

# 太阳影子定位

蔡志杰<sup>1,2</sup>

(1. 复旦大学 数学科学学院, 上海 200433; 2. 上海市现代应用数学重点实验室, 上海 200433)

**摘要:** 本文给出物体在太阳底下影子长度及影子方位角的动态变化规律, 据此建立确定物体所处位置和日期的非线性最小二乘模型, 讨论相应的求解方法。在此基础上, 利用针孔成像原理, 根据视频中物体影子的变化规律来确定视频的拍摄日期和地点。

**关键词:** 影子长度; 方位角; 参数反演; 针孔成像原理

中图分类号: O351.3

文献标志码: A

文章编号: 2095-3070(2015)04-0025-09

## 1 问题的提出

2015年“高教社杯”全国大学生数学建模竞赛A题“太阳影子定位”要求通过分析视频中物体太阳影子的变化规律, 来确定视频拍摄的地点和日期。这一赛题由国防科学技术大学的刘易成博士和吴孟达教授提供。

由于物体在不同地点、不同日期和不同时间的影子长度和角度会发生变化, 其中包含着许多地理位置和时间的信息, 这些信息为我们确定出物体所处的位置和时间提供了依据<sup>[1-2]</sup>。本文旨在通过建立适当的数学模型, 解决这一问题。

## 2 太阳影子长度的数学模型

为了根据太阳影子确定物体所处的位置和时间, 首先需要研究太阳影子的变化规律。为方便阅读起见, 我们给出详细的推导过程。有关内容可参见文献<sup>[3-4]</sup>。

设地球绕太阳公转的轨道为圆形轨道, 太阳 $S$ 位于圆形轨道的圆心, 以太阳为原点, 圆形轨道平面为 $xy$ 平面(称为黄道), 建立直角坐标系, 如图1所示。

设一年有 $T^*$ 天, 一天有 $t^*$ 小时。以春分(3月21日)为第0天( $D=0$ ), 则第 $D$ 天 $t$ 时刻, 地球的中心坐标为

$$P\left(r\cos\frac{2\pi T}{T^*}, r\sin\frac{2\pi T}{T^*}, 0\right), \quad (1)$$

其中:  $r = |PS|$  为地球中心离太阳中心的距离;  $T = D + \frac{t}{t^*}$ 。

设第 $D$ 天 $t$ 时刻, 太阳直射地球的纬度为 $\delta$ , 称为赤纬角。已知在春分 $t_0$ 时刻太阳直射地球赤道, 即当 $D=0, t=t_0$ 时,  $\delta=0$ , 此时式(1)中的 $T$ 为

$$T_0 = \frac{t_0}{t^*},$$

而地球中心的坐标为

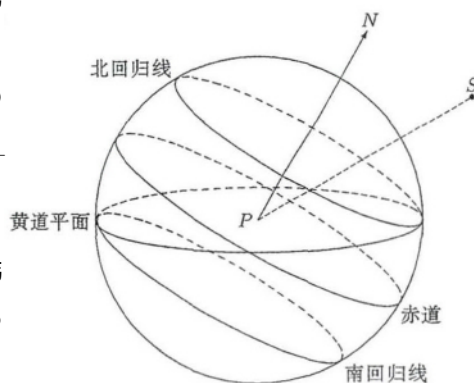


图1 地球绕太阳公转的示意图

收稿日期: 2015-11-10

通讯作者: 蔡志杰, E-mail: zhijiecai@163.com

$$P_0 \left( r \cos \frac{2\pi T_0}{T^*}, r \sin \frac{2\pi T_0}{T^*}, 0 \right).$$

记北回归线的纬度为  $\delta_0$ , 则北极方向是  $(0, 0, 1)$  绕  $SP_0$  轴旋转  $\delta_0$  后的方向。在地球绕太阳公转过程中, 北极方向始终保持不变, 因而

$$\overrightarrow{PN} = \left( \sin \frac{2\pi T_0}{T^*} \sin \delta_0, -\cos \frac{2\pi T_0}{T^*} \sin \delta_0, \cos \delta_0 \right).$$

$\overrightarrow{PS}$  与  $\overrightarrow{PN}$  的夹角为  $\frac{\pi}{2} - \delta$ , 因此

$$\cos \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) = \frac{\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PN}}{|\overrightarrow{PS}| |\overrightarrow{PN}|},$$

