並列機械モデルにおける
最大待ち時間最小化問題の計算論的分析

15713004 天本 祐希

宋研究室

2018 年 2 月 6 日

目次

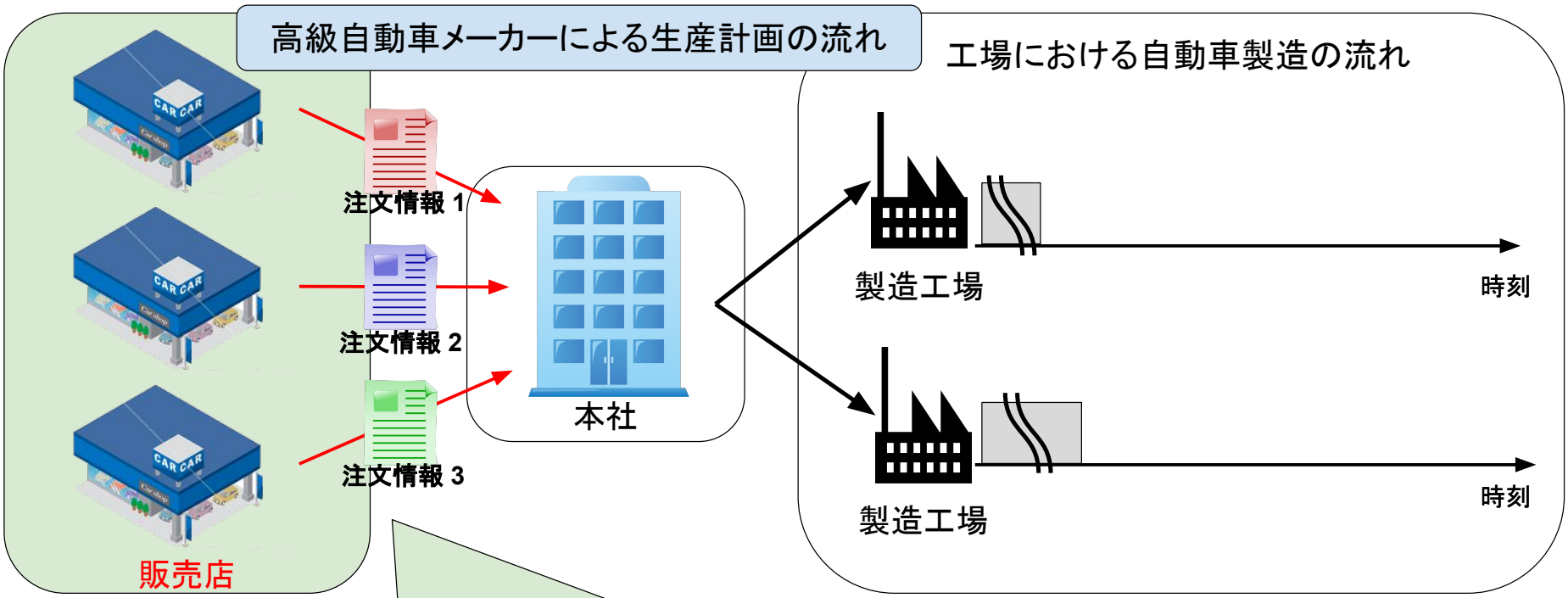
目次

研究背景と目的：受注生産方式における生産計画の流れ

受注生産方式とは

顧客注文を受けてから，その受注製品の生産を全体の生産計画に組み込むため，どの製造工場でいつ製造するかを決定する．

- 例えば，高級自動車メーカー，システムインテグレーターなど．



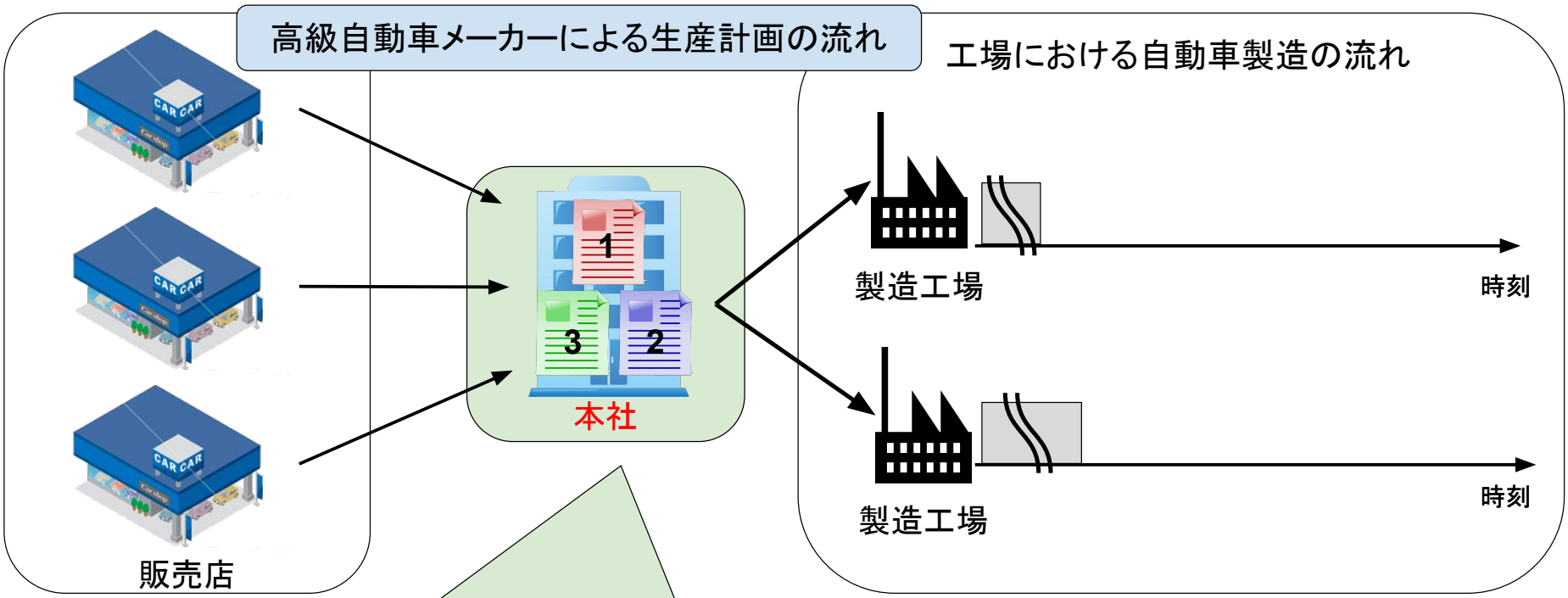
1：販売店は，顧客の注文情報を本社に送る．

研究背景と目的：受注生産方式における生産計画の流れ

受注生産方式とは

顧客注文を受けてから，その受注製品の生産を全体の生産計画に組み込むため，どの製造工場でいつ製造するかを決定する．

- 例えば，高級自動車メーカー，システムインテグレーターなど．



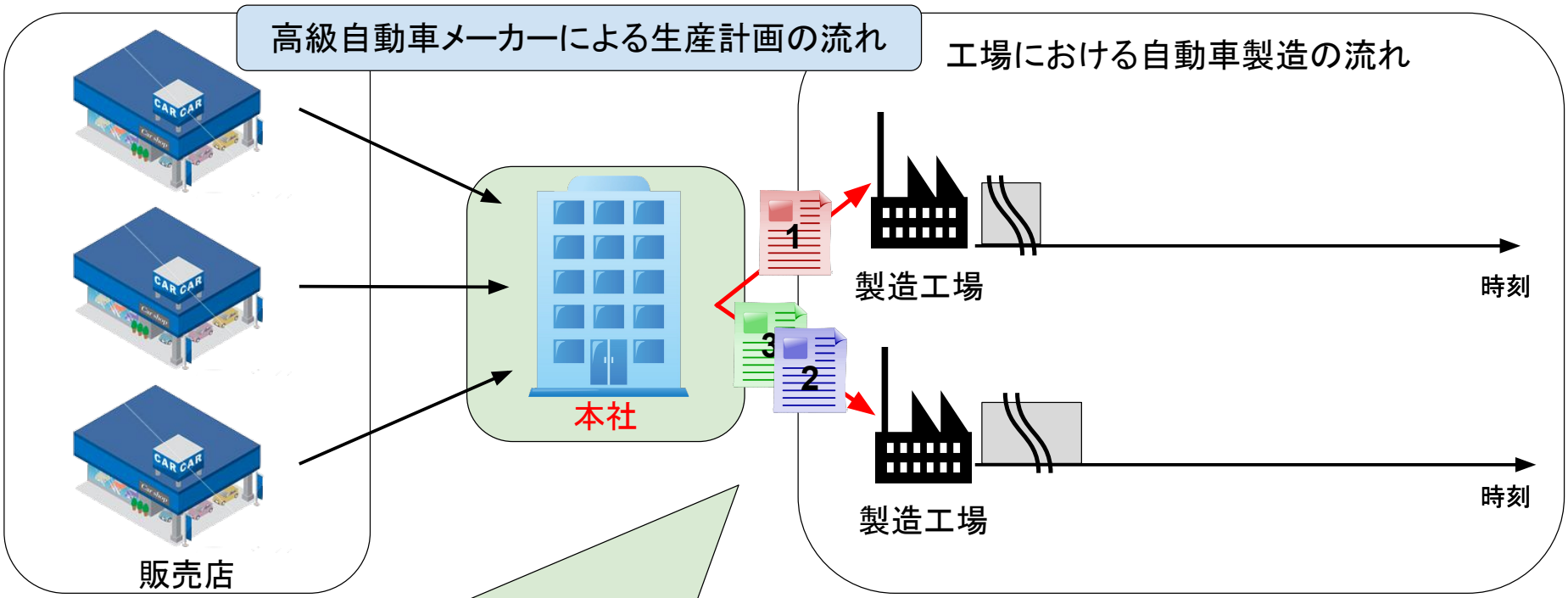
2：本社は，保有する製造工場の数と受注状況をもとに，
各製品の製造工場と製造開始日を決定する．

