际轨迹的一致性；设计了分布式结构下的避碰约束；
- (4) 分析了优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环稳定性，以及避碰约束的满足情况，给出了严格的证明。

**符号 4.1**  $\mathbb{Z}_i$ 和 $\mathbb{U}_i$ 分别表示状态允许集和输入允许集； $N_a$ 表示智能体的数量； $N$ 表示预测时域长度； $z(k+l|k)$ 表示在 $k$ 时刻向前预测 $l$ 步 $z$ 的值； $\|z\|$ 表示向量 $z$ 的2-范数，即 $\|z\| = \sqrt{z^T z}$ 。

## 4.2 问题的描述

本章考虑 $N_a$ 个线性二阶多智能体系统：

$$z_i(k+1) = Az_i(k) + Bu_i(k), \quad \forall i \in \mathbb{N}_a = \{1, 2, \dots, N_a\}, k \geq 0, \quad (4.1)$$

其中 $z_i = [x_i; v_i] \in \mathbb{R}^{2n}$ 为智能体 $i$ 的系统状态， $x_i \in \mathbb{R}^n$ 和 $v_i \in \mathbb{R}^n$ 分别表示其位置和速度， $u_i \in \mathbb{R}^n$ 为系统输入（即加速度）， $A = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ \mathbf{0} & I_n \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 0.5I_n \\ I_n \end{bmatrix}$ 。智能体 $i$ 的状态和输入分别受到约束： $z_i \in \mathbb{Z}_i$  和  $u_i \in \mathbb{U}_i$ ，其中 $\mathbb{Z}_i$ 为紧集， $\mathbb{U}_i$ 为闭集。

本章的控制目标是让每个智能体到达指定位置形成编队，同时满足避碰要求，即：

$$\text{趋向目标位置} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x_i^d - x_i(k)) = \mathbf{0}, \quad (4.2)$$

$$\text{编队} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} (x_j(k) - x_i(k)) = d_{ij}, \forall j \in \mathcal{N}_i, \quad (4.3)$$

$$\text{避碰} \quad \|x_j(k) - x_i(k)\| \geq 2R, \forall j \in \mathbb{N}_a \setminus i, k \geq 0, \quad (4.4)$$

其中 $d_{ij}$ 表示智能体 $i$ 和智能体 $j$ 之间的期望相对位置， $\mathcal{N}_i = \{j \in \mathbb{N}_a \mid d_{ij} \text{为先验的}\}$ 表示智能体 $i$ 的邻居的集合， $R$ 表示每个智能体的安全半径。令 $z_{-i} = [z_{j_1}^T, \dots, z_{j_{|\mathcal{N}_i|}}^T]^T$ 表示智能体 $i$ 所有的邻居的状态构成的向量，即 $j_k \in \mathcal{N}_i$ ，且 $k = 1, 2, \dots, |\mathcal{N}_i|$ 。

为了保证控制目标的真实性，我们给出下面假设。

**假设 4.1** 编队目标、趋向目标位置和避碰三个任务之间是一致的，即

$$d_{ij} = x_j^d - x_i^d, \|d_{ij}\| \geq 2R, \forall i \in \mathbb{N}_a, j \in \mathcal{N}_i. \quad (4.5)$$

根据控制目标，给定权重参数 $\alpha_i$ 、 $\beta_i$ 和 $\rho_i$ ，定义智能体 $i$ 的理想成本函数为：

$$J_i(k, z_i, z_{-i}, z_i^d, u_i) = \sum_{l=0}^{N-1} L_i(k+1|k, z_i, z_{-i}, z_i^d, u_i) + L_{if}(z_i(k+N|k), z_i^d), \quad (4.6)$$

其中阶段成本为

$$\begin{aligned} L_i(k+l|k, z_i, z_{-i}, z_i^d, u_i) &= \alpha_i \|z_i^d - z_i(k+l|k)\|^2 + \beta_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|z_j(k+l|k) \\ &\quad - z_i(k+l|k) - d_{ij}^z\|^2 + \rho_i \|u_i(k+l|k)\|^2 \\ &= \alpha_i \|\Delta z_i(k+l|k)\|^2 + \beta_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \|z_{ij}(k+l|k)\|^2 \\ &\quad + \rho_i \|u_i(k+l|k)\|^2, \end{aligned} \quad (4.7)$$

表 4.1 智能体 $i$ 的变量

$u_i^*(k+l k)$	最优控制输入
$z_i^*(k+l k)$	最优状态
$\tilde{u}_i(k+l k)$	可行控制输入
$\tilde{z}_i(k+l k)$	可行状态
$\hat{u}_i(k+l k)$	假设控制输入
$\hat{z}_i(k+l k)$	假设状态

$L_{if}(z_i(k+N|k), z_i^d)$ 为终端成本。为了简化, 在方程 (4.7) 中,  $z_i^d = [x_i^d; \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $d_{ij}^z = [d_{ij}; \mathbf{0}] \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\Delta z_i(k+l|k) = z_i^d - z_i(k+l|k)$ ,  $z_{ij}(k+l|k) = z_j(k+l|k) - z_i(k+l|k) - d_{ij}^z$ 。而方程 (4.19) 中的  $P_i$  为下面要设计的正定矩阵。

### 4.3 分布式协同模型预测控制

和前两章相似, 本章依然采用同步分布式模型预测控制。类似地, 为了使优化问题可解, 首先设计假设控制输入。定义变量如表4.1所示。智能体 $i$ 的假设控制输入为:

$$\hat{u}_i(k+l|k) = \begin{cases} u_i^*(k+l|k-1) & l = 0, 1, \dots, N-2 \\ \kappa_i(z_i^*(k-1+N|k-1)) & l = N-1, \end{cases} \quad (4.8)$$

其中  $\kappa_i(\cdot)$  为终端控制器。

相应地, 假设状态为:

$$\hat{z}_i(k+l|k) = \begin{cases} z_i^*(k+l|k-1) & l = 0, 1, \dots, N-1 \\ z_i^\kappa(k+N|k-1) & l = N. \end{cases} \quad (4.9)$$

其中  $z_i^\kappa(k+N|k-1)$  是以  $z_i^*(k-1+N|k-1)$  为初值, 带入终端控制器之后得到的状态。为了和  $z_i$  一致, 令  $\hat{z}_{-i}$  为智能体 $i$ 所有邻居假设状态构成的向量。

#### 4.3.1 相容性约束的设计

类似于前两章, 由于引入了假设轨迹, 我们需要设计相容性约束来保证每个智能体

的实际轨迹和假设轨迹偏差不大。在本章中，相容性约束有两部分组成：位置的相容性约束和状态的相容性约束。

对于智能体 $i$ ，定义 $\mu_{ij}(k+l|k) = \frac{\|\hat{x}_j(k+l|k) - \hat{x}_i(k+l|k)\| - 2R}{2}$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $j \in \mathbb{N}_a \setminus i$ 和 $\mu_i(k+l|k) = \min_{j \in \mathbb{N}_a \setminus i} \mu_{ij}$ 。位置的相容性约束定义为：

$$\|\hat{x}_i(k+l|k) - x_i(k+l|k)\| = \varepsilon_i^x(k+l|k) \leq \mu_i(k+l|k) \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.10)$$

