

摘要

“板凳龙”是一项起源于中国浙闽地区的传统民俗文化活动，舞龙队伍通过将多个板凳首尾相连，形成蜿蜒曲折的龙形队伍，在元宵节期间进行表演。本论文基于该传统文化活动，建立了数学模型，研究了舞龙队伍在盘龙和掉头过程中的运动轨迹及速度变化。

针对问题一，通过建立极坐标系下的等距螺旋线方程，并且使用计算机模拟了各个时刻舞龙队伍各个板凳把手的位置和速度信息，研究了舞龙队伍沿螺距为 55 cm 的等距螺旋线顺时针盘入的运动情况。计算出从初始时刻到 300 秒期间，各把手的每秒位置和速度，并给出了在特定时刻下龙头、龙身及龙尾部分节点的具体运动状态。

针对问题二，本文将计算终止时间的问题转化为碰撞模型检测。运用了多种检索手段，先进行初步碰撞检索，在第一次检索结果基础上进行二次检索，极大提高计算速度与精确度。通过计算判定板凳之间的碰撞距离，确定了舞龙队伍在螺线盘入过程中出现碰撞的终止时刻，并给出了此时队伍的具体位置和速度信息。

针对问题三，本文在问题二结果的基础上使用二分搜索法检索出舞龙队伍顺利进入以螺线中心为圆心、直径为 9 米的调头空间的最小螺距。通过调整搜索步长，得到了较为精确的结果。

针对问题四，本文优化了舞龙队伍的掉头路径，使其最短。过程中详细分析了两段相切的圆弧与盘入盘出螺线的几何关系，并以掉头路径长度为目标函数。

最后，针对问题五，论文进一步在前四问的基础上研究了舞龙队伍在调头路径上行进时，龙头的最大行进速度，确保各把手的速度不超过 2 m/s 的约束条件。

关键词：板凳龙，等距螺旋，几何分析，碰撞检测模型，路径优化，二分搜索

一、问题重述

1.1 问题背景

“板凳龙”是中国浙闽地区的一项传统民俗文化活动。人们通过将多个板凳首尾相连，形成一条蜿蜒盘旋的龙形队伍。板凳龙的表演中，龙头在前引导，龙身和龙尾紧随其后，整体呈圆盘状旋转。该活动不仅具有观赏性，也具有丰富的文化内涵，承载着中华优秀传统文化的精髓。

本题中的板凳龙由 223 节板凳组成，其中龙头 1 节，龙身 221 节，龙尾 1 节。各节板凳的尺寸与结构详见题干描述。舞龙的观赏效果通常取决于队伍行进的速度、盘龙所占面积以及板凳之间的协调性。研究和优化舞龙的运动轨迹，不仅有助于提升其观赏性，还能这一传统文化的传承与发展提供支持。

1.2 问题提出

本论文主要研究构建数学模型，解决以下问题：

问题一：要求我们求解在给定运动轨迹下，舞龙队在不同时刻的位置和速度信息。题目规定的运动轨迹为螺距为 55 厘米的等距螺线，以顺时针盘入，且龙头前把手的行进速度始终保持 1 m/s 。同时模型初始状态为：龙头位于螺线第 16 圈 A 点处。要求建立模型，计算从初始时刻到 300 秒期间，龙头、龙身和龙尾各节板凳的前把手及龙尾后把手的每秒位置和速度。同时，针对 0 秒、60 秒、120 秒、180 秒、240 秒、300 秒，给出龙头前把手、以及第 1 节、第 51 节、第 101 节、第 151 节、第 201 节龙身前把手和龙尾后把手的具体位置与速度。

问题二：要求我们确定舞龙队盘入的终止时刻，由于舞龙队沿问题一设定的螺线盘入过程中，随着盘入圈数的增加，螺线的半径会减小，使得板凳之间可能会出现碰撞情况或者其它无法继续盘入的情况。因此，我们需要根据建立的数学模型求出终止时刻并需要给出此时整个舞龙队的各节把手的具体位置和速度。

问题三：在舞龙表演中，舞龙队需要顺时针盘入至螺线中心，并在螺线的某一位置调头切换为逆时针盘出。本题要求我们对螺距进行研究，得出能使得舞龙队顺利进入以螺线中心为圆心、直径为 9 米的调头空间的最小螺距。为了使龙头前把手能够沿螺线顺利盘入到调头空间的边界，我们需要确定最小螺距，使得舞龙队进入该区域前不发生卡阻或停止。

问题四：要求我们在问题三给定调头空间内，对调头路径进行优化，调整掉头轨迹圆弧半径，保证各部分曲线相切的前提下，使调头路径尽可能缩短。

舞龙队需要从顺时针盘入转为逆时针盘出，调头路径由两段相切的圆弧组成，形成 S 形曲线。前段圆弧的半径是后段圆弧的两倍，且该曲线与盘入螺线和盘出螺线相切。同时，需计算从调头开始前 100 秒至调头后 100 秒期间，舞龙队每秒的位置和速度，并给出关键时间点（-100 秒、-50 秒、0 秒、50 秒、100 秒）下的龙头、龙身若干节点及龙尾的具体位置与速度。

问题五：舞龙队在问题四设定的路径下行进，龙头的行进速度始终保持不变。需要确定龙头的最大行进速度，使得舞龙队各把手的速度均不超过 2 m/s，即需要考虑队伍的行进速度极限，使得在不影响表演流畅性和安全性的前提下，龙头达到最大的行进速度。

二、问题分析

为了清晰地描述问题，本文参考螺线示意图，以螺线中心为原点，地面平面为坐标平面，建立二维极坐标系与笛卡尔坐标系进行模型分析。

2.1 问题一的分析

问题一的核心是确定舞龙队沿着等距螺线盘入时各节板凳把手的运动状态（位置和速度）。为此，需要：

- (1) 需要明确龙头前把手的位置与速度。因为龙头的运动状态直接影响其他把手的行为。通过对龙头的弧长进行积分，借助龙头前把手以 1m/s 恒定速度运动的特征，建立关于龙头 t 时刻位置极角 θ 的方程，从而得出 $\theta(t)$ 表达式
- (2) 对单节板凳的前后把手进行运动学分析。通过确定龙头前把手的运动状态，我们可以通过龙头与后续各把手之间的位置和速度相对关系，逐步推导出每节龙身及龙尾的把手的相对位置和速度。具体来说，前后把手的位置坐标需要满足条件：①同时在螺线上②距离为把手间距，速度需要满足条件：①与螺线相切②沿板凳方向速度分量相等。根据以上条件，通过方程求解出后把手与前把手的位置与速度的相对关系。
- (3) 从龙头依次推导龙身以及龙尾各把手的位置和速度信息。

通过上述分析，可以明确问题的核心在于建立龙头前把手的螺旋线运动模型。在此基础上，结合运动方程，能够进一步分析其它把手在不同时间点的具体位置和速度情况。

2.2 问题二的分析

问题二需要在问题一的基础上判断舞龙队盘入的极限时刻。解决问题的过程中需要注意考虑多个盘入的终止条件，例如：龙头盘入螺线中心，板凳间发生碰撞，龙头无充足空间进行转向等。

该问题可转化为队伍继续盘入时板凳之间发生碰撞的时间点。此问题可看作是一个碰撞检测问题，需要通过模型判断板凳之间的相对距离是否小于允许值。当两个板凳之间的距离小于允许值时，舞龙队便不能再进一步盘入。为此，需精确模拟舞龙队的每个板凳的面积与大小及其运动轨迹，并结合碰撞检测方法进行判断。在确定碰撞时刻后，利用问题一中的计算方法，分别计算舞龙队龙头，龙身与龙尾各把手的具体位置与速度。