研究背景と目的：受注生産方式における生産計画の流れ

受注生産方式とは

顧客注文を受けてから，その受注製品の生産を全体の生産計画に組み込むため，どの製造工場でいつ製造するかを決定する．

- 例えば，高級自動車メーカー，システムインテグレーターなど．



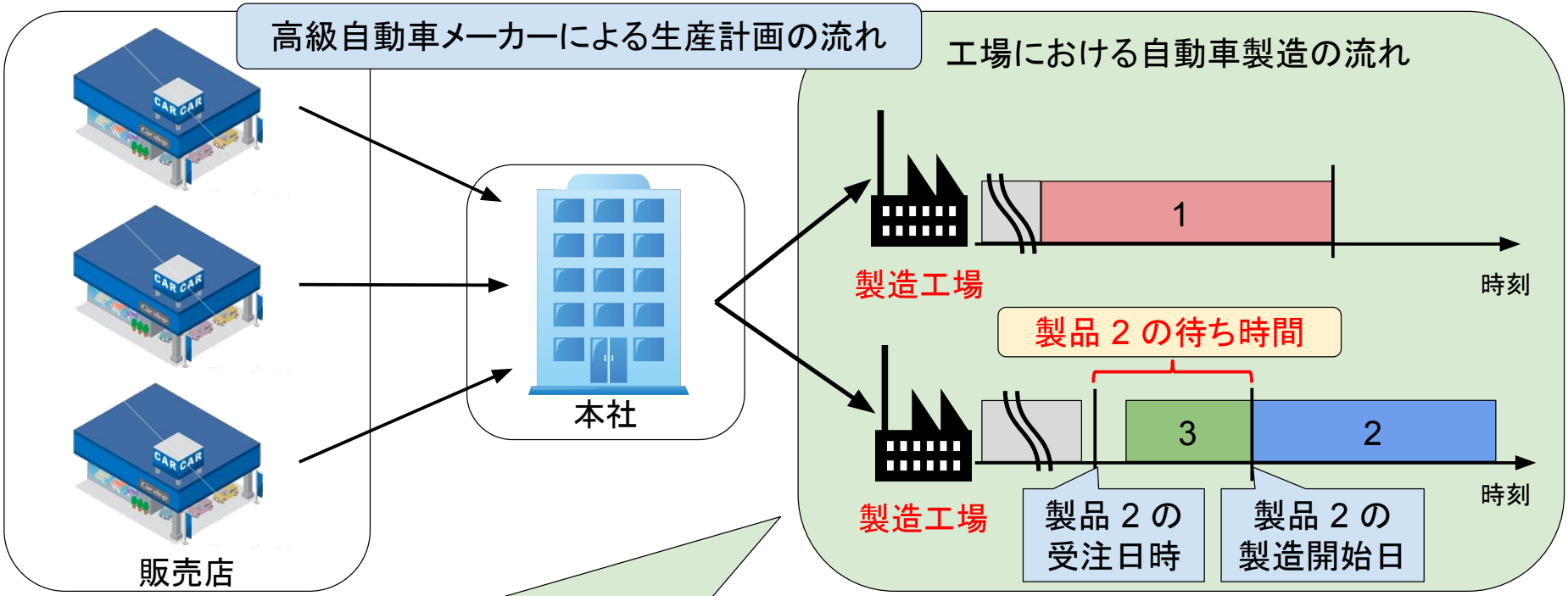
3：本社が，各製造工場に製品の製造を依頼する．

研究背景と目的：受注生産方式における生産計画の流れ

受注生産方式とは

顧客注文を受けてから，その受注製品の生産を全体の生産計画に組み込むため，どの製造工場でいつ製造するかを決定する．

- 例えば，高級自動車メーカー，システムインテグレーターなど．



4：各製造工場で，製品を製造する．

研究背景と目的：スケジューリング問題との対応

受注生産方式における問題点

製造工場の数と受注状況によって，受注から製造開始までの待ち時間が長くなり，顧客満足度の低下や注文のキャンセルなどに繋がる.

- 待ち時間を短縮するための生産計画を立てることは重要な課題である.

スケジューリング問題との対応

各注文をジョブ，受注日時を処理開始可能時刻，製造期間を処理時間と対応させることで，受注生産方式における生産計画を待ち時間を目的関数とするスケジューリング問題として捉えた.

研究目的

上記の問題を最大待ち時間最小化問題として定式化し，

- 問題の計算複雑さを明らかにする.
- 問題の計算複雑さを踏まえて，解法の提案を行う.

目次

諸定義：機械モデル

機械モデル

- 単一機械モデル
  - 1 つの機械で処理を行う.
  - 1 つの製造工場で製造する.
- 同一並列機械モデル
  - すべての機械の性能が等しい.
  - 複数の製造工場で製造し，各製造工場の設備が同じ.
- 一様並列機械モデル
  - 機械ごとに処理速度が異なる.
  - 複数の製造工場で製造し，製造工場ごとに設備が異なる.
- 無関連並列機械モデル
  - ジョブと機械の組み合わせによって処理時間が異なる.
  - 複数の製造工場で製造し，製造工場ごとに異なるメーカーの設備を導入しており，製造する製品によって製造期間が異なる.

- 無関連並列機械モデルは，すべての機械モデルを含んでいるため，最も一般的な機械モデルである.

諸定義：最大待ち時間最小化問題

最大待ち時間最小化問題を *Sequencing to minimize maximum Waiting Time* の頭文字をとって，SWT と表記する．

- 最も一般的な，無関連並列機械モデルにおける SWT を定式化する．

インスタンス：$\mathcal{I} = (\mathcal{J}, \mathcal{M}, r, p)$

- ジョブの集合 $\mathcal{J} = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$
- 無関連機械の集合 $\mathcal{M} = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$
- ジョブの処理開始可能時刻を返す関数 $r : \mathcal{J} \to \mathbb{N}$
- ジョブの処理時間を返す関数 $p : \mathcal{J} \times \mathcal{M} \to \mathbb{N}$

解：スケジュール (A, s)

- ジョブの機械への割り当てを返す関数 $A : \mathcal{J} \to \mathcal{M}$.
- ジョブの開始時刻を返す関数 $s : \mathcal{J} \to \mathbb{N}$.
  - 待ち時間は $s(J) - r(J)$.

諸定義：最大待ち時間最小化問題

制約

- 各ジョブは処理開始可能時刻以降に処理を開始する.
  - $\forall J \in \mathcal{J}\left[s(J) \geq r(J)\right]$
- 各機械は同時に複数のジョブを処理しない.
- 各ジョブの処理を開始すると，完了するまで中断しない.
  - $\forall J, J' \in \mathcal{J}\ \Big[\left[J \neq J' \wedge A(J) = A(J')\right] \Rightarrow$
    $\left[s(J), s(J) + p(J, A(J))\right) \cap \left[s(J'), s(J') + p(J', A(J'))\right) = \emptyset\Big]$

目的関数：最大待ち時間 $W_{\max}$

- ジョブの処理開始可能時刻から処理開始までの待ち時間の最大値.
  - $\varphi(A, s) = W_{\max} = \max_{J \in \mathcal{J}}\{s(J) - r(J)\}$

- 最大待ち時間 $W_{\max}$ の最小化を目的とする.

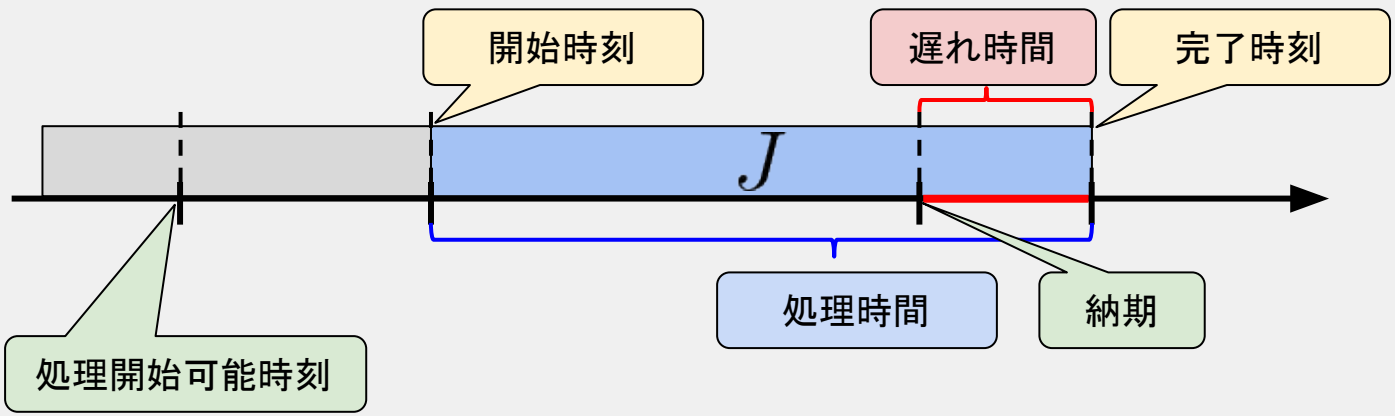
目次

目次

既存のスケジューリング問題との対応

処理開始可能時刻付き最大遅れ時間最小化問題 (SRTD) は，ジョブの納期から処理が完了するまでの遅れ時間の最大値の最小化を目的とするスケジューリング問題である．