另外定义 $\nu_i(k) = \frac{\sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i} - b_i}{2a_i}$ ，其中 $a_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\beta_i + 2\beta_j)$ ,  $b_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (2\beta_j \varphi_{ji}(k))$ ,  $c_i = -\frac{\gamma_i}{N-1} \alpha_i \|\Delta z_i(k|k)\|$ ,  $\varphi_{ji}(k) = \max_{l=1,2,\dots,N-1} \|\hat{z}_j(k+l|k) - \hat{z}_i(k+l|k) - d_{ij}\|$ ,  $0 < \gamma_i < 1$ 。智能体 $i$ 状态的相容性约束为：

$$\|\hat{z}_i(k+l|k) - z_i(k+l|k)\| = \varepsilon_i^z(k+l|k) \leq \nu_i(k) \quad l = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.11)$$

这两个相容性约束作用不同，(4.10)主要是为了实现避碰，而(4.11)主要是为了保证系统的稳定性。

**注 4.1** 和第二章、第三章设计的相容性约束的上界不同，除了(4.10)之外，(4.11)与每次优化的初始状态有关，而第二章和第三章的上界主要由假设轨迹的偏差决定。

#### 4.3.2 避碰约束的设计

由于避碰约束(4.4)中包含其他智能体的实际状态，因此更新智能体的优化问题是不可解的。为了使得优化问题可解，我们希望能用假设状态替代其他智能体的实际状态，下面给出新的避碰约束。

对于智能体 $i$ ，由(4.10)可得，

$$\begin{aligned} & \|x_i(k+l|k) - x_j(k+l|k)\| \\ &= \|x_i(k+l|k) - \hat{x}_j(k+l|k) + \hat{x}_j(k+l|k) - x_j(k+l|k)\| \\ &\geq \|x_i(k+l|k) - \hat{x}_j(k+l|k)\| - \|\varepsilon_j^x(k+l|k)\| \\ &\geq \|x_i(k+l|k) - \hat{x}_j(k+l|k)\| - \mu_{ij}(k+l|k), \quad j \in \mathbb{N}_a \setminus i. \end{aligned} \quad (4.12)$$

由上可得，如果

$$\|x_i(k+l|k) - \hat{x}_j(k+l|k)\| \geq 2R + \mu_{ij}(k+l|k), \quad j \in \mathbb{N}_a \setminus i, \quad (4.13)$$

则实际避碰约束(4.4)一定满足。

### 4.3.3 终端成分的设计

正如第二章和第三章提到的，终端成分对于系统稳定性和可行的满足有着至关重要的作用<sup>[37]</sup>。下面给出本章的终端成分设计。

终端控制器为

$$\kappa_i(z) = K_{i1}z + K_{i2}z_i^d, \quad (4.14)$$

将其带入模型 (4.1)，可得误差模型如下：

$$\begin{aligned} \Delta z_i(k+1) &= A\Delta z_i(k) + (I - A)z_i^d - B(K_{i1}z_i(k) + K_{i2}z_i^d) \\ &= (A + BK_{i1})\Delta z_i(k) + (I - A - BK_{i1} - BK_{i2})z_i^d. \end{aligned} \quad (4.15)$$

如果以下两个条件满足

- (1)  $\phi_i = A + BK_{i1}$  稳定，
- (2)  $(I - A - BK_{i1} - BK_{i2})z_i^d = \mathbf{0}$ ,

则误差方程可写为：

$$\Delta z_i(k+1) = \phi_i \Delta z_i(k). \quad (4.16)$$

条件 (1) 很容易满足，下面主要讨论条件 (2) 满足的可能性。为了方便，我们在此忽略下标，定义  $L = K_{i1} + K_{i2} = [L_1 \ L_2]$ ，其中  $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^n$ 。首先考虑  $I - A = BL$  成立的可能性，由  $A$  和  $B$  的具体形式可得，

$$I - A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$BL = \begin{bmatrix} 0.5L_1 & 0.5L_2 \\ L_1 & L_2 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

考虑到控制任务中  $z_i^d = [x_i^d; \mathbf{0}]$ ，因此即使无法得到  $L_2$  的准确形式，依然可得，在当前控制任务下，当  $L_1 = \mathbf{0}$  时， $(I - A - BK_{i1} - BK_{i2})z_i^d = \mathbf{0}$  满足，即误差系统可得如 4.16 的形式。

**注 4.2** 在设计反馈增益 $K_{i1}$ 和 $K_{i2}$ 时, 可以先设计 $K_{i1}$ 使条件1满足, 然后再将 $K_{i1}$ 的前 $n$ 列直接取反即可。

另外, 终端成本设计为

$$L_{if}(z, z_i^d) = \|z_i^d - z\|_{P_i}^2. \quad (4.19)$$

而终端集设计为

$$\mathbb{Z}_{if} = \{z_i \mid \|\Delta z_i\|_{\Lambda_{i1}}^2 + \rho_i \|z_i^d\|_{\Lambda_{i2}}^2 \leq 0, \|\Delta x_i\| \leq D_i\}, \quad (4.20)$$

其中 $\Lambda_{i1} = \alpha_i I + \rho_i K_{i1}^T K_{i1} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\beta_i + \beta_j) I + \phi_i^T P_i \phi_i - P_i$ ,  $\Lambda_{i2} = (K_{i1} + K_{i2})^T (K_{i1} + K_{i2})$ ,  $D_i = \min_{j \in \mathcal{N}_a \setminus i} \frac{d_{ij} - 2R}{2}$ 。下面单独分析 $\rho_i \|z_i^d\|_{\Lambda_{i2}}^2$ 这一项, 由终端控制器需要满足的条件 $L_1 = 0$ 所知, 且 $z_i^d = [x_i^d; \mathbf{0}]$ , 所以 $\rho_i \|z_i^d\|_{\Lambda_{i2}}^2 = 0$ 。因此终端集为

$$\mathbb{Z}_{if} = \{z_i \mid \|\Delta z_i\|_{\Lambda_{i1}}^2 \leq 0, \|\Delta x_i\| \leq D_i\}. \quad (4.21)$$

在给出定理4.1之前, 首先给出下面的假设。

**假设 4.2**  $\kappa_i \in \mathbb{U}_i$  且  $\mathbb{Z}_{if} \subseteq \mathbb{Z}_i$ 。

**定理 4.1** 对于所有的 $i = 1, 2, \dots, N_a$ , 给定如上设计的终端控制器 (4.14) 和负定矩阵 $Q_i$ , 如果 $P_i$  是一个满足下面的李亚普诺夫方程的正定矩阵:

$$\alpha_i I + \rho_i K_{i1}^T K_{i1} + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\beta_i + \beta_j) I + \phi_i^T P_i \phi_i - P_i = Q_i, \quad (4.22)$$

那么终端集可以简化为

$$\mathbb{Z}_{if} = \{z_i \mid \|\Delta x_i\| \leq D_i\}, \quad (4.23)$$

同时, 该终端集是一个正定不变集, 且在该集合内的状态满足避碰约束; 终端成本是一个局部李亚普诺夫函数 (*Local Lyapunov function*) <sup>[37]</sup> 使得对于 $z_i(k) \in \mathbb{Z}_{if}$ ,

$$\sum_{i \in \mathcal{N}_a} (L(z_i(k), z_{-i}(k), z_i^d, u_i) + L_{if}(z_i(k+1), z_i^d) - L_{if}(z_i(k), z_i^d)) \leq 0. \quad (4.24)$$

**证明:** 当  $P_i > 0$  满足李亚普诺夫方程 (4.22) 时, 很容易得到  $\Lambda_{i1} < 0$ , 所以终端集中的第一个条件可以省略从而简化为 (4.23) 的形式。另外当终端控制器为 (4.14) 时, 误差系统模型 (4.16) 为稳定的, 所以对于任意的  $z_i(k) \in \mathbb{Z}_{if}$ , 给定终端控制器 (4.14), 终端集为正定不变集。

