אינפי 1מ'

104031

סיכום הרצאות

רשימת ההרצאות

הרצאה 2: קבוצות של מספרים, הוכחות מתמטיות

קבוצות של מספרים: קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N}=\{1,2,3,\dots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z}=\{\dots-3,-2,-1,0,1,2,3\dots\}$

קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\}$

קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R}=\{x|-\infty<x<\infty\}$

משפט: אם n אי-זוגי אז n^2 אי-זוגי.

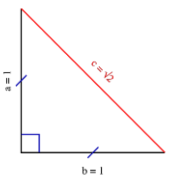
הוכחה:

n אי-זוגי $\Leftarrow n=2k+1 \Leftarrow n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1 \Leftarrow n^2$ אי-זוגי. ∎

משפט: (זהה למשפט הנ"ל) אם n^2 זוגי אז n זוגי.

כלל:
1. באופן כללי שני המשפטים הבאים אינם זהים: $A\Leftarrow B$ $B\Leftarrow A$
2. אבל שני המשפטים הבאים זהים: $A\Leftarrow B$ "לא B" $\Leftarrow$ "לא A"

משפט: $c=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$



הוכחה:

נוכיח על דרך השלילה. נניח ש-$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ ונגיע לסתירה:

אם $c\in\mathbb{Q}$ אז נכתוב אותו כשבר מצומצם: $c=\frac{m}{n}\ (n\neq 0)$, ולכן:

$c=\frac{m}{n} \Leftarrow c^2=\frac{m^2}{n^2}=2 \Leftarrow m^2=2n^2 \Leftarrow m^2$ זוגי $\Leftarrow m$ זוגי $\Leftarrow m^2$ מתחלק ב -4 $\Leftarrow 2n^2$ מתחלק ב -4 $\Leftarrow$ n^2 זוגי $\Leftarrow n$ זוגי.

הגענו לסתירה משום ש-c אינו שבר מצומצם (כי m וגם n זוגיים). ∎

משפט: **("צפיפות הרציונאליים")** לכל $x<y\in\mathbb{R}$ קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש- $x<q<y$.

הוכחה:

$x<y \Leftarrow 0<y-x$.

נבחר $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n>\frac{1}{y-x}$ (עקרון ארכימדס) $\Leftarrow ny-nx>1 \Leftarrow$ יש $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $nx<m<ny \Leftarrow$

$\Leftarrow x<\frac{m}{n}<y$ ∎

הרצאה 3: ערך מוחלט, קטעים וסביבות, קבוצות חסומות

הגדרה: **ערך מוחלט:** $|x|=\begin{cases}x & ,x\geq 0\\ -x & ,x<0\end{cases}=\max\{x,-x\}$

משפט: **(תכונות הערך המוחלט)** לכל x,y ממשיים:
1. $|x|\geq 0$
2. $|x|\geq -x\ ,\ |x|\geq x$

3. $|x| = |-x|$

4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

5. $|xy| = |x||y|$

6. $|x+y| \leq |x| + |y|$ ("אי-שוויון המשולש")

7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$

8. $-M < x < M \Leftrightarrow |x| < M$

הוכחה (6):

$$|x| \geq x \qquad |x| \geq -x$$
$$|y| \geq y \qquad |y| \geq -y$$
$$\Leftarrow |x| + |y| \geq x + y \qquad \Leftarrow |x| + |y| \geq -(x+y)$$

$$\Leftarrow |x| + |y| \geq |x + y| \qquad \blacksquare$$

משמעות גיאומטרית של $|x-y|$: המרחק בין x ל-y .

קטעים וסביבות: קטע פתוח: $(a,b) = \{x | a < x < b\}$

קטע סגור: $[a,b] = \{x | a \leq x \leq b\}$

קרן: $(a,\infty) = \{x | a < x\}$

הגדרה: יהי $x_0 \in \mathbb{R}$ ויהי $\varepsilon > 0$. הקטע הפתוח $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ נקרא **ε סביבה של x_0.**

טענה: $|x - x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

הוכחה:

$$|x - x_0| < \varepsilon \underbrace{\Leftrightarrow}_{(8)} -\varepsilon < x - x_0 < \varepsilon \Leftrightarrow x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \Leftrightarrow x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \qquad \blacksquare$$

הגדרה: $\{x | 0 \leq |x - x_0| \leq \varepsilon\}$ נקרא **ε סביבה מנוקבת של x_0.**

הגדרה: תהי $A \subset \mathbb{R}$:

1. A נקראת **חסומה מלמעלה** אם קיים M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \leq M$.
2. A נקראת **חסומה מלמעלה** אם קיים m כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \geq m$.
3. A נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה ומלמטה.

טענה: A חסומה $\Leftrightarrow$ קיים K כך ש-$|x| \leq K$ לכל $x \in A$.

הוכחה:

$\Rightarrow$: לכל $x \in A$, $|x| \leq K$. לפי (8) של הערך המוחלט, לכל $x \in A$, $-K < x < K$. לכן A חסומה.

$\Leftarrow$: A חסומה ולכן לכל $x \in A$, $m < x < M$.

נגדיר $K = \max\{|m|, |M|\}$ ואז לכל $x \in A$: $-K \underbrace{\leq}_{K \geq |m|} -|m| \underbrace{\leq}_{|m| \geq -m} m \leq x \leq M \leq |M| \leq K \qquad \blacksquare$

הרצאה 4: סופרמום ואינפימום

הגדרה:
1. S נקרא **הסופרמום** של A אם הוא החסם מלמעלה הכי קטן של A. מסמנים: $S = \mathrm{Sup}A$.
   אם $S \in A$, אז S נקרא **המקסימום** של A, ומסמנים: $S = \max A$.
2. I נקרא **האינפימום** של A אם הוא החסם מלמטה הכי גדול של A. מסמנים: $I = \inf A$.
   אם $I \in A$, אז I נקרא **המינימום** של A, ומסמנים: $I = \min A$.

דוגמאות:
1. $\mathbb{N}$ חסומה מלמטה ולא מלמעלה. $\min \mathbb{N} = \inf \mathbb{N} = 1$
2. $\mathbb{Z}$ לא חסומה מלמעלה ולא מלמטה.
3. $A = (-3,2]$ חסומה. $\max A = \sup A = 2$ $\inf A = -3$, אין $\min$
4. $B = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ חסומה. $\max B = \sup B = 1$ $\inf B = 0$, אין $\min$

טענה:
$S = \mathrm{Sup}A \iff$
1. $x \le S, \forall x \in A$
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש- $x_0 > S - \varepsilon$

$I = \inf A \iff$
1. $x \ge I, \forall x \in A$
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש- $x_0 < I + \varepsilon$

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלמעלה (מלמטה) של מספרים ממשיים, קיים סופרמום (אינפימום).

הערה: $A = \{x \in \mathbb{Q} | x < \sqrt{2}\}$. ל- A אין סופרמום ב- $\mathbb{Q}$.

משפט: לכל $x > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $y > 0$ יחיד כך ש- $y^n = x$.

סימון: $y = \sqrt[n]{x}$ או $y = x^{1/n}$.

הוכחה: נוכיח רק עבור $n = 2$ (הוכחה כללית משתמשת בבינום):

יהי $x > 0$. נסמן: $A = \{t > 0 | t^2 < x\}$.

<u>A לא ריקה:</u> ניקח $t = \frac{1}{2}\min\{1, x\}$.

$$0 < t < 1 \Rightarrow t^2 < t \Rightarrow 0 < t^2 < t \le \frac{x}{2} < x \Rightarrow t \in A$$

<u>A חסומה מלעיל:</u> נסמן $M = \max\{1, x\}$ ונראה ש- M חסם מלעיל:

אם $A \ni t \le 1$ אז $t \le M$

אם $t > 1$ אז $t < t^2 < x \le M$

לפי אקסיומת השלמות יש ל- A סופרמום, נסמנו y.

נראה $y^2 \ge x$ וגם $y^2 \le x$ ולכן $y^2 = x$:

<u>$y^2 \ge x$:</u> נניח בשלילה $y^2 < x$. נמצא $\varepsilon > 0$ כך ש- $(y+\varepsilon)^2 < x$ וזו תהיה סתירה לכך ש- y חסם מלמעלה.

$$0 < \varepsilon < \min\left\{1, \frac{x - y^2}{2y + 1}\right\}$$

$$(y+\varepsilon)^2 = y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2 = y^2 + \varepsilon(2y+\varepsilon)$$

$$\underbrace{\leq}_{(\varepsilon<1)} y^2 + \varepsilon(2y+1) \underbrace{\leq}_{\left(\varepsilon<\frac{x-y^2}{2y+1}\right)} y^2 + \frac{x-y^2}{2y+1}(2y+1) = x$$

__$y^2 \leq x$:__ נניח בשלילה ש-x > y^2 , ונמצא חסם מלמעלה של A שקטן מ-y , בסתירה לכך ש-y סופרמום:

ניקח $t \in A$. $t \leq y$.

(מונה: $t^2 < x$ ולכן $-t^2 > -x$
מכנה: $2y \geq y+t$)

$$y - t = \frac{y^2 - t^2}{y+t} > \frac{y^2 - x}{2y}$$

($y^2 - x$ חיובי לפי הנחת השלילה)

$$\Rightarrow t < y - \frac{y^2 - x}{2y}$$

וזה חסם מלמעלה של A שקטן מ-y.

__יחידות:__ אם יש $z < y$ כך ש-$x = y^2$ וגם $z^2 = x$, אז $x = y^2 < z = x$. סתירה. ■

הרצאות 5-6: __גבול של סדרה__

הגדרה: **סדרה** היא אוסף אינסופי מסודר של מספרים ממשיים: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

(a_1 הינו האיבר הראשון ו-a_n הינו האיבר הכללי/האיבר ה-n-י)

סימון: a_n , (a_n) , $\{a_n\}$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

דוגמאות:

1.	$a_n = n$	$1,2,3,4,\dots$	
2.	$a_n = \frac{1}{n}$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\dots$	"הרמונית"
3.	$a_n = (-1)^{n+1}$	$1,-1,1,-1,1,\dots$	
4.	$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$	$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\dots$	"הרמונית מתחלפת"
5.	$a_n = 5 + 2(n-1)$	$5,7,9,11,\dots$	"חשבונית"
6.	$a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$	$3,6,12,24,\dots$	"הנדסית"
7.	$a_n = 2$	$2,2,2,2,\dots$	"קבועה"
8.	$a_n = \begin{cases} 1 & , n \text{ זוגי} \\ n & , n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$	$1,1,3,1,5,1,7,1,\dots$	
9.	$a_n =$ ה-n-י הראשוני	$2,3,5,7,11,13,17,\dots$	
10.	$a_n =$ הספרה ה-n-ית אחרי הנקודה העשרונית ב-π	$1,4,1,5,9,2,\dots$	
11.	$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1}^2 \end{cases}$	$2,12,432,559872,\dots$	"רקורסיבית"

הגדרה: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ (או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.

תזכורת: $|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

הערות:

1. N לא חייב להיות טבעי.
2. שינוי מספר סופי של איברים אינו משנה את קיום הגבול או את ערכו.

דוגמאות:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$. הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $N = 1$, ואז לכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - c| < \varepsilon$ כי $a_n = c$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $N > \frac{1}{\varepsilon}$, ואז לכל $n > N$ מתקיים: $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$, כלומר: $|a_n - 0| < \varepsilon$.

משפט: **(יחידות הגבול)** אם לסדרה a_n יש גבול, אז הוא יחיד.

הוכחה:

נניח בשלילה שיש ל-a_n שני גבולות שונים, נסמנם: $K < L$.

ניקח: $0 < \varepsilon = \frac{L-K}{3}$ (חיובי כי $K < L$), ואז: $K + \varepsilon = K + \frac{L-K}{3} = \frac{2k+L}{3} \underbrace{<}_{(K<L)} \frac{2L+K}{3} = L - \frac{L-k}{3} = L - \varepsilon$

לפי הגדרת הגבול עבור L קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים: $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ $(\star)$.

לפי הגדרת הגבול עבור K קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים: $K - \varepsilon < a_n < K + \varepsilon$ $(\star\star)$.

עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$ מתקיים שלכל $n > N$: $L - \varepsilon \underbrace{<}_{(\star)} a_n \underbrace{<}_{(\star\star)} K + \varepsilon$, אבל זו סתירה כי: $K + \varepsilon < L - \varepsilon$. ■

הגדרה:

1. a_n נקראת **חסומה מלמעלה** אם: $\exists M, \forall n: a_n \le M$
2. a_n נקראת **חסומה מלמטה** אם: $\exists m, \forall n: a_n \ge m$
3. a_n נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלמטה ומלמעלה.

תרגיל: a_n חסומה $\Leftrightarrow$ קיים K כך ש-$|a_n| \le K$ לכל n.

משפט: אם a_n מתכנסת אז היא חסומה.

הוכחה:

יהי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. ניקח $\varepsilon = 1$. לפי הגדרת הגבול קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $L - 1 < a_n < L + 1$.

נגדיר: $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_N, L+1\}$, $m = \min\{a_1, a_2, \dots, a_N, L-1\}$, ואז לכל n מתקיים: $m \le a_n \le M$,

כלומר, a_n חסומה. ■

הערות:

1. חסומה $\not\Rightarrow$ מתכנסת.

דוגמא נגדית: $a_n = (-1)^n$.

2. לא חסומה ⇐ לא מתכנסת.

דוגמאות נגדיות: (1), (5), (6), (8), (9), (11) אינן מתכנסות כי אינן חסומות.

הרצאות 7-10: משפטי גבולות

משפט: (אריתמטיקה של גבולות) נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = K$, אזי:

1. $C \cdot a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C \cdot L$ לכל קבוע C
2. $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L + K$
3. $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \cdot K$
4. $\frac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{L}{K}$ בתנאי ש-$K \neq 0$, $b_n \neq 0$ לכל n

הוכחה (2):

יהי $\varepsilon > 0$. קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים: $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים: $|b_n - K| < \frac{\varepsilon}{2}$.

נגדיר: $N = \max\{N_1, N_2\}$, ואז לכל $n > N$ מתקיים:

$$|(a_n + b_n) - (L + K)| = |(a_n - L) + (b_n - K)| \leq |a_n - L| + |b_n - K| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

הוכחה (3):

יהי $\varepsilon > 0$. a_n מתכנסת ולכן חסומה, כלומר קיים M כך ש-$|a_n| < M$ לכל n, וגם $|K| < M$.

קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים: $|b_n - K| < \frac{\varepsilon}{2M}$. קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים: $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2M}$.

נגדיר $N = \max\{N_1, N_2\}$, ואז לכל $n > N$:

$$|a_n b_n - LK| = |a_n b_n - a_n K + a_n K - LK| = |a_n(b_n - K) + (a_n - L)K| \leq$$
$$\leq |a_n||b_n - K| + |a_n - L||K| < M\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon \qquad \blacksquare$$

הוכחה (4):

יהי $\varepsilon > 0$.

$\lim_{n\to\infty} b_n = K$ ולכן ע"פ משפט $|b_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |K| \neq 0$.

נפעיל את הגדרת הגבול ונקבל שקיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים:

$$0 < \frac{|K|}{2} < |K| - \frac{|K|}{2} < |b_n| < |K| + \frac{|K|}{2}$$

בנוסף יהי $|L| < M$.

קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים:

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon|K|}{4}$$

קיים N_3 כך שלכל $n > N_3$ מתקיים:

$$|b_n - K| < \frac{\varepsilon|K|^2}{4M}$$

נגדיר $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$, ואז לכל $n>N$:

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-\frac{L}{K}\right|=\frac{|a_nK-Lb_n|}{|b_nK|}=\frac{|a_nK-LK+LK-Lb_n|}{|b_n||K|}\le\frac{|a_n-L||K|+|L||b_n-K|}{|b_n||K|}$$

$0<\frac{|K|}{2}<|b_n| \Leftarrow \frac{2}{|K|}>\frac{1}{|b_n|}$ ולכן:

$$<\frac{2}{|K|^2}\left(|a_n-L||K|+|L||b_n-K|\right)<|a_n-L|\frac{2}{|K|}+|b_n-K|\frac{2M}{|K|^2}<$$

$$<\frac{\varepsilon|K|}{4}\frac{2}{|K|}+\frac{\varepsilon|K|^2}{4M}\frac{2M}{|K|^2}=\varepsilon$$ ■

הערות על הוכחת (4):

1. $\lim_{n\to\infty}a_n=L>0 \Rightarrow$ החל ממקום מסויים $a_n>0$.
2. $\lim_{n\to\infty}a_n=L\ge0 \not\Rightarrow$ החל ממקום מסויים $a_n\ge0$.

דוגמא נגדית: $a_n=-\frac{1}{n}$

משפט:

1. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}L \Rightarrow |a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}|L|$
2. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Leftrightarrow |a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$
3. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}L$, $L\ge0$, $\forall n, a_n\ge0 \Rightarrow \sqrt{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{L}$

הוכחת (1):

יהי $\varepsilon>0$. קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon$. לכן לכל $n>N$: $\quad ||a_n|-|L||\le|a_n-L|<\varepsilon$ ■

הוכחת (3):

__נניח $L>0$:__ יהי $\varepsilon>0$. קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $|a_n-L|<\varepsilon\sqrt{L}$. ואז לכל $n>N$:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right|=\frac{|a_n-L|}{\left|\sqrt{a_n}+\sqrt{L}\right|}=\frac{|a_n-L|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\le\frac{|a_n-L|}{\sqrt{L}}<\frac{\varepsilon\sqrt{L}}{\sqrt{L}}=\varepsilon$$

__נניח $L=0$:__ יהי $\varepsilon>0$. קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $a_n<\varepsilon^2$. לכן אם $n>N$, אז:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{0}\right|=\sqrt{a_n}<\varepsilon$$ ■

הערה:

ההפך של (1) אינו נכון.

דוגמא נגדית: $a_n=(-1)^n$: $|a_n|=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$ אבל ל-a_n עצמה אין גבול.

דוגמאות:

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$$
2. $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{3n-\frac{2}{n}}\right)^{1/2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{3-\frac{2}{n^2}}\right)^{1/2}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{3-2\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

משפט: אם b_n סדרה חסומה ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, אזי: $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = 0$

הוכחה:

b_n חסומה, לכן קיים M כך ש- $|b_n| < M$ לכל n.

יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $n > \mathrm{N}$ מתקיים: $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$.

לכן לכל $n > \mathrm{N}$: $|a_n b_n - 0| = |a_n||b_n| < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$ ■

דוגמא: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n\right) = 0$, משום ש- $\sin n$ סדרה חסומה ו- $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

משפט (הסנדוויץ'): אם לכל n, $a_n \le b_n \le c_n$ ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, אזי: $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$.

קיים N_1 כך שלכל $n > N_1$ מתקיים $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

קיים N_2 כך שלכל $n > N_2$ מתקיים $L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon$.

נגדיר: $N = \max\{N_1, N_2\}$, ואז לכל $n > N$: $L - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < L + \varepsilon$ ■

דוגמאות:

1. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sin n\right) = 0$ הוכחה:

ולכן: $-1 \le \sin n \le 1$ $\quad 0 \xleftarrow[n\to\infty]{} -\frac{1}{n} \le \frac{1}{n}\sin n \le \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

ולכן לפי משפט הסדנוויץ': $\frac{1}{n}\sin n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right)$ $\quad 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{9}, \frac{3}{32}, \ldots \le 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

נראה כי $0 \le \frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}$ ואז לפי סנדוויץ' $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n!}{n^n}\right) = 0$.

הוכחה $0 \le \frac{n!}{n^n}$: $\frac{n!}{n^n}$ חיובי, ולכן $0 \le \frac{n!}{n^n}$

הוכחה $\frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}$:

$$\frac{n!}{n^n} \le \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n! \cdot n \le n^n$$

$$\Rightarrow n! \le n^{n-1}$$

כל גורם באגף ימין ≥

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2)\cdot \ldots 3 \cdot 2 \le n \cdot n \cdot \ldots \cdot n$$

מכל גורם באגף ימין)

משפט: אם לכל n, $a_n \ge b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = K$, אזי: $L \ge K$

הוכחה:

נניח בשלילה $L < K$.

נגדיר $\varepsilon = \frac{k-L}{3} > 0$, ואז לכל $n > N_1$ מתקיים: $a_n < L + \varepsilon$, ולכל $n > N_2$ מתקיים: $K - \varepsilon < b_n$.

לכן עבור $N = \max\{N_1, N_2\}$, מתקיים: $a_n < L + \frac{K-L}{3} < K - \frac{K-L}{3} < b_n$ בסתירה לנתון. ■

מסקנה: אם $L \xrightarrow[n\to\infty]{} a_n \geq 0$, אזי: $0 \leq L$.

הוכחה:

מקרה פרטי של המשפט עם $b_n = 0$.

הערה:

אם $L \xrightarrow[n\to\infty]{} a_n > 0 \nRightarrow L > 0$.

דוגמא נגדית: $a_n = -\frac{1}{n}$

תרגילים:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = K$. הוכיחו: אם $L > K$ אז החל ממקום מסויים $a_n > b_n$.
2. הוכיחו (ללא שימוש בכלל המנה מאריתמטיקה): אם $L \neq 0$ $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$, $a_n \neq 0$ אז: $\frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{L}$.

משפט: תהי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. נגדיר: $x_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ (סדרת הממוצעים החשבוניים), אזי: $\lim_{n\to\infty} x_n = L$.

משפט: תהי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, $L \geq 0$, $a_n > 0$ לכל n, אזי:

1. (ממוצע הרמוני) $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$
2. (ממוצע הנדסי) $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

הוכחה:

<u>אם $L = 0$:</u> לפי אי-שיוויון הממוצעים: ממוצע חשבוני $\geq$ ממוצע הנדסי $\geq$ ממוצע הרמוני ≥ 0.
הקצוות שואפים ל-0 כאשר $n \to \infty$, ולכן לפי משפט הסנדוויץ', הממוצעים החשבוני וההנדסי שואפים גם כן ל-0.

<u>אם $L > 0$:</u> נסמן: $c_n = \frac{1}{a_n}$, $\lim_{n\to\infty} c_n = \frac{1}{L}$.

לכן לפי המשפט על סדרת הממוצעים החשבוניים: $\frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n} = \frac{c_1+c_2+\cdots+c_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{L}$

לכן: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

בנוסף: $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

הקצוות שואפים ל-L כאשר $n \to \infty$ ולכן ע"פ משפט הסנדוויץ': $\left(\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ ∎

משפט: תהי $a_n > 0$ לכל n. אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = L$ אז: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

הוכחה:

תהי b_n סדרה המתקבלת ע"י $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ (אפשר להגדיר $a_0 = 1$).

ע"פ הנתון $\lim_{n\to\infty} b_n = L$ ולכן גם סדרת הממוצעים ההנדסיים שלה:

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\ldots\cdot\frac{a_n}{a_{n\cdot 1}}}=\sqrt[n]{b_1\cdot b_i\ldots\cdot b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}L$$ ■

משפט: 1. יהי $C>0$, אזי: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C}=1$.

2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

הוכחת (1):

נגדיר: $a_n=C$. מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$, ולכן לפי המשפט הקודם: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C}=1$. ■

הוכחת (2):

נגדיר: $a_n=n$. מתקיים: $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=1$, ולכן לפי המשפט הקודם: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. ■

דוגמא: $a_n=\sqrt[n]{3^{2n+1}\cdot n}=\sqrt[n]{3^{2n}}\cdot\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}=9\cdot\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}9$

הרצאה 11: גבול במובן הרחב

הגדרה: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} a_n=\infty}$ (או $\boldsymbol{a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty}$) אם לכל M קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $a_n>M$.

מינוח: אם a_n מתכנסת (לגבול סופי L) או ש-a_n שואפת ל-∞ או ל-$-\infty$, אז נאמר ש-a_n **מתכנסת במובן הרחב**.

הערות:

1. ניתן להגדיר במקום "לכל M" גם "לכל $M>0$" (ההגדרות שקולות).
2. המשפטים עבור גבולות סופיים **אינם** בהכרח תקפים לגבולות אינסופיים:
   כן תקף: "$\infty+\infty$", "$\infty\cdot\infty$", "$c\cdot\infty$" ($c>0$).
   לא תקף: "$\frac{\infty}{\infty}$", "1^∞", "$\infty-\infty$", "$0\cdot\infty$", "∞^0".

דוגמאות:

1. $\lim_{n\to\infty}2^n=\infty$. נוכיח לפי ההגדרה:
   יהי $M>0$. נגדיר $N=\log_2 M$ ואזי לכל $n>N$ מתקיים: $a_n=2^n>2^N=2^{\log_2 M}=M$.
2. $\lim_{n\to\infty}c^n=\infty$ לכל $1<c\in\mathbb{R}$
3. $a_n=(-1)^n\cdot n$ אין גבול (כי לא חסומה), גם לא במובן הרחב (הוכיחו לפי ההגדרה).
4. $\frac{n^2-1}{3n^2}=\frac{1-\frac{1}{n^2}}{3}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{3}$ "$\frac{\infty}{\infty}$"
5. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}e$ "1^∞"
6. $n^3-1000n^2=n^2(n-1000)\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ "$\infty-\infty$"

משפט: $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty \Rightarrow \frac{1}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $n > \mathrm{N}$ מתקיים: $a_n > \frac{1}{\varepsilon} > 0$. ולכן לכל $n > \mathrm{N}$: $\left|\frac{1}{a_n} - 0\right| = \frac{1}{a_n} < \varepsilon$ ■

משפט: $0 < a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Leftarrow \frac{1}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

משפט: יהי $|q| < 1$, אזי: $q^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

הוכחה:

<u>אם $q = 0$:</u> מיידי.