処理開始可能時刻付き最大遅れ時間最小化問題 (SRTD) との対応



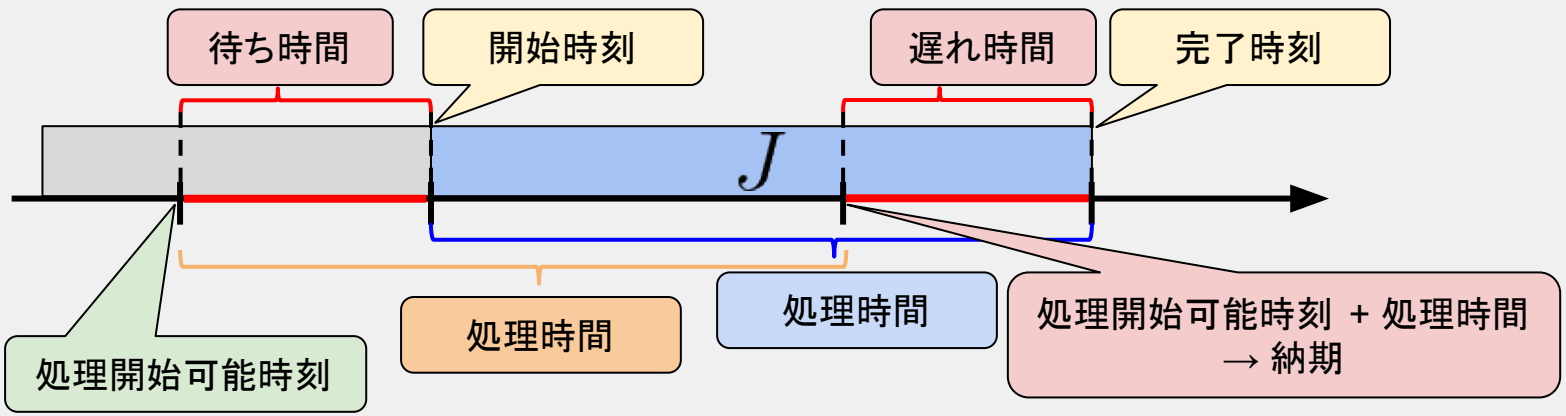
- 納期を処理開始可能時刻と処理時間の和と設定したとき，SRTD における遅れ時間は待ち時間として捉えることができる．

- SWT は SRTD の部分問題であり，SRTD は，単一機械モデルにおいて強 NP 困難であることが示されている [Garey & Johnson(1990)] が，SWT の計算複雑さは明らかでない．

既存のスケジューリング問題との対応

処理開始可能時刻付き最大遅れ時間最小化問題 (SRTD) は，ジョブの納期から処理が完了するまでの遅れ時間の最大値の最小化を目的とするスケジューリング問題である．

処理開始可能時刻付き最大遅れ時間最小化問題 (SRTD) との対応

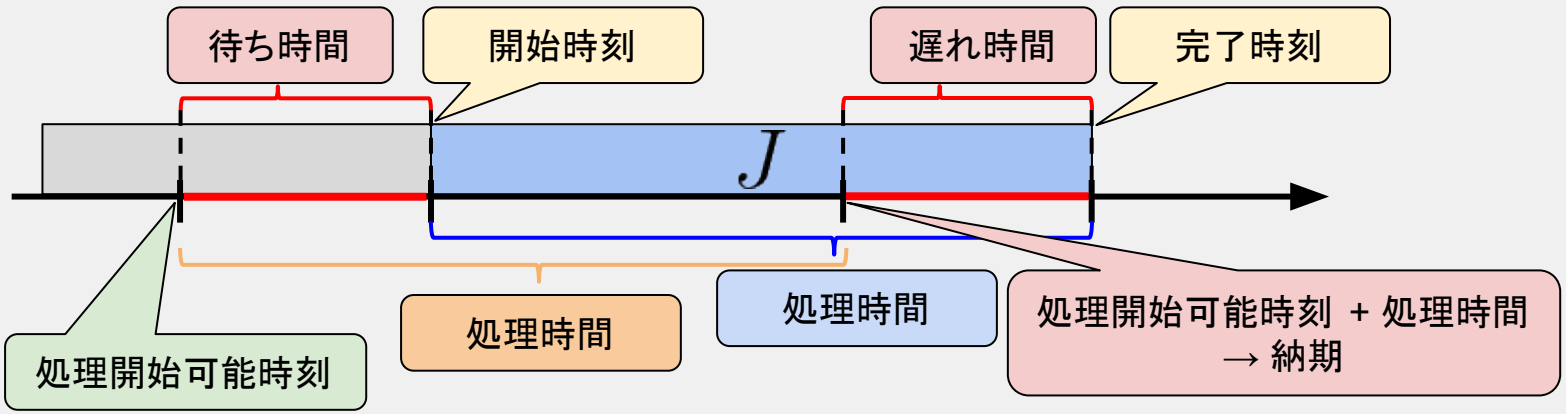


- 納期を処理開始可能時刻と処理時間の和と設定したとき，SRTD における遅れ時間は待ち時間として捉えることができる．
- SWT は SRTD の部分問題であり，SRTD は，単一機械モデルにおいて強 NP 困難であることが示されている [Garey & Johnson(1990)] が，SWT の計算複雑さは明らかでない．

既存のスケジューリング問題との対応

処理開始可能時刻付き最大遅れ時間最小化問題 (SRTD) は，ジョブの納期から処理が完了するまでの遅れ時間の最大値の最小化を目的とするスケジューリング問題である．

処理開始可能時刻付き最大遅れ時間最小化問題 (SRTD) との対応



- 納期を処理開始可能時刻と処理時間の和と設定したとき，SRTD における遅れ時間は待ち時間として捉えることができる．

- SWT は SRTD の部分問題であり，SRTD は，単一機械モデルにおいて強 NP 困難であることが示されている [Garey & Johnson(1990)] が，SWT の計算複雑さは明らかでない．

多項式時間還元の流れ

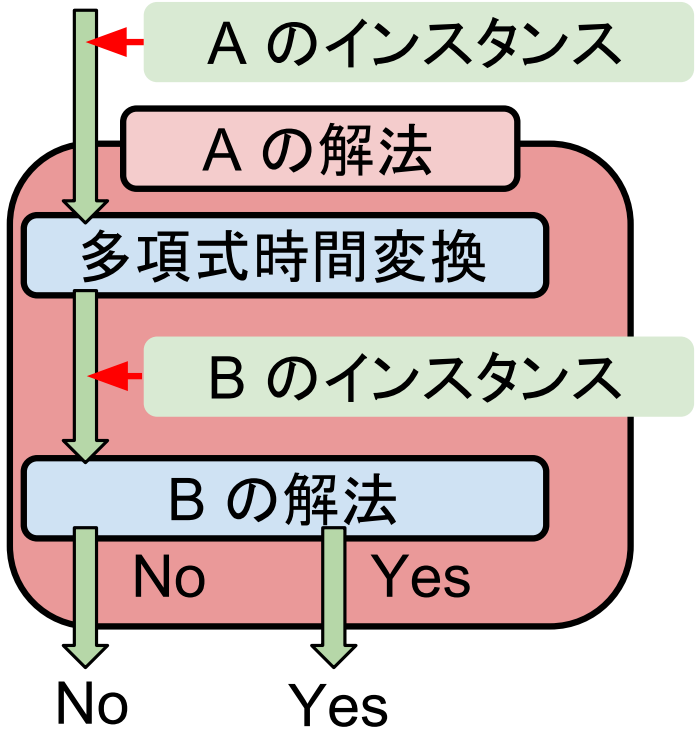
SWT の NP 完全性を示すため，NP 完全である 3-SATISFIABILITY (3-SAT) から多項式時間還元を行う．

多項式時間還元

問題 A の任意のインスタンスを，別の問題 B のあるインスタンスに多項式時間で判定結果が一致するように変換できるとき，

「A は B に多項式時間還元可能」という．

B の解法を用いて，A も解くことができるため，B は A と同等か，それ以上難しい．



3-SAT は決定問題の 1 つで，判定として Yes または No のいずれかを持つ．判定結果を一致させるために，問題 B を SWT のインスタンスに対して，待ち時間 w 以下となるスケジュールが存在するか，という決定問題として定義し，待ち時間制約付きスケジューリング問題と表す．

研究成果：問題の計算複雑さ

成果 1

無関連並列機械モデルにおいて，機械数が入力の一部の場合，SWT が NP 困難であることを明らかにした.