对于任意的  $z_i \in \mathbb{Z}_{if}$  和  $z_j \in \mathbb{Z}_{jf}$ ,

$$\begin{aligned} \|x_i - x_j\| &= \|x_i - x_i^d - (x_j - x_j^d) - d_{ij}\| \\ &\geq \|d_{ij}\| - \|\Delta x_j\| - \|\Delta x_j\| \\ &\geq 2R. \end{aligned} \quad (4.25)$$

由此可得, 终端集中的状态满足避碰约束。

下面证明终端成本为局部李亚普诺夫函数。为了方便, 将终端控制器写成  $\kappa_i(z_i(k)) = -K_{i1}\Delta z_i(k) + (K_{i1} + K_{i2})z_i^d$ , 对于任意的  $z_i(k) \in \mathbb{Z}_{if}$ , 利用三角不等式, 可得

$$\begin{aligned} &\sum_{i \in \mathbb{N}_a} (L(z_i(k), z_{-i}(k), z_i^d, u_i) + L_{if}(z_i(k+1), z_i^d) - L_{if}(z_i(k), z_i^d)) \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_a} (\alpha_i \|\Delta z_i(k)\|^2 + \rho_i \|\kappa_i(z_i(k))\|^2 + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_i \|z_{ij}(k)\|^2 + \|\Delta z_i(k+1)\|_{P_i}^2 - \|\Delta z_i(k)\|_{P_i}^2) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbb{N}_a} \alpha_i \|\Delta z_i(k)\|^2 + \rho_i \|\Delta z_i(k)\|_{K_{i1}^T K_{i1}}^2 + \rho_i \|z_i^d\|_{(K_{i1}+K_{i2})^T (K_{i1}+K_{i2})}^2 \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\beta_i + \beta_j) \|\Delta z_i(k)\|^2 + \|\Delta z_i(k)\|_{\phi_i^T P_i \phi_i}^2 - \|\Delta z_i(k)\|_{P_i}^2 \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}_a} (\|\Delta z_i(k)\|_{\Lambda_{i1}}^2 + \|z_i^d\|_{\Lambda_{i2}}^2) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

故结论得证。  $\square$

**注 4.3** 终端集  $\mathbb{Z}_{if}$  由 (4.20) 演化到 (4.23) 是由系统模型和本章研究的编队任务共同决定的。另外终端集的主要作用为满足避碰任务, 仅与每个智能体的位置有关, 而不是全部状态。

**注 4.4** 本章设计的终端集  $\mathbb{Z}_{if}$  的大小由  $D_i$  决定。如果两个智能体之间的期望相对距离非常接近  $2R$ , 那么  $D_i$  将会很小, 终端集的区域也会很小, 此时优化问题的求解将会受限。所以, 这种设计方案具有一定保守性。

#### 4.3.4 分布式实现算法

用其他智能体的假设状态代替成本和避碰约束里的实际预测状态，综合以上设计的相容性约束、避碰约束和终端成分，智能体 $i$ 的优化问题为：

**问题3** 在 $k$ 时刻，对于每个智能体 $i = 1, 2, \dots, N_a$ ，给定 $z_i(k)$ ， $z_i^d$ 和 $\hat{z}_{-i}(k + l|k)$ ， $l = 0, 1, \dots, N - 1$ ，

$$J_i^*(k, z_i^*, \hat{z}_{-i}, z_i^d, u_i^*) = \min_{u_i(k+l|k)} J_i(k, z_i, \hat{z}_{-i}, z_i^d, u_i)$$

使得对于所有的 $l = 0, 1, \dots, N - 1$

$$z_i(k|k) = z_i(k), \quad (4.27)$$

$$z_i(k + l + 1|k) = Az_i(k + l|k) + Bu_i(k + l|k), \quad (4.28)$$

$$z_i(k + l|k) \in \mathbb{Z}_i, \quad (4.29)$$

$$u_i(k + l|k) \in \mathbb{U}_i, \quad (4.30)$$

$$\|\hat{z}_j(k + l|k) - z_i(k + l|k)\| \geq 2R + \mu_i(k + l|k), \quad j \in \mathbb{N}_a \setminus i \quad (4.31)$$

$$\begin{cases} \|\hat{x}_i(k + l|k) - x_i(k + l|k)\| \leq \mu_i(k + l|k) \\ \|\hat{z}_i(k + l|k) - z_i(k + l|k)\| \leq \nu_i(k), \end{cases} \quad (4.32)$$

$$z_i(k + N|k) \in \mathbb{Z}_{if}. \quad (4.33)$$

下面，我们将详细地描述同步分布式实现算法。

##### 算法3

**离线阶段：**对于每个智能体 $i$ ，给定权重参数 $\alpha_i$ 、 $\rho_i$ 、 $\beta_i$ 和参数 $\gamma_i$ 、 $d_{ij}$ ，选择合适的参数 $K_{i1}$ 、 $K_{i2}$ 和 $Q_i$ ，计算出 $P_i$ 和 $D_i$ 。

**在线阶段：**在初始时刻 $k = 0$ 时，给定初始最优解 $u_i^*(l|0)$ 和初始最优轨迹 $z_i^*(l|0)$ ， $l = 0, 1, \dots, N - 1$ 。

(i) 在 $k$ 时刻， $k \geq 0$ ，每个智能体 $i$

- 实施实际轨迹 $z_i(k + 1) = z_i^*(1|k)$ ；
- 计算假设控制输入 $\hat{u}_i(k + 1 + l|k + 1)$ 和假设轨迹 $\hat{z}_i(k + 1 + l|k + 1)$ ， $l = 0, 1, \dots, N - 1$ ；
- 将 $\hat{z}_i(\cdot)$ 传递给其他所有智能体，接收来自其他智能体的 $\hat{z}_j(\cdot)$ ， $j \in \mathbb{N}_a \setminus i$ ；



(ii) 在下一个采样时刻  $k+1$ ,  $k \geq 0$ , 每个智能体  $i$

- 采样当前状态  $z_i(k+1)$ ;
- 计算  $\mu_{ij}(k+1+l|k+1)$ 、 $\mu_i(k+1+l|k+1)$  和  $\nu_i(k+1)$ ,  $j \in \mathbb{N}_a \setminus i$ ;
- 求解问题3, 得到最优控制输入  $u_i^*(k+1+l|k+1)$  和最优轨迹  $z_i^*(k+1+l|k+1)$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ 。

(iii) 返回(i).