<u>אם $q \neq 0$:</u> נגדיר: $c = \frac{1}{|q|} > 1$. ולכן: $\lim\limits_{n\to\infty} c^n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |q|^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{c^n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{q}^n = 0$ ■

משפט: **(הפיצה)** אם $a_n \leq b_n$ לכל n ו- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, אזי: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.

הוכחה:

יהי $M > 0$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $b_n \geq a_n > M$ ■

הרצאות 12-13: <u>מבחן המנה והשורש, סדרות מונוטוניות</u>

משפט: **(מבחן השורש לסדרות)** תהי $0 < a_n$ לכל n. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$ קיים, אז:

1. אם $q < 1 \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. אם $q > 1 \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הוכחה:

<u>עבור $q < 1$:</u> נסמן: $b = \frac{1+q}{2}$.

$q < b \Leftarrow 2q < 1 + q \Leftarrow q < 1$

$b < 1 \Leftarrow 1 + q < 2 \Leftarrow q < 1$

$\Leftarrow q < b < 1 \Leftarrow$ החל ממקום מסויים $\sqrt[n]{a_n} < b < 1 \Leftarrow$ החל ממקום מסויים $0 < a_n < b^n < 1$

$\Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$, ולכן לפי משפט הסנדוויץ' $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

<u>עבור $q > 1$:</u> נגדיר: $0 < b_n = \frac{1}{a_n}$. אזי:

$$\sqrt[n]{b_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{q} < 1$$

לפי המקרה עבור $q < 1$: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. ■

משפט: **(מבחן המנה לסדרות)** תהי $0 < a_n$ לכל n. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ קיים, אז:

1. אם $q < 1 \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. אם $q > 1$ $\Leftarrow$ $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הוכחה:

ע״פ משפט, אם $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ אז $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, ולכן ההוכחה מיידית לפי מבחן השורש. ∎

דוגמא: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{1000}}{(1.01)^n} = 0$. זו סדרה חיובית, לכן ניתן להוכיח באמצעות מבחן המנה:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)^{1000}}{(1.01)^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{(1.01)^n}} = \frac{(n+1)^{1000}\cdot(1.01)^n}{(1.01)^{n+1}\cdot n^{1000}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{1000}\cdot\frac{1}{1.01} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1000}\cdot\frac{1}{1.01} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{1.01} < 1$$

הגדרה: סדרה a_n תיקרא **מונוטונית** במקרים הבאים: (מינוח חלופי)

- אם $a_n < a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **עולה ממש**. (עולה)
- אם $a_n \le a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **עולה**. (לא יורדת)
- אם $a_n > a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **יורדת ממש**. (יורדת)
- אם $a_n \ge a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **יורדת**. (לא עולה)

הערה: אפשר לדבר על מונוטוניות החל ממקום מסוים.

דוגמאות:

1. $a_n = \frac{1}{n}$ יורדת ממש.
2. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ לא מונוטונית.
3. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$ נראה באינדוקציה ש-a_n יורדת ממש החל מ-$n = 3$.

נראה: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ לכל $n \ge 3$:

$$\frac{a_{a+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n^2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 < 1$$

הביטוי קטן מ-1 עבור $n \ge 3$ כי:

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{3} \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \le \left(1+\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9} = \frac{8}{9} < 1$$

4. **תרגיל:** $a_n = \frac{n!}{n^n}$

משפט: תהי a_n סדרה מונוטונית וחסומה, אזי a_n מתכנסת.

הוכחה:

נניח בה״כ ש-a_n מונוטונית עולה.

לפי אקסיומת השלמות, ל-$\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ יש סופרמום. נסמנו ב-L ונראה ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = L$.

יהי $\varepsilon > 0$. $L - \varepsilon$ אינו חסם מלמעלה של הסדרה. לכן קיים a_N כך ש-$a_N > L - \varepsilon$.

כיוון ש-a_n עולה, לכל $n > N$ מתקיים: $2 + \varepsilon > L \ge a_n \ge a_N > L - \varepsilon$ ∎

משפט: כל סדרה מונוטונית, מתכנסת במובן הרחב.

הוכחה:

אם a_n חסומה: היא מתכנסת לפי המשפט הקודם.

אם a_n אינה חסומה: נניח בה"כ ש-a_n מונוטונית עולה ולא חסומה מלמעלה. נראה ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$:

לכל M קיים $a_N > M$. לכן לכל $n > N$ מתקיים: $a_n \geq a_N > M$ ■

סיכום:

- a_n עולה וחסומה מלמעלה $\Leftarrow$ מתכנסת ל-sup
- a_n יורדת וחסומה מלמטה $\Leftarrow$ מתכנסת ל-inf
- a_n עולה ולא חסומה מלמעלה $\Leftarrow$ שואפת ל-∞
- a_n יורדת ולא חסומה מלמטה $\Leftarrow$ שואפת ל-$-\infty$

דוגמאות:

1. $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{4} \\ a_n = (a_{n-1})^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$ אם $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ קיים, נשאיף ל-∞ את שני אגפי המשוואה $a_n = (a_{n-1})^2 + \frac{1}{4}$, ואז:

$$L = L^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow L^2 - L + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow L = \frac{1}{2}$$

מראים באינדוקציה ש-a_n עולה וש-$a_1 < \frac{1}{2}$ לכל n, ולכן לפי המשפט הקודם, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ קיים.

הערה: עבור $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = 1 + 2a_n \end{cases}$, לא ניתן להשאיף לאינסוף את שני אגפי המשוואה כי הסדרה שואפת ל-∞.

אם נשאיף לאינסוף: $L = 1 + 2L \Rightarrow L = -1$, אולם: $a_n = 3,7,15,31,\ldots$!

2. $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ נראה: $2 \leq a_n \leq 3$ לכל n וגם ש-a_n עולה, ולכן לפי המשפט הקודם היא מתכנסת.

גבולה הינו: $e \notin \mathbb{Q}$ $2.7182\ldots = e$

<u>$2 \leq a_n \leq 3$:</u>

תזכורת: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ $\qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0} \cdot 1 + \binom{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n!}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$= 2 + \frac{1}{2!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)}{n^2}}_{<1} + \frac{1}{3!} \cdot \underbrace{\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3}}_{<1} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$$\cdot \underbrace{\frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}{n^n}}_{<1} < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

הראנו בינתיים $2 < a_n$ לכל n.

נוכיח באינדוקציה: $2^{n-1} \leq n!$

בסיס: $n = 1$ $\qquad 1 \leq 1$

הנחה: $\qquad 2^{n-1} \leq n!$

צעד: $\qquad 2^n = 2^{n-1} \cdot 2 \leq n! \cdot 2 \leq (n+1)!$

לכן מתקיים: $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \le 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3$

ולכן $2 \le a_n \le 3$, כלומר a_n חסומה.

<u>a_n עולה:</u> נפעיל את אי-שיוויון הממוצעים: $\sqrt[n+1]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n\cdot x_{n+1}} \le \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}}{n+1}$ על:
$x_1=1$, $x_2=x_3=\cdots=x_n=x_{n+1}=1+\frac{1}{n}$, ונקבל:

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \le \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le \left(\frac{1+n+1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

תרגיל: הוכיחו: $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$

הרצאה 14: <u>הלמה של קנטור, גבולות חלקיים</u>

למה: **(הלמה של קנטור)** יהיו a_n ו-b_n שתי סדרות המקיימות:
1. $b_n-a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ לכל n

אזי, שתיהן מתכנסות ואותו הגבול.

הוכחה:

לפי הנתונים, a_n עולה ו-b_n יורדת.

a_n חסומה מלמעלה (למשל ע"י b_1) ו-b_n חסומה מלמטה (למשל ע"י a_1).

לכן ע"פ משפט, a_n מתכנסת ל-sup שלה, ו-b_n מתכנסת ל-inf שלה.

בנוסף, אם נסמן: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, אזי: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left((b_n-a_n)+a_n\right)=0+L=L$ ■

למה: **(הלמה של קנטור בניסוח גיאומטרי)** תהי $\{[a_n,b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קטעים סגורים כך ש:
1. אורכי הקטעים שואפים ל-0.
2. לכל n מתקיים: $[a_{n+1},b_{n+1}] \subseteq [a_n,b_n]$

אזי קיימת נקודה c יחידה המקיימת $c\in[a_n,b_n]$ לכל n.

הערה: המשפט אינו נכון עם קטעים פתוחים, למשל: $\left\{\left(0,\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$.

הוכחה:

לפי המשפט הקודם קיים: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$, $a_n \le c \le b_n$ לכל n, כי c הייתה ה-sup של a_n וה-inf של b_n.

נניח שגם d מקיימת $a_n \le d \le b_n$ לכל n, לכן:

$c \le d$ כי c ה-sup של a_n, ו-d חסם מלמעלה של a_n

$d \le c$ כי c ה-inf של b_n, ו-d חסם מלמטה של b_n

$\Leftarrow c=d$ ■

הגדרה: תהי a_n סדרה. סדרה המתקבלת מ-a_n ע"י מחיקת חלק מהאיברים נקראת **תת-סדרה (ת"ס)**.

סימון: מסמנים את איברי תת הסדרה: $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$

דוגמאות: 1. $\{a_n\}_n^{\infty} = 1,0,1,0,1,0,\dots$, ולכן: $\{a_{2k}\}_{k=1}^{\infty} = 0,0,0,\dots$, $\{a_{2k-1}\}_{k=1}^{\infty} = 1,1,1,\dots$

2. $\{a_n\}_n^{\infty} = 1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\dots$, ולכן: $\{a_{k^2}\}_{k=1}^{\infty} = 1,\frac{1}{4},\frac{1}{9},\frac{1}{16},\dots$

משפט: אם a_n מתכנסת (כולל במובן הרחב), אזי כל תת-סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול.

רעיון ההוכחה:

אם a_n מתכנסת, אז לכל $\varepsilon > 0$, החל ממקום מסויים כל האיברים נמצאים בקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, ולכן כך גם לגבי כל תת-סדרה.

מסקנה: אם לסדרה יש שתי תתי-סדרות עם גבולות שונים, אז היא לא מתכנסת.

דוגמא: $a_n = (-1)^n$ אין לסדרה גבול.

הגדרה: גבול של תת-סדרה נקרא **גבול חלקי (ג"ח)** של הסדרה המקורית.

דוגמא: סדרה שכל מספר טבעי הוא גבול חלקי שלה: $1,1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,2,3,4,5,\dots$

הרצאה 15-16: גבולות חלקיים, משפט בולצאנו-ויירשטראס ומסקנות ממנו, גבול עליון ותחתון

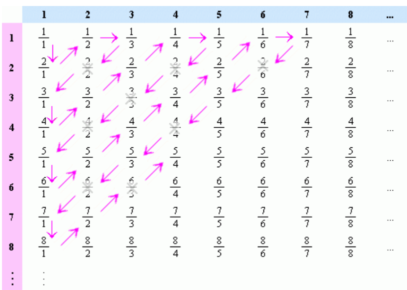
טענה: L הינו גבול חלקי של $a_n \Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ יש ∞ מאיברי הסדרה בקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

הוכחה:

$\Leftarrow$: תהי $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$. אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיים K כך שלכל $k > K$ מתקיים $a_{n_k} \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.
לכן יש ∞ מאיברי הסדרה בקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

$\Rightarrow$: נבנה תת-סדרה שגבולה L:
ניקח: $L-1 < a_{n_1} < L+1$.
ניקח: $L-\frac{1}{2} < a_{n_2} < L+\frac{1}{2}$, כך ש-$n_2 > n_1$.
ונמשיך: $L-\frac{1}{k} < a_{n_k} < L+\frac{1}{k}$ כך ש-$n_k > n_{k-1}$.
לפי משפט הסנדוויץ' על: $L \xleftarrow[k\to\infty]{} L-\frac{1}{k} < a_{n_k} < L+\frac{1}{k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$, קיבלנו תת-סדרה a_{n_k} שמקיימת $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$. ∎

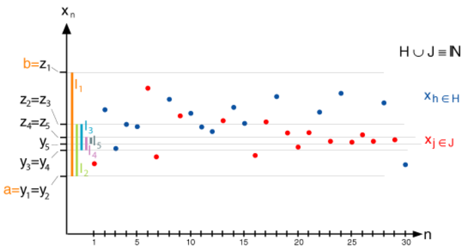
דוגמא: נבנה סדרה שכל מספר ממשי חיובי הוא גבול חלקי שלה:
נסדר את $\mathbb{Q}_+$ ואז כל מספר ממשי חיובי L יהיה גבול חלקי, כי בכל סביבה $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ יש ∞ רציונאליים (לפי צפיפות הרציונאליים).
סידור $\mathbb{Q}_+$:



משפט: **(בולצאנו-ויירשטראס/BW)** לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

הוכחה:

תהי x_n סדרה חסומה.
לכל n, $a_1 \le x_n \le b_1$.
נסמן את אמצע הקטע $[a_1, b_1]$ ב-h_1.



לפחות באחד החצאים יש ∞ מאיברי הסדרה.

נקרא לו $[a_2, b_1]$ ונסמן את אמצע הקטע ב-h_2, וכו׳.

קיבלנו סדרה של קטעים סגורים המקיימת את תנאי הלמה של קנטור (אורך הקטע ה-n-י הינו: $\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$).

לפי הלמה, יש נקודה c יחידה בחיתוך כל הקטעים.

נבנה תת-סדרה x_{n_k} ששואפת ל-c:

ניקח $x_{n_1} = x_1$, $a_1 \le x_{n_1} \le b_1$.

ב-$[a_2, b_2]$ יש ∞ איברים של x_n. ניקח $a_2 \le x_{n_2} \le b_2$, עם אינדקס $n_2 > n_1$.

ב-$[a_3, b_3]$ יש ∞ איברים של x_n. ניקח $a_3 \le x_{n_3} \le b_3$ עם אינדקס $n_3 > n_2$.

נמשיך כך: אחרי שבחרנו $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}$, בקטע $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ יש ∞ איברים של x_n. ניקח $x_{n_{k+1}}$ עם אינדקס $n_{k+1} > n_k$.

קיבלנו: $c \xleftarrow[n\to\infty]{} a_k \le x_{n_k} \le b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} c$, ולכן לפי סנדוויץ׳: $x_{n_k} \xrightarrow[n\to\infty]{} c$. ■

מסקנות:

1. לכל סדרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד.
2. לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הוכחה:

אם a_n חסומה, אז יש לה תת-סדרה מתכנסת לפי BW.

אם a_n לא חסומה, נניח בה״כ שהיא לא חוסמה מלמעלה, ונבנה תת-סדרה ששואפת ל-∞.

ניקח $a_{n_1} > 1$. ניקח $a_{n_2} > 2$ עם אינדקס $n_2 > n_1$ וכו׳.

קיבלנו $a_{n_k} > k$, ולכן לפי משפט הפיצה: $a_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$. ■

3. לכל סדרה יש לפחות גבול חלקי אחד במובן הרחב.
4. סדרה מתכנסת (במובן הרחב) $\Leftrightarrow$ יש לה בדיוק גבול חלקי אחד (במובן הרחב).

הוכחה: (עבור L סופי)

$\Leftarrow$: כבר הוכחנו.

$\Rightarrow$: תהי a_n סדרה, ויהי L הגבול החלקי היחיד שלה. נראה: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$:

נניח בשלילה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \ne L$ (כלומר, או של-a_n יש גבול אחר, או שבכלל אין לה גבול).

אזי, קיים $\varepsilon > 0$ כך שמחוץ לסביבה $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ יש ∞ איברים של הסדרה.

לפי סדר הופעתם ב-a_n, הם מהווים תת-סדרה, נסמנה: $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

לפי מסקנה (2), יש ל-a_{n_k} תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב, נסמנה: $\left(a_{n_{k_l}}\right)_{l=1}^{\infty}$.

זו תת-סדרה שמתכנסת לגבול K (אולי $\pm\infty$).

כיוון שכל איברי $a_{n_{k_l}}$ מחוץ ל-$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$, $K \ne L$, וזו סתירה. ■

תרגיל: הוכיחו את (4) עבור L אינסופי.

5. לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

רעיון ההוכחה:

לפי מסקנה (2) יש לה תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

תרגיל: הראו שלסדרה מתכנסת (במובן הרחב) יש תת-סדרה מונוטונית.

הערה: אפשר להוכיח את (5) בלי משפט BW, ואז BW הינו מסקנה מיידית.

הגדרה: תהי a_n סדרה חסומה. נסמן: אוסף הגבולות החלקיים של $a_n = \mathcal{L}$.

הקבוצה $\mathcal{L}$ היא קבוצה חסומה ולא ריקה (לפי BW), ולכן לפי אקסיומת השלמות יש לה sup ו-inf:

- ה-sup של אוסף הגבולות החלקיים של a_n נקרא **הגבול העליון** של a_n, ומסומן: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ או $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.
- ה-inf של אוסף הגבולות החלקיים של a_n נקרא **הגבול התחתון** של a_n, ומסומן: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ או $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$.

דוגמאות:

1. $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ אוסף הגבולות החלקיים: $\{-1,1\}$ $\overline{\lim} = 1$ $\underline{\lim} = -1$
2. $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ כסדרה אוסף הגבולות החלקיים: $[0,1]$ $\overline{\lim} = 1$ $\underline{\lim} = 0$

משפט: $\overline{\lim}$ ו-$\underline{\lim}$ הם בעצמם גבולות חלקיים (כלומר, הם ה-max וה-min של $\mathcal{L}$).

הוכחה:

נסמן $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = L$, ונראה ש-$L$ הוא גבול חלקי של a_n. נראה שלכל $\varepsilon > 0$ יש ∞ איברים של a_n ב-$(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$:

יהי $\varepsilon > 0$. L הוא Sup של $\mathcal{L}$, לכן קיים גבול חלקי l כך ש-$L - \frac{\varepsilon}{2} \le l \le L$ (כי אחרת $L - \frac{\varepsilon}{2}$ היה חסם מלמעלה של $\mathcal{L}$).

לכן יש ∞ איברים של a_n ב-$\left(l - \frac{\varepsilon}{2}, l + \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. ∎

הערות:

1. a_n מתכנסת $\Leftrightarrow \overline{\lim} = \underline{\lim}$.
2. הגבול העליון והתחתון לא מקיימים כללי חשבון גבולות.
   דוגמא: $\overline{\lim}(-1)^n = 1$, $\overline{\lim}(-1)^{n+1} = 1$, אבל: $\overline{\lim}((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0 \neq 2$.
3. כל איברי a_n למעט מספר סופי, נמצאים ב-$\left(\underline{\lim} - \varepsilon, \overline{\lim} + \varepsilon\right)$.
4. אם a_n לא חסומה מלמעלה, אז $\overline{\lim} a_n = \infty$.
   אם a_n לא חסומה מלמטה, אז $\underline{\lim} a_n = -\infty$.

הרצאה 17: סדרות קושי

הגדרה: תהי a_n סדרה ב-$\mathbb{R}$. a_n נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N, כך שלכל $m,n > N$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

(שקול:) a_n נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N, כך שלכל $n > N$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

משפט: כל סדרת קושי היא חסומה.

הוכחה:

יהי $\varepsilon = 1$. ניקח איזשהו איבר עם אינדקס $n > N$, כאשר N מתאים ל-$\varepsilon = 1$ בהגדרה של סדרת קושי.

אזי לכל $m > n$ מתקיים: $|a_m - a_n| < 1$, כלומר: $a_{n-1} < a_m < a_n + 1$.

נגדיר: $M = \max\{|a_n - 1|, |a_n + 1|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n-1}|\}$, ואז: $|a_k| \le M$ לכל k. ■

משפט: a_n סדרת קושי $\Leftrightarrow$ a_n מתכנסת.

הוכחה:

$\Rightarrow$: נסמן: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$.

לכן לכל $m, n > N$ מתקיים: $|a_m - a_n| = |a_m - L + L - a_n| \le |a_m - L| + |a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Leftarrow$: a_n סדרת קושי, ולכן חסומה. לכן לפי BW יש לה תת-סדרה מתכנסת לגבול שנסמנו L. נראה: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$:

יהי $\varepsilon > 0$. קיים N כך שלכל $m, n > N$ מתקיים: $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

ניקח $m_0 > N$ כך ש-a_{m_0} שייך לתת-הסדרה המתכנסת ומקיים $|a_{m_0} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. ואז לכל $n > m_0 > N$:

$$|a_n - L| = |a_n - a_{m_0} + a_{m_0} - L| \le |a_n - a_{m_0}| + |a_{m_0} - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$ ■

הערות:

1. זו הגדרה שקולה להתכנסות, אבל בלי לציין במפורש מהו L.
2. המשפט אינו נכון מעל $\mathbb{Q}$: תיתכן סדרת קושי של רציונליים שלא מתכנסת ב-$\mathbb{Q}$ (כי גבולה אי-רציונלי).
3. לא מספיק לדרוש: $|a_{n+1} - a_1| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

דוגמא: $1,2,2+\frac{1}{2},3,3+\frac{1}{3},3+\frac{2}{3},4,4+\frac{1}{4},4+\frac{2}{4},4+\frac{3}{4},5,\dots \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

דוגמא: $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ נראה ש-a_n סדרת קושי ולכן מתכנסת: $1, 1+\frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}, \dots$

יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר $N = \frac{1}{\varepsilon}$, ואז לכל $n > N$ ולכל p מתקיים:

$$\begin{aligned}|a_{n+p} - a_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n+p} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon\end{aligned}$$

תרגיל: הראו לפי קריטריון קושי כי $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ מתבדרת.

הרצאה 18: כיסויים והלמה של היינה-בורל

הגדרה: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, ותהי Σ אוסף של קטעים. אומרים ש-Σ הוא **כיסוי** של A אם לכל $x \in A$ קיים $I \in \Sigma$ כך ש-$x \in I$.

- אם כל הקטעים ב-Σ הם פתוחים, אז זהו **כיסוי פתוח**.
- אם ב-Σ יש מספר סופי של קטעים אז זהו **כיסוי סופי**.
- אם $\Sigma^* \subset \Sigma$ ו-Σ^* מכסה את A, אז Σ^* נקרא **תת-כיסוי**.

דוגמאות:

1. $A = [0,1]$ $\quad \Sigma = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right), \left(-1, \frac{1}{m}\right) \middle| m, n \in \mathbb{N}\right\}$ זהו כיסוי פתוח של A.

   $\Sigma^* = \left\{\left(\frac{1}{8}, 2\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ זהו תת-כיסוי של A.
2. $A = \mathbb{R}$ $\quad \Sigma = \{(n, n+2) | n \in \mathbb{Z}\}$ זהו כיסוי פתוח של A, אבל אין לו תת-כיסוי סופי.

למה: **(הלמה של היינה-בורל)** יהי Σ כיסוי פתוח של קטע סגור, אזי יש לו תת-כיסוי סופי.

הוכחה:

נניח בשלילה שאין ל-Σ תת-כיסוי סופי.

נסמן את הקטע הסגור $[a_1, b_1]$. נחצה אותו.

לפחות לאחד החצאים, שנסמנו $[a_2, b_2]$ אין תת-כיסוי סופי. נחצה אותו.

לפחות לאחד החצאים, שנסמנו $[a_3, a_3]$ אין תת-כיסוי סופי. נחצה אותו, וכו'.

מקבלים סדרה $\{(a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ של קטעים סגורים שאורכיהם שואפים ל-0 ו-$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

לכן לפי הלמה של קנטור יש c יחידה שמקיימת $c \in [a_n, b_n]$ לכל n.

קיים $I \in \Sigma$ כך ש-$I \ni c$.

I קטע פתוח ולכן יש $\varepsilon > 0$ כך ש-$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \subseteq I$.

ניקח n כך ש-$[a_n, b_n] \subset (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$.

קיבלנו סתירה: מצד אחד אין ל-$[a_n, b_n]$ תת-כיסוי סופי, ומצד שני הוא מוכל בקטע יחיד $I \in \Sigma$. ■

דוגמאות:

1. $A = (0,1]$ $\quad \Sigma = \left\{\left(\frac{1}{n}, 2\right) \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ זהו כיסוי פתוח של A, אבל אין לו תת-כיסוי סופי.
2. $A = [0,1]$ $\quad \Sigma = \left\{[-1,0], \left[\frac{1}{n}, 1\right] \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$ זהו כיסוי של A שאין לו תת-כיסוי סופי.
3. **הוכחת BW באמצעות היינה-בורל:**

   תהי a_n סדרה חסומה. לכן יש a, b כך ש-$a \leq a_n \leq b$ לכל n.