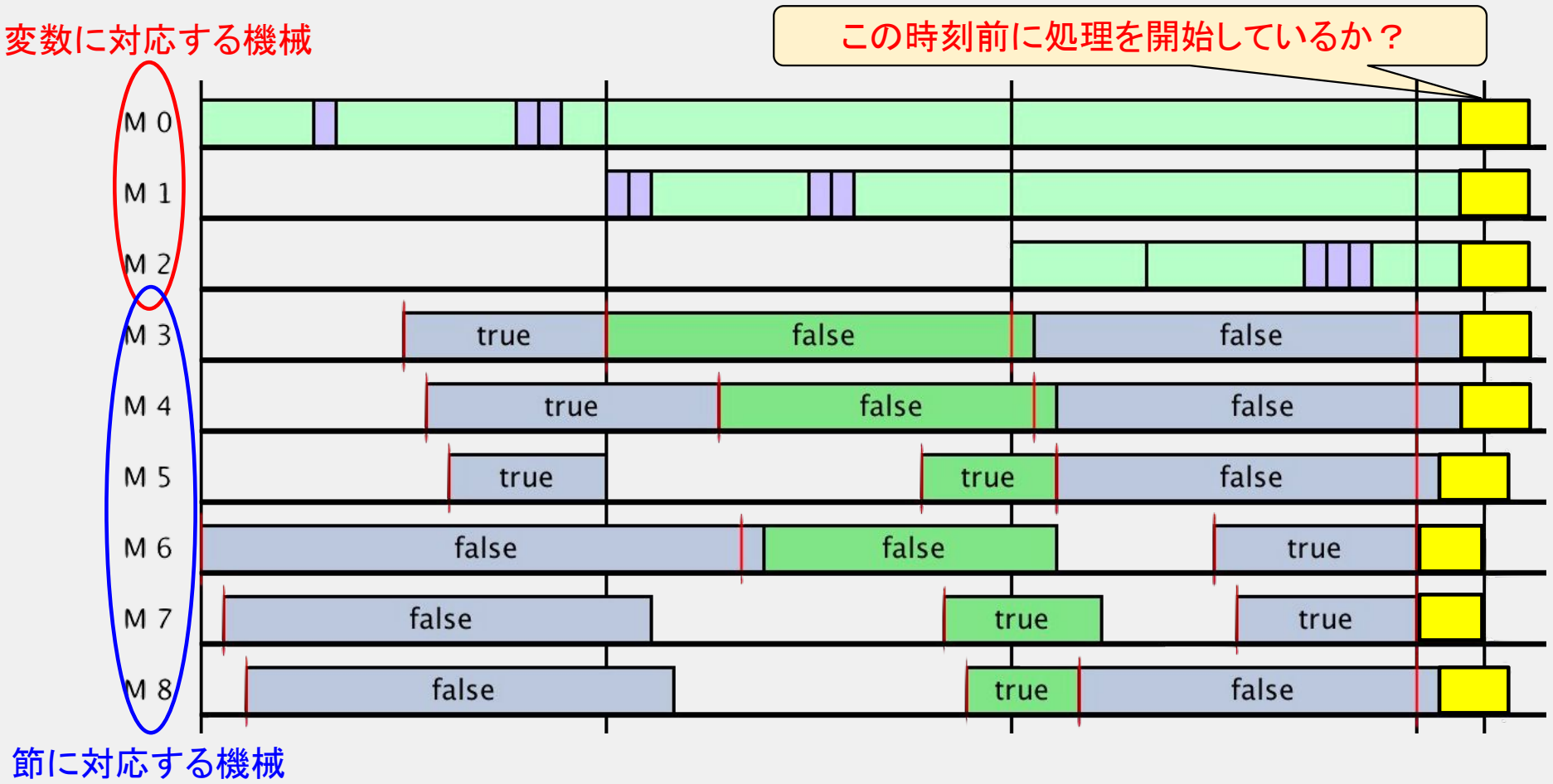
- NP 完全である 3-SAT から待ち時間制約付きスケジューリング問題に多項式時間還元できることを示した.

多項式時間還元のポイント

- 3-SAT のインスタンスにおいて，各変数に対応する機械を定義する.
- 3-SAT のインスタンスにおいて，各節に対応する機械を定義する.
- true に割り当てられたリテラルに対応するジョブは次のジョブを押し出さない.
- false に割り当てられたリテラルに対応するジョブは次の false に割り当てられたリテラルに対応するジョブを 1 押し出す.

研究成果：多項式時間還元のポイント

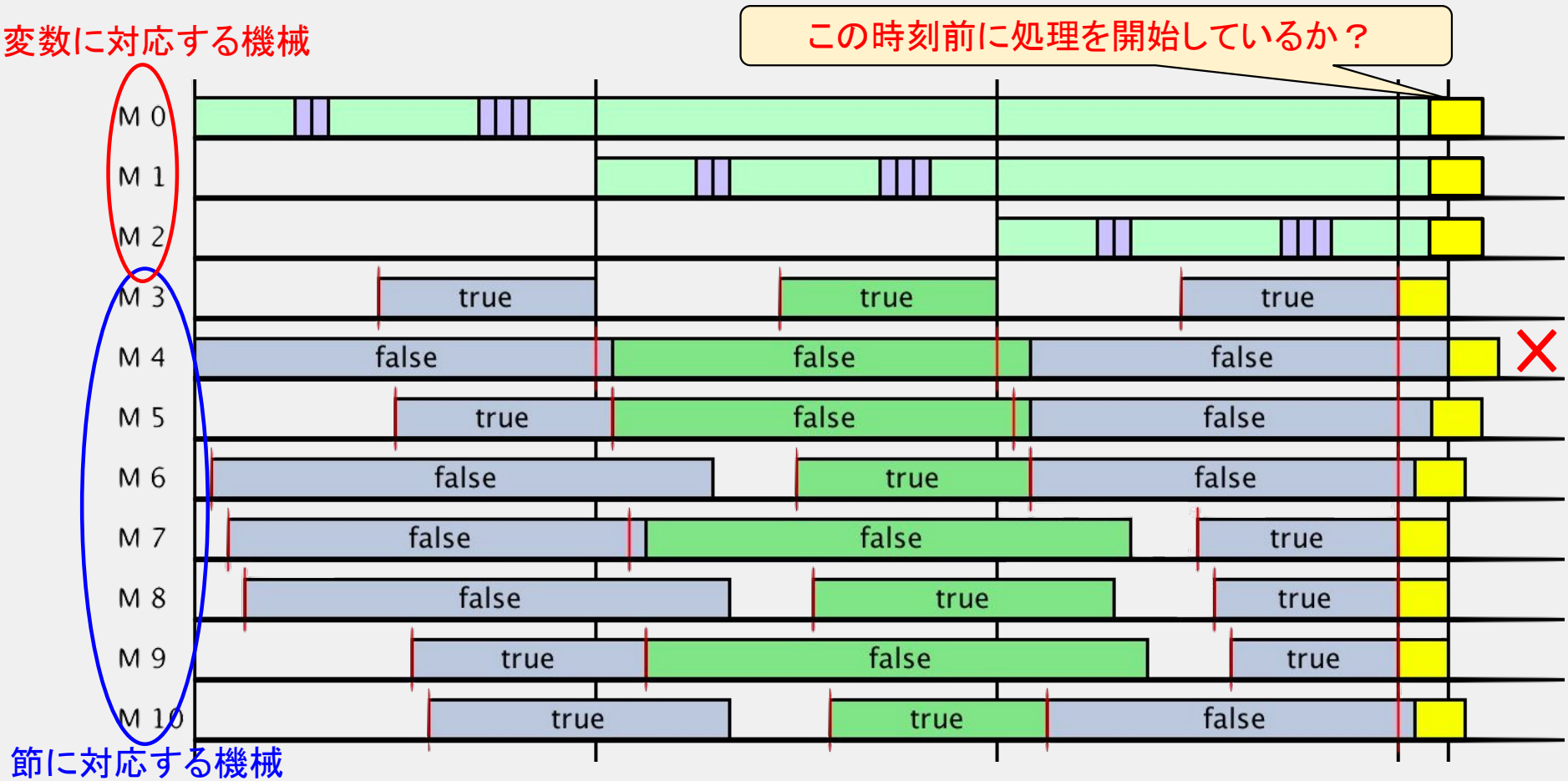
3-SAT の判定結果が Yes のとき



- 3-SAT の判定結果が Yes のとき，待ち時間制約付きスケジューリング問題における最大待ち時間が 2 以下となるスケジュールが存在する．

研究成果：多項式時間還元のポイント

3-SAT の判定結果が No のとき



- 3-SAT の判定結果が No のとき，待ち時間制約付きスケジューリング問題における最大待ち時間が 2 以下となるスケジュールが存在しない．

研究成果：問題計算複雑さ

多項式時間還元の結果

待ち時間制約付きスケジューリング問題における最大待ち時間が，

- 3-SAT の判定結果が Yes のとき，2 以下，
- 3-SAT の判定結果が No のとき，3 以上，

となるスケジュールが存在する．

無関連並列機械モデルにおいて機械数が入力の一部の場合，$\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ である限り，近似率 1.5 未満の定数近似アルゴリズムは存在しない．

成果 1 のまとめ

SWT が NP 困難であることを示し，近似率 1.5 未満の定数近似アルゴリズムが存在しないことを明らかにした．NP 困難な問題に対する効率的な解法は発見されていないため，最適解を求めるために，解の全列挙に基づいた解法が必要である．