#### 4.4 主要结果

本节主要讨论整个系统的迭代可行性和闭环稳定性。

**定理 4.2** 在每个采样时刻  $k$ , 所有动力学模型如 (4.1) 的智能体同步求解各自的优化问题。如果在初始时刻  $k=0$ , 每个智能体都存在一个可行解, 那么对于所有的  $k$ ,  $k \geq 1$ , 其优化问题均可行。进一步地, 每个智能体渐近形成编队, 到达自己的目标位置, 且在行进过程中可以实现避碰, 即当  $k \rightarrow \infty$ , 对于所有的  $i = 1, \dots, N_a$ ,  $x_i(k) \rightarrow x_i^d$ ,  $x_j(k) - x_i(k) \rightarrow d_{ij}$ ,  $\forall j \in \mathcal{N}_i$ , 且对于  $k \geq 0$ ,  $\|x_j(k) - x_i(k)\| \geq 2R$ ,  $\forall j \in \mathbb{N}_a \setminus i$ 。

**证明:** 首先分析系统的迭代可行性。在  $k$  时刻, 如果智能体  $i$  的优化问题是可行的, 令  $u_i^*(k+l|k)$  为最优的控制输入,  $z_i^*(k+l|k)$  为最优的状态轨迹,  $l = 0, 1, \dots, N-1$ 。我们由 (4.8) 可得假设控制输入  $\hat{u}_i(k+1+l|k+1)$ 。令  $\tilde{u}_i(k+1+l|k+1) = \hat{u}_i(k+1+l|k+1)$  作为  $k+1$  时刻的控制输入。相应地, 令  $\tilde{z}_i(k+1+l|k+1) = \hat{z}_i(k+1+l|k+1)$ 。我们很容易得到, 对于  $l = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $\tilde{u}_i(\cdot)$  和  $\tilde{z}_i(\cdot)$  满足约束 (4.28)–(4.32)。进一步地, 由定理4.1可得终端集是正定不变集, 因此  $\tilde{z}_i(k+1+N|k+1)$  一定满足终端约束 (4.33)。所以  $\tilde{u}_i(\cdot)$  在时刻  $t_{k+1}$  对智能体  $i$  是可行的, 即初始可行一定可得迭代可行。

下面分析整个系统的闭环稳定性。定义李亚普诺夫函数为所有智能体最优成本的和, 即

$$J_{\Sigma}^*(k) = \sum_{i=1}^{N_a} J_i^*(k, z_i^*, \hat{z}_{-i}, z_i^d, u_i^*). \quad (4.34)$$

定义  $\tilde{u}_i(k+1+l|k+1) = \hat{u}_i(k+1+l|k+1)$ ,  $l = 0, 1, \dots, N-1$  为时刻  $k+1$  的可行解。因此, 由 (4.24) 可得

$$\begin{aligned}
 & J_{\Sigma}^*(k+1) - J_{\Sigma}^*(k) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (J_i(k+1, \tilde{z}_i, \hat{z}_{-i}^d, \tilde{u}_i) - J_i^*(k, z_i^*, \hat{z}_{-i}^d, u_i^*)) \\
 & = \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{l=0}^{N-1} (L_i(k+1+l|k+1, \tilde{z}_i, \hat{z}_{-i}^d, \tilde{u}_i) - L_i(k+l|k, z_i^*, \hat{z}_{-i}^d, u_i^*)) \right. \\
 & \quad \left. + L_{if}(\tilde{z}_i(k+1+N|k+1), z_i^d) - L_{if}(\tilde{z}_i(k+N|k), z_i^d) \right\} \\
 & = \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{l=1}^{N-1} (L_i(k+l|k, z_i^*, z_{-i}^*, z_i^d, u_i^*) - L_i(k+l|k, z_i^*, \hat{z}_{-i}^d, z_i^d, u_i^*)) \right. \\
 & \quad \left. - L_i(k|k, z_i^*, \hat{z}_{-i}^d, z_i^d, u_i^*) + L_i(k+N|k, z_i^*, z_{-i}^*, z_i^d, u_i^*) \right. \\
 & \quad \left. + L_{if}(z_i^*(k+1+N|k), z_i^d) - L_{if}(z_i^*(k+N|k), z_i^d) \right\} \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} \left\{ \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_i(\|z_{ij}^*(k+l|k)\|^2 - \|\hat{z}_{ij}^*(k+l|k)\|^2) - \alpha_i \|\Delta z_i(k|k)\|^2 \right\}.
 \end{aligned}$$

根据三角不等式和相容性约束, 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_i(\|z_{ij}^*(k+l|k)\|^2 - \|\hat{z}_{ij}^*(k+l|k)\|^2) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_i(\|\varepsilon_j^z(k+l|k)\|^2 + 2\|\varepsilon_j^z(k+l|k)\| \|\hat{z}_{ij}^*(k+l|k)\|) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_i(\|\varepsilon_j^z(k+l|k)\|^2 + 2\|\varepsilon_j^z(k+l|k)\|(\|\varepsilon_i^z(k+l|k)\| + \varphi_{ij})) \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_i(2\|\varepsilon_j^z(k+l|k)\|^2 + 2\varphi_{ij}\|\varepsilon_j^z(k+l|k)\| + \|\varepsilon_i^z(k+l|k)\|^2) \\
 & = \sum_{i=1}^{N_a} \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j \in \mathcal{N}_i} [(\beta_i + 2\beta_j)\|\varepsilon_i^z(k+l|k)\|^2 + 2\beta_j\varphi_{ji}\|\varepsilon_i^z(k+l|k)\|] \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} (N-1) \left[ \sum_{j \in \mathcal{N}_i} (\beta_i + 2\beta_j)\nu_i^2(k) + 2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i} \beta_j\varphi_{ji}\nu_i(k) \right] \\
 & \leq \sum_{i=1}^{N_a} \gamma_i \alpha_i \|\Delta z_i(k|k)\|^2. \tag{4.35}
 \end{aligned}$$

因此,

$$J_{\Sigma}^*(k+1) - J_{\Sigma}^*(k) \leq - \sum_{i=1}^{N_a} (1 - \gamma_i) \alpha_i \|\Delta z_i(k|k)\|^2. \quad (4.36)$$

所以整个系统是渐近稳定的。另外, 考虑到约束 (4.13) 和 (4.23) 的作用, 在每个时刻智能体之间可以实现避碰。  $\square$

#### 4.5 仿真结果和分析

本节考虑6个二阶智能体的编队。仿真同样利用工具箱ICLOCS<sup>[94]</sup>和IPOPT<sup>[95]</sup>。关联矩阵 $\mathcal{E}$ 取值为

$$\mathcal{E} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

对于矩阵 $\mathcal{E}$ 中的元素 $e_{ij}$ ,  $e_{ij} = 1$ 表示智能体 $j$ 为智能体 $i$ 的邻居。另外, 其他参数选择为:

$$N = 10, \quad \alpha_i = 1, \quad \beta_i = 0.1, \quad \rho_i = 0.1, \quad \gamma_i = 0.9, \quad R = 0.25,$$

$$\mathbb{U}_i = \{u_i \mid -0.5 \leq u_{i1}, u_{i2} \leq 0.5\}.$$

每个智能体的初始状态为:

$$\begin{aligned} z_1(0) &= \begin{bmatrix} 3 & 4 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T, \\ z_2(0) &= \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T, \\ z_3(0) &= \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}^T, \\ z_4(0) &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^T, \\ z_5(0) &= \begin{bmatrix} 3 & -4 & -0.5 & -0.5 \end{bmatrix}^T, \\ z_6(0) &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

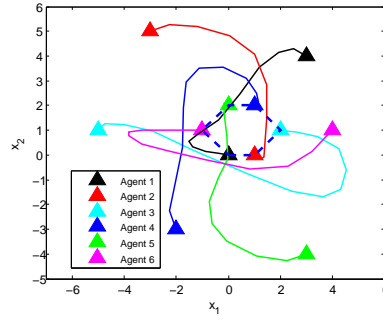


图 4.1 所有智能体的轨迹

其目标位置分别为：

$$\begin{aligned} x_1^d &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T, & x_2^d &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ x_3^d &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}^T, & x_4^d &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T, \\ x_5^d &= \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}^T, & x_6^d &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