即

$$\sin \delta = -\cos \frac{2\pi T}{T^*} \sin \frac{2\pi T_0}{T^*} \sin \delta_0 + \sin \frac{2\pi T}{T^*} \cos \frac{2\pi T_0}{T^*} \sin \delta_0 = \sin \frac{2\pi \left( D + \frac{t-t_0}{t^*} \right)}{T^*} \sin \delta_0. \quad (2)$$

为简单起见, 假设赤纬角在一天内保持不变, 则式(2)可写为

$$\sin \delta = \sin \frac{2\pi D}{T^*} \sin \delta_0. \quad (3)$$

下面讨论太阳照射下物体的影子。以地球中心为原点, 赤道平面为  $xy$  平面, 指向北极的方向为  $z$  轴正向, 固定某地  $P$ , 正午时刻该地所在大圆的平面为  $xz$  平面, 建立直角坐标系, 如图 2 所示。

地球自转一周为  $t^*$  小时,  $P$  点在正午时刻到达  $xz$  平面, 因而对任意给定的时间  $t$  ( $0 \leq t \leq t^*$ ), 对应的时角为

$$\alpha = \frac{\pi}{12}(t - 12).$$

对  $P$  点, 记其纬度为  $\phi$  ( $-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ ), 正值表示北纬, 负值表示南纬。该点在  $t$  时刻的坐标为

$$P(R \cos \phi \cos \alpha, R \cos \phi \sin \alpha, R \sin \phi),$$

其中,  $R$  为地球的半径。

$P$  点所在切平面的单位法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos \phi \cos \alpha, \cos \phi \sin \alpha, \sin \phi).$$

而第  $D$  天  $t$  时刻太阳的入射方向为

$$\mathbf{m} = (-\cos \delta, 0, -\sin \delta),$$

其中,  $\delta$  为赤纬角, 由式(2)或式(3)给出。因而太阳相对于地面的仰角(称为太阳高度角)  $\theta$  (图 3) 满足

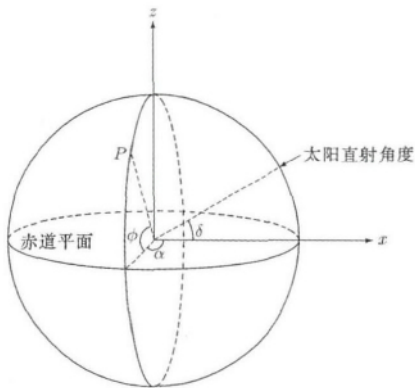


图 2 太阳照射地球示意图

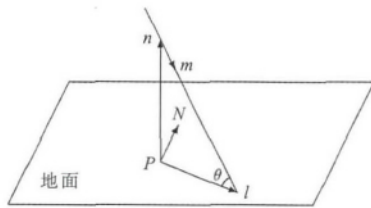


图 3 太阳照射地球的投影向量

$$\sin \theta = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \cos \phi \cos \delta \cos \alpha + \sin \phi \sin \delta. \quad (4)$$

若物体长度为  $L$ , 则其投影长度为

$$l = \frac{L}{\tan \theta}. \quad (5)$$

太阳光在地面上的投影向量为

$$l = m - (m \cdot n)n,$$

其长度平方为

$$|l|^2 = |m - (m \cdot n)n|^2 = |m|^2 - |m \cdot n|^2 = 1 - \sin^2 \theta = \cos^2 \theta.$$

$P$  点的正北方向为  $P$  指向北极的方向在  $P$  点处切平面上的单位投影向量, 也就是  $z$  轴正向在切平面上的单位投影向量, 即

$$N = \frac{z - (z \cdot n)n}{|z - (z \cdot n)n|}.$$

由于

$$z - (z \cdot n)n = (-\sin \phi \cos \phi \cos \alpha, -\sin \phi \cos \phi \sin \alpha, \cos^2 \phi),$$

其长度平方为

$$|z|^2 - |z \cdot n|^2 = 1 - \sin^2 \phi = \cos^2 \phi,$$

因此

$$N = (-\cos \alpha \sin \phi, -\sin \alpha \sin \phi, \cos \phi).$$

于是, 正北方向  $N$  旋转至太阳影子方向的角度(称为影子方位角)  $\omega$  满足

$$N \cdot l = \cos \theta \cos \omega = \cos \delta \cos \alpha \sin \phi - \sin \delta \cos \phi,$$

