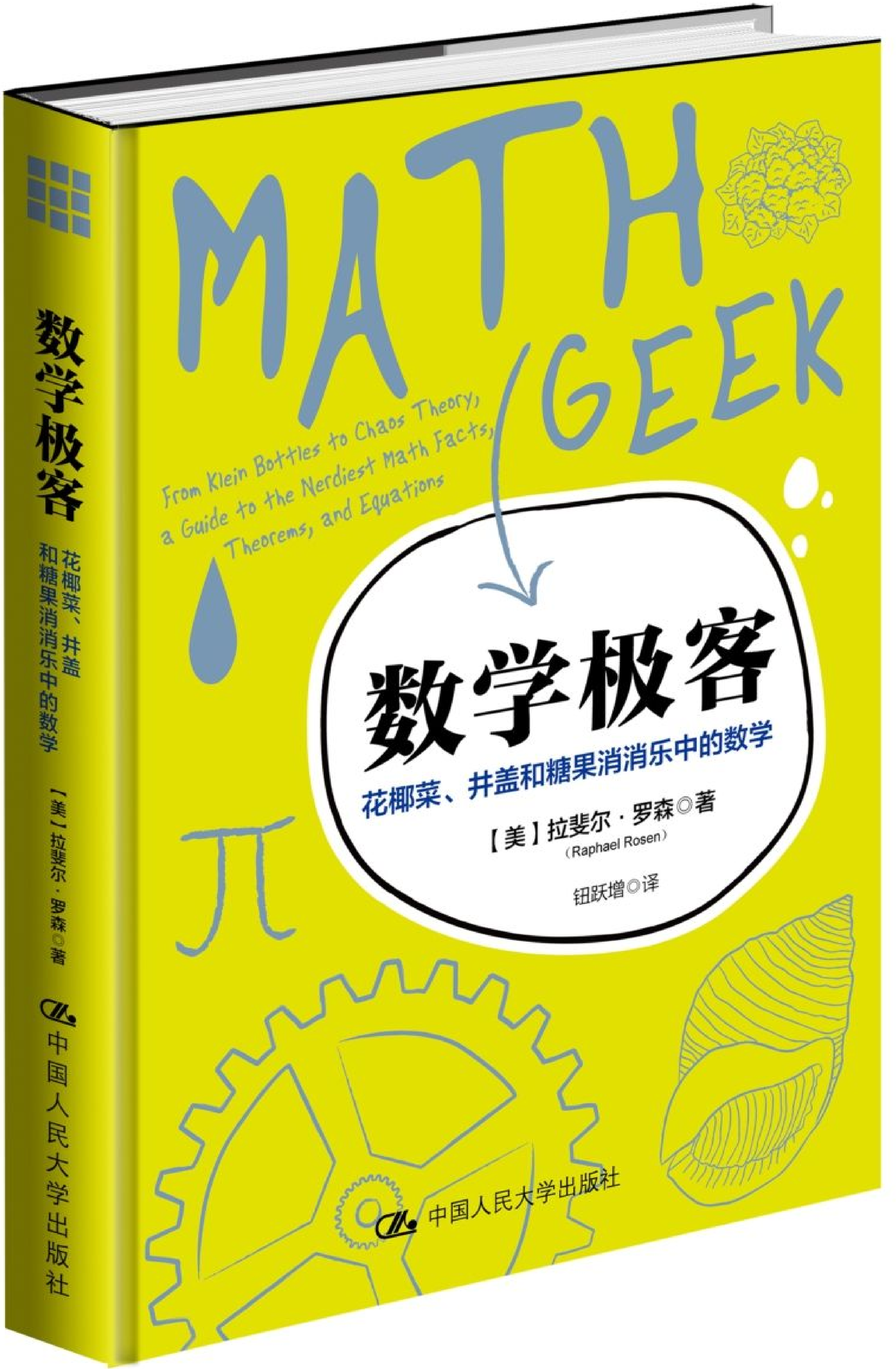

数学极客
花椰菜、井盖和糖果消消乐中的数学
【美】拉斐尔·罗森◎著
中国人民大学出版社
MATH
GEEK
From Klein Bottles to Chaos Theory, a Guide to the Nerdiest Math Facts, Theorems, and Equations
数学极客
花椰菜、井盖和糖果消消乐中的数学
【美】拉斐尔·罗森◎著
（Raphael Rosen）
钮跃增◎译
π
中国人民大学出版社

版权信息

书名：数学极客:花椰菜、井盖和糖果消消乐中的数学

作者：(美)拉斐尔.罗森(RaphaelRosen);钮跃增

出版社：中国人民大学出版社

出版日期：2018-1

ISBN：978-7-300-25214-8

价格：38.00元

Table of Contents

1. 版权信息
2. 作者简介
3. 前　言
4. 致　谢
5. 第一部分 形　状
    1. 1 奇妙的罗马花椰菜
    2. 2 测量海岸线的长度
    3. 3 有趣和有效的肥皂泡
    4. 4 波洛克的画里有数学吗
    5. 5 科赫雪花
    6. 6 你生活在第四维空间吗
    7. 7 造出更好的传送带
    8. 8 鞋带与DNA的数学联系
    9. 9 地铁线路图遗漏了什么
    10. 10 日本折纸艺术
    11. 11 绳结背后的数学
    12. 12 自行车齿轮为什么大小不同
    13. 13 雨滴与泪珠的形状是不同的
    14. 14 交通标志为什么有不同的形状
    15. 15 五角大楼为什么是五角形
    16. 16 三角形
    17. 17 井盖为什么是圆的
    18. 18 乐高积木
    19. 19 会飞的四边形
    20. 20 疱疹和食盐有什么共同点
    21. 21 高尔夫球表面为什么有凹痕
    22. 22 高斯与比萨

23. 23 短程线穹顶
24. 24 数学幻想小说
25. 25 足球不只是一个球
26. 26 鲁比克魔方——玩具还是数学奇迹
27. 27 纸张尺寸
28. 28 用地图描绘地球的不同方式
29. 29 M&M巧克力豆
30. 30 七巧板
31. 31 天鹅绒绳的数学问题
32. 32 吊桥是如何承重的

6. 第二部分 行　为
    1. 33 公交车为什么成群出现
    2. 34 让你在赌场不再输钱
    3. 35 怎样让电影赢得奥斯卡奖
    4. 36 如何不被雨淋
    5. 37 最快的结账排队法
    6. 38 怎样准备图灵测试
    7. 39 六分仪
    8. 40 分摊房租
    9. 41 公平切蛋糕
    10. 42 让包裹配送更高效
    11. 43 算法对互联网体验有什么影响
    12. 44 解释蒙提霍尔问题
    13. 45 抛球杂耍背后的数学
    14. 46 纳什均衡
    15. 47 椋鸟群背后的数学
    16. 48 让堆放井然有序
    17. 49 法庭中的数学
    18. 50 40%的降水概率究竟是什么意思
    19. 51 基于数学的应试策略
    20. 52 免疫系统也会做数学
    21. 53 谷歌翻译的工作原理
    22. 54 不要紧跟前车行驶
    23. 55 巴西果效应
    24. 56 路多不代表流量少
    25. 57 一张纸能折多少次
    26. 58 真的有更好的登机方法

7. 第三部分 图　案
    1. 59 铺嵌
    2. 60 领带的177 147种打法
    3. 61 音乐与数学鲜为人知的关联
    4. 62 围棋
    5. 63 棋盘与麦子
    6. 64 汉诺塔
    7. 65 鸽巢原理
    8. 66 迷宫
    9. 67 解开数独需要几条线索
    10. 68 梵高画里的数学图案
    11. 69 穿过一个房间堪称数学壮举
    12. 70 信息论
    13. 71 社交媒体的嫉妒
    14. 72 录音如何变成数字音乐文件
    15. 73 一张地图需要几种颜色
    16. 74 数学创造了孩子最喜欢的电影
    17. 75 糖果消消乐
    18. 76 你是否呼吸过恺撒的最后一口气
    19. 77 计算机的工作原理
    20. 78 同一天生日的概率
    21. 79 教堂钟与数学
    22. 80 贝叶斯统计
    23. 81 棒球与自责分率
    24. 82 细菌分裂
    25. 83 星盘
    26. 84 休止角
8. 第四部分 特殊数字
    1. 85 让人大惊小怪的π
    2. 86 质数
    3. 87 网络安全
    4. 88 无穷性的奇迹和挫败
    5. 89 自然中的斐波那契数
    6. 90 杜威十进分类法
    7. 91 随机数真的是随机的吗
    8. 92 十的次方
    9. 93 公制单位

10. 94 阿秒
11. 95 艺术与建筑中的黄金比例
12. 96 DNA 的黄金比例
13. 97 孩子的玩具来画外次摆线
14. 98 寻找外星人的数学原因
15. 99 蝉会用数学保护自己的物种吗
16. 100二进制

作者简介

拉斐尔·罗森（RaphaelRosen），在美国旧金山的科学、艺术和人类历史实践博物馆——探索科学博物馆工作期间，迷上了科学写作，曾为美国国家航空航天局、《华尔街日报》和Space．com撰稿，还写过一本关于外太空的儿童读物。他获得了美国威廉姆斯学院的哲学学士学位和南加州大学的专业新闻学硕士学位，目前住在纽约。

拉斐尔·罗森提供了一种独特而有趣的方式，让初学者观看数学之美，而不是去钻研那些令人生畏的公式。——全国教师协会

MATHGEEK：FromKleinBottlestoChaosTheory，aGuidetotheNerdi⌄estMathFacts，Theorems，andEquations

ByRaphaelRosen

PublishedbyarrangementwithAdamsPublishing，

aDivisionofAdamsMediaCorporation

throughBardon⌄ChineseMediaAgency

前　言

什么是数学极客？也许，以前上学的时候，你很喜欢数学课，现在闲暇时也会玩些逻辑游戏；也许，你对有关数学的通俗书籍很感兴趣，如《证明》《数字追凶》《模仿游戏》《美丽心灵》等，想了解更多知识；也许，你是一名工程师或物理学家，每天都在利用高等数学知识工作；也许，你在数学上吃了不少苦头，但渴望了解这个让许多人着迷的领域；也许，你已经是某种意义上的极客，毕竟，就像数学定理一样，数学极客也是各式各样的。

不论你属于哪种，通过这本书，我想让你知道：数学绝不仅仅是一大堆需要死记硬背的公式。你不用背任何东西，最后也没有考试，我希望让你相信，数学来源于现实———各种各样的形状、图案、数字、参数，当然，还有一些小彩蛋。总之，数学就在你呼吸的空气里，在你走过的人行道上，和你每天上班坐的公交车里。什么意思呢？要想知道答案，请继续读下去。

除了让你知道数学就在我们每天生活的世界里，我还想让你知道，数学很美妙。不是说纸上的公式看着有多优美，或者加号、减号多像书法，而是说，学数学就像看日落、读小诗，或听你最喜欢的乐队演奏，它有一种能吸引你驻足欣赏的魅力。你是否曾在看过一部好电影后，深深叹服于它绝佳的表演、布景和摄影？不论你相信与否，数学也是一样。有些数学家提出，数学和戏剧、音乐、绘画一样，也应被当作文化精粹，他们认为，学数学是必要的，不学数学就像没读过《哈姆雷特》一样，简直是犯罪。换句话说，学数学不只是为了在学业能力倾向测验（SAT）[1]中考个好成绩，而是为了充实自己的人生。

数学在我们的日常生活中随处可见，从比萨到甜甜圈，从网购到智能手机里的GPS功能。在这本书里，我将解释为什么你在等公交的时候，觉得公交永远不会来，可却突然一下子来了两三辆；带你重新审视超市里奇奇怪怪的蔬菜，了解音乐如何被转换成iPod里的文件；还会解

释一些你不熟悉的悖论，比如，为什么多修公路反而会使交通更拥堵。

一旦了解了这些隐藏在日常生活中的有趣的数学概念，你会更加喜欢数学，等下次公交再晚到，你就可以和身边的人分享这些有趣的数学概念。

注释

[1]是高中生升入大学必须通过的测验，相当于中国的高考。———译者注。如无特殊说明，本书脚注均为译者所做。

致　谢

本书得以写成，笔者要感谢很多人的帮助，尤其是美国堪萨斯州立大学的数学教授戴夫·奥克雷和哈维穆德学院的贝内迪克松喀尔瓦数学教授弗朗西斯·苏。当我迷失在数学的“丛林”里时，他们清楚明确的解释总能帮我找到出路。另外，笔者还要感谢各位编辑在写作过程中为我提供的支持和帮助。

最后，笔者要感谢我的妻子乔琳娜和儿子纳撒尼尔，感谢你们在我长时间写作时对我付出的耐心，永远爱你们。

第一部分 形　状


ROMANESCO BROCCOLI

1 奇妙的罗马花椰菜

数学概念：自相似性

你有没有仔细观察过超市里的水果和蔬菜？有些果蔬外形恐怖，比如，黄色的佛手柑看着就像霍华德·菲利普·洛夫克拉夫特[1]恐怖小说里的怪物乌贼，有些果蔬的形状却美得不可思议：甘薯的团块结构非常奇妙，就像变形的黏土块；洋葱内部是嵌套在一起的环状结构，就像树木的年轮；切开一个苹果，你会看到它的种子是呈星状分布的，让人赏心悦目；就连花店里卖的羽衣甘蓝也蕴藏着美妙的几何结构。

但最奇妙的莫过于罗马花椰菜，它美得让人无法转移视线。罗马花椰菜，甘蓝种植物，总体呈松果状，表面实则由多个小球果构成，每个球果的表面又由多个更小的球果组成，依此类推。每个小球果的形状和大球果相似，如果切下其中一个球果，把它拍下来，将照片与整个花椰菜的图片放在一起，对二者很难区分。

用数学术语来说，罗马花椰菜的形状是自相似的。如果将罗马花椰菜的形状放大，近距离观察，所看到的形状将和未放大前的形状丝毫不差。自相似性由数学家伯努瓦·曼德博加以研究并普及，是指一个物体和它本身的一部分完全或几乎相似，这也是分形的显著特征。1982年出版的《大自然的分形几何学》一书向全世界介绍了这类自相似的物体（这本书很大程度上是1977年出版的《分形学：形态、概率和维度》一书的修订版）。曼德博发现大自然中的很多形状都具有自相似的特点，如锯齿状的海岸线、云团和叶脉。大自然似乎很垂青自相似的形状，只要多多观察，一定会发现更多这样的形状。

曼德博集合

伯努瓦·曼德博也研究过所谓的曼德博集合，即在复平面上组成分形的点的集合。如果把曼德博集合画成一张图，它将呈现为迷人的球茎形，数学家之所以对曼德博集合感兴趣，部分原因是随着对集合任意部分的近距离观察，会发现更多有趣的细节。事实上，不论近距离观察集合的哪个部分，它的形状始终都和曼德博集合的

整体形状相似。

注释

[1]美国恐怖、科幻与奇幻小说作家，最著名的作品是后来被称为“克苏鲁神话”的系列小说。

2 测量海岸线的长度

数学概念：测量

还有什么比测量长度更直接呢？例如，要测量一张桌子的长度，可以用卷尺；要测量一个镇到另一个镇的距离，我们可以开车过去，观察里程表的变化，或者拿一张地图，用直尺测出两镇之间的距离，然后利用这张地图的比例尺，将英寸转化为英里，或将厘米转化成千米。

但是，测量海岸线的长度却更复杂。事实证明，海岸线的长度取决于测量单位的大小。一般来说，测量单位越小，海岸线越长。理论上，随着测量单位越来越小，海岸线的长度会趋于无限。为什么呢？

和自然中的很多形状一样，海岸线呈不规则的锯齿状，随着测量单位越来越小，我们会发现更多细节。例如，如果以卫星的高度俯瞰北美，它的海岸线几乎是平滑的直线。可要是通过步幅测量，我们会看到河口、沙嘴、岩石，等等。要是趴着测量，我们会注意到砾石和树叶。要是用上显微镜，我们会测到分子。细节越来越多，测量单位不断缩小，从千米到米，到厘米，再到微米，这时，测出的长度也不断增大。如果用一根100千米长的木棍测量英国的海岸线，最后的结果差不多接近2800千米。如果把木棍的长度缩小到50千米，海岸线的总长度则会是3400千米。

这个悖论说明，虽然数学能帮助我们进行十分精确的测量，但它也会揭示实际结构内在的模糊性。

加拿大海岸线

加拿大有着全世界最长的海岸线，超过24万千米。试想一下，如果用米尺来测量，它会有多长？

3 有趣和有效的肥皂泡

数学概念：体积

在夏天阳光明媚的公园里，经常会看到一个孩子在吹肥皂泡，可能是用塑料棒，也可能用稻草和细绳扎成的圆圈。亮晶晶的表面和斑斑点点的形状，都让肥皂泡有了很强的趣味性。

肥皂泡不但有趣，也能激发数学思考。长期以来，数学家们观察到，球形能用最小的表面积包围一定体积的空气。但要包围两个这样体积的空气呢？答案是双气泡。双气泡是由两个气泡形成的形状（要是洗过泡泡浴，你可能见过这种形状）。通常，这两个气泡由一层平滑的膜隔开，如果其中一个气泡比另一个大，这层膜会略微陷入较大的气泡中。1995年，数学家乔尔·哈斯、迈克尔·赫金斯和罗杰·施拉夫利联名发表了一篇论文，论证双气泡形是包围两个相等体积的空气最有效的形状。但如果两个体积不相等呢？双气泡形还是表面积最小的形状吗？

答案是肯定的。2000年，数学家弗兰克·摩根、迈克尔·赫金斯、曼纽尔·里托雷和安东尼奥·罗斯又发表了一篇论文，给出了更一般的结论，证明双气泡形是包围两个体积的空气最有效的形状，它所用的表面积最小。他们证明了双气泡形比其他很多组合形式的表面积都小，其中包括一个奇怪的形状———一个气泡将另一个气泡包在中间，就像一个甜甜圈（在数学中，这种形状有个专门的名称———环面，属于拓扑学的分支）。值得一提的是，这几位数学家在证明过程中完全没有使用计算机。

这个例子说明，人们可以利用数学和推理来探索自然活动，了解自然的奥秘，在这个过程中，我们需要的只有纸和笔。

马兰戈尼效应

肥皂泡比其他材料（包括纯净水在内）的气泡更持久，这是因为马兰戈尼效应，即由于表面张力不同的两种界面存在表面张力梯度，而使质量传送的现象。它是以意大利物理学家卡罗·马兰戈尼

的名字命名的，马兰戈尼在1865年发表了这一研究成果。基本上，就肥皂泡而言，马兰戈尼效应可以稳定它的界面，让它比正常的气泡更坚固，更持久。

4 波洛克的画里有数学吗

数学概念：分形

杰克逊·波洛克的一些画作是20世纪最具标志性的，一些研究者认为，这些画作的魅力来源于数学。具体来说，科学家指出，波洛克在20世纪40年代创作的滴画包含了分形———一种每一部分都相似的几何形状。一些人也提出，波洛克的画之所以迷人，是因为抓住了自然的分形性质（分形在自然中频繁出现，如云朵的纹理）。

和线条（一维）、沙滩排球（三维）一样，分形也有维度，但和这些物体不同的是，分形的维度通常含有小数。一般来说，数学家将分形的维度分为0～3：一维分形的维度为0．1～0．9，如线段；二维分形的维度为1．1～1．9，如海岸线的轮廓；三维分形的轮廓则是2．1～2．9，如花椰菜。

20世纪90年代后期，物理学家理查德·泰勒观察到，波洛克的画具有分形的性质，于是提出可以测量波洛克画作的分形特征。通过一种特殊的分析方法，人们可以辨别一幅画是不是波洛克的真迹。泰勒提出的方法是：将波洛克的画扫描录入计算机，用网格覆盖这幅画的电子图像，然后用计算机进行分析，用不同的比例对比方格中的图案，大到整幅画，小到零点几英寸。泰勒发现，波洛克的画里的确包含分形，例如，《第十四号》这幅画的分形维度是1．45，与很多海岸线的维度相同。

然而，几年后，凯斯西储大学（位于克利夫兰）的研究者证明了泰勒的方法并不可靠。一名博士生发现，她用Photoshop画的一张星体素描通过了泰勒的测试。另一项研究也发现，凯斯西储大学本科生画的两幅画也通过了泰勒的测试，而波洛克的两幅真迹却没有通过。于是这些研究者得出结论：泰勒测试用的方格太少，不足以辨别一幅画到底是不是波洛克的真迹。

彼埃·蒙德里安

有关艺术中的数学，如果想了解更直观的例子，可以看看彼埃·蒙德里安的画，他的作品将直线和四边形运用到了极致。

5 科赫雪花

数学概念：分形

分形有一种奇妙性（参见第4章），难以用言语解释，但很好用例子展示。其中一个例子就是科赫雪花———在科赫曲线的基础上形成的形状，瑞典数学家尼尔斯·费比安·黑尔厄·冯·科赫率先对这一形状做了描述。要形成科赫雪花，首先要有一个等边三角形（三条边长相等），将每条边三等分，取每条边中间的1／3，从外侧接上去一个形状相似但边长为其1／3的三角形，如此重复，直至无穷。

最终会得到一个奇妙的结果———科赫雪花的边长趋于无限大。每次在一条边中间的1／3接上更小的三角形时，它的边长都会增加1／3。由于这个过程不断重复，科赫雪花的周长就趋于无限大。

另外一个奇妙的结果是：尽管雪花的周长无限变大，它的面积也会无限增加，但是总面积是有限的，永远不会超过初始三角形的外接圆。所以，某种意义上，这种数学物体的长度是无限的，但面积是有限的。多么奇妙啊！

切萨罗分形

某些分形不是通过相加，而是通过相减得到的。要形成科赫雪花，需要在线段中间增加尖形，但要形成切萨罗分形，则需要减去尖形，最后得到一个看似被鲨鱼咬过的雪花形状。但不管是科赫雪花，还是切萨罗分形，它们越复杂，在肉眼看来就越相似。

6 你生活在第四维空间吗

数学概念：克莱因瓶、几何学、拓扑学

克莱因瓶非常不可思议。解释得更清楚一点，要弄懂它，需要设想一个第四维空间———一个与我们的三维空间成直角的空间。克莱因瓶虽然奇怪，但或许蕴含着宇宙命运的奥秘。

克莱因瓶由德国数学家菲立克斯·克莱因于1882年提出，它最初的德语名称是KleinscheFl　che（克莱因平面），但可能被误读成了KleinscheFlasche（克莱因瓶），总之，这个名称被沿用至今。克莱因瓶实际上是一个平面———一个二维流形，和球面一样，它也没有边界。同时，它也没有定向性，也就是说，沿着这个表面前进，方向是在不断变化的。

克莱因瓶之所以有名，还有另一层原因：它没有内部和外部之分，内部和外部合成了一个空间（类似第7章中的莫比乌斯带，只有一个面。事实上，要是将一个克莱因瓶切成两半，就会得到两条莫比乌斯带）。另一点值得注意的是，克莱因瓶无法在三维空间里表现出来。如果要用一张纸做出一个克莱因瓶，首先要将这张纸折成一个圆筒，然后将一端扭180°，而不是直接将两端粘在一起，形成一个圆环。要扭180°，就必须把这一端“上升”到第四维度。因为我们生活的世界是三维的，我们能做的就是把圆筒的一端穿过圆筒，与另一端粘在一起。最终的形状是相交的，而假如我们生活在四维空间里的话，克莱因瓶就不会相交。

要理解背后的原因，不妨假想你生活在一个二维空间里，这个空间有一条界线，就像一条二维的绳子。如果有人让你把这条界线折成8字形，但不能相交，你是不可能做到的。怎么可能呢？你必须把这条界线“上升”到三维空间，这样它才不会相交。