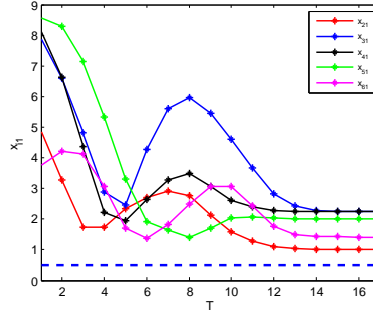


图 4.2 其他智能体和智能体1之间的相对距离

邻居间期望的相对位置为：

$$\begin{aligned}
 d_{12} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, & d_{16} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
 d_{21} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T, & d_{23} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
 d_{32} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^T, & d_{34} &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T, \\
 d_{43} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T, & d_{45} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix}^T, \\
 d_{54} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T, & d_{56} &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix}^T, \\
 d_{65} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T, & d_{61} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T.
 \end{aligned}$$

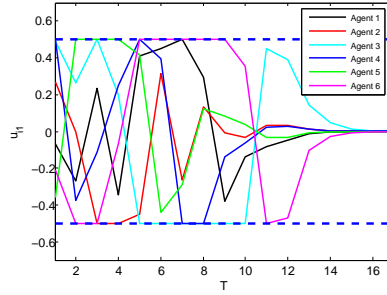


图 4.3 所有智能体的控制输入 $u_{i1}$

仿真结果如图4.1-图4.5。图4.1表示每个智能体的运行轨迹，从初始位置出发最终形成了正六边形的队形，且达到了各自的目标位置。以智能体1为例，图4.2表示其他智能体和智能体1之间的相对距离，虚线表示安全距离，因此在行进过程中智能体之间完成了避碰任务。图4.3-图4.4表示每个智能体的控制输入，虚线表示输入上下界，由图可知，控制输入满足输入约束。在图4.5中，我们可以看出整个系统的成本渐进收敛到0，因此整个系统是渐进稳定的。总的来说，仿真结果证明了所提出算法的有效性。

#### 4.6 本章小结

本章主要研究了多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制问题，每个智能体到

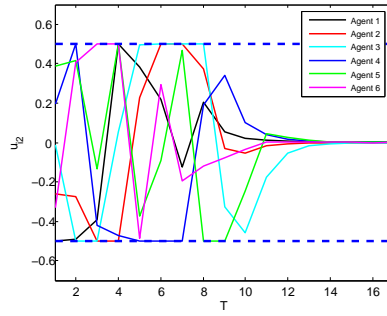


图 4.4 所有智能体的控制输入 $u_{i2}$

达各自的目标位置形成队形，智能体系统之间存在耦合成本，且需要满足避碰约束。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界和改进的避碰约束；充分利用系统模型的特点和编队目标，设计了每个智能体的终端成分，并给出了其需要满足的条件；给出了分布式优化算法；分析了优化问题的迭代可行性、整个系统的闭环收敛性以及避碰约束的满足情况；最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

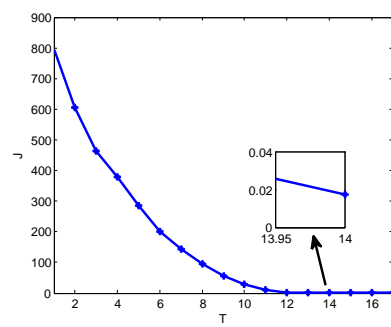


图 4.5 整个系统的成本



## 第5章 总结与展望

### 5.1 研究工作总结

实际应用中，大规模复杂系统组成单元多，模型复杂，变量数量多，约束多，传统的控制方法难以处理。分布式模型预测控制方法是处理此类问题的一种有效工具，其研究具有重要的理论意义和现实意义。本文以存在耦合的多智能体系统为研究对象，针对分布式模型预测控制的终端成分设计、可行性和稳定性等难点问题，开展了系列研究，具体工作如下：

- (1) 研究了多个异构线性系统的分布式模型预测调节控制问题，智能体系统之间同时存在成本耦合和约束耦合。在每一个采样时刻，所有智能体同步更新。提出了改进的相容性约束，保证每个智能体实际轨迹和假设轨迹的一致性。通过求解李亚普诺夫方程得到终端权重矩阵，从而设计了终端成本；利用耦合约束的信息，设计了正定不变的终端集，并且保证终端集中的状态满足耦合约束。设计了分布式优化算法，保证局部约束和耦合约束的迭代可行性，以及整个系统的闭环稳定性。最后通过仿真实验比较了集中式模型预测控制方法和分布式模型预测控制方法的性能，对比表明在保证系统性能和集中式的性能接近的条件下，分布式方法大大缩短了优化时间，减小了在线计算量。
- (2) 研究了多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制问题，智能体系统之间存在成本耦合，所有智能体共享一个参考轨迹。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界，保证系统的收敛性；在分布式结构下，利用参考轨迹，设计了每个智能体的终端成本、终端控制器和正定不变的终端集。提出了分布式优化算法，保证优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环收敛性。最后，以2-自由度机械臂为例，通过仿真实验验证了算法的有效性。
- (3) 研究了多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制问题，每个智能体到达各自的目标位置形成队形，智能体系统之间存在耦合成本，且需要满足避碰约束。利用

同步更新策略，设计了改进的相容性约束，包括位置相容性和状态相容性，同时提出了改进的避碰约束。充分利用系统模型的特点和编队目标，设计了分布式结构下的终端成分，并且在终端集中依然能保证避碰约束的满足。提出了分布式优化算法，保证优化问题的迭代可行性、整个系统的闭环收敛性以及避碰约束的满足。最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

## 5.2 工作展望

本文主要开展了多智能体系统的分布式模型预测控制系列研究，但仍有很多问题需要进一步的研究与完善：

- (1) 实时分布式模型预测控制研究。由于求解优化问题计算量大，模型预测控制的实时性难以满足。和集中式相比，虽然分布式模型预测大大降低了在线计算量，但是在常规的硬件条件下，依然难以实时性要求。研究实时分布式模型预测控制是目前的一个研究热点。
- (2) 不确定性系统的分布式模型预测控制研究。本文主要研究了确定系统的分布式模型预测控制研究，而现实中的系统往往多受到各种干扰或者存在模型不确定性。目前不确定系统的分布式模型预测控制主要包括分布式鲁棒模型预测控制和分布式随机模型预测控制，其研究均尚在研究初期，理论成果非常少。
- (3) 网络化控制系统的分布式模型预测控制研究。网络化控制系统是近些年来的研究热点，其往往受到量化、延时、丢包等随机因素的影响，分布式模型预测控制是研究网络化控制系统的一个新思路。如何在网络化控制系统存在时变延时和随机丢包等情况下，设计出合适的分布式模型预测控制方法是一个非常值得研究的课题。
- (4) 基于数据驱动的分布式模型预测控制研究。现实中往往难以得知系统不确定部分的精确概率特性，而随着检测技术和存储技术的进步，大数据技术蓬勃发展，可以利用统计学原理，基于数据估计不确定部分的一些统计特性。如何设计能保证迭代可行性和稳定性的基于数据驱动的分布式模型预测控制方法是一个具有实际意义和挑战的研究课题。