即

$$\cos \omega = \frac{\cos \delta \cos \alpha \sin \phi - \sin \delta \cos \phi}{\cos \theta}. \quad (6)$$

注意, 这里定义的影子方位角与地学中定义的太阳方位角互为补角, 它们的余弦相差一个负号, 而正弦相同。

由式(4), 式(6)也可写为

$$\cos \omega = \frac{\sin \theta \sin \phi - \sin \delta}{\cos \theta \cos \phi}.$$

另一方面, 地球的正东方向为

$$E = N \times n = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0),$$

因而

$$E \cdot l = |E| |l| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) = \cos \theta \sin \omega = E \cdot m = \sin \alpha \cos \delta,$$

即

$$\sin \omega = \frac{\sin \alpha \cos \delta}{\cos \theta}. \quad (7)$$

同时给出  $\sin \omega$  和  $\cos \omega$  是为了避免出现方位角多解的情况。

太阳光从外太空穿过大气层进入地球时, 会发生折射现象。由太阳高度角(图3)可知, 太阳的入射角为  $\frac{\pi}{2} - \theta$ 。若记太阳的折射率为  $n$ , 折射角为  $\frac{\pi}{2} - \theta'$ , 则由折射定律

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right)} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'},$$

即

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta}{n}. \quad (8)$$

因此, 在考虑太阳折射的情况下, 物体的影子长度为

$$l = \frac{L}{\tan \theta}. \quad (9)$$

由式(8)可以看到,是否考虑太阳折射仅在高度角的计算上有所差异,为了叙述方便,下面都在式(5)的基础上进行讨论,这些讨论对式(9)同样有效。

利用式(5)容易得到 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00—15:00 之间,天安门广场 3 m 高的直杆的太阳影子长度的变化曲线(图 4)。

前面的公式是在地球绕太阳的旋转轨道是标准的圆形,而且一年中每天都是均匀旋转的假设下推导出来的,这种情况下采用的时间也就是我们日常所用的计时,称为平太阳时。如果考虑地球绕太阳的旋转轨道是椭圆,地球相对于太阳的自转不是均匀的,此时得到的时间称为真太阳时。真太阳时要求每天的中午 12 点,太阳处于头顶的最高位置。真太阳时与平太阳时之差称为真平太阳时差,即

$$\text{真太阳时} = \text{平太阳时} + \text{真平太阳时差}. \quad (10)$$

我们平时所用的北京时间是平太阳时,而 10 月 22 日的真平太阳时差为  $15'31''^{[5]}$ ,此时 2015 年 10 月 22 日北京时间 9:00—15:00 之间,天安门广场 3 m 高的直杆的太阳影子长度的变化曲线如图 5 所示。

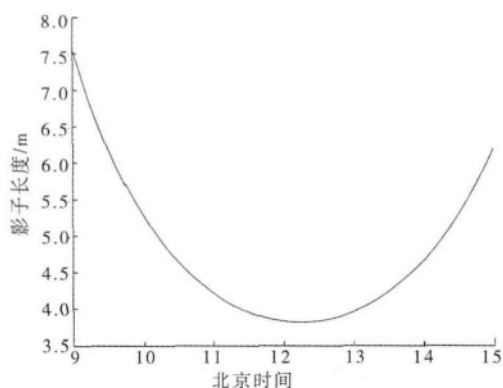


图 4 直杆的影子长度

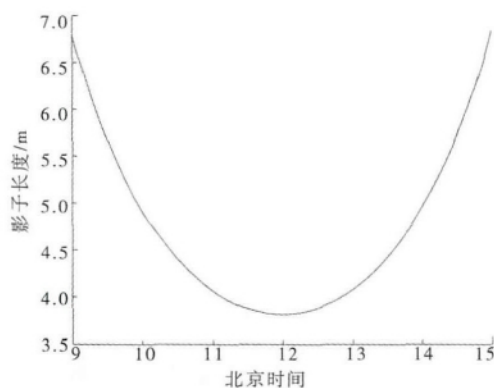


图 5 直杆的影子长度(真太阳时)

同样地,由式(10),真太阳时与平太阳时仅存在一个时间差,对计算结果肯定会有所影响,但不会影响反演模型的建立与求解,因此,下文提到的时间都是指平太阳时,如果考虑真太阳时,只需在相应的平太阳时上加上真平时间差即可。