舞龙队各节板凳在盘入过程中，需要考虑相互之间的转动与速度变化，且需要确保在碰撞检测过程中精确计算每节板凳的相对位置和速度。需要建立有效的碰撞检测机制，能够在不损失精度的前提下，快速确定碰撞时刻，并准确计算此时的运动状态。

2.3 问题三的分析

本题旨在求解使舞龙队能够顺利进入掉头空间的最小螺距。基于第二题中已建立的碰撞检测模型，我们可以利用这个模型来判断在给定螺距下舞龙队是否会在进入掉头空间前发生碰撞。

在第二题的基础上，我们已经可以判断某一时刻在特定螺距下是否发生碰撞。因此，我们编写一个函数来检测在某个螺距 p 下，舞龙队是否会在进入掉头空间前发生碰撞。如果检测到碰撞，该函数返回 `True`，否则返回 `False`。根据经常识，螺距越小，螺线的密集程度越高，舞龙队发生碰撞的概率也越大。因此，当螺距较小时，队员之间可能会由于位置过于接近而发生碰撞。在进入掉头空间之前发生碰撞的风险更大。因此，为了找出最小的螺距，我们采用二分查找法。该方法的核心思想是通过逐步缩小螺距的范围来确定最小值。初始设定螺距的上下界，计算当前区间的中间值，并利用碰撞检测函数判断在该螺距下是否发生碰撞。如果检测到碰撞（即返回 `True`），说明当前螺距偏小，因此需要增大螺距，调整查找区间为更大的范围的中间值。如果未检测到碰撞（即返回 `False`），说明当前螺距可能足够大，需继续缩小螺距范围，调整查找区间为更小的范围的中间值。通过不断调整查找区间，并在达到一定精度后停止搜索，最终得到能够使舞龙队顺利进入掉头空间的最小螺距。

这种方法能够有效地找出最小螺距，并保证舞龙队在进入掉头空间前不会发生碰撞。

2.4 问题四的分析

问题四的目标是优化调头路径，使得舞龙队能够在 S 形曲线中以最短路径完成调头。通过调整圆弧半径，需要在保证各段圆弧相切的前提下，尽可能缩短调头曲线的总长度。

本题难点在于掉头过程中不确定的变量过多，需要解超越方程，可能会影响结果的准确性。因此将首先对掉头路径进行几何方面的分析，找出变量间的关系。拟通过梯度下降法，在确定掉头过程中行进路线的满足几何关系同时，确保整个舞龙队的行进速度和位置满足物理约束条件。

2.5 问题五的分析

问题五要求在舞龙队沿 S 形曲线行进时，确定龙头的最大行进速度，使得各节板凳把手的速度不超过 2 m/s。为此，需要结合问题四中的曲线优化结果，分析龙头速度的变化情况，并通过速度约束条件求出最大速度。

三、模型假设

1. 舞龙队的运动路径严格遵循螺线曲线，不发生偏离。
2. 舞龙队的行进速度不受其他因素影响，保持行进过程中不掉队不出意外。
3. 所有板凳的宽度和长度均一致，且各节板凳的连接方式相同。
4. 所有板凳不考虑竖直方向上的影响。
5. 板凳之间的连接无弹性，忽略连接处的摩擦和松弛。

四、符号说明

符号	说明
α_1	前把手处轴线和速度方向夹角
α_2	后把手处轴线和速度方向夹角
v_1	某板凳前把手速度
v_2	某板凳后把手速度
\vec{v}_0	某板凳轴线的方向向量
$\vec{\mu}_1$	前把手坐标处螺线的切线方向向量
$\vec{\mu}_2$	后把手坐标处螺线的切线方向向量
θ_1	某板凳前把手极坐标下角度坐标
θ_2	某板凳后把手极坐标下角度坐标
θ_i	某处的极角坐标
S	最短路径长度
L	出入调头曲线点连线

R	调头曲线小弧半径
\vec{T}_1	进入调头曲线时速度方向
\vec{T}_2	离开调头曲线时速度方向
M_1	进入调头曲线点
M_2	离开调头曲线点

五、模型建立与求解

5.1 问题一

根据题意，我们以螺线中心为原点建立极坐标系，并构造出等距螺旋线的参数方程。由于龙头前把手的速度恒定，利用速度对时间进行积分可以确定龙头前把手的位置。基于这一位置，通过建立并求解相关的超越方程，找出螺旋线上与前把手距离为 286 厘米的点，筛选出符合条件的点来确定后把手的位置。龙身和龙尾部分的位置计算与此类似，通过前把手的位置递推后方的把手位置。

已知龙头、龙身和龙尾的前后把手通过板凳进行刚性连接，对板凳的受力情况进行分析。为保证板凳的把手保持演螺线前进的行进路线，在此过程中，我们发现板凳在平动的同时转弯。板凳受力导致的平动，且在力矩的作用下使其转动。由于在轴线方向上板凳所受的力相同，我们在直角坐标系下以一个板凳为例建立了板凳的运动方程。利用前一节板凳的后把手位置作为后一节板凳的前把手位置，逐步推导出整个舞龙队各个节点的速度。

5.1.1 数学模型的建立

本文研究的二维等距螺旋是一种常见的螺旋曲线，其特点是在极坐标系下，曲线上的点到原点的距离与极角呈线性关系。等距螺旋的数学表达式通常为： $r(\theta) = a + b\theta$ 。其中 a 和 b 是常数， b 控制螺旋的间距（即螺旋线相邻两圈的距离）。在本题中，螺线由原点开始， $a=0$ 。

我们以螺线中心为原点，在极坐标系下建立等距螺旋线的参数方程 $r = b\theta$ 。已知螺旋线的螺距为 $P = 55\text{cm}$ ，由于 $P = 2\pi b$ ，则其参数方程为：

$$r = \frac{0.55}{2\pi}\theta(\text{m})$$

以下为建立模型具体步骤：

步骤 1：根据龙头的运动特征得出其前把手位置随时间的变化

由题目材料可知，初始时刻，龙头位于角坐标 32π 处，并且以 1m/s 的速度顺时针沿螺线轨迹运动，我们需要找到某个时间龙头的位置，也就是确定该点的极角。

要确定这个点的极角，我们可等距螺旋上任意两点间的距离公式为桥梁，通过计算龙头每时刻 t 对应的位移，求出龙头前把手的具体位置。进而推出对应时刻龙头的位置极角。

1. 螺线的弧长

等距螺线的弧长微分为：

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

其中：

$$dr = \frac{d}{d\theta} (a + b\theta) = b$$

则弧长微分为：

$$ds = \sqrt{b^2 + (a + b\theta)^2} d\theta$$

总弧长 S 从 $\theta = 0$ 到任意角度的积分为：

$$S(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{b^2 + (a + b\theta)^2} d\theta \quad (1)$$

2. 时间与极角的关系

由于龙头以 1m/s 的恒定速度运动，因此弧长与时间的关系为：

$$S(\theta) = vt \quad (2)$$

3. 通过对方程(1)(2)进行求解，可以得出 t 时刻龙头的位置极角 $\theta = f(t)$

4. 龙头位置可视化

通过将其坐标进行转换，得到笛卡尔坐标系下龙头位置，用于后续可视化

$$x(t) = b\theta(t) \cos \theta(t)$$

$$y(t) = b\theta(t) \sin \theta(t)$$

5. 代码求解过程概述：

弧长微分计算：函数 `ds(theta)` 定义了等距螺旋的弧长微分公式，用于后续的积分。

时间和极角的关系：`find_theta_for_time(t)` 通过数值积分，找到在给定时间对应的极角。

位置计算：函数 `calculate_position(t)` 根据运动总时间计算龙头前把手在螺旋曲线上的位置，并将其从极坐标转换为直角坐标 x 和 y 。

轨迹生成与可视化：用 `matplotlib` 可视化等距螺旋的轨迹。

步骤 2：根据龙头位置、“板凳”几何与运动分析得出龙身龙尾各把手位置信息

对于龙身和龙尾各把手的计算，由于它们与龙头通过刚性板凳连接，假设每节板凳的长度为已知常数（例如 220 cm ），因此可以利用几何方法来求解相邻把手的位置。假设前把手的极角为 θ_1 ，需要计算后把手的极坐标 θ_2 。