   נניח בשלילה שאין ל-a_n תת-סדרה מתכנסת, כלומר – אין לה גבולות חלקיים.

   לכן לכל $x \in [a,b]$ יש סביבה I_x שבה יש רק מספר סופי של איברי a_n.

   נגדיר: $\Sigma = \{I_x | x \in [a,b]\}$, וזהו כיסוי פתוח של $[a,b]$.

   לפי היינה-בורל, יש תת-כיסוי סופי.

קיבלנו סתירה: בכל I_x יש מספר סופי של איברי a_n ולכן גם במספר סופי של I_xים יש מספר סופי של איברי a_n, ■

ולכן בכל $[a,b]$ יש רק מספר סופי של איברי a_n.

תרגיל: השתמשו בלמה של היינה-בורל כדי להראות שיש מספר אי-רציונלי.

הרצאות 21-22: חזקות ממשיות

הגדרה: **(חזקות שלמים)** לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $0 < y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש-$y^n = x$.

סימון: $y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

הגדרה: **(חזקות רציונאליות)** עבור $a > 0$ ו-$q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (נוכל להניח $n > 0$). נגדיר: $a^q = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

הערה: נשים לב כי: $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n$.

הוכחה:

$$\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{mn} = \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)^m = a^m$$

מתקיימים כללי החזקות המוכרים, למשל:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $(a^p)^q = a^{pq}$
3. $a^p b^p = (ab)^p$
4. $a > b > 0 \,, p > 0 \Leftarrow a^p > b^p$
5. $a > 1 \,, p > q \Leftarrow a^p > a^q$
6. $1 > a > 0 \,, p > q \Leftarrow a^p < a^q$

הוכחה (1):

צ"ל: $a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{c}{d}} = a^{\frac{md+cn}{nd}}$, כלומר צ"ל: $\left(a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{c}{d}}\right)^{nd} = a^{md+cn}$, ואמנם:

$$\left(a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{c}{d}}\right)^{nd} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{nd} \left(a^{\frac{c}{d}}\right)^{nd} = \left(\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right)^d \left(\left(a^{\frac{c}{d}}\right)^d\right)^n = (a^m)^d (a^c)^n = a^{md} a^{cn} = a^{md+cn}$$ ∎

הגדרה: **(חזקות ממשיות)** $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$ כאשר $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ $\mathbb{Q} \ni$.

פיתוח ההגדרה:

יהי $0 < a \neq 1$ ו-$x \in \mathbb{R}$. יש להגדיר a^x.

- נניח $x > 0$, כי עבור $x < 0$ נגדיר: $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$.
- נניח $a > 1$, כי עבור $a < 1$ נגדיר: $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$.

תהי x_n סדרה עולה של רציונאליים כך ש-$x = \lim_{n\to\infty} x_n$.

למשל נוכל לקחת $x_n = \alpha.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n$ כאשר $\alpha.\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \dots \alpha_n$ הוא הפיתוח העשרוני של x.

כיוון ש-x_n סדרה עולה, גם a^{x_n} עולה לפי (5).

אם $\mathbb{Q} \ni q > x$ אז לכל n, $a^{x_n} < a^q$ כי x_n עולה ולפי (5).

$\Leftarrow$ a^{x_n} זו סדרה עולה וחסומה מלמעלה, ולכן מתכנסת, נקרא לגבולה a^x: $a^x = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$

<u>הוכחה ש-a^x מוגדר היטב:</u> (כלומר ש-a^x תלוי ב-a וב-x, אבל לא ב-x_n)

טענת עזר: אם $\mathbb{Q} \ni t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אז $a^{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

הוכחה:

נראה עבור $a > 1$.

יהי $\varepsilon > 0$. ראינו כי $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ ולכן גם: $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

לכן קיים k כך ש- $1-\varepsilon < a^{-1/k} < a^{1/k} < 1+\varepsilon$

נבחר N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $-\frac{1}{k} < t_n < \frac{1}{k}$

ואז: $1-\varepsilon < a^{-1/k} < a^{t_n} < a^{1/k} < 1+\varepsilon$

$\Leftarrow$ $a^{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ לפי הגדרת הגבול.

צריך להוכיח שאם $\mathbb{Q} \ni y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ סדרה עולה (אחרת), אז $\lim_{n\to\infty} a^{y_n} = \lim_{n\to\infty} a^{x_n}$:

תהי $y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, אזי: $t_n = y_n - x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, ולכן: $\frac{a^{y_n}}{a^{x_n}} = a^{y_a - x_n} = a^{t_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

לכן: $a^{y_n} = \frac{a^{y_n}}{a^{x_n}} \cdot a^{x_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} a^x$

$\Leftarrow$ ההגדרה טובה, ויתר על כן, לא חייבים לקחת x_n עולה.

משפט: יהיו $a, b > 0$ ויהיו $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. אם $b > a > 0$ אז:
   - $x > 0$ $\Leftarrow$ $a^x < b^x$
   - $x < 0$ $\Leftarrow$ $a^x > b^x$
5. אם $x < y$ אז:
   - $a > 1$ $\Leftarrow$ $a^x < a^y$
   - $1 > a > 0$ $\Leftarrow$ $a^x > a^y$
6. אם $\mathbb{R} \ni x_n \to x$ אז: $a^{x_n} \to a^x$
7. אם $0 < a_n \to a$ אז: $a_n^x \to a^x$
8. אם $x_n \to \infty$ אז:
   - $a > 1$ $\Leftarrow$ $a^{x_n} \to \infty$

9. אם $x_n \to -\infty$ אז:
- $1 > a > 0 \Rightarrow a^{x_n} \to 0$
- $a > 1 \Rightarrow a^{x_n} \to 0$
- $1 > a > 0 \Rightarrow a^{x_n} \to \infty$

הוכחה (1):

$\mathbb{Q} \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, $\mathbb{Q} \ni y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$, אזי: $x_n + y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x + y$

לכן: $a^x a^y = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}(a^{x_n}a^{y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n+y_n} = a^{x+y}$ ■

הוכחה (5):

ניקח $x < y$ וניקח $\mathbb{Q} \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ עולה ו-$\mathbb{Q} \ni y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} y$ יורדת, ויהיו: $x < \underbrace{t}_{\in\mathbb{Q}} < \underbrace{s}_{\in\mathbb{Q}} < y$.

$a > 1$ ולכן לפי כללי חזקות רציונאליות:

$s < y_n, \forall n \Rightarrow a^s < a^{y_n} \Rightarrow a^s \le \lim\limits_{n\to\infty} a^{y_n} = a^y$ $\qquad$ $t > x_n, \forall n \Rightarrow a^t > a^{x_n} \Rightarrow a^t \ge \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$

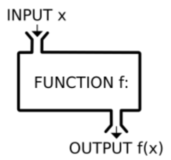
מסקנה: $a^x \le a^t < a^s \le a^y$ ■

הוכחה (6):

לפי (5), טענת העזר שראינו נכונה גם עבור סדרה $t_n \in \mathbb{R}$.

לכן אם $\mathbb{R} \ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$, אז: $a^{x_n} \underbrace{=}_{(1)} a^x a^{x_n - x} \underbrace{\xrightarrow[n\to\infty]{}}_{\text{לפי טענת העזר}} a^x$ ■

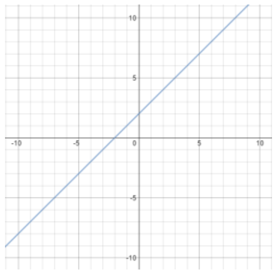
הרצאות 26-27: פונקציות

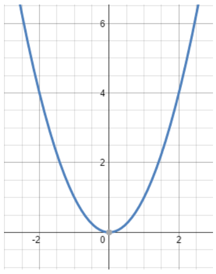


הגדרה: בהינתן שתי קבוצות: D, E, **פונקציה** היא כלל המתאים לכל איבר $x \in D$ איבר יחיד $y \in E$.

- $f: D \to E$, כאשר: D הינו **תחום/תחום ההגדרה**, $\to$ הינו כלל ההעתקה ו-E הינו הטווח.
- בדרך כלל, f נתונה ע"י נוסחה: $y = f(x)$, כאשר: $y \in E$ **התמונה** של x, ו-$x \in D$ **המקור**.
- $f(D) \subseteq E$ **התמונה** של f.

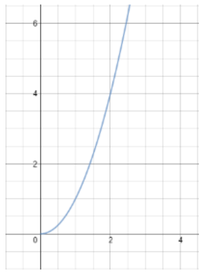
דוגמאות: 1. $f(x) = x + 2$ $\quad$ $f(D) = \mathbb{R}$ $\qquad$ 2. $f(x) = x^2$ $\quad$ $f(D) = \mathbb{R}_+$

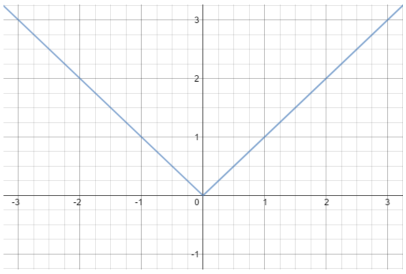




.3 $f(x) = x^2$ $D = \mathbb{R}_+$

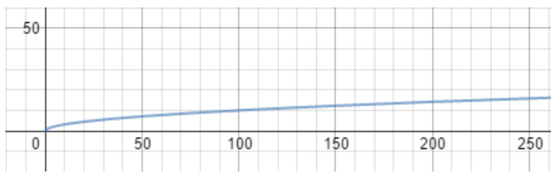
$f(x) = |x|$

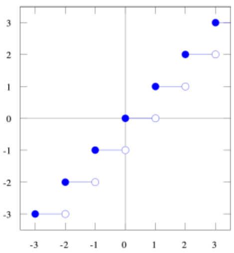




.4 $f(x) = \sqrt{x}$

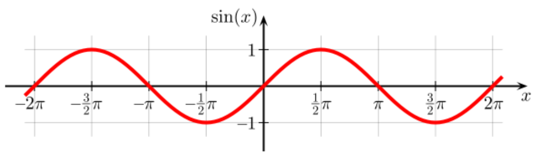
.5 $f(x) = [x]$ $f(D) = \mathbb{Z}$

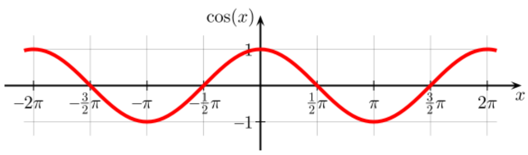




.6 $f(x) = \sin x$ $f(D) = [-1,1]$

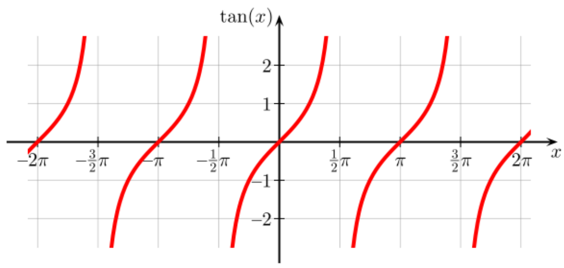
$f(x) = \cos x$

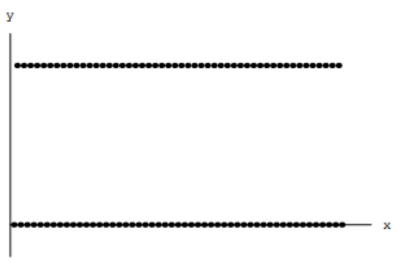




.7 $f(x) = \tan x$

.8 $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ פונקציית דירכלה





הגדרה: f נקראת **מונוטונית** בתחום D אם לכל $x_1, x_2 \in D$:

- **עולה:** $x_1 < x_2 \Leftarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- **עולה ממש:** $x_1 < x_2 \Leftarrow f(x_1) < f(x_2)$

- **יורדת:** $f(x_1) \ge f(x_2) \Leftarrow x_1 < x_2$
- **יורדת ממש:** $f(x_1) > f(x_2) \Leftarrow x_1 < x_2$

הגדרה:
- f נקראת **זוגית** אם לכל $x \in D$: $f(-x) = f(x)$.
- f נקראת **אי-זוגית** אם לכל $x \in D$: $f(-x) = -f(x)$.

הערה: $f(0) = 0$ בכל f אי-זוגית.

הגדרה: f נקראת **מחזורית** אם קיים P כך שלכל x : $f(x+P) = f(x)$.

הגדרה:
- f נקראת **חסומה מלמעלה** אם קיים M כך ש-$f(x) \le M$ לכל x.
- f נקראת **חסומה מלמטה** אם קיים m כך ש-$f(x) \ge m$ לכל x.
- f נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה ומלמטה.

תרגיל: הוכיחו : f חסומה $\Leftrightarrow$ קיים K כך ש-$|f(x)| \le K$ לכל $x \in D$.

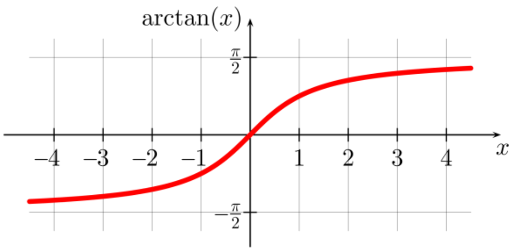
הגדרה:
- $\boldsymbol{\sup f}$ הינו $\sup\{f(x) | x \in D\}$, ו-$\boldsymbol{\max f}$ מוגדר להיות הסופרמום אם קיים x כך ש-$f(x) = \sup f$.
- $\boldsymbol{\inf f}$ הינו $\inf\{f(x) | x \in D\}$, ו-$\boldsymbol{\min f}$ מוגדר להיות האינפימום אם קיים x כך ש-$f(x) = \inf f$.

דוגמא: $f(x) = \arctan(x)$

$$\sup f = \frac{\pi}{2}$$

$$\inf f = -\frac{\pi}{2}$$

אך אין ל-f מקסימום/מינימום.



פעולות על פונקציות:

חיבור / חיסור: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

כפל: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

חילוק: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$

הרכבה: (התמונה של g צריכה להיות מוכלת בתחום של f) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

דוגמא: $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \sin x$: $(g \circ f)(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (f \circ g)(x) = \frac{1}{\sin x}$

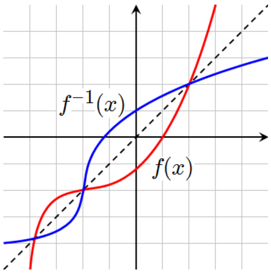
הגדרה: f נקראת **חד-חד-ערכית (חח"ע)** בתחום D אם : $f(x_1) \neq f(x_2) \Leftarrow x_1 \neq x_2$

(שקול: $x_1 = x_2 \Leftarrow f(x_1) = f(x_2)$)

הגדרה: $f: D \to E$ נקראת **על** E אם לכל $y \in E$ קיים $x \in D$ כך ש-$f(x) = y$.

(שקול: $f(D) = E$)

דוגמא: $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$ היא חח"ע ועל.



הגדרה: $f: D \to E$ נקראת **הפיכה** אם קיימת $f^{-1}: E \to D$ כך ש:
$f^{-1}(f(x)) = x$ ו- $f(f^{-1}(y)) = y$ לכל $x \in D$ ולכל $y \in E$.

- **גרף של f^{-1}:**

משפט: f הפיכה $\Leftrightarrow$ f חח"ע ועל.

הוכחה:

<u>$\Rightarrow$:</u> נתון f הפיכה, נוכיח f חח"ע ועל:

f חח"ע: אם $f(x_1) = f(x_2)$, אז $x_1 = f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2)) = x_2$.

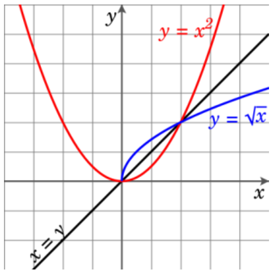
f על: ניקח $y \in E$. נגדיר: $x = f^{-1}(y)$ ו-$f(x) = f(f^{-1}(y)) = y$.

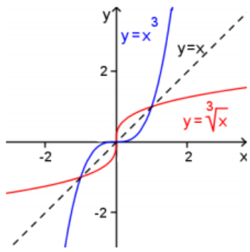
<u>$\Leftarrow$:</u> נתון f חח"ע ועל. נבנה f^{-1}:

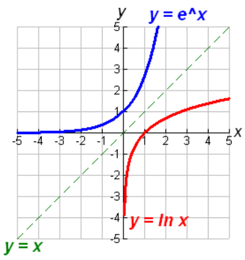
בהינתן $y \in E$ קיים $x \in D$ (כי f על) יחיד (כי f חח"ע) כך ש-$f(x) = y$.

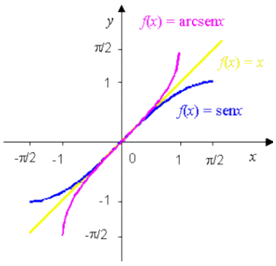
נגדיר: $f^{-1}(y) = x$, ואז: $f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$ $\quad f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ ∎

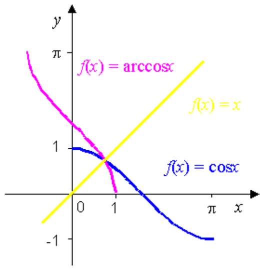
דוגמאות:

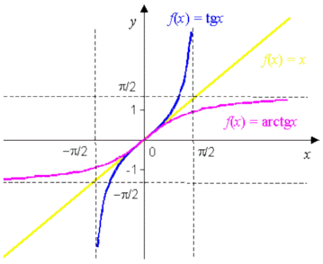
.1


.2


.3


.4


.5


.6


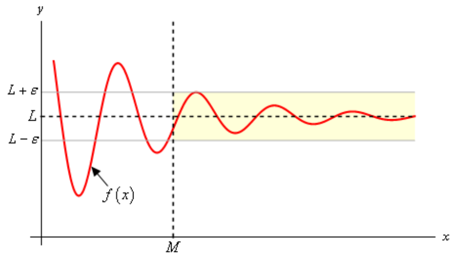
הגדרה: **פונקציה אלמנטרית** היא כל פונקציה שמתקבלת ממשפחות הפונקציות הבאות ע"י הפעולות: $\circ, \div, \cdot, -, +$.

- **פולינומים:** $p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
- **פונקציות רציונאליות:** $\frac{p(x)}{q(x)}$, כאשר $p(x), q(x) \neq 0$ פולינומים.
- **פונקציות טריגונומטריות:** $\sin x, \cos x, \tan x$.
- **פונקציות מעריכיות:** a^x, $0 < a \neq 1$.
- כל הפונקציות ההפוכות למשפחות הנ"ל: $\sqrt{x}$, $\sin^{-1} x$, $\log_a x$, וכו'.

הערה: פונקציות דיריכלה וערך שלם אינן פונקציות אלמנטריות.

שאלה: האם $|x|$ אלמנטרית?

הרצאות 28-29: גבול של פונקציה



הגדרה: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ (או $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} L$) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים M כך ש- $x > M$ $\Leftarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

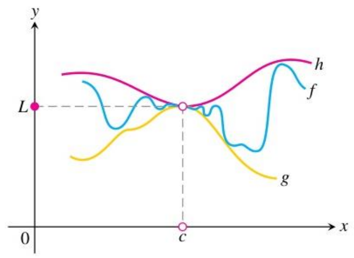
תרגילים: 1. הגדירו: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$

2. הראו לפי ההגדרה: $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

דוגמא: נוכיח לפי ההגדרה $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+2}{x^2+1} = 3$:

יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר: $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, ואז לכל $x > M$ מתקיים:

$$|f(x) - L| = \left|\frac{3x^2+2}{x^2+1} - 3\right| = \left|\frac{3x^2+2-3x^2-3}{x^2+1}\right| = \frac{1}{x^2+1} < \frac{1}{x^2} < \varepsilon$$



משפט: (הסנדוויץ') אם לכל $x > x_0$ מתקיים: $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ו- $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L$, אזי: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$

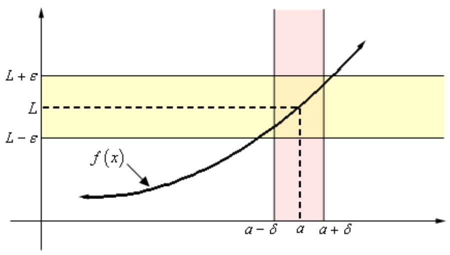
הוכחה:

יהי $\varepsilon > 0$.

קיים M_1 כך ש- $x > M_1$ $\Leftarrow h(x) < L + \varepsilon$.

קיים M_2 כך ש- $x > M_2$ $\Leftarrow L - \varepsilon < g(x)$.

נגדיר: $M = \max\{M_1, M_2, x_0\}$ ואז לכל $x > M$ מתקיים: $L - \varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < L + \varepsilon$ ■



הגדרה: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ (או $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L$) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $0 < |x - a| < \delta$ $\Leftarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

(**שקול:** $a - \delta < x < a + \delta$, $x \neq a$ $\Leftarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$)

הערה: f לא בהכרח מוגדרת ב-a עצמה.

דוגמאות: 1. נוכיח לפי ההגדרה $\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{2} = 1$:

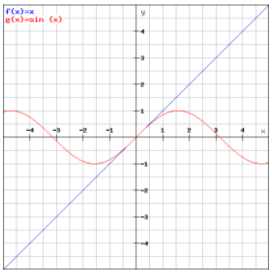
יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר: $\delta = 2\varepsilon$ ואז אם $0 < |x - 3| < \delta$, אז:

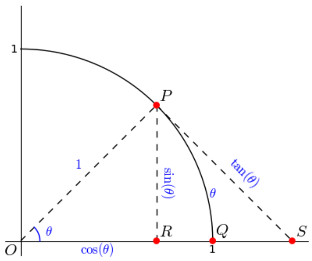
$$|f(x) - L| = \left|\frac{x-1}{2} - 1\right| = \left|\frac{x-1-2}{2}\right| = \frac{|x-3|}{2} < \frac{\delta}{2} = \frac{2\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. נוכיח לפי ההגדרה $\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$:

יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר: $\delta = \varepsilon$ ואז אם $0 < |x - a| < \delta$, אז:

$$|f(x) - L| = |\sin x - \sin a| = 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\left|\cos\frac{x+a}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \underbrace{\le}_{|\sin\alpha|\le|\alpha|} 2\left|\frac{x-a}{2}\right| = |x - a| < \delta = \varepsilon$$





הערה: $|\sin x| \le |x|$

הוכחה:

מספיק להוכיח $\sin x \le x$ עבור $0 \le x$.

עבור $\frac{\pi}{2} \le x$: $\sin x \le 1$.

עבור $0 < x < \frac{\pi}{2}$: תרשים.

3. $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$ נוכיח לפי ההגדרה:

יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר: $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\}$ ואז אם $0 < |x-3| < \delta$, אז:

$$|f(x) - L| = |x^2 - 9| = |x-3||x+3| \underbrace{\le}_{\delta \le 1} |x-3| \cdot 7 \underbrace{\le}_{\delta \le \frac{\varepsilon}{7}} \varepsilon$$

4. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $\delta = \min\{a, \varepsilon\sqrt{a}\}$, ואז אם $0 < |x-a| < \delta$, אז:

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\right| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} \le \frac{|x-a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

משפט: תהי f פונקציה אלמנטרית המוגדרת בסביבה של a, אזי: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

דוגמאות: 1. $\lim\limits_{x\to 0} \arctan\left(2\left(\frac{\cos x}{3x+4}\right)^{1/2}\right) = \frac{\pi}{4}$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} \ne \frac{1}{0}$, כי 0 אינו בתחום ההגדרה.

הרצאות 30-31: משפטי גבולות

משפט: **(יחידות הגבול)** אם קיים הגבול, אז הוא יחיד.

הוכחה:

נניח בשלילה שקיימים שני גבולות: $L < K$. ניקח $\varepsilon = \frac{K-L}{3}$.

קיים δ_1 כך ש- $0 < |x-a| < \delta_1 \Leftarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

קיים δ_2 כך ש- $0 < |x-a| < \delta_2 \Leftarrow K - \varepsilon < f(x) < K + \varepsilon$.

ניקח $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, ואז $0 < |x-a| < \delta \Leftarrow f(x) < L + \varepsilon < K - \varepsilon < f(x)$. סתירה. ■

משפט: אם קיים $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, אז f חסומה בסביבה נקובה של a.

הוכחה:

ניקח $\varepsilon = 1$. לפי הגדרת הגבול קיים δ כך שלכל x בסביבה הנקובה $0 < |x-a| < \delta$, מתקיים:

$L - 1 < f(x) < L + 1$, ולכן f חסומה בסביבה הזו. ■

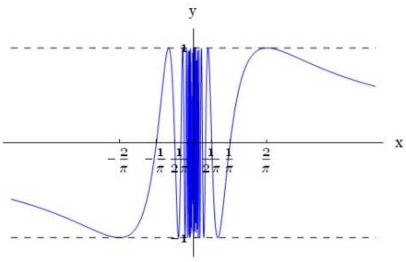
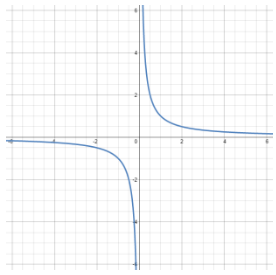
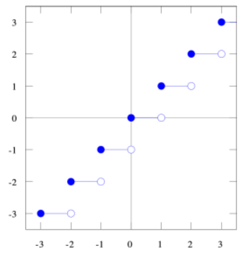
תרגיל: הראו שאם הגבול קיים וגם $f(a)$ קיים, אז f חסומה בסביבה של a .