### 3 确定地点的反演模型

本节在已知日期和北京时间的情况下,建立确定当地时间和位置的数学模型。

记  $t_i (i = 0, 1, \dots, n)$  为测量时间点,其中,  $n+1$  为测量点数,  $\Delta t$  为测量的时间间隔,则

$$t_i = t_0 + i\Delta t.$$

记  $l_i$  为  $t_i$  时刻直杆的影子长度,由式(5)可得

$$l_i = \frac{L}{\tan \theta_i}, \quad (11)$$

其中,  $\theta_i$  为  $t_i$  时刻的太阳高度角,满足

$$\sin \theta_i = \cos \phi \cos \delta \cos \alpha_i + \sin \phi \sin \delta, \quad (12)$$

而  $\alpha_i$  为  $t_i$  时刻的时角:

$$\alpha_i = \frac{\pi}{12}(t_i - 12).$$

又记  $l_i^*$  为  $t_i$  时刻测量得到的直杆影子长度:

$$l_i^* = \sqrt{x_i^{*2} + y_i^{*2}},$$

其中,  $(x_i^*, y_i^*)$  为  $t_i$  时刻测量得到的直杆影子端点的坐标。根据最小二乘原则,确定当地时间和位置的问题就转化为:确定  $t_0$  和  $\phi$ ,使得直杆影子长度的理论值  $l_i$  与实际测量值  $l_i^*$  之间的平方误差最小,即

$$\min \sum_{i=0}^n (l_i - l_i^*)^2. \quad (13)$$

但是,从式(11)中可以看到,影子长度理论值的计算公式中,直杆的长度 $L$ 也是未知的,这样需要优化反演的参数就是3个,而不是2个。反演参数越多,反演的难度越大,不仅反演时间会大大增加,其精度也会受到很大影响。

由于影长 $l$ 与直杆长度 $L$ 成正比关系,将相邻两个时间点的影子长度相除即可消去直杆长度。这样,就能更快、更精确地得到反演结果。据此,目标函数可改写为

$$\min \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{l_{i+1}}{l_i} - \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*} \right)^2.$$

再来考虑约束条件。首先,纬度应在 $\pm 90^\circ$ 之间,即 $|\phi| \leq 90$ 。

直杆的影子只有在太阳位于地平线上才会出现,因此另一个约束条件为 $\theta > 0$ 。

这样,已知日期确定时间和地点的数学模型就归结为如下的优化问题:求 $t_0, \phi$ ,使得

$$\min \sum_{i=0}^{n-1} \left( \frac{l_{i+1}}{l_i} - \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*} \right)^2, \quad (14)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} |\phi| \leq 90 \\ \theta_i > 0, i = 0, 1, \dots, n \end{cases}, \quad (15)$$

$$(16)$$

其中, $l_i$ 由式(11)给出, $\theta_i$ 满足式(12)。

在确定了当地时间 $t_0$ 和纬度 $\phi$ 之后,经度 $\psi$ 可以按下面的方法予以确定:

$$\psi = 120 - 15(t_0^* - t_0),$$

其中, $t_0^*$ 为影子初始时刻所对应的北京时间。

根据影子长度的变化,还可以判断出当地时间是上午还是下午。影子长度单调递增是下午,此时可增加一个约束条件 $t_0 \geq 12$ ;影子长度单调递减是上午,此时可增加约束条件 $t_0 \leq 12 - n\Delta t$ 。如果影子长度先递减后递增,那么这段时间一定经过中午12:00。假设 $t_i$ 时刻时影子长度最短,那么12:00一定在区间 $[t_{i-1}, t_{i+1}]$ 内,此时可增加约束条件 $12 - (i+1)\Delta t \leq t_0 \leq 12 - (i-1)\Delta t$ 。

模型(14)–(16)是非线性优化问题,可以用Matlab或Lingo中带约束条件的优化命令求解<sup>[6-7]</sup>,也可以用牛顿法<sup>[8]</sup>、拟牛顿法<sup>[8]</sup>求解,还可以用遗传算法<sup>[9]</sup>、粒子群算法<sup>[10]</sup>等智能算法求解,这里不再赘述。