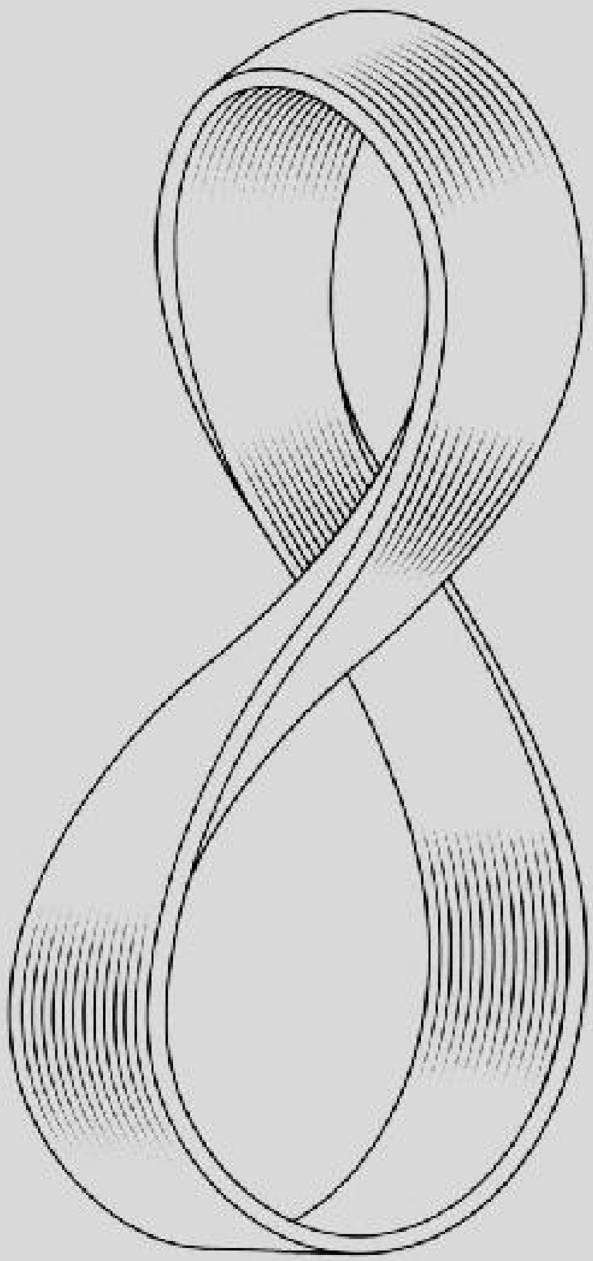
回到克莱因瓶与宇宙命运的关系。宇宙的未来，包括恒星、银河系和太空的命运，一部分取决于宇宙的整体形状。科学家根据他们的观察结果，提出了各种可能的形状，有些像一张平纸朝各个方向无限延展

———被称为欧几里得3流形的三维空间；有些则是“封闭”的形状，也就是说，尽管无限广阔，但最终还是会相交（典型的例子是球面。从球面上的任意一点开始，沿着直线走，最终一定会回到起点）。但正如我们所知，宇宙的形状可能并不是这样的，就像我们生活在一个球体上，但周围环境给我们的直观感觉是，我们生活在一个无限广阔的平面上，我们在宇宙中的位置让我们觉得，宇宙就像直线一样朝各个方向延展，可事实上，从某个我们无法观察到的地方看，宇宙也许像一个车座或圆柱体，也可能会像一个克莱因瓶。

因此，如果你觉得第四维空间与我们的日常生活没有关系，不妨再想想。也许，你就生活在这样的空间里。

菲立克斯·克莱因

菲立克斯·克莱因，生于1849年，曾在德国哥廷根大学教授数学，对几何学有着浓厚的兴趣。他的妻子是伟大的哲学家格奥尔格·威廉·弗里德里希·黑格尔的孙女。



7 造出更好的传送带

数学概念：莫比乌斯带、拓扑学

在数学中，小事可能带来严重的后果。例如，取一条任意长度的纸带，双手各执一端，扭曲180°，然后将两端粘在一起，就得到了一条莫比乌斯带———一种在数学上非常奇异的物体，而所用的材料不过是基本的办公用品。

莫比乌斯带的特别之处在于，在数学中，它没有定向性，也就是说，它只有一个面。乍听之下，这似乎不可能，但你可以自己动手证明这一点。拿一支铅笔，从纸带的任意位置开始画一条线，一直画下去（确保这条线和纸带的边缘平行，否则可能会画出界），最终，你将回到起点，而且，这条线会穿过纸带的整个表面。如果纸带有两个面———一个内面和一个外面，这条线只会穿过其中一个面。

这种奇怪的单面物体听上去像是舶来品，情况也的确如此，但它也广泛见于世界各地，不仅限于数学书和黑板上。例如，1957年，美国古德里奇公司根据莫比乌斯带的原理造了一条输送带，两面都可以使用，从而减少磨损。一些录音带和打字带之所以被设计成莫比乌斯带的形状，也是应用了这一原理：可以充分利用更多的表面，增强产品的耐用性。莫比乌斯带也被应用于电子行业，尤其是电阻器中（限制电路中的电流）。在生物学领域，一些分子的构型也呈现出莫比乌斯带的结构。

莫比乌斯带是以19世纪德国数学家奥古斯特·费迪南德·莫比乌斯的名字命名的（另一位19世纪的德国数学家约翰·李斯丁几乎同时发现了莫比乌斯带，“拓扑学”这一数学术语就是由他创造的）。莫比乌斯家世显赫，其家族成员包括推动了16世纪早期宗教改革的宗教思想家马丁·路德。他还曾师从历史上成就最为丰硕的数学家卡尔·弗里德里希·高斯。

莫比乌斯带生动地说明，任何人都能创造的一个简单物体可能具有深刻的数学含义。再没有什么比用自己的双手掌握了数学更让人兴奋的了。

二和弦

音乐和数学之间存在着有趣的关联。乐理家有时会在纸上画出双音和弦、三度和弦、四度和弦和八度音阶之间的关联，考虑以两种方式写二和弦（例如从C到F或从F到C）。要想抓住这种关系，就要把纸折成一条莫比乌斯带。

8 鞋带与DNA的数学联系

数学概念：纽结理论、曲线

你绝对想不到一双鞋子里竟然也蕴含着数学。不妨看一眼你系着的鞋带，事实上，这种螺旋环可能蕴含着复杂的数学知识。

这里用到的数学分支被称作纽结理论。数学中的纽结和日常生活中的纽结有一个明显的不同之处：它没有不系物的一端（按照数学上的术语来说，这些纽结是封闭的）。其实，你可以自己动手做一个封闭纽结。取一根细绳、湿面条或套索，打成一个标准的方形结，用胶带将两端粘在一起。最后的结果看起来像一块椒盐脆饼，但它实际上是一个纽结！

尽管部分纽结理论人人熟知，但纽结理论也有着奇异之处。在《纽结入门》一书中，科林·亚当斯将数学中的纽结定义为“永远不相交的空间中的一条闭曲线”。这一定义可能会让你好奇，什么纽结是最简单的？最简单的纽结其实就是圆圈，它有一个像《爱丽丝梦游仙境》一样酷炫的名称———“没有结的纽结”（或称为平凡纽结），其次是八字结和三叶结。

那么，纽结理论家的日常生活是什么样的呢？他们每天都在思考，能否在不剪断它的情况下解开一个给定的纽结，或者在花了大把时间摆弄一个纽结后，能否发现它其实是一个陌生的没有结的结。纽结理论不仅吸引了数学家，生物学家也对它深感兴趣，因为组成生物遗传物质的分子DNA，有时也是结状的，影响着生物细胞机制对DNA分子信息的解读。化学家也对纽结很感兴趣，很多化学家都喜欢研究结状分子，因为特定分子的结状构型可能会完全改变分子的性质（一种构型可能会让这种物质成为石油；另一种构型则可能让这种物质成为凝胶）。一两个简单的纽结竟能产生如此巨大的影响。

泰特猜想

19世纪数学家彼得·格斯里·泰特根据交点对纽结进行分类，他

还提出了三个有关交变（上下环绕，形成连接）、手型结（与其镜像不相等的纽结）和纽结环绕数（描述纽结环绕数的几何量）的猜想，最近，这三个猜想都已被证明是正确的。

9 地铁线路图遗漏了什么

数学概念：拓扑学

查看一下全世界任意一个城市的任何一张地铁线路图，你发现了什么？不像地图册里那些显示了一条路所有拐弯线路的地图，地铁线路图相对简单，只有直线、圆圈和平滑的曲线（可以参考伦敦、北京或华盛顿特区的地铁线路图），但地铁实际的运行线路并非这么简单，站与站之间要经过一系列的弯道。尽管如此，地铁线路图依然能帮助乘客导航。为什么它遗漏了这么多信息，却还能导航？

这个问题可以用拓扑学这一数学分支来回答。拓扑学与几何学相关，主要研究形状在拓展、缩拢、拉伸和扭曲时的变形（“拓扑学”一词来源于希腊语，原意是位置、研究或测量）。拓扑学所研究的变形必须遵循一个规则：不能破坏初始形状的完整性。例如，切割后再粘在一起的形状不能作为拓扑学的研究对象。相反，将橡皮筋拉伸到极限，揉成一个球，再把它扭成一块椒盐脆饼的形状，最后的形状就属于拓扑学的研究范围。简言之，在拓扑学中，新形状必须能通过一个连续的动作恢复到初始形状。只要可以，按照拓扑学的术语来说，这两个形状就是等量的。

现在，地铁线路图和地铁的实际运行线路之间的关系就明朗了。地铁线路图是地铁实际运行线路的一个拓扑变形，从某种意义上说，线路图是运行线路被拉伸和抚平后的结果，就好像地铁线路是橡皮泥做的。在拓扑学看来，这两个形状———地铁线路图和实际运行线路———是相同的。

全世界最长的地铁

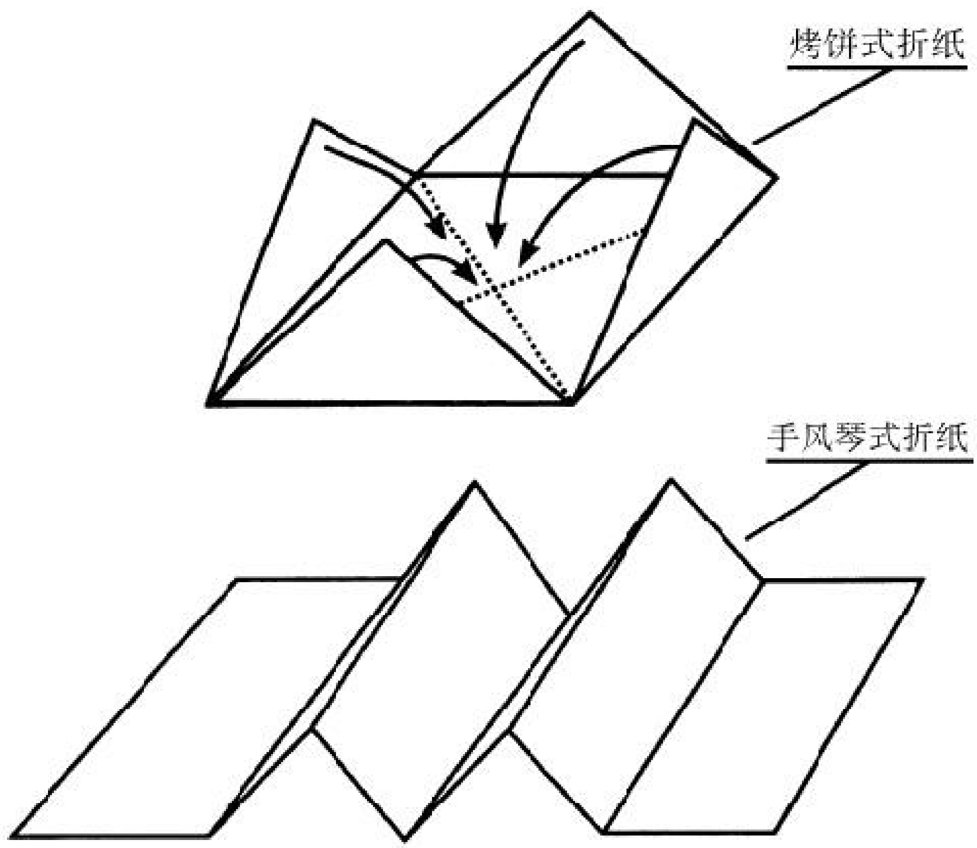
根据线路长度计算，上海地铁是全世界最长的地铁系统，轨道全长617千米。[1]但纽约地铁是全世界地铁站最多的，根据官方数据，共有468站。

注释

[1]‹截至2015年12月，上海地铁线路总长617千米（不计磁悬浮）。———编者注

10 日本折纸艺术

数学概念：几何学、拓扑学



日本折纸艺术是美国孩子的主要消遣活动，我们很多人都见过纸鹤、纸杯和充气气球，但很少有人知道，折纸和数学之间存在着紧密的关联。

折纸最吸引人的一个特点在于，它可以超越传统的数学，尤其是几何学。只需要一张折纸，我们就可以三等分一个角（分成三个相等的分角），而用传统几何学中的圆规和直尺，这是根本不可能完成的。我们还可以用折纸来2倍一个立方体，这也是标准几何学无法完成的（2倍立

方体是古埃及人和古希腊人发现的一个问题。要2倍一个立方体，首先要有一个给定边长和体积的立方体，求作一个新的立方体，其体积是初始立方体的两倍，这个过程根本无法完成，因为2倍立方体边长的立方根是2，这个长度是无法用圆规和直尺作出的）。

事实上，在对折纸艺术的数学研究中，也产生了一些几何公理———与两千多年前的古希腊大数学家欧几里得提出的原理和定义类似的一套公理，被统称为折纸几何公理，指出了折纸过程中的全部基本操作。折纸数学也衍生了川崎定理，这一定理指出，围绕一个点的所有角的其他角的和等于180°。

折纸数学不仅差一点成为一个独立的数学分支，有着自己的证明和公理，折纸所使用的材料通常也具有数学性。有人用三角形和五角形的折纸材料折出三维的形状，有人折出柏拉图多面体———由规则的多面体（由平面和直边组成的三维形状）组成的五种基本形状，也有的折纸艺术家折出双曲抛物线———马鞍形———就像一个介于四方形和一只蝴蝶之间的十字架，还有的用折纸来证明勾股定理。

从某种意义上说，折纸和数学似乎有着相同的概念元素，用自己的双手来做出一个形状，从而更好地掌握数学概念，这样的效果是最好的。丢掉铅笔和绘图计算器吧，花点时间在折纸中发现数学！

折纸节日树

每年，美国自然历史博物馆会与美国折纸协会合作推出折纸节日树，这棵树上共有近800件装饰物。2014年，折纸节日树是以《博物馆奇妙夜》这部电影为主题，所以当年的装饰物包括西奥多·罗斯福、一只霸王龙和一座来自复活节岛的石像。

11 绳结背后的数学

数学概念：纽结理论

你把手伸进口袋或者背包，想拿出耳塞，却发现它已经缠成了一个解不开的结；你把放在地下室的浇水管子找出来，却发现它缠成了一个结；你打开阁楼上装着圣诞彩灯的箱子，却发现这些彩灯已经缠成了一个线球———这些都是现代生活中令人烦恼的事。为什么不管我们千防万防，生活中还是有这么多东西会自己缠成结呢？

像线绳这样柔韧的长物之所以会缠成结，背后有着数学上的原因。事实上，2007年，加州大学圣迭戈分校的两位物理学家针对这一问题发表了一篇研究论文。大体上，只有在几种情况下，捆在一起的线绳才不会缠成结，例如，线绳始终保持平行，绝不相互接触或相交，但在很多情况下，线绳都会开始打结。实际上，线绳缠成结只需要几秒钟，这是因为它的一端穿过了它的另一部分，这个时候，它就很容易和其他部分缠绕在一起。

在他们的研究中，加州大学圣迭戈分校的研究者将不同长度的线绳放入一个电动旋转箱中，搅拌十秒钟，然后用数学中的纽结理论分析最后缠成的结，试图从中找出对应每种纽结的数学公式（即琼斯多项式，纽结理论根据交点数对纽结进行分类）。他们发现，约96%的纽结是“素纽结”，即交点数最少（3～11个）的纽结。他们还发现，长度小于半米时，线绳越短，纽结越少；长度达到2～6米时，缠成结的概率迅速变大，最大为50%；超过这个长度后，这一概率没有显著变大。

所以，下次咒骂缠成结的耳塞线之前，不妨先享受一下这背后的数学乐趣。

防打结装置

缠成结的手机线衍生出一个新行业。过去，当人们还依赖固定电话时，发明家发明出了各种防打结装置，从能360°旋转的部件到能插入线圈的管状物，都是为了预防本章第一段提到的那些令人烦

恼的事。

12 自行车齿轮为什么大小不同

数学概念：几何学、速比

从前，自行车看起来很滑稽。19世纪，自行车的前轮巨大，后轮极小，脚蹬和前轮直接连在一起，直径近5英寸，骑车的人必须跳到车座上，就像是骑马一样。这种自行车很快就过时了，部分原因是一旦路面颠簸，骑车的人很容易被甩出车把外。后来，生产商开始生产带齿轮和链条的自行车，骑车的人不仅可以坐在车中间，增强平衡感，还可以根据路况变挡。在平地上骑车也许不需要变挡，但爬山时，变挡可能决定着你到底是在“骑”车还是在“推”车。但是，齿轮到底是怎么工作的？它是怎么让上山更容易，让下山更快呢？

答案在于速比。当大齿轮和小齿轮连在一起时，转动一个齿轮会带动另一个齿轮，但是两个齿轮的速度不同。假设前齿轮是后齿轮的三倍大，前齿轮每转一周，后齿轮需要转三周，这可以根据齿轮的周长来计算（如果你还记得数学课上讲过的内容，就知道圆的周长＝直径×π）。假设前齿轮的直径为30厘米，它的周长就是30乘以π，约为90厘米。如果在齿轮边缘画一个点，当齿轮转动一周，将这个点走过的长度在纸上换算出来，就是94．2厘米。

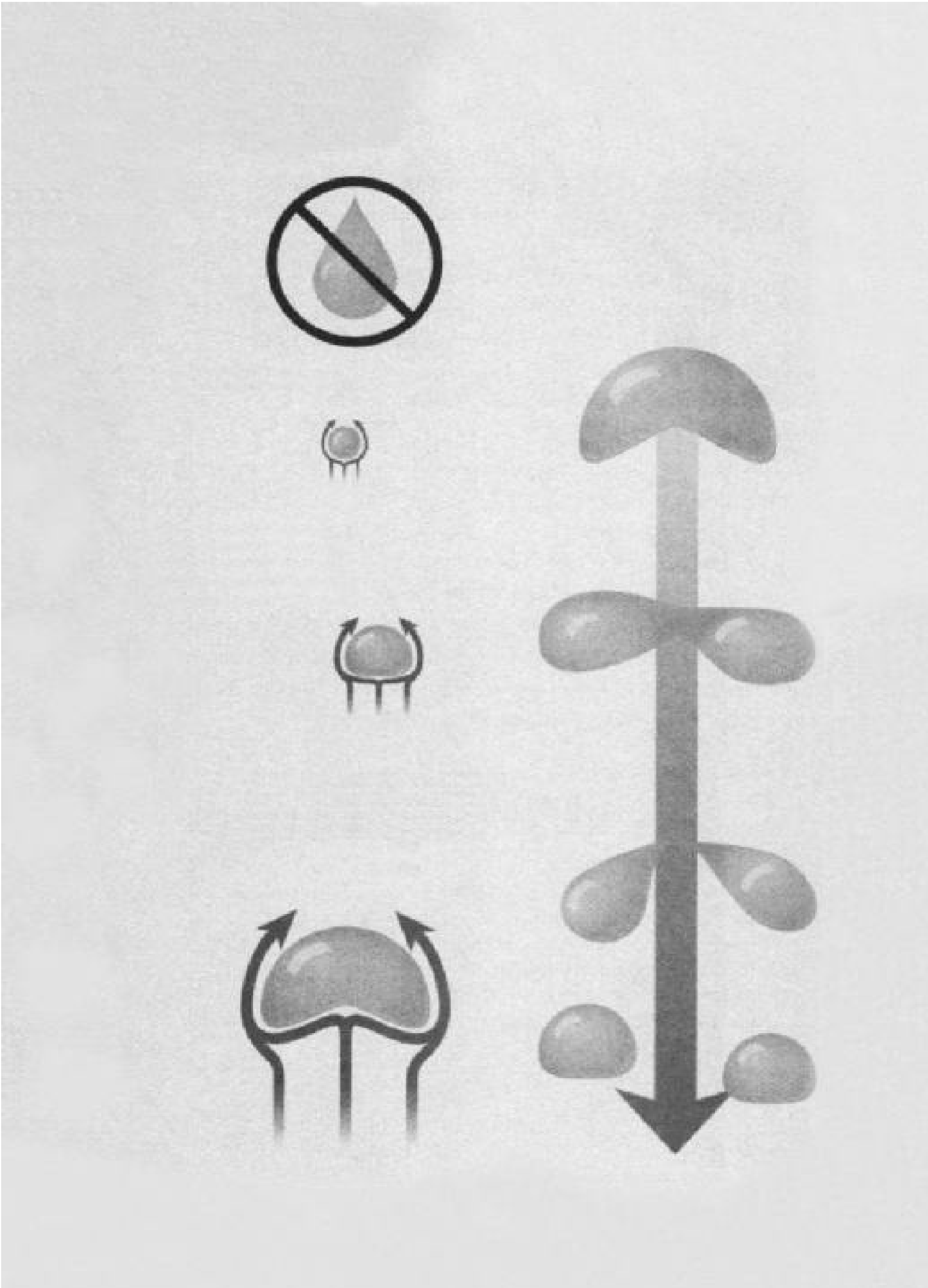
假设后齿轮的直径为10厘米，它的周长就是31．4厘米，每转动一周，其边缘上的点走过的长度就是31．4厘米。但是，前齿轮每转一周（94．2厘米），后齿轮要转三周（根据两个齿轮的直径差来算，它们的齿轮转速比是3∶1）。

因此，脚蹬每旋转一周，后轮齿轮要旋转三周（否则要费力蹬三次）———从而可以让你“完美地”冲刺下山。

齿轮玩具

齿轮不仅实用，而且是有趣的玩具。如今市面上的很多玩具都带有齿轮，没错，齿轮！齿轮！齿轮！齿轮传动玩具和蓝莲花齿轮组。有些齿轮玩具制作精良：brickowl．com网列出了适用于乐高

科技系列玩具的57种齿轮，包括14齿齿轮、带内离合器的24齿齿轮和24齿双面斜切齿轮。



13 雨滴与泪珠的形状是不同的

数学概念：几何学

雨滴并不像我们所想的那样，至少它的形状不像我们以为的那样。在卡通片、天气图和插图里，雨滴总是很像泪珠，圆底，两边向上逐渐缩小。

实际上，雨滴与泪珠的形状完全不同。最初，大气中的水黏附在烟尘颗粒物上，形成的雨滴近似球体，达到一定重量时，雨滴便开始下落。下落过程中，水分子之间的氢键导致水滴表面形成张力，使水滴保持圆形。随着下落加速，水滴底部受到空气阻力，下部趋向扁平，就像平底锅的形状，这时，雨滴看起来更像是汉堡包的顶部。如果雨滴变得过大，比如在下落过程中与其他雨滴发生碰撞，它就会分裂成几个小雨滴，分裂点的直径约为4毫米。

雨滴的周长

雨滴的大小各不相同。平均情况下，小风暴形成的雨滴周长约为0．5毫米，大风暴形成的雨滴周长则可能达到5毫米。

14 交通标志为什么有不同的形状

数学概念：形状

人人都知道停车标志是八边形，也就是说，它有八条相等的边。但并不是人人都知道为什么停车标志要采用这种形状，为什么是八条边，而不是三条边、十条边呢？

设计者选择八边形有两个原因：

1．不像十分普遍的四边形标志，八边形标志可以从多个视角被看到，这样，即便甲驾驶员是从看不到这个标志正面的另一个方向开过来，他也能知道乙驾驶员要停车。

2．交通工程员很早就发现，交通标志的形状和上面的文字一样，也能传达信息。所以他们认为，边越多，代表危险等级越高。例如，圆形标志（可以被视为有无数条边）代表有列车经过，八边形标志代表与其他车交会的路口，四边菱形标志代表警告，提醒你前面有S形弯道或“有鹿出没”。[1]

