

## 摘要

在实际应用中，复杂系统具有模型复杂、规模大、变量多、约束多等特点，传统的控制方法无法满足复杂系统控制的要求。近些年来，分布式模型预测控制（Distributed Model Predictive Control，简称DMPC）以其优良的控制性能、有效处理约束的能力和结构的灵活性等优点得到了广泛关注，成为了处理大规模复杂系统的重要工具。目前，该方法尚处在研究初期，依然存在许多研究难点。例如，如何处理子系统之间的耦合，使得各个子系统的优化问题能在分布式结构下求解；如何设计每个子系统各自的终端成分，减小在线计算量；如何满足优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环稳定性。

本文以多智能体系统为研究对象，开展了分布式模型预测控制的系列研究，分别研究了多智能体系统的调节问题、一致问题和编队问题，主要研究成果如下：

1、研究了多个异构线性系统的分布式模型预测调节控制问题，智能体系统之间同时存在成本耦合和约束耦合。在每一个采样时刻，所有智能体同步更新。提出了改进的相容性约束，保证每个智能体实际轨迹和假设轨迹的一致性。通过求解李亚普诺夫方程得到终端权重矩阵，从而设计了终端成本；利用耦合约束的信息，设计了正定不变的终端集，并且保证终端集中的状态满足耦合约束。设计了分布式优化算法，保证局部约束和耦合约束的迭代可行性，以及整个系统的闭环稳定性。最后通过仿真实验比较了集中式模型预测控制方法和分布式模型预测控制方法的性能，对比表明在保证系统性能和集中式的性能接近的条件下，分布式方法大大缩短了优化时间，减小了在线计算量。

2、研究了多个二阶非线性系统的分布式模型预测一致控制问题，智能体系统之间存在成本耦合，所有智能体共享一个参考轨迹。利用同步更新策略，提出了改进的相容性约束上界，保证系统的收敛性；在分布式结构下，利用参考轨迹，设计了每个智能体的终端成本、终端控制器和正定不变的终端集。提出了分布式优化算法，保证优化问题的迭代可行性和整个系统的闭环收敛性。最后，以2-自由度机械臂为例，通过仿真实验验证了算法的有效性。

3、研究了多个线性二阶系统的分布式模型预测编队控制问题，每个智能体到达各自的目标位置形成队形，智能体系统之间存在耦合成本，且需要满足避碰约束。利用同步更新策略，设计了改进的相容性约束，包括位置相容性和状态相容性，同时提出了改进的避碰约束。充分利用系统模型的特点和编队目标，设计了分布式结构下的终端成分，

并且在终端集中依然能保证避碰约束的满足。提出了分布式优化算法，保证优化问题的迭代可行性、整个系统的闭环收敛性以及避碰约束的满足。最后通过仿真实验验证了算法的有效性。

最后，归纳总结了本文的主要工作，并对今后的工作进行了展望。

**关键词:** 模型预测控制；分布式控制；终端成本；终端控制器；终端集。

## Abstract

In the practical applications, the complex systems have the features of complex model, large scale, a great amount of variables and constraints. However, the traditional control methods cannot satisfy the requirements of the complex systems. Over the past years, distributed model predictive control (DMPC) is becoming an important tool to handle the large-scale complex systems due to its good control performance, capability of handling constraints and the structural flexibility. In the embryonic stage, the research of DMPC is confronted with many difficulties. For example, how to deal with the couplings between subsystems in order to make the optimization problem of each subsystem solvable; how to design the terminal ingredients (terminal cost, terminal controller and positive invariant terminal set) for each subsystem; how to guarantee the recursive feasibility and the closed-loop stability of the whole system.

Motivated by this, this dissertation focuses on the research of DMPC for multi-agent systems and explores the problems of regulation, consensus and formation, respectively. The main contents and results in this dissertation are summarized as follows:

1. A DMPC algorithm is presented for the regulation of linear multi-agent systems with the coupled cost and coupled constraints. At each sampling time, all the agents are permitted to synchronously optimise. An improved compatibility constraint is constructed to ensure the consistency between the actual state trajectory of each agent and its assumed one. With the parameters of the coupled constraints, a positive invariant terminal set, which can definitely ensure the satisfaction of the coupled constraint, and an associated terminal cost (a local Lyapunov function) are designed in a distributed manner. By applying the proposed distributed optimization algorithm, the recursive feasibility with respect to both local and coupled constraints and the closed-loop stability of the whole system are guaranteed. In final, the numerical results of the comparisons between the DMPC algorithm and the centralised model predictive control (CMPC) are given to show the effectiveness of the proposed algorithm. The results show that the DMPC algorithm not only dramatically decreases the optimizing time but also maintains most of the control

performance of CMPC.