1. 将极坐标转换为直角坐标：

$$\begin{aligned}x_1 &= b\theta_1 \cos \theta_1 \text{ #####}\\x_2 &= b\theta_2 \cos \theta_2\\y_1 &= b\theta_1 \sin \theta_1\\y_2 &= b\theta_2 \sin \theta_2\end{aligned}$$

2. 根据板凳长度计算把手位置:

使用板凳长度 L 来计算前把手到后把手的距离。这里使用直角坐标系中的距离公式:

$$Distance = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

即

$$L = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

3. 解方程①②③④⑤得到 θ_2

由于该超越方程具有多个解, 因此我们选取其中角度差最小, 且满足求解条件的解作为结果。在求解出每个相邻节板凳把手的位置后, 我们可以逐步推出龙身和龙尾各节前后把手的位置。

4. 代码实现说明:

a 隐式函数定义: 计算隐式函数的函数 `implicit_fun_2024_A_1`。

b 计算下一个把手位置: 使用 `fsolve` 来求解隐式函数从而得出 θ_2

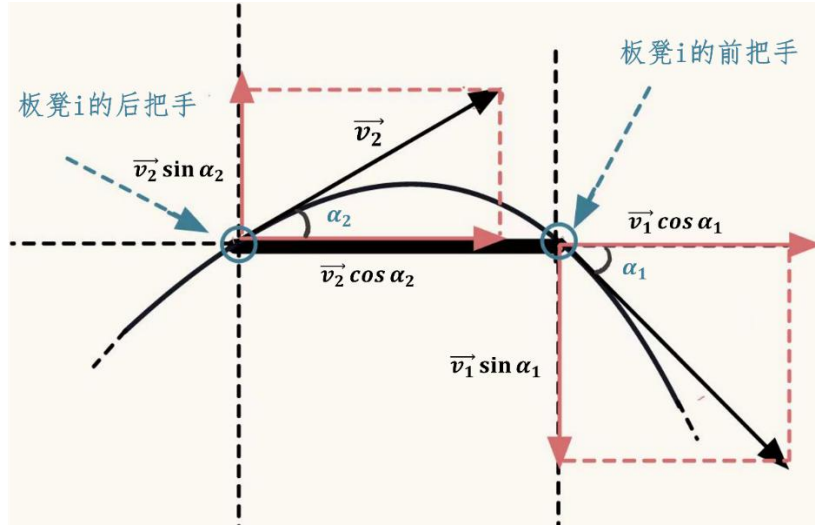
c 极坐标到直角坐标的转换: 函数 `convert_to_cartesian` 将极坐标转换为直角坐标。

根据以上步骤, 我们得出了通过前一个把手的位置来推导后一个把手位置的计算流程。在代码中, 只需要循环调用 `calculate_next_position(theta_1, d, a, b)` 即可求出某一时刻所有板凳的位置信息。

步骤 3: 对板凳进行动力学分析

首先, 我们对各节板凳进行动力学分析。由于板凳在螺旋线运动中仅受到重力与把手的外力作用且在垂直方向认为保持平衡, 因此只在水平面上进行受力分析。板凳在进行平动时, 还受到扭矩作用从而产生旋转。

已知各把手在螺旋线轨迹上运动, 则对轨迹上任意一点求导可得出个各把手速度的方向向量。已知各把手在各时间点的位置, 则可得知任意把手的在任意时间的速度方向。



运动学模型分析图

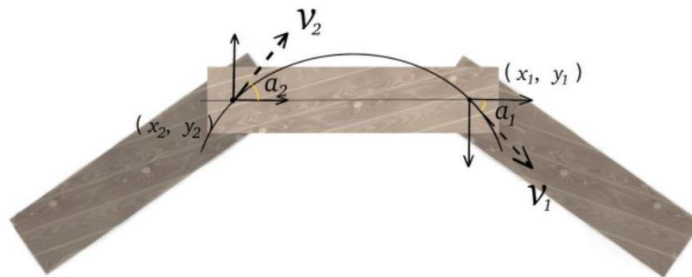
其中： \vec{v}_0 为板凳轴向的方向向量， $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2$ 为前把手的速度方向向量，后把手的速度方向向量， v_1, v_2 为前后把手速度的大小， θ_1, θ_2 为前后把手在极坐标系下的角度， α_1, α_2 为速度方向与轴向夹角。它们关系如下：

$$\vec{v}_0 = (b\theta_2 \cos \theta_2 - b\theta_1 \cos \theta_1, b\theta_2 \sin \theta_2 - b\theta_1 \sin \theta_1)$$

$$\vec{\mu}_1 = (b \cos \theta_1 - b\theta_1 \sin \theta_1, b \sin \theta_1 + b\theta_1 \cos \theta_1)$$

$$\vec{\mu}_2 = (b \cos \theta_2 - b\theta_2 \sin \theta_2, b \sin \theta_2 + b\theta_2 \cos \theta_2)$$

$$\begin{cases} \cos \alpha_1 = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{\mu}_1}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{\mu}_1|} \\ \cos \alpha_2 = \frac{\vec{v}_0 \cdot \vec{\mu}_2}{|\vec{v}_0| \cdot |\vec{\mu}_2|} \end{cases}$$