所以，下次开车的时候，注意一下周围交通标志的形状，它们可能会救你的命！

停车标志的历史

1915年，世界上第一个停车标志出现在底特律，只是一块白底黑字的四边形金属片。1923年，州公路部的密西西比河谷协会建议多增加几条边。1935年，《统一交通管理设施手册》规定，所有交通标志统一为红色。

注释

[1]‹此处列举的是美国的情形，提请读者注意。———编者注

15 五角大楼为什么是五角形

数学概念：几何学

五角形是一个形状，但我们提起五角形时，往往会想到美国国防部的办公大楼———五角大楼。它是世界上最大的办公楼之一，建筑面积是纽约帝国大厦的两倍，约有25000名职员在其中办公。事实上，美国国会大厦只相当于五角大楼的一个角。那么，五角大楼为什么是五角形呢？

随着“二战”日益升温，美国决定为不断壮大的陆军部新建一处办公大楼，当时的选址是阿灵顿农场，这是由农业部负责的一个试验农场，紧邻现役士兵和退役士兵的安息之地阿灵顿公墓。周围的公路和建筑使得这座农场形成近似五角形的形状，所以，陆军部大楼最初的设计就是五角形的。然而不久之后，相关官员不愿将这座军事设施放在如此靠近一个敏感区域的位置，决定将它迁到另外一个地址，也就是华盛顿特区的第一个机场胡佛机场的所在地。但当时，已经来不及修改建筑设计图，虽然设计师修改了部分地方，但总体上它还是一个五角形。

好在这个五角形的设计也有一定的优势：任意两点之间的距离步行都不超过10分钟，方便设计师布局各种设施。

五角大楼

五角大楼占地近236万平方米，建筑面积超过60万平方米。这栋建筑共有七层……这是我们知道的。

16 三角形

数学概念：形状、几何学

你有没有注意过三角形在日常生活中出现的频率有多高？无论是在骑车上班的路上（车架中间是一个三角形），还是行驶在州际公路上（巨大的输电铁塔上也有三角形），三角形总是一次又一次地出现。这是因为自行车设计者和土木工程师一时心血来潮，还是有着合理的理由？

三角形频繁地出现在建筑结构中，其中有一个充足的理由———三角形异常稳定，所以成为坚固结构的理想之选。合页是一个三角形，虽然它的角不是固定的，但它也是一个三角形。易弯曲的秸秆也可以组成三角形，弯曲的部分就是角，虽然容易弯曲，但它依然很稳定，和固体塑料做成的三角形是一样的。你还能想到自己见过的其他三角形吗？

竖琴协奏曲

竖琴（三角形）独奏首次出现在弗朗茨·李斯特的《第一钢琴协奏曲》中，一位表示怀疑的评论家戏称它为“三角协奏曲”。

17 井盖为什么是圆的

数学概念：形状、几何学

天是蓝的，石头是硬的，草是绿的———日常生活中的万事万物都有自己的性质，可由于太常见，导致我们对它们置若罔闻。有时候，数学能帮助我们从不同的视角看待这些事物。

井盖就是这样，它总是圆的，可为什么呢？其他的形状不可以吗？

圆形是少有的几种不能穿过跟自身形状相同的孔的形状，为什么呢？设想一个三角形的井盖，它的三条边不相等（一条边长30厘米，其他两条边长60厘米），如果把它竖起来，与地面垂直，边长较短的一边就能从这个孔中穿过，因为井口的两条边长60厘米，与井盖的边长相等，而一个宽30厘米的物体能穿过宽60厘米的开口。唯一能避免井盖掉进井口的方法是，不管怎么翻转，它的哪条边都不会小于或大于其他边。毫无疑问，圆形是最完美的选择。

太空里的井盖

有一个谣言称，在20世纪50年代的地下核试验中，有一个井盖被意外发射进了太空。这个谣言未经证实，但可能来源于1957年的一系列核试验———普拉姆勃勃行动中的一次意外。在一次地下试验中，一块重达907千克的金属以66千米／秒的速度被推送进入太空，从此杳无踪迹。

18 乐高积木

数学概念：复杂性

在玩具世界里，也能发现数学。小时候，我觉得乐高积木是世界上最好玩的玩具，坐在一堆乐高积木前，考虑把它们组合成什么，真的十分有趣。实际上，乐高积木不只是玩具，同时也蕴含着一些数学概念。

具体来说，乐高积木与复杂性有关。最近，杜克大学脑科学研究所的马克·常逸梓等研究者开展了一项研究，目的是解答一个看似十分简单的问题。一切系统都由部分组成：身体由细胞组成；计算机由开关和处理器组成；生态系统由鸟和树组成。他们想知道，当系统———不论是动物、细胞还是电子部件组成的系统———变大时，它的组成部分的种类是否也会增多。比较一块手表和一座老爷钟的内部结构，显然，老爷钟的零件数量更多，但这些零件的种类是不是比手表多呢？

这些研究者的结论是，随着系统规模不断变大，系统组成部分的种类的确会增多。事实上，他们用图表展示了自己的研究结果，发现部分的种类和数量之间存在一种有趣的关联。具体来说，根据幂律分布，部分的种类和数量成正比（幂律分布关系可以用$Y=kX^a$这个公式表示，其中，Y和X是我们要考察的两个变量，Y表示部分的数量，X代表部分的种类；k是一个常量，可以是任何数值；a则是变量X的指数）。他们还发现，虽然部分的种类和数量成正比，但随着数量不断变大，种类的增速会逐渐变缓。

然而，当研究乐高积木的数量和种类时，他们发现，积木部分的增速比其他系统更快，换句话说，乐高积木的数量越多，它的种类也越多。乐高积木的爱好者，包括常逸梓在内，担心这是由于乐高积木的设计发生了改变。现在，乐高积木引进了更多的主题，包括星球大战、幻影忍者、忍者神龟、指环王，等等，有人担心，数量的猛增可能减少积木的用途，也就是说，很多积木只能用于一个主题，甚至一种组合。对于乐高积木的爱好者而言，这一改变无疑让人难过。但另一方面，乐高积木玩具仍然是多样的———它们吸引的人群不断扩大，包括数学家。

设计大师

我们能从商店里买到乐高积木玩具，它们是由谁设计的？乐高的设计大师是什么人？这些奇才也设计出了全球范围内的乐高主题公园。要成为乐高设计大师，需要经过多年的实践，这些奇才最初也是通过公开竞赛被发掘出来的。

19 会飞的四边形

数学概念：形状

如果没了风筝，春天和夏天也就失去了趣味，但春天和夏天的趣味可远不止在好天气里放放风筝。传统的美式风筝是典型的四边形（有四条边的形状），它们基本都是四边形，像一个正方形或长方形，但不同的是，风筝的边是根据长度被系在一起的，也就是说，短边跟短边在一起，长边跟长边在一起，所以，风筝形成了独特的菱形。

风筝的形状之所以有意思，因为很多风筝在一起可以组成一个平面（只是一个理想的平面，就像一张没有厚度的纸）。你可以用任何一种风筝，不论它的夹角多大，和其他形状相似的风筝一起，组成一个平面，而且每个风筝之间不会出现间隙，这种排列方式被称为平铺（想一下浴室墙上或地上的瓷砖，你就明白了）。彭罗斯瓷砖的灵感就来自风筝，这种瓷砖能以永不重复的方式铺在无穷的平面上。

风筝的形状还决定着它理想的飞行条件，风小时，菱形的风筝飞得更高，但需要尾翼来平衡；在几乎没有风的情况下，三角形的风筝也能飞起来；几百年前流传下来的日本六角风筝便于操作，常出现在风筝比赛里（能剪断其他风筝的线，你就赢了）。

风筝的面积

计算风筝面积的方法有两种：如果已知两条对角线的长度，风筝的面积就是两条对角线相乘，然后除以2；如果已知一条短边和一条长边的长度，以及两条边之间的角度，可以用三角函数来计算面积，即两条边长相乘，再乘以这个夹角的正弦函数。

20 疱疹和食盐有什么共同点

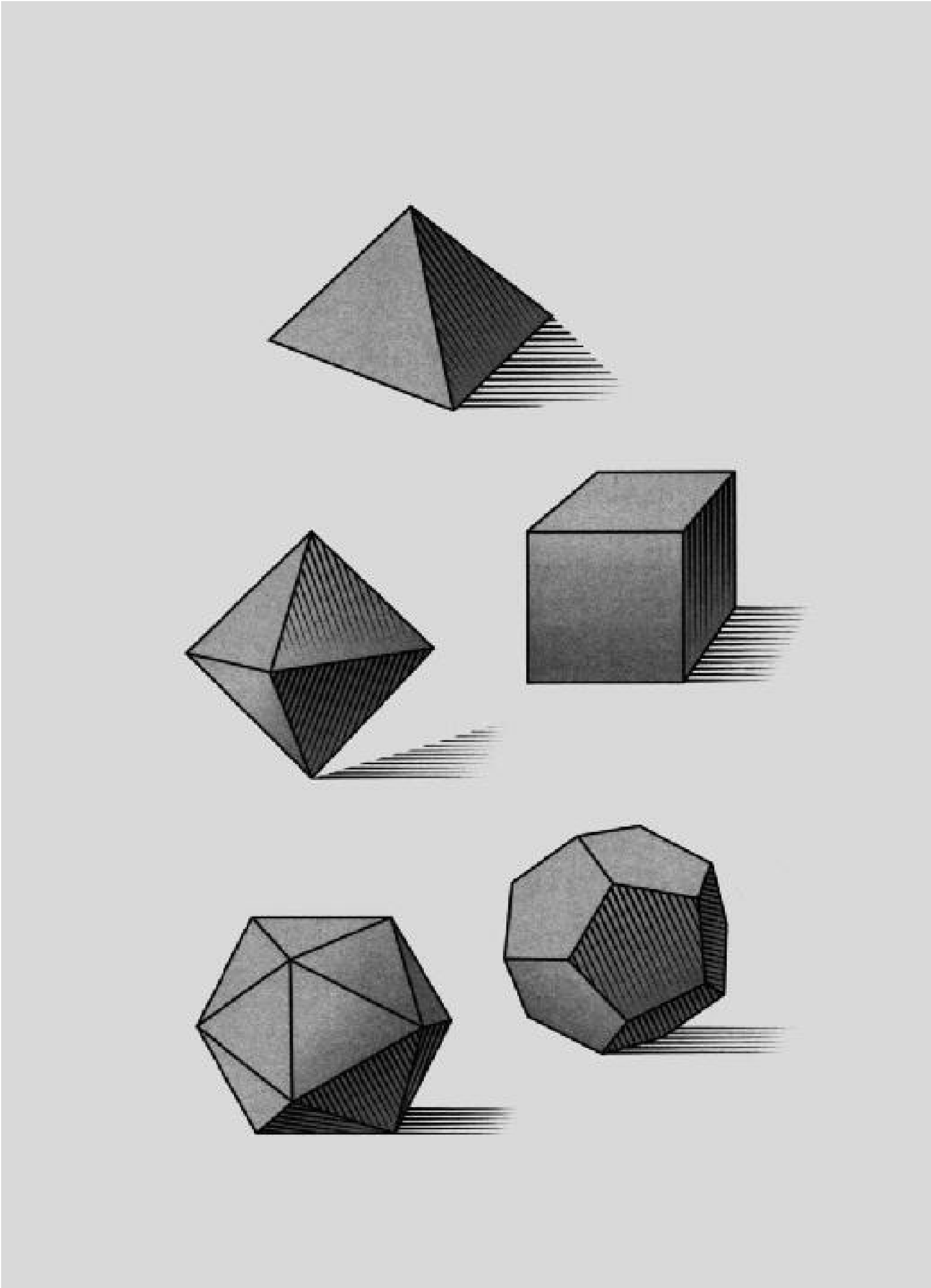
数学概念：柏拉图多面体

并不是所有的三维形状都是相同的，想想那些存在或可能存在的形状：马铃薯的形状是块状的、不规则的；星星的形状是整齐有序的，它的线条整齐笔直；球体的形状是圆的、平滑的；俄罗斯方块则有锐利的边缘。

但是，有些形状很特别，它们的特征被研究了几千年，其中就包括柏拉图多面体。柏拉图多面体是以公元前4世纪的雅典哲学家柏拉图的名字命名的，这些三维形状由正方形、三角形、五角形等二维形状组成，必须满足一定的条件：

1．形状是规则的，也就是说，所有线条的长度是相等的，所有角度的大小也是相同的。

2．必须是全等的，也就是说，所有形状都是相似的，如果把一个形状放在另一个上面，它们是完全契合的（换句话说，不同大小的三角形无法组成柏拉图多面体）。



3．在每个顶点处，即一个形状的线条相交的地方，必须有相同数量的形状。

柏拉图多面体有且只有五种：

1．正四面体有四个面，每个面都是三角形。

2．正方体由四个正方形组成。

3．正八面体有八个面，就像两座金字塔的底座合在一起形成的形状（和正四面体一样，每个面都是三角形）。

4．正十二面体有十二个面，每个面都是五角形。

5．正二十面体有二十个面，每个面都是三角形。

如果想知道为什么只有五种柏拉图多面体，古希腊数学家欧几里得可以为你解答，他在《几何原本》里证明了这个问题，可以供你参考。

这些形状不仅仅是数学问题。在柏拉图的《蒂迈欧篇》中，这位希腊大哲学家（通过他虚构的一个人物）提出，不同的多面体对应自然中的不同元素：正四面体对应火元素，正方体对应土元素，正八面体对应气元素，正二十面体对应水元素，正十二面体则对应天空中的星座分布。

到了16世纪，约翰尼斯·开普勒利用柏拉图多面体来解释太阳系的结构，他好奇行星为什么这么分布，提出用球体代表每个行星，在行星的运行轨道之间放一个柏拉图多面体，模拟出行星之间的距离。首先从太阳系内部开始，对应的柏拉图多面体依次是正八面体（对应水星的运行轨道）、正二十面体、正十二面体、正四面体和正方体（开普勒认为太阳系只有五颗行星）。

尽管开普勒的解释是错误的，但有一点是正确的：柏拉图多面体的确是自然的一部分，例如：

●许多矿物晶体都是四面体，包括食盐（氯化钠）。如果沿着死海的岸边走，你会踩在大块的盐正方体上，它们是从深海中被冲上来的。

●钻石和绿萤石常呈正八面体的形状。

●病毒，如疱疹，常常是正二十面体。

●原子常常结合成正四面体形状，甲烷和铵离子的分子由四个氢原子组成，它们围绕着一个碳原子或者氮原子，形成一个四面体。

柏拉图多面体不只存在于古希腊巨著中，它们也存在于我们呼吸的空气和脚下的土地中。

二面角

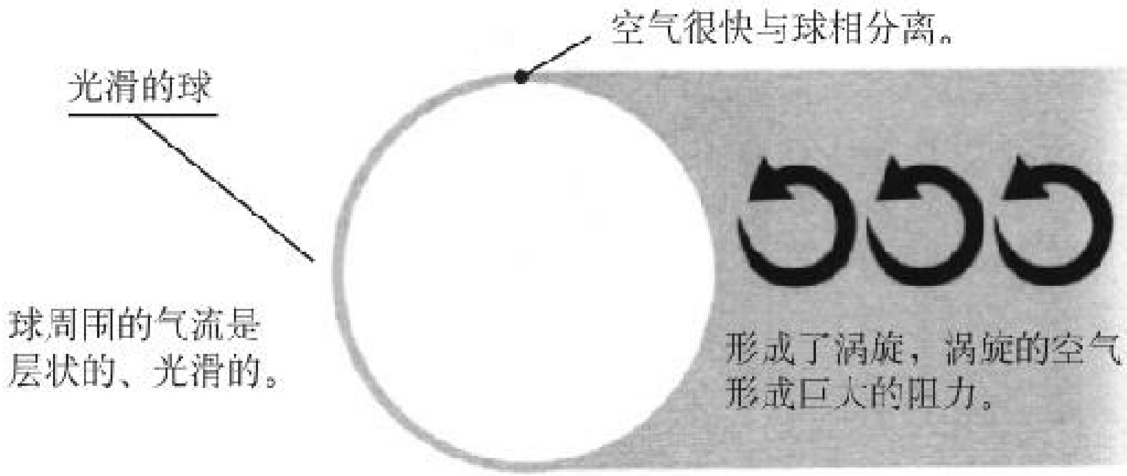
每个柏拉图多面体都包含二面角，即两个面之间的内角。因为每个面都是相同的，所以每个二面角也是相等的。例如，正方体的二面角是90°，和顶角相等；正四面体的二面角是70．6°，它的顶角是60°。二面角越大，多面体与球体越相似。

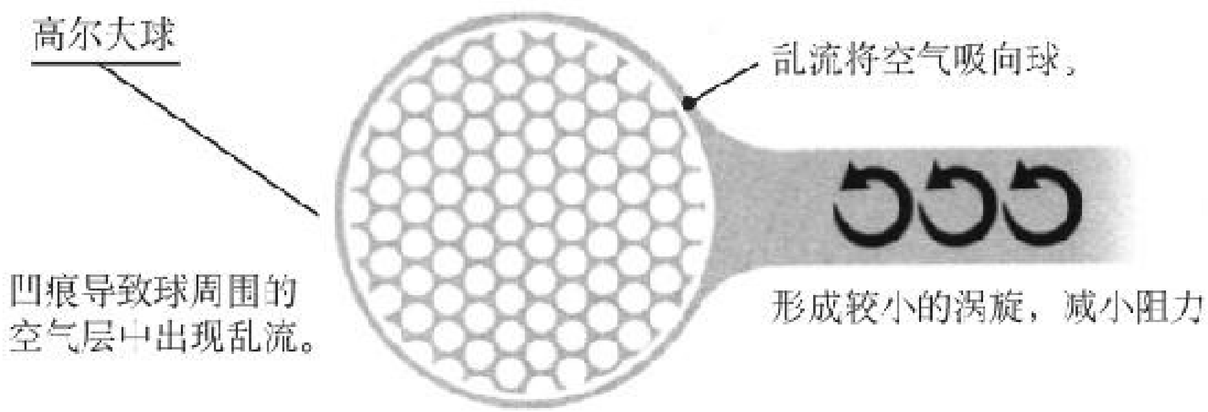
21 高尔夫球表面为什么有凹痕

数学概念：物理学、几何学

当你看到泰格·伍兹在美国公开赛上开球的时候，一定想不到他的球能在空中飞过，是因为得到了数学的帮助。可事实的确如此，这要感谢高尔夫球上的凹痕。

几百年前，高尔夫球是木制或橡胶制的，表面是完全光滑的，奇怪的是，高尔夫球运动员发现，用得久、变旧、凹痕多的球，飞得比光滑的新球更远。后来，科学家发现，这是因为球表面的凹痕让周围的空气更贴近它的弧线，从而减少了产生阻力的乱流。传统上，高尔夫球的凹痕是圆的，但一种新的高尔夫球的凹痕变成了六边形。它的生产商卡拉威称，六边形的凹痕能覆盖更多的球面，这样平滑的面积减少了，空气阻力也随之减小。





凹痕

高尔夫球大小不同，大部分有300～500个凹痕，常见的有336个凹痕。

22 高斯与比萨

数学概念：形状

试试这个吧：取一张报纸，把它折成一个西瓜，就当是送给朋友的生日礼物。你会发现什么呢？不论你怎么尝试，总是会有突起的褶痕，它的表面永远不会像西瓜那样平滑（要想让它像西瓜表面那样平滑，你得拿起剪刀修剪，即使这样，可能也还得抹平这里或那里的褶痕）。实际上，你是不可能折出一个平滑的表面的，就像一张纸，不经过弯曲、修剪和抹平，是不可能折成一个球体的。

反之亦然。把一个柚子剥开，留下球形的柚子皮，试着把它展平。结果，柚子皮会裂开，除非把它切开或撕开，否则不可能完全展平。那么，把平面变成圆面，或把圆面变成平面，为什么这么难呢？是什么妨碍了平面和圆面之间的相互转换？

我们可以从一块比萨和德国数学家卡尔·弗里德里希·高斯的著作中找到答案。高斯（1777—1855年，在数学史上有着重要的地位，被视为古希腊以来最伟大的数学家之一，也被尊为“数学王子”，他教过奥古斯特·费迪南德·莫比乌斯，参见第7章）提出了关于曲面的绝妙定理（它的拉丁文原意是非凡的定理）。

要理解高斯的绝妙定理，可以设想一个人被缩小到10厘米高，然后被放在一个圆柱体的表面上，如果让他沿着表面走，他可以选择很多种路径，例如，他可以走直线，穿过圆柱体的一个底面，或者沿着圆柱体的侧面走，最后回到起点（我们得假设，这个小人穿着黏性很好的鞋子）；他也可以螺旋前进，在绕着侧面走的同时，也沿着高线走。高斯的绝妙定理认为，圆柱体的曲面是可以测量的：将这些路径都考虑在内，把它们相乘，最后得到一个单一值。平直路径的曲率是零，因为它是平直的，曲线路径的曲率则为正。（凹曲线，即向内弯曲的曲线，曲率为负。）把这些路径的曲率相乘，即一个正数乘以零，最后的结果终为零（因为任何数与零相乘，结果都为零），所以，这个圆柱体的高斯曲率就是零。

高斯的绝妙定理也解释了经过变形的表面的曲率，只要不破坏它的完整性，无论是弯曲还是拉伸，它的高斯曲率始终保持不变。因此，不论怎么弯折或扭曲一个圆柱体，它的高斯曲率永远不变。

这让我们想到了比萨。如果你曾水平拿过一块比萨，因为挂着奶酪和意大利香肠，它的尖端总是耷拉着，让人难以下口。相反，如果把它垂直折一下，它的尖端就会凸成一条直线，上层配料也不会掉落。为什么？计算一块未经弯曲的比萨的曲率，得到的结果是零（那个10厘米高的小人能走的所有路径都是平直的），也就是说，不论怎么移动或弯曲这块比萨，它的曲率始终为零。

现在，再看水平拿着的比萨，我们注意到，从表面到尖端的路径是弯曲的，从一边到另一边的路径则是平直的，如果我们把它垂直折一下，从一边到另一边的路径变成了弯曲的，从表面到尖端的路径则变成了直线。

这说明什么呢？不论比萨怎么弯曲，它的表面上总有一条路径是平直的（因为平直曲线的曲率是零，只要一条路径的曲率为零，最后的总曲率也为零）。如果从一边到另一边的路径是平直的，从前到后的路径一定是弯曲的；如果从一边到另一边的路径是弯曲的，从前到后的路径一定是平直的。

回到最初的问题———为什么不能用一张纸折出齐平的西瓜，或者展平一块柚子皮？原因在于，平面物体和圆面物体的高斯曲率不同。所以，下次点比萨的时候，不要忘了高斯和他的绝妙定理，不妨把比萨垂直折一下。

卡尔·高斯

卡尔·高斯是一个神童。有一次，在学校里，老师让他把1～100的所有数相加，不到几秒钟，他就得出了答案。他发现，这100个数可以分成50对———1和100，2和99，3和98，依此类推，每一对数相加的和都是101，所以最后的结果就是101×50＝5050。

23 短程线穹顶

数学概念：短程线穹顶

你去过艾波卡特主题公园吗？有没有站在被称为地球号太空船的巨大球体下呢？如果有，你就见过所谓的短程线穹顶结构。短程线穹顶由三角形组成，它们彼此相邻，一个三角形的顶端与另一个三角形的底部相接。所以，短程线穹顶并非一个平滑的球体或穹顶，而是不平滑的，有棱角的（就像迪斯科球灯）。

美国建筑师巴克敏斯特·富勒致力于用工程学解决人类的问题，20世纪90年代中期，他就大力推广这种轻而坚固的短程线球体和穹顶。三角形的结构远比四边形的结构稳定。富勒希望将短程线穹顶建成高效、低成本的住房，为大众提供经济性住房。这种住房之所以成本低，原因在于它的形状：球体能用最小的表面积包围一定的空间，理论上将降低建材的成本；开放的内部空间也利于空气流动，从而降低供暖和制冷成本。事实上，短程线穹顶正体现了富勒以少博多的概念。