דוגמאות: דוגמאות למקרים שבהם אין גבול:

1. $f(x) = [x]$

2. $f(x) = \frac{1}{x}$

3. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

משפט: אם קיים $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ו-$L > 0$, אזי קיימת סביבה נקובה של a שבה f חיובית.

משפט: (אריתמטיקה של גבולות) נניח כי $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ו- $\lim_{x\to a} g(x) = M$, אזי:

1. $C \cdot f(x) \xrightarrow[x\to a]{} C \cdot L$

2. $f(x) \pm g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \pm M$

3. $f(x) \cdot g(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \cdot M$

4. $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$, $g(x) \neq 0$ בסביבה)

הוכחה (1):

<u>אם $C = 0$:</u> הטענה מיידית.

<u>אם $C \neq 0$:</u> יהי $\varepsilon > 0$. ניקח δ כך ש- $0 < |x-a| < \delta \Leftarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|C|}$.

ולכן אם $0 < |x-a| < \delta$, אז:

$$|Cf(x) - CL| = |C(f(x) - L)| = |C||f(x) - L| < |C|\frac{\varepsilon}{|C|} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

הוכחה (3):

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $|M| < K$.

בנוסף קיים A כך ש-$|f(x)| < A$ עבור $0 < |x-a| < \delta_1$.

קיים δ_2 כך ש- $0 < |x-a| < \delta_2 \Leftarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

קיים δ_3 כך ש- $0 < |x-a| < \delta_3 \Leftarrow |g(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2A}$.

נגדיר: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, ואז $0 < |x-a| < \delta \Leftarrow$

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - LM| &\le |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| = |f(x)||g(x) - M| + |f(x) - L||M| \\ &< A|g(x) - M| + |f(x) - L|K < A\frac{\varepsilon}{2A} + \frac{\varepsilon}{2K}K = \varepsilon \quad \blacksquare\end{aligned}$$

משפט:
1. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \Leftrightarrow |f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} 0$
2. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \Rightarrow |f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |L|$

משפט:
1. אם $f(x) \ge 0$ ו-$\lim_{x\to a} f(x) = L$, אזי: $L \ge 0$

2. אם $f(x) \geq g(x)$ ו-$\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = K$, אזי: $L \geq K$

הערה: המשפט אינו נכון עם >.

דוגמא נגדית: $f(x) = x^2$, $a = 0$.

משפט: אם $g(x)$ חסומה ו-$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, אזי: $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

משפט: (הסנדוויץ') אם $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ו-$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, אזי: $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

משפט: (היינה) $\lim_{x\to a} f(x) = L$ $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$ מתקיים: $y_n = f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

הוכחה:

$\underline{\Leftarrow:}$ תהי $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$, צ"ל: $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$:

יהי $\varepsilon > 0$. קיים $\delta > 0$ כך ש- $0 < |x-a| < \delta$ $\Leftarrow$ $|f(x) - L| < \varepsilon$.

כיוון ש- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $0 < |x_n - a| < \delta$, ולכן: $|f(x_n) - L| < \varepsilon$.

$\underline{\Rightarrow:}$ נניח $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ (בין אם הגבול לא קיים, או קיים אבל שונה מ-L):

אזי קיים $\varepsilon_0 > 0$ שלכל $\delta > 0$ יש x כך ש- $0 < |x-a| < \delta$ אבל $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$.

לכן לכל n קיים x_n כך ש- $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ אבל $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0$.

בנינו סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$ אבל $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq L$ ■

שימושים למשפט היינה:

1. הוכחת משפטים על גבולות של פונקציות בהסתמך על המשפטים המקבילים לסדרות.
2. להראות שגבול של פונקציה אינו קיים.
3. חישוב גבול של סדרה בעזרת גבול של פונקציה.

דוגמאות:

1. **הוכחת המשפט:** אם $\lim_{x\to a} f(x) = L$ ו- $\lim_{x\to a} g(x) = M$, אזי: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{L}{M}$ ($M \neq 0$, $g(x) \neq 0$ בסביבה):

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ $\Leftarrow$ לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$ מתקיים: $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

$\lim_{x\to a} g(x) = M$ $\Leftarrow$ לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$ מתקיים: $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} M$.

לפי גבול של מנה (לסדרות), לכל $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$ מתקיים: $\frac{f(x_n)}{g(x_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{L}{M}$.

לכן לפי היינה ($\Rightarrow$): $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{L}{M}$ ■

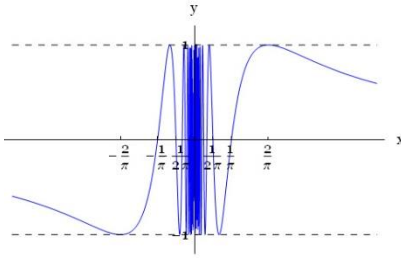
2. **הוכחת המשפט:** אם $g(x)$ חסומה ו-$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, אזי: $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$:

$\lim_{x\to a} f(x) = 0$ $\Leftarrow$ לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$ מתקיים: $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

לכן לפי המשפט המקביל בסדרות, לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ $a \neq$ מתקיים: $f(x_n)g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

לכן לפי היינה ($\Rightarrow$): אם $g(x)$ חסומה ו-$\lim_{x\to a} f(x) = 0$, אזי: $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$ ■

3. נראה שהגבול $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ אינו קיים:



$$0 \neq y_n = \frac{1}{2\pi n - \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad 0 \neq x_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} \equiv -1 \xrightarrow[n\to\infty]{} -1 \qquad f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} \equiv 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

הרצאה 32: גבולות חד-צדדיים

הגדרה: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L}$ (x שואף ל-a מימין) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $x \in (a, a+\delta) \Leftarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L}$ (x שואף ל-a משמאל) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $x \in (a-\delta, a) \Leftarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

תרגיל: הוכיחו: $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$

דוגמא: $f(x) = [x]$: $\lim\limits_{x\to 2^+} [x] = 2 \neq 1 = \lim\limits_{x\to 2^-} [x]$

משפט: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ שני הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים.

הוכחה:

$\Leftarrow$: יהי $\varepsilon > 0$. קיים δ כך שלכל $a \neq x \in (a-\delta, a+\delta)$ מקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$.

בפרט: $x \in (a, a+\delta)$ מקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$ ולכן L גבול מימין,

$x \in (a-\delta, a)$ מקיים $|f(x) - L| < \varepsilon$ ולכן L גבול משמאל.

$\Rightarrow$: רעיון ההוכחה: ניקח $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ כך ש-$x \in (a-\delta_1, a)$ או $x \in (a, a+\delta_2) \Leftarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. ■

הערות:

1. למשפטים כמו אריתמטיקה, יחידות הגבול, סנדוויץ', חסומה כפול שואפת לאפס, וכו' – יש גרסאות חד-צדדיות.
2. אם אחד הגבולות החד-צדדים לפחות לא קיים או שהגבולות החד-צדדים שונים, אז אין גבול.

משפט: אם f מונוטונית בקטע I אז יש ל-f גבולות חד-צדדים בכל נקודה פנימית בקטע.

הוכחה:

תהי $x_0 \in I$ נקודה פנימית. נניח בה"כ ש-f עולה ונראה שיש לה גבול מימין ב-x_0.

נגדיר: $L = \inf\{f(x) | x > x_0\}$. כיוון ש-$f$ מוגדרת ב-x_0, הקבוצה הנ"ל חסומה מלמטה, ולכן L קיים.

יהי $\varepsilon > 0$. נראה שקיימת סביבה ימנית של x_0 שבה $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, כלומר L הוא הגבול מימין ב-x_0.

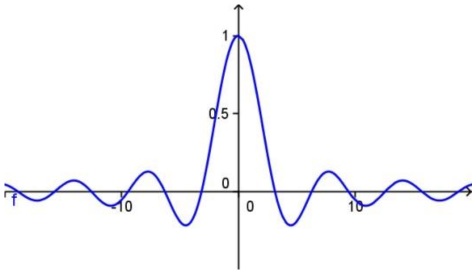
נגדיר: $\delta = x_1 - x_0$, ואז לכל $x \in (x_0, x_0+\delta)$: $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

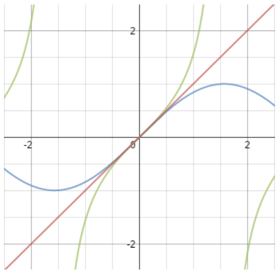
הסבר: $L - \varepsilon < f(x)$ נכון לכל $x > x_0$, כי לכל $x > x_0$: $L - \varepsilon \leq L \leq f(x)$.

$f(x) < L + \varepsilon$ $L + \varepsilon$ אינו חסום מלמטה של $\{f(x) | x > x_0\}$.

לכן קיים $x_1 > x_0$ כך ש-$f(x_1) < L + \varepsilon$. ■

כיוון ש-f עולה, לכל $x_0 < x < x_1$ מתקיים: $f(x) \le f(x_1) < L + \varepsilon$





דוגמא: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

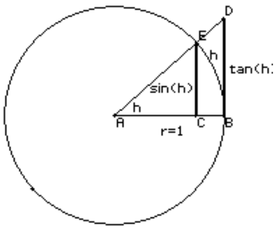
הערה: לאף x לא מתקיים $\frac{\sin x}{x} = 1$

הוכחה:

נראה שלכל $0 < x < \frac{\pi}{2}$

מתקיים: $\sin x < x < \tan x$

$$S_{\triangle} = \frac{\tan x}{2} \qquad S_{\triangleleft} = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi = \frac{x}{2}$$



$$\sin x < x < \tan x \qquad (0 < x < \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sin x} > \frac{1}{x} > \frac{1}{\tan x}$$

$$\Rightarrow \text{נכפול ב-}\sin x \qquad 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$$

ולכן ע"פ משפט הסנדוויץ' על הביטוי, הקצוות שואפים ל-1 כאשר $x \to 0^+$, ולכן: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$

תרגיל: הראו: $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1$

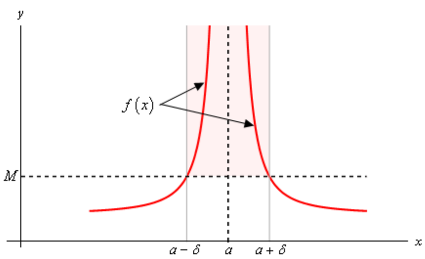
הרצאה 33: גבולות במובן הרחב, תנאי קושי

דוגמא: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n \sin\frac{1}{n}\right) = 1$ חישוב גבול של סדרה באמצעות משפט היינה:

יודעים כי $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. נגדיר: $x_n = \frac{1}{n}$, אזי: $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} x_n \neq 0$, לפי היינה $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, לכן:

$$n \sin\frac{1}{n} = \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

הגדרה: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \infty$ אם לכל M קיים $\delta > 0$ כך ש-$0 < |x-a| < \delta \Leftarrow f(x) > M$.

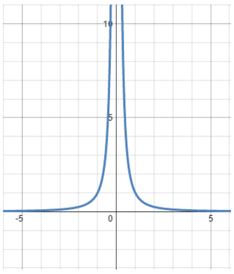


הערה:

המשפטים עבור גבולות סופיים **אינם** בהכרח תקפים לגבולות אינסופיים.

- כן תקף: $"\infty + \infty"$, $"\infty \cdot \infty"$, $"L \cdot \infty"$ $(L \neq 0)$.
- לא תקף: $"1^\infty"$, $"\infty - \infty"$, ועוד.

תרגילים: הגדירו: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \infty$, ועוד.



דוגמאות: 1. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$:

יהי $M>0$. נגדיר: $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$, ואז אם: $0<|x-0|<\delta$, אז: $-\frac{1}{\sqrt{M}}<x<\frac{1}{\sqrt{M}}$,

ולכן $x^2<\frac{1}{M}$, כלומר $\frac{1}{x^2}>M$.

2. "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$\frac{x^2-1}{3x^3}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{3}\xrightarrow[x\to\infty]{}\frac{1}{3}$$

3. "$0\cdot\infty$"

$$x^2\cdot\frac{1}{x^2}=1\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

משפט: **(הפיצה)** אם $f(x)\leq g(x)$ בסביבה מנוקבת של a, ו-$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$, אזי: $\lim_{x\to a}g(x)=\infty$.

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה נקובה של a. נאמר ש-f מקיימת **תנאי קושי** אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-
$0<|x-a|<\delta$ וגם $0<|y-a|<\delta \Leftarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

משפט: $\lim_{x\to a}f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ f מקיימת תנאי קושי ב-a.

הוכחה:

$\underline{\Leftarrow:}$ נסמן $\lim_{x\to a}f(x)=L$. יהי $\varepsilon>0$. ניקח δ המתאים ל-$\frac{\varepsilon}{2}$ בהגדרת הגבול.

אם $0<|x-a|<\delta$ וגם $0<|y-a|<\delta$, אזי:

$$|f(x)-f(y)|\leq|f(x)-L|+|L-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\underline{\Rightarrow:}$ תהי $a\neq x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$. יהי $\varepsilon>0$. תהי $\delta>0$ מתנאי קושי.

קיים N כך שלכל $m,n>N$ מתקיים: $0<|x_n-a|<\delta$ ו-$0<|x_m-a|<\delta$.

לכן $|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$. לכן $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, ולכן היא מתכנסת. נסמן: $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=L$.

ניקח x_n שמקיים: 1. $|f(x_n)-L|<\frac{\varepsilon}{2}$ (קיים כי $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}L$)

2. $0<|x-a|<\delta$, $0<|x_n-a|<\delta \Leftarrow |f(x)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon}{2}$

ולכן: $|f(x)-L|\leq|f(x)-f(x_n)|+|f(x_n)-L|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$ ■

הרצאה 34: <u>רציפות</u>

הגדרה: f נקראת **רציפה בנקודה a** אם $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$

(שקול: f **רציפה בנקודה a** $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש- $0<|x-a|<\delta \Leftarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

(שקול: f **רציפה בנקודה a** $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}a$ מתקיים: $f(x_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}f(a)$.

משפט: כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה.

רעיון ההוכחה:

- מראים שנציגות מהמשפחות האלמנטריות הן רציפות.
- מראים אריתמטיקה (נובע מיידית מאריתמטיקה של גבולות).
- מראים שהרכבה של רציפות, היא רציפה.

משפט: אם g רציפה ב-a ו-f רציפה ב-$g(a)$, אזי $f\circ g$ רציפה ב-a.

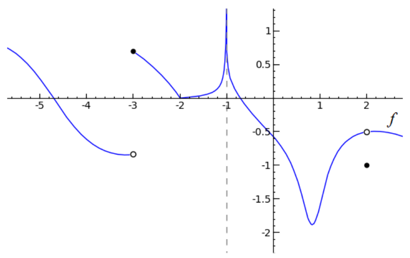
הוכחה:

g רציפה ב-a ולכן לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים: $g(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} g(a)$.

f רציפה ב-$g(a)$, ולכן: $f\big(g(x_n)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{} f\big(g(a)\big)$.

כלומר, לכל $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$: $(f\circ g)(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f\cdot g)(a)$

■



סוגי נקודות אי-רציפות:

0. **סליקה:** הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים, אבל לא שווה ל-$f(a)$.

   דוגמא: $\frac{\sin x}{x}$ ב-$a=0$

1. **קפיצה:** שני הגבולות החד-צדדיים קיימים, אבל שונים.

   דוגמא: $[x]$ בכל $a\in\mathbb{Z}$

2. **עיקרית:** לפחות אחד הגבולות החד-צדדיים אינו קיים.

   דוגמאות: $\frac{1}{x}$ ב-$a=0$, $\sin\frac{1}{x}$ ב-$a=0$

משפט: לפונקציה מונוטונית ייתכנו נקודות אי-רציפות רק מסוג קפיצה (בנקודה פנימית לקטע בו f מוגדרת).

רעיון ההוכחה:

- מראים שלא תיתכן אי רציפות סליקה.
- מראים שלא תיתכן אי-רציפות עיקרית (כבר הוכחנו – לפונקציה מונוטונית יש גבולות חד-צדדיים בכל נקודה).

הגדרה:

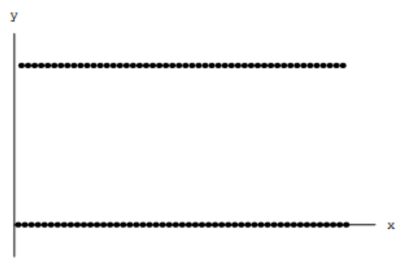
- f **רציפה מימין** בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.
- f **רציפה משמאל** בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.

הגדרה: f **רציפה בקטע** $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ אם היא רציפה בכל $x_0\in(a,b)$.

הגדרה: f **רציפה בקטע** $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$ אם היא רציפה ב-(a,b), ובנוסף רציפה מימין ב-a ורציפה משמאל ב-b.

דוגמאות:

1. $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ,x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ פונקצית דיריכלה



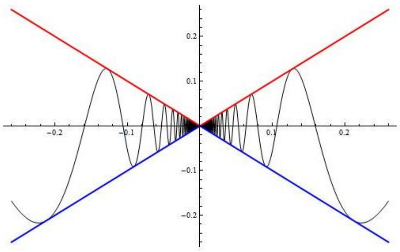
טענה: f לא רציפה באף נקודה, ואפילו אין לה גבול באף נקודה.

דרכים להוכחה:

1. לפי הגדרת $\varepsilon-\delta$ של הגבול.
2. לפי קריטריון קושי.
3. לפי סדרות: בהינתן a נבנה שתי סדרות:

- $\mathbb{Q}\ni x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, ואז: $f(x_n)=1\xrightarrow[n\to\infty]{}1$
- $\mathbb{Q}\not\ni y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, ואז: $f(y_n)=0\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

2. **טענה:** אם f מקיימת $|f(x)| \le |x|$ לכל x, אזי f רציפה ב-0.



הוכחה:

$|f(0)| \le |0| \Leftarrow f(0) = 0$. נראה: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

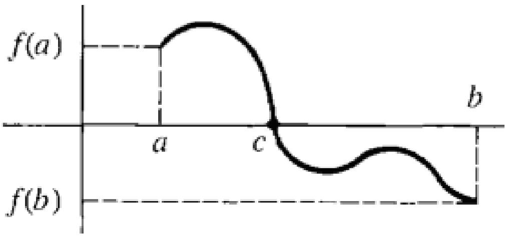
יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר $\delta = \varepsilon$, ואז אם $|x-0| < \delta$, אז:

$$|f(x) - 0| = |f(x)| \le |x| = |x - 0| < \varepsilon$$

3. $f(x) = \begin{cases} x & ,x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ,x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ f לא רציפה באף נקודה $a \neq 0$, אבל f רציפה ב-0 (כי מקיימת $|f(x)| \le |x|$ לכל x).

הרצאה 35: משפט ערך הביניים

משפט: **(מקרה פרטי של משפט עה"ב)** תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה.
אם ל-$f(a)$ ול-$f(b)$ יש סימנים הפוכים, אזי קיימת $a < c < b$ כך ש-$f(c) = 0$.



הוכחה:

בה"כ $f(a) < 0$ ו-$f(b) > 0$.

נסמן את הקטע הסגור $[a_1, b_1]$. נסמן את אמצעו ב-e_1, בה"כ $e_1 > 0$.
נסמן את הקטע הסגור $[a_1, e_1]$. נסמן את אמצעו ב-e_2, בה"כ $e_2 < 0$.
נסמן את הקטע הסגור $[e_2, e_1]$. נסמן את אמצעו ב-e_3, וכו'.
נקבל סדרה של קטעים $[a_n, b_n]$ שמקיימים את תנאי הלמה של קנטור.
לכן קיימת c יחידה כך ש-$b_n \le c \le a_n$ לכל n. נראה $f(c) = 0$:

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c\text{ ,}f\text{ רציפה} \Leftarrow f(a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c) \Leftarrow 0 > f(a_n) \Rightarrow f(c) \le 0$$

$$\Leftarrow f(c) = 0$$

$$b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} c\text{ ,}f\text{ רציפה} \Leftarrow f(b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(c) \Leftarrow 0 < f(b_n) \Rightarrow f(c) \ge 0$$

■

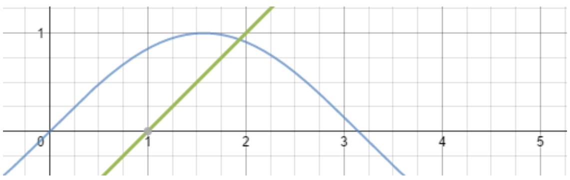
הערה: הוכחה זו היא למעשה אלגוריתם למציאת שורשים של פונקציה, שנקרא **"שיטת החצייה"**.

דוגמאות:

1. לפולינום $x^5 - 4x + 1$ יש שורש בקטע $[0,1]$:
נגדיר: $p(x) = x^5 - 4x + 1$.

$$\begin{matrix} p(0) = 1 > 0 \\ p(1) = -2 < 0 \end{matrix} \Rightarrow$$ $p(x)$ פונקציה רציפה, ולכן לפי המשפט הקודם קיימת c כך ש-$f(c) = 0$.

2. למשוואה $\sin x = x - 1$ יש פתרון:
נגדיר: $f(x) = \sin x - x + 1$

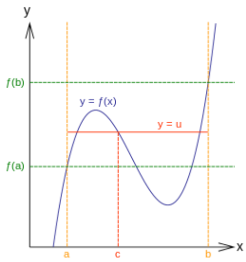


$f(0) = 1 > 0$ $\qquad$ $f(2\pi) = -2\pi + 1 < 0$

$\Leftarrow$ $f(x)$ פונקציה רציפה, ולכן לפי המשפט הקודם
קיימת c כך ש-$f(c) = 0$, ולכן c פותר את המשוואה.

תרגיל: הוכיחו: לכל פולינום ממעלה אי-זוגית מעל $\mathbb{R}$ יש שורש ממשי.

משפט: **(ערך הביניים / ע"ב)** תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה, ויהי y_0 מספר בין $f(a)$ ל-$f(b)$.
אזי קיים $a < x_0 < b$ כך ש-$f(x_0) = y_0$.



הוכחה:

נניח בה"כ $f(a) < y_0 < f(b)$.

נגדיר: $g(x) = f(x) - y_0$ רציפה.

$$g(a) = f(a) - y_0 < 0 \qquad\qquad g(b) = f(b) - y_0 > 0$$

ולכן לפי המקרה הפרטי, קיים x_0 כך ש-$g(x_0) = 0$, כלומר: $g(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) - y_0 = 0 \Rightarrow f(x_0) = y_0$ ■

הרצאה 36: משפט ויירשטראס (ומסקנות מהמשפט)

משפט: **(ויירשטראס)** תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי:

1. f חסומה.
2. f מקבלת מינימום ומקסימום.

הוכחה (1):

נניח בשלילה ש-f לא חסומה, בה"כ לא חסומה מלמעלה.

לכל n קיים $a \le x_n \le b$ כך ש-$f(x_n) > n$.

הסדרה $\{x_n\}$ חסומה, לכן לפי BW יש לה תת-סדרה מתכנסת: $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $a \le x_0 \le b$.

f רציפה, ולכן $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$.

זו סתירה כי $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$, ולכן גם $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$.

הוכחה (2):

לפי (1), f חסומה, לכן קיים $M = \text{Sup}\{f(x) | a \le x \le b\}$.

נראה שקיימת נקודה $x_0 \in [a,b]$ כך ש-$f(x_0) = M$:

M סופרמום, ולכן לכל n קיים $a \le x_n \le b$ כך ש-$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$.

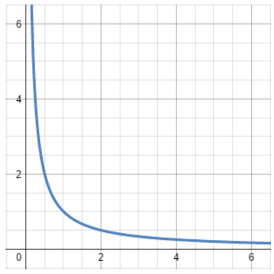
הסדרה $\{x_n\}$ חסומה, ולכן לפי BW יש לה תת-סדרה מתכנסת: $x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $a \le x_0 \le b$.

f רציפה, ולכן $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$.

מצד שני, $M \xleftarrow[k\to\infty]{} M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M \xrightarrow[k\to\infty]{} M$, ולכן לפי משפט הסנדוויץ', $f(x_{n_k}) \xrightarrow[k\to\infty]{} M$.

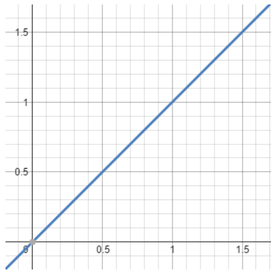
מיחידות הגבול: $M = f(x_0)$ ■

דוגמאות: 1. $f(x)=\frac{1}{x}$



רציפה ב-$(0,1)$,
אבל לא חסומה.

2. $f(x)=x$



חסומה ורציפה ב-$(0,1)$,
אבל אין לה מינימום/
מקסימום.

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי התמונה של f היא קטע סגור.

הוכחה:

f מקבלת מינימום שנסמנו m ומקסימום שנסמנו M.

