ODE(常微分方程)复习

$\mathcal{A}$可以直接求解的常微分方程：

1. $y^\prime = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow y = \mathop{arctan}(x)$
2. $y^\prime = -\frac{1}{1+x^2} \rightarrow y = \mathop{arccot}(x)$
3. $y^\prime = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow y = \mathop{arcsin}(x)$
4. $y^\prime = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow y = \mathop{arccos}(x)$
5. $y^\prime =\frac{1}{\mathop{cos}^2(x)} \rightarrow y = \mathop{tan}(x)$
6. $y^\prime =\frac{\mathop{sin}(x)}{\mathop{cos}^2(x)} \rightarrow y = \frac{1}{\mathop{cos}(x)}$
7. $y^\prime =\frac{e^{-x}+e^x}{2} \rightarrow y = \frac{-e^{-x}+e^x}{2}$
8. $y^\prime =\frac{-e^{-x}+e^x}{2} \rightarrow y = \frac{e^{-x}+e^x}{2}$

$\mathcal{B}$伯努利方程：指的是一个常微分方程中，存在着$y^\prime,y,y^n (n\neq 0,1)$。因此，伯努利方程可以被表示为：

$y^\prime + p(x)y = q(x)y^n, \quad \textrm{s.t.} \quad n\neq 0,1$

$=>\quad y^\prime y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$

$=>\quad y^\prime y^{-n} + p(x)y^{1-n} = q(x)$, 令$z = y^{1-n}$则：

$=>\quad \frac{1}{n-1}\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$

$=>\quad z^\prime + (n-1)p(x)z = (n-1)q(x)$,这里用到一阶非齐次常微分方程求解

$=>\quad z = (\int (n-1)q(x)e^{\int (n-1)p(x)dx}+C)e^{-\int (n-1)p(x)dx}$

$=>\quad y = {\ }{\ }^{1-n}\sqrt{(\int (n-1)q(x)e^{\int (n-1)p(x)dx}+C)e^{-\int (n-1)p(x)dx}}$

$\mathcal{C}$一阶齐次常微分方程：表达式非常简单，$y^\prime + p(x)y=0$,考虑到指数函数便可以求解，我们设定一个指数函数为$y = C_1 e ^{C_2}$其中$C_1和C_2$是关于x的函数。

那么：$y^\prime = C_1^\prime e^{C_2} + C_1C_2^\prime e^{C_2}$,带入到一阶齐次常微分方程中，得到：$[C_1^\prime + C_1C_2^\prime + C_1p(x)]e^{C_2}=0$,如果$C_1$是常数，那么只要$C_2=\int -p(x)dx$,便可以得到解。因此，一阶齐次常微分方程的解为：

$y = Ce^{\int -p(x)dx}$,其中C是常数。

$\mathcal{D}$一阶非齐次常微分方程：表达式是$y^\prime + p(x)y=0$的升华，为$y^\prime + p(x)y=q(x)$，这个等式是将一阶齐次常微分方程中的C变成非常数后获得的，和上述步骤一样需要求解，最后可以得到：

$C = \int q(x) e^{\int p(x)dx}dx+C_n[常数]$

那么通解为：

$y = (\int q(x) e^{\int p(x)dx}dx+C_n[常数])e^{\int-p(x)dx}$

$\mathcal{E}$ 特殊形式 $[\frac{y}{x}]$ 为整体的技巧：当常微分方程表达为该形式时： $y^\prime = f(\frac{y}{x})$ 则可以将 $[\frac{y}{x}]$ 堪成整体 u ,然后进行求解，因此可以推导该方程为：

$u+xu^\prime = f(u)$

$\mathcal{F}$ 可分离变量的常微分方程： $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$,则：

$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$

$\mathcal{G}$ 高阶常微分方程: $y^{\prime\prime}=f(x,y,y^\prime)$,则可以将 $y^\prime$ 看成 $f(x)$ ，然后 $y^{\prime\prime}$ 时 $f^\prime(x)$

$\mathcal{H}$ 二阶常系数齐次线性微分方程: $y^{\prime\prime} + py^\prime +q = 0$, 其中 p,q 为常数。那么我们直接求出特征方程 $x^2 +px+q=0$ 的特征根为 r_1,r_2

分以下几种情况：1.如果 $r_1 = r_2$, $y = (C_1+C_2 x)e^{r_1x}$ 2.如果 $r_1 \neq r_2$, $y = C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$ 3.如果y $r_1=\alpha + j\beta,t_2=\alpha -j\beta$, $y = [C_1\mathop{cos}(\beta x)+C_2\mathop{sin}(\beta x)]e^{\alpha x}$

$\mathcal{I}$ 拉普拉斯变换求解微分方程：其中拉普拉斯变换为： $h(s) =\int_{0}^{+\infty}e^{-st}f(t)dt$,而拉普拉斯变换对 $f(t)$ 不同阶的导数具备如下性质：

$h(s,f(t)) = F(s)$

$h(s,f^\prime(t)) = sF(s) - f(0)$

$h(s,f^{\prime\prime}(t)) = s^2F(s) - sf(0) - f^\prime(0)$,以此类推

因此，对于某一个常微分方程，我们只要等式两边同乘上 e^{-st} 并进行积分，便可以进行拉普拉斯变换，比如常微分方程 $y^{\prime\prime} - y = e^{-x}$ ，进行拉普拉斯变换后得到： $s^2F(s)-s-F(s) = \frac{1}{1+s}$,则

$F(s) = \frac{s^2+s+1}{(s+1)^2(s-1)}=\frac{-1/2}{(s+1)^2}+\frac{1/4}{s+1}+\frac{3/4}{s-1}$

由于 $H(s,t) = \frac{1}{s^2}$ ，所以 $H(s,te^{-t}) = \frac{1}{(s+1)^2}$,又因为 $H(s,e^{at}) = \frac{1}{s-a}$,所以最终解为：

$y=-\frac{1}{2}te^{-t}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{4}e^{t}$