2. A DMPC algorithm is investigated for the consensus of second-order nonlinear multi-agent systems with coupled cost. All the agents share one reference trajectory. With the synchronous update strategy, a time-varying compatibility constraint, which plays an important to ensure the stability, is presented to ensure that the actual state trajectory of each subsystem does not deviate too much from its assumed one. Furthermore, a positively invariant terminal region and a corresponding auxiliary controller are developed for each agent. Given the designed terminal ingredients and compatibility constraints, the recursive feasibility and closed-loop stability of the whole system are guaranteed. A numerical example of 2-Degree-of-Freedom (2-DoF) robotic manipulator illustrates the efficacy of the proposed algorithm.

3. A DMPC algorithm is explored for the formation of second-order linear multi-agent systems with collision avoidance. With the synchronous update strategy, the improved compatibility constraints with respect to both the position compatibility and the state compatibility, are designed for each agent. The collision avoidance constraints are tightened by replacing the actual positions of each agent's neighbors with their assumed ones. By using the second-order model and the formation, the terminal ingredients are designed. Particularly, the states in the positively invariant terminal sets satisfy the collision avoidance constraints. By implementing the proposed distributed optimization algorithm, the recursive feasibility of the optimization problem, the closed-loop stability of the whole system and the collision avoidance between agents are guaranteed. A numerical example illustrates the effectiveness of the proposed algorithm.

At the end of this dissertation, the main results are concluded and the problems to be solved in the future are presented.

**Keywords:** Model predictive control (MPC); Distributed control; Terminal cost; Terminal controller; Terminal set.

## 目录

目录	V
第1章 小型化车载导航组合系统方案设计	1
1.1 引言	1
1.2 车载组合导航系统坐标定义及转换	1
1.2.1 导航坐标系定义	1
1.2.2 坐标系变换原理	3
1.3 导航定位原理	5
1.3.1 四元数与姿态更新	6
1.3.2 速度更新	10
1.3.3 位置更新	11
1.4 小型化车载组合定位原理	12
1.5 车载组合定位系统总体方案设计	12
1.6 本章小结	13



## 第1章 小型化车载导航组合系统方案设计

### 1.1 引言

车载组合定位系统是采用车载传感器进行组合定位的实时系统，随着MEMS 惯性器件工程化及其精度的提升，其小型化、低成本、低功耗抗稳定性好的应用特点在航姿测量系统得到广泛的应用。本文基于MEMS传感器，通过合理的布局设计及系统设计，将惯性测量、惯性导航、卫星导航、姿态解算、组合导航集成在一块单板上。

本章首先介绍导航系统研究中几种常见的坐标系及相互之间的转换，分析车载定位系统的定位原理并给出基于四元数和旋转矢量法的MEMS惯导姿态、位置和速度更新方程。最后给出车载组合定位系统的总体方案设计。

### 1.2 车载组合导航系统坐标定义及转换

宇宙中的物体小到分子原子大到行星恒星都在不停地运动，但运动是相对的，单个没有参考的物体是无运动可言的。一个物体在空间的位置只能相对另一个物体确定，后一个物体就是描述前一个物体运动的参考系，可以在该物体上建立直角坐标系。在导航定位过程中，运动体的姿态、速度、位置等信息的确定都必须建立在相应的参考坐标系中。对于不同的研究对象和任务要求，需要选择不同的坐标系。

#### 1.2.1 导航坐标系定义

在陆地车辆组合导航系统中，常见的坐标系有：惯性坐标系、地球坐标系、地理坐标系、机体坐标系、导航坐标系。

##### (1)惯性坐标系(i系)

惯性坐标系(以下简称惯性系)是遵循牛顿定律的坐标系，即相对于惯性空间做匀速直线运动或绝对静止的坐标系，惯性坐标系为惯性器件测量的参考基准。完全理想的惯性坐标系本身并不存在，在实际应用中通过使用近似的地心惯性坐标系来代替惯性坐标系进行运算。