לכן לפי משפט ערה״ב, f מקבלת כל ערך בין m ל-M , ולכן התמונה של f היא $[m,M]$. ■

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית.

f רציפה $\Leftrightarrow$ התמונה של f היא קטע סגור.

רעיון ההוכחה:

$\Leftarrow$: זה המשפט הקודם.

$\Rightarrow$: ל-f מונוטונית ייתכנו רק אי-רציפויות מסוג קפיצה. אבל אז התמונה לא יכולה להיות קטע סגור.

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית ממש, אזי f הפיכה, ו-f^{-1} גם רציפה ומונוטונית ממש.

רעיון ההוכחה:

ממשפטים קודמים, $f:[a,b]\to[c,d]$ חח״ע ועל.

מראים ש-f^{-1} מונוטונית, ולכן היא רציפה לפי המשפט הקודם.

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה וחח״ע, אזי f מונוטונית ממש.

תרגילים:

1. נתון כי f מקיימת: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש-$|x-a|<\varepsilon \Leftarrow |f(x)-f(a)|<\delta$.
   א. האם f רציפה ב-a?
   ב. איזו תכונה של f מבטא התנאי הנ״ל?

2. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, ונתון שקיימים: $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
   א. האם f חסומה?
   ב. האם f מקבלת מינימום ומקסימום?

הרצאה 37: רציפות במידה שווה

הגדרה: $f(x)$ תיקרא **רציפה במידה שווה (במ״ש)** בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in D$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

אינטואיציה: אם ל-f יש ״תלילות חסומה״, אזי f רציפה במ״ש.

הערה: ההיפך אינו נכון.

משפט: אם f רציפה במ"ש ב-D, אזי f רציפה ב-D.

הוכחה:

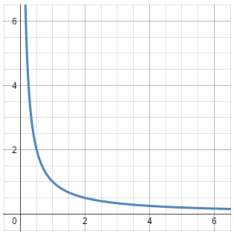
תהי $a \in D$ ונראה ש-f רציפה ב-a:

f רציפה במ"ש, ולכן לפי ההגדרה לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש-$|x-a| < \delta$ ⇐ $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$ ■

דוגמאות:

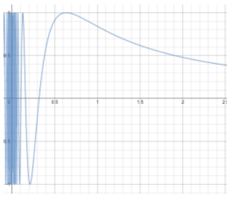
1. $f(x) = \frac{1}{x}$

לא רציפה במ"ש ב-$(0,1)$



2. $f(x) = \sin\frac{1}{x}$

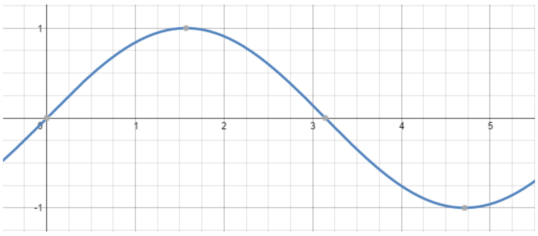
לא רציפה במ"ש ב-$(0,1)$



3. $f(x) = \sin x$

רציפה במ"ש ב-$\mathbb{R}$:

יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $\delta = \varepsilon$, ואז אם $|x-y| < \delta$, אז:



$$|\sin x - \sin y| = 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\left|\cos\frac{x+y}{2}\right| \le 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| \le 2\frac{|x-y|}{2} < \varepsilon$$

משפט (קנטור-היינה) אם f רציפה ב-$[a,b]$, אזי היא רציפה במ"ש.

הוכחה:

נניח בשלילה ש-f לא רציפה במ"ש.

אזי קיים $\varepsilon_0 > 0$ כך שלכל n קיימים $x_n', x_n'' \in [a,b]$ המקיימים: $|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}$ אבל $|f(x_n') - f(x_n'')| \ge \varepsilon_0$.(⋆)

נתבונן בסדרה $\{x_n'\}$: זו סדרה חסומה, לכן לפי BW יש לה תת-סדרה מתכנסת: $x_{n_k}' \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$, $x_0 \in [a,b]$.

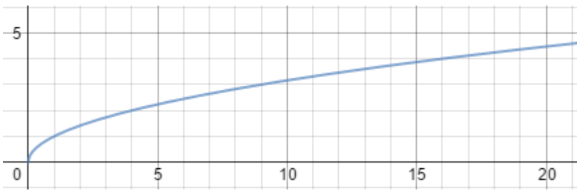
לכל k מתקיים $\left|x_{n_k}' - x_{n_k}''\right| < \frac{1}{n_k}$, כלומר:

$$x_{n_k}' - \frac{1}{n_k} < x_{n_k}'' < x_{n_k}' + \frac{1}{n_k}$$

שתי קצוות הביטוי שואפים ל-x_0 כאשר $k \to \infty$, ולכן לפי משפט הסנדוויץ': $x_{n_k}'' \xrightarrow[k\to\infty]{} x_0$.

f רציפה, ולכן: $f(x_{n_k}') \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$, $f(x_{n_k}'') \xrightarrow[k\to\infty]{} f(x_0)$ ⇐ $f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'') \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$, וזו סתירה ל-(⋆) ■

דוגמא: $f(x) = \sqrt{x}$ f רציפה במ"ש ב-$[0,1]$ (לפי קנטור-היינה), למרות ש"ההתלילות לא חסומה".



הרצאה 38: <u>הנגזרת</u>

מוטיבציה: 1. **מוטיבציה מפיזיקה:**

מיקום הגוף בזמן t הוא $f(t)$.

מהירות ממוצעת: $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}=\frac{\text{דרך}}{\text{זמן}}$ מהירות רגעית: $\lim_{t\to t_0}\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$

2. מוטיבציה מגיאומטריה:

שיפוע המיתר העובר בין $(x_0,f(x_0))$ לבין $(x_0+h,f(x_0+h))$: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

"שיפוע הגרף" בנקודה x_0: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

הגדרה: נאמר ש-f **גזירה** בנקודה x_0 אם קיים הגבול: $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

מסמנים גבול זה ע"י $f'(x_0)$ או $\frac{df}{dx}$ וקוראים לו **הנגזרת** של f ב- x_0.

(שקול:) מסמנים $h=x-x_0$ ואז הגבול בהגדרה הוא: $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

הגדרה: אם ל-f יש נגזרת ב-x_0, אז הישר שעובר דרך $(x_0,f(x_0))$ ששיפועו $f'(x_0)$ נקרא **המשיק** לגרף של f בנקודה x_0.

משוואת המשיק: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$:

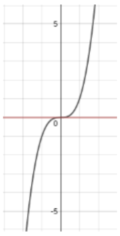
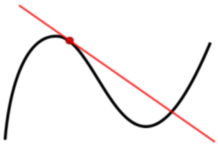
$$y=ax+b\Rightarrow f(x_0)=f'(x_0)x_0+b\Rightarrow b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$$

$$\Rightarrow y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

הערה:

משיק הוא לא בהכרח ישר דרך הנקודה שלא חותך את הגרף,

וזה אפילו לא נכון בסביבת הנקודה:

דוגמאות:

1. $f(x)=c$ $\quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{c-c}{x-x_0}=0$ $\quad\Rightarrow f'(x)=0$

2. $f(x)=x$ $\quad f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{x-x_0}{x-x_0}=1$ $\quad\Rightarrow f'(x)=1$

3. $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad (x>0)$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x_0+h-x_0}{h\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

4. $f(x)=\sin x$

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x_0+h)-\sin(x_0)}{h}\underset{\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{=}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}\cdot\cos\frac{2x_0+h}{2}}{\frac{h}{2}}=\lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{\xrightarrow[h\to 0]{}1}\cdot\cos\frac{2x_0+h}{2}\right)=\cos x_0\quad\Rightarrow f'(x)=\cos x$$

תרגיל: $f(x) = \ln x$ $(x > 0)$, הראו: $f'(x) = \frac{1}{x}$

הרצאה 39: כללי גזירה

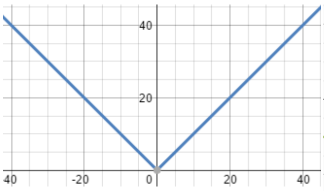
משפט: אם f גזירה ב-x_0, אזי f רציפה ב-x_0.

הוכחה:

$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x - x_0) \xrightarrow[x \to x_0]{} 0 \Leftarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ולכן ע"פ ההגדרה, f רציפה ב-x_0. ■

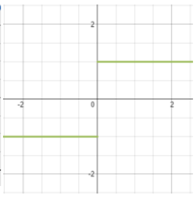
מסקנה: אם f לא רציפה ב-x_0, אזי היא לא גזירה ב-x_0, אולם ההיפך אינו נכון.

דוגמא: $f(x) = |x|$ בנקודה $x_0 = 0$:



$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

וגבול זה אינו קיים:



ולכן $|x|$ לא גזירה ב-0 (בנקודה זו יש "שפיץ").

אינטואיציה: לפונקציה גזירה אין "שפיצים", ולכן קוראים לפונקציה גזירה גם **"פונקציה חלקה"**.

הגדרה:

- f **גזירה מימין** ב-x_0 אם קיים הגבול: $$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- f **גזירה משמאל** ב-x_0 אם קיים הגבול: $$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

משפט: **(כללי גזירה)** אם f ו-g גזירות ב-x_0, אזי:

1. $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x)}$ בתנאי ש-$g(x_0) \neq 0$

הוכחה (3):

$$\frac{f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)}{h}$$
$$=\frac{1}{h}\cdot\big(f(x_0+h)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0+h)+f(x_0)g(x_0+h)-f(x_0)g(x_0)\big)$$
$$=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0+h)+f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g_{(x_0)}}{h}$$
$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

■

משפט: f גזירה ב- x_0 $\Leftrightarrow$ קיים $A\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\alpha(h)h$ כאשר $\alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$.

הוכחה:

$\Rightarrow$: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=A+\alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{}A$ (ובפרט $f'(x_0)=A$)

$\Leftarrow$: נסמן: $f'(x_0)=A$, אזי: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{}A$ $\Leftarrow$ $\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-A}_{\text{נסמן } \alpha(h)}\xrightarrow[h\to 0]{}0$

ואז: $\alpha(h)h=f(x_0+h)-f(x_0)-Ah$

■

דוגמא: $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$: $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x+\sin x\cdot\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

הרצאה 40: כלל השרשרת

משפט: (כלל השרשרת) אם f גזירה ב-x_0 ו-g גזירה ב-$f(x_0)$, אזי:

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot\underbrace{f'(x_0)}_{\text{הנגזרת הפנימית}}$$

הוכחה:

סימונים:

$y_0=f(x_0)$

$\Delta x=h$

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

$$\Delta z=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g\big(f(x_0)+f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)-g\big(f(x_0)\big)$$
$$=g\big(f(x_0+\Delta x)\big)-g\big(f(x_0)\big)$$

הערה: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$: f גזירה ולכן רציפה ב-x_0, לכן $\Delta x\to 0 \Leftarrow \Delta y\to 0$,

ובנוסף: $\frac{\Delta y}{\Delta x}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}f'(x_0)$

רוצים להראות:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$$

$f(x)$ גזירה ב-x_0 $\Leftarrow$ $\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x)\cdot\Delta x$ כאשר $\beta(\Delta x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$

$g(y)$ גזירה ב-y_0 $\Leftarrow$ $\Delta z=g'(y_0)\cdot\Delta y+\alpha(\Delta y)\cdot\Delta y$ כאשר $\alpha(\Delta y)\xrightarrow[\Delta y\to 0]{}0$

לכן:

$$\Delta z = g'\big(f(x_0)\big)\cdot\big(f'(x_0)\cdot\Delta x+\beta(\Delta x)\cdot\Delta x\big)+\alpha(\Delta y)\cdot\Delta y$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)+g'\big(f(x_0)\big)\beta(\Delta x)+\alpha(\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\beta(\Delta x)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$, $\alpha(\Delta y)\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}0$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}f'(x_0)$, לכן:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}\xrightarrow[\Delta x\to 0]{}g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$$ ■

דוגמאות:

1. $(\sin(x^2))' = \cos(x^2)\cdot(2x)$
2. $((\sin x)^2)' = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$
3. $\left(\sqrt{\sin(e^x)}\right)' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sin(e^x)}}\cdot\cos(e^x)\cdot e^x$

תרגיל: הוכיחו את כלל השרשרת לפי הגדרת הנגזרת בעזרת סדרות.

זה הגבול שצריך: $\lim_{x\to x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}$, כלומר לכל $x \neq x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$ $\lim_{n\to\infty} = \frac{g(f(x_n))-g(f(x_0))}{x_n-x_0}$

הרצאה 41: נגזרת של פונקציה הפוכה

משפט: (נגזרת של פונקציה הפוכה) תהי $y=f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבה של x_0, גזירה בנקודה x_0 ו-$f'(x_0)\neq 0$, אזי גם $x=f^{-1}(y)$ גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ו- $(f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$.

בסימני לייבניץ: $y=f(x)$, $z=g(y)=g\big(f(x)\big)$:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

הוכחה:

לפי משפט קודם, אם f רציפה וחח"ע, אז יש f^{-1} רציפה.

לכן כאשר $y\to y_0$, $f^{-1}(y)\to f^{-1}(y_0)$, כלומר: $x\to x_0$, ולכן:

$$\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{1}{\frac{y-y_0}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}=\frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y))-f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}}=\frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}\xrightarrow[y\to y_0]{}\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$$ ■

הערות:

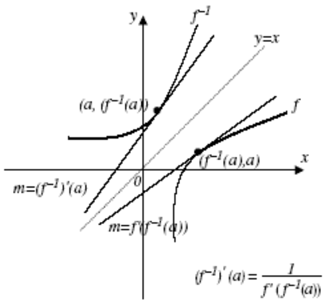
1. אילו ידענו ש-f^{-1} גזירה, אז:

$$1=(x)'=\left(f^{-1}\big(f(x)\big)\right)'\underbrace{=}_{\text{כלל השרשרת}}(f^{-1})'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)\ \Rightarrow\ (f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

2. אם $y=f(x)$ ו-$x=f^{-1}(y)$, אז (בסימני לייבניץ):

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

3. גיאומטרית:



דוגמאות:

1. $y=f(x)=\operatorname{lan}x \quad (x>0)$

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

$$x=f^{-1}(y)=e^{y}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y)=(e^{y})'=\frac{1}{(\operatorname{lan}x)'}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x=e^{y}$$

2. $y=f(x)=\sin x \quad \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(x)=\cos x \quad (\text{בתחום } \neq 0)$$

$$x=f^{-1}(y)=\arcsin y \quad (-1<y<1)$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y)=(\arcsin y)'=\frac{1}{(\sin x)'}=\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{\sqrt{1-(\sin x)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

3. $f(x)=x^{\alpha} \; (\alpha\in\mathbb{R}\ ,\ 0<x)$

$$f(x)=x^{\alpha}=e^{\operatorname{lan}x^{\alpha}}=e^{\alpha\operatorname{lan}x}$$

$$f'(x)=(x^{\alpha})'=\left(e^{\operatorname{lan}x^{\alpha}}\right)'=e^{\alpha\operatorname{lan}x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$$

תרגיל: הראו: $(\arctan y)'=\dfrac{1}{1+y^2}$

כללי גזירה (מסדר גבוה):

1. $(f+g)^{(n)}=f^{(n)}+g^{(n)}$
2. $(c\cdot f)^{n}=c\cdot f^{(n)}$
3. $(fg)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}g^{(n-k)}$ (נוסחת לייבניץ)

הערה: $f^{(n)}(x)$ הינה הנגזרת ה-nית (מוסכמה: $f=f^{(0)}$).

דוגמא:

$$(x^2e^x)^{(9)}=\binom{9}{0}x^2e^x+\binom{9}{1}2xe^x+\binom{9}{2}2e^x=(x^2+18x+72)e^x$$

תרגיל: חשבו: $\left(\frac{x^2}{1-x}\right)^{n}$ (חשבו קודם: $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(n)}$)

הערה: f גזירה $\not\Rightarrow f'$ רציפה.

דוגמא: $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0 \\ 0 & ,x=0\end{cases}$

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\underbrace{x}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{חסום}}=0$$

$(x\neq 0)$
$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

$f'(x)$ מוגדרת לכל x, אבל f' לא רציפה ב-$x=0$ כי לא קיים: $\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$

ובפרט לא מתקיים: $\lim_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$.

מסקנה: f' לא בהכרח רציפה.

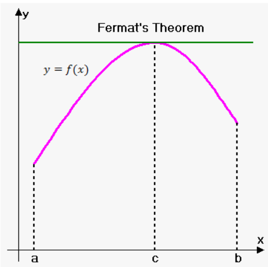
הרצאות 42-43: משפטי גזירות

הגדרה:
- x_0 תיקרא **מקסימום מקומי** של f אם לכל x בסביבה של x_0 מתקיים $f(x)\leq f(x_0)$.
- x_0 תיקרא **מינימום מקומי** של f אם לכל x בסביבה של x_0 מתקיים $f(x)\geq f(x_0)$.
- מינימום או מקסימום מקומי נקרא **קיצון מקומי**.
- אם x_0 מינימום/מקסימום בכל התחום, אז הוא נקרא מינימום/מקסימום **מוחלט**.

הגדרה: x_0 נקראת **נקודה קריטית (חשודה כקיצון)** אם $f'(x_0)=0$ או ש-$f'(x_0)$ לא קיימת (או ש-x_0 קצה של התחום).

הערות:

1. ייתכן $f'(x_0)=0$ אבל x_0 לא נקודת קיצון   **דוגמא:** $f(x)=x^3$ ב-$x=0$
2. ייתכן x_0 נקודת קיצון אבל $f'(x_0)\neq 0$ **דוגמא:** $f(x)=|x|$ ב-$x=0$ (שפיץ)



משפט: **(פרמה)** אם f גזירה ב-x_0, ו-x_0 היא קיצון מקומי של f בקטע (a,b), אזי $f'(x_0)=0$.

הוכחה:

נניח בה"כ ש-x_0 מקסימום מקומי.

f גזירה ב-x_0, ולכן קיים:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

<u>עבור $x>x_0$</u>

$x-x_0>0$

$f(x)-f(x_0)\leq 0$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$

<u>עבור $x<x_0$</u>

$x-x_0<0$

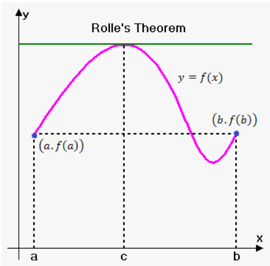
$f(x)-f(x_0)\leq 0$

$\Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0 \qquad\qquad \Rightarrow \lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$$

$$\Rightarrow f'(x_0)=0$$ ■

משפט: **(רול)** אם f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) ו-$f(a)=f(b)$,
אזי קיימת $a<c<b$ כך ש-$f'(c)=0$.



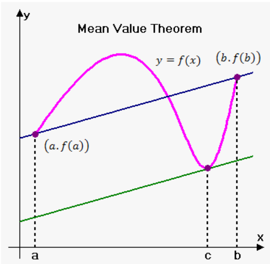
הוכחה:

f רציפה ב-$[a,b]$, לכן לפי BW יש לי מינימום שנסמנו m ומקסימום שנסמנו M.

אם $m=M$, אז f קבועה ולכן $f'(c)=0$ לכל c בקטע.

אם $m<M$, אז לפחות אחד מהם מתקבל בנקודה פנימית $a<c<b$. לפי פרמה $f'(c)=0$. ■

משפט: **(לגרנז')** אם f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b),
אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש-$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



הוכחה:

נגדיר:
$$F(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$$

(הביטוי שבסוגריים הינו הישר שמחבר את $(a,f(a))$ ל-$(b,f(b))$)

F רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b).
$F(a)=F(b)=0$
$\Leftarrow$ F מקיימת את תנאי משפט רול.

לכן לפי רול קיימת $a<c<b$ כך ש-$F'(c)=0$.

אבל $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ולכן: $0=F'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ■

משפט: תהי f גזירה ב-(a,b), אזי: f קבועה $\Leftrightarrow f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.

הוכחה

$\Leftarrow$: עשינו.

$\Rightarrow$: ניקח $a<x<y<b$ ונראה $f(x)=f(y)$:

לפי לגרנז' בקטע $[x,y]$ קיימת $x<c<y$ כך ש-$f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, נתון $f'(c)=0$, ולכן $f(y)=f(x)$. ■

משפט: תהי f גזירה ב-(a,b), אזי:

- אם $f'>0$ לכל x בקטע, אזי f עולה ממש בקטע.
- אם $f'<0$ לכל x בקטע, אזי f יורדת ממש בקטע.

הוכחה:

אם $f'>0$, רוצים להראות שלכל $a<x<y<b$ מתקיים $f(y)>f(x)$.

לפי לגרנז' בקטע $[x,y]$ קיימת $x<c<y$ כך ש-$f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$, נתון -$f'>0$, ולכן $f(y)>f(x)$. ■

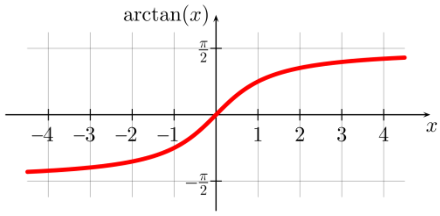
הערות:

1. ההיפך אינו נכון. **דוגמא:** $f(x) = x^3$
2. אם נדרוש $f' \geq 0$ בקטע, אזי f עולה בקטע, ואם $f' \leq 0$ בקטע, אזי f יורדת בקטע.
3. במקרה של $\geq$ או $\leq$, גם ההיפך נכון.

תרגיל: הוכיחו זאת.

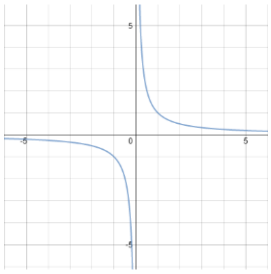
דוגמאות:

1. $f(x) = \arctan x$



$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ לכל $x \in \mathbb{R} \Leftarrow f$ עולה ממש.

2. $(x \neq 0) \quad f(x) = \frac{1}{x}$



$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ לכל x בתחום ההגדרה

$\not\Leftarrow f$ יורדת בתחום ההגדרה.

אלא: $\Leftarrow f$ יורדת ב-$(-\infty, 0)$ וגם ב-$(0, \infty)$

משפט: **(קושי)** אם f, g רציפות ב-$[a, b]$ וגזירות ב-(a, b) ו-$g'(x) \neq 0$ בקטע, אזי:

1. $g(a) \neq g(b)$.
2. קיימת $a < c < b$ כך ש-$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

הוכחה (1):

נניח בשלילה $g(a) = g(b)$, ולכן לפי משפט רול נקבל סתירה לכך ש-$g' \neq 0$.

הוכחה (2):

תרגיל: הוכיחו את (2) בעזרת משפט רול והפונקציה:

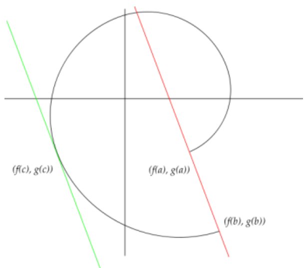
$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$$

הערה:

משפט לגרנז' הינו מקרה פרטי של קושי עם $g(x) = x$.

אינטואיציה לקושי:

f, g מתארות עקום $\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$, $a \leq t \leq b$



$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}, \; a \leq t \leq b$$

עקומים: עקומים ניתן לתאר בהצגה פרמטרית:

דוגמאות:

1. $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$, $-1 \leq t \leq 1$
2. $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$ עקום. אם $x = g(t)$ הפיכה, אז $t = g^{-1}(x)$ ואז $y = f\left(g^{-1}(x)\right)$, ולכן לפי כלל השרשרת:

שיפוע המשיק לעקום בנקודה t:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = f'(t) \cdot (g^{-1})' = f'(t) \cdot \frac{1}{g'(t)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

הרצאה 44: משפט דרבו

משפט: **(דרבו)** תהי f גזירה ב-$[a,b]$ ויהי $\lambda \in \mathbb{R}$ בין $f'_+(a)$ לבין $f'_-(b)$, אזי קיימת $a < c < b$ כך ש-$f'(c) = \lambda$.

הוכחה:

נגדיר $F(x) = f(x) - \lambda x$. נניח בה"כ $f'_+(a) < \lambda < f'_-(b)$.

$F(x)$ רציפה ב-$[a,b]$ ולכן מקבלת מינימום ומקסימום. תהי $a \le c \le b$ נקודה שבה F מקבלת מינימום.

נראה ש-$a < c < b$ (כלומר $c \ne a$ וגם $c \ne b$):

$$F'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - \lambda(a+h) - f(a) + \lambda(a)}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \lambda \right)$$
$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{F(a+h) - F(a)}{h} = f'_+(a) - \lambda < 0$$

(אם $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > 0$, אז קיימת סביבה של x_0 שבה $f(x) > 0$).

$\Leftarrow$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $0 < h < \delta$ מתקיים: $\frac{F(a+h) - F(a)}{h} < 0$ כלומר: $F(a+h) < F(a)$

לכן $F(a)$ אינו מינימום ולכן $c \ne a$ (הראנו: $c \ne b$).