由于认为板凳为刚性物体，在轴向受力分量一致，因此板凳在轴向速度分量一致。由此可得如下关系：

$$v_1 \cdot \cos \alpha_1 = v_2 \cdot \cos \alpha_2$$

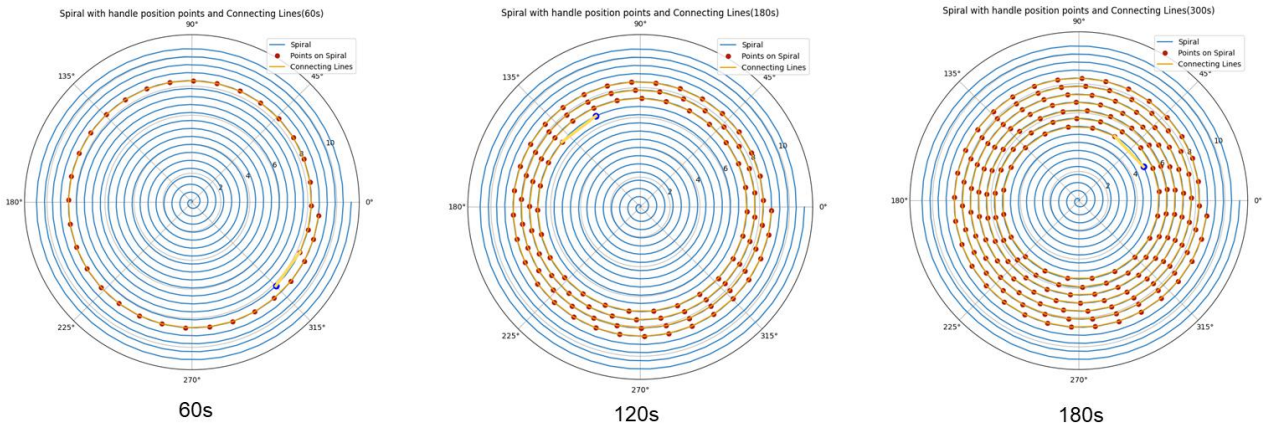
即：

$$v_1 = \frac{v_2 \cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$$

据此可找到同一板凳前后把手的速度关系。根据刚性连接的假设，可逐节推导整个舞龙队的运动速度和位置。通过该方程可以精确描述龙头前把手在螺旋线上每时刻的位置。

5.1.2 龙头，龙身与龙尾各把手的位置计算结果

以下为队伍行进位置可视化结果与部分位置结果，完整表格在附件result1.xlsx 中。



特定时间（60s、120s、180s）队伍的行进位置图

表 1 位置结果

位置	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头 x(m)	8.800000	7.868024	-0.333454	-5.890831	5.409355	1.456333
龙头 y(m)	0.000000	-2.393902	-7.551278	3.453644	-2.620149	4.847936
第 1 节龙身 x (m)	8.363824	8.242872	2.500772	-6.824296	6.050109	-1.402867
第 1 节龙身 y (m)	2.826544	0.441427	-7.168182	0.750268	0.167149	4.915569
第 51 节龙身 x (m)	-9.518732	-8.977782	-7.875138	-1.027620	7.148986	-5.416028
第 51 节龙身 y (m)	1.341137	-1.415518	3.175975	7.781433	-0.061329	-3.359983

第 101 节 龙身 x (m)	2.913983	8.417799	8.059124	5.482100	-1.307756	-7.420820
第 101 节 龙身 y (m)	-9.918311	-5.119176	-4.649576	-6.783788	-7.992013	0.176492
第 151 节 龙身 x (m)	10.861726	3.207568	-1.576209	-2.942539	-0.962900	4.243028
第 151 节 龙身 y (m)	1.828754	10.061579	9.926927	9.048597	8.894973	7.180905
第 201 节 龙身 x (m)	4.555102	-9.379858	-10.425256	-6.995763	-4.380004	-4.558862
第 201 节 龙身 y (m)	10.725118	6.164318	-2.607746	-7.486957	-8.678988	-7.952957
龙尾 (后) x (m)	-5.305444	9.948898	9.990874	4.099989	-0.685595	-2.171636
龙尾 (后) y (m)	-10.676584	-5.775850	4.693579	9.723519	10.020052	9.256340

5.1.3 龙头，龙身与龙尾各把手速度计算结果

以下为部分速度结果，完整结果在附件 result1.xlsx 中。

表 2 速度结果

速度	0 s	60 s	120 s	180 s	240 s	300 s
龙头 (m/s)	1.000000 0	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000
第 1 节龙身 (m/s)	0.999997 1	0.999962	0.999946	0.999919	0.999864	0.999726
第 51 节龙身 (m/s)	0.999974 2	0.999668	0.999548	0.999348	0.998977	0.998153
第 101 节龙身 (m/s)	0.999957 5	0.999463	0.999284	0.998996	0.998483	0.997413
第 151 节龙身 (m/s)	0.999944 8	0.999311	0.999096	0.998757	0.998169	0.996982
第 201 节龙身 (m/s)	0.999934 8	0.999193	0.998954	0.998583	0.997951	0.996701
龙尾 (后) (m/s)	0.999931 1	0.999150	0.998903	0.998521	0.997875	0.996605

5.2 问题二

为了确定舞龙队盘入的终止时刻，我们需要解决两个问题：

1. 确定各节板凳的运动轨迹，尤其是它们的位置和速度。
2. 确定各节板凳之间的最小距离，并找出达到最小距离时的终止时刻。

为解决这些问题，我们模拟了舞龙队沿着设定的等距螺线轨迹运动，并通过计算各个板凳的位置信息来实现对舞龙队的实时跟踪与碰撞检测。核心目标是确定板凳之间是否发生碰撞，若发生碰撞，则记录终止时间并结束程序。接着调用问题一中的函数对此时舞龙队的位置和速度进行求解。通过计算每个板凳上的把手（即连接龙头、龙尾和板凳的点）的极坐标，再转换为笛卡尔坐标，可以实现对整个舞龙队的运动模拟。并通过碰撞检测算法来判断是否存在板凳之间的重叠或相撞。

5.2.1 碰撞检测算法具体步骤

步骤一：模拟板凳的大小和位置

1. 板凳的几何模型

每个板凳由两个把手位置（洞眼）确定。由题干可知每个板凳的宽度为 0.3m，把手与长端边缘之间的距离为 0.275m。龙头与其余板凳把手之间的距离分别是 2.86m、1.65m。

由问题一的求解过程，我们可以得出任意时间任意把手的位置，根据把手位置和板凳形状，我们可以建立完整的板凳表示模型。

2. 把手位置的计算

初始的龙头位置通过函数 $\text{calculate_position}(t, a, b)$ 计算，其中 t 为当前时间， b 为螺线参数。

龙尾位置通过调用 $\text{calculate_next_position}(\theta_{\text{head}}, d, a, b)$ 计算，该函数通过隐式方程求解下一个把手的极角 θ_2 。

3. 板凳孔洞的极坐标与笛卡尔坐标转换，假设前后把手位置分别为 (x_1, y_1) ， (x_2, y_2) ，木板孔洞的位置以极坐标 (r, θ) 计算的，随后转化为笛卡尔坐标：

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = r_1 \sin \theta_1$$

$$x_2 = r_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = r_2 \sin \theta_2$$

通过计算每个把手的极坐标位置，再转为笛卡尔坐标，生成木板的四个顶点，形成木板的多边形（矩形）形状。多边形的顶点根据把手的位置以及板凳的宽度计算。

假设木板的宽度为 w （本例中 $w = 0.3$ 米），孔洞之间的距离为 d ，则木板四个顶点的位置计算如下：

两孔洞的方向向量为：

$$\mathbf{v} = \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2 = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

方向向量单位化：

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$$

方向向量的垂直向量为：

$$\mathbf{v}_{\perp} = \begin{bmatrix} -\hat{v}_y \\ \hat{v}_x \end{bmatrix}$$

垂直向量单位化：

$$\hat{\mathbf{v}}_{\perp} = \frac{\mathbf{v}_{\perp}}{\|\mathbf{v}_{\perp}\|}$$

木板的四个顶点分别为：

$$\text{左上顶点: } T_{left} = \mathbf{h}_1 + \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \frac{w}{2} + \hat{\mathbf{v}} \cdot d$$

$$\text{右上顶点: } T_{right} = \mathbf{h}_2 + \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \frac{w}{2} - \hat{\mathbf{v}} \cdot d$$

$$\text{左下顶点: } B_{left} = \mathbf{h}_1 - \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \frac{w}{2} + \hat{\mathbf{v}} \cdot d$$

$$\text{右下顶点: } B_{right} = \mathbf{h}_2 - \hat{\mathbf{v}}_{\perp} \cdot \frac{w}{2} - \hat{\mathbf{v}} \cdot d$$

这里， \mathbf{h}_1 和 \mathbf{h}_2 分别代表两个孔洞的坐标， $\hat{\mathbf{v}}$ 是两个孔洞间的单位方向向量， $\hat{\mathbf{v}}_{\perp}$ 是与方向向量垂直的单位向量。

步骤二：螺线运动的模拟与碰撞检测

为了节约运算资源，我们采用包含两种碰撞检测算法的综合检测算法，首先使用轴对齐边界盒（AABB）方法粗略判断两个板凳是否发生碰撞，如果发生碰撞，则记录结果，如果没有，在进一步使用分离轴定理（SAT）算法进行精确检测。