## 参考文献

- [1] Siljak D D. Large-scale dynamic systems: stability and structure [M]. North Holland, 1978.
- [2] Filip F G. Decision support and control for large-scale complex systems [J]. Annual Reviews in Control, 2008, 32(1): 61-70.
- [3] Siljak D D. Decentralized control of complex systems [M]. Courier Corporation, 2011.
- [4] 王越超, 谈大龙. 协作机器人学的研究现状与发展 [J]. 机器人, 1998, 20(1): 69-75.
- [5] 刘金琨, 尔联洁. 多智能体技术应用综述 [J]. 控制与决策, 2001, 16(2): 133-140.
- [6] Xia Y Q, Zhou N, Lu K F, et al. Attitude control of multiple rigid bodies with uncertainties and disturbances [J]. IEEE/CAA Journal of Automatica Sinica, 2015, 2(1): 2-10.
- [7] Parker L E. Designing control laws for cooperative agent teams [C]. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1993: 582-587.
- [8] Kitano H, Asada M, Kuniyoshi Y, et al. RoboCup: A challenge problem for AI [J]. AI magazine, 1997, 18(1): 73.
- [9] Lavretsky E. F/A-18 Autonomous Formation Flight Control Systems Design [C]. AIAA Conference on Guidance, Navigation, and Control, 2002, AIAA paper 4757.
- [10] Chandler P R, Pachter M, Rasmussen S. UAV cooperative control [C]. Proceedings of American Control Conference, 2001, 1: 50-55.
- [11] Singh H, Bellingham J G, Hover F, et al. Docking for an autonomous ocean sampling network [J]. IEEE Journal of Oceanic Engineering, 2001, 26(4): 498-514.

- [12] 承向军, 杜鹏, 杨肇夏. 基于多智能体的分布式交通信号协调控制方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2005, 8(8): 130-135.
- [13] Goodwin G C, Seron M M, De Doná J A. Constrained control and estimation: an optimisation approach [M]. Springer, 2006.
- [14] Negenborn R R, De Schutter B, Hellendoorn J. Multi-agent model predictive control for transportation networks: Serial versus parallel schemes [J]. Engineering Applications of Artificial Intelligence, 2008, 21(3): 353-366.
- [15] Propoi A I. Use of linear programming methods for synthesizing sampled-data automatic systems [J]. Automation and Remote Control, 1963, 24(7): 837-844.
- [16] Richalet J, Rault A, Testud J L, et al. Model predictive heuristic control: applications to industrial processes [J]. Automatica, 1978, 14(5): 413-428.
- [17] Garcia C E, Prett D M, Morari M. Model predictive control: theory and practice-a survey [J]. Automatica, 1989, 25(3): 335-348.
- [18] Cutler C R, Ramaker B L. Dynamic matrix control - A computer control algorithm [C]. Proceedings of the 1980 Joint Automatic Control Conference, 1980, (17): 72.
- [19] Wang Y Y. Robust model predictive control [D]. Madison: University of Wisconsin-Madison, USA, 2002.
- [20] Grüne L, Pannek J. Nonlinear model predictive control [M]. Springer, 2011.
- [21] Borrelli F, Bemporad A, Morari M. Predictive Control for linear and hybrid systems [M]. Cambridge University Press, 2013.
- [22] Oldewurtel F, Parisio A, Jones C N, et al. Energy efficient building climate control using stochastic model predictive control and weather predictions [C]. Proceedings of American control conference, 2010: 5100-5105.

- [23] Wahab N A, Katebi R, Balderud J, et al. Data-driven adaptive model-based predictive control with application in wastewater systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(6): 803-812.
- [24] McKinley T L, Alleyne A G. Adaptive model predictive control of an SCR catalytic converter system for automotive applications [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, 20(6): 1533-1547.
- [25] Akpan V A, Hassapis G D. Nonlinear model identification and adaptive model predictive control using neural networks [J]. ISA transactions, 2011, 50(2): 177-194.
- [26] Camacho E F, Bordons C. Distributed model predictive control [J]. Optimal Control Applications and Methods, 2015, 36(3): 269-271.
- [27] Giovanini L. Game approach to distributed model predictive control [J]. IET Control Theory & Applications, 2011, 5(15): 1729-1739.
- [28] Li H P, Shi Y. Distributed receding horizon control of large-scale nonlinear systems: handling communication delays and disturbances [J]. Automatica, 2014, 50(4): 1264-1271.
- [29] Wang C, Ong C J. Distributed model predictive control of dynamically decoupled systems with coupled cost [J]. Automatica, 2010, 46(12): 2053-2058.
- [30] Ding B C, Xie L H, Cai W J. Distributed model predictive control for constrained linear systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2010, 20(11): 1285-1298.
- [31] Ma J R, Qin J, Salsbury T, et al. Demand reduction in building energy systems based on economic model predictive control [J]. Chemical Engineering Science, 2012, 67(1): 92-100.
- [32] Angeli D, Amrit R, Rawlings J B. On average performance and stability of economic

- model predictive control [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(7): 1615-1626.
- [33] Angeli D. Economic Model Predictive Control [J]. Encyclopedia of Systems and Control, 2015: 337-343.
- [34] Morari M, Lee J H. Model predictive control: past, present and future [J]. Computers & Chemical Engineering, 1999, 23(4): 667-682.
- [35] 丁宝苍. 预测控制的理论与方法 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.
- [36] 杨罡. 电力系统模型预测控制技术研究 [D]. 北京: 北京交通大学, 2013.
- [37] Mayne D Q, Rawlings J B, Rao C V, et al. Constrained model predictive control: Stability and optimality [J]. Automatica, 2000, 36(6): 789-814.
- [38] Callier F M, Desoer C A. Linear system theory [M]. Springer, 2012.
- [39] Mayne D Q, Rawlings J B. Model predictive control: theory and design [M]. Madison, WI: Nob Hill Publishing, LCC, 2009.
- [40] Chen H, Allgöwer F. A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability [J]. Automatica, 1998, 34(10): 1205-1217.
- [41] Bemporad A, Morari M. Robust model predictive control: A survey. In Robustness in identification and control[M]. London: Springer, 1999: 207-226.
- [42] Jalali A A, Nadimi V. A survey on robust model predictive control from 1999-2006[C]. Proceedings of the 2006 International Conference on Computational Intelligence for Modelling Control and Automation, 2006: 207-212.
- [43] Mayne D Q, Seron M M, Raković S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances [J]. Automatica, 2005, 41(2): 219-224.
- [44] Kothare M V, Balakrishnan V, Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities [J]. Automatica, 1996, 32(10): 1361-1379.

- [45] Kanev S, Verhaegen M. Robustly asymptotically stable finite-horizon MPC [J]. *Automatica*, 2006, 42(12): 2189-2194.
- [46] Ding B C, Xi Y G, Cychowski M T, et al. A synthesis approach for output feedback robust constrained model predictive control [J]. *Automatica*, 2008, 44(1): 258-264.
- [47] 李善强. 时滞系统的鲁棒模型预测控制 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨理工大学, 2010.
- [48] Mayne D Q, Raković S V, Findeisen R, et al. Robust output feedback model predictive control of constrained linear systems: time varying case [J]. *Automatica*, 2009, 45(9): 2082-2087.
- [49] Van Hessem D H, Bosgra O H. A conic reformulation of model predictive control including bounded and stochastic disturbances under state and input constraints [C]. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, USA*, 2002: 4643-4648.
- [50] Kouvaritakis B, Cannon M, Raković S V, et al. Explicit use of probabilistic distributions in linear predictive control [J]. *Automatica*, 2010, 46(10): 1719-1724.
- [51] Cannon M, Cheng Q F, Kouvaritakis B, et al. Stochastic tube MPC with state estimation [J]. *Automatica*, 2012, 48(3): 536-541.
- [52] Zeilinger M N, Morari M, Jones C N. Soft constrained model predictive control with robust stability guarantees [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2014, 59(5): 1190-1202.
- [53] Cannon M, Kouvaritakis B, Raković S V, et al. Stochastic tubes in model predictive control with probabilistic constraints [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(1): 194-200.
- [54] Xi Y G, Li D W, Lin S. Model predictive control: status and challenges [J]. *Acta Automatica Sinica*, 2013, 39(3): 222-236.