$a < c < b$ ולכן לפי פרמה $F'(c) = 0$.

אבל $F'(x) = f'(x) - \lambda$ ולכן $0 = F'(c) = f'(c) - \lambda$, כלומר: $\lambda = f'(c)$. ■

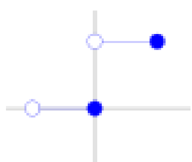
הערות:

1. f גזירה $\not\Rightarrow$ f' רציפה, אחרת המשפט היה מיידי.
   כלומר, f' מקיימת תכונת ערך-הביניים למרות שאינה בהכרח רציפה.
2. f' לא בהכרח מקיימת את ויירשטראס (ייתכן ש-f' לא חסומה).
3. לא קיימת פונקציה רציפה ב-$[a,b]$ שהיא לא נגזרת (זו מסקנה מהמשפט היסודי של החדו"א).

מסקנה:

אם ל-f' יש אי-רציפות מסוג קפיצה או סליקה, אזי f' לא נגזרת.
כלומר, לנגזרת ייתכנו רק אי-רציפויות מסוג עיקרית (הוכיחו לפי דרבו).

דוגמאות:

1. 
   זו לא נגזרת של אף פונקציה בקטע $[-1,1]$ לפי דרבו.
   ואמנם, אילו הייתה f שזו נגזרתה, אזי f לא הייתה גזירה ב-0.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$ גם אינה נגזרת לפי דרבו.

משפט: תהי f רציפה בסביבת x_0 וגזירה בסביבה מנוקבת של x_0 (כלומר, לא נתון ש-f גזירה ב-x_0 עצמה).

אם קיים $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=L$, אזי f גזירה ב-x_0 ו-$f'(x)=L$.

הערה:

למעשה נראה שאם $f'(x)\xrightarrow[x\to x_0^+]{} L$ אזי $f'_+(x_0)=L$ וכנ"ל עבור $f'_-(x_0)$.

הוכחה:

תהי $\delta>0$ כך שב-$(x_0,x_0+\delta)$ f רציפה וגזירה.

יהי $0<h<\delta$. נפעיל את משפט לגרנז' על הקטע $[x_0,x_0+h]$.

קיימת $0<\theta<1$ כך ש-

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0+\theta h)$$

כאשר $h\to 0^+$ גם $\theta h\to 0^+$, ולכן $x_0+\theta h\to x_0^+$.

לכן לפי נתון, אגף ימין שואף ל-L, לפיכך גם אגף שמאל שואף ל-L.

כלומר:

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=L$$

■

מסקנה:

אם f גזירה ב-$[a,b]$, אזי ל-f' ייתכנו רק אי-רציפויות מסוג עיקרי.

הוכחת המסקנה:

אם ב-$a<x_0<b$ קיימים $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ ו-$\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$, אז לפי ההערה שלעיל הם שווים ל-$f'_+(x_0)$ ול-$f'_-(x_0)$.

כיוון ש-f גזירה, שניהם שווים ל-$f'(x_0)$. כלומר $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$ $\Leftarrow$ f' רציפה ב-x_0.

■

הרצאה 45: נגזרת חסומה ורציפות במ"ש

דוגמא:

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{3/2}\sin\frac{1}{x} & ,x\neq 0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$$

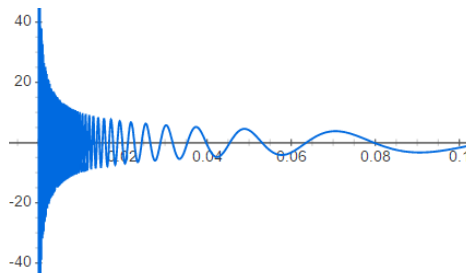
נגזור:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^{3/2}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\underbrace{x^{1/2}}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{}0}\underbrace{\sin\frac{1}{x}}_{\text{חסום}}=0$$

$$\Rightarrow f'(0)=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{(-x)^{3/2}\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}-(-x)^{1/2}\sin\frac{1}{x}$$
$$=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}x^{1/2}\sin\frac{1}{x}+x^{3/2}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & ,\ x>0\\ 0 & ,\ x=0\\ -\frac{3}{2}(-x)^{1/2}\sin\frac{1}{x}+(-x)^{3/2}\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) & ,\ x<0\end{cases}$$



f' לא חסומה ליד 0, כי $\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}$ לא חסום מימין ל-0.

(כמובן ש-f' לא רציפה ב-0, וזו אי-רציפות עיקרית)

משפט: אם f גזירה בקטע I, ו-f' חסומה, אזי f רציפה במ"ש.

הוכחה:

f' חסומה ולכן קיים M כך שלכל $x \in I$ מתקיים $|f'(x)| < M$.

יהי $\varepsilon > 0$. נגדיר $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$, ואז אם $|x-y| < \delta$ אז לפי לגרנז' קיימת $x < c < y$ כך ש:

$$|f(x) - f(y)| = |f'(c)||x-y| < M|x-y| < \varepsilon \quad \blacksquare$$

הערות:

1. זו האינטואיציה של "תלילות חסומה".
2. ההיפך אינו נכון:

ראינו ש-$f(x) = \sqrt{x}$ רציפה ולכן לפי קנטור-היינה היא רציפה במ"ש ב-$[0,1]$ ובפרט ב-$(0,1)$.

אבל $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ לא חסומה.

הגדרה: f נקראת **ליפשיצית** אם קיים K כך ש-$|f(x) - f(y)| < K|x-y|$ לכל x, y בקטע.

הערה: f' חסומה $\Leftarrow$ f ליפשיץ $\Leftarrow$ f רציפה במ"ש $\Leftarrow$ f רציפה .

הערה:

כל הגרירות ההפוכות אינן נכונות:

f ליפשיץ $\not\Leftarrow$ f רציפה במ"ש. $\quad f(x) = \begin{cases} |x|^{3/2}\sin\frac{1}{x} \\ 0 \end{cases}$ על $[0,1]$

f' חסומה $\not\Leftarrow$ f ליפשיץ $\quad$ f לא גזירה

תרגיל: הוכיחו: אם f ליפשיץ וגזירה, אזי f' חסומה.

הרצאות 46-47: כלל לופיטל

משפט: **(לופיטל)** יהיו f ו-g גזירות בסביבה (מנוקבת) של a. נניח כי:

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$
2. $g'(x) \neq 0$ בסביבה מנוקבת של a.
3. קיים $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

אזי: $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

הערות:

1. ב-(1): במקום a, ניתן גם $a^{\pm}$ או $\pm\infty$, ובמקום 0 ניתן גם $\pm\infty$.
2. ב-(3): L יכול להיות גם במובן הרחב.

הוכחת לופיטל $\frac{\infty}{\infty}$", $x \to a$":

נסתכל על סביבה $[a, a+h]$ שבה תנאי המשפט מתקיימים.

נתקן את f ו-g ונגדיר: $f(a) = g(a) = 0$.

מ-(1) נובע כי f ו-g (החדשות) רציפות ב-a , ובפרט מימין.

בנוסף:
- f ו-g רציפות ב-$[a,a+h]$.
- f ו-g גזירות ב-$(a,a+h)$.
- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,a+h)$.

נפעיל את משפט קושי בקטע $[a,x]$, $a<x\leq a+h$.

נקבל כי: $g(x)\neq g(a)=0$ ובנוסף קיימת $a<c_x<x$ כך ש-
$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

כאשר $x\to a^+$ גם $c_x\to a^+$ ולכן (לפי נתון (3)):
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=L$$

כיוון ש-f ו-g החדשות מתלכדות עם f ו-g המקוריות למעט אולי ב-a , המסקנה נכונה גם עבור f ו-g המקוריות.

באופן דומה מראים עבור $x\to a^-$ ולכן עבור $x\to a$. ■

לופיטל עבור קרן יהיו f ו-g גזירות בקרן (M,∞). נניח כי:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$
2. $g'(x)\neq 0$ בקרן (M,∞)
3. קיים $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אזי: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

הוכחת לופיטל "$\frac{0}{0}$", $x\to\infty$:

כיוון ש-$g'\neq 0$, לא ייתכנו שתי נקודות בהן $g=0$ (לפי רול).

לכן קיים $N>0$ כך שלכל $x>N$ $g\neq 0$, ובפרט $\frac{f}{g}$ מוגדרת עבור $x>N$.

נגדיר $t=\frac{1}{x}$. נסמן: $F(t)=f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t)=g\left(\frac{1}{t}\right)$ $\left(0<t<\frac{1}{N}\right)$.

F ו- G רציפות וגזירות בסביבה ימנית של 0.

$$\lim_{t\to 0^+}G(t)=\lim_{t\to 0^+}g\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0 \qquad G'(t)=g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\neq 0$$

ובאופן דומה:
$$\lim_{t\to 0^+}F(t)=0 \qquad F'(t)=f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)}\underset{\text{לופיטל "}\frac{0}{0}\text{"}}{=\!=\!=}\lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)\left(-\frac{1}{t^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$$
■

דוגמאות:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\underset{\text{לופיטל "}\frac{0}{0}\text{"}}{=\!=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=1$$

2. $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1} \xrightarrow[\text{"}\frac{0}{0}\text{" לופיטל}]{} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{\tan x - x} \xrightarrow[\text{"}\frac{0}{0}\text{" לופיטל}]{} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\frac{1}{\cos^2 x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos^2 x}{1+\cos x}=-\frac{1}{2}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} \neq\xrightarrow[\text{"}\frac{0}{0}\text{" לופיטל}]{}\neq \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$$

אין לביטוי שהתקבל גבול, אך זה לא אומר שהגבול המקורי לא קיים:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{x}{\sin x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\cdot\underbrace{x\cdot\sin\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}0}=0$$

5. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \xrightarrow[\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" לופיטל}]{} \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\xrightarrow[\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" לופיטל}]{}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

התקבל "לופיטל כנוע", חישוב חלופי:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=1$$

6. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x^3} \xrightarrow[\text{"}\frac{0}{0}\text{" לופיטל}]{} \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{3x^2}\neq\xrightarrow[\text{"}\frac{0}{0}\text{" לא לופיטל}]{}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{6x}\xrightarrow[\text{"}\frac{0}{0}\text{" לופיטל}]{}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$$

זה <u>לא</u> לופיטל "$\frac{0}{0}$"!

7. $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}} \xrightarrow[\text{"}\frac{0}{0}\text{" לופיטל}]{} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{2}{x^3}e^{-1/x^2}}{100x^{99}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{50x^{102}}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-100}}{e^{1/x^2}}\xrightarrow[\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" לופיטל}]{}\lim_{x\to 0^+}\frac{-100x^{-101}}{-\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{50x^{-98}}{e^{1/x^2}}\xrightarrow[\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" לופיטל}]{}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{50\cdot 49\cdot x^{-96}}{e^{1/x^2}}=\cdots=\lim_{x\to 0^+}\frac{50!}{e^{1/x^2}}=0$$

8. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x} \xrightarrow[\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" לופיטל}]{} \lim_{x\to\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\cdots\xrightarrow[\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" לופיטל}]{}\ldots=\lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}=0$$

"אקספוננט שואף ל-∞ מהר יותר מפולינום".

9. $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n} \xrightarrow[\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{" לופיטל}]{} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{nx^n}=0$$

"חזקה חיובית שואפת ל-∞ מהר יותר מלוגריתם".

10. $\lim\limits_{x\to0^+}(x\operatorname{lan}x)=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\operatorname{lan}x}{\frac{1}{x}}\xrightarrow[\text{לופיטל "}\frac{-\infty}{\infty}\text{"}]{}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ "$0\cdot(-\infty)$"

11. $\lim\limits_{x\to0^+}x^x=\lim\limits_{x\to0^+}e^{\ln x^x}=\lim\limits_{x\to0^+}e^{x\ln x}\xrightarrow[e^x\text{ רציפות}+(10)]{}e^0=1$ "0^0"

12. $\lim\limits_{x\to0^+}xe^{1/x}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{e^{1/x}}{\frac{1}{x}}\xrightarrow[\text{לופיטל "}\frac{\infty}{\infty}\text{"}]{}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}e^{1/x}}{-\frac{1}{x^2}}=\infty$ "$0\cdot\infty$"

13. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}+\operatorname{lan}x\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{lan}(e^{\frac{1}{x}+\operatorname{lan}x})=\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{lan}(e^{\frac{1}{x}}e^{\operatorname{lan}x})=\lim\limits_{x\to0^+}\operatorname{lan}(xe^{1/x})\xrightarrow[(12)]{}\infty$ "$\infty-\infty$"

14. $\lim\limits_{x\to0^+}(1+x)^{1/\sin x}$ "1^∞" **תרגיל:**

הרצאות 48-49: משפט טיילור

הקדמה:

- אם f גזירה אז המשיק ב-0 הוא: $y=f'(0)x+f(0)$.
- ההפרש בין הפונקציה למשיק שואף ל-0 כאשר x שואף ל-0: $f(x)-y(x)=f(x)-f'(0)x-f(0)\xrightarrow[x\to0]{}0$

  אבל יותר מזה - ההפרש בין f למשיק שואף ל-0 "יותר מהר" מאשר x שואף ל-0: $\frac{f(x)-y(x)}{x}=\frac{f(x)-y(x)}{x-0}-f'(0)\xrightarrow[x\to0]{}0$

  לכן קוראים למשיק **קירוב לינארי** של f ליד 0, אולם לפעמים הקירוב הלינארי לא מספיק.
- באופן כללי משוואת המשיק של f בנקודה x_0 היא: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

  $$\frac{f(x)-y(x)}{x-x_0}=\frac{f(x)-\left(f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)\right)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$
- נוכל לכתוב: $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+R(x)$, כאשר $R(x)$ מקיים: $\frac{R(x)}{x-x_0}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$.
- בתנאים מסויימים על f בסביבה של x_0 נוכל לכל $\varepsilon>0$ למצוא פולינום $P_n(x)$ כך שיתקיים:

  $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ ו-$|R_n(x)|<\varepsilon$ בסביבת x_0.
- **איך מוצאים פולינום $P_n(x)$?**
- הקירוב הלינארי $P_1(x)$ מקיים: $P_1'(x_0)=f'(x_0)$ $\quad P_1(x_0)=f(x_0)$
- לכן נדרוש מ-$P_n(x)$ באופן כללי שיקיים: $P_n(x_0)=f(x_0)$, $P_n'(x_0)=f'(x_0)$, ..., $P_n^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)$

  כלומר, ש-$P_n(x)$ יקיים $P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0)$ לכל $0\le k\le n$ (שיתלכד עם f וכל נגזרותיה בנקודה x_0).
- **טענת עזר:** יהי $P_n(x)$ פולינום ממעלה n:

$$P_n(x)=\beta_0+\beta_1(x-x_0)+\beta_2(x-x_0)^2+\beta_3(x-x_0)^3+\cdots+\beta_n(x-x_0)^n$$

אזי לכל $0\le k\le n$ מתקיים: $P_n^{(k)}(x_0)=\beta_k\cdot k!$.

מסקנה: $\beta_k = \frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$ לכל $0 \le k \le n$.

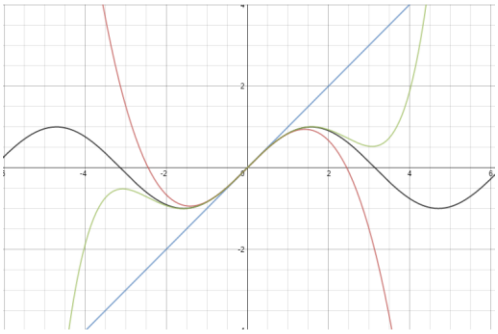
הוכחה: (עבור $x_0 = 0$, ואז: $P_n(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \cdots + \beta_n x^n$)

כשגוזרים את $P_n(x)$ k פעמים, כל החזקות שקטנות מ-k מתאפסות.

הנגזרת ה-k ית של $\beta_k x^k$ היא בדיוק $\beta_k \cdot k!$.

עבור חזקות שגדולות מ-k, נקבל בנגזרת ה-k ית ביטוי שמכיל x^m, ולכן יתאפס עבור $x = 0$.

דוגמא:



$\boldsymbol{f(x) = \sin x}$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.707106\ldots$$

$P_1 = x \qquad \Rightarrow P_1\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} = 0.785\ldots$

$P_3 = x - \frac{x^3}{6} \qquad \Rightarrow P_3\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{6} = 0.705\ldots$

$P_5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \qquad \Rightarrow P_5\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{6} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{120} = 0.70714\ldots$

הגדרה: **פולינום טיילור** ממעלה n של f ליד x_0:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

כאשר $x_0 = 0$ קוראים לו גם פולינום **מקלורן**.

דוגמאות:

1. $f(x) = e^x \qquad x_0 = 0$

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

2. $f(x) = x^3 - 4x + 5 \qquad x_0 = 2 \qquad n = 3$

$f'(x) = 3x^2 - 4$

$f''(x) = 6x$

$P_3(x) = 5 + 8(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3$ זה $f(x)$ עצמו:

3. $f(x) = \text{lan}(1 + x) \qquad x_0 = 0 \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f'(0) = 1$

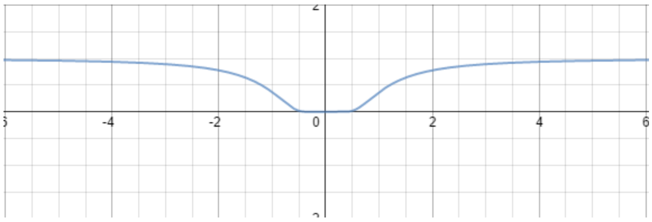
$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \qquad f'''(0) = 2$$

$$P_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^n}{n}$$

תרגיל:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$$



$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2} & ,x \neq 0 \\ 0 & ,x = 0 \end{cases}$$

הראו $f^{(n)}(0) = 0$ לכל n $\Leftarrow$ $P_n(x) = 0$

משפט: **(טיילור)** תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה x_0, ותהי x נקודה כלשהי בסביבה הזו.

אזי קיימת נקודה c בין x לבין x_0, כך ש-$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, כאשר:

- $P_n(x)$ הוא פולינום טיילור:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- $R_n(x)$ היא השארית בצורת לגרנז':

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

הערות:

1. $R_n(x)$ כמו במשפט נקראת **השארית בצורת לגרנז'**.
2. השארית מקיימת:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$$

אם יודעים ש-$f^{(n+1)}$ חסומה/רציפה, אז זו טענה מיידית.

3. עבור $n=0$ מקבלים:

$$f(x) = P_0(x) + R_0(x) = f(x_0) + f'(c)(x-x_0)$$

זהו משפט לגרנז':

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

הוכחה:

נניח $x_0 < x < x_0 + h$ בה"כ כך ש-$x_0 + h$ בסביבה שבה תנאי המשפט מתקיימים.

נסתכל על הקטע $[x_0, x]$. נגדיר עליו שתי פונקציות - $\varphi(z)$ ו- $\Psi(z)$:

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z}) = f(x) - f(z) - \frac{f'(z)}{1!}(x-z) - \frac{f''(z)}{2!}(x-z)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

מתקיים: $\varphi(x) = 0$ $\qquad$ $\varphi(x_0) = f(x) - P_n(x)$ $\qquad$ φ רציפה וגזירה.

$$\varphi'(z) = 0 - f'(z) - \left(\frac{f''(z)}{1!}(x-z) - \frac{f'(z)}{1!}\right) - \left(\frac{f^{(3)}(z)}{2!}(x-z)^2 - \frac{f''(z)}{1!}(x-z)\right) - \cdots$$
$$- \left(\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n - \frac{f^{(n)}(z)}{(n-1)!}(x-z)^{n-1}\right) = -\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n$$

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{z}) = \frac{(x-z)^{n+1}}{(n+1)!}$$

מתקיים: $\Psi(x) = 0$ $\quad$ $\Psi(x_0) = \frac{(x_0-z)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\quad$ Ψ רציפה וגזירה ובקטע (x_0, x)

$$\Psi'(z) = \frac{-(x-z)^n}{n!} \neq 0$$

נפעיל את משפט קושי על φ ו-Ψ ונקבל שקיימת $x_0 < c < x$ כך ש:

$$\frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{\frac{-(x-c)^n}{n!}} = \frac{\varphi'(c)}{\Psi'(c)} = \frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\Psi(x)-\Psi(x_0)} = \frac{-R_n(x)}{-\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}}$$

$$\Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

■

הרצאה 50: <u>שימושים של משפט טיילור</u>

דוגמא: נחשב את e:

ראינו: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$

נציב $x = 1$: $e = e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(1)$

נחשב בדיוק של $\frac{1}{100}$, כלומר, נרצה n כך ש-$|R_n(1)| < \frac{1}{100}$:

$$|R_n(1)| \underbrace{=}_{(0<c<1)} \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

נמצא n עבורו $\frac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{100}$:

$\underline{n:}$	$n=0$	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$
$\underline{\frac{3}{(n+1)!}:}$	$\frac{3}{1} > \frac{1}{100}$	$\frac{2}{3} > \frac{1}{100}$	$\frac{3}{6} > \frac{1}{100}$	$\frac{1}{8} > \frac{1}{100}$	$\frac{1}{40} > \frac{1}{100}$	$\frac{1}{240} < \frac{1}{100}$

$\Leftarrow$ עבור $n = 5$ השגיאה תהיה קטנה מ-$\frac{1}{240}$:

$$\Rightarrow 2.718281\ldots = e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2.71\overline{66}$$

טענה: e אינו רציונאלי.

הוכחה:

ראינו $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$ והשארית מקיימת: $R_n(1) \underbrace{=}_{\text{השארית חיובית}} |R_n(1)| < \frac{3}{(n+1)!}$

$$e < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{3}{(n+1)!}$$

נניח בשלילה $e = \frac{p}{q}$ כאשר $q \neq 0$, $p, q \in \mathbb{N}$. אזי: $0 < \frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)!}$

נכפול ב- $n!$: $0 < \frac{pn!}{q} - \left(n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!}\right) < \frac{3}{(n+1)}$

זה נכון לכל n. ניקח $n > \max\{2, q\}$.

לכן, הביטוי במרכזו באי-השיוויון הוא מספר שלם (כי $n > q$) בין 0 ל-1 (כי $n > 2$). זו סתירה. ■

הרצאה 51: השארית במשפט טיילור

הערה: האם $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$? לא:

ראינו דוגמא: $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$ שבה $P_n(x) = 0$ לכל n.

לכן לכל n, $f(x) = R_n(x)$ ובפרט לא מתקיים: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

משפט: תהי f פונקציה גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0, ונניח שיש קבוע K כך ש- $\left|f^{(n)}(x)\right| < K$ ("הנגזרות חסומות במשותף") לכל x בסביבה ולכל n, אזי: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ בכל x בסביבה.

הוכחה:

יהי x קבוע בסביבה. $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}\right| < \frac{K}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}$

נסמן: $a = |x - x_0|^{n+1}$.

הסדרה $\frac{a^n}{n!}$ שואפת לאפס ($a > 0$), למשל לפי מבחן המנה: $\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 < 1$

ולכן: $|R_n(x)| =< \frac{K}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ■

דוגמאות:
1. e^x בסביבה (a, b) מקיימת את המשפט עם $K = e^b$.
2. $\sin x$ על $\mathbb{R}$ עם $K = 1$.

משפט: תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0. נסמן: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. אזי: $\frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$

הערה:

אם מניחים ש-f גזירה $n+1$ פעמים בסביבה של x_0 ובנוסף מניחים ש-$f^{(n+1)}$ חסומה או רציפה, אז המשפט קל:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

סימון: ביטוי $\alpha(x)$ שמקיים: $\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$ נקרא ומסומן: $\theta((x-x_0)^n)$

השארית היא כזו.

הערה: $\theta(x^n)+\theta(x^n)=\theta(x^n)$

דוגמא: חישוב גבול בעזרת משפט טיילור:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^3}{6}+R_3(x)-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{6}+\frac{R_3(x)}{x^3}\right)=-\frac{1}{6}$$

הרצאה 53: <u>מיון נקודות חשודות כקיצון</u>

משפט: **(מבחן הנגזרת ה-I)** תהי x_0 נקודה קריטית של f. נניח ש-f רציפה ב-x_0 וגזירה בסביבה (מנוקבת) של x_0. אזי:

- אם f' מחליפה סימן מחיובי לשלילי ב-x_0, אזי x_0 מקסימום מקומי.
- אם f' מחליפה סימן משלילי לחיובי ב-x_0, אזי x_0 מינימום מקומי.
- אם f' לא מחליפה סימן ב-x_0, אזי x_0 אינה נקודת קיצון.

הוכחה:

נובעת מכך ש- $f'\geq 0 \Leftrightarrow f$ עולה ו-$f'\leq 0 \Leftrightarrow f$ יורדת.

משפט: **(מבחן הנגזרת ה-II)** תהי x_0 נקודה קריטית של f, ונניח ש-f גזירה פעמיים ב-x_0. אזי:

- אם $f''(x_0)>0$ אז x_0 מינימום מקומי.
- אם $f''(x_0)<0$ אז x_0 מקסימום מקומי.