我们也可以把短程线穹顶当成柏拉图多面体的变体（参见第20章）。和庄严、美观的多面体一样，短程线穹顶也是由一种多边形———三角形———构成的，除了一点，短程线穹顶中的三角形是向外凸出的，所以更接近包裹穹顶的一个假想球体的面。和柏拉图多面体一样，短程线穹顶也展现了几何学的力量。

如果你想亲眼看看短程线穹顶，不必去迪士尼乐园，可以去圣路易斯的密苏里植物园，参观那里的人工气候室———那里有一个高70英尺、直径175英尺的穹顶，它是由铝杆和有机玻璃板建成的。

为什么穹顶形的建筑没有得到推广呢？或许是因为，穹顶的可用空间比一般的住房小。

巴克敏斯特·富勒

巴克敏斯特·富勒走在他所在的时代前端。他以创新发明闻名

于世，像有三个车轮的戴梅森车，致力于促进人类的进步，找到以少博多的途径。他对语言的发展也做出了贡献，创造了“地球号太空船”和“协同”两个词。

24 数学幻想小说

数学概念：几何学、维度

想象一个二维世界，其中充满了有知觉能力的形状———像三维世界里的我们一样思考和交流的四边形和六边形、线和圆。这是英国教师兼牧师埃德温·A．艾博特1884年出版的小说《平地：多维的罗曼史》的前提条件。小说的主人公是一个正方形，他向读者讲述了平地世界的法律和习俗，包括五角形的房子，这是为了避免它的角度太过锐利，让不小心撞上来的平地居民受伤。在平地世界里，直线是女人，锐角的等腰三角形（更适合战斗）是士兵和下层的劳动者，四边形和五角形（五条边）是中产阶级男人，六边形（六条边）则是贵族。总之，边越多，等级越高，等级最高的是圆，属于神职阶级。

这部小说最引人注目的地方在于，它解释了维度的概念。正方形到了线国和点国，还和一个三维世界———空间国的居民进行了交流。你可以想象，向一个二维生物解释三维会有多难。那么，该怎么办呢？可以跟他说，第三维在他居住的二维世界的“上面”，与它垂直，但这对他意味着什么？他怎么能想象一个不在平面上而是垂直向上的方向呢？《平地》帮助读者认识了维度的概念，在这一点上，自出版以来，它从未被超越。

《平地》电影版

如果你不喜欢读书，可以看看2007年上映的《平地》电影版，它由马丁·西恩、克里斯汀·贝尔和迈克尔·约克配音，主要讲述了正方形亚瑟的旅程。

25 足球不只是一个球

数学概念：形状、几何学

你周末踢的足球蕴含着数学的奥秘。近些看，可以发现足球表面是由正五边形和正六边形重复排列组成的，这种图形被称为截半20面体：有12个正五边形的面和20个正六边形的面，共32个面。另外，每个正五边形的每条边都与一个正六边形相接，每个正六边形的每条边都与一个正五边形或另一个正六边形相接。但是，在真正的截半20面体中，所有的正五边形和正六边形都完全是平面的，而为了抹除棱角，让球更圆，足球的表面的正五边形和正六边形都是鼓起的。

截半20面体之所以比其他形状更引人注意，是因为它是一个阿基米德立方体。阿基米德立方体是以古希腊（也是人类历史上）伟大的数学家阿基米德的名字命名的，是指由两个或多个规则多边形（所有边长相等，如正六边形）组成的三维图形。与之相关的图形是柏拉图多面体，它的面也全部由相同的规则多边形组成（如正方体，它的面全是正方形）。

截半20面体不仅可以在体育中见到，它还以微观的形式出现在自然界，如巴氏球碳链，它是由60个碳原子组成的，以20世纪最伟大的建筑师巴克敏斯特·富勒的名字命名，直到20世纪80年代，人们才发现这种分子的形状是球形。某些病毒的形状也是截半20面体，如豇豆萎黄斑点病毒。无论是自然界还是人类世界，都会出现这种特殊的形状。

阿基米德多面体

阿基米德多面体共有13种，包括截半立方体，它的面是由正方形和三角形组成的；还有截角八面体，它的面是由正方形和正六边形组成的。

26 鲁比克魔方——玩具还是数学奇迹

数学概念：形状、组合学、算法

最近你可能没玩过鲁比克魔方，但这种20世纪80年代出现的彩色拼图玩具，已经成为史上最畅销的玩具。魔方有六个面，每个面由三层共九个活动方块组成，这些活动方块共有六种颜色。魔方的难度很大，但也让人着迷：一旦魔方被打乱，玩家必须不断旋转这些方块，直到每个面的九个方块颜色完全相同。

鲁比克魔方既好玩又让人发狂，还体现了一些数学概念，其中一个是组合学，即研究如何以不同的方式组合一系列实物的学问。魔方方块的组合方式多到让人吃惊，实际上，共有43252003274489856000（约4300亿亿）种。一般人很难理解这个数字究竟有多大，假设你有4300亿亿个魔方，把它们堆起来，这座“魔方之塔”将伸到外太空。它究竟能伸多远呢？能伸到国际空间站吗？能伸到月球吗？答案可能会让你大吃一惊：这座“塔”的高度将达到261光年。

我们也可以通过其他方式来理解这个让人难以想象的数字。例如，4300亿亿个魔方可以覆盖273个地球的表面。或者，想象一下把所有的排列方式过一遍需要多久，假设旋转一层的方块需要1秒，把所有可能的排列组合过一遍需要大约1500万亿年，远远长于宇宙的年龄。

思考魔方的本质也有助于我们认识算法。在数学中，算法是指让人通过一系列清晰的步骤解决问题的指令（宜家书柜的安装说明也是一种算法）。参加魔方比赛这种解密游戏的人会熟记那些帮助他们把方块旋转到正确位置的算法，这种算法往往用一个字母或符号代表魔方的面，例如：

F＝前面B＝后面R＝右面L＝左面U＝顶面D＝底面

也有一些符号指示玩家是顺时针还是逆时针扭转方块，例如，F表示顺时针扭转前面，F’则表示逆时针扭转前面。因此，一个指示如何扭转中层方块的算法可能如下：

URU’R’U’F’UF

一般情况下，魔方玩家要熟记40个这样的算法。

全世界最畅销的玩具

据估计，自1980年以来，全世界共售出了3．5亿个魔方，魔方成了全世界最畅销的玩具。换句话说，全世界约有1／7的人玩过魔方。

27 纸张尺寸

数学概念：几何学、比例

下次使用复印机的时候，仔细观察一下打印纸———它的设计用到了很多数学知识。国际标准化组织对打印纸，尤其是A型纸和B型纸的尺寸规定，有着几何学上的考虑，极大地方便了我们的复印。

A型和B型打印纸的一个特点就是页边距的比例。这两种型号的宽高比均为1∶榛2，也就是说，每张A4纸是A3纸的一半，每张A3纸是A2纸的一半。榛2可以确保每张纸的宽高比完全相同，每张纸都是更大尺寸的缩小版或更小尺寸的放大版。例如，一张A4纸宽210毫米，高297毫米，约等于美国的信纸大小，而一张A3纸宽297毫米，高420毫米。

这样一来，如果你想缩小A4纸的尺寸，可以把它转换为A5大小，这样将A5纸旋转90°后，就相当于一张A4纸的一半，不浪费一丝空间。由于每个尺寸的比例完全相同，不管怎么缩放，纸上的信息永远保持相同的宽高比。即使是在复印这样普通的事情上，几

何学也能极大地方便我们的生活。

一刀是什么意思

对于普通人来说，一刀可能是个陌生的概念。一刀纸是指24或25张大小完全一样的纸，相当于一令纸（400或500张纸）的1／20。

28 用地图描绘地球的不同方式

数学概念：立体投影、墨卡托投影、罗宾逊投影

如果你曾看过别人墙上或者地图册里的地图，就一定见过现实中的数学。在第22章“高斯与比萨”中，我们了解到，不可能完全将球形转换成二维图形，所以，地球或者其他球体的所有地图在一定程度上都会失真。那么，究竟怎样在一张纸上呈现一个球体的信息？换句话说，如何把球体转换成地图？

数学可以在其中发挥作用。地图有很多种，每种都以略微不同的方式描绘地球，但都可以叫做投影。你可能听说过墨卡托投影（由荷兰地图学家赫拉尔杜斯·墨卡托于1569年创立），它被水手大量使用，如果要从A点到B点，领航员只用在两点之间画一条线，就可以知道指向目的地的确切的罗盘方位。《美国国家地理》杂志发行的世界地图则利用了罗宾逊投影（罗宾逊地图可以减少极地的失真，而在墨卡托地图中，极地地区比实际要大很多）。

有些地图呈圆形，常以北极或南极为中心，你可能见过这种古董地图，一个框架里有两张圆形地图，这种地图是立体投影图。不像有些地图，立体投影图的形状是完全如实的，也就是说，所有的角度都是真实大小的（但距离和面积不是）。另外，在立体投影地图中，绕地球的圆也以圆表示。如果这个圆恰好经过投影点，即地图的中心点，则以直线表示。

高尔彼得斯投影

在某些投影图中，大洲的相对大小会失真，而以詹姆斯·高尔和亚诺·彼得斯的名字命名的高尔彼得斯投影正是为了纠正这种失真，让大洲的相对大小更精确。你可能记得，在名声大噪的电视剧《白宫风云》中，那个虚构的地图绘制员组织曾为这种地图而发生斗争。

29 M＆M巧克力豆

数学概念：组合学

数学似乎与日常生活毫无关联，但实际上，我们在很多地方都可以发现数学。离你最近的杂货店的糖果走道里可能就蕴含着与17世纪的数学之间的联系。

1611年，行星运动定律的提出者约翰尼斯·开普勒（参见第20章）提出了一个假设：如果有一堆球状的颗粒物，最有效的填充方式就是像市场上的橙子那样堆在一起（被称为开普勒猜想），这种方法被称为面心立方最密堆积，通过这种方法，我们可以填满一个给定体积的近74%。相反，如果把它们随意丢进罐子里，则只能填满罐子体积的64%左右。

说回糖果。研究者发现，看起来像M＆M巧克力豆的颗粒物———椭球体———填充罐子的方式和球体一样。如果像橙子那样堆积，它们也能填满罐子体积的74%左右，但如果随意把它们丢进罐子里，它们能填满罐子体积的71%，要比球体高很多。有些人认为，相比于球体，椭圆体能更有效地填充一个空间，因为它们会不断地翻转和滑落，直到填满更多的空间。

开普勒生前未能证明他的猜想，到了19世纪，高斯部分证明了这一猜想，最后，直到20世纪90年代，美国数学家托马斯·黑尔斯借助计算机，才证明了开普勒猜想是完全正确的。但是，黑尔斯的证明长达数百页，他只有借助计算机算法才能进行验算！

蓝色M＆M巧克力豆

1995年，由糖果迷投票增加一种M＆M巧克力豆的包装颜色，最后胜出的是蓝色，获得了54%的投票（总票数超过1000万张），紧接着的是粉色和紫色。最后，蓝色的M＆M巧克力豆取代了原来的黄褐色。

30 七巧板

数学概念：形状、几何学

如果你喜欢玩游戏的话，可能会喜欢七巧板，这是一种来自中国的拼图玩具，有人认为它已经有几千年的历史，但第一份官方记录出现在1813年。经典的七巧板由七块板组成：两个大三角形，一个中三角形，两个小三角形，一个正方形和一个平行四边形（两条边向同一方向倾斜的长方形），所有的三角形都是直角三角形（90°）。七巧板可以使用几乎任何材料制作，包括木材、塑料、玻璃或龟甲。其实，只要有纸、铅笔、直尺和剪刀，我们也可以自己动手制作七巧板。

游戏的目的是用七块板组成复杂的图形，比如动物和人（通常都有说明书，说明可以组成哪些图形）。七块板不能重叠，每块板的一边必须与至少另一块板的一边相接。

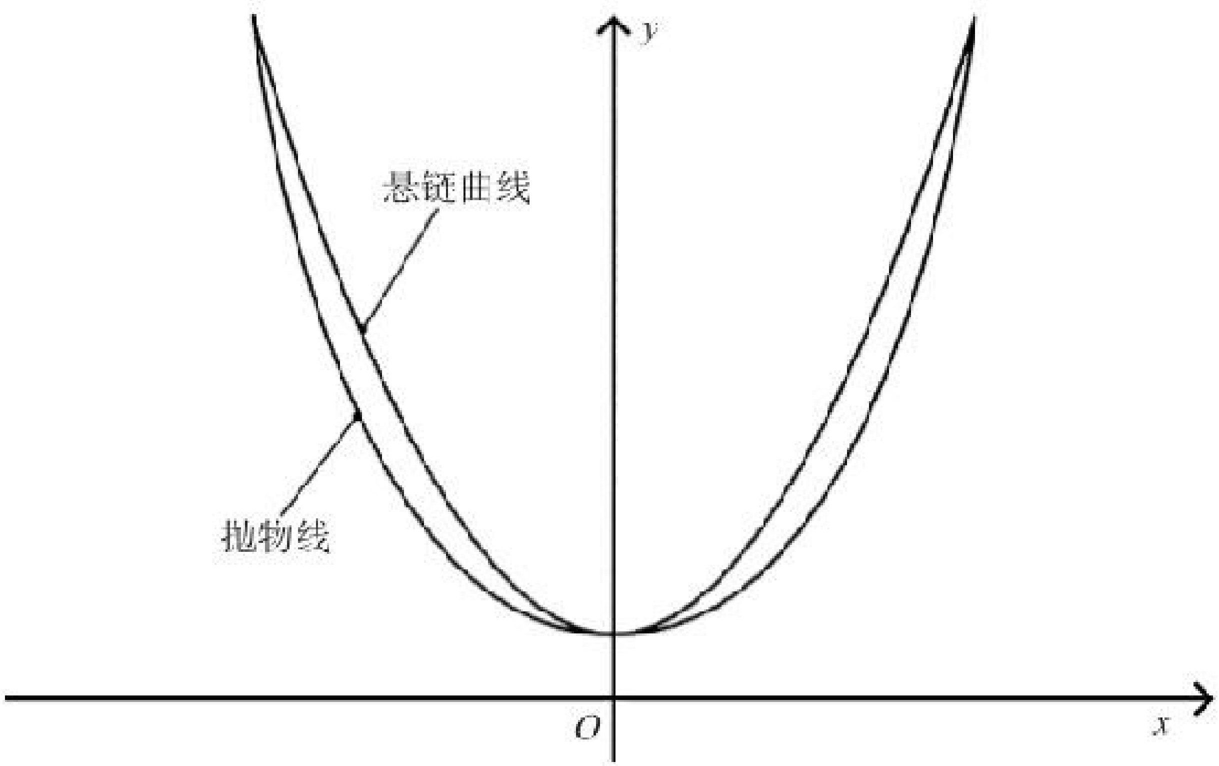
七巧板与数学的关系很明显：七巧板的形状与几何学———研究线、点和角的数学分支相关。不仅如此，七巧板还激发了更深刻的数学思考，一些数学家开始思考，能用七块板组成多少种图形，但他们想到的图形不是羊或水手，而是凸多边形———有三条或更多的边但没有一处向内凹的图形，比如五角形和正方形。数学家们发现，玩家可以用七巧板组成十三种凸多边形：两种五角形（五条边）、六种四边形（四条边）、一种三角形和四种六边形（六条边）。七巧板游戏虽然简单，但蕴藏着不易被发现的数学知识。

哥伦布的鸡蛋

并不是所有的七巧板都是由三角形和长方形组成的，其中一种———哥伦布的鸡蛋———就是从一个二维的卵形开始的，然后被分割成几块，它的某些边缘是弧状的。

31 天鹅绒绳的数学问题

数学概念：悬链曲线



如果你要去密苏里州的圣路易斯，千万不要错过大拱门，那是一座高达192米的钢筋混凝土建筑。大拱门于1965年完工，一方面象征着圣路易斯曾经扮演的历史角色———西方殖民者进入北美开拓殖民地的大门；另一方面也算是对数学的致敬，因为它的形状近似一条悬链曲线，即两端固定的绳子在均匀引力作用下下垂形成的弧线（更准确地说，大拱门近似一条倒悬链曲线）。输电塔之间的电线和船的锚绳都是悬链曲线，用来隔离排队看电影或听音乐会的人群的天鹅绒警戒线也是悬链曲线。

悬链曲线看起来也像抛物线，但直到1691年（在数学史上，这算是一个晚近的日期），悬链曲线的方程式才被提出来，提出它的是三位大

数学家———克里斯蒂安·海更斯、雅各布·贝努里和哥特菲尔德·莱布尼兹。

建筑中的悬链曲线

倒悬链曲线常出现在建筑中，增加了建筑的美感和优雅感，安东尼·高迪的米拉之家的阳台下和英国南约克郡谢菲尔德冬园温室的屋顶上都出现了悬链曲线。

32 吊桥是如何承重的

数学概念：形状、物理学

如果让你想象一座漂亮的建筑，你想到的可能是吊桥，它高高地耸入云霄，它的缆索既美观又实用，能给下面的桥面提供拉力。这些起伏的曲线恰巧也是抛物线，这是一种数学家十分熟悉而且经常出现在现实世界中的形状。

如果你还记得几何课上讲过的笛卡尔坐标系，应该也记得，用$y=x^2$这个函数可以画出抛物线图。或者，你可能还记得抛物线属于圆锥曲线，即用一个平面，如一张纸，去截一个圆锥体，所得到的交线（你在物理课上可能学过，缆索可以将道路和车辆产生的下向压力转移到索塔上，然后再引向地面）。同时，缆索之所以呈抛物线，也是由道路和车辆造成的。如果没有道路和车辆的重量，缆索可能呈悬链线，即绳索这类悬挂的物体只受重力影响时所呈现的形状（参见第31章）。

桁架桥与三角形

并不是所有桥都有缆索，也有一些桥是利用桁架这种构件建造的。桁架由很多构件组成，通常都是三角形，它们相互连接，让整个结构成为一个整体。

第二部分 行　为

33 公交车为什么成群出现

数学概念：混沌理论

如果你所在的地方有公交车的话，你或许曾在一个公交车站等了很久，却等不到一辆公交车，你不耐烦地踮着脚眺望远处，突然看到两辆公交车一起来了，于是你大喊：“来了！”“这个鬼地方的公交车是怎么了？就不能分开来吗？”

其实，公交车成群出现，并不是交通系统的问题，这几乎是不可避免的。想象一下，有两辆公交车在早上离开公交总站，假设两辆车之间的间隔是10分钟，那么它们这一天最开始就有10分钟的间隔。假如公交车只是开到一个公交车站，等到规定的时间再开走，它们绝对不会成群出现。但实际上，到了每个公交车站，乘客要上车，每个人上车的时间各不相同（比较一个拄拐杖的老人和一个10岁的孩子）。另外，有的公交车站可能乘客如潮（比如学校附近，每到下午3点，成群的学生涌出校门，到附近的公交车站等车回家）。不论哪种情况，公交车在运行路线的任何一点上都有可能停滞不前。

考虑到这一点，公交车会成群出现也就不足为奇了。不管是因为某些乘客上车较慢，还是因为乘客人数太多，为了等乘客上车，公交车在某个站停的时间长一点，下一站的乘客就得等更长的时间。然后，当这辆车到了下一站，累积的乘客就需要更长的时间上车，也就是说，再下一站的乘客可能要等更久。总之，这个过程就这样循环往复。

同时，当后面那辆车到公交车站时，却发现没什么乘客，因为大多数乘客已经上了前面那辆车。由于乘客较少，这辆车就不用停很久，所以运行得相对就快，从而缩短了到达下一站的时间。前面那辆车越来越慢的同时，后面那辆车却越来越快。最终，后面的车赶上了前面的车，两辆车就一起出现了（除非前面那辆车到站不停）。

公交车成群出现体现了混沌理论———研究最初的微小差异如何导致最终的显著差异的数学分支。拿公交车来说，乘客上车的微小差异显著影响了这辆车相对于其他同线公交车的位置。

蝴蝶效应

如果你听说过混沌理论，可能也听说过蝴蝶效应。1963年，数学家爱德华·洛伦兹首次分析了蝴蝶效应，他在研究天气现象的时候发现，天气预报模型数据的微小差异会导致显著不同的结果。根据蝴蝶效应，一个不起眼的天气数据，比如蝴蝶扇动一下翅膀，就可能引起巨大的反应，比如飓风。

34 让你在赌场不再输钱

数学概念：赌徒谬误

你喜欢赌博吗？如果喜欢，你可能接触过一个数学概念———赌徒谬误，但却浑然不知。

以掷骰子为例，每个骰子有六个数字———1，2，3，4，5，6，所以，掷一下，每个数字出现的概率都是1／6。假设你掷了10次，掷出的结果如下：

第一次：5	第六次：3
第二次：2	第七次：4
第三次：1	第八次：5
第四次：2	第九次：3
第五次：4	第十次：3

人们总是以为，因为6还没出现，所以下次出现6的概率会更大，可能会是前面10次的3倍。“我还没掷出6，”有的人可能这么想，“所以下次一定会是6，掷吧。”但实际上，下次是6的概率和第一次没什么差别。这一谬误的错误之处在于，认为前面的结果会影响未来的结果。事实上，即使掷100次，而没有一次是6，第101次是6的概率依然是1／6。

赌徒谬误也被称为蒙特卡洛谬误，可能来自1913年8月某个晚上的蒙特卡洛赌场。那天晚上，轮盘连续出现了26次黑色，在为决定命运的第27次下注时，越来越多的赌徒下了红色，因为他们相信红色出现的概率更大。毫无疑问，出现黑色或红色的概率并不会因为一次旋转而改变，只要考虑到概率，就知道每次旋转都是靠运气。

有时，数学家和统计学家将赌徒谬误定义为，相信轮盘和骰子这种无生命之物有记忆，也就是说，它们“知道”自己过去的行为，所以会相应调整未来的行为。显然，这些东西并没有记忆，轮盘的每次旋转和骰子的每次投掷都是相互独立的（假设设备没有被篡改）。所以，决定下

注的时候，千万记住这一点。

谬误

另一个谬误是人身攻击论证，即把一个人的人格当成支持或反对某一观点的证据，而事实上，一个人的人格与这个观点的真值毫无关系。假设你和另一个人在就死刑展开辩论，都在试图说服一个共同的朋友自己的观点是正确的，同时假设你的辩论对手最近欺骗了他的妻子，如果你对你们的朋友说：“不要管他的观点，他出过轨”，这就是人身攻击论证。对手的私生活与他的观点正确与否毫无关系。

35 怎样让电影赢得奥斯卡奖

数学概念：组合学

在奥斯卡金像奖公布期间，家人朋友围坐在电视机前拭目以待，看哪部电影能够获得最佳影片奖。可是，评选委员会是如何决定让哪部电影获奖的呢？这个过程涉及数学，也就是偏好投票制。

在大部分人熟悉的投票中，你拿到一张选票和一个候选人名单，在自己希望获胜的人名旁边做上标记（假设是在选州长）。然后，一名选务官开始唱票，记录每个候选人得到的票数，确定得票最多的候选人，这个人就成为州长。

而在偏好投票中，选民要在每个候选人的名字旁边做上标记，而不仅仅是他希望获胜的那个人。如果选票上有五个人名，选民要在最希望获胜的人名旁边标上1，在第二希望获胜的人名旁边标上2，依此类推，直到第五个人名。选务官在计票时，将每个候选人的选票各分成一堆，甲的名字旁标1的选票就放在甲的那堆里，乙的名字旁标1的选票就放在乙的那堆里，依此类推。最后，如果其中一堆获得1的选票超过50%，那个人就获胜，否则，获得1的选票最少的候选人将被淘汰。接着，计票继续！选务官再次计票，计算名字旁标2的选票，然后重复前面的过程，甲的名字旁标2的选票就放在甲的那堆里，依此类推。和前面一样，获得2的选票最少的候选人将被淘汰。这个过程不断重复，依次挑出标3和4的选票，直到得票最多的候选人获得的票数超过50%。投票绝不像表面那么简单。

靠数字赢得奥斯卡

奥斯卡奖取决于数字。自从1929年第一届奥斯卡金像奖以来，已经颁发3000多座奥斯卡小金人。该奖项的发起人———美国电影艺术与科学学院，约有6000名成员。其中获得提名最多的电影包括《彗星美人》和《泰坦尼克号》，两部电影都获得了14项提名。