- [55] Richards A, How J P. Robust distributed model predictive control [J]. International Journal of Control, 2007, 80(9): pp.1517-1531.
- [56] Kuwata Y, Richards A, Schouwenaars T, et al. Distributed robust receding horizon control for multi-vehicle guidance[J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2007, 15(4): 627-641.
- [57] Keviczky T, Borrelli F, Balas G J. Decentralized receding horizon control for large scale dynamically decoupled systems [J]. Automatica, 2006, 42(12): 2105-2115.
- [58] Scattolini R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control - a review [J]. Journal of Process Control, 2009, 19(5): 723-731.
- [59] Zeilinger M N. Real-time model predictive control [D]. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule, 2011.
- [60] Camponogara E, Jia D, Krogh B H, et al. Distributed model predictive control [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2002, 22(1): 44-52.
- [61] Cui H, Jacobsen E W. Performance limitations in decentralized control [J]. Journal of Process Control, 2002, 12(4): 485-494.
- [62] Van Antwerp J G, Braatz R D. Model predictive control of large scale processes [J]. Journal of Process Control, 2000, 10(1): 1-8.
- [63] Vaccarini M, Longhi S, Katebi M R. Unconstrained networked decentralized model predictive control [J]. Journal of Process Control, 2009, 19(2): 328-339.
- [64] Raimondo D M, Magni L, Scattoimi R. Decentralized MPC of nonlinear systems: An input-to-state stability approach [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(17): 1651-1667.
- [65] Gomez M, Rodellar J, Vea F, et al. Decentralized predictive control of multi-reach canals [C]. Proceedings of IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics, 1998, 4: 3885-3890.



- [66] Magni L, Scattofimi R. Stabilizing decentralized model predictive control of nonlinear systems [J]. Automatica, 2006, 42(7): 1231-1236.
- [67] Alessio A, Barcelli D, Bemporad A. Decentralized model predictive control of dynamically coupled linear systems [J]. Journal of Process Control, 2011, 21(5): 705-714.
- [68] Hashimoto K, Adachi S, Dimarogonas D V. Distributed aperiodic model predictive control for multi-agent systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(1): 10-20.
- [69] Gao Y L, Xia Y Q, Dai L. Cooperative distributed model predictive control of multiple coupled linear systems [J]. IET Control Theory & Applications, 2015, 9(17): 2561-2567.
- [70] Dai L, Xia Y Q, Gao Y L, et al. Cooperative distributed stochastic MPC of linear systems with state estimation and coupled probabilistic constraints [J]. Automatica, 2015, 61: 89-96.
- [71] Maestre J M, Negenborn R R. Distributed model predictive control made easy [M]. Springer, 2014.
- [72] Negenborn R R, Maestre J M. Distributed model predictive control: An overview and roadmap of future research opportunities [J]. IEEE Control Systems Magazine, 2014, 34(4): 87-97.
- [73] Conte C. Stability and computations in cooperative distributed model predictive control [D]. Zürich: Eidgenössische Technische Hochschule, 2014.
- [74] Dunbar W B, Murray R M. Distributed receding horizon control for multi-vehicle formation stabilization [J]. Automatica, 2006, 42(4): 549-558.
- [75] Trodden P, Richards A. Cooperative distributed MPC of linear systems with coupled constraints [J]. Automatica, 2013, 49(2): 479-487.

- [76] Dunbar W B. Distributed receding horizon control of multi-agent systems [D]. Pasadena: California Institute of Technology, 2004.
- [77] Trodden P, Richards A. Robust distributed model predictive control using tubes [C]. Proceedings of American Control Conference, USA, 2006: 2034 – 2039.
- [78] Venkat A N, Hiskens I, Rawlings J B, et al. Distributed MPC strategies with application to power system automatic generation control [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2008, 16(6): 1192-1206.
- [79] Müller M A, Reble M, Allgöwer F. A general distributed MPC framework for cooperative control [C]. Proceedings of the 18th IFAC World Congress. 2011: 7987-7992.
- [80] Wang P, Ding B. Distributed RHC for tracking and formation of nonholonomic multi-vehicle systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(6): 1439-1453.
- [81] Wei S, Chai Y, Ding B C. Distributed model predictive control for multi-agent systems with improved consistency [J]. Journal of Control Theory and Applications, 2010, 8(1): 117-122.
- [82] Morgan D, Chung S J, Hadaegh F Y. Model predictive control of swarms of spacecraft using sequential convex programming [J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2014, 37(6): 1725-1740.
- [83] Yamaguchi H. A distributed motion coordination strategy for multiple nonholonomic mobile robots in cooperative hunting operations [J]. Robotics and Autonomous Systems, 2003, 43(4): 257-282.
- [84] Lan Y, Yan G F, Lin Z Y. Distributed control of cooperative target enclosing based on reachability and invariance analysis [J]. Systems & Control Letters, 2010, 59(7): 381-389.

- [85] Ferramosca A, Limon D, Alvarado I, et al. Cooperative distributed MPC for tracking [J]. *Automatica*, 2013, 49(4): 906-914.
- [86] Nascimento T P, Moreira A P, Conceição A G S. Multi-robot nonlinear model predictive formation control: moving target and target absence [J]. *Robotics and Autonomous Systems*, 2013, 61(12): 1502-1515.
- [87] Dunbar W B, Murray R M. Model predictive control of coordinated multi-vehicle formations [C]. *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, 2002, 4: 4631-4636.
- [88] Stewart B T, Venkat A N, Rawlings J B, et al. Cooperative distributed model predictive control [J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(8): 460-469.
- [89] Molina P A D. Investment portfolio optimization with predictive control [D]. Bogota: Universidad Nacional de Colombia, 2012.
- [90] Chaloulos G, Hokayem P, Lygeros J. Distributed hierarchical MPC for conflict resolution in air traffic control [C]. *Proceedings of American Control Conference*, 2010: 3945-3950.
- [91] Gotoh J, Takeda A. On the role of norm constraints in portfolio selection [J]. *Computational Management Science*, 2011, 8(4): 323-353.
- [92] DeMiguel V, Garlappi L, Nogales F J, et al. A generalized approach to portfolio optimization: Improving performance by constraining portfolio norms [J]. *Management Science*, 2009, 55(5): 798-812.
- [93] Wang P, Ding B C. A synthesis approach of distributed model predictive control for homogeneous multi-agent system with collision avoidance [J]. *International Journal of Control*, 2014, 87(1): 52-63.
- [94] Falugi P, Kerrigan E C, Wyk E V. Imperial College London Optimal Control Software User Guide (ICLOCS) [R/OL]. 2010, <http://www.ee.ic.ac.uk/ICLOCS/>.