还可以采用搜索法进行求解。搜索法本质上是枚举,将优化变量按一定精度离散化,得到一系列离散值,对所有这些离散值进行枚举,找出其中的最优解及相应的优化变量值。搜索法较为简单,编程容易,但工作量巨大。为了减少搜索时间,可采用变步长搜索法,即先用较大的精度对优化变量离散化,搜索得到其中的最优解及相应的优化变量值,然后缩小精度,在最优变量值附近按更小精度离散化后再进行搜索。重复这一过程,直到达到事先设定的精度为止。变步长搜索法在保证搜索精度的情况下,大大减少了搜索时间,提高了搜索效率。

#### 4 同时确定日期和地点的反演模型

如果日期未知,仅知道北京时间,那么确定日期、当地时间和位置时,模型(14)–(16)仍可使用。与上一节不同的是,在日期已知的情况下,赤纬角可由式(3)确定;而在日期未知的情况下,就会增加一个未知参数(日期),并且这个参数是整型变量,与当地时间及经纬度是实型变量不同。在这种情况下,求解方法需要重新讨论。

如果采用搜索法求解,只需对日期简单搜索就可以了,上一节介绍的搜索法和变步长搜索法可以直接使用:对日期进行枚举,对每一天,按上一节给出的搜索法或变步长搜索法求解,得到每一天的最优解及相应的优化变量值,然后在得到的365个最优值中选取最优解。

如果采用牛顿法、拟牛顿法等其他方法,不应将日期作为实型变量直接进行优化求解,可将优化算法与搜索法相结合,对日期进行枚举,对每一天采用优化算法求解,得到每一天的最优解及相应的优化

变量值,然后再进行选优。

单纯采用太阳影子的长度信息进行反演,反演效果还不是最理想,在目标函数中可以利用更多的已知信息。由式(6)和式(7)可得  $t_i$  时刻影子方位角  $\omega_i$  满足

$$\cos \omega_i = \frac{\cos \delta \cos \alpha_i \sin \phi - \sin \delta \cos \phi}{\cos \theta_i}, \sin \omega_i = \frac{\sin \alpha_i \cos \delta}{\cos \theta_i}。$$

注意到附件中虽然给出了影子端点的坐标,但是并未说明坐标轴是如何选取的。事实上,对实际的视频数据,也无法确定具体的地理方位,因此如果直接采用方位角作为判别依据,就会多增加一个参数(坐标旋转角度)。为了减少优化参数,可以用方位角的差,也就是用两个时间点之间影子的旋转角度作为判别依据:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [(\omega_{i+1} - \omega_i) - (\omega_{i+1}^* - \omega_i^*)]^2。 \quad (18)$$

将目标函数(14)和(18)加权平均合并成一个目标函数,即可得到如下优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \lambda \left( \frac{l_{i+1}}{l_i} - \frac{l_{i+1}^*}{l_i^*} \right)^2 + (1-\lambda) [(\omega_{i+1} - \omega_i) - (\omega_{i+1}^* - \omega_i^*)]^2 \right\} \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} |\phi| \leq 90 \\ \theta_i > 0, i = 0, 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

其中,  $\lambda (0 < \lambda < 1)$  为加权系数。

还可以进一步采用如下目标函数,以利用更多信息:

$$\sum_{j=i+1}^n \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ \lambda \left( \frac{l_j}{l_i} - \frac{l_j^*}{l_i^*} \right)^2 + (1-\lambda) [(\omega_j - \omega_i) - (\omega_j^* - \omega_i^*)]^2 \right\},$$

即考虑任意两个时间点之间影长和旋转角度的变化,而不仅仅是相邻两个时间点之间的变化。

## 5 视频数据的反演模型

对于视频数据,因为是经过射影变换的,不能简单地认为视频中影子的长度与实际影子的长度成比例。以直杆底端  $Q_1$  为原点,地平面为  $xy$  平面,向东方向为  $x$  轴正向,向北方向为  $y$  轴正向,垂直向上方向为  $z$  轴正向建立直角坐标系(图 6),则直杆底端和顶端的坐标分别为  $Q_1(0,0,0), Q_2(0,0,L)$ 。假设摄像机的镜头(即光心)正对直杆,光心坐标为  $O(p,q,r)$ ,则视线方向为

$$n = \overrightarrow{OQ_3} = (-p, -q, 0),$$

其中,  $Q_3(0,0,r)$  为从光心沿视线方向对应于直杆上的点。同样地,从光心沿视线反方向对应于像平面直杆上的点为  $Q'_3(a,b,r)$ ,则

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q}, \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{p^2 + q^2}} = \frac{k+1}{k},$$