＊ P：多項式時間で解ける決定問題の集合

目次

研究成果：厳密解法の提案

成果 2

同一並列機械モデルにおける SWT に対し，分割生成アルゴリズムおよび分枝限定法に基づいた厳密解法の開発と計算時間の分析を行った．

分割生成アルゴリズムの改良

- 分割の要素数 = 機械数 となる分割のみ生成するように改良．
  - 考慮する分割の数を減らすことができる．

分枝限定法の改良

- SRTD の部分問題に対する多項式アルゴリズムの概念を導入．
  - 列挙する実行可能解を減らすことができる．

上記以外の改良

- 各機械におけるジョブ集合のコストの降順で，探索を始める．
  - 各分割における探索初期段階で，探索の中断を判定できる．

研究成果：厳密解法の実験的評価

機械数 5 における計算時間の比較．ただし，計算時間の単位はミリ秒．

- 分割生成アルゴリズムの改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14
改良前	553	3,463	30,271	240,917	3,121,089
改良後	146	943	7,576	40,748	249,759
削減率	73%	72%	75%	83%	92%

- 分枝限定法の改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14	15
改良前	313	1,709	9,758	54,966	295,287	1,668,411
改良後	168	971	6,887	43,903	225,043	1,301,890
削減率	46%	43%	30%	20%	23%	22%

成果 2 のまとめ

改良により，計算時間を大幅に減らすことを可能にしたが，全探索では，ジョブの増加に伴い計算時間が指数的に増大する．そのため，より大きいインスタンスに対しては，ヒューリスティックの開発が必要である．

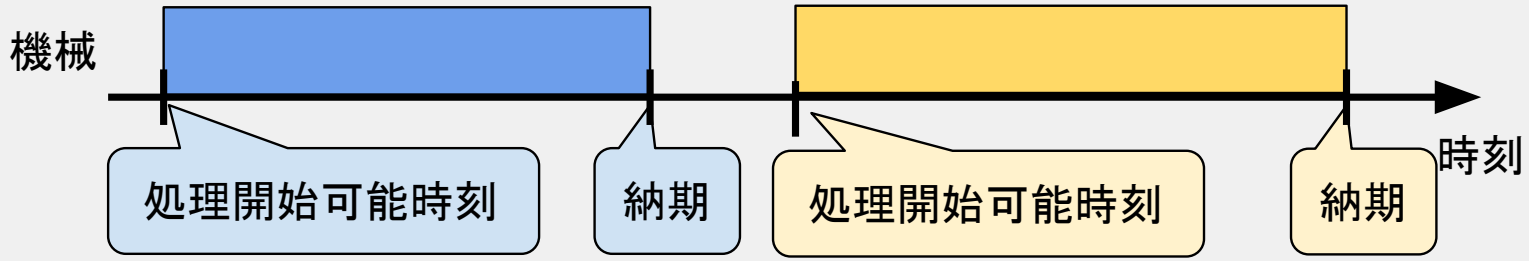
目次

既存のスケジューリング問題との対応

JIT ジョブ荷重和最大化問題 (SJIT) は，納期以前に処理を完了したジョブの荷重和の最大化を目的とするスケジューリング問題である．

JIT ジョブ荷重和最大化問題 (SJIT) との対応

SJIT において，各ジョブを JIT で処理可能なとき，各ジョブは納期ちょうどで処理が完了する．つまり，各ジョブの待ち時間は 0 である．



SJIT において，各ジョブを JIT で処理できるとき，処理開始可能時刻の昇順で処理することで最適解が求まる．[Čepek & Sung(2004)]

SWT において，各ジョブの待ち時間が 0 のとき，処理開始可能時刻の昇順で処理することで最適解が求まる．したがって，貪欲アルゴリズムに基づいたヒューリスティックの開発を行う．

研究成果：ヒューリスティックの提案

成果 3

同一並列機械モデルにおける SWT に対して，貪欲アルゴリズムに基づいたヒューリスティックの開発と解法に対する精度評価を行った．

ヒューリスティックの評価

本研究では，ヒューリスティックから得られた解における最大待ち時間と最適解における最大待ち時間の比に基づき評価を行った．

$$\text{競合比} = \frac{\text{ヒューリスティックから得られた解における最大待ち時間}}{\text{最適解における最大待ち時間}}$$

成果 3 のまとめ

ヒューリスティックは，競合比が最大 24 となった．また，最適解における最大待ち時間が 0 のとき，ヒューリスティックは常に最適解を返す．

目次

まとめと今後の課題

研究成果のまとめ

- 無関連並列機械モデルにおいて機械数が入力の一部の場合，SWT が NP 困難 であることを明らかにした．
  - 近似率 1.5 未満の定数近似ができないことを明らかにした．
- 同一並列機械モデルにおける SWT に対して，厳密解法の開発とその計算時間の評価を行った．
- 同一並列機械モデルにおける SWT に対して，ヒューリスティックの開発と，その精度評価を行った．

今後の課題

- 無関連並列機械モデル以外の機械モデルにおける SWT の計算複雑さを明らかにし，問題の難しさに影響を与える特徴を分析する．
- 3-SAT からの還元手法を工夫して，3-SAT の判定結果が Yes のとき，No のときの待ち時間制約付きスケジューリング問題における最大待ち時間の比を調整する．
- 還元手法の工夫の結果を踏まえ近似アルゴリズムを開発する．

付録：3-SAT の定式化

3-SATISFIABILITY (3-SAT) は決定問題の 1 つで，この問題は NP 完全であることが知られている．

3-SATISFIABILITY

インスタンス： (X, H)

- ブール型の変数集合 $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$
  - リテラルの集合 $L_X = X \cup \{\bar{x} \mid x \in X\}$
    - X と X の各要素の論理否定をとった変数の集合
- 3 つのリテラルからなる節 h の集合 H
  - $H \subseteq 2^{L_X}$ s.t. $\forall h \in H \left[|h| = 3\right]$

問題： 以下を満たす真理値割り当て $f : X \to \{0, 1\}$ が存在するか？

$$\bigwedge_{h \in H} \left(\bigvee_{x \in h} f(x) \vee \bigvee_{\bar{x} \in h} \neg f(x) \right) = 1$$

3-SAT の例

インスタンス： (X, H)

- ブール型の変数集合 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$
  - リテラルの集合 $L_X = \{x_1, x_2, x_3, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}$
    - X と X の各要素の論理否定をとった変数の集合
- 3 つのリテラルからなる節 h の集合 H
  - $H = \{\{x_1, x_2, \bar{x}_3\}, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3\}\}$
    - $h_1 = \{x_1, x_2, \bar{x}_3\}$, $h_2 = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3\}$

問題： 以下を満たすように x_1，x_2，x_3 を 0，1 で決定できるか？

$$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3) = 1$$

$f(x_1) = 1, f(x_2) = 0, f(x_3) = 1$ が存在するので，判定は Yes となる．

付録：問題の計算複雑さ

還元のポイント

- 3-SAT の判定結果が Yes のとき，待ち時間制約付きスケジューリング問題における最大待ち時間は 2 以下になる．
- 3-SAT の判定結果が No のとき，待ち時間制約付きスケジューリング問題における最大待ち時間は 3 以上になる．

表記の導入

3-SAT のインスタンス を $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ と $H = \{h_1, \ldots, h_\lambda\}$ からなる 2 項組 (X, H) とする．(X, H) に基づき表記を導入する．

- $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \alpha_i = |\{h \in H \mid x_i \in h\}|$
  - H において，x_i が現れる回数を表す自然数を α_i とする．
- $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ \beta_i = |\{h \in H \mid \bar{x}_i \in h\}|$
  - H において，$\bar{x}_i$ が現れる回数を表す自然数を β_i とする．
- $\mathcal{A} = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \alpha_i$，$\mathcal{B} = \sum_{i \in \{1,\ldots,n\}} \beta_i$

付録：問題の計算複雑さ

$2(\mathcal{A}+\mathcal{B})+n+\lambda$ 個のジョブ $\mathcal{J}$ を $n+\lambda$ 個の無関連機械で処理する．

変換した待ち時間制約付きスケジューリング問題のインスタンス

$2(\mathcal{A}+\mathcal{B})+n+\lambda$ 個のジョブ

- 各 $i \in \{1,\ldots,n\}$ における変数 x_i からなるリテラル x_i，$\bar{x}_i$ に対応するジョブの集合を $\mathcal{J}^t(i)$，$\mathcal{J}^f(i)$ とする．それぞれの要素数は，x_i と $\bar{x}_i$ が H に現れた回数，つまり，$|\mathcal{J}^t(i)| = |\mathcal{J}^f(i)| = \alpha_i + \beta_i$．
- $n+\lambda$ は，X と H の要素数．各変数と各節に対応する機械に割り当てる用のダミージョブ．