## (2) 地球坐标系(e系)

与地球固连，以地球质心为坐标原点，轴与地球自转轴方向一致。

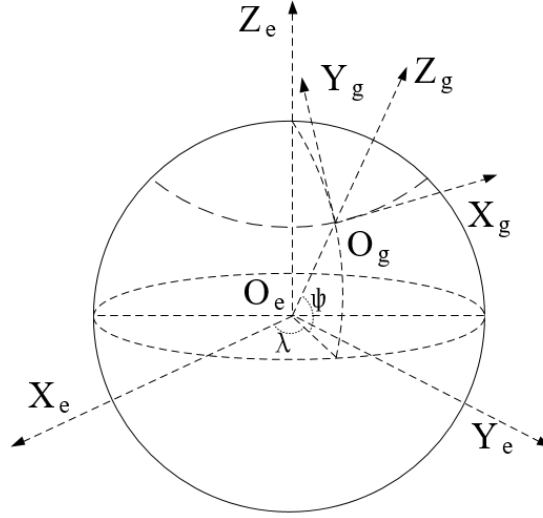


图 1.1 地球坐标系与地理坐标系示意图

## (3) 地理坐标系(g系)

如图所示，地理坐标系  $OEN\xi$  的原点  $O$  取在载体的重心， $E$  轴在当地水平面内的指东， $N$  轴在当地水平面指北， $\xi$  轴则沿当地地垂线指向天空的方向， $EN\xi$  三轴构成右手直角坐标系。地理系是随着载体运动的，可以按“东北天”“北西天”或者“北东地”顺序构成，本文中的地理坐标系选择“东北天”坐标系描述。

## (4) 载体坐标系(b系)

如图所示，载体坐标系的原点  $O_b$  位于载体重心位置，与运载体固联， $x_b$  轴沿载体的横轴方向， $y_b$  沿载体的纵轴方向， $z_b$  垂直机体水平面向上， $x_b y_b z_b$  轴构成右手直角坐标系，载体坐标系相对于地理坐标系的方位称为载体的姿态和航向。

## (5) 导航坐标系(n系)

导航坐标系是惯性导航系统求解导航参数时所采用的坐标系用  $Ox_n y_n z_n$ 。针对捷联惯导来说，传感器所采的数据是沿载体坐标系轴向的，必须将该采集的信息分解到便于描述和求解导航参数的坐标系内，然后进行导航解算，这个坐标系即导航坐标系。本文选择的导航坐标系为地理坐标系即东北天坐标系。

当物体在地球上运动时，物体相对地球的位置不断改变；同时，地球上的点的地理坐标系相对于地球系的角位置是不相同的。运载体相对于地球运动引起地理坐标系相对



地球坐标系的转动。此时，地理坐标系相对惯性坐标系的转动角速度有两部分组成：一个是地球坐标系相对于惯性坐标系的转动角速度；另一部分是地理坐标系相对于地球坐标系的转动角速度。两部分具体的计算过程在后续章节详细介绍。确定物体的地理位置，就是确定地理坐标系相对于地球坐标系的方位关系，即经度 $\lambda$ 纬度 $\varphi$ 和到地球地心的距离 $R$ ；而物体的姿态则是确定载体坐标系相对于地理坐标系的方位关系。

### 1.2.2 坐标系变换原理

由上面定义的几种坐标系可知，在分析惯性导航系统运动时，将用到多种坐标系，而这些坐标系并不是相互孤立的。虽然空间中一个向量在不同的坐标系里的坐标是不同的，但是通过坐标变换，可以将一个坐标系下的向量坐标转换到另一个坐标系下。这种变换包括平移和旋转，在惯性导航中坐标系的变换我们更关注坐标之间的角度关系，即旋转坐标变换，具体的转换方法见文献。以下介绍两种坐标之间的转换。

#### (1) 地球坐标系与地理坐标系之间的转换

根据图可知，地球坐标系和地理坐标系的原点不重合，当用经度 $\lambda$ 和纬度 $\varphi$ 来表示旋转角度时，其转动过程可以描述为地球坐标系绕 $Z_e$ 轴转动 $(90^\circ + \lambda)$ ，再绕变换后的 $x$ 轴转动 $(90^\circ - \varphi)$ ，最后绕变换后的 $z$ 轴旋转 $90^\circ$ 而得到地理坐标系。

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} E \\ N \\ \xi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(90^\circ - \varphi) & 0 & -\sin(90^\circ - \varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(90^\circ - \varphi) & 0 & \cos(90^\circ - \varphi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \lambda & \sin \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \end{bmatrix} \quad (1.1)
 \end{aligned}$$

用 $C_e^n$ 表示变换矩阵，有

$$C_e^n = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

式中,  $\mathbf{C}_e^n$  为地球坐标系到地理坐标系的变换矩阵;  $\mathbf{C}_{ij}$  为变换矩阵的元素 ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ )。

## (2) 地理坐标系和载体坐标系之间的转换

载体的姿态和航向实际上就是载体坐标系和地理坐标系之间的方位关系。载体的姿态可用如下欧拉角表示:

俯仰角( $\theta$ ): 载体绕横轴 $x_b$ 转动时, 载体的纵轴与水平面之间会形成一个夹角, 该角即为俯仰角, 一般用 $\theta$ 表示, 向上角度为正, 向下为负, 俯仰角取值范围为 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 。

翻滚角( $\gamma$ ): 载体绕纵轴 $y_b$ 转动时, 载体的横轴与水平面之间会形成一个夹角, 该角即为翻滚角, 一般用 $\gamma$ 表示, 以右端向下为正, 翻滚角取值范围为 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 。

航向角( $\psi$ ): 载体绕方位轴转动时, 载体纵轴 $y_b$ 在地理坐标系下的水平投影与地理子午线 $N$ 的夹角称为航向角, 一般用 $\psi$ 表示, 以正北方向为起点并以北偏东方向逐渐增加, 航向角取值范围为 $[0^\circ, 360^\circ]$ 。

载体坐标系和导航坐标系之间可以绕 $Z - X - Y$ 的顺序转动三次完成转换, 载体姿态矩阵 $\mathbf{C}_b^n$ 实现转换, 变换公式如下:

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \mathbf{C}_b^n \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

第一次转动: 坐标系绕 $Z$ 轴负向转动角 $\psi$ :

$$\mathbf{C}_b^{n1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

第二次转动: 坐标系绕 $X$ 轴负向转动角 $\theta$ :

$$\mathbf{C}_{n1}^{n2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

第三次转动：坐标系统Y轴负向转动角 $\psi$ ：

$$\mathbf{C}_{n2}^n = \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^n &= \mathbf{C}_{n2}^n \mathbf{C}_{n1}^{n2} \mathbf{C}_b^{n1} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & 0 & -\sin \gamma \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \gamma & 0 & \cos \gamma \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & \sin \psi \cos \theta & \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta \\ -\cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \cos \theta & -\sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \gamma \cos \theta & \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

定义 $\mathbf{C}_b^n$ 为如下形式：

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{21} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{31} & \mathbf{T}_{32} & \mathbf{T}_{33} \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

$\mathbf{C}_b^n$ 就是导航系统中通常所称的捷联矩阵，载体的姿态角可以计算如下：

$$\begin{cases} \psi_{\pm} = \arctan\left(\frac{\mathbf{T}_{13}}{\mathbf{T}_{22}}\right) \\ \theta_{\pm} = \arcsin(\mathbf{T}_{32}) \\ \gamma_{\pm} = \arctan\left(\frac{-\mathbf{T}_{31}}{\mathbf{T}_{33}}\right) \end{cases} \quad (1.7)$$

对于地面车辆导航系统，式中，俯仰角 $\theta$ 、翻滚角 $\gamma$ 定义在区间 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 中，在计算反正弦和反正切函数中没有多值问题；航向角 $\psi$ 定义在 $[0^\circ, 360^\circ]$ 区间，需要分情况考虑根据主值区间和方向矩阵的数值来确定角度大小，其真值表如表所示。

### 1.3 导航定位原理

在捷联惯性导航系统(SINS)中惯性测量器件(陀螺仪和加速度计)直接与运载体固联，通过导航计算机采集惯性器件的输出信息并进行数值积分求解运载体的姿态、速度和位

表 1.1 航向角 $\psi$ 的真值表

$T_{22}$	$T_{12}$	$\psi$
$\rightarrow 0$	+	$90^\circ$
$\rightarrow 0$	-	$270^\circ$
+	+	$\psi_{\pm}$
+	-	$180^\circ + \psi_{\pm}$
-	+	$\psi_{\pm} + 180^\circ$
-	-	$\psi_{\pm} - 180^\circ$

置等导航信息，这三个过程分别是姿态更新、速度更新和位置更新。MEMS惯导一般采用角速率输出采样方式，简单的将输出信号乘以采样间隔 $T_s$ 即可变换为近似的角增量，利用单位时间角增量数据可以实现载体姿态的更新，姿态指的是载体坐标系相对于导航坐标系的角位置，具体定义及坐标变换已在上一章具体介绍。MEMS惯导信息的解算核心是姿态更新，对整个系统的解算精度影响最为突出，具有重要的研究和应用价值。

### 1.3.1 四元数与姿态更新

根据所选的变量参数不同，常用的姿态更新算法有方向余弦法、欧拉角法和四元数法(Quaternations)。这几种姿态解算方法分别适合不同的姿态变化情况。

欧拉角算法通过求解欧拉角微分方程直接求解姿态角。欧拉角解算简单明了，概念直观，容易理解，但求解过程中需要频繁解算三角函数，运算比较困难，而且当俯仰角接近 $90^\circ$ 时会引起万向节死锁问题，所以该方法适合水平姿态变化不大，实时性要求不高的情况下。