הוכחה:

נניח ש-$f''(x_0)>0$, כלומר:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}\underbrace{=}_{f'(x_0)=0}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{x-x_0}>0$$

עבור $x>x_0$ בסביבה של x_0 מתקיים: $f'(x)>0$.

עבור $x<x_0$ בסביבה של x_0 מתקיים: $f'(x)<0$.

$\Leftarrow$ לפי מבחן הנגזרת ה-I, x_0 מינימום מקומי. ■

הערה:

אם f'' קיימת ב-x_0, אז f' קיימת בסביבה של x_0.

דוגמאות:

1. $f(x)=x^4$ $\quad f''(0)=0$ אבל $x=0$ מינימום מקומי.
2. $f(x)=-x^4$ $\quad f''(0)=0$ אבל $x=0$ מקסימום מקומי.

3. $f(x)=x^3$ $\quad f''(0)=0$ $\quad$ אבל $x=0$ לא קיצון.

משפט: **(מבחן הנגזרת ה-n-ית)** תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0 כך ש- $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ ו-$f^{(n)}(x_0)\neq 0$, אזי:

- אז x_0 לא קיצון מקומי.
- אז x_0 קיצון מקומי וגם: - $f^{(n)}(x_0)>0 \Leftarrow x_0$ מינימום.
- - $f^{(n)}(x_0)<0 \Leftarrow x_0$ מקסימום.

הוכחה:

נכתוב: $$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

השארית מקיימת: $$\alpha_n(x)=\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}\xrightarrow[x\to x_0]{}0$$

ולכן: $$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\alpha_n(x)(x-x_0)^n=(x-x_0)^n\left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha_n(x)\right)$$

נניח $f^{(n)}(x_0)>0$, אז בסביבה של x_0: $$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\alpha_n(x)>0$$

- אם n זוגי: אז $(x-x_0)^n>0$ לכל $x \Leftarrow f(x)-f(x_0)>0 \Leftarrow f(x)>f(x_0)$ בסביבה של x_0 $\Leftarrow x_0$ מינימום.
- אם n אי-זוגי: עבור $x>x_0$: $f(x)>f(x_0)$; עבור $x<x_0$: $f(x)<f(x_0)$ $\Leftarrow x_0$ לא קיצון.

שיקולים דומים עבור $f^{(n)}(x_0)<0$. ■

הרצאה 54: קמירות, קעירות ונקודות פיתול

הגדרה:
- f תיקרא **קמורה** בקטע I אם לכל $x,y\in I$ המיתר שמחבר את $(x,f(x))$ ו-$(y,f(y))$ נמצא מעל לגרף.
- f תיקרא **קעורה** בקטע I אם לכל $x,y\in I$ המיתר שמחבר את $(x,f(x))$ ו-$(y,f(y))$ נמצא מתחת לגרף.

(שקול:) f **קמורה** בקטע I אם לכל $x,y\in I$ ולכל $0\le t\le 1$ מתקיים: $$f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$

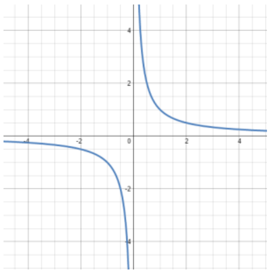
דוגמאות:
1. $\sin x$ קעורה ב-$(0,\pi)$ וקמורה ב-$(\pi,2\pi)$ (ב-π ישנה נקודת פיתול).
2. x^2 קמורה בכל $\mathbb{R}$.

הגדרה: x_0 נקראת **נקודת פיתול** של f, אם f קמורה מצד אחד של x_0 וקעורה מהצד השני, ורציפה ב-x_0.

הערות:

1. $f(x) = \frac{1}{x}$

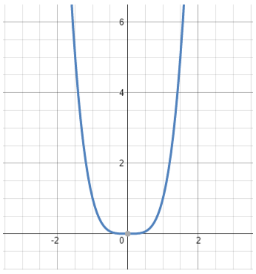
ב-$x = 0$ אין נקודת פיתול כי $f(x)$ לא רציפה ב-0



2. $f(x) = x^4$

$f''(0) = 0$ אבל 0 לא נקודת פיתול,

כלומר - ההגדרה היא לא $f'' = 0$!



הרצאה 55: אסימפטוטות וחקירת פונקציה מלאה

הגדרה: $x = x_0$ נקרא **אסימפטוטה אנכית** אם: $\lim_{x\to x_0^+} = \infty$ (או $\lim_{x\to x_0^+} = -\infty$ או $\lim_{x\to x_0^-} = \infty$ או $\lim_{x\to x_0^-} = -\infty$).

הגדרה: $y = ax + b$ נקרא **אסימפטוטה משופעת (אופקית** כאשר $a = 0$) אם:

$$\lim_{x\to \underbrace{\infty}_{\text{או } -\infty}} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0$$

איך מוצאים אסימפטוטות משופעות?

אם $f(x) - ax - b \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, אז $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, ולכן: $\boxed{a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$ ואז: $\boxed{b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - ax)}$.

דוגמא:

$$\boldsymbol{f(x) = \left(x^2(3-x)\right)^{1/3} = x^{2/3}(3-x)^{1/3}}$$

- **תחום הגדרה:** $\mathbb{R}$.
- **רציפות:** f אלמנטרית וכלן רציפה ב- $\mathbb{R}$.
- **נקודות חיתוך עם הצירים:** $(0,0)$, $(3,0)$.
- **נגזרת $\boldsymbol{I}$:**

<u>עבור $x \neq 0,3$:</u>

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(3-x)^{1/3} - \frac{1}{3}x^{2/3}(3-x)^{-2/3}$$

<u>ב-$x = 0$ וב-$x = 3$:</u> צריך לגזור לפי ההגדרה. מגלים ש-f' לא קיימת.

- **תחומי עלייה וירידה:**

<u>כאשר $f' \geq 0$:</u>

$$\frac{2}{3}\left(\frac{3-x}{x}\right)^{1/3} \geq \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3-x}\right)^{2/3}$$

<u>$x < 0$</u>

$2(3-x) \leq x$

$6 \leq 3x$

<u>$x > 0$</u>

$2(3-x) \geq x$

$6 \geq 3x$

$2 \geq x$	$2 \leq x$
$\boxed{2 \geq x > 0}$	אין פתרון

<u>$f' \leq 0$ כאשר</u>: $x < 0$ ו- $3 \neq x \geq 2$

- **קיצון מקומי / עליה וירידה:**

f'	$-$	אין	$+$	0	$-$	אין	$-$
f	↘	0	↗	2	↘	3	↘
		מינימום מקומי		מקסימום מקומי			

- **נגזרת II:**

$$f''(x) = \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)x^{-4/3}(3-x)^{1/3} - \frac{2}{3}x^{-1/3}\frac{1}{3}(3-x)^{-2/3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3-x)^{-5/3}x^{2/3}$$
$$-\frac{1}{3}(3-x)^{-2/3}\frac{2}{3}x^{-1/3}$$
$$= -\frac{2}{9}x^{-4/3}(3-x)^{-5/3}\left((3-x)^2 + x(3-x) + x^2 + x(3-x)\right)$$
$$= -\frac{2}{9}x^{-4/3}(3-x)^{-5/3}\left((3-x)(3-x+x+x) + x^2\right) = -2x^{-4/3}(3-x)^{-5/3}$$

- **קמירות / קעירות / פיתול:**

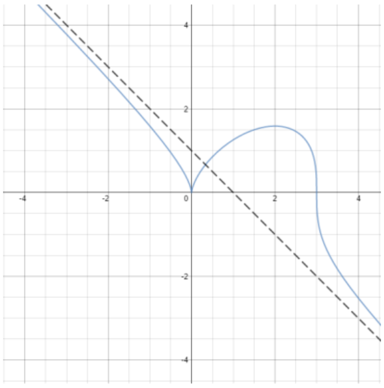
f''	$-$	אין	$-$	אין	$+$
f	$\cap$	0	$\cap$	3	$\cup$
				פיתול	

- **אסימפטוטות:**

<u>אנכיות</u>: אין כי f רציפה.

<u>משופעות</u>: $y = -x + 1$ גם ב-∞ וגם ב-$-\infty$

- **ציור הגרף:**



הרצאה 56: <u>למת המיתרים ומשפטי קמירות</u>

למה: **(למת המיתרים)** תהי f קמורה ב-I ויהיו $x_1 < x_2 < x_3 \in I$, אזי:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

הוכחה:

עבור איזשהו $0 < t < 1$:

$$x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$$

$$\Rightarrow x_2 - x_1 = (t-1)x_1 + (1-t)x_3$$

$$\Rightarrow (x_2 - x_1) = (1-t)(x_3 - x_1) \qquad (\star)$$

בנוסף:
$$f(x_2) = f(tx_1 + (1-t)x_3) \underbrace{\leq}_{\text{קמירות}} tf(x_1) + (1-t)f(x_3)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq (t-1)f(x_1) + (1-t)f(x_3)$$

$$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \leq (1-t)\big(f(x_3) - f(x_1)\big) \qquad (\star\star)$$

נחלק את $(\star\star)$ ב-$(x_2 - x_1)$ בעזרת $(\star)$:
$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$

$$x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$$

$$\Rightarrow x_3 - x_2 = x_3 - tx_1 - x_3 + tx_3$$

$$\Rightarrow x_3 - x_2 = t(x_3 - x_1) \qquad (※)$$

בנוסף:
$$f(x_2) = f(tx_1 + (1-t)x_3) \underbrace{\leq}_{\text{קמירות}} tf(x_1) + (1-t)f(x_3)$$

$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq f(x_3) - tf(x_1) - f(x_3) + tf(x_3)$$

$$\Rightarrow f(x_3) - f(x_2) \geq t\big(f(x_3) - f(x_1)\big) \qquad (※※)$$

נחלק את $(※※)$ ב-$(x_3 - x_2)$ בעזרת $(※)$:
$$\frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} \geq \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1}$$
■

משפט: f קמורה ב- (a,b) $\Leftarrow$ f רציפה ב-(a,b).

הוכחה:

תהי $x_0 \in (a,b)$. נראה ש-f רציפה ב-x_0. נראה רציפות מימין (באופן דומה מראים רציפות משמאל).

לפי למת המיתרים:
$$\frac{f(x_0) - f(a_1)}{x_0 - a_1} \underbrace{\leq}_{a<a_1<x_0<x} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \underbrace{\leq}_{x_0<x<b_1<b} \frac{f(b_1) - f(x_0)}{b_1 - x_0}$$

$$\Rightarrow (x - x_0)\frac{f(x_0) - f(a_1)}{x_0 - a_1} \leq f(x) - f(x_0) \leq (x - x_0)\frac{f(b_1) - f(x_0)}{b_1 - x_0}$$

לפי משפט הסדנוויץ', קצוות הביטוי שואפות ל-0 כאשר $x \to x_0^+$ ולכן גם:
$$f(x) - f(x_0) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$
■

הערה: אם f קמורה ב-(a,b), אז ניתן להוכיח שאוסף הנקודות שבהן f לא גזירה הוא בן-מניה.

משפט: תהי f גזירה ב- (a,b) אזי: f קמורה $\Leftrightarrow$ בכל $x_0 \in (a,b)$ המשיק מתחת לגרף.

משפט: תהי f גזירה ב- (a,b) אזי: f קמורה $\Leftrightarrow$ f' עולה.

הוכחה:

<u>$\Leftarrow$:</u> תהי f קמורה ויהיו $a < c < d < b$.

נראה כי: $f'(c) \leq f'(d)$.

עבור $c<x<y<d$ לפי למת המיתרים:
$$f'(c)\xleftarrow[x\to c^+]{}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\le\frac{f(d)-t(y)}{d-y}$$
$$\Rightarrow f'(c)\le\frac{f(d)-f(y)}{d-y}\xrightarrow[y\to d^-]{}f'(d)$$
$$\Rightarrow f'(c)\le f'(d)$$

<u>$\Rightarrow$:</u> נניח f' עולה. יהיו $x,y\in(a,b)$. ניקח:
$$z=tx+(1-t)y\ ,\qquad 0<t<1$$

לפי לגרנז' יש $x<d<z<c<y$ כך ש:
$$f'(d)=\frac{f(z)-f(x)}{z-x}\qquad\qquad \frac{f(y)-f(z)}{y-z}=f'(c)$$

לפיכך:
$$\begin{cases}f(z)-f(x)=f'(d)(z-x)=f'(d)(tx+(1-t)y-x)=f'(d)(1-t)(y-x) & /\cdot t\\ f(y)-f(z)=f'(c)(y-z)=f'(c)(y-tx-(1-t)y)=f'(c)t(y-x) & /\cdot(1-t)\end{cases}$$
$$\begin{cases}t\big(f(z)-f(x)\big)=f'(d)t(1-t)(y-x)\\ (1-t)\big(f(y)-f(z)\big)=f'(c)t(1-t)(y-x)\end{cases}$$
$$f'(d)<f'(c)\Rightarrow t\big(f(z)-f(x)\big)\le(1-t)\big(f(y)-f(z)\big)$$
$$\Rightarrow t\big(f(z)-f(x)\big)\le(1-t)f(y)-(1-t)f(z)$$
$$\Rightarrow f(z)\le tf(x)+(1-t)f(y)$$
$$\Rightarrow f(tx+(1-t)y)\le tf(x)+(1-t)f(y)\qquad\blacksquare$$

משפט: תהי f גזירה פעמיים ב- (a,b) אזי: f קמורה $\Leftrightarrow f''>0$.

הוכחה:

נובע מהמשפט הקודם.

מסקנה:

אם f גזירה פעמיים ב-I ו-f'' משנה סימן ב-x_0, אזי x_0 פיתול.

הערה:

אם f גזירה פעמיים ב-I ו-f'' רציפה ב-I ו-x_0 נקודת פיתול, אזי $f''(x_0)=0$.

(לכן נקודות שמקיימות $f''(x_0)=0$ הן "**חשודות כפיתול**").

משפט: אם f גזירה וקמורה ב- (a,b) ו-x_0 נקודה קריטית, אזי x_0 מינימום מקומי.

ריכוז הגדרות ומשפטים

קבוצות של מספרים: קבוצת המספרים הטבעיים: $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$

קבוצת המספרים השלמים: $\mathbb{Z} = \{\dots -3,-2,-1,0,1,2,3\dots\}$

קבוצת המספרים הרציונאליים: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z}\,, n\neq 0\right\}$

קבוצת המספרים הממשיים: $\mathbb{R} = \{x| -\infty < x < \infty\}$

משפט: אם n אי-זוגי אז n^2 אי-זוגי.

כלל: 1. באופן כללי שני המשפטים הבאים אינם זהים: $B \Leftarrow A$ $A \Leftarrow B$

2. אבל שני המשפטים הבאים זהים: $B \Leftarrow A$ "לא A" $\Leftarrow$ "לא B"

משפט: $c=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

משפט: ("צפיפות הרציונאליים") לכל $x<y\in\mathbb{R}$ קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש- $x<q<y$.

הגדרה: ערך מוחלט: $|x| = \begin{cases} x & ,x\geq 0 \\ -x & ,x<0\end{cases} = \max\{x,-x\}$

משפט: (תכונות הערך המוחלט) לכל x,y ממשיים:

1. $|x|\geq 0$
2. $|x|\geq -x\,,\,|x|\geq x$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x| = 0 \Leftrightarrow x=0$
5. $|xy| = |x||y|$
6. $|x+y|\leq |x|+|y|$ ("אי-שוויון המשולש")
7. $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$
8. $-M<x<M \Leftrightarrow |x|<M$

קטעים וסביבות: קטע פתוח: $(a,b) = \{x|a<x<b\}$

קטע סגור: $[a,b] = \{x|a\leq x\leq b\}$

קרן: $(a,\infty) = \{x|a<x\}$

הגדרה: יהי $x_0\in\mathbb{R}$ ויהי $\varepsilon>0$. הקטע הפתוח $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ נקרא **ε סביבה של x_0.**

טענה: $|x-x_0|<\varepsilon \Leftrightarrow x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$

הגדרה: $\{x|0\leq |x-x_0|\leq\varepsilon\}$ נקרא **ε סביבה מנוקבת של x_0.**

הגדרה: תהי $A\subset\mathbb{R}$:

1. A נקראת **חסומה מלמעלה** אם קיים M כך שלכל $x\in A$ מתקיים $x\leq M$.

2. A נקראת **חסומה מלמעלה** אם קיים m כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \geq m$.

3. A נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה ומלמטה.

טענה: A חסומה $\Leftrightarrow$ קיים K כך ש-$|x| \leq K$ לכל $x \in A$.

הגדרה: 1. S נקרא **הסופרמום** של A אם הוא החסם מלמעלה הכי קטן של A. מסמנים: $S = \mathrm{Sup}A$.

אם $S \in A$, אז S נקרא **המקסימום** של A, ומסמנים: $S = \max A$.

2. I נקרא **האינפימום** של A אם הוא החסם מלמטה הכי גדול של A. מסמנים: $I = \inf A$.

אם $I \in A$, אז I נקרא **המינימום** של A, ומסמנים: $I = \min A$.

טענה: $S = \mathrm{Sup}A$ $\Leftrightarrow$ 1. $x \leq S, \forall x \in A$

2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש- $x_0 > S - \varepsilon$

$I = \inf A$ $\Leftrightarrow$ 1. $x \geq I, \forall x \in A$

2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_0 \in A$ כך ש- $x_0 < I + \varepsilon$

אקסיומת השלמות: לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלמעלה (מלמטה) של מספרים ממשיים, קיים סופרמום (אינפימום).

משפט: לכל $x > 0$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $y > 0$ יחיד כך ש-$y^n = x$.

הגדרה: **סדרה** היא אוסף אינסופי מסודר של מספרים ממשיים: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$.

(a_1 הינו האיבר הראשון ו-a_n הינו האיבר הכללי/האיבר ה-n-י)

סימון: $a_n\,,\ (a_n)\,,\ \{a_n\}\,,\ \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

הגדרה: $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (או $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|a_n - L| < \varepsilon$.

תזכורת: $|a_n - L| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon \Leftrightarrow a_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

משפט: **(יחידות הגבול)** אם לסדרה a_n יש גבול, אז הוא יחיד.

הגדרה: 1. a_n נקראת **חסומה מלמעלה** אם: $\exists M, \forall n: a_n \leq M$

2. a_n נקראת **חסומה מלמטה** אם: $\exists m, \forall n: a_n \geq m$

3. a_n נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלמטה ומלמעלה.

משפט: אם a_n מתכנסת אז היא חסומה.

משפט: **(אריתמטיקה של גבולות)** נניח כי $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ו- $\lim_{n\to\infty} b_n = K$, אזי:

1. $C \cdot a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} C \cdot L$ לכל קבוע C

2. $a_n + b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L + K$

3. $a_n \cdot b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L \cdot K$

4. $\frac{a_n}{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{L}{K}$ בתנאי ש-$K\neq 0$, $b_n\neq 0$ לכל n

משפט:
1. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}L \Leftarrow |a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}|L|$
2. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Leftrightarrow |a_n|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$
3. $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}L$, $L\geq 0$, $\forall n, a_n\geq 0 \Leftarrow \sqrt{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\sqrt{L}$

משפט: אם b_n סדרה חסומה ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, אזי: $\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$

משפט: **(הסנדוויץ')** אם לכל n, $a_n\leq b_n\leq c_n$ ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$, אזי: $\lim_{n\to\infty}b_n=L$

משפט: אם לכל n, $a_n\geq b_n$, $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ ו- $\lim_{n\to\infty}b_n=K$, אזי: $L\geq K$

משפט: תהי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$. נגדיר: $x_n=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ (סדרת הממוצעים החשבוניים), אזי: $\lim_{n\to\infty}x_n=L$.

משפט: תהי $\lim_{n\to\infty}a_n=L$, $L\geq 0$, $a_n>0$ לכל n, אזי:

1. (ממוצע הרמוני) $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}L$
2. (ממוצע הנדסי) $\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}L$

משפט: תהי $a_n>0$ לכל n. אם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=L$ אז: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$.

משפט:
1. יהי $C>0$, אזי: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{C}=1$.
2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

הגדרה: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}a_n}=\infty$ (או $\boldsymbol{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$) אם לכל M קיים N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $a_n>M$.

מינוח: אם a_n מתכנסת (לגבול סופי L) או ש-a_n שואפת ל-∞ או ל-$-\infty$, אז נאמר ש-a_n **מתכנסת במובן הרחב**.

משפט: $a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty \Leftarrow \frac{1}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

משפט: $0<a_n\xrightarrow[n\to\infty]{}0 \Leftarrow \frac{1}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$

משפט: יהי $|q|<1$, אזי: $q^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

משפט: **(הפיצה)** אם $a_n\leq b_n$ לכל n ו- $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$, אזי: $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$.

משפט: **(מבחן השורש לסדרות)** תהי $0<a_n$ לכל n. אם $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ קיים, אז:

1. אם $q<1 \Leftarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$.
2. אם $q>1 \Leftarrow \lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

משפט: **(מבחן המנה לסדרות)** תהי $a_n > 0$ לכל n. אם $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ קיים, אז:

1. אם $q < 1 \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
2. אם $q > 1 \Leftarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

הגדרה: סדרה a_n תיקרא **מונוטונית** במקרים הבאים: (מינוח חלופי)

- אם $a_n < a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **עולה ממש**. (עולה)
- אם $a_n \le a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **עולה**. (לא יורדת)
- אם $a_n > a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **יורדת ממש**. (יורדת)
- אם $a_n \ge a_{n+1}$ לכל n, אז הסדרה **יורדת**. (לא עולה)

הערה: אפשר לדבר על מונוטוניות החל ממקום מסויים.

משפט: תהי a_n סדרה מונוטונית וחסומה, אזי a_n מתכנסת.

משפט: כל סדרה מונוטונית, מתכנסת במובן הרחב.

סיכום:

- a_n עולה וחסומה מלמעלה $\Leftarrow$ מתכנסת ל-sup
- a_n יורדת וחסומה מלמטה $\Leftarrow$ מתכנסת ל-inf
- a_n עולה ולא חסומה מלמעלה $\Leftarrow$ שואפת ל-∞
- a_n יורדת ולא חסומה מלמטה $\Leftarrow$ שואפת ל-$-\infty$

למה: **(הלמה של קנטור)** יהיו a_n ו-b_n שתי סדרות המקיימות:

1. $b_n - a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$
2. $a_n \le a_{n+1} \le b_{n+1} \le b_n$ לכל n

אזי, שתיהן מתכנסות ואותו הגבול.

למה: **(הלמה של קנטור בניסוח גיאומטרי)** תהי $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קטעים סגורים כך ש:

1. אורכי הקטעים שואפים ל-0.
2. לכל n מתקיים: $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$

אזי קיימת נקודה c יחידה המקיימת $c \in [a_n, b_n]$ לכל n.

הערה: המשפט אינו נכון עם קטעים פתוחים.

הגדרה: תהי a_n סדרה. סדרה המתקבלת מ-a_n ע"י מחיקת חלק מהאיברים נקראת **תת-סדרה (ת"ס)**.

סימון: מסמנים את איברי תת הסדרה: $\{a_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$

משפט: אם a_n מתכנסת (כולל במובן הרחב), אזי כל תת-סדרה שלה מתכנסת לאותו הגבול.

הגדרה: גבול של תת-סדרה נקרא **גבול חלקי (ג"ח)** של הסדרה המקורית.

טענה: L הינו גבול חלקי של $a_n \Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ יש ∞ מאיברי הסדרה בקטע $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

משפט: **(בולצאנו-ויירשטראס/BW)** לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.

מסקנות:

1. לכל סדרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד.
2. לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.
3. לכל סדרה יש לפחות גבול חלקי אחד במובן הרחב.
4. סדרה מתכנסת (במובן הרחב) $\Leftrightarrow$ יש לה בדיוק גבול חלקי אחד (במובן הרחב).
5. לכל סדרה יש תת-סדרה מונוטונית.

הגדרה: תהי a_n סדרה חסומה. נסמן: אוסף הגבולות החלקיים של $a_n = \mathcal{L}$.

הקבוצה $\mathcal{L}$ היא קבוצה חסומה ולא ריקה (לפי BW), ולכן לפי אקסיומת השלמות יש לה sup ו-inf:

- ה-sup של אוסף הגבולות החלקיים של a_n נקרא **הגבול העליון** של a_n, ומסומן: $\lim_{n\to\infty}\sup a_n$ או $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.
- ה-inf של אוסף הגבולות החלקיים של a_n נקרא **הגבול התחתון** של a_n, ומסומן: $\lim_{n\to\infty}\inf a_n$ או $\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n$.

משפט: $\overline{lim}$ ו-$\underline{lim}$ הם בעצמם גבולות חלקיים (כלומר, הם ה-max וה-min של $\mathcal{L}$).

הערות:

1. a_n מתכנסת $\Leftrightarrow \overline{lim} = \underline{lim}$.
2. הגבול העליון והתחתון לא מקיימים כללי חשבון גבולות.
3. כל איברי a_n למעט מספר סופי, נמצאים ב-$(\underline{lim} - \varepsilon, \overline{lim} + \varepsilon)$.
4. אם a_n לא חסומה מלמעלה, אז $\overline{lim} a_n = \infty$.