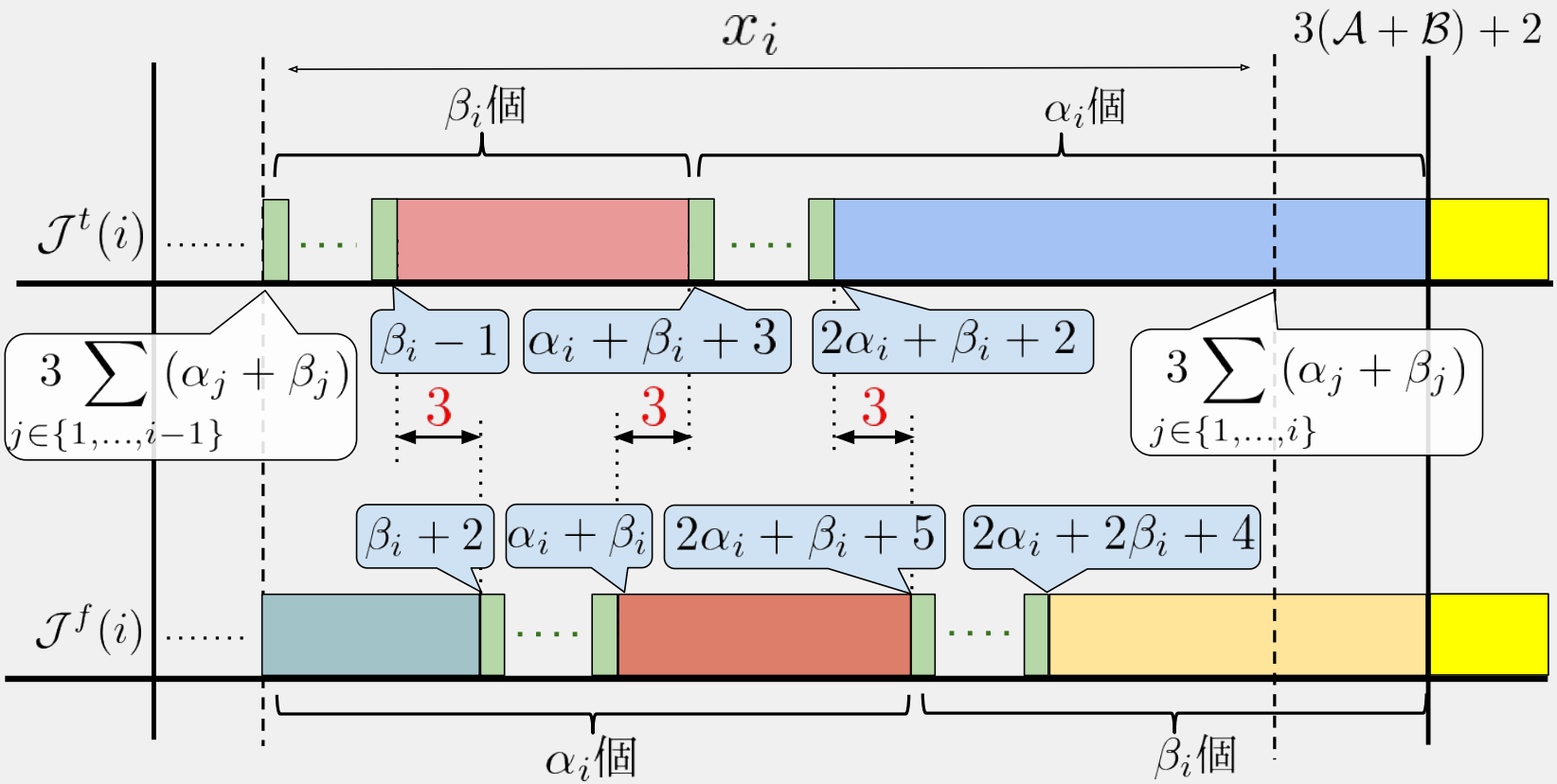
$n+\lambda$ 個の機械

- n は X の要素数．各変数に対応する機械が 1 台ある．
- λ は H の要素数．各節に対応する機械が 1 台ずつある．

- $f(x_i)=1$ のとき，$\mathcal{J}^f(i)$ を機械 i に割り当てる．
- $f(x_i)=0$ のとき，$\mathcal{J}^t(i)$ を機械 i に割り当てる．

付録：問題の計算複雑さ

各機械 $i \in \{1, \ldots, n\}$ に対応するジョブのスケジュール



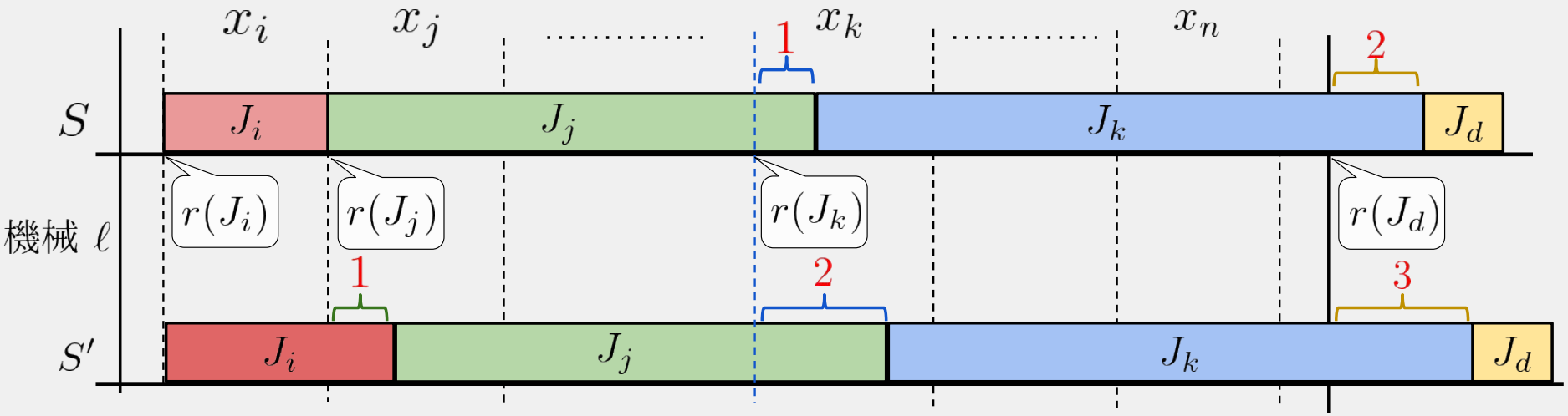
- x_i と $\bar{x}_i$ に対応するジョブの集合 $\mathcal{J}^t(i)$ と $\mathcal{J}^f(i)$ におけるジョブ間の処理開始可能時刻の差を 3 に設定する．
- $\mathcal{J}^t(i)$ の要素 $J^t(i)$ と $\mathcal{J}^f(i)$ の要素 $J^f(i)$ が機械 i に同時に割り当てられないように，上記の差を設けている．

各機械 $\ell \in \{n+1, \ldots, n+\lambda\}$ に対応するジョブのスケジュール

$h_{\ell-n} = \{x_i, x_j, x_k\}$ のとき，

S： $f(x_i) = 1, f(x_j) = 0, f(x_k) = 0$ のとき．

S'： $f(x_i) = 0, f(x_j) = 0, f(x_k) = 0$ のとき．



- 1 に割り当てられたリテラルに対応するジョブは，
  - 次のジョブの処理開始可能時刻 - 自身の処理開始可能時刻
- 0 に割り当てられたリテラルに対応するジョブは，
  - 次のジョブの処理開始可能時刻 - 自身の処理開始可能時刻 + 1

付録：多項式還元の例（特殊なケース）

特殊なケースにおけるインスタンスの作り方

例えば，$X = \{x_1, x_2, x_3\}$，$H = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$ のとき，

- 各 $i \in \{1, 2, 3\}$ に対して，α_i，β_i は 3 以下である．
- このとき，各 $i \in \{1, 2, 3\}$ に対して，α_i，β_i は 3 以上となるように，ダミーの節を作る．以下の通り．

$$H = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}, \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3\}\}$$

- 作成したダミー節は，本来 H の要素である節と同じ節を複数個用意したに過ぎない．そのため，真理値割り当てに関係なく，判定結果にも影響しない．

上記のように，ダミー節を含んだ節の集合を作り，その後，待ち時間制約付きスケジューリング問題のインスタンスへの変換する．インスタンスの変換方法は，前のスライドで記述した通り．

付録：ヒューリスティックのアルゴリズム

貪欲アルゴリズムに基づいた解法

入力： $I = (\mathcal{J}, \mathcal{M}, r, p, C)$

出力： スケジュールの集合 $\mathcal{S}$.

Step 1. $\mathcal{J}$ を処理開始可能時刻の昇順でソートする.

Step 2. 各 $1 \leq i \leq n$ における J_i について以下の処理を繰り返す.

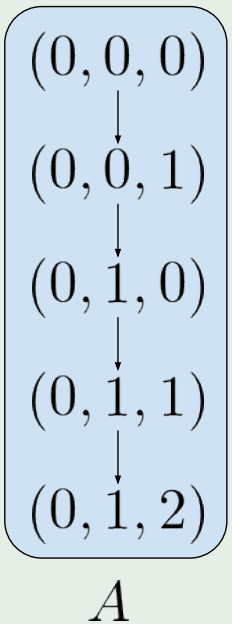
Step 2.1. 最小完了時刻を持つスケジュール集合の要素 $S_{M_a} \in \left\{ \underset{M \in \mathcal{M}}{\arg\min}\, C(S_M) \right\}$ を 1 つ求める．ここで，$S_{M_a} := S_{M_a} \cup J_i$ とする.

Step 3. $\mathcal{S} = \{S_M \mid M \in \mathcal{M}\}$ として，$\mathcal{S}$ を出力する.