1.轴对齐边界盒（AABB）方法（快速检测）

为了进行快速的碰撞检测，首先可以使用 AABB 法计算木板的包围盒（Bounding Box）：

$$x_{\min} = \min(x_1, x_2, x_3, x_4), x_{\max} = \max(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$y_{\min} = \min(y_1, y_2, y_3, y_4), y_{\max} = \max(y_1, y_2, y_3, y_4)$$

两个木板 board1 和 board2 的 AABB 碰撞检测条件为:

$$\begin{aligned} x_{\max,1} < x_{\min,2} & \quad x_{\max,2} < x_{\min,1} \\ y_{\max,1} < y_{\min,2} & \quad y_{\max,2} < y_{\min,1} \end{aligned}$$

如果以上条件成立，则木板没有碰撞；否则，可能发生碰撞，需要进一步检测。

2. 分离轴定理 (SAT) 进行精确碰撞检测

在没有检测到 AABB 碰撞的情况下，进一步通过分离轴定理 (SAT) 进行精确检测。SAT 的核心是检测两个物体在某些轴上的投影是否有重叠。具体步骤如下:

(1) 计算木板的每条边: $\text{edge}_i = \text{vertex}_{i+1} - \text{vertex}_i$

(2) 对每条边垂直方向计算单位法向量作为投影轴:

$$\text{axis}_i = \frac{\begin{bmatrix} -\text{edge}_i^y \\ \text{edge}_i^x \end{bmatrix}}{\|\text{axis}_i\|}$$

(3) 将木板的定点投影到该轴上: $\text{projection}_i = \text{vertex}_i \cdot \text{axis}_i$

(4) 计算两个木板在该投影轴上的最小与最大投影:

$$\begin{aligned} \min_1, \max_1 &= \min(\text{projection}_1), \max(\text{projection}_1) \\ \min_2, \max_2 &= \min(\text{projection}_2), \max(\text{projection}_2) \end{aligned}$$

(5) 检测投影是否重叠:

$$\max_1 < \min_2 \text{ 或 } \max_2 < \min_1$$

如果符合不等式，则没有碰撞；否则，木板发生碰撞

步骤三: 时间步长的选择与结果记录

为了在保证碰撞检测精度的同时减少计算开销，本研究采用了一种动态调整时间步长的策略。该策略通过初步的粗略搜索与后续的精细优化相结合，逐步缩小时间步长，精确定位碰撞发生的时刻。

首先，我们使用较大的时间步长进行初步搜索，以快速确定碰撞可能生的时间区间。在此阶段，算法能够高效地检测到接近碰撞的区域，但由于步长较大，无法提供足够的时间精度。接着，在确定了初步结果后，我们逐渐缩小时间步长，集中在潜在碰撞发生的时间段内进行更为精细的搜索。通过减少时间间隔，进一步提高了碰撞检测的精度，最终精确计算出碰撞发生的时间。

该动态步长调整方法不仅有效减少了搜索空间和计算时间，还避免了使用固定步长可能导致的精度不足或计算资源浪费的问题。

此外，为了提升模拟结果的可视化效果，每秒至少更新一次画面，确保动画的流畅性与实时反馈的精度。通过该动态步长调整策略，我们成功实现了对舞龙队运动轨迹的高效、平滑模拟，并准确记录了碰撞发生的时间与位置。

步骤四：根据前三步计算得出的碰撞时间，计算此时舞龙队的位置和速度信息

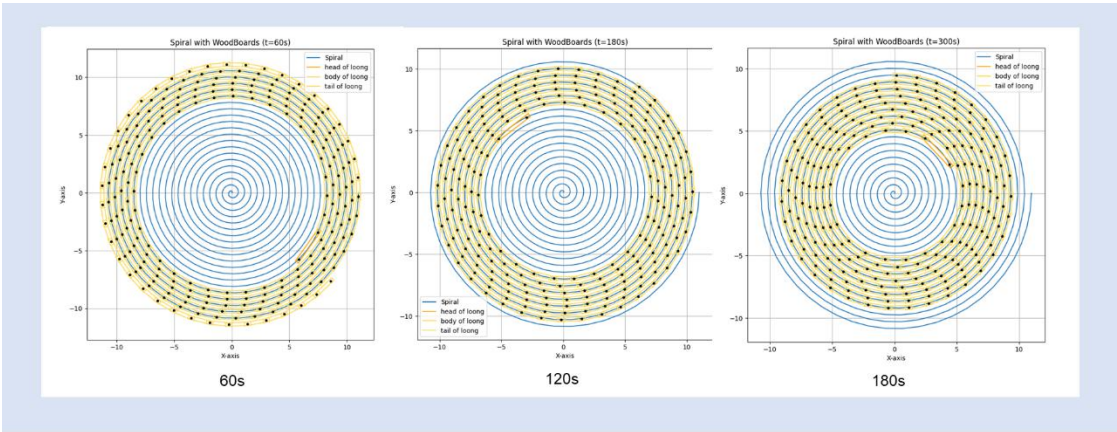
在得出碰撞时间 $t_{collision}$ 后，可以通过前述方法计算此时舞龙队各部分的位置和速度。

5.2.2 问题二结果

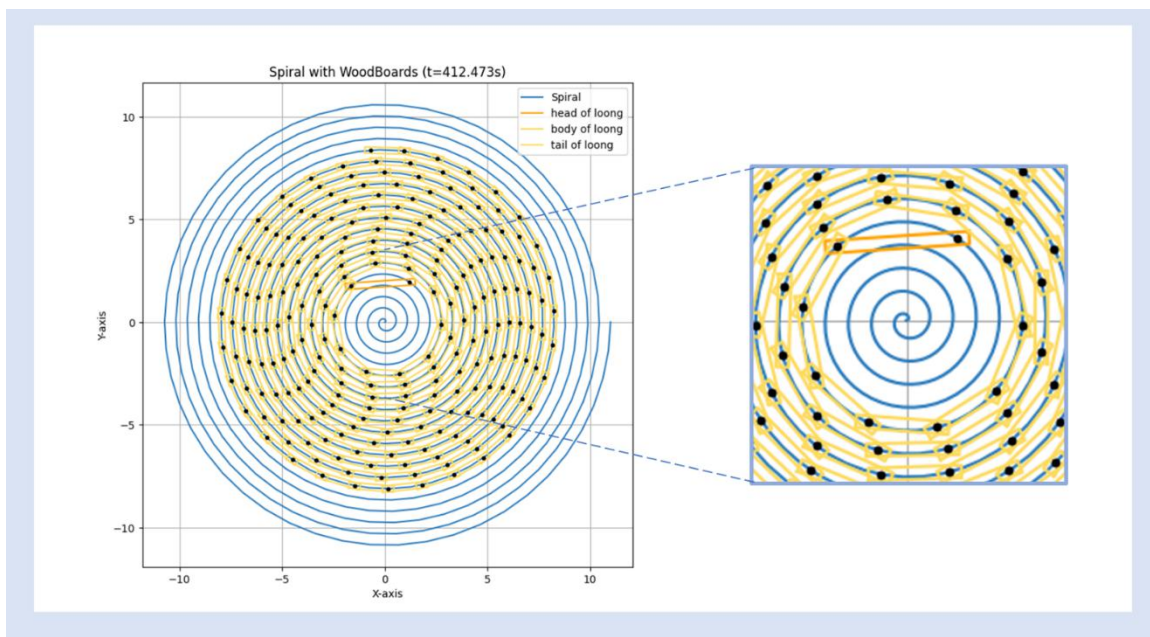
龙头将在 $t=412.47383999999965s$ 时跟与板凳相撞，舞龙队将在此时不能继续盘入。