其中

$$k = \frac{|\overrightarrow{Q_1Q_2}|}{|\overrightarrow{Q'_1Q'_2}|} = \frac{L}{l}$$

为物像比,从而可得

$$a = \frac{k+1}{k}p, b = \frac{k+1}{k}q。$$

于是,直杆像底端的坐标为  $Q'_1(a,b,w')$ ,顶端的坐标为  $Q'_2(a,b,w'')$ 。

记影子端点的坐标为  $P_i(x_i, y_i, 0)$ ,影子像端点的坐标为  $P'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ ,则像平面的方程为

$$p \left( x' - \frac{k+1}{k}p \right) + q \left( y' - \frac{k+1}{k}q \right) = 0。$$

由  $P_i, O, P'_i$  三点共线可得

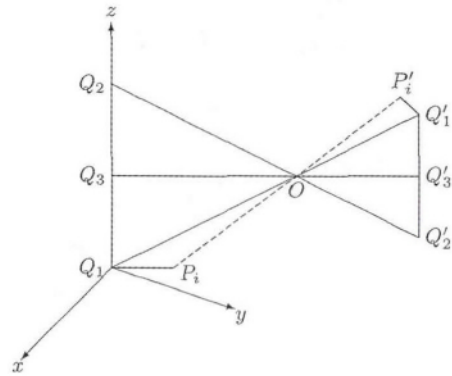


图 6 成像示意图

$$\frac{x_i - p}{x'_i - p} = \frac{y_i - q}{y'_i - q} = \frac{z_i - r}{z'_i - r} \quad (19)$$

$P'_i$ 落在像平面中,因而

$$p\left(x'_i - p - \frac{1}{k}p\right) + q\left(y'_i - q - \frac{1}{k}q\right) = 0. \quad (20)$$

由式(19)和式(20)解得

$$x'_i = p + \frac{(p^2 + q^2)(x_i - p)}{k[p(x_i - p) + q(y_i - q)]}, \quad (21)$$

$$y'_i = q + \frac{(p^2 + q^2)(y_i - q)}{k[p(x_i - p) + q(y_i - q)]}, \quad (22)$$

$$z'_i = r + \frac{(p^2 + q^2)(z_i - r)}{k[p(x_i - p) + q(y_i - q)]}. \quad (23)$$

若某点落在地面上,  $z_i = 0$ , 则有

$$z'_i = r - \frac{(p^2 + q^2)r}{k[p(x_i - p) + q(y_i - q)]}. \quad (24)$$

将  $Q_1, Q_2$  的坐标代入式(23), 可得

$$w' = \frac{(k+1)r}{k}, w'' = \frac{(k+1)r - L}{k}.$$

由此可得  $t_i$  时刻, 直杆的影子长度为

$$l'_i = |P'_i Q'_1| = \frac{\sqrt{(p^2 + q^2)(py_i - qx_i)^2 + r^2(px_i + qy_i)^2}}{k[p(x_i - p) + q(y_i - q)]}, \quad (25)$$

$t_i$  与  $t_j$  时刻之间, 直杆影子的旋转角度满足

$$\cos \theta'_{ij} = \frac{\overrightarrow{Q'_1 P'_i} \cdot \overrightarrow{Q'_1 P'_j}}{l'_i l'_j}, \quad (26)$$

其中,  $P'_i(x'_i, y'_i, z'_i)$  由式(21)、式(22)和式(24)给出。

至此, 我们得到了视频中影子长度和角度的理论计算公式(25)和(26)。类似于上一节, 确定视频拍摄时间和地点的数学模型可归结为: 求日期  $D$ , 初始当地时间  $t_0$ , 纬度  $\phi$ , 光心坐标  $(p, q, r)$ , 使得

$$\min \sum_{j=i+1}^n \sum_{i=0}^{n-1} \left[ \lambda \left( \frac{l'_j}{l'_i} - \frac{l'^{*}_j}{l'^{*}_i} \right)^2 + (1 - \lambda) (\theta'_{ij} - \theta'^{*}_{ij})^2 \right], \quad (27)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} |\phi| \leq 90 \\ \theta_i > 0, i = 0, 1, \dots, n \end{cases} \quad (28)$$