付録：分割生成アルゴリズムの改良

同一並列機械モデルにおいて，ジョブ J を機械 1 に割り当てるのと，機械 2 に割り当てることは同じである．したがって，ジョブをどの機械に割り当てるかではなく，どのジョブと同じ機械に割り当てるかを考える必要がある．つまり，同一並列機械モデルにおけるジョブの機械への割り当ては，ジョブの分割として捉えることができる．

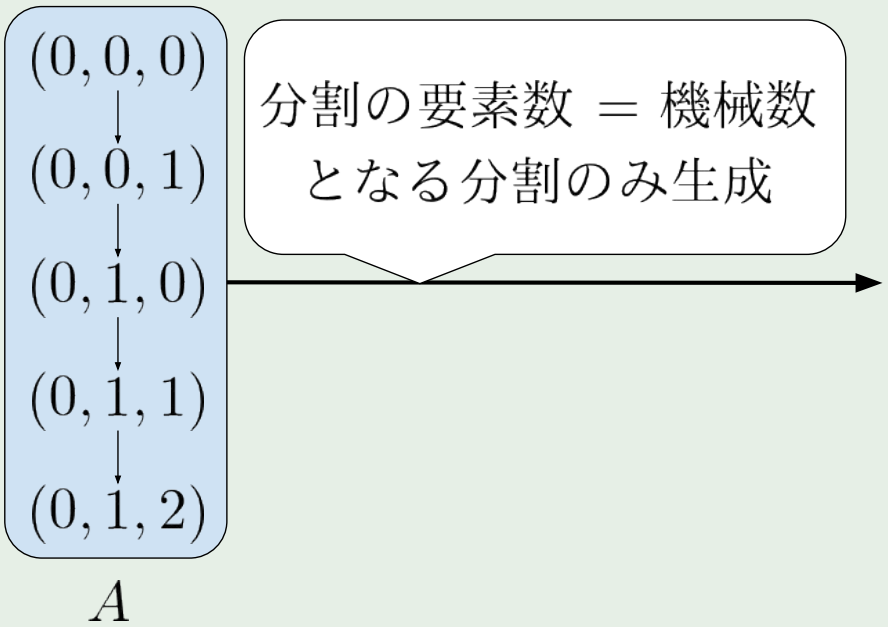
例：ジョブ数 3，同一機械数 2 における分割



付録：分割生成アルゴリズムの改良

同一並列機械モデルにおいて，ジョブ J を機械 1 に割り当てるのと，機械 2 に割り当てることは同じである．したがって，ジョブをどの機械に割り当てるかではなく，どのジョブと同じ機械に割り当てるかを考える必要がある．つまり，同一並列機械モデルにおけるジョブの機械への割り当ては，ジョブの分割として捉えることができる．

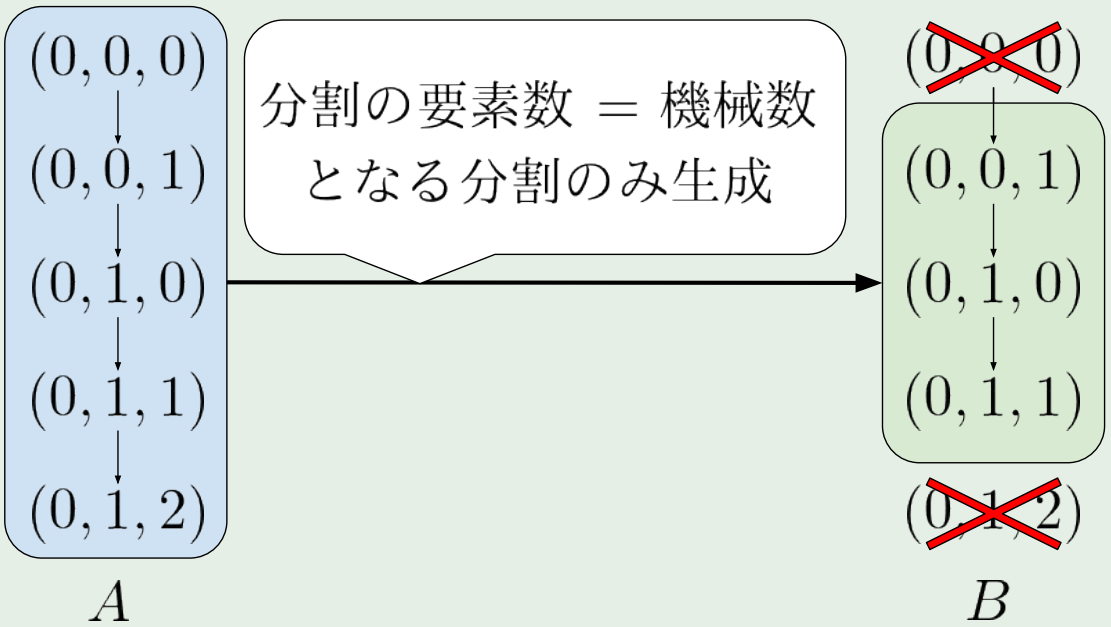
例：ジョブ数 3，同一機械数 2 における分割



付録：分割生成アルゴリズムの改良

同一並列機械モデルにおいて，ジョブ J を機械 1 に割り当てるのと，機械 2 に割り当てることは同じである．したがって，ジョブをどの機械に割り当てるかではなく，どのジョブと同じ機械に割り当てるかを考える必要がある．つまり，同一並列機械モデルにおけるジョブの機械への割り当ては，ジョブの分割として捉えることができる．

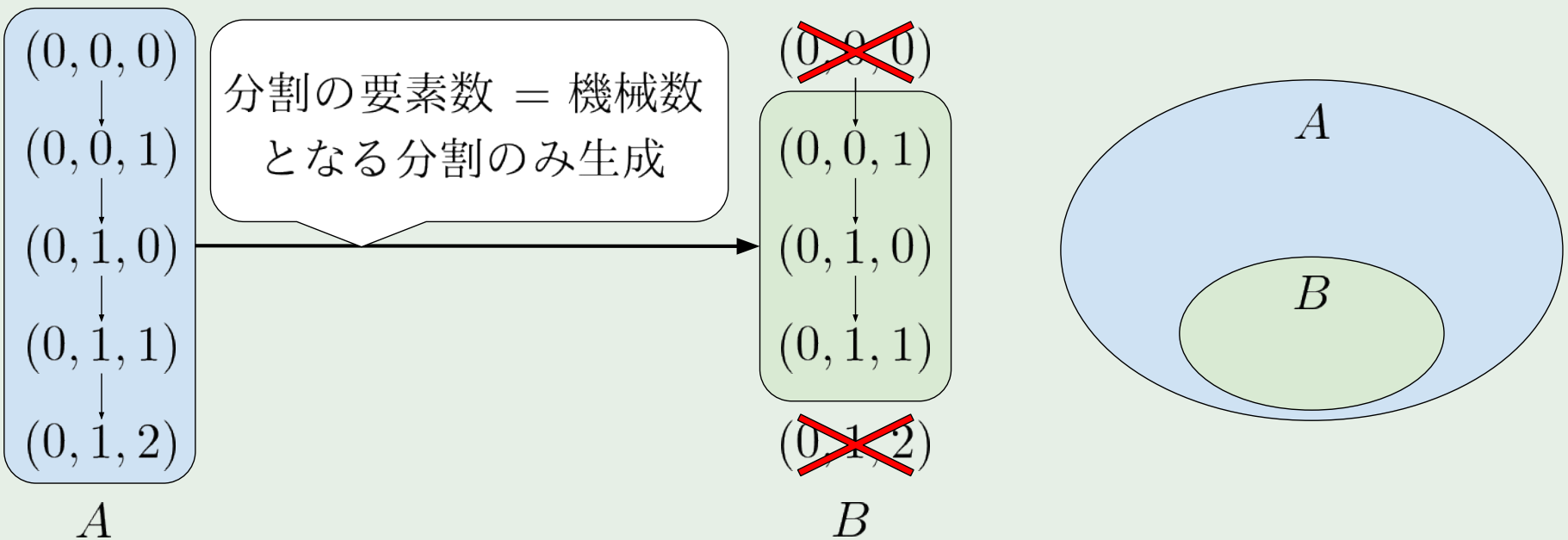
例：ジョブ数 3，同一機械数 2 における分割



付録：分割生成アルゴリズムの改良

同一並列機械モデルにおいて，ジョブ J を機械 1 に割り当てるのと，機械 2 に割り当てることは同じである．したがって，ジョブをどの機械に割り当てるかではなく，どのジョブと同じ機械に割り当てるかを考える必要がある．つまり，同一並列機械モデルにおけるジョブの機械への割り当ては，ジョブの分割として捉えることができる．

例：ジョブ数 3，同一機械数 2 における分割



付録：分割生成アルゴリズムの改良部分

表記の導入

- ジョブ数 n，機械数 m
- 要素数 n の配列 b は分割を表す．
- 要素数 n の配列 $b_{\max}$ は 各 $1 \leq i \leq n$ に対して，i 番目の要素は，それまでのジョブが割り当てられた機械の最大数を格納している．つまり，$b_{\max}[i] = \max_{1 \leq j \leq i-1} b[j]$

分割生成アルゴリズムの改良部分

入力：$I = (b, b_{\max}, m)$

出力：分割 b

Step 1. 各 $1 \leq i \leq n$ に対して，以下の処理を繰り返す．

Step 1.1. $b_{\max}[n-i] \geq m-i$ のとき，処理を終了する．

Step 1.2. $b[n-i] := m-i$，$b_{\max}[n-i] := m-i$ とする．

Step 2. b を出力する．

付録：分割生成アルゴリズムの改良部分

例：$b = (0, 1, 0, 1)$，$b_{\max} = (0, 1, 1, 1)$，$m = 3$ のとき

Step 1. $b_{\max}(0, 1, 1, 1)$ より，$1 < 3 - 1$.