以下为部分问题二位置与速度结果与部分时间点板凳位置可视化结果，完整结果在附件 result2.xlsx 中：

	横坐标 x (m)	纵坐标 y (m)	速度 (m/s)
龙头	1.209925	1.942788	1.000000
第 1 节龙身	-1.643797	1.753394	0.991551
第 51 节龙身	1.281194	4.326590	0.976858
第 101 节龙身	-0.536239	-5.880139	0.974550
第 151 节龙身	0.968848	-6.957478	0.973608
第 201 节龙身	-7.893160	-1.230771	0.973096
龙尾 (后)	0.956210	8.322737	0.972938



特定时间（60s、120s、180s）板凳面积位置图



终止时刻板凳位置图

5.3 问题三

已知问题三的问题为：从盘入到盘出，舞龙队将由顺时针盘入调头切换为逆时针盘出，这需要一定的调头空间。若调头空间是以螺线中心为圆心、直径为 9 m 的圆形区域，确定最小螺距，使得龙头前把手能够沿着相应的螺线盘入到调头空间的边界。这道题的思路如下：

利用第二题中的碰撞检测，写一个函数来检测在某个螺距 p 下，舞龙队是否会在进入掉头空间前发生碰撞，如果发生了碰撞，则返回 True，否则返回 False。

由于根据经验推断，螺距越小，发生碰撞越早，在进入掉头空间前碰撞的概率越大，所以使用二分查找法，如果返回值为 True,说明此时的螺距偏小了，下一次查找使用较大的区间的中间值，同理，如果返回为 False，说明此时螺距大于目标最小值，继续缩小。达到一定精度后停止搜索，得到最小螺距。

5.3.1 模型建立

我们将问题简化为在二维极坐标系下描述舞龙的运动，舞龙沿着阿基米德螺线移动，螺线的极方程为： $r = a + b\theta = b\theta$

设调头空间的半径为 $R = \frac{9}{2} = 4.5$ 米，则调头空间的极角为： $\theta_{\text{circle}} = \frac{R}{b} = \frac{4.5}{b}$,

其中， $b = \frac{p}{2\pi}$ 。

螺线的螺距 p 越小，螺线的密集程度越高，舞龙队在螺线上的盘旋路径越窄。若螺距过小，舞龙队员之间可能会由于位置过于靠近而发生碰撞。因此，我们需要设计一个碰撞检测算法，在给定螺距 p 下检测舞龙队在进入调头空间之前是否发生碰撞。

每个队员之间的相对位置由螺线方程决定，对于每个时间步 t ，我们计算龙头和龙尾的位置，并使用下述碰撞检测模型判断是否发生碰撞。若在给定螺距 p 下，在进入极角 θ_{circle} 前发生碰撞，则说明该螺距过小；若未发生碰撞，则继续缩小螺距，直到满足条件。

5.3.2 问题求解过程

1. 碰撞检测模型

为了实现碰撞检测，我们简化舞龙队每个队员的位置为一个“木板”模型（WoodBoard）。每个“木板”模型的边界框使用一个轴对齐的边界框（AABB, Axis-Aligned Bounding Box）来表示，其矩形边界框由龙头的前后把手位置确定。

碰撞检测的核心思想是通过计算不同队员之间的木板是否在二维平面上重叠。具体来说，我们使用以下两个方法来检测是否存在碰撞：

- 1) AABB 碰撞检测：比较两块木板的边界框是否重叠，若两个木板在 x 轴或 y 轴上没有重叠，则说明它们没有发生碰撞；
- 2) 分离轴定理（SAT, Separating Axis Theorem）：通过投影各木板的顶点到一个轴上，检查两个木板的投影是否相交，若存在一个轴上的投影不相交，则说明没有发生碰撞。

这两种方法的结合保证了碰撞检测的准确性。

2. 碰撞检测函数

具体来说，我们对一个特定的螺距值 p 进行检测的过程如下：首先利用问题一、二中函数计算处该螺距下舞龙队伍在不同时刻的位置信息，然后根据该位置信息，我们对包括龙头在内的前 20 个最可能碰撞的板凳进行碰撞检测，为了简化运算，我们使用 AABB 碰撞检测法进行粗略检测，进一步使用分离轴定理（SAT, Separating Axis Theorem）进行精确检测，通过记录并比较碰撞发生的位置与掉头空间与螺线的交点位置，我们可以判断舞龙队是否会在进入掉头空间前发生碰撞。

3. 搜索最小螺距：二分查找法

根据经验，我们知道当螺距 p 较小时，舞龙队在进入调头空间前发生碰撞的可能性较大，而随着螺距的增大，碰撞的可能性逐渐减少。因此，基于碰撞检测函数，我们可以使用二分查找法来确定最小的螺距 p_{\min} ，保证舞龙队能够顺利进入调头空间且不发生碰撞。

二分查找的步骤如下：

- 1) 首先设定螺距的上下界 p_{low} 和 p_{high} ，在本题中初始设置 $p_{low} = 0.4$ 米，
 $p_{high} = 0.7$ 米；
- 2) 计算当前区间的中间值 $p_{mid} = \frac{p_{low} + p_{high}}{2}$ ，并对该螺距进行碰撞检测；
- 3) 若当前螺距导致碰撞发生，则将 $p_{low} = p_{mid}$ ，即尝试更大的螺距；
- 4) 若当前螺距没有发生碰撞，则将 $p_{high} = p_{mid}$ ，即尝试更小的螺距；
- 5) 当区间的宽度小于设定的容差 ε 时（本题设定为 $\varepsilon = 10^{-4}$ ，停止搜索，
 得到最终的最小螺距。

4.搜索结果：通过上述的二分查找过程，得到了舞龙队顺利进入调头空间的最小螺距。

5.3.3 模拟结果

本题通过建立阿基米德螺线模型并结合碰撞检测算法，利用二分查找法，在搜索精度为 0.0001,搜索区间为[0,0.7]的搜索下，求解得保证舞龙队顺利进入掉头空间的最小的螺距为：

$$p_{min} = 0.45027465820312496 \text{ 米。}$$

5.4 问题四

问题四的核心任务是在调头过程中，优化并找出龙头的行进路径，使其在完成调头的同时，路径尽可能短。调头路径由两段相切的圆弧构成的 S 形曲线组成，其中前段圆弧的半径是后段的两倍，并且该曲线需要与盘入和盘出的螺线相切。为了优化这条路径，我拟采用非线性规划法优化调头路径。

5.4.1 问题分析

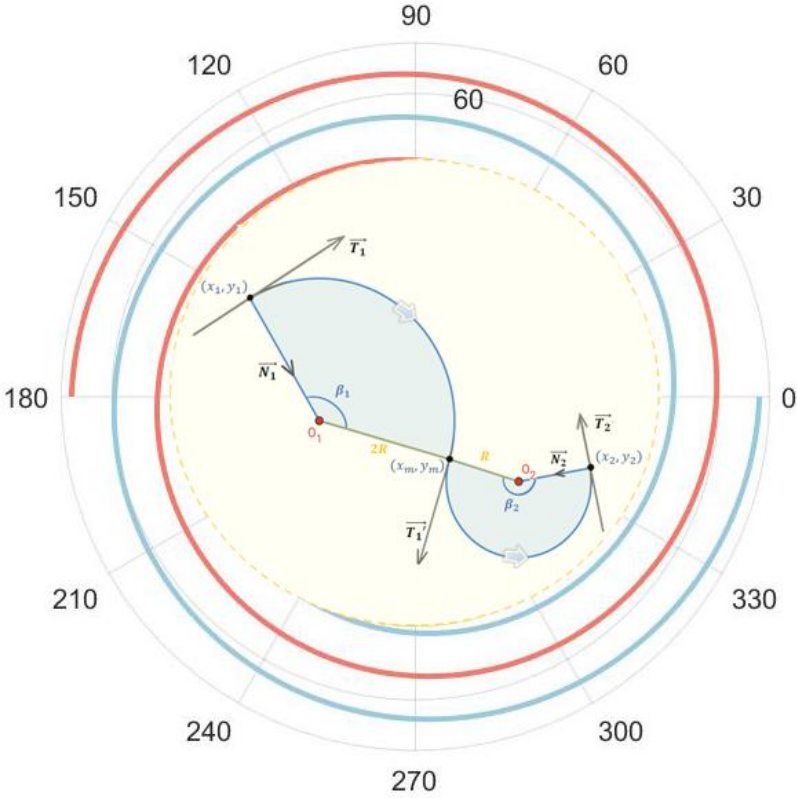
首先，此时螺距 $P = 1.7m$ ，由前三个问题的结果可知：此时不存在相撞问题，将在此基础上进行解答。