方向余弦和欧拉角并没有本质上的区别，因为是用欧拉角表示的方向余弦阵，避免了退化的问题，可以计算全姿态，但是姿态矩阵微分方程包含九个未知量，因此算法设计计算量大，实时性差，不利于工程上的应用。

四元数表示方法虽然有些抽象，但它的优点有很多，利用起来非常方便，算法实现上简单易操作，是很实用的工程方法。本课题是基于四元数法完成姿态矩阵的解算。四

元数是由威廉卢云哈密尔顿在1843年爱尔兰提出的数学概念，其基础思想为：一个坐标系到另一个坐标系的变换可以通过绕一个定义在参考系中的矢量 $\mu$ 的单次转动来实现，四元数提供该转动的数学描述，一个单位四元数可以为表示一个旋转。四元数法实质上是旋转矢量法中的单子样算法，对有限旋转引起的的补偿程度不够，只适用于低动态运载体的姿态解算，而对于高动态运载体的姿态解算中漂移非常严重，对于低动态的车载组合导航系统来说，四元数方法十分适用。

### 1、四元数定义

四元数是由四个元构成的数：

$$Q(q_0, q_1, q_2, q_3) = q_0 + q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k} = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_v \quad (1.8)$$

其中， $q_0$ 、 $q_1$ 、 $q_2$ 、 $q_3$ 是实数， $q_0$ 也称为实部， $q_v = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ 称为虚部， $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 是互相正交的单位向量，可以将四元数看作是四维空间中的一个向量或者一个超复数。四元数的虚单位 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ 之间满足如下乘法运算规则

$$\begin{cases} \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} = \mathbf{j} \otimes \mathbf{j} = \mathbf{k} \otimes \mathbf{k} = -1 \\ \mathbf{i} \otimes \mathbf{j} = \mathbf{k}, \mathbf{j} \otimes \mathbf{k} = \mathbf{i}, \mathbf{k} \otimes \mathbf{i} = \mathbf{j}, \mathbf{j} \otimes \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \mathbf{k} \otimes \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \mathbf{i} \otimes \mathbf{k} = -\mathbf{j} \end{cases} \quad (1.9)$$

其中，运算符“ $\otimes$ ”表示四元数乘法运算，虚部单位矢量的叉乘运算特点，可以将四元数的虚数部分 $\mathbf{q}_v = q_1\mathbf{i} + q_2\mathbf{j} + q_3\mathbf{k}$ 看成是在三维空间中的映像，反之，一个三维矢量可以看做一个零标量四元数。

### 2、四元数与姿态矩阵的转换

类比于复数的三角表示法，四元数写成三角函数为

$$Q = \|Q\|(\cos \frac{\phi}{2} + \mu \sin \frac{\phi}{2}) \quad (1.10)$$

特别地，当 $\|Q\| = 1$ 时，即对于单位四元数，有， $q_0 = \cos \frac{\phi}{2}$ ， $\mathbf{q}_v = \mu \sin \frac{\phi}{2}$  且 $q_0^2 + \mathbf{q}_v^T \mathbf{q}_v = 1$ ； $\mu$ 为单位长度的三维矢量，即 $\mu^T \mu = 1$ ； $\phi$ 为某一角度值。在刚体转动理论中，载体系相对于导航系的位置，可以等效成载体系绕某定轴旋转一定角度 $\theta$ ，用向量 $\mu$ 表示该定轴，则两坐标之间的位置关系可以用角度 $\theta$ 和单位向量 $\mu$ 来表示如下图。

因此，推导出由四元数表示的载体系至导航系的转换矩阵：

$$C_b^n = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

### 3、姿态更新四元数算法

根据四元数理论，坐标系转换过程可以表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^b &= \mathbf{Q}_b^n \otimes \mathbf{v}^n \otimes (\mathbf{Q}_b^n)^* \\ &= \begin{bmatrix} q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_1q_3 + q_0q_2) \\ 0 & 2(q_1q_2 + q_0q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 0 & 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_2q_3 + q_0q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

式中， $\mathbf{Q}_b^n$ 表示导航系n到载体系b的变换四元数； $(\mathbf{Q}_b^n)^*$ 是 $\mathbf{Q}_b^n$ 的共轭表示， $\mathbf{v}^n$ 和 $\mathbf{v}^b$ 表示同意向量分别在导航系n和载体系b下的表示，其向量表示分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_n &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}_x^n & \mathbf{v}_y^n & \mathbf{v}_z^n \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{v}_b &= \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v}_x^b & \mathbf{v}_y^b & \mathbf{v}_z^b \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