Step 2. したがって，$b = (0, 1, 0, 2)$，$b_{\max} = (0, 1, 1, 2)$ とする.

Step 3. $b_{\max}(0, 1, 1, 2)$ より，$1 \geq 3 - 2$.

Step 4. b を出力する.

分枝限定法の改良部分

入力： $I = (\mathcal{J}', S)$

出力： スケジュール S.

Step 1. 各 $1 \leq i \leq |\mathcal{J}'|$ における J'_i について，以下の処理を繰り返す.

Step 1.1. $p(J'_i) = \min_{j \in \{1,\ldots,|\mathcal{J}'|\}} p(J'_j)$ とする.

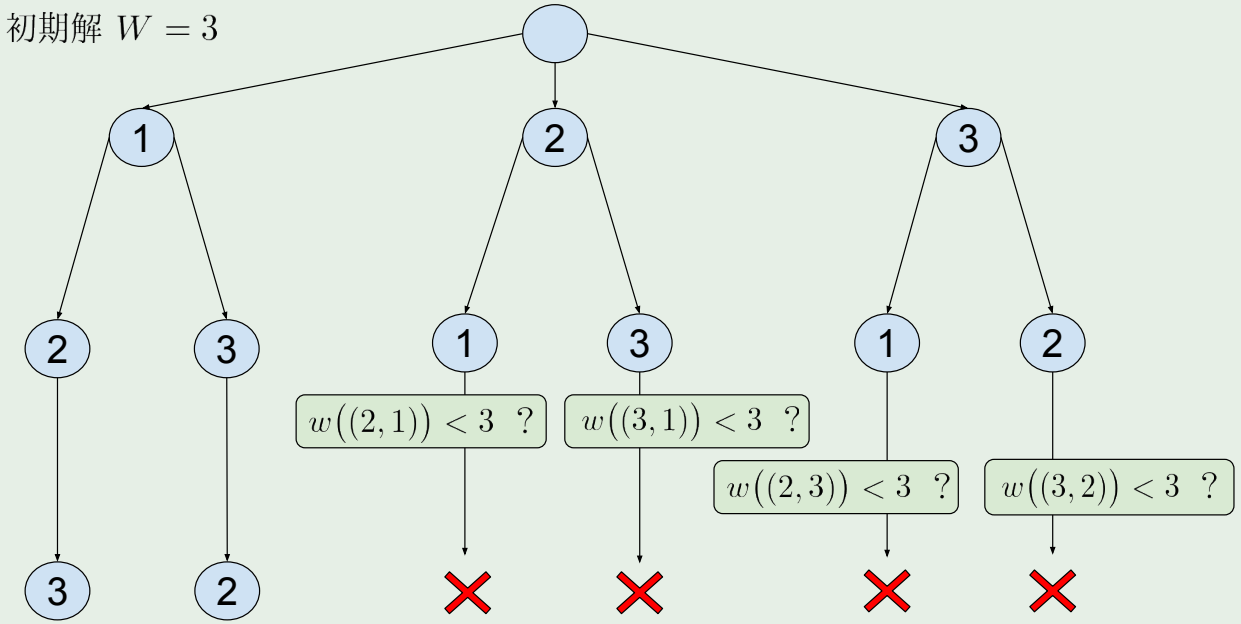
Step 1.2. $S := S \cup J'_i$ とする.

Step 2. S を出力する.

- Step 1. で $\mathcal{J}'$ におけるすべてのジョブの処理時間を $\mathcal{J}'$ の中の最小の処理時間に設定している.
- 上記の操作により，$\mathcal{J}'$ におけるジョブの本来の処理時間は，設定した処理時間以上である.
- このとき，処理開始可能時刻順で処理して得られるスケジュールにおける最大待ち時間は，$\mathcal{J}'$ におけるコストの下限である.

付録：分枝限定法の改良

例：以下のインスタンスにおけるスケジュール生成

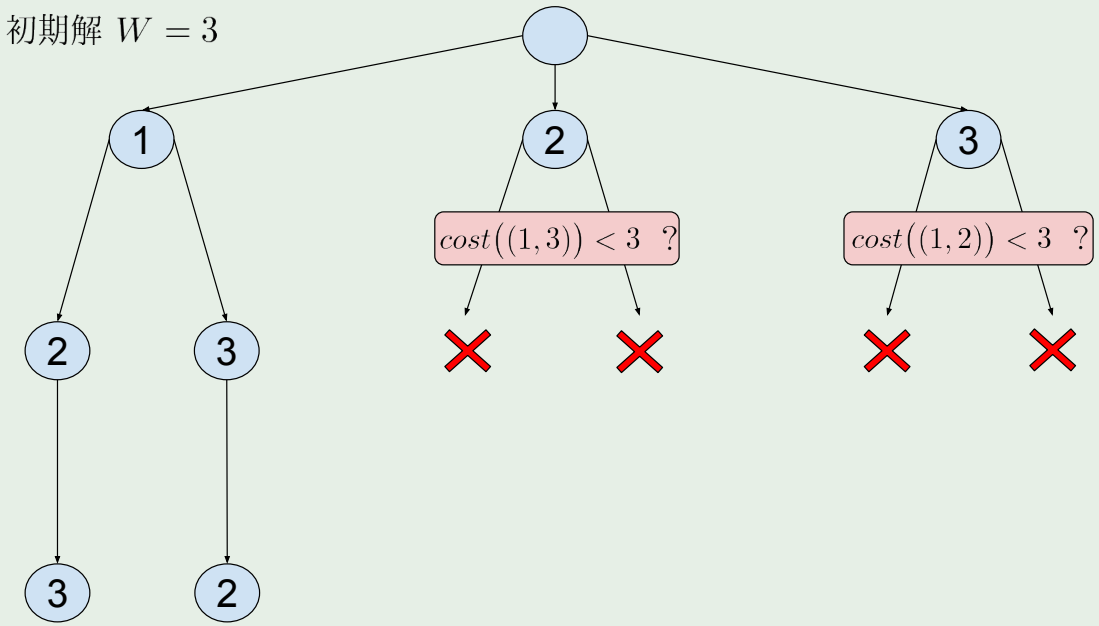


$\mathcal{J}$	$r(J)$	$p(J)$
J_1	2	4
J_2	5	7
J_3	10	15

- それまでに割り当てたジョブのスケジュールにおける最大待ち時間がそれまでの最良の解 W より良い値か？
- 割り当てていない残りのジョブを最適にスケジュールしたときの最大待ち時間がそれまでの最良の解 W より良い値か？
  - SWT は，処理時間が一定のとき，処理開始可能時刻の昇順で処理することで最適解が求まる．

付録：分枝限定法の改良

例：以下のインスタンスにおけるスケジュール生成



$\mathcal{J}$	$r(J)$	$p(J)$
J_1	2	4
J_2	5	7
J_3	10	15

- それまでに割り当てたジョブのスケジュールにおける最大待ち時間がそれまでの最良の解 W より良い値か？
- 割り当てていない残りのジョブを最適にスケジュールしたときの最大待ち時間がそれまでの最良の解 W より良い値か？
  - SWT は，処理時間が一定のとき，処理開始可能時刻の昇順で処理することで最適解が求まる．

付録：その他の改良

分割生成アルゴリズムと分枝限定法の改良下部分を用いて，さらに計算効率を向上させるために，以下の改良を加えた．

例：以下の分割のとき，順列を生成する機械順の違い

ジョブ数 5，同一機械数 3 において，分割が $(1, 2, 3, 2, 2)$ のとき，各機械に割り当てられたジョブは以下の通り．

機械 1： J_1

機械 2： J_2， J_4， J_5

機械 3： J_3

改良前と改良後における順列を生成する機械順は以下の通り．

改良前： 機械 0 から順に処理を行う．$1 \to 2 \to 3$.

改良後： 各機械に割り当てられたジョブ集合におけるコストの下限の降順で処理を行う．$2 \to 1 \to 3$.

付録：厳密解法の実験的評価

機械数 2 における計算時間の比較．ただし，計算時間の単位はミリ秒．

- 分割生成アルゴリズムの改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14	15
改良前	53	470	4,543	62,609	767,835	7,965,904
改良後	3	7	25	145	677	2,971
削減率	94%	98%	99%	99%	99%	99%

- 分枝限定法の改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14	15
改良前	33	188	1,101	7,118	48,459	341,440
改良後	6	25	110	649	3,361	22,094
削減率	81%	86%	90%	90%	93%	93%

付録：厳密解法の実験的評価

機械数 3 における計算時間の比較．ただし，計算時間の単位はミリ秒．

- 分割生成アルゴリズムの改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14
改良前	109	857	8,086	107,357	1,246,264
改良後	24	76	250	872	3,889
削減率	78%	91%	96%	99%	99%

- 分枝限定法の改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14
改良前	32	120	470	2,041	9,534
改良後	23	74	243	834	2,890
削減率	29%	38%	48%	60%	70%

付録：厳密解法の実験的評価

機械数 4 における計算時間の比較．ただし，計算時間の単位はミリ秒．

- 分割生成アルゴリズムの改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14
改良前	249	1,798	15,523	158,662	2,091,361
改良後	101	475	2,085	8,865	39,538
削減率	60%	73%	86%	% 94	98%

- 分枝限定法の改良前と，改良後の計算時間の比較

ジョブ数	10	11	12	13	14
改良前	131	597	2,672	12,194	56,564
改良後	99	477	2,044	8,887	37,492
削減率	24%	20%	23%	27%	34%