36 如何不被雨淋

数学概念：形状、算法

暴雨中也是可以找到数学的一个经典之处。假设你遇上了倾盆大雨却没有带伞，怎么做才能尽量避免不被淋湿呢？当然，站着不动绝不是你的选择，那样你会被淋透的。现实点的选择似乎有两个，要么走，要么跑，躲到最近的避雨处。选择走过去，可能淋得更湿，因为被雨淋的时间更长；选择跑过去，也可能淋得更湿，因为奔跑的时候会碰到更多的水滴。答案是什么呢？

数学能帮我们回答这个问题。现在，我们来重新表述一下这个问题，让它变得更简单一点：第一，假设那不是一个真人，而是一个由三维矩形构成的模拟人（就像一个巨大的砖块）；第二，假设雨滴下落的速度是恒定的，既不会骤然急促地落下，也不会有任何中断；第三，假设雨滴是垂直落下的，与地面成90°角。现在，有了这个更简单的场景，我们可以开始思考了。

我们来计算一下具体有多少雨滴（雨的体积）会落在砖块人的头部（一个理想的平面）。我们知道，雨滴是匀速垂直降落的，当这个砖块人向前移动时，不管是走还是跑，雨都会匀速落在它的上表面上。匀速会产生一个令人惊讶的结果：不管这个人在雨中是走还是跑，它都会淋到同样的雨量。你也可以把这些雨滴想象成三维矩形：打到一个站着不动的人的矩形雨滴仍像一个标准的、直上直下的矩形，而打到一个在雨中或跑或走的人的矩形雨滴看上去则是倾斜的。但是，问题的关键就在这里，无论矩形是垂直还是倾斜的，其体积是一样的（计算三维的平行四边形或者说平行六面体的体积，方法都是长乘宽乘高）。同样，由于一个人的正面面积总是相同的，雨滴下降的速度也是恒定的，所以，不论一个人在雨中是走还是跑，打在他身上的雨水体积都是一样的。

由于你与避雨处的距离不会改变，唯一能尽量少被淋湿的方法是，尽可能减少在雨中的时间，而唯一的方法就是，跑得越快越好。

阿历桑德罗·德·安吉利斯的计算

根据意大利乌迪内大学的物理学家阿历桑德罗·德·安吉利斯的计算，在其他变量相同的情况下，在雨中奔跑只能让你少淋湿10%。所以，在1987年发表于《欧洲物理杂志》的一篇论文中，他总结道：最好还是走，因为两者的差异并不明显，不值得浪费体力。

37 最快的结账排队法

数学概念：排队论

买食品杂货可能会让你万分沮丧———别人的购物车堵住了过道，你最喜欢的谷类食物卖完了，还有，鹰嘴豆泥呢？

但最让你感到沮丧的可能就是排队结账的时候了。你的购物车里装满了脆米、意大利面和苹果，这时，你的任务是要选择移动得最快的队伍。可当你刚刚选好，有的购物者却笨手笨脚地在找优惠券或者零钱，你的队伍就慢了下来。这时，好像别的队伍都比你的快。为什么你选的队伍永远不是最快的？

恰好有一个数学分支是研究这个问题的，那就是排队论，它是专门研究排队行为的（研究排队论的数学家被称为排队论研究者）。这一理论起源于20世纪前十年的哥本哈根，当时，丹麦工程师和数学家A．K．埃尔朗正在研究如何用数量最少的电话线保证大部分电话能接通（当时，电话还要靠人工接通，每拨一个电话，接线员都要把电话线接进一个插孔）。电话公司一方面想避免线路太少，如果太多人同时打电话，可能会造成拥堵；另一方面又要避免线路过多，否则就得承担闲置设备的成本。

埃尔朗的名字永远地和电话行业连在了一起，成了电话负载和通信量的单位，被用来衡量通信流量。他的发现不仅在电话行业得到应用，也影响了通信工程、互联网和工厂设计。

你在做杂事的时候也可能接触过排队论。排队论研究者发现，如果顾客排成一条线圈似的队伍———蛇形排队法———移动到柜台，等候时间可以大大缩短（在银行和杂货店，都可以看到蛇形排队法）。不像传统的排队法，一个人动作慢会拖慢整个队伍，蛇形排队法可以确保等候时间是最短的，如果一个动作慢的人占用了一个柜台，其他的顾客可以分流到其他柜台。虽然延误在所难免，但相应的影响却大大降低了。

左还是右

当你面临两个选择———左手边的队列还是右手边的队列，有的人相信，左手边的队列移动得更快，因为近90%的人习惯用右手，所以会本能地选择右手边的队列。这种观点纯属无稽之谈，但如果下次在主题公园里排起了长队，不妨试试左手边的队列。

38 怎样准备图灵测试

数学概念：图灵测试

如果你看过1982年的电影《银翼杀手》的话，一定知道这个场景：一个人坐在桌子前，试图通过雪茄烟雾，确定坐在桌子对面的另一个人是不是机器人。这种意识测试似乎只有在20世纪的科幻小说里才会出现，但实际上，它已经存在了好几百年。在1637年出版的《方法论》一书中，笛卡尔也提到了这种测试，在这本书中，他提出，如果一台机器的外形像人，也像人一样行动，人类不可能分辨出它是不是机器。

第一，在很多情况下，机器都不能像人那样说话，换句话说，它的言语都是预先编程的。

第二，机器不可能进行普遍意义上的行动（笛卡尔的意思是，机器只擅长特定的任务，如焊接和打印，因为它的零件都是有特定用途的，所以它无法创造性和自发性地认识世界）。

1950年，英国数学家和密码学家艾伦·图灵的一篇论文提出了一个最能将机器和会思考的人区分开的例子。在“二战”期间，图灵曾帮助同盟国破解了纳粹的英格玛密码。在这篇名为《计算机器与智能》的论文中，他提出了一项可能回答机器是否会思考这个问题的测试。

由于很难定义什么是思维或者思维涉及哪些东西，图灵提出了一种不同的方法来解答这个问题。他提出的测试———最初被称为模仿游戏，关注机器能否让人类相信它是人。在这个游戏中，一名人类询问者坐在一个房间里，在另外两个房间里则分别是一台机器（假设是一台计算机）和一个人，询问者的任务是判断哪个是机器，哪个是人。如果他无法做出判断，或者1／3的测试都被机器骗了过去，这台机器就通过测试了。图灵认为，如果机器通过了测试，我们有理由相信，它是智能的。（毕竟，难道我们判断别人聪明与否的最好方式不是和他交谈吗？）

图灵测试十分有趣，因为它挑战了大部分人对思维过程的想法。大

部分人认为，思维发生在一个人的大脑里，别人是看不见的，但图灵测试告诉我们，判断别人是否会思考，不一定非要进入他的大脑中。

图灵测试中所问的问题不一定是寻根究底或极为复杂的，简单的甚至无聊的问题也可以发挥很好的作用。例如，最近在英国雷丁大学进行的一项图灵测试中，机器被问及当天的天气如何；最喜欢的科目是什么；是否喜欢足球。

当然，图灵测试提出的问题远比它解答的问题要多。通过测试真的代表智能吗？还是只能说明计算机程序成功地模仿了人类？这是否说明程序不仅仅是一串简单的机械符号呢？如果我们认为这一切都是由电子的来回运动造成的，背后根本没有思维这种东西，我们怎么知道人的大脑不是这样的呢？

即使在今天，图灵测试的魅力依然不减。图灵测试每年都会举行，2014年，一个名为尤金·古斯特曼的俄罗斯聊天机器人通过了测试，它让33%的评委相信了它是人。但有些人对这一结果存在异议：尤金是模仿一名13岁的乌克兰男孩设计出来的，他的第二语言是英语。

图灵在战时和和平时期均做出了卓越贡献，但英国对他的待遇是极不公平的，英国政府发现他是同性恋者后（在当时，同性恋是犯罪行为），于1952年逮捕了他。因为同性恋者可能受到要挟，他的安全通行证也被撤销了。他面临两个选择：坐牢，或接受荷尔蒙疗法。他选择了荷尔蒙注射。可能是由于政府的不公待遇，1954年，图灵自杀了。

图灵测试说明制造数字计算机———利用纯粹的机械方式进行数学计算的机器（参见第70章）是可能的。数字计算机是今天的笔记本电脑和智能手机的鼻祖，不仅能进行加法、减法和乘法运算，还能运行Facebook和各种网络浏览器等复杂的程序。因此，图灵和图灵测试帮助开创了全新的人工智能领域，这也是科幻小说和英国工程部门反复提及的一个领域。

模仿游戏

最近，艾伦·图灵再一次进入了公众的视野。2014年，一部有关他的电影———《模仿游戏》上映了，电影中，本尼迪克特·康伯巴奇饰演图灵，再现了他在“二战”期间利用现代计算机的前身破解德国英格玛密码的过程。最近公布的解密文件中记录了他破解密

码的具体方法。

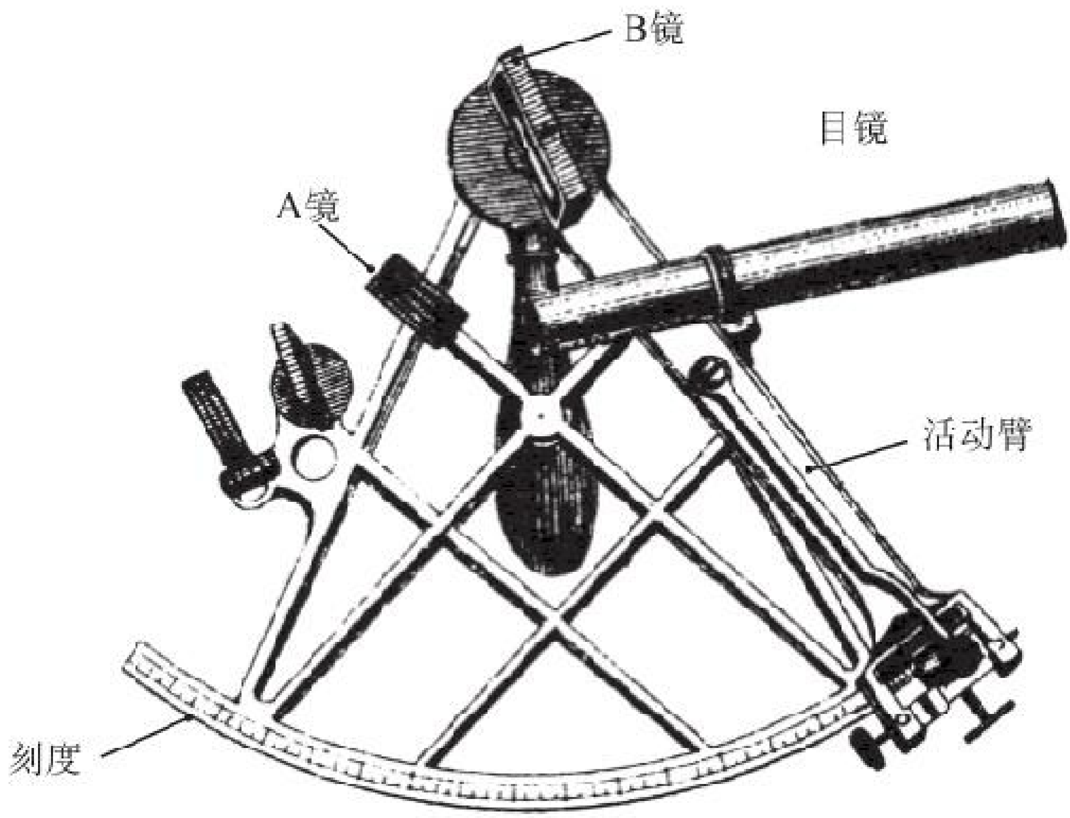
39 六分仪

数学概念：几何学

当你驾着船在广阔的海面上航行，怎样确定你的方位呢？为了增加任务的难度，我们不考虑使用GPS或其他电子设备（包括谷歌地图）。这项任务听起来似乎不可能完成，但是几百年来，水手们能够解决他们的定位问题，所以我们知道，这是可能的。那么，这背后有什么秘密？

秘密在于角度和几何。我们先来看看这种导航有什么可能性。如果你见过地球仪的话，一定看到上面有些纵横交错的线：有的是水平的，平行地分布在赤道（地球仪最中间的水平线）上下，这些是纬线；有的是垂直的，南北纵横，穿过北极和南极，这些是经线。获知你的经度需要用一块表，但是我们感兴趣的是如何知道自己的纬度，导航和数学之间的联系恰恰就在这里。

关键是要明白，一年中任何一天正午时分的太阳方位取决于你所在的纬度，离赤道越近，正午时分的太阳与地面所形成的角度就越接近90°；离赤道越远，这个角度就越小。换句话说，当你向南北方向走，天空中的太阳会显得越来越低。这一原理也可以反过来用，如果能计算出正午时分的太阳与地面所形成的角度，就可以推算出你所在的纬度。



计算这些角度就要用到六分仪———看上去像一块金属饼的手持测量仪器，上面还有一些小附件，其中一个是望远镜。使用六分仪时，可以通过望远镜看到一些天体，比如月亮、星星或者太阳（当然，要通过滤光片）。天体的像会出现在两个镜面里，然后调节活动臂———六分仪边缘的一块金属，直到其中一个镜面中的像接触到水平线。这时，可以看到一个角度出现在六分仪上，活动臂正指着这个角度。这个角度就可以用来计算你所在的纬度。

假设2015年6月21日，你在印度洋靠近印度尼西亚的澳大利亚领土圣诞岛附近的一艘船上。利用六分仪，你可以知道太阳与地面的夹角是66．6°，根据这个角度，可以算出你所在的纬度是南纬10．48°。

事实上，在这个过程中，你利用了三角学———研究三角形的性质（包括角）的数学分支。

如果你认为几何学和你的日常生活没有关系，不妨好好思考一下，尤其是当你的船迷失了方向，却又没有电子设备的时候。

约翰·坎贝尔

第一个真正的六分仪是由约翰·坎贝尔在1757年发明的，并在1768年由探险家库克船长出发去新西兰时被首次完全使用。它也被用作指示时间的仪器。

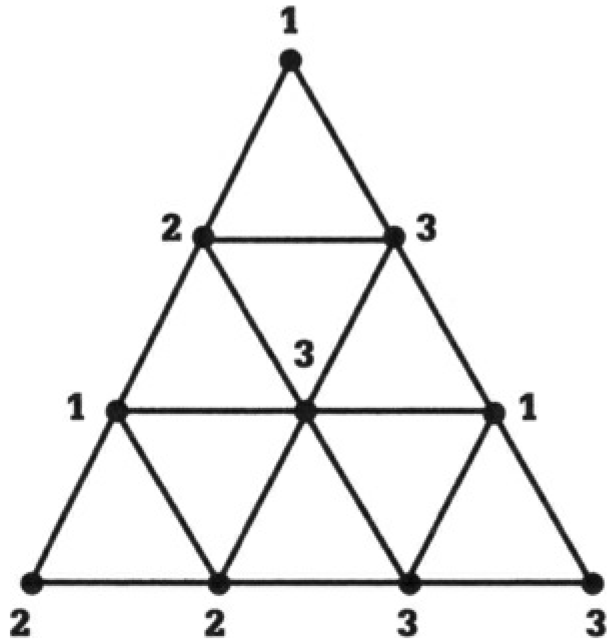
40 分摊房租

数学概念：公平分配、组合学

如果你有过室友的话，一定熟悉三人或更多人分摊房租的难题。如何公平地决定谁该分摊多少房租，这个问题远比看上去要复杂，因为每个房间的情况都不同，比如，有的房间采光好，有的房间空间大，每个人也都看重房间的不同特征。那么，究竟该如何分配房间和房租，才能让每个人都满意，又不至于让人忌妒其他室友呢？

这些问题属于公平分配的范畴。公平分配问题涉及多个领域，包括数学、经济学、法学和政治学，主要研究如何公平地分配物品，让每个人得到公平的一份。同时，这样的分配也应该做到，每个人不愿意和别人交换自己得到的那份。公平分配常可以在离婚、拍卖甚至战争中见到。

1999年，哈维马德学院的数学教授弗朗西斯·苏发表了一篇论文，解释了如何利用组合学（参见第26章）的一个定理———斯波纳引理来解决公平分配的问题。最初，这一引理解释了三角形的一个性质。取一个三角形，将它的内部分割成小的三角形，分割成几个都可以，只要确保它们彼此相接，中间没有空隙。接着，将大三角形的顶点分别标记为1，2，3，这样，每个顶点就有了一个不同的编号。此时，你将注意到，有些小三角形的顶点至少与三角形的一条边相接，给这些点标上不同的数字：在大三角形的1⌄2边上的点，可以标记为1或2（具体标哪个数字由你决定）；在2⌄3边上的点，可以标记为2或3；在3⌄1边上的点，可以标记为3或1；至于大三角形内部的点，可以标记为1，2或3，由你决定。所谓的斯波纳引理是说，最后至少有一个小三角形的三个顶点分别被标为1，2，3。这样的三角形可能不只有一个，但总数一定是奇数，而不会是偶数。



用斯波纳引理来处理房租的问题时，可以用代表每个房客姓名的首字母来代替数字，每个大三角形或小三角形都代表不同的分摊方式。根据这一引理，一定存在一种分摊方式，会让所有房客都满意，而不会想要其他人的房间或房租。换句话说，由于大三角形中一定有一个小三角形，它的三个顶点分别被标为1，2，3，所以至少也有一种让每个人都满意的分摊方式。

斯波纳引理看似一项抽象的、与日常生活毫无关系的数学发现，但其实能帮助人们有效地解决问题。

“二战”后的公平分配

公平分配的一个例子出现在“二战”后，当时，同盟国需要决定如何解决柏林问题，最后，他们决定将柏林一分为四，由同盟国的三个部分（分别由美国、英国和法国管辖）组成了西柏林，苏联管辖的部分则成为东柏林。

41 公平切蛋糕

数学概念：公平分配

下次参加别人生日聚会的时候，细想一下，其实简单的切蛋糕当中也蕴含着大量的数学知识。如何确保每个人都能得到令自己满意的那一份，而又不觉得其他人得到的比自己更多呢？加之并不是每个人都喜欢一样的蛋糕，这个问题就更复杂了：有的人喜欢糖霜，有的人不喜欢；有的人喜欢花朵图案，有的人喜欢字母。数学家们试图回答的问题是，有没有一种分法，可以让每个人都得到令自己满意的一块？事实上，两个人分蛋糕，理想的分法必须满足三个条件：

1．任何一方都不想要对方的蛋糕，这种方法被称为无妒忌。

2．不可能再让任何一方更满意，否则就要让其中一方不满意，这是效率。

3．分配是公平的，也就是说，对于任何一方来说，他们得到的蛋糕具有相同的价值（举例来说，假如是三个人分蛋糕，而且每个人都喜欢糖霜上的花朵图案，那么，公平的分法就是每个人得到的那一块都有一个花朵图案）。

2014年，两名研究者———美国联合学院的朱利叶斯·巴巴内尔和纽约大学的史蒂文·布拉姆斯在《数学情报》上公布了一种满足上述三个条件的分法，可以完美地解决分蛋糕问题（但他们的方法假定只有两个人分）。首先，这种分法考虑到蛋糕是“异质”的，也就是说，蛋糕的不同部分对两个人有不同的价值。例如，一个人可能喜欢蛋糕外围的大量糖霜，另一个人可能更喜欢蛋糕本身。其次，这种分法也需要一个第三者来当裁判。最后，这种分法还涉及所谓的概率密度函数，也就是表示每个人偏好蛋糕不同部分的数学方法。

根据这种方法，每个人首先向裁判提交自己的概率密度函数，裁判（电脑、大姐姐、街上的陌生人和父母等都可以充当裁判）在蛋糕上标出概率密度函数交叉的地方，也就是每个人的偏好相互重合的地方，如

果这时每个人都能得到同样大小的蛋糕，就算分好了，可以开吃了。假设一块蛋糕有两种味道，甲喜欢巧克力味，乙喜欢香草味，如果这两种味道各占一半，裁判只需将蛋糕沿着它们的边界切开，让每个人拿他们更喜欢的那一半。如果这两种味道并不是各占一半，分到更大块的人可以分一部分给另一个人，可以先从他的偏好度最低的区域开始，一直继续这个过程，直到每个人得到的部分大小相同。

除了能帮两个人公平分蛋糕的布拉姆斯巴巴内尔法以外，还有一种更普遍的方法，可以帮助不限数量的人将蛋糕分成无数份，这种方法是由布拉姆斯和另一位名叫艾伦·泰勒的数学家发明的，并发表在1995年1月的《美国数学月刊》上。这种方法很复杂，大意是甲切完了以后，如果乙觉得甲切得不公平，他可以对其中一部分做些微调，让蛋糕的大小看起来更相等，然后由丙来调整，接着是丁，依此类推。此外，这种分法可以确保最后会剩下几块，如果有人觉得自己被骗了，可以从剩下的几块中选一块，这就至少会跟他想要的那块一样大。

非可加性效用

公平分配方案的假定条件是非可加性效用，也就是说，一方面，如果我喜欢糖霜，我会想要很多，越多越好。另一方面，如果吃糖霜给我带来的满足感不是可加的，也就是说，它是非可加性的效用，那么，达到一定程度后，我的满足感就不会再增加了。研究者发现，在非可加性效用的情况下，公平分配方案就会失灵。

42 让包裹配送更高效

数学概念：旅行推销员问题

当你收到联合包裹公司的包裹时，可能不会想到它和数学有什么联系。事实上，数学和包裹配送有着重要的联系。

联合包裹公司业务的核心部分是确定司机可以走的最短路线。这家公司约有96000辆快递车，从小汽车、货车、摩托车到替代燃料车，每个司机每天平均要到150个目的地，每个司机多走一英里不必要的路，公司每年就要承担数百万美元的成本。因此，公司有理由让每条路线尽可能短、尽可能有效。

数学家们十分熟悉寻找最佳路线这类问题，他们称之为旅行推销员问题。这个术语诞生的时候，挨家挨户的推销还很常见，一名推销员一天要拜访一定数量的人家，所以必须找出到每家每户的最短路线。旅行推销员问题很难解决，因为要考虑的因素多得惊人。假设一名司机一天要到25个地方，可能的路线有15兆兆种，通过计算机和算法（为实现特定目的的一系列指令），联合包裹公司在很短的时间内就可以减少可能的路线。

到了21世纪，随着道路优化与导航集成系统（ORION）的出现，联合包裹公司的算法有了很大的改进。ORION的数学计算让联合包裹公司的司机每年少走数百万英里的路。在日常生活中，如果你有一堆杂事要做，可能也会这么计算，你在心里计算到每一站的最短路线，避免浪费时间和精力，比如避开往回走或在高峰期走拥堵的路线。

电影《旅行推销员》

> 旅行推销员问题也被搬上了银幕。2012年的电影《旅行推销员》聚焦于四位数学家，他们要决定该不该给美国军方提供P＝NP问题（参见第75章）的解决方法，因为他们知道，这关乎他们的道义责任，一旦军方掌握了这种方法，就能破解世界上的任何密码，为他们提供前所未有的力量。

43 算法对互联网体验有什么影响

数学概念：算法

算法本质上是告诉我们如何通过有限的步骤实现特定目标的一系列指令，理论上，算法不仅限于数学和计算机领域。无论是建鸟舍，还是在陶盘上做一只碗、换车胎、烤面包，我们都得遵循一系列特定的指令，这些指令就是算法。

你可能比自己想象中更熟悉算法。上小学时，学习加减乘除和运算次序（要完成计算，首先要计算括号里的内容，然后再算指数、乘、除、加、减）的过程，其实也是在学习算法。换句话说，每次吃完饭计算小费，或者把信封背面的数字相加，都可称为算法。

算法也与互联网的日常使用有关，如果你经常上网，就会时常接触算法。例如，当你点播网飞公司推荐的电影时，就是利用了算法的计算能力；当你在谷歌上搜索一个词，对潘多拉音乐电台的歌曲或赞或踩，个性化自己的音乐体验，或浏览亚马逊网站的时候，算法都能迎合你的爱好，丰富你的网络体验。在这一基础上，网站