根据方向余弦理论：

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^b &= \begin{bmatrix} * & 0 \\ 0 & \mathbf{C}_t^b \end{bmatrix} \mathbf{v}^t \\ &= \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & -\cos \gamma \cos \psi + \sin \gamma \sin \psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \theta \\ 0 & \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & \sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta & -\sin \gamma \cos \psi - \cos \gamma \sin \psi \sin \theta & \cos \gamma \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{v}_x^n \\ \mathbf{v}_y^n \\ \mathbf{v}_z^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

这样可以得到变换过程中姿态角的四元数计算方法：

$$\begin{cases} \psi_{\pm} = -\arctan\left(\frac{2(q_1q_2 + q_0q_3)}{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}\right) \\ \theta_{\pm} = \arcsin(2(q_2q_3 - q_0q_1)) \\ \gamma_{\pm} = \arctan\left(\frac{2(q_1q_3 + q_0q_2)}{q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2}\right) \end{cases} \quad (1.12)$$

四元数微分方程

已知 $Q$ 为导航系至载体系的四元数表达式，对两端求导得四元数的微分方程：

$$\begin{aligned} d\frac{Q}{t} &= -\sin\frac{\dot{\theta}}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \mu^R\frac{\dot{\theta}}{2}\cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\frac{d\mu^R}{dt} \\ &= -\sin\frac{\dot{\theta}}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \mu^R\frac{\dot{\theta}}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{\dot{\theta}}{2}\mu^R \otimes Q \end{aligned}$$

由刚体动力学知识可知

$$\begin{aligned} \omega_{nb}^n &= \dot{\theta}\mu^R \\ \omega_{nb}^n &= Q \otimes \omega_{nb}^b \otimes Q^* \end{aligned}$$

式？中 $\omega_{nb}^b$ 是MEMS陀螺测量载体系相对于导航系下的角速度，结合上述两式式？可以计算记为

$$d\frac{Q}{t} = \frac{1}{2}Q \otimes \omega_{nb}^b \quad (1.13)$$

记

$$\omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T \quad (1.14)$$

矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z \\ \omega_x & 0 & \omega_z & -\omega_y \\ \omega_y & -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_z & \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

其中， $\omega_{nb}^b$ 可以由下式得

$$\omega_{nb}^b = \omega_{ib}^b - C_n^b(\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n) \quad (1.16)$$

上式中， $C_n^b$ 是姿态阵， $\omega_{nb}^b$ 不能直接测量获得，MEMS陀螺的输出是载体系相对于惯性系的角速度 $\omega_{ib}^b$ ，其中包含了 $\omega_{ie}^n$ 是地球自转速率， $\omega_{en}^n$ 是位置速率，大小为：

$$\omega_{ie}^n + \omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\frac{V_N}{R_M} \\ \omega_{ie} \cos L + \frac{V_E}{R_N} \\ \omega_{ie} \sin L + \frac{V_E}{R_N} \tan L \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

其中， $L$ 是导航系所在地理纬度， $V_E$ 、 $V_N$ 为当时时刻载体的东向和北向速度， $\omega_{ie}$ 是地球自转角速度。

### 1.3.2 速度更新

本文选择“东-北-天”导航坐标系( $n$ 系), 则有惯导比力方程

$$\dot{\mathbf{V}}_{en}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{sf}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}_{en}^n + \mathbf{g}^n \quad (1.18)$$

其中 $\mathbf{f}_{sf}^b$ 为加速度计测量的比力,  $2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n \times \mathbf{v}_{en}^n$ 为由载体运动和地球自转引起的哥氏加速度,  $\boldsymbol{\omega}_{en}^n \times \mathbf{v}_{en}^n$ 为由载体运动引起的对地向心加速度,  $\mathbf{g}^n$ 为重力加速度,  $-(2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_{en}^n + \mathbf{g}^n$ 。式表明, 在加速度计输出中去掉有害加速度后, 就可获得载体在导航系下的真实加速度 $\dot{\mathbf{V}}_{en}^n$ , 设速度的更新周期为 $T$ , 在每个更新周期内对角增量和速度增量作 $N$ 次采样, 对上式作积分运算, 得到 $t_m$ 时刻载体在导航系内的速度:

$$\mathbf{V}_m^n = \mathbf{V}_{m-1}^n + \mathbf{C}_{b(m-1)}^{n(m-1)} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(m-1)} \mathbf{f}_{ib}^b dt + \int_{t_{m-1}}^{t_m} [\mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}_{en}^n] dt \quad (1.19)$$