调头路径由两段相切的圆弧组成的复合曲线。设前段圆弧的半径为 R_1 ，后段圆弧的半径为 R_2 。路径的总长度 S 是由这两段圆弧的弧长之和决定的。路径长度公式为： $S = 2R_1\beta_1 + R_2\beta_2$

其中， β_1 和 β_2 是两段圆弧的角度。

目标为最小化路径长度，并保持在约束条件之内。且在最小化路径的条件下计算掉头前后时刻龙头，龙身与龙尾的相关位置与速度。

5.4.2 第一小问分析与求解



调头示意图

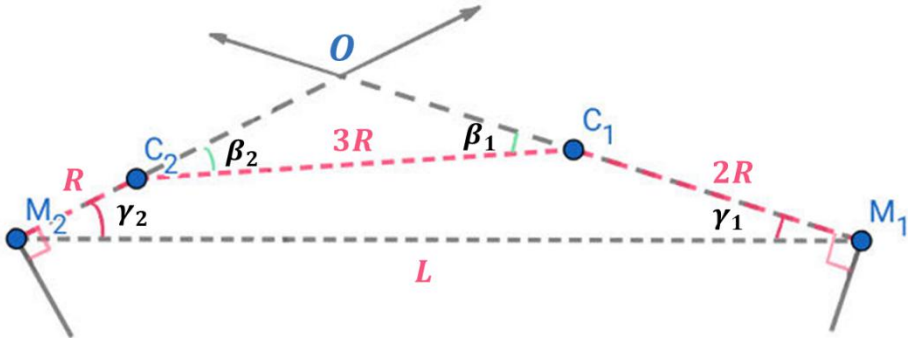
5.4.2.1 建立数学模型

如图，令掉头的起始点与结束点为 M_1 、 M_2 ，建立两相切圆弧的数学模型，下面是对该模型的具体描述：

两圆圆心 C_1 、 C_2 在过切点的两垂线上，两垂线相交于一点 O 。设 M_1M_2 两点距离为 L 。

数学模型示意图

由下列方程可求出盘入，盘出螺线进入与离开掉头区域时的角度。由此可确定 θ_1, θ_2 的限定条件。



$$\begin{cases} r = b\theta \\ r = 4.5 \end{cases} \Rightarrow \theta_{in}; \begin{cases} r = -b\theta \\ r = 4.5 \end{cases} \Rightarrow \theta_{out}$$

$$\theta_{out} < \theta_1, \theta_2 < \theta_{in}$$

为确定各变量间关系，减少优化目标，确定约束条件，以下为几何方面推导过程：

1. 对 θ_1, θ_2 进行线性规划。
2. 对于 $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, \vec{T}_1 , \vec{T}_2 , 根据对螺线切方向的求导可列出如下表达式：

$$\begin{aligned} x_1 &= b\theta_1 \cos \theta_1, \quad y_1 = b\theta_1 \sin \theta_1 \\ x_2 &= b\theta_2 \cos \theta_2, \quad y_2 = b\theta_2 \sin \theta_2 \\ \vec{T}_1 &= (T_{1x}, T_{1y}) = (b \cos \theta_1 - b\theta_1 \sin \theta_1, b \sin \theta_1 + b\theta_1 \cos \theta_1) \\ \vec{T}_2 &= (T_{2x}, T_{2y}) = (b \cos \theta_2 - b\theta_2 \sin \theta_2, b \sin \theta_2 + b\theta_2 \cos \theta_2) \\ \vec{M_1 M_2} &= (b(\theta_2 \cos \theta_2 - \theta_1 \cos \theta_1), b(\theta_2 \sin \theta_2 - \theta_1 \sin \theta_1)) \end{aligned}$$

3. 根据三角函数有关方程，可以推导得到如下关系：

$$\begin{aligned} L^2 &= b^2(\theta_1 \cos \theta_1 - \theta_2 \cos \theta_2)^2 \\ \sin \gamma_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1\right) = \frac{\theta_1 \vec{\theta}_2 \cdot \vec{T}_1}{|\theta_1 \vec{\theta}_2| \cdot |\vec{T}_1|} \\ \sin \gamma_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_2\right) = \frac{\theta_1 \vec{\theta}_2 \cdot \vec{T}_2}{|\theta_1 \vec{\theta}_2| \cdot |\vec{T}_2|} \\ \cos(O) &= \cos(\pi - \gamma_1 - \gamma_2) = -\cos(\gamma_1) \cos(\gamma_2) + \sin(\gamma_1) \sin(\gamma_2) \end{aligned}$$

4. 进一步推导可得：

$$\begin{aligned} \cos O &= \frac{OC_1^2 + OC_2^2 - 9R^2}{2OC_1 \cdot OC_2} \\ \cos O &= \frac{(OC_1 + 2R)^2 + (OC_2 + R)^2 - L^2}{2(OC_1 + 2R) \cdot (OC_2 + R)} \\ \frac{\sin \gamma_1}{\sin \gamma_2} &= \frac{OC_1 + 2R}{OC_2 + R} \end{aligned}$$

5. 再次利用三角函数的关系可推知：

$$\sin \beta_1 = \frac{\sin O \cdot OC_2}{3R}; \sin \beta_2 = \frac{\sin O \cdot OC_1}{3R}$$

6. 最终，弧长的计算表达式为：

$$S = (\pi - \beta_1) \cdot 2R + (\pi + \beta_2) \cdot R$$

5.4.2.2 定义决策变量与约束条件

根据前文数学方面分析，在该问题中，决策变量包括：

1. 圆弧的角坐标 θ_1

2.圆弧的角坐标 θ_2

约束条件包括:

1.相切约束: 圆弧必须与螺旋线相切。即圆弧的切线方向在接触点与螺旋线的切线方向一致。

2.半径比例约束: 前段圆弧半径 R_1 是后段圆弧的半径 R_2 的两倍, 即:
 $R_1=2 R_2=2R$

3.角度范围约束: 圆弧的转角 β_1 和 β_2 受限于路径的几何形状, 一般取值在 $0<\beta_1, \beta_2\leq 2\pi$;

5.4.3 第一小问计算结果

当掉头曲线最短时, 结果为:

符号	含义	结果
θ_1	掉头开始时的极角坐标	16.63196110724008
θ_2	掉头结束时的极角坐标	-16.63196110724008
R	转弯圆弧较短的半径	1.0
\vec{T}_1	掉头开始时速度方向	[3.42802664, -2.92777012]
\vec{T}_2	结束掉头时速度方向	[3.42802664, 2.92777012]
\vec{N}_1	掉头开始时法向量	[-4.42371173, 1.0000]
\vec{N}_2	掉头结束时法向量	[-4.42371173, 1.0000]

5.4.4 第二小问分析与求解

在前一问中已计算出掉头路径最短时掉头的起始点与结束点的坐标, 每个掉头圆弧的角度与半径。则可根据这些信息求得掉头时的路径与所需的其他内容。

由问题一与问题二的分析, 对螺线上任意已知角度的点, 可求其切线与法线方向向量, 则可求得: θ_1 处切线向量 \vec{T}_1 与法向量 \vec{N}_1 , θ_2 处切线向量 \vec{T}_2 与