和程序可以根据你的偏好，为你提供具体的选择。

网飞大奖

2006年，网飞公司组织了一次大赛，征集能够使其推荐系统性能上升10%的推荐算法。2009年，一个名为BellKor✔s PragmaticChaos的团队赢得了100万美元的大奖，他们获胜的关键在于，根据不同的数据预测人们可能喜欢的电影，然后将预测数据和观看者的实际喜好进行比较。对网飞公司来说，推荐至关重要：精确的推荐是公司的核心能力。

44 解释蒙提霍尔问题

数学概念：概率

某些数学概念，如生日悖论（参见第78章），十分奇怪和反常，有些奇怪的数学概念，甚至连数学家们也很难相信是真的。其中一个例子就是蒙提霍尔问题，这个问题是以游戏节目《我们打赌吧》[1]主持人的名字命名的，它的答案十分奇怪，即使完全解释之后，大部分人也觉得不可能是真的。某种程度上，它相当于数学领域的量子力学（研究物质最小组成部分的物理学分支），虽然令人难以置信，但却是正确的。

在节目中，主持人让参赛者站在三扇门前，其中一扇门后面是一辆新车，另两扇门后面各是一头山羊（或者其他不像汽车那么好的东西），主持人让参赛者选择哪扇门后面是汽车。接着，主持人打开另外一扇门，后面是一头山羊，这时，参赛者可以改变自己最初的选择。问题在于，参赛者究竟应该坚持最初的选择，还是选择第三扇门。

答案是，参赛者应该选择第三扇门。游戏一开始，参赛者选中汽车那扇门的概率是1／3，如果他在这时改变了选择，选对的概率就会变成2／3。怎么可能呢？大部分人觉得，参赛者是否改变选择都无所谓，主持人已经打开了一扇门，后面是其中一头山羊，这时，参赛者选对的概率是1／2，因为剩下的两扇门后面，要么是汽车，要么是山羊。

但是，这种想法是错误的。拿出一张纸，把概率写出来，就能明白背后的原因。问题的关键在于，主持人打开的永远是后面有山羊的门（要是打开了汽车那扇门，游戏也就不存在了），现在，不靠直觉，我们来列出可能的排列组合：

●选择一：参赛者选了后面是1号羊的门，主持人打开了后面是2号羊的门，参赛者如果坚持最初的选择，最后打开的是山羊，否则就是汽车。

●选择二：参赛者选了后面是2号羊的门，主持人打开了后面是1号羊的门，参赛者如果坚持最初的选择，最后打开的是山羊，否则就是汽

车。

●选择三：参赛者选了后面是汽车的门，主持人打开了后面是1号羊或2号羊的门，参赛者如果坚持最初的选择，最后打开的是汽车，否则就是山羊。

从上面三种选择可以看出，其中两种情况下，如果改变选择，最后都能得到汽车。这种结果完全出人意料，但却是准确的。这就是数学的力量。

贝特朗箱子悖论

一个相似的问题是以约瑟夫·贝特朗的名字命名的贝特朗箱子悖论，他于1889年将这个问题写成了一本书。假设有三个箱子：一个装着两枚金币，一个装着两枚银币，还有一个装着一枚金币和一枚银币。随机选择一个箱子，拿出一枚钱币（也是随机的），如果是金币，剩余的那枚也是金币的概率有多大？你或许以为是1／2，但其实，真正的概率是2／3。

注释

[1]美国的电视游戏节目，由斯特凡·哈托斯和蒙提·霍尔制作和出品，后者在该节目做了多年主持人。

45 抛球杂耍背后的数学

数学概念：组合学

提起抛球杂耍，你可能会想到生日聚会上的小丑或马戏团，但你或许不知道，抛球杂耍也成了数学研究的对象，尤其是那些对图案和拼图深感兴趣的人。和数学一样，抛球杂耍如今也有了自己的标记法。

这种方法被称为场地变换，是加州理工学院、剑桥大学和加州大学圣克鲁斯分校的杂耍爱好者在20世纪80年代发明的。每次抛接都以一个数字表示，奇数表示被抛接的物体（比如球）从一只手变换到另一只手，偶数表示物体还在同一只手里。数字的大小也很重要：数字越大，球被抛得越高。例如，以数字3表示的抛接动作，球要被抛到大约脸部的高度，并由另一只手接住。以数字2表示的抛接动作，球只被抛到几英寸的高度，并由同一只手接住。抛球杂耍的爱好者可以用场地变换标记法记录一场表演的抛接动作，也可以用别人的记录来练习新花样。杂耍人发现，从一场表演的标记中，还能看出表演需要多少个球。球的数量等于标记中所有数字的平均数，所以，以5551表示的表演，需要用4个球。

玩抛球杂耍也是信息论之父克劳德·香农的消遣方式。实际上，香农提出了抛球杂耍的方程式：

（F＋D）H＝（V＋D）N

其中，F———球在空中停留的时间

D———球在手中停留的时间H———手的只数

V———一只手空置的时间N———被抛出的球的数量同时，香农用一部分拼装玩具造了一台抛球杂耍机，可以把钢珠从有弹性的薄膜上弹开。小丑和马戏团并非想象中那么简单！

抛球纪录

根据《吉尼斯世界纪录》，英国的亚历克斯·巴伦保持着抛接球数最多的世界纪录。2012年4月3日，18岁的他连续23次抛接了11只球。

46 纳什均衡

数学概念：博弈论

数学不只研究数的性质，有些数学分支也关注人类行为，尤其是人与人之间的相互影响，博弈论便是其中一个分支。

博弈论主要由普林斯顿大学的数学家约翰·福布斯·纳什提出，纳什也是小说《美丽心灵》的主角，2001年，这部小说被拍成了电影，由罗素·克劳主演。博弈论者研究的不只是象棋和棋盘，还包括人与人之间的相互影响，其中，一个人的决策要依赖另一个人的决策，包括商业决策、战争和各种经济决策。因此，博弈论不只关注明白的事实和规则，也关注参与者的心理状态，以及每个参与者对这些心理状态的看法。

博弈论的一个核心内容是以纳什自己的名字命名的———纳什均衡，指在博弈中，每个参与者即使知道了其他参与者的博弈策略，也不会选择改变自己的策略。换句话说，纳什均衡是指没有人会因为改变策略而从博弈中获益。

你或许已经知道纳什均衡的一个著名案例：囚徒困境。在这个案例中，两个人被指控获罪，要坐牢三年，但检察官怀疑两个人是共谋，要和他们做笔交易（两名囚徒不能相互沟通，都不知道彼此的决定）：如果甲承认和乙共谋，而乙不承认，甲的刑期将减为一年，乙的刑期则延长为五年，反之亦然；如果两人都供认不讳，两人都将坐牢两年。从全局来看，似乎最好的决定是两个人都供认。但是，如果两人不了解彼此的决定，但都采取明智的行动，那么，两人都会选择不供认，结果则是两人维持原判，入狱三年，尽管他们本可以选择供认以获得减刑。事实上，两名囚徒都不供认，就是一个纳什均衡，另外一种情况则恰恰相反。

博弈论

博弈论与我们生活的方方面面都紧密相关，即使是那些看似与博弈和决策无关的方面。举个例子，美国西南航空最近决定，乘客

可以付费优先登机，这样他们可以更方便地找到地方放行李。每位乘客面临的选择是一样的，所以，每位乘客在决定是否值得支付额外费用的时候，必须考虑到其他乘客的选择（目前来看，付费似乎是更好的选择）。

47 椋鸟群背后的数学

数学概念：无标度相关

你可能在YouTube上看过一群椋鸟的视频，如果够幸运的话，可能还亲眼见过活生生的椋鸟。不论如何，每只鸟之间的相互配合可能让你大吃一惊：每只椋鸟的飞行和周围的同伴是同步的（没有一只椋鸟会在右转的时候撞上周围的同伴）。另外，鸟群边缘几只椋鸟的突然性活动很快就会传遍整个鸟群，整个鸟群就像一个有机体一样同步活动，这一点可能也会让你吃惊不已。

这种行为形态被称为无标度相关性。当一群个体以这种方式被组织在一起的时候，不论群体的规模大小，每个个体的活动都会影响其他成员。在一个鸟群中，一只椋鸟的速度和方向只会直接影响离它最近的七个同伴，但它的信号很快就会传遍整个鸟群。椋鸟的行为所呈现的统计形态类似于被磁化的金属和雪崩前的冰晶（最近，一队科学家在三维空间里模拟了由122～4268只椋鸟组成的鸟群的位置和速度，建立了一个计算机模型，结果发现，椋鸟群的行为呈无标度相关性）。而且，椋鸟的密切配合根本不需要一个首领来指挥所有成员；相反，每只椋鸟都遵循简单的规则，如“和周围同伴的速度保持一致”“不要和同伴相撞”。但是，除了以上分析之外，没有人确切地知道，为什么椋鸟和其他动物会做出一致的群体行为，并且能如此快速地传递信息。

凤尾鱼

其他动物也会做出同样的行为，如成群活动的凤尾鱼，它们的转向和盘旋与椋鸟类似。凤尾鱼群的规模可能很大，据估计，2014年出现在圣地亚哥海岸的一个凤尾鱼群的成员多达1亿条。

48 让堆放井然有序

数学概念：组合学

数学甚至还会研究你的早餐。假设你在最喜欢的餐厅点了3张薄饼，可当服务员把它们端上来的时候，3张饼不仅大小不一，而且被堆放得乱七八糟，最大的在上面，最小的在中间，中等的在下面。假设要把饼重新堆放好，你要遵循这条规则：把铲子插在饼中间，翻动铲子上方的所有饼，让原来在上面的现在在下面，原来在下面的现在在上面。用这种方法把饼的次序调好，需要翻转几次呢？

假设你点了3张饼，需要翻转两次。第一次，把铲子放在最下面的饼下面，将整摞饼翻过来。此时，最大的饼在下面，最小的饼在中间，中等的饼在上面。现在，只需把铲子放在最小的饼下面，将它和中等的饼翻转过来，这样，所有饼的次序就完全调好了！

但数学家们总想找出适用于任何数量和任何摆放的一般规律。重新调整n张饼的次序，最多需要翻转几次呢（数学家将这个数字称为P_n，即翻转的次数）？如果有3张饼，且堆放的次序是最难的：最小的在上面，最大的在中间，中等的在下面，则P_n值为3（数学家们总想找出最大值，而不是最小值，因为他们想找到最大的界限）。

这个问题非常难。目前为止，数学家们最多只发现19张饼的P_n值是22。事实上，还没有人能给出一个一般的方程式，来计算调整n张饼的次序所需的最大翻转数。

薄饼日

薄饼日也被称为忏悔星期二，这一天，天主教徒可以尽情享受用糖和黄油做的食物，这一天过后就是大斋期———一个禁食和忏悔的传统节期。

49 法庭中的数学

数学概念：概率与统计、检察官谬误

逻辑谬误是指人们在推理过程中所犯的错误，推理的基础可能是事实，但结论是错误的。有时，逻辑谬误与老生常谈的数学问题“概率”有关，与概率相关的逻辑谬误甚至能帮助确定被指控犯罪的人是否被判有罪。

其中一个例子就是检察官谬误。当一个人在论证中诉诸检察官谬误的时候———在这里，“论证”不是争吵，而是指用于论述自己观点的一系列合理命题———他试图说明的是一件事发生的可能性，但在说明的过程中，他错误地将该事件与一系列不相关的事件进行比较。

举一个例子，可以帮助大家更清楚地了解检察官谬误的本质。一个典型的例子发生在1998年对莎莉·克拉克的审判中，这名英国妇女有两个几周大的孩子，被告方坚称两个孩子都死于婴儿猝死综合征，原告方则辩称，是克拉克谋杀了两个孩子。原告方的论证是基于一个家庭出现两起婴儿猝死综合征的概率之上的：婴儿猝死综合征造成的死亡本就罕见，一家出现两起更为罕见。一名专家鉴定证人儿科医生罗伊·梅多斯指出，一家出现两起婴儿猝死综合征的概率是7300万分之一，但他犯了两个错误：

第一，他忽略了两起死亡之间遗传或环境上的相关性，假定两起死亡是彼此完全独立的，但这个错误不算是检察官谬误。

第二，真正的检察官谬误发生在罗伊医生计算一家出现两起婴儿猝死综合征的概率时，他采用的对比实例是根本没有出现婴儿猝死综合征的家庭，也就是说，大量没有孩子患上这一症状的家庭。事实上，这种对比是不恰当的。

恰当的对比应该是这样的：在有两个孩子早夭的家庭中，有多少是婴儿猝死综合征引起的？有多少是谋杀造成的？有多少是谋杀和婴儿猝死综合征一起造成的？有多少是其他原因引起的？后来，英国萨尔福德

大学的一位数学教授通过计算发现，一家出现两起婴儿猝死综合征的概率是出现两起谋杀的4．5～9倍。

至于这场审判，莎莉·克拉克最初被判有罪，直到2003年才被无罪释放。

柏克森谬误

在有些情况下，分析证据的方式也可能会扭曲最终得出的结论。在柏克森谬误中，取样偏差导致人们相信本来没有关系的两个特征之间存在因果联系，其实，所谓的因果联系是取样偏差造成的。举个例子，样本中个子不高的女性可能西班牙语说得很流利，但这不能说明个子不高和西班牙语说得好之间存在联系。这两个特征看似存在因果联系，但其实这些样本可能来自一个说西班牙语的人很多的地方（比如有大量居民说西班牙语的美国城市，而不是很少有居民说西班牙语的丹麦小镇）。

50 40%的降水概率究竟是什么意思

数学概念：概率

我们常听天气预报，但它究竟是什么意思？当听到当地电视台的气象员说，明天的降水概率是40%，他到底是什么意思？

预报天气涉及概率，这是一个重要的数学分支，天气预报中预测降水的概率被称为降水概率（PoP）。但是，人们常不明白40%是什么意思，不是说40%的时间会下雨（下雪、冰雹或雨夹雪），也不是说40%的地区会下雨，而是说与明天相同条件的10天中，有4天会出现降水（反过来说，就是有6天不会降水）。

天气预报的意思还可以表达得更准确，根据负责向全国提供气象相关数据的联邦机构——美国国家气象局（NWS）的规定，40%的降水概率是指，预报区域内降水达到0．01英寸（0．16毫米）的概率是4／10。美国国家气象局计算降水概率的公式是：

$$PoP=C\times A$$

其中，*C*——预报区域的降水概率

A——降水区域所占的百分比

然而，用来计算降水概率的方法各不相同。例如，在气象频道，40%的降水概率是指，预报区域降水（不一定要达到0．01英寸）的概率是4／10，包括预测时间前后三小时，这样可以确保观众在决定是否带伞出门的时候，会趋向谨慎的一边。

整体预测

另一种方法是整体预测，综合多方预测数据，每种预测都有可能，但每种的预测条件略有差异。通过研究各种预测的差异，气象学家可以确定未来的天气有多少不确定性：初始的预测差异越大，

气象学家对天气事件（如暴风雨）的把握就越低。例如，当飓风卡特里娜在大西洋上方盘旋，尚未进入墨西哥湾的时候，对它的登陆地和在美国大陆的前进路线的预测各不相同。有人预测卡特里娜会到达新奥尔良，有人预测它不会越过墨西哥湾东部地区。然而，当卡特里娜越过佛罗里达州之后，各方的预测开始趋向一致，气象学家也更确信它的前进方向。

51 基于数学的应试策略

数学概念：算术

下次考试的时候，不妨考虑利用数学来提高分数。有趣的是，即使不是数学考试，也能利用数学来提高分数！

在《数学如何帮助你的生活》一书中，数学家詹姆斯·D．斯坦提出了一种策略，他宣称这一策略能让你的分数提高一个等级[1]（当然，前提是你上了课，学了相关内容）。第一步是了解考试的赋分规则，每个问题的分数一样吗？是不是像学业能力倾向测验那样答错了会扣分？如果答错不扣分，你应该尽力回答每个题目，即使作答的次序是随机的（斯坦的策略只适用于特定类型的试题：判断题、单项选择题和解答题，比如数学和理科考试的题型）。

斯坦建议，第一遍先做最有把握和知道怎么找答案的题目，如果一道题所花的时间超过一两秒，应该停下来，跳到下一道题。然后，数数还有几道题，考试还剩多长时间，两下相除，算出每道题应该花的平均时间。

另外，绝对不要先答最难的题目，否则，在几道题上花了大把时间，分数却不高，完全可以抓紧时间多答几道容易的题，从而提高分数。

单项选择题

别人可能跟你说过，做单项选择题，如果不知道答案的话，那就一直选“C”。这可能不是最好的技巧，尤其是当老师深知这一情况，从而让题目的选项均匀分布的时候。最好还是缩小选项的范围，在所学知识的基础上猜答案。不过，如果只有四个选项，就算瞎蒙，选对的概率也有25%。

注释

[1]英美国家的考试没有具体分数，主要分为A、B、C三个等级，A等是最好的。

52 免疫系统也会做数学

数学概念：旅行推销员问题

一般情况下，我们不会想到人体内的细胞也能解决数学问题，但最近的一项研究发现，小小的细胞竟然也会做数学。这项研究的对象是人体免疫系统里的某种白细胞，它的功能是定位和吞噬入侵的细胞（如病毒和细菌）。发现感染时，这些细胞的任务是高效地攻击入侵细胞，其实，这又是一个旅行推销员问题的例子（参见第42章），对于人体而言，这个问题远比多向几户人家推销更紧迫：白细胞越能有效地定位和吞噬入侵细胞，人体受到损害的机会就越小。

这些细胞采用的方法被称为趋化性，也就是说，白细胞通过气味追踪入侵细胞，检测出入侵细胞的化学特征，然后向它们移动。计算机模拟结果显示，当白细胞面对十个病毒或细菌时，它们攻击和吞噬这些入侵细胞的路线只比最短路线长12%。对于比针尖还小的细胞来说，这真是令人叹服！

人工免疫系统

免疫系统启发计算机科学家开创了一个全新的领域———人工免疫系统。人工免疫系统的一个主要方向是探索如何利用自然现象，如免疫系统的记忆，来解决数学和工程问题。概括来说，人工免疫系统属于人工智能领域，能激发更多的灵感和创新。

53 谷歌翻译的工作原理

数学概念：概率、计算机编程

如果你学过外语的话，一定很熟悉翻译。虽然有词典和语法知识的帮助，但语言专业的学生还是要下大功夫分析每个句子和每个词语的意思，然后确定动词的性数，找出语境线索。除非精熟于两种语言，否则这个过程会很痛苦。

然而，谷歌翻译完全避免了这些费力的工作，而是利用统计学比较源语文件和译语文件。根据联合国发布的文件———通常以六种文字发布（英文、法文、俄文、西班牙文、中文和阿拉伯文），谷歌翻译建立了一个庞大的语料库（如今，谷歌翻译的数据库包含大约80种语言），通过扫描数以亿计的文件，寻找它们的规律，研究词语通常是怎么翻译的。这一过程完全不依赖已知的定义和语法，被称为统计型机器翻译。这种翻译与数学的联系在于，它依靠的是概率：假设有A语言的一个句子，B语言的一个句子是这个句子的译文的概率有多大？

统计型机器翻译发源于信息论———研究信号处理、数据压缩和语言的一门应用数学，一般认为它诞生于工程师兼数学家克劳德·香农1948年在《贝尔系统技术杂志》上发表的一篇论文《通信的数学理论》。信息论被用于破解密码和通过手机、计算机传递信息。没有信息论背后的数学原理，你口袋里的手机就变成了一块砖头，利用基于网络的计算来翻译的神奇功能也会变成天方夜谭。

石油地震勘探

信息论对石油地震勘探也非常重要。石油地震勘探需要靠信息论来剔除不需要的噪声，即可能干扰石油区块发出的信号的数据，从而让信号更清晰。

54 不要紧跟前车行驶

数学概念：算术

车开得越快，越容易发生事故。在高速状态下，对其他车辆做出反应的时间缩短了，车辆碰撞的严重度则加重了。但是，时间究竟缩短了多少，严重度究竟加重了多少？数学能给出确定的答案，这可能会鼓励你更安全地开车。

假设你的时速是90千米，所以每秒的速度是25米，一辆车约长4．5米，相当于你每秒走过6辆车的长度（6×4．5＝27，接近25）。像很多人在驾驶课上学过的，如果时速每增加16千米，就与前车增加一个车身的距离，那么，你与前车的距离应相当于六个车身的长度（假设前车的时速也是90千米）。通过计算可以发现，如果前车突然爆胎了，你只有1秒的反应时间。

因此，紧跟前车行驶绝对不是个好主意。

盖德严重度指数

盖德严重度指数（GSI）是衡量汽车碰撞对车内人员的伤害严重度的一个指数，它的公式如下：

GSI＝*a*5/2（*t*A）

其中，*a*———加速度

t———时间（单位：秒）

人的头部能承受的*GSI*值最大为1000，前提是持续时间很短（只能以毫秒计算）。

55 巴西果效应

数学概念：颗粒对流

当你买了一罐坚果，会发现，好像有魔法一样，大的坚果总在上面———这是不可避免的。早餐麦片也是这样：大的颗粒，如美味的果仁块，总是在罐子上层，中部和底部则根本没有。这就是所谓的巴西果效应，尽管令人沮丧，但与数学有着不可分割的联系。怎么会呢？

通俗的假设认为，巴西果效应与颗粒（包括坚果、麦片、鹅卵石、弹子及其他可以混合在一起的物体）的大小有关。当一堆颗粒相互挤撞的时候，它们会上下移动，尽管距离很短。此时，颗粒之间出现了空隙，而容器边缘的其他颗粒可以移动到这里，填满空隙。但是，大颗粒不能填满小颗粒留下的空隙，结果，它们一直向上移动，直到最上层。一旦它们移动到最上层，就会停留在那里，而小颗粒则先移动到容器边缘，再落到容器底部，这个过程被称为颗粒对流（如果你看过沸腾的开水的话，就亲眼见过对流现象。温度升高时，水分子上升；温度下降时，水分子下沉）。这就是一罐坚果里的数学，对吧？

巴西果与雪崩

如今，爬雪山的人可以穿上遇雪崩自动膨胀的设备，使人和装备的体积变大，当被压在雪堆下时，更可能浮到表面。这种救人性命的设备就是充分利用了巴西果效应。

56 路多不代表流量少

数学概念：网络和系统、柏拉斯悖论

1968年，德国数学家迪特里希·柏拉斯发现，网络系统存在一个似乎违背常理的特点。如今在德国波鸿市鲁尔大学任数学教授的柏拉斯在研究交通流量的时候发现，在某些情况下，当车流拥堵时，增加道路只会让情况恶化。相反，如果减少拥堵区域的道路，车流则变得更顺畅。这一发现不仅违背常理，而且与城市规划的初衷背道而驰。为什么？

柏拉斯的一个核心发现是，司机是自私的，不会配合其他司机的行车计划，所有人都想走A点到B点的最短路线。举例来说，假设从市中心开车到郊区的一家商场有两条路，每条路都包括两个路段，其中一段路，司机任何时候都可以在30分钟内驾车走完；另一段路窄一些，所以走完它要花的时间取决于路上的车辆有多少（假设走完第二段路要花的时间等于$T/5$，T表示这段路上的车辆数）。同时，假设从市中心到郊区商场的两条路都包括两段路，但两段路的顺序恰恰相反（也就是说，在道路A上，较窄的路段在30分钟可以走完的那段路前面，道路B则相反）。

那么，200名司机从市中心到郊区商场需要多久？鉴于两条路的路况完全相同，唯一的区别在于两个路段的顺序刚好相反，我们可以假设，选择两条路的司机各占一半，所以每条路的行程需要50分钟。

两条路上的司机都没有理由选择另外一条路，因为节省不了任何时间（这种情况下，如果有很多个体，每个个体都清楚别人在自己的处境下会怎么做，没有一个有理由改变其策略，这些个体就处于所谓的纳什均衡，参见第46章）。

现在，假设市政府在这两条路之间修了一条近道，这条近道恰恰位于两个路段的交点，穿过它几乎不花任何时间。这时，司机可能就有理由走同一条路了：他们可以先走道路A的$T/5$段，穿过近道，再走道路B的$T/5$段（这条路线将呈之字形）。当然，为了节省时间，所有司机都想走这条路，也就是说，最后所用的时间将是80分钟（200／5＋200