式中,  $\mathbf{V}_m \mathbf{V}_{m-1}$ 分别是 $t_m$ 和 $t_{m-1}$ 时刻载体的速度;  $\mathbf{C}_{b(m-1)}^{n(m-1)}$ 是 $t_{m-1}$ 时刻的姿态矩阵。若 $\delta \mathbf{V}_{g/corm}^n$ 表示在时间 $[t_{m-1}, t_m]$ 内有害加速度引起的速度补偿量,  $\delta \mathbf{V}_{sfm}^n$ 是由比力引起的速度补偿量, 则式? 可以改写成

$$\mathbf{V}_m^n = \mathbf{V}_{m-1}^n + \mathbf{C}_{b(m-1)}^{n(m-1)} \delta \mathbf{V}_{sfm}^n + \delta \mathbf{V}_{g/corm}^n \quad (1.20)$$

$$\delta \mathbf{V}_{sfm}^n = \delta \mathbf{V}_m^n + \frac{1}{2} \delta \theta_m \times \delta \mathbf{V}_m^n + \frac{1}{2} \int_{t_{m-1}}^{t_m} [\Delta \theta(t) \times \mathbf{f}_{ib}^b + \Delta \mathbf{V}(t) \times \boldsymbol{\omega}(t)] dt \quad (1.21)$$

式? 在MEMS惯导速度更新中的第二项和第三项分别进行了旋转效应和划桨效应的补偿, 旋转效应指的是运动物体在某个方向进行线运动的同时发生空间旋转变化的引起, 划桨效应指运动物体在纵轴方向做线振动时又在横轴方向发生同向频的角振动。 $\delta \theta_m$ 、 $\Delta \mathbf{V}_m$ 为更新周期内的陀螺角增量和加速度计速度增量。因为载体角速度和加速度变化复杂, 无法通过确定的数学公式加以描述, 工程中常采用曲线拟合的方法来近似求解。根据比力方程, 可以得到离散系统时速度在导航系的增量为:

$$\Delta \mathbf{V}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}_{ib}^b \cdot T - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{V}^n \cdot T + \mathbf{g}^n \cdot T \quad (1.22)$$

由于低成本MEMS传感器属于低精度, 陀螺精度(零偏稳定性及重复性)为 $0.1^\circ$ 量级, 加速度精度为 $5mg$ , 传感器标定在下节介绍具体方法, 此处忽略划桨效应, 可对其作大幅简化。



### 1.3.3 位置更新

如图，假设地球表面运动的物体在地理坐标系下的坐标记为 $O_g(\lambda, L, h)$ 。如果 $O_o$ 点是 $O_g$ 与地心连线在地球表面的交点，以该点建立直角坐标系，纬圈切线指东为 $O_o x_o$ 轴，经圈切线指北 $O_o y_o$ 轴、椭球面法线方向指天 $O_o z_o$ 轴， $O_g$ 点的地理坐标表示，记为 $O_g(\lambda, L, h)$ 。

在图?，如果 $O_o$ 点对地球坐标系 $O_x y_e z_e$ 的速度在 $O_x o y_o z_o$ 系的投影记为 $v_e^o = [v_{x_o} \ v_{y_o} \ v_{z_o}]^T$ 。注意，由于 $O_o X_o$ 轴与纬圈相切，故经度会随着 $v_{x_o}$ 而变化，根据地理几何有：

$$\dot{\lambda} = \frac{v_{x_o}}{R_N \cos L} \quad (1.23)$$

对于地理高度为 $h$ 的 $O_g$ 点，假设其速度为 $\mathbf{v}_{eg}^g = [v_x \ v_y \ v_z]^T$ ，根据图? 中几何关系，有

$$\frac{v_{x_o}}{R_N} = \frac{v_x}{R_N + h} \quad (1.24)$$

$$\frac{v_{y_o}}{R_M} = \frac{v_y}{R_M + h} \quad (1.25)$$

上述两式分别带入

$$\dot{\lambda} = \frac{v_x}{(R_N + h) \cos L} \quad (1.26)$$

$$\dot{L} = \frac{v_y}{(R_M + h)} \quad (1.27)$$

$$\dot{h} = v_z \quad (1.28)$$

记：

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \lambda \\ L \\ h \end{bmatrix}, \mathbf{M}_{pv} = \begin{bmatrix} 0 & 1/[(R_N + h) \cos L] & 0 \\ 1/(R_M + h) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