- [95] Wächter A, Biegler L T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming [J]. Mathematical programming, 2006, 106(1): 25-57.
- [96] Keviczky T, Johansson K H. A study on distributed model predictive consensus [J/OL]. 2008, <http://arxiv.org/abs/0802.4450>.
- [97] Ferrari-Trecate G, Galbusera L, Marciandi M P E, et al. Model predictive control schemes for consensus in multi-agent systems with single- and double-integrator dynamics [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(11): 2560-2572.
- [98] Johansson B, Speranzon A, Johansson M, et al. Distributed model predictive consensus [C]. Proceedings of International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, 2006: 2438-2444.
- [99] Summers T H, Lygeros J. Distributed model predictive consensus via the alternating direction method of multipliers [C]. Proceedings of 50th Annual Allerton Conference on Communication, Control and Computing, 2012: 79-84.
- [100] Li Z J, Xia Y Q, Cao X Q. Adaptive control of bilateral teleoperation with unsymmetrical time-varying delays [J]. International Journal of Innovative Computing, Information and Control, 2013, 9(2): 753-767.
- [101] Keviczky T, Borrelli F, Fregene K, et al. Decentralized receding horizon control and coordination of autonomous vehicle formations [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2008, 16(1): 19-33.
- [102] Chen J, Sun D, Yang J, et al. A leader-follower formation control of multiple nonholonomic mobile robots incorporating receding-horizon scheme [J]. The International Journal of Robotics Research, 2009, 29(6): 727-747.
- [103] Gu D B, Hu H S. Receding horizon tracking control of wheeled mobile robots [J]. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2006, 14(4): 743-749.

## 攻读硕士学位期间发表论文与研究成果清单

### 论文列表

#### 期刊论文

- [1] **Yulong Gao**, Yuanqing Xia, Li Dai. Cooperative distributed model predictive control of multiple coupled linear systems [J]. IET Control Theory & Applications, 9(17): 2561-2567. (SCI检索, 影响因子: 2.048)
- [2] **Yulong Gao**, Yuanqing Xia, Suichao Wu, Jianan Qiao. Solution to gang crime based on graph theory and analytical hierarchy process [J]. Neurocomputing, 2014, 140: 121-127. (SCI检索, 影响因子: 2.083)
- [3] Yuanqing Xia, **Yulong Gao**, Liping Yan, Mengyin Fu. Recent progress in networked control systems - a survey. International Journal of Automation and Computing, 2015, 12(4): 343-367. (EI检索)
- [4] Li Dai, Yuanqing Xia, **Yulong Gao**, Basil Kouvaritakis, Mark Cannon. Cooperative distributed stochastic MPC of linear systems with state estimation and coupled probabilistic constraints [J]. Automatica, 2015, 61: 89-96. (SCI检索, 影响因子: 3.02)
- [5] Li Dai, Yuanqing Xia, **Yulong Gao**. Distributed MPC of linear systems with stochastic parametric uncertainties and coupled probabilistic constraints [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2015, 53(6): 3411 - 3431. (SCI检索, 影响因子: 1.463)
- [6] Li Dai, Yuanqing Xia, **Yulong Gao**. Distributed stochastic MPC of linear systems with additive uncertainty and coupled probabilistic constraints (Full Paper) [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, conditionally accepted. (SCI检索, 影响因子: 2.779)

- [7] **Yulong Gao**, Yuanqing Xia, Li Dai, Yuwei Liu. Distributed model predictive control for consensus of nonlinear second-Order multi-agent systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, Submitted. (SCI检索, 影响因子: 3.176)

## 会议论文

- [1] Yuanqing Xia, Li Dai, Wen Xie, **Yulong Gao**. Data-driven filter design for linear networked systems with bounded noise [C]. Proceedings of the 11th Chinese Intelligent Systems Conference, Yangzhou, China, 2016: 183-193. (EI检索)
- [2] Yuanqing Xia, Li Dai, Wen Xie, **Yulong Gao**. Data-driven filter design for linear systems with quantized measurements [C]. Proceedings of the 17th IFAC Symposium on System Identification, Beijing, China, Accepted. (EI检索)

## 硕士期间获得主要奖励

- [1] 2014年获得教育部国家奖学金, 北京理工大学优秀研究生标兵
- [2] 2015年获得教育部国家奖学金, 北京理工大学优秀研究生标兵

## 致谢

“我唯一锲而不舍，愿意以自己的生命去努力的，只不过是保守我个人的心怀意念，在我有生之日，做一个真诚的人，不放弃对生活的热爱和执着，在有限的时空里，过无限广大的日子。”

犹记在良乡校区憧憬未来，和同学们一起度过的懵懂岁月；犹记以一腔热情埋头科创竞赛，和队友一起拼搏的日子；犹记为了一个信念创建科协，和伙伴们一起奋斗的光阴；犹记大二时怀着一个科研梦加入实验室，由此开始难忘的科研之路……

从信教2002到中教1232，从6号楼108到6号楼325，我在网络化信息处理与控制实验室已经度过了近六年的日子，见证了师兄师姐的毕业，也见证了师弟师妹的加入，新老更替，精神永恒。“一个人只有当他把追求真理当作一种内在的需要时，才算是真正的科学研究。”这句话已经成为了实验室的一种符号，一种象征。

夏元清教授是实验室的掌舵者，也是一位严谨谦和的导师。依然记得大二第一次见夏老师时的情景，他耐心细致地给我介绍自己在物联网方面的研究。那一刻，夏老师对科研的热情和执着深深地打动了我，这也成为保研时我继续选择夏老师为我的研究生导师的关键原因。这些年，夏老师渊博的知识、开阔的视野、严谨的学风、吃苦耐劳的精神和谦虚的态度深深地影响了我。我的每一滴成长都离不开夏老师的支持和关心，夏老师给了我很多难得的学习机会，担任研究生英文课《随机过程与应用》助教，参加自然科学基金重点项目的申报，指导本科生毕设……这些经历必将成为我科研之路宝贵的财富。夏老师对我选择出国读博的支持也让我深深感动。在此，我想对我的导师夏元清教授致以最真挚的谢意。

衷心感谢闫莉萍老师、刘坤老师以及刘杨老师的帮助和关心。感谢牛津大学的Mark Cannon教授和Basil Kouvaritakis教授，和两位教授的合作使我受益匪浅。感谢Adelaide大学的石碰教授在我申请过程中给予的指导和帮助。感谢数学学院曹鹏老师多年来的关心，在竞赛上给予我指导，在申请中给予我支持。

感谢已经毕业的李丽师姐、闫晶晶师姐、路坤峰师兄、谢雯师姐、朱翠师姐、卞晓蕾师姐、陈荣芳师兄、周宁师姐等人的关心和支持。特别感谢戴荔师姐的引导和陪伴，

一起奋斗的日子会成为最美好的回忆。感谢实验室翟第华、王连生、孙中奇等师兄，戴娟、张会、霍宝玉等师姐的帮助。感谢蒲钊、王夕臣、秦永明、阮广凯和李天涯等同学的陪伴。感谢实验室所有的同学，是你们让我感受到了家的温暖，感受到集体的力量，让我在实验室的生活丰富多彩。感谢我的室友乔佳楠、常彦春和陶涛鑫君，是你们在生活给予我温暖，永远的兄弟情，永远的434。

衷心感谢我的家人，你们的支持、鼓励和包容是我前进的动力。特别感谢我的父母，你们是我 strongest 的后盾，你们无私的爱让我拥有了最幸福的生活。今后我会努力成为你们的后盾，成为你们值得依靠的儿子。

感谢北京理工大学，感谢自动化学院，在这里学习生活的六年是我人生中最难忘的岁月，祝愿学校和学院越来越好！

新的一年，唯愿岁月静好！谨将本论文献给所有关心、鼓励、帮助、支持过我的老师、家人、朋友和同学，向你们致以最衷心、最诚挚的感谢！祝你们永远健康幸福！

北京理工大学6号楼325

2015年12月31日