／5）。所有的司机都明白抄近道有可能缩短行程时间，所以都想走这条路，结果交通却更拥堵了。

减少道路选择有助于改善交通状况这一认识已被应用到真实的城市中，包括韩国的首都首尔。2005年左右，首尔拆毁了穿过市中心的一条六车道高速公路，改成一座5英里长的公园，该市的交通模式于是有了大幅度的改观，因为车辆被分流到了已有的道路上。这一结果看似有违常理，实则体现了数学智慧。

输电线

柏拉斯悖论不仅适用于交通领域。在2012年发表的一篇论文中，马·普动力学与自组织系统研究所的科学家指出，增加电网输电线不一定能提高电网的性能；相反，新增加的输电线可能影响电网的稳定性，这取决于新电线与已有电线的相对位置。因此，有时候输电线越少，电网的效率越高。

57 一张纸能折多少次

数学概念：指数增长、床单问题

拿一张纸，对折一次，再对折一次，你觉得可以对折多少次？这个数学难题虽然被称为床单问题，但同样适用于纸、毛巾、铝箔、面条以及其他可以对折的东西。过去很多年，数学家一致认为最多只能对折七次，直到2002年，美国加州波莫纳市的一个高中生布兰妮·加利文用一张4000英尺长（约1219米）的厕纸创下了对折12次的纪录。她是先计算了这么对折需要多长的纸，然后才开始对折的，而且只朝一个方向对折。

这说明了什么？把某种薄片物一次又一次地对折，有助于我们理解指数增长。当一个尺码或数字呈指数增长时，它每一步都以一个固定的指数递增，由于基数每次都会变大，最终的数字很快就变得很庞大。举例来说，取一张约1／10毫米厚的普通活页纸，对折一次，这张纸的厚度将变为2／10毫米；对折两次，它的厚度将变为4／10毫米；对折25次后，它的厚度将达到1000米。对折42次后，它的厚度将相当于地球到月球的距离；对折81次后，它的厚度将达到127786光年；对折103次后，它的厚度将超过可见宇宙的距离（约为930亿光年）。

厕纸问题

计算机科学家唐纳德·孔茨曾发表过一篇有关公共建筑里的双筒卷纸机的论文，他将使用者分为两类：选择大筒的使用者会先选择大纸筒上的厕纸，选择小筒的使用者会先选择小纸筒上的厕纸。这篇论文利用不同的数学公式，研究了两类使用者的概率，以及这一概率对纸筒上所剩的厕纸量的影响。

58 真的有更好的登机方法

数学概念：效率

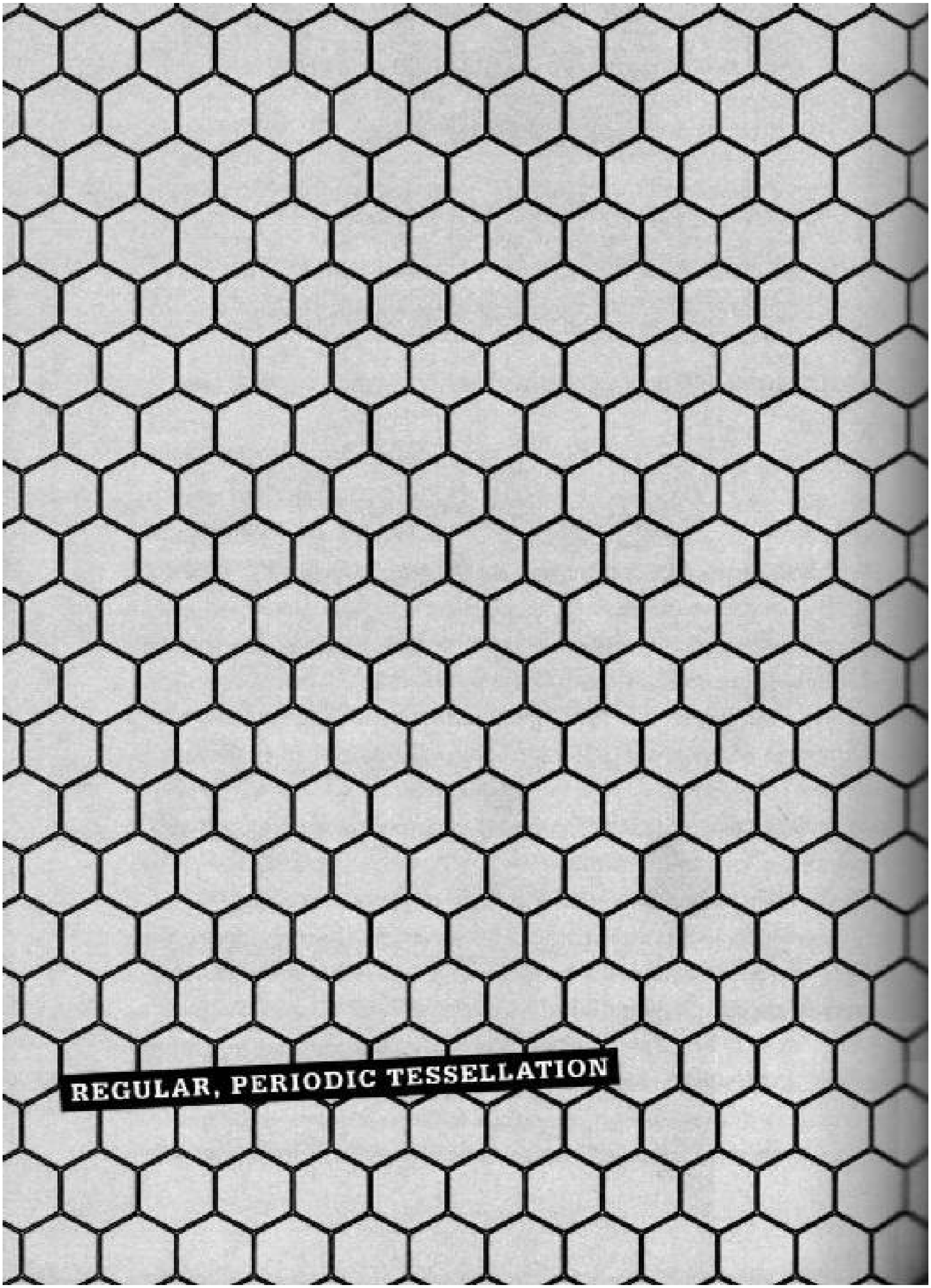
从洛杉矶飞到纽约只需要五个小时，这堪称一个奇迹，但漫长的登机过程让这个奇迹变得有些许乏味。乘客们常成群登机，从后门往前门走，尽管这个方法是为了避免拥堵，但由于乘客要把随身行李放在行李架上，前进的队伍不可避免地被延误。另外，靠窗座位上的乘客通常要等中间座位和靠过道座位上的乘客起身，才能入座。所有这些因素都让疲惫不堪的旅客感到头疼，浪费的时间也会给航空公司带来额外的成本。

数学家们绞尽脑汁，试图缩短登机时间，终于想出了一个办法。它的秘诀首先在于间隔和座位类别，即先让奇数排的乘客登机，这样需要放行李的乘客中间总有一排是空着的，给了他们移动的空间。另外，在奇数排的乘客中，应该先让靠窗座位的登机，然后是中间座位，最后是靠近过道的座位上的乘客，这样可以确保乘客无须越过他人入座，从而最大限度地缩短了就座时间。偶数排的乘客也是如此。模拟结果显示，这一方法十分有效，所花的时间只有现有登机方式的1／16。那么，为什么航空公司不采用这种经过数学证明的方法呢？或许数学家们下一步可以研究如何回答这个问题。

美国西南航空公司

美国西南航空公司不分配座位，乘客可以根据登机牌上的号码，自由选择喜欢的位置（这个号码是乘客办理登机手续时分配的，如果额外付费的话，乘客可以得到一个更好的登机号码，参见第46章）。考虑到计算公式的随机性，目前尚不清楚不分配座位这种方法是否更有效。

第三部分 图　　案



REGULAR, PERIODIC TESSELLATION

59 铺嵌

数学概念：几何学

宿舍墙上挂着的M．C．埃舍尔的画与数学有着密切的联系，这可能出乎你的意料。埃舍尔的画利用了铺嵌，即用一些几何形状覆盖一个二维平面，如一张纸，形状之间既没有空隙，又不会相互重叠。正如埃舍尔的画作所示，这些形状不一定是三角形或正方形，也可以是鸟、角、鱼或斑点。其实，拼图游戏也是一种铺嵌，每块板要组成完整的图形，中间不能有空隙，也不能相互重叠。铺嵌不仅出现在埃舍尔的画里，从西班牙阿尔罕布拉宫的瓷砖，到六边形的蜂巢、古罗马建筑的地面和墙上的几何图形以及被褥上的形状，铺嵌无处不在。

铺嵌也成了数学的肥沃土壤。几百年来，数学家们发现，铺嵌有着独特的形式：

●有些铺嵌是周期性的，或者说图形是会重复的；有些是非周期性的，或者说图形不会重复。

●有些铺嵌是规则的，由一个规则的多边形（即所有的边长和夹角相等，如正方形）不断重复而成的。

●还有些铺嵌是半规则的，也就是说，它们是由一种以上的规则多边形组成的。

对铺嵌的分析还可以更进一步。1891年，俄国结晶学家伊娃格拉夫·费德洛夫证明出，周期性的铺嵌有17种，半规则的铺嵌有8种。

这一切都说明，数学不仅仅是计算而已，它也研究美妙的形状。

摩里茨·科奈里斯·埃舍尔

平面艺术家摩里茨·科奈里斯·埃舍尔生于荷兰，未能通过建筑系的入学考试，后来，他参观了14世纪摩尔人的宫殿———阿尔罕

布拉宫，从中受到启发，从此开始专注于铺嵌设计，接下来的事大家都知道了。

60 领带的177 147种打法

数学概念：几何学、拓扑学

对数学的启发可能来自任何地方。举个例子，米卡埃尔·韦德莫约翰松是斯洛文尼亚约瑟夫·斯特凡研究所的一名数学家，在看《黑客帝国》的时候受到了启发，他注意到，梅罗文加打领带的方式不同寻常，其中一种尤其引人注意，看起来像是领带自身也打着领带。这引起了米卡埃尔的好奇，经过研究，他发现剑桥大学的一个研究团队曾发表过一篇有关打领带的数学的论文，这两名研究者将打领带的动作分解成一系列可以用符号表示的步骤（L代表左，C代表中间，R代表右，i代表按照示意图打领带的动作，o代表不按照示意图打领带的动作，T代表穿过领带结的动作）。根据整体的步骤数，他们发现了101种可能的打法，根据中间位置的步骤数，他们发现了85种可能的打法。

然而，问题是梅罗文加的打法竟然没有出现在他们的结果中。韦德莫约翰松发现，剑桥大学的研究者毛勇和托马斯·芬克在限制可能的打法时做了两个假设：第一，所有的领带结必须被领带的平面所覆盖；第二，翻折的动作必须是最后一步。韦德莫约翰松发现，如果简化表示打法的形式语言，将领带一端绕另一端的次数从8次增加到11次，可能的打法将有177147种。他和同伴共发现了2046种缠绕的方法，需要11步才能完成。

下次如果你厌烦了现在打领带的方法，不要忘记你有太多种选择，可能一辈子都用不完！

领带结

最简单的打法是四手结，它可能是你最先上手的打法。另外一种更复杂的打法是温莎结，因温莎公爵而闻名，最适合宽领的衬衫。

61 音乐与数学鲜为人知的关联

数学概念：数论、比例

音乐和数学之间一直都有着密切的联系。从毕达哥拉斯时代到古希腊，从巴赫的作曲（有时听起来像是被转换成声音的定理）到复杂的乐谱（满是四分音符、音阶和节拍），音乐与数学的联系少有其他领域可比。从某种意义上说，音乐的数学性是显而易见的———数字在音乐中无处不在。例如，有些风格的音乐是4／4拍，华尔兹是3／4拍，而有些斯拉夫音乐则是12／16拍。有的音，音长为一个音节，而有的音只占一个音节的1／16。节奏是指每分钟的拍数，节拍可以让音乐家知道，每个音节中有多少拍，以及每拍是什么音符。不论怎么看，音乐中都充满了数学。

从另一种意义上说，音乐的数学性又不是显而易见的，但数学仍是全世界所有音乐的基础。这种不可思议的数学特征正是音程的特征，在钢琴上同时弹奏两个音阶，弹出的音阶组合要么悦耳要么难听，要么饱满要么尖细。

最动听的一个双音阶组合（或者说音程）是八度音程，即两个间隔一个或半个八度的音的组合。看一下钢琴键盘，八度音程的一个例子就是同时弹奏中音C和与其紧挨着的高音C或低音C（这两个C音之间隔着六个白键）。八度音程也可以用比率来表示，八度音程中一个音阶的频率是另一个音阶的2倍，两个音阶的比率就是2∶1。其他音程也有各自的比率，以及“完美”“升调”“降调”这样的形容词（“完美”常指那些大部分人听起来十分悦耳的音程，“升调”指增加了半音程的完美音程。例如，同时弹奏C和G，就会形成一个完美的五度音程，同时弹奏C和升G则会形成一个增五度音程———升G即在G的基础上增加一个黑键或半个音程）。完美的五度音程的比率是3∶2，而完美的大三度（由四个半音程组成）的比率为5∶4。思考音程的比率有助于我们揭示每天听到的音乐背后的数学。

难听的音乐

数学家斯科特·里卡德利用20世纪50年代改善海军声呐的技术，创作了一段完全没有规律但并非随机的音乐，他将其称为“全世界最难听的”音乐。

62 围棋

数学概念：组合学

很多游戏都有赖于数学的支撑，但也许没有哪一种能有围棋那么高雅。围棋虽然是距今大约4000年前由中国人发明的，但如今它在中国、日本和韩国依然十分流行，而且正逐渐进入西方人的视线（举个例子，美国围棋协会直到1935年才成立）。围棋的规则很简单：一方执黑子，另一方执白子，木制的棋盘被分成一个19×19的方格，也就是说，由19行和19列组成的一个方格。双方在方格线的交叉点上落子，目的是攻占和守卫各自的领地。当一方用自己的棋子围住对方的棋子，即可俘获它。一旦被包围，被围住的棋子即从棋盘上取走。

围棋与数学的关系密不可分。举个例子，围棋的点数超过2× 10170个，这听起来是个十分巨大的数字，已知宇宙中的原子数才不过1084个。拿围棋和国际象棋相比，也会出现巨大的数字，当计算机程序下国际象棋的时候，它最多可以提前七个回合预测每一步的结果，但如果让计算机程序来下围棋，它很快就会超载。下国际象棋的时候，计算机可以筛选分析每一回合的600亿种可能，可要在围棋中预测七手的结果，计算机就要筛选分析10万亿种可能。

围棋游戏也催生了全新的数制。1970年，剑桥大学的数学家约翰·康威研究了两位大师的一场棋局，最终提出了超实数。你可以把超实数当成我们在数轴上通过一系列上下移动而得到特定数的一套指令。所有实数，包括整数、分数、正数、负数和无理数，都算是超实数，但也有些超实数并非实数。实际上，超实数是一套新的数，就像有理数和整数，是我们在数轴上通过一系列上下或左右移动而得到的数。欧米伽即是一个特别大的超实数，它被定义为在数轴上向右无限移动，最后得到的数（欧米伽是最小的超实数，但大于所有的实数）。总之，围棋是推动我们发现数学的动力，对全世界数百万人而言，它都是一场数学盛宴。

奥赛罗棋

奥赛罗棋是一种类似围棋的游戏，是两个英国人在19世纪80年代发明的，最初被称为翻转棋，实际上它和围棋有很大的差别。在围棋和奥赛罗棋中，双方都要把对方的棋子包围起来，在奥赛罗棋中，被围住的棋子（一面是黑的，另一面是白的）要被翻转过来，而在围棋中，被围住的棋子仍然保持原来的颜色。另外，奥赛罗棋的棋盘是一个8×8的方格，比19×19的围棋棋盘小得多。

63 棋盘与麦子

数学概念：几何数列

传说，印度舍罕王朝的宰相西萨·班·达依尔发明了国际象棋之后，舍罕王对他的发明极为满意，问他要什么赏赐，他的要求看似小菜一碟：在棋盘的第一个方格里给他一粒小麦，在第二个方格里给他两粒小麦，第三个方格里给他四粒，如此下去，每一格内放的小麦粒数比前一格多一倍。我们可以用下面这个加法公式来表示：$2^0+2^1+2^2+2^3+\ldots+2^{63}$（最后一个指数之所以是63，是因为虽然棋盘上有64个方格，但第一个2的指数是0，而不是1）。这个加法公式被称为几何数列，它的底数始终是2，指数则逐渐递增。初看之下，它的和应该不会很大，但其实是个天文数字。实际上，他最后的结果和解决有64个圆盘的汉诺塔问题所需的步骤数是一样的——18446744073709551615（参见第64章）。假设1吨小麦有1亿粒，达依尔要的赏赐约等于2000亿吨小麦，这将是个大得惊人的数量。

刘易斯国际象棋

全世界最酷的国际象棋收藏之一是刘易斯国际象棋，它由93颗可以追溯到12世纪的棋子组成，于1831年在苏格兰刘易斯岛被发现。它用海象牙和鲸鱼牙雕刻而成，似乎受到了北欧的影响——其中的“车”状似手持盾牌的士兵，就像维京暴汉。

64 汉诺塔

数学概念：递归、几何级数

有时候，简单的规则可能产生大得惊人的数字，比如汉诺塔——由三根垂直的柱子和一摞圆盘组成的玩具，每个圆盘中间都有一个孔，套在一根柱子上。每个圆盘的大小不同，最小的在最上面，最大的在最下面。游戏的目标是将一根柱子上的圆盘按照大小顺序重新摆放在另一根柱子上，并且规定，一次只能移动一个圆盘，小圆盘不能放在大圆盘下。

实现这一目标所需的步数体现了递归的规律。移动第一块圆盘需要一步，接下来每块圆盘所需的步数都是前一块的2倍。如果有足够多的圆盘，最后的数字将会大得惊人。举个例子，由W．W．洛兹·波尔所著、H．S．M．考科斯特编辑的《数学趣味论文集》中讲了一个传说：印度有一座由三根金刚石柱子组成的汉诺塔，第一根上面套着64个黄金圆盘，最小的在最上面，下面的一个比一个大。勃拉玛的信众负责看管这些黄金圆盘，根据前面提到的简单规则，他们不倦地把它们从这根柱子搬到另一根柱子上。当他们把整摞黄金圆盘从一根柱子移到另一根柱子上，这个世界将会终结。

完成这项任务需要多久呢？如果每一步需要1秒，而且这些信众从不休息，那么将整摞黄金圆盘从一根柱子移到另一根柱子上将需要18446744073709551615秒，约相当于58兆年，远比宇宙的年龄（大约只有130亿年）长。所以，大得惊人的数字真的有可能蕴藏在简单的规则里。

流行文化中的汉诺塔

汉诺塔也可能成为推广流行文化的工具。在1966年的《神秘博士》第三季中，天朝玩具制造商逼迫博士玩了一个由10块圆盘组成的同类游戏，它共需1023步，在剧中被称为三部游戏。在2011年的电影《猩球崛起》中，这个游戏被称为卢卡斯塔，用来测试猩猩的智力。

65 鸽巢原理

数学概念：鸽巢原理、组合学

千万不要低估简单的想法，因为这些想法有时候会产生广泛的影响，鸽巢原理便是其中一个，它是1834年由德国数学家彼得·古斯塔夫·勒琼·狄利克雷首次提出的。根据这一原理，如果有三个鸽巢和四只鸽子，要求把所有鸽子全放进鸽巢里，那么，某个鸽巢要容纳的鸽子必然超过一只（我们并不知道每个鸽巢里究竟有几只鸽子，甚至每个鸽巢里是否有鸽子。我们只知道，至少有两只鸽子会在一个鸽巢里）。如果要对这一原理进行更一般的解释，而不仅限于鸽子（这一原理也可以用奶牛、火鸡、足球或其他物体来解释），可以假设有N个格子和M个物体，且M大于N，那么，其中一个格子容纳的物体必然多于一个。

我们也可以利用鸽巢原理来解释世界。举个例子，假设你有一袋M＆M巧克力豆，一半是红色的，另一半是褐色的，要确保你手上至少有两颗是同样颜色的，你至少需要从袋子里拿出多少颗巧克力豆？（答案是三颗。一开始可以选择两颗同样颜色的，也可以先选择一颗红色的和一颗褐色的，这时，无论第三颗选择什么颜色的，都会有两颗是同样颜色的。）在这个场景中，可以把鸽巢想象成两个盒子：一个盒子装红色的巧克力豆，另一个装褐色的巧克力豆。我们需要知道，要确保其中一个盒子里有两颗，我们至少需要从袋子里拿出多少巧克力豆？

我们也可以利用鸽巢原理来证明纽约人当中一定有两个人头上的头发数量完全一样。每个人的头上约有10万根头发，生活在纽约的人约有800万，一个人的头发数量有10万种可能，可以说相当于10万个鸽巢，而纽约的800万人口相当于800万只鸽子。所以说，我们有10万个鸽巢和800万只鸽子，因此我们可以确定，至少有两只鸽子（或两个人）是在同一个鸽巢里，或者说至少有两个人头上的头发数量是一样的。

议会中的鸽巢

鸽巢也可能出现在跟鸽子或数学毫无关系的情景中。在议会里，“鸽巢”[1]一个议案是指将它搁置，比如放在一个分类架上，暂

时不予理会。

注释

[1]英文中的“pigeonhole”一词做名词指鸽巢，做动词则表示搁置的意思。

66 迷宫

数学概念：图论、拓扑学

迷宫长期以来都是流行文化的一部分，从忒修斯和弥诺陶洛斯的神话，到中世纪教堂里供人沉思的迷宫，从乡村社区秋天的玉米地迷宫，再到《迷宫》和《移动迷宫》这样的电影。迷宫本身不仅美妙有趣，同时也是一个数学研究对象。

对迷宫的研究属于图论和拓扑学领域，这两个领域主要以图的形式来研究物体（很像第9章中对地铁线路的分析）。如果将迷宫想象成一个抽象的物体，忽略它的迂回弯曲、墙的高度以及脚下土地的质地，它就像一条通道，在某些点上出现，指向新方向的岔路。我们可以将这些点称为节点，将连接相邻两个节点的通道称为棱线。从高处俯瞰一个迷宫，我们可以做笔记，再画成只有节点和棱线的图。给节点标上号之后，我们可以更清楚地看到走出迷宫的路线。

18世纪的瑞士数学家莱昂哈德·欧拉率先进行了这种研究。他解决了哥尼斯堡七桥问题，从而开创了图论这一领域。这个问题是以普鲁士一座真实的城市哥尼斯堡为基础的，普雷格尔河流经哥尼斯堡，河的中心是一座岛，流经这座岛之后，河流分成两个岔道，共有七座桥连接河岸和这座岛，当地人好奇是否有一种方法，可以只通过每座桥一次，再回到起点。欧拉将桥、岛和河岸抽象成了一个只有节点和棱线的网络，最后证明这样的路线根本不存在。

弥诺陶洛斯

> 有一种被称为魔幻迷宫的迷宫，只有一条通道直接从入口通向迷宫中心。传说大约3000年前，弥诺斯王在克里特岛的克诺索斯宫下面建了一座有名的魔幻迷宫，据说是为了困住弥诺陶洛斯——弥诺斯王后和牛的产物。弥诺斯强迫雅典人民每年给他进贡七对童男童女，然后把他们送进魔幻迷宫，供弥诺陶洛斯食用。忒修斯决定结束这可怕的一切，他自愿成为贡品，当他被带到弥诺斯面前，弥诺斯的女儿阿里阿德涅公主爱上了他，公主给了他一个线团，让

他在迷宫里找到了回来的方向。忒修斯斩杀了弥诺陶洛斯，逃出了迷宫，但在回去的路上，他忘记将黑帆换成白帆（他与父亲事先约定的信号，表示他杀死了弥诺陶洛斯）。结果，忒修斯的父亲埃勾斯看到船上的黑帆，悲痛不已，跳海自尽了。