法向量 \vec{N}_2 :

$$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} T_{1x} \\ T_{1y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \cos \theta_1 - b\theta_1 \sin \theta_1 \\ b \sin \theta_1 + b\theta_1 \cos \theta_1 \end{bmatrix}; \vec{T}_2 = \begin{bmatrix} T_{2x} \\ T_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \cos \theta_2 - b\theta_2 \sin \theta_2 \\ b \sin \theta_2 + b\theta_2 \cos \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{N}_1 = \begin{bmatrix} -T_{1y} \\ T_{1x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \sin \theta_1 - b\theta_1 \cos \theta_1 \\ b \cos \theta_1 - b\theta_1 \sin \theta_1 \end{bmatrix};$$

$$\vec{N}_2 = \begin{bmatrix} -T_{2y} \\ T_{2x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \sin \theta_2 - b\theta_2 \cos \theta_2 \\ b \cos \theta_2 - b\theta_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

以及 θ_1, θ_2 处单位法向量 \vec{N}_{1unit} 与 \vec{N}_{2unit} :

$$\vec{N}_{1unit} = \frac{\vec{N}_1}{\sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2}}; \vec{N}_{2unit} = \frac{\vec{N}_2}{\sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2}}$$

已知圆周上一点的坐标与其单位法向量, 可求出该圆的圆心坐标:

$$O_1 = \begin{bmatrix} h_1 \\ k_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\theta_1 \cos \theta_1 - \frac{T_{1y}}{\sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2}} \cdot R \\ b\theta_1 \sin \theta_1 + \frac{T_{1x}}{\sqrt{T_{1x}^2 + T_{1y}^2}} \cdot R \end{bmatrix}$$

由于掉头路线为两段相切的圆弧, 可求出两圆弧相切位置的切线方向与坐标:

$$\vec{T}_1' = \begin{bmatrix} T_{1x}' \\ T_{1y}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1x} - h_1 \\ T_{1y} - k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_m \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - h_1 \\ y_1 - k_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ k_1 \end{bmatrix}$$

由此类推, 可求出第二个圆心位置:

$$O_2 = \begin{bmatrix} h_2 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_m - \frac{T_{2y}}{\sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2}} \cdot R \\ y_m + \frac{T_{2x}}{\sqrt{T_{2x}^2 + T_{2y}^2}} \cdot R \end{bmatrix}$$

则掉头起始点与终点有如下关系:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m - h_2 \\ y_m - k_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_2 \\ k_2 \end{bmatrix}$$

假设在未掉头情况下, 龙头沿盘入盘出两条螺线轨迹进行, 由于可较容易求出在此情况下时间, 螺线上角坐标与速度的关系, 因此我们首先求出盘入盘出的时间点。由于 $[-100, 0]$ 时间段内龙头在盘入螺线上运动, 则可根据问题一的计算过程, 计算在螺距为 1.7m 的情况下龙头, 龙身, 龙尾的位置与运动速度。

在已知掉头起始点与结束点位置, 圆弧半径的情况下, 可由上述分析过程求出掉头曲线在极坐标下的解析表达式, 记为 $F(r, \theta)$ 。与问题一相似, 通过该方程精确描述龙头前把手在掉头过程中每时刻的位置。则有:

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} + \frac{\partial F}{\partial r} \frac{dr}{d\theta} = 0, \text{ 即 } \frac{dr}{d\theta} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial r}}{\frac{\partial F}{\partial \theta}}$$

则可据此得出方程:

$$L = \int_{\theta_b}^{\theta_a} \sqrt{r^2(\theta) + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = vt$$

绘制运动轨迹涉及到圆与圆之间的切线和切点的计算。

5.5 问题五

5.5.1 模型建立

问题五将在结合前四问的基础上解答。需要求解最大速度使之满足约束条件: 舞龙队各把手的速度均不超过 2 m/s 。为此将分成两种情况进行讨论:

1. 在非掉头阶段各把手的速度不超过 2 m/s
2. 在掉头阶段速度不超过 2 m/s

由于龙身与龙尾各把手处速度与龙头速度正相关, 则可通过二分搜索法, 判定每时刻是否有把手速度超过 2 m/s 。如超过, 则降低速度继续进行模拟。据此可找出龙头最大行进速度。

当在非掉头状态时, 根据问题四的分析与解答过程, 已知盘入螺线与盘出螺线中心对称且已经确定掉头与停止掉头的位置, 可根据问题一中的公式计算各个把手对应的速度大小。

当在掉头阶段时, 根据问题四中建立的掉头曲线方程与解答过程, 可计算出各把手对应的速度大小。

六、模型的评价、改进与推广

6.1 模型的优点

本文在分析问题的过程中运用多种方法, 不止考虑了数学上的严谨, 还考虑到实际中的复杂情况。问题一与问题二中在清楚完整地分析了整个舞龙队运动过程的基础上, 将模型合理简化为点的运动, 模型建立中充分利用题目所给信息, 建立运动方程。对问题三与问题四中求解最短路径的决策原则进行了全面的分析和讨论, 使得模型具有较多的理论支持。问题五的模型充分考虑前四个问的结果, 在提高效率的同时仍有较高的可信度。

解决问题过程中所有模型的建立更多基于数学方面的分析和合理推导, 对于部分重要原则给出了相关定义和严格证明。模型在一定程度上准确地回答了问题, 并做出了一些简化, 提升了求解效率, 易于理解和解答, 且使得结果具有较强的可信性。

6.2 模型的缺点

虽然模型具有多个优点, 但也存在一些缺点: 本文解决的问题为实际情况下的理想化假设, 未考虑某些复杂情况, 可能导致结果与实际情况存在差距。部分性质的证明和指导原需要满足特定条件。此外, 模型使用了多个超越方程的数值解, 可能存在某些误差, 在计算效率和简便性方面有待进一步提升。

6.3. 模型的改进

为了克服模型的一些缺点，可以考虑以下改进措施：考虑行进路线为更复杂的函数情况下的模型扩展，更多地考虑真实情况，引入更多的实际数据和变量。

6.4. 模型的推广

本模型的方法可以推广到其他领域，例如：本模型中关于最短路径和速度控制的策略可被运用于其他路径控制的相关领域，例如交通管控等。

七、参考文献

- 【1】 刘崇军.等距螺旋的原理与计算[J].数学的实践与认识,2018,48(11):165-174.
- 【2】 陈远宁.关于等距曲线的若干研究[D].合肥工业大学,2007.

八、附录

- 1. calculate_head_p.py (3 KB)用于计算舞龙队龙头前把手的位置。
- 2. calculate_next_p.py (3 KB)计算下一个把手的位置
- 3. calculate_v.py (2 KB): 用于计算速度的模块
- 4. circle_equation.py (5 KB)
- 5. problem 4.py (5 KB)特定问题 4 的解决方案主程序，包含了调头路径的优化、几何计算和相关数据记录功能。
- 6. problem1.py (7 KB)解决方案中关于问题 1 的代码，处理问题 1 中涉及的几何或物理问题。
- 7. problem2.py (9 KB) 解决方案中关于问题 2 的代码
- 8. problem3.py(8 KB) 解决方案中关于问题 3 的代码
- 9. problem5.py (3 KB) 解决方案中关于问题 5 的代码
- 10. result1.xlsx(2,666 KB)
- 11. result2.xlsx (24 KB)
- 12. test.py (1 KB)测试脚本，用于调试和验证各个模块的功能，确保程序在执行过程中正确运行。