则矩阵形式，

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{M}_{pv} \mathbf{v}^n \quad (1.30)$$

与捷联惯导姿态和速度更新算法相比，位置更新算法引起的误差一般比较小，采用梯形积分法将上式离散化，得

$$\mathbf{p}_t = \mathbf{p}_{t-1} + \mathbf{M}_{pv} \times (\mathbf{v}_{t-1}^n + \mathbf{v}_t^n) \times \frac{T}{2} \quad (1.31)$$

## 1.4 小型化车载组合定位原理

结合GPS定位的长期稳定性与SINS系统定位的短期精确性，整合两套设备的导航信息可以提高整个系统的定位性能，目前常见的组合方法有：GPS/SINS松组合、紧组合和超紧组合等模式。

### (1)GPS/SINS松组合

松组合是采用滤波计算的较为基础的组合方式，从GNSS接收机和惯导系统各自输出的速度、位置之差作为系统量测，通过组合滤波器对惯导系统的速度、位置误差和姿态误差进行估计，然后作为反馈信息完成对MEMS惯导传感器的校正，从而实现SINS系统的累积误差的消除，提高组合系统的导航精度。

松组合的特点是：系统结构简单，易于实现，计算量小等，GNSS可以限制惯导误差的增长，当GNSS失去信号时惯导可短时间内自主导航，惯性传感器误差实时估计并修正。适合车载导航、民用航空等领域。其结构示意图如下？

### (2)紧组合

根据

## 1.5 车载组合定位系统总体方案设计

车载组合定位系统是一个复杂的系统，包括传感器的数据采集与处理，实时数据解算和融合，上位机导航信息显示等设计。本课题根据本章前几节的导航解算理论知识，根据实际工作环境完成芯片选型与硬件设计，并编写导航软件实现导航定位功能，最终可以成功地为地面车辆提供姿态位置和速度信息，完成了一款自动驾驶辅助系统的小型化导航模块的工程实现。此模块以ARM 处理器为核心，主要由MEMS惯性传感器，GNSS卫星接收机等设备组成。构建的SOPC(system-on-a-programmable-chip)嵌入式系统具有体积小，功耗低，数据计算功能强等优点，为小型化、低功耗，低成本导航系统硬件设计提供了解决方案，其总体方案如图？，

从图中可以看出，首先将MEMS惯性器件通过SPI通信接口以100Hz的频率采样，降频至10Hz送入ARM芯片数据缓存区，降频采用简单的均值滤波并做误差补偿，供后续系统做惯导解算使用；另一路GNSS模块通过串口连接到ARM芯片，并以1Hz 速率将数据送入数据缓存区；ARM芯片在解析惯导数据和GNSS数据后，对结果进行时间对准后

进行卡尔曼滤波融合对导航数据进行最优估计，最后通过串行总线把导航解算数据传送到PC端进行显示，同时也可将结果实时记录在SD中，方便对实时环境的工作测试。

根据上述系统总体方案的介绍，GNSS/INS组合导航系统中，不仅要完成导航信息解算等软件问题、首先要完成硬件平台的开发。结合本系统的功能及特点可以将设计的主要任务主要分成以下几点：

#### 1、硬件平台设计及模块调试

导航模块硬件设计是整个任务要求的第一步，再设计最初，要根据平台的设计功能和算法需求特点进行主要器件的选型，然后依据电气连接规则绘制电路原理图和PCB图并加工制作电路板，硬件设计的过程在将在第三章详细介绍。

2、软件设计在硬件平台搭建完成之后，要实现导航定位的功能还需要软件系统的支持。根据系统总体设计思想，软件设计分为相关芯片驱动部分、惯导数据解算、以及组合滤波误差处理几部分。具体过程为：首先对ARM硬件系统进行初始化，定时器、串口、SPI接口等外设初始化，然后通过定时器对IMU和GNSS数据进行采集，对惯导数据进行导航解算，解算结果与GPS观测量通过卡尔曼滤波得到最优的导航信息，软件的设计将在本文第四章进行介绍。

3、导航数据输出显示一个完整的系统设计最终需要一个人机交互的功能，导航解算后的数据要给用户显示出来，最终的设计将导航结果通过串口连接至电脑端，并能实时监测物体的运行状态和轨迹，同时显示当前搜索到的卫星，并将导航数据保存下来以便调试使用。

较之传统定位系统，本系统具有导航定位独立，运行设计可靠，利于在中低端设备上实现等优点。

## 1.6 本章小结

本章主要介绍了捷联惯导的