   אם a_n לא חסומה מלמטה, אז $\underline{lim} a_n = -\infty$.

הגדרה: תהי a_n סדרה ב-$\mathbb{R}$. a_n נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N, כך שלכל $m,n > N$ מתקיים: $|a_n - a_m| < \varepsilon$.

(שקול:) a_n נקראת **סדרת קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים N, כך שלכל $n > N$ ולכל $p \in \mathbb{N}$ מתקיים: $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

משפט: כל סדרת קושי היא חסומה.

משפט: a_n סדרת קושי $\Leftrightarrow$ a_n מתכנסת.

הערות:

1. זו הגדרה שקולה להתכנסות, אבל בלי לציין במפורש מהו L.
2. המשפט אינו נכון מעל $\mathbb{Q}$: תיתכן סדרת קושי של רציונליים שלא מתכנסת ב-$\mathbb{Q}$ (כי גבולה אי-רציונלי).
3. לא מספיק לדרוש: $|a_{n+1} - a_1| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

הגדרה: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, ותהי Σ אוסף של קטעים. אומרים ש-Σ הוא **כיסוי** של A אם לכל $x \in A$ קיים $I \in \Sigma$ כך ש-$x \in I$.

- אם כל הקטעים ב-Σ הם פתוחים, אז זהו **כיסוי פתוח**.
- אם ב-Σ יש מספר סופי של קטעים אז זהו **כיסוי סופי**.
- אם $\Sigma^* \subset \Sigma$ ו-Σ^* מכסה את A, אז Σ^* נקרא **תת-כיסוי**.

למה: **(הלמה של היינה-בורל)** יהי Σ כיסוי פתוח של קטע סגור, אזי יש לו תת-כיסוי סופי.

הגדרה: **(חזקות שלמים)** לכל $0 < x \in \mathbb{R}$ ולכל $n \in \mathbb{N}$ קיים $0 < y \in \mathbb{R}$ יחיד כך ש-$y^n = x$.

הגדרה: **(חזקות רציונאליות)** עבור $a > 0$ ו-$q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (נוכל להניח $n > 0$). נגדיר: $a^q = a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$

הערה: נשים לב כי: $\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

מתקיימים כללי החזקות המוכרים, למשל:

1. $a^p a^q = a^{p+q}$
2. $(a^p)^q = a^{pq}$
3. $a^p b^p = (ab)^p$
4. $a > b > 0\,, p > 0 \Leftarrow a^p > b^p$
5. $a > 1\,, p > q \Leftarrow a^p > a^q$
6. $1 > a > 0\,, p > q \Leftarrow a^p < a^q$

הגדרה: **(חזקות ממשיות)** $a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n}$ כאשר $x \xleftarrow[n\to\infty]{} x_n \in \mathbb{Q}$.

משפט: יהיו $a, b > 0$ ויהיו $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $a^x a^y = a^{x+y}$
2. $(a^x)^y = a^{xy}$
3. $(ab)^x = a^x b^x$
4. אם $b > a > 0$ אז:
   - $x > 0 \Leftarrow a^x < b^x$
   - $x < 0 \Leftarrow a^x > b^x$
5. אם $x < y$ אז:
   - $a > 1 \Leftarrow a^x < a^y$
   - $1 > a > 0 \Leftarrow a^x > a^y$
6. אם $\mathbb{R} \ni x_n \to x$ אז: $a^{x_n} \to a^x$
7. אם $0 < a_n \to a$ אז: $a_n^x \to a^x$
8. אם $x_n \to \infty$ אז:
   - $a > 1 \Leftarrow a^{x_n} \to \infty$

9. אם $x_n \to -\infty$ אז:
- $1 > a > 0 \Leftarrow a^{x_n} \to 0$
- $a > 1 \Leftarrow a^{x_n} \to 0$
- $1 > a > 0 \Leftarrow a^{x_n} \to \infty$

הגדרה: בהינתן שתי קבוצות: D, E, **פונקציה** היא כלל המתאים לכל איבר $x \in D$ איבר יחיד $y \in E$.

- $f: D \to E$, כאשר: D הינו **תחום/תחום ההגדרה**, $\to$ הינו כלל ההעתקה ו-E הינו הטווח.
- בדרך כלל, f נתונה ע"י נוסחה: $y = f(x)$, כאשר: $y \in E$ **התמונה** של x, ו-$x \in D$ **המקור**.
- $f(D) \subseteq E$ **התמונה** של f.

הגדרה: f נקראת **מונוטונית** בתחום D אם לכל $x_1, x_2 \in D$:
- **עולה:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- **עולה ממש:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- **יורדת:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$
- **יורדת ממש:** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

הגדרה:
- f נקראת **זוגית** אם לכל $x \in D$: $f(-x) = f(x)$.
- f נקראת **אי-זוגית** אם לכל $x \in D$: $f(-x) = -f(x)$.

הגדרה: f נקראת **מחזורית** אם קיים P כך שלכל x: $f(x + P) = f(x)$.

הגדרה:
- f נקראת **חסומה מלמעלה** אם קיים M כך ש-$f(x) \le M$ לכל x.
- f נקראת **חסומה מלמטה** אם קיים m כך ש-$f(x) \ge m$ לכל x.
- f נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלמעלה ומלמטה.

הגדרה:
- $\sup f$ הינו $\sup\{f(x) | x \in D\}$, ו-$\max f$ מוגדר להיות הסופרמום אם קיים x כך ש-$f(x) = \sup f$.
- $\inf f$ הינו $\inf\{f(x) | x \in D\}$, ו-$\min f$ מוגדר להיות האינפימום אם קיים x כך ש-$f(x) = \inf f$.

פעולות על פונקציות:

חיבור / חיסור: $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$

כפל: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

חילוק: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (g(x) \neq 0)$

הרכבה: (התמונה של g צריכה להיות מוכלת בתחום של f) $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

הגדרה: f נקראת **חד-חד-ערכית (חח"ע)** בתחום D אם: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(**שקול:** $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)

הגדרה: $f: D \to E$ נקראת **על** E אם לכל $y \in E$ קיים $x \in D$ כך ש-$f(x) = y$.
(**שקול:** $f(D) = E$)

הגדרה: $f: D \to E$ נקראת **הפיכה** אם קיימת $f^{-1}: E \to D$ כך ש:

$f^{-1}\left(f(x)\right)=x$ ו- $f\left(f^{-1}(y)\right)=y$ לכל $x\in D$ ולכל $y\in E$.

משפט: f הפיכה $\Leftrightarrow$ f חח״ע ועל.

הגדרה: **פונקציה אלמנטרית** היא כל פונקציה שמתקבלת ממשפחות הפונקציות הבאות ע״י הפעולות: $\circ, \div, \cdot, -, +$.

- **פולינומים:** $p(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$
- **פונקציות רציונאליות:** $\frac{p(x)}{q(x)}$, כאשר $p(x), q(x)\neq 0$ פולינומים.
- **פונקציות טריגונומטרית:** $\sin x, \cos x, \tan x$.
- **פונקציות מערכיות:** a^x, $0<a\neq 1$.
- כל הפונקציות ההפוכות למשפחות הנ״ל: $\sqrt{x}$, $\sin^{-1}x$, $\log_a x$, וכו׳.

הגדרה: $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x)=L}$ (או $\boldsymbol{f(x)\xrightarrow[x\to\infty]{} L}$) אם לכל $0<\varepsilon$ קיים M כך ש- $x>M \Leftarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

משפט: **(הסנדוויץ׳)** אם לכל $x_0<x$ מתקיים: $g(x)\le f(x)\le h(x)$ ו- $\lim_{x\to\infty} h(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=L$, אזי: $\lim_{x\to\infty} f(x)=L$

הגדרה: $\boldsymbol{\lim_{x\to a} f(x)=L}$ (או $\boldsymbol{f(x)\xrightarrow[x\to a]{} L}$) אם לכל $0<\varepsilon$ קיים $0<\delta$ כך ש- $0<|x-a|<\delta \Leftarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

(**שקול:** $a-\delta<x<a+\delta$, $x\neq a \Leftarrow L-\varepsilon<f(x)<L+\varepsilon$)

משפט: תהי f פונקציה אלמנטרית המוגדרת בסביבה של a, אזי: $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

משפט: **(יחידות הגבול)** אם קיים הגבול, אז הוא יחיד.

משפט: אם קיים $\lim_{x\to a} f(x)=L$, אז f חסומה בסביבה נקובה של a.

הוכחה:

ניקח $\varepsilon=1$. לפי הגדרת הגבול קיים δ כך שלכל x בסביבה הנקובה $0<|x-a|<\delta$, מתקיים: $L-1<f(x)<L+1$, ולכן f חסומה בסביבה הזו.

משפט: אם קיים $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו-$L>0$, אזי קיימת סביבה נקובה של a שבה f חיובית.

משפט: **(אריתמטיקה של גבולות)** נניח כי $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ו- $\lim_{x\to a} g(x)=M$, אזי:

1. $C\cdot f(x)\xrightarrow[x\to a]{} C\cdot L$
2. $f(x)\pm g(x)\xrightarrow[x\to a]{} L\pm M$
3. $f(x)\cdot g(x)\xrightarrow[x\to a]{} L\cdot M$
4. $\frac{f(x)}{g(x)}\xrightarrow[x\to a]{}\frac{L}{M}$ ($M\neq 0$, $g(x)\neq 0$ בסביבה)

משפט: 1. $f(x)\xrightarrow[x\to a]{} 0 \Leftrightarrow |f(x)|\xrightarrow[x\to a]{} 0$

2. $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} L \Leftarrow |f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |L|$

משפט: 1. אם $f(x) \geq 0$ ו-$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, אזי: $L \geq 0$

2. אם $f(x) \geq g(x)$ ו-$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = K$, אזי: $L \geq K$

משפט: אם $g(x)$ חסומה ו-$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, אזי: $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

משפט: **(הסנדוויץ')** אם $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ו-$\lim\limits_{x\to a} g(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, אזי: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

משפט: **(היינה)** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow$ לכל סדרה $a \neq x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים: $y_n = f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} L$.

הגדרה: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L}$ (x שואף ל-a מימין) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $x \in (a, a+\delta) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L}$ (x שואף ל-a משמאל) אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $x \in (a-\delta, a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

משפט: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ שני הגבולות החד-צדדיים קיימים ושווים.

משפט: אם f מונוטונית בקטע I אז יש ל-f גבולות חד-צדדיים בכל נקודה פנימית בקטע.

הגדרה: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \infty$ אם לכל M קיים $\delta > 0$ כך ש-$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$.

משפט: **(הפיצה)** אם $f(x) \leq g(x)$ בסביבה מנוקבת של a, ו-$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, אזי: $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$.

הגדרה: תהי f מוגדרת בסביבה נקובה של a. נאמר ש-f מקיימת **תנאי קושי** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $0 < |x-a| < \delta$ וגם $0 < |y-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

משפט: $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים $\Leftrightarrow$ f מקיימת תנאי קושי ב-a.

הגדרה: f נקראת **רציפה בנקודה $\boldsymbol{a}$** אם $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

(שקול:) f **רציפה בנקודה $\boldsymbol{a}$** $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

(שקול:) f **רציפה בנקודה $\boldsymbol{a}$** $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ מתקיים: $f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a)$.

משפט: כל פונקציה אלמנטרית היא רציפה בכל נקודה בתחום הגדרתה.

משפט: אם g רציפה ב-a ו-f רציפה ב-$g(a)$, אזי $f \circ g$ רציפה ב-a.

סוגי נקודות אי-רציפות:

0. **סליקה:** הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים, אבל לא שווה ל-$f(a)$.
1. **קפיצה:** שני הגבולות החד-צדדיים קיימים, אבל שונים.
2. **עיקרית:** לפחות אחד הגבולות החד-צדדיים אינו קיים.

משפט: לפונקציה מונוטונית ייתכנו נקודות אי-רציפות רק מסוג קפיצה (בנקודה פנימית לקטע בו f מוגדרת).

הגדרה:

- f **רציפה מימין** בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- f **רציפה** בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

משמאל

הגדרה: f **רציפה בקטע (a,b)** אם היא רציפה בכל $x_0 \in (a,b)$.

הגדרה: f **רציפה בקטע $[a,b]$** אם היא רציפה ב-(a,b), ובנוסף רציפה מימין ב-a ורציפה משמאל ב-b.

משפט: **(מקרה פרטי של משפט עה"ב)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה.
אם ל-$f(a)$ ול-$f(b)$ יש סימנים הפוכים, אזי קיימת $a<c<b$ כך ש-$f(c)=0$.

הערה: דרך הוכחת המשפט היא למעשה אלגוריתם למציאת שורשים של פונקציה, שנקרא **"שיטת החצייה"**.

משפט: **(ערך הביניים / עה"ב)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה, ויהי y_0 מספר בין $f(a)$ ל-$f(b)$.
אזי קיים $a<x_0<b$ כך ש-$f(x_0)=y_0$.

משפט: **(ויירשטראס)** תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי:
1. f חסומה.
2. f מקבלת מינימום ומקסימום.

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי התמונה של f היא קטע סגור.

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ מונוטונית.
f רציפה $\Leftrightarrow$ התמונה של f היא קטע סגור.

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית ממש, אזי f הפיכה, ו-f^{-1} גם רציפה ומונוטונית ממש.

משפט: תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה וחח"ע, אזי f מונוטונית ממש.

הגדרה: $f(x)$ תיקרא **רציפה במידה שווה (במ"ש)** בתחום D אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in D$ אם $|x-y|<\delta$ אז $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.
אינטואיציה: אם ל-f יש "תלילות חסומה", אזי f רציפה במ"ש.
הערה: ההיפך אינו נכון.

משפט: אם f רציפה במ"ש ב-D, אזי f רציפה ב-D.

משפט: **(קנטור-היינה)** אם f רציפה ב-$[a,b]$, אזי היא רציפה במ"ש.

הגדרה: נאמר ש-f **גזירה** בנקודה x_0 אם קיים הגבול:
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
מסמנים גבול זה ע"י $f'(x_0)$ או $\frac{df}{dx}$ וקוראים לו **הנגזרת** של f ב- x_0.

(שקול:) מסמנים $h=x-x_0$ ואז הגבול בהגדרה הוא:
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

הגדרה: אם ל-f יש נגזרת ב-x_0, אז הישר שעובר דרך $(x_0,f(x_0))$ ששיפועו $f'(x_0)$ נקרא **המשיק** לגרף של f בנקודה x_0.
משוואת המשיק: $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

משפט: אם f גזירה ב-x_0, אזי f רציפה ב-x_0.

מסקנה: אם f לא רציפה ב-x_0, אזי היא לא גזירה ב-x_0, אולם ההיפך אינו נכון.

אינטואיציה: לפונקציה גזירה אין "שפיצים", ולכן קוראים לפונקציה גזירה גם **"פונקציה חלקה"**.

הגדרה:
- f **גזירה מימין** ב-x_0 אם קיים הגבול: $f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- f **גזירה משמאל** ב-x_0 אם קיים הגבול: $f'_-(x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

משפט: (כללי גזירה) אם f ו-g גזירות ב-x_0, אזי:

1. $(c\cdot f)'(x_0) = c\cdot f'(x_0)$
2. $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$
3. $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x)}$ בתנאי ש-$g(x_0)\neq 0$

משפט: f גזירה ב- x_0 $\Leftrightarrow$ קיים $A\in\mathbb{R}$ כך ש- $f(x_0+h)-f(x_0) = Ah+\alpha(h)h$ כאשר $\alpha(h)\xrightarrow[h\to 0]{} 0$.

משפט: (כלל השרשרת) אם f גזירה ב-x_0 ו-g גזירה ב-$f(x_0)$, אזי: $(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{הנגזרת הפנימית}}$

משפט: (נגזרת של פונקציה הפוכה) תהי $y=f(x)$ פונקציה הפיכה ורציפה בסביבה של x_0, גזירה בנקודה x_0 ו-$f'(x_0)\neq 0$, אזי גם $x=f^{-1}(y)$ גזירה בנקודה $y_0=f(x_0)$ ו- $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

כללי גזירה (מסדר גבוה):

1. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)}+g^{(n)}$
2. $(c\cdot f)^n = c\cdot f^{(n)}$
3. $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(k)}g^{(n-k)}$ (נוסחת לייבניץ)

הערה: f גזירה $\nRightarrow$ f' רציפה.

הגדרה:
- x_0 תיקרא **מקסימום מקומי** של f אם לכל x בסביבה של x_0 מתקיים $f(x)\le f(x_0)$.
- x_0 תיקרא **מינימום מקומי** של f אם לכל x בסביבה של x_0 מתקיים $f(x)\ge f(x_0)$.
- מינימום או מקסימום מקומי נקרא **קיצון מקומי**.
- אם x_0 מינימום/מקסימום בכל התחום, אז הוא נקרא מינימום/מקסימום **מוחלט**.

הגדרה: x_0 נקראת **נקודה קריטית (חשודה כקיצון)** אם $f'(x_0)=0$ או ש-$f'(x_0)$ לא קיימת (או ש-x_0 קצה של התחום).

משפט: (פרמה) אם f גזירה ב-x_0, ו-x_0 היא קיצון מקומי של f בקטע (a,b), אזי $f'(x_0)=0$.

משפט: (רול) אם f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) ו-$f(a)=f(b)$, אזי קיימת $a<c<b$ כך ש-$f'(c)=0$.

משפט: (לגרנז') אם f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b), אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

משפט: תהי f גזירה ב-(a,b), אזי: f קבועה $\Leftrightarrow$ $f'(x)=0$ לכל $x\in(a,b)$.

משפט: תהי f גזירה ב-(a,b), אזי:

- אם $f'>0$ לכל x בקטע, אזי f עולה ממש בקטע.
- אם $f'<0$ לכל x בקטע, אזי f יורדת ממש בקטע.

משפט: **(קושי)** אם f,g רציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b) ו-$g'(x)\neq 0$ בקטע, אזי:

1. $g(a)\neq g(b)$.
2. קיימת $a<c<b$ כך ש-$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

משפט: **(דרבו)** תהי f גזירה ב-$[a,b]$ ויהי $\lambda\in\mathbb{R}$ בין $f'_+(a)$ לבין $f'_-(b)$, אזי קיימת $a<c<b$ כך ש-$f'(c)=\lambda$.

משפט: תהי f רציפה בסביבת x_0 וגזירה בסביבה מנוקבת של x_0 (כלומר, לא נתון ש-f גזירה ב-x_0 עצמה).
אם קיים $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=L$, אזי f גזירה ב-x_0 ו-$f'(x)=L$.

מסקנה:

אם f גזירה ב-$[a,b]$, אזי ל-f' ייתכנו רק אי-רציפויות מסוג עיקרי.

משפט: אם f גזירה בקטע I, ו-f' חסומה, אזי f רציפה במ"ש.

הגדרה: f נקראת **ליפשיצית** אם קיים K כך ש-$|f(x)-f(y)|<K|x-y|$ לכל x,y בקטע.

הערה: f' חסומה $\Leftarrow$ f ליפשיץ $\Leftarrow$ f רציפה במ"ש $\Leftarrow$ f רציפה.

משפט: **(לופיטל)** יהיו f ו-g גזירות בסביבה (מנוקבת) של a. נניח כי:

1. $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$
2. $g'(x)\neq 0$ בסביבה מנוקבת של a.
3. קיים $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$

אזי: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$

הערות:

1. ב-(1): במקום a, ניתן גם $a^{\pm}$ או $\pm\infty$, ובמקום 0 ניתן גם $\pm\infty$.
2. ב-(3): L יכול להיות גם במובן הרחב.

טענת עזר: יהי $P_n(x)$ פולינום ממעלה n:

$$P_n(x)=\beta_0+\beta_1(x-x_0)+\beta_2(x-x_0)^2+\beta_3(x-x_0)^3+\cdots+\beta_n(x-x_0)^n$$

אזי לכל $0\leq k\leq n$ מתקיים: $P_n^{(k)}(x_0)=\beta_k\cdot k!$.

מסקנה: $\beta_k=\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}$ לכל $0\leq k\leq n$.

הגדרה: **פולינום טיילור** ממעלה n של f ליד x_0:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

כאשר $x_0 = 0$ קוראים לו גם פולינום **מקלורן**.

משפט: **(טיילור)** תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה x_0, ותהי x נקודה כלשהי בסביבה הזו.
אזי קיימת נקודה c בין x לבין x_0, כך ש-$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$, כאשר:

- $P_n(x)$ הוא פולינום טיילור:

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- $R_n(x)$ היא השארית בצורת לגרנז':

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

טענה: e אינו רציונאלי.

משפט: תהי f פונקציה גזירה ∞ פעמים בסביבת x_0, ונניח שיש קבוע K כך ש-$\left|f^{(n)}(x)\right| < K$ ("הנגזרות חסומות במשותף")
לכל x בסביבה ולכל n, אזי: $R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ בכל x בסביבה.

משפט: תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0. נסמן: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. אזי:

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$$

סימון: ביטוי $\alpha(x)$ שמקיים: $\frac{\alpha(x)}{(x-x_0)^n} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ נקרא ומסומן: $\theta((x-x_0)^n)$

משפט: **(מבחן הנגזרת ה-I)** תהי x_0 נקודה קריטית של f. נניח ש-f רציפה ב-x_0 וגזירה בסביבה (מנוקבת) של x_0. אזי:

- אם f' מחליפה סימן מחיובי לשלילי ב-x_0, אזי x_0 מקסימום מקומי.
- אם f' מחליפה סימן משלילי לחיובי ב-x_0, אזי x_0 מינימום מקומי.
- אם f' לא מחליפה סימן ב-x_0, אזי x_0 אינה נקודת קיצון.

משפט: **(מבחן הנגזרת ה-II)** תהי x_0 נקודה קריטית של f, ונניח ש-f גזירה פעמיים ב-x_0. אזי:

- אם $f''(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי.
- אם $f''(x_0) < 0$ אז x_0 מקסימום מקומי.

משפט: **(מבחן הנגזרת ה-n'ית)** תהי f גזירה n פעמים בנקודה x_0 כך ש- $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$
ו-$f^{(n)}(x_0) \neq 0$, אזי:

- אז x_0 לא קיצון מקומי.
- אז x_0 קיצון מקומי וגם:
  - $f^{(n)}(x_0) > 0 \Leftarrow x_0$ מינימום.
  - $f^{(n)}(x_0) < 0 \Leftarrow x_0$ מקסימום.

הגדרה:
- f תיקרא **קמורה** בקטע I אם לכל $x, y \in I$ המיתר שמחבר את $(x, f(x))$ ו-$(y, f(y))$ נמצא מעל לגרף.
- f תיקרא **קעורה** בקטע I אם לכל $x, y \in I$ המיתר שמחבר את $(x, f(x))$ ו-$(y, f(y))$ נמצא מתחת לגרף.

(שקול:) f **קמורה** בקטע I אם לכל $x, y \in I$ ולכל $0 \le t \le 1$ מתקיים: $f(tx + (1-t)y) \le tf(x) + (1-t)f(y)$

הגדרה: x_0 נקראת **נקודת פיתול** של f, אם f קמורה מצד אחד של x_0 וקעורה מהצד השני, ורציפה ב-x_0.

הגדרה: $x = x_0$ נקרא **אסימפטוטה אנכית** אם: $\lim_{x\to x_0^+} = \infty$ (או $\lim_{x\to x_0^+} = -\infty$ או $\lim_{x\to x_0^-} = \infty$ או $\lim_{x\to x_0^-} = -\infty$).

הגדרה: $y = ax + b$ נקרא **אסימפטוטה משופעת (אופקית** כאשר $a = 0$) אם: $\lim_{x\to \underbrace{\infty}_{\text{או } -\infty}} \left(f(x) - (ax+b)\right) = 0$

איך מוצאים אסימפטוטות משופעות?

אם $f(x) - ax - b \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, אז $\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$, ולכן: $\boxed{a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}}$ ואז: $\boxed{b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)}$.

למה: **(למת המיתרים)** תהי f קמורה ב-I ויהיו $x_1 < x_2 < x_3 \in I$, אזי:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \le \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$

משפט: f קמורה ב- (a,b) $\Leftarrow$ f רציפה ב-(a,b).

משפט: תהי f גזירה ב- (a,b) אזי: f קמורה $\Leftrightarrow$ בכל $x_0 \in (a,b)$ המשיק מתחת לגרף.

משפט: תהי f גזירה ב- (a,b) אזי: f קמורה $\Leftrightarrow$ f' עולה.

משפט: תהי f גזירה פעמיים ב- (a,b) אזי: f קמורה $\Leftrightarrow$ $f'' > 0$.

מסקנה:

אם f גזירה פעמיים ב-I ו-f'' משנה סימן ב-x_0, אזי x_0 פיתול.

הערה:

אם f גזירה פעמיים ב-I ו-f'' רציפה ב-I ו-x_0 נקודת פיתול, אזי $f''(x_0) = 0$.

(לכן נקודות שמקיימות $f''(x_0) = 0$ הן **"חשודות כפיתול"**).

משפט: אם f גזירה וקמורה ב- (a,b) ו-x_0 נקודה קריטית, אזי x_0 מינימום מקומי.