$$(29)$$

采用上一节的计算方法求解模型(27) — (29), 得到优化参数值, 最后再利用式(17)求得拍摄地点的经度。

## 6 竞赛论文的评述

在论文的评阅过程中, 我们也发现了一些问题。在计算赤纬角时, 很多队查到了计算赤纬角的各种近似公式, 例如:

$$\begin{aligned} \delta = \frac{180}{\pi} & \left[ 0.006\,918 - 0.399\,912 \cos\left(\frac{2N\pi}{365}\right) + 0.070\,257 \sin\left(\frac{2N\pi}{365}\right) - \right. \\ & 0.006\,758 \cos\left(\frac{4N\pi}{365}\right) + 0.000\,907 \sin\left(\frac{4N\pi}{365}\right) - \\ & \left. 0.002\,697 \cos\left(\frac{6N\pi}{365}\right) + 0.001\,48 \sin\left(\frac{6N\pi}{365}\right) \right] \end{aligned}$$

等, 其中,  $N$  表示年积日, 即从1月1日开始累计的天数<sup>[11]</sup>。这些公式通常是为了使利用平太阳时计算得到的赤纬角更接近于用真太阳时计算得到的赤纬角而做的修正。这些公式都是可以用的, 但应标明出处。

有相当一部分学生审题不够仔细。赛题第1问中明确要求给出影子长度关于各参数的变化规律, 但

相当一部分参赛队没有进行分析,也没有给出变化规律。事实上,这些变化规律对后面几个问题的解决是有帮助的。同样地,第 2 至第 4 问要求给出若干个可能的时间和地点,但绝大多数参赛队只给出了一个时间和地点。由于影子的变化关于春分、秋分、冬至、夏至具有近似对称性,在同样精度下会有多个可能的时间和地点。

还有一部分参赛队没有考虑到北京时间与北京当地时间的不同,在给出天安门广场处直杆影子长度时,将北京时间直接作为北京当地时间作图,从而得到了错误的结果。

在确定时间和地点时,有一部分参赛队将影子长度近似地视为当地时间的二次函数,利用二次拟合将影子长度最短的时间作为中午 12:00,这种方法也是可以的,但误差略大。但是有少部分学生,仅利用 2 个或 3 个坐标点的信息,通过解方程组的方法确定时间和地点参数,这种方法忽略了大部分信息,仅利用了少量信息,是一种不好的方法。

在建立优化模型进行参数反演时,应明确写清楚反演模型,包括目标函数和约束条件。大多数参赛队只考虑了目标函数,而没有明确写出约束条件。有些参赛队虽然写出了约束条件,但不完整,特别是没有考虑影子只可能在白天出现,晚上是不可能有的,从而缺少了约束条件(16)。

在设计反演算法时,大多数队都只简单地使用了数学软件中的标准函数,但没有写清楚在使用这些函数时应注意什么,函数中的参数如何确定,约束条件如何处理。特别地,没有体现反演的全局最优解的思想。

有一部分队采用坐标点进行反演,即选择如下的目标函数:  $\sum_{i=0}^n [(x_i - x_i^*)^2 + (y_i - y_i^*)^2]$ 。表面上来看,与仅用影长的目标函数相比,利用了更多信息,但由于坐标轴的选取方式未知,需要增加一个坐标轴旋转角度作为反演参数,从而增加了反演的难度。因此,这种方法虽然是可用的,但不是最好的方法。

同样地,直接用影长作为目标函数(见式(13)),因为增加了杆长作为反演参数,也不是最佳方法。

对第 3 问,由于日期的属性与时间、经纬度的属性不同,反演模型是具有混合变量的优化问题。因此,在论文中应明确说明混合变量优化问题是如何处理的,而不能笼统地说用软件计算得到结果。

判别模型和计算方法的优劣需要对模型进行检验,绝大多数队都没有考虑到这一点。应该在给定日期和地点的情况下,利用第 1 问的模型自行构造数据,然后利用自己建立的反演模型和求解方法对自己构造的数据进行反演,来确定日期与地点,并与给定的日期和地点相比较,以此来检验反演模型和求解方法的好坏。在对第 3 问进行检验时,也可以就地取材,利用附件 1 提供的数据,采用问题 3 的模型和算法进行反演,再与问题 2 的结果相比较。

对真实的视频数据,几乎没有一个队能够完整给出解决问题的数学模型。即使考虑到针孔成像,也仅仅是罗列了一大堆针孔成像的公式,这些公式离解决问题还很远。

## 参考文献

- [1]Junejo I N, Foroosh H. GPS coordinates estimation and camera calibration from solar shadows[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2010, 114: 991-1003.
- [2]Wu L, Cao X C, Foroosh H. Camera calibration and geo-location estimation from two shadow trajectories[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2010, 114: 915-927.
- [3]Duffie J A, Beckman W A. 太阳能-热能转换过程[M]. 北京:科学出版社, 1980.
- [4]方荣生. 太阳能应用技术[M]. 北京:中国农业机械出版社, 1985.
- [5]孙吉山, 洪薇. 北京标准时间与各地真太阳时的换算法[J]. 上海针灸杂志, 1994, 13(1): 25.
- [6]谢金星, 薛毅. 优化建模与 LINDO/LINGO 软件[M]. 北京:清华大学出版社, 2015.
- [7]司守奎, 孙兆亮. 数学建模算法与应用 [M]. 2 版. 北京:国防工业出版社, 2015.
- [8]袁亚湘. 非线性优化计算方法[M]. 北京:科学出版社, 2008.
- [9]王小平, 曹立明. 遗传算法——理论、应用与软件实现[M]. 陕西:西安交通大学出版社, 2002.
- [10]纪震, 廖惠连, 吴青华. 粒子群算法及应用[M]. 北京:科学出版社, 2009.
- [11]互动百科. 太阳赤纬[EB/OL]. [2015-10-30]. <http://www.baike.com/wiki/太阳赤纬>.



## Identify Geographical Location from Sun Shadow

CAI Zhijie<sup>1,2</sup>

(1. School of Mathematical Sciences, Fudan University, Shanghai 200433, China;

2. Shanghai Key Laboratory of Modern Applied Mathematics, Shanghai 200433, China)

**Abstract:** In this paper, dynamic variation principles of the shadow length and azimuth are presented. Thus, a nonlinear least squares model that determines the place and date of an object is established, and numerical methods are discussed. Finally, applying the pinhole imaging principle, a mathematical model for determining the date and place according to the video is given.

**Key words:** shadow length; azimuth; parameter inversion; pinhole imaging principle

### 作者简介

蔡志杰(1968—),男,博士,教授,博士生导师,应用数学专业,主要研究方向是工业应用数学、应用偏微分方程。

## 征 订 启 事

《数学建模及其应用》是经国家新闻出版总署批准的国内唯一的数学建模领域中的高级学术期刊,由李大潜院士担任主编。该刊是中国工业与应用数学学会、全国大学生数学建模竞赛组委会会刊,由山东省教育厅主管,全国大学生数学建模竞赛组委会和山东科技大学联合主办,旨在为从事数学建模研究和参与全国大学生数学建模竞赛的高校师生及建模爱好者提供一个学习、交流的平台。期刊栏目有专题综述、建模探索、教学研究、课题集锦、竞赛论坛、问题征解、书评、新闻简报等。特别是,本刊将及时在竞赛论坛栏目中刊登全国大学生数学建模竞赛、美国大学生数学建模竞赛和同样每年一次的数学建模夏令营的赛题研究和评论文章。《数学建模及其应用》于 2012 年创刊,季刊,国内外公开发行,国内统一刊号:CN 37-1485/O1,国际标准刊号:ISSN 2095-3070,每册定价 10 元(含邮费)。所有付款方式请将姓名、单位、邮寄地址、订阅期数等相关信息发送至编辑部邮箱:jmmia\_bjb@126.com。

欢迎单位和个人订阅,订阅方式及有关信息如下:

1) 邮局汇款 收款人:《数学建模及其应用》杂志编辑部

地 址:山东省青岛市经济技术开发区前湾港路 579 号山东科技大学数学与系统科学学院

2) 银行汇款 开户行:中国农业银行青岛经济技术开发区支行科技大学分理处

开户名:青岛山科《数学建模及其应用》杂志出版有限公司,账号:38115801040000401

3) 网上订阅 登陆网站 <http://jmmia.sdust.edu.cn>,点击首页“读者登录”,注册后可在线订阅