67 解开数独需要几条线索

数学概念：数字谜题

					4	9		6
5		6	3	9			1	
					6			
8			4			3		5
	6		5		2		4	
3		4			8			2
			6					
	4			2	3	8		1
1		3	8					

数独可能是美国人最喜欢的消遣之一，但它不仅仅是度过几分钟（或几小时）闲暇时光的一种方式，这种让人入迷的数字游戏背后也蕴含着一些有趣的数学知识。

数独由一个9×9的方格组成，每个方格又分为3×3个小方格（类似大号的松饼烤盘）。玩家需要在每个小方格里填满1～9九个数字，同时，每个数字在大方格的每一行和每一列只出现一次。另外，在每个3×3的小方格里，每个数字只能出现一次。方格里有数独设计者事先输入的一些数字（参见下图），是引导玩家解开数独的线索。数独还有一个特点———每个数独只有唯一一个解。

都柏林大学的盖里·麦克奎尔领导的一个数学团队发现，要让一个数独有唯一的解，最少需要17条线索，如果少于17条，数独的解将不是唯一的。但麦克奎尔及其团队未能找出证明方法，相反，他们只是利用计算机计算出所有的可能性。事实上，他们在都柏林的爱尔兰高端计算中心花了约700万小时的运算时间，用上了所有的计算机，因为数独可能的解的数量是个庞大的数字———6670903752021072936960。好在这些研究人员根据不同的解在数学上相等的原则，设计了一个算法，在这

个算法的基础上，将这个数字缩小到了可控的大小。

这一切都说明，即使是当地报纸上的一种消遣方式，背后也充满了有趣的数学知识。

NP完全问题

2002年，数学家们宣称数独是NP完全的（NP表示非确定性多项式时间）。什么意思呢？实际上，数独没有快速简单的解法，即便确定已知的解法是否正确很简单。

68 梵高画里的数学图案

数学概念：湍流

《星夜》是文森特·梵高最美、最有名的作品之一，然而最近，它为人所知的不仅是它的美，更是它背后的数学。

事实上，《星夜》和《麦田里的乌鸦》《有丝柏的道路》（梵高的另外两幅画）的旋涡状图案与湍流惊人地相似。湍流是发生在河流涡旋或升起的烟雾中的一种运动，也会出现在流经管道的流体中，当大气中的冷空气和暖空气混合产生湍流，会导致我们坐飞机时有时感到颠簸。尽管湍流很常见，但用数学来描述它却是十分困难的。要描述湍流，数学家们首先要理解纳维斯托克斯方程的解，它诞生于19世纪，是用来描述流体运动的。（有一个关于湍流和物理学家维尔纳·海森堡的故事，当被问及如果有机会遇见上帝，会对他说些什么，海森堡回答说："要是见到上帝，我会问他两个问题：为什么有相对论？为什么有湍流？我相信他一定知道第一个问题的答案。"）

为了确定《星夜》中的图案是否符合湍流的特征，科学家们检测了梵高的画笔留下的颜料的亮度。他们研究了这幅画的电子版，对比了图片像素点的亮度，结果发现，它的亮度符合苏联数学家安德烈·柯尔莫哥洛夫20世纪40年代提出的方程，这个方程是他在利用统计学研究湍流时提出的。梵高画笔的旋转中竟然蕴含着如此深刻的意义。

安德烈·柯尔莫哥洛夫

安德烈·柯尔莫哥洛夫生于1903年，他的父亲是一名农业科学家。柯尔莫哥洛夫兴趣广泛：在数学领域，他主要研究概率、拓扑学、湍流等，同时致力于对苏联历史和教育改革的研究。柯尔莫哥洛夫于1987年逝世。

69 穿过一个房间堪称数学壮举

数学概念：芝诺悖论、无穷性、无穷数列

如果你现在正坐着，站起来走几步。这个简单的动作———从一个点移动到另一个点，曾是2000多年前埃利亚的芝诺的数学和哲学思考的对象。芝诺生活在古希腊，据传和苏格拉底在同一个时期，但有关他的生平并没有太多可信的记录。芝诺以提出一系列悖论而闻名，他的悖论旨在刺激我们思考与自己所生活的世界相关的一些常识。他提出的悖论涉及运动和时间，所以也包含有关无穷性的数学知识。

芝诺有关运动的第一个悖论提出，运动是不可能的。假设你想从椅子旁走到门口，这时，你必须要到达这两个点之间的中点，但在到达这个点之前，你先要到达另一个点，即你的起点和刚才提到的中点之间的中点。因此，要走完任何一段距离，都必须穿过无穷段距离，而无穷多个任务是不可能完成的，所以，这个悖论提出，你永远无法到达门口。

这个悖论存在了几百年之久，因为人们不清楚如何驳倒它。它的基础是，空间是由无穷多个单位组成的，它的提出似乎就是为了指出与这一假设相关的问题。亚里士多德指出，两点之间的距离并非由实际的无穷个点组成，而只是一种潜无穷。

直到最近，数学家们才解决了这个问题。从椅子旁到门口的距离可以用下面这个收敛数列来表示：1／2＋1／4＋1／8＋1／16＋1／32＋…数学家们已经证明，虽然这个数列是无穷长的，但它最终会收敛为一个有穷的数字———1。实际上无穷个小单位可以组成一个有穷的整体这一概念正是微积分的基础，它可以让我们计算曲线下部的面积。

现在，当你走到门口，应当感激这项壮举背后长达几百年的数学推理。

量子芝诺效应

在基于原子量子力学特性的实验中，科学家可以让原子在某个

时间静止，这个现象被称为量子芝诺效应。在特定时间段内的几个时间点，通过观察一个原子，科学家可以防止原子衰变，让它成为芝诺“飞矢不动”的真实版本（在这个悖论中，芝诺以射出的箭为例，指出在一个特定的瞬间，这支箭占的空间完全等于它的长度，由于任何时间段都是由无数个瞬间组成的，芝诺提出，这支箭是静止不动的，也就是所谓的飞矢不动）。

70 信息论

数学概念：信息论

每过不久，就会出现一个改变历史的数学家，克劳德·香农就是其中之一。20世纪中叶，香农曾在贝尔实验室工作，后到麻省理工学院任教，他还是一名对通信深感兴趣的电子工程师。有了他的研究，信息论才得以建立，有了信息论，数字计算机、互联网和光碟才成为可能。同时，他推广了“比特”这个术语，即“二进制数字”的缩写，换句话说，香农让未来成为可能。

在麻省理工学院读硕士期间，香农发现，模拟计算机和电话网络的开关电路与布尔代数有着相似的结构（参见第77章）。闭路可以代表逻辑值“真”，开路可以代表逻辑值“假”。也就是说，香农发现我们可以掌握机器的逻辑原理，我们可以利用开关和电路来解决逻辑和数学问题。这一发现促使香农在1938年写出了他的硕士学位论文———《继电器与开关电路的符号分析》，如今，这篇论文被称为20世纪最重要的硕士论文。

后来，在“二战”期间从事密码破解时，香农开始对远程通信感兴趣，他在这方面的思考最终形成了一本书，于1949年出版，书名为《通信的数学理论》。在这本书中，他研究了通过电线传送信息的固有问题———距离越远，信号失真度越大、噪声越多。但是，如果把信息转换成由1和0组成的基本单位“比特”，就可以在电线另一端轻易地重构失真的信息，因为1和0很容易区分。可以通过这两个数字传送的信息包括视频、照片、音频和电子邮件，基本上就是任何可以通过互联网传输的东西。

香农也将比特和熵的概念，即特定信息中包含的信息量，联系了起来。下面是他提出的一个有名的方程式：

$$H(X) = -\sum p(x) \log p(x)$$

下次发电子邮件的时候，不要忘了克劳德·香农。

密码

从专业上讲，密码是一个完善的信息编码方式。一个例子是代用密码，一些字母以规律的方式代替其他字母。有些代用密码甚至使用多重字母表。20世纪初期，出现了电机密码，如德国的英格玛密码机，它由机器而不是人来执行替换。

71 社交媒体的嫉妒

数学概念：友谊悖论

社交媒体是当今社会的一个重要组成部分。可能你同时使用Twitter和Facebook，或许你也用Pinterest和Instagram。自Friend ster出现以来，社交网络的受欢迎程度大大增加。然而，社交媒体虽然有其优势——让你和各地的朋友熟人保持联系，但研究发现，它也会降低使用者的自信心。当人们浏览朋友的网页，看到他们在国外度假的照片、有关升职或加薪的状态，或者新车新房的图片时，人们开始缺乏信心：为什么自己的生活没有朋友的那么好呢？

这种现象一般被称为友谊悖论。1991年，社会学家斯考特·费得在研究社交网络（当时社交还与计算机和互联网无关）的时候发现，在任何一个朋友网络中，甲的朋友总是比甲有更多的朋友，或者说，你朋友的朋友总比你的朋友多。为什么呢？如果我是你的朋友，你是我的朋友，那么我们两个各有一个朋友，这样看来，友谊似乎是平衡的。

友谊悖论的原因在于朋友网络的结构。在任何一个网络中，部分人比其他人更受欢迎，这些人往往比同一网络中的其他人有更多的朋友。因此，从这个网络中随便选一个人，他是这些受欢迎的人的朋友的概率很大。毕竟，受欢迎就意味着有很多朋友，比起那些只有两个朋友的人，你更可能是一个有40个朋友的人的朋友，你是40个朋友当中的一个的概率比是两个朋友中的一个的概率要大。这个理论适用于同一网络中的大部分人，而之所以会出现友谊悖论，是因为友谊的本质和计算的原因。

这些和社交媒体有什么关系呢？友谊悖论不仅适用于面对面的网络，同样适用于电子网络。因此，有很大概率你在Twitter上关注的人的关注者比关注你的人要多，你在Facebook上的大部分朋友比你有更多的朋友。根据两名科学家最近的一项调查，友谊悖论被进一步拓宽了——你的朋友不仅比你有更多的朋友，而且他们可能比你更富有，更幸福。法国图卢兹大学的翁永昊和芬兰阿尔托大学的乔杭玄分析了科学家的网络，只要一起写过研究论文的科学家就被放在一个网络中，翁永

昊和乔杭玄发现，在任何一个学术网络中，科学家甲的朋友总是比甲有更多的朋友，他们还发现，甲的朋友的被引用量和出版量也比甲多。翁永昊和乔杭玄确定了这类网络的数学特征，并且发现，如果一个悖论出现在一个网络中，当这些特征满足特定条件时，这个悖论将不仅适用于网络的一个特征，也就是说不仅适用于朋友或被引量的多少，财富和幸福也满足这样的条件。

所以说，下次浏览社交媒体感到不自信时，切记其他大部分人都跟你有一样的感觉。

取样偏差

友谊悖论体现了取样偏差。因为你的朋友倾向于交往本来就有朋友的人，所以这些朋友可能会比你有更多的朋友。你的取样方式可能导致样本呈现特定的特征。还有一个例子是所谓的穴居人效应，因为人们在洞穴里发现了早期人类的很多踪迹，所以很容易得出结论：人类的祖先主要是穴居人。但是，早期人类在洞穴外留下的踪迹可能早被冲刷不见了。这个例子中的样本———洞穴里的遗迹，使结论出现了扭曲。

72 录音如何变成数字音乐文件

数学概念：傅里叶变换

谁知道iPod和数学有着密切的联系呢？事实上，当你把歌曲下载到电脑上，或者在MP3播放器上播放数字音乐文件时，都是在利用被称为傅里叶变换的数学公式。

这个名称听上去有些怪异，但可以把它想象成一个工具：大体上，它可以将复杂波分离成简单波，将简单波合并为复杂波，这些波几乎可以是任何形式的波，包括声波和光波。当录音工程师要把录音转换成MP3文件时，他们利用傅里叶变换过滤出声波的单一频率，并标注这些频率在各时段的波幅。然后，如果要将文件压缩，便于通过互联网传输，他们可以去掉人耳听不到的频率。但是，在黑胶唱片上刻录的还是完整的声波，各个频率都是完好无损的。

人耳也可以进行傅里叶变换。在任何一个时刻，一个单一的复杂波进入人耳，会引起鼓膜振动，产生大脑可以分析解读的电波。但我们永远听不到这个声波，相反，我们听到的是左边的人在打电话，右边的公交车在对着一辆汽车鸣笛，头顶的鸟儿叽叽喳喳地叫着在树上盘旋。那个单一波被分解成了不同的部分，让我们可以分辨单一的频率和声音，从而更好地与世界交流。

傅里叶变换也出现在建筑中，尤其是在地震频发的区域。和其他物体一样，小镇或城市里的每栋建筑也都以各自的自然频率振动。如果城市里的一栋建筑受到地震的影响，并且地震引起的振动与建筑的振动频率一样，建筑的振动将会被放大，被毁坏的概率也更大（振动的频率和强度是两个不同的度量）。为了预防建筑被毁坏，工程师可以利用傅里叶变换分析特定位置的地震频率，“调整”建筑的频率，确保它的频率不会和可能在该区域发生的地震的频率相同。理论上，数学可以防止城市毁于一旦。

让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶

傅里叶变换是以1768—1830年的法国数学家让·巴普蒂斯·约瑟夫·傅里叶的名字命名的。他在研究固体间传热的时候提出了傅里叶变换。

73 一张地图需要几种颜色

数学概念：四色定理

不论你是喜欢谷歌地图，还是喜欢传统的纸质地图，地图几乎无处不在都是一个事实。各种地图既实用又方便，尽管有时候很难折叠。而且，它们通常非常美观（可以看看中世纪的地图，了解一下地图的艺术性）。另外，地图也是产生最有名的数学问题———四色定理———的源头。

四色问题是一个名叫弗朗西斯·古德里的英国大学生在1852年试图给英国地图上色的时候提出的。他发现自己只需要四种颜色，于是好奇这一规律是否适用于所有的地图，包括那些尚未被制作出来的地图。具体而言，古德里好奇我们是否需要四种以上的颜色来完成一幅地图，同时确保相邻的区域（村、州、国家，等等）不会是同样的颜色（所谓的相邻区域是指有一条边界线的区域，只有一角相接的区域不算，比如犹他州和新墨西哥州）。直到1976年，也就是古德里提出这一问题124年后，美国伊利诺伊大学香槟分校的数学家肯尼斯·阿佩尔和沃尔夫冈·哈耿才证明了这个问题。尽管这是一项有着重要意义的成就，却在数学界引起了争议，因为这项证明利用了计算机。

格勒奇定理

德国数学家赫伯特·格勒奇证明了四色定理的一个拓展问题：根据格勒奇定理，在一张平面图中，只要不存在三角形（不存在有三个顶点的点），只需要三种颜色就可以得到一样的结果。

74 数学创造了孩子最喜欢的电影

数学概念：几何学、算法

过去几十年里，电脑动画取得了巨大的进步，其中发挥了最重要作用的当属皮克斯公司的动画师。但是，电脑只能执行基于数学的指令，因此，当动画师遇到新的问题时，如画出《勇敢传说》中梅莉达头发的外观和动作，他们就需要借助于数学。

皮克斯公司利用算法（一系列指令）来设计复杂的物体和行为，他们知道，他们将需要一套全新的算法来设计梅莉达的头发，而这套算法将包含10万个不同的元素。这个问题有多难呢？根据组合学的原则，如果有n个元素，将有n^2种方式让这些元素相互碰撞，所以有100亿种方式让所有头发相互接触。

皮克斯公司也发明了新的数学技术，来让锐利的边缘显得平滑，要画出皮肤和衣服光滑的轮廓，这项技术必不可少。电脑动画师利用多边形（至少有三条边的形状）建立三维的形状，但得出的图形存在褶皱，就好像是方块组成的。通过细分曲面，动画师可以找到每条棱的中点，将它们抹平。不断重复这个过程，最终就能将块状和锐利的图片变成逼真的曲线，使直线变成了抛物线，皮克斯公司标志性的动画形象就这样诞生了。

《玩具总动员2》

> 皮克斯公司的动画师和工程师非常聪明，懂得通过算法来更好地制作动画人物，但皮克斯大获成功的一部电影——1999年的《玩具总动员2》差一点就因为马虎大意而丢失。这部电影是少有的几部在烂番茄网站获得100%好评的电影之一，也斩获了金球奖的最佳影片奖、最佳音乐奖和最佳喜剧奖。可是，皮克斯公司的一名员工不小心将文件从电脑上删除了，导致这部电影差点没能上映。这个例子是为了提醒大家要经常备份。

75 糖果消消乐

数学概念：计算机编程

过去几年里，数学家们发现，我们今天在Facebook和移动设备上经常玩的游戏糖果消消乐，实际上反映了数学当中一个最难的问题。数学大师们已经证明，这个游戏是一个所谓的NP问题，也就是说，它没有简单、直接的解法，尽管它的解法很容易检验。NP问题不同于P问题，后者可以很快找到答案。

计算机科学家和数学家很想一劳永逸地确定NP问题和P问题在根本上是否相同，也就是说，容易检验的问题是不是也容易解答。P＝NP问题被美国克雷数学研究所确定为千禧年大奖难题，能够解答这个问题的人将获得100万美元的大奖。

如今，在Facebook和移动设备上最流行的糖果消消乐中，游戏板上是各种颜色的糖果，包括黄色的柠檬水果糖和红色的果冻豆。玩家必须横向或纵向把三个一样的糖果移动到一起才能消除。

问题归约法

研究者通过问题归约法来分析糖果消消乐背后的数学，也就是说，如何把一个问题转换成另一个问题。问题归约法可以帮助数学家确定，要解决的问题究竟有多难。如果新问题可以被转化成初始问题，说明两个问题的难度相当。

76 你是否呼吸过恺撒的最后一口气

数学概念：概率

坦率地说，数学有时能揭示人类经验中令人惊骇的一面。举个例子，你刚才吸入的分子是某个生活在几千年前的人垂死时呼出的最后一口气，这个概率有多大？数学可以回答这个问题，而且它的精确度高得惊人。怎么可能？

美国宾夕法尼亚州天普大学数学教授约翰·艾伦·保罗士的《数盲：数学无知者眼中的迷惘》一书给出了这个问题和它的答案。保罗士在书中提出，我们是否能确定自己此时吸入的分子，正是尤利乌斯·恺撒被布鲁图刺杀时呼出的最后一口气？结果发现，如果满足几个前提条件，这个概率将高达99%！

首先，必须假定恺撒呼出的气体分子大致均匀地散布在大气中（毕竟恺撒已经死了2000多年）。

同时，假定大部分分子仍然是自由的（而没有黏附在其他分子上）。

假设大气中共有G（某个数字）个分子，其中恺撒呼出的有Z（另外一个数字）个，所以你刚才吸入了其中一个分子的概率是Z/G，由于概率往往小于1，所以你没有吸入其中一个分子的概率是$1-Z/G$。

现在，假设你刚刚吸入了三个分子：根据乘数原理，这三个分子中没有一个是恺撒呼出的分子的概率是（$1-Z/G$）3。当然，这个原理适用于任意数字，所以用更一般的方法来阐述，可以假设你刚刚吸入了T个分子，其中没有一个是恺撒呼出的分子的概率是$(1-Z/G)^T$。

所以，你刚刚吸入的分子中至少有一个是恺撒呼出的分子的概率可以用$1-(1-Z/G)^T$来表示。根据保罗士的计算，Z和T约为2.2×10^{22}，G约为10^{44}，所以最终的概率就是99%。真是令人吃惊！

假设

在上述计算中，我们做了一系列（合理的）假设。实际上，假设在整个数学领域中发挥着重要作用，例如，欧几里得的几何推理就是基于五个假设而做出的，其中一个是：在任何两点之间都可以画一条直线，另一个是：所有直角都相等。

77 计算机的工作原理

数学概念：布尔代数

计算机随处可见，从口袋里的智能手机，到背包里的笔记本电脑，再到亚马逊处理在线交易使用的庞大服务器，计算设备已经渗透到我们日常生活的各个角落。但是，它究竟是怎样工作的？机箱里的金属元件是如何让我们能够上网、和朋友共享照片或者进行加减运算的？

答案在于数学。计算机电路是根据1815—1864年英国数学家乔治·布尔提出的原理构造的，布尔因为将代数方法应用到逻辑学（一个研究人们在假设的基础上得出结论的规则的学科）而声名鹊起，逻辑论证（通过一系列陈述和推理建立论点）的一个经典例子与古希腊大哲学家苏格拉底有关：

凡是人都会死，

苏格拉底是人，

所以苏格拉底会死。

这种论证形式被称为三段论，它很有趣，因为只要前两个前提是真的，结论就一定为真。我们不一定要用“人”“会死”和“苏格拉底”这些词，可以用任意词来替代，下面是另一个版本：

凡是鸟都有翅膀，

大嘴鸟是鸟，

所以大嘴鸟有翅膀。

逻辑适用的范围远不止人和鸟，它也可以被用来处理命题———或真或假的陈述，我们还可以利用“和”“或”“非”这些词来连接这些陈述，得出的复合命题也有各自的真值。下面是几个简单命题的例子：

法国现在有国王。

狗可以在水下呼吸。

红灯亮时，车应该停下来。

前两个命题是假的，第三个命题是真的。下面是几个复合命题的例子：

阳光明媚，且奶牛在山丘上吃草。（和）

要么在下雨，要么在下雪。（或）

车在移动，且它的轮子在转。（和）

现在将上面的复合命题分解：

●在第一个复合命题中，如果关于阳光和奶牛的命题都是真的，最后的复合命题也为真。如果任何一个简单命题是假的（或者两个都为假），整个复合命题也为假。

●在第二个复合命题中，关于下雨或下雪的命题有一个是真的，整个复合命题也是真的。

●在第三个复合命题中，当两个简单命题都为真时，整个复合命题才是真的。有一个简单命题是假的，整个命题也为假。

布尔的创新之处在于，他发现我们可以用数学符号来表示命题的逻辑论证。举个例子，如果用X和Y分别代表关于阳光和奶牛的命题，在某种程度上，我们可以把两个命题相加，得到一个真值：1代表真，0代表假。

“和”“或”“非”这些连接词绝不只是抽象概念。20世纪的工程师懂得如何利用逻辑门这种实际的物理形式来表示这些连接词，最终，这些逻辑门被集成到了晶体管和计算机芯片中，支撑着计算机每天所做的基本运算。所有运算的基础都是以电子形式的“真”或“假”为基础的。所以说，在精致的计算机屏幕下面，跳动着的是数学的心脏。

乔治·布尔

历史学家坚持认为，乔治·布尔从小就自学拉丁语。后来，他成为英国皇后学院理学院院长，并与玛丽·埃佛勒斯（乔治·埃佛勒斯的侄女，埃佛勒斯峰[1]正是以他的名字命名的）完婚。

注释

[1]即珠穆朗玛峰，西方普遍称其为埃佛勒斯峰，因纪念英国人占领尼泊尔之时，负责测量喜马拉雅山脉的印度测量局局长乔治·埃佛勒斯而命名。

78 同一天生日的概率

数学概念：概率

有时候，数学能揭示一些看似不可能但却是真实的事情，例如日悖论。在任何一群人中，两个人同一天生日的概率有多大？初看之下，这个概率似乎很小，因为一年有365天，所以，随机的一群人中有两个人同一天生日的概率可能是极小的。

然而，事实并非如此，一群人中两个人同一天生日的概率可能比你想象的要大。事实上，在23个人中，这个概率已经超过50%。怎么可能？毕竟，如果你也是这群人当中的一员，有22个人可能跟你同一天生日，所以概率只有1／22，这个数字看起来并不大。但不要忘了，不只是你在跟其他人对比生日，其他人也在相互对比！所以，除了可能跟你同一天生日的1／22的概率，还有很多很多其他人的生日可能是同一天。

要了解这是怎么发生的，可以把这23个人想象成沿着一条直线分布的点（如果有兴趣，可以拿出纸和笔，把它们画出来）。要表示与一号点生日的对比结果，可以用线条连接第一个点和其余的点。对二号点也是如此。这时，你可能注意到，连接二号点和一号点的线与第一轮中连接一号点和二号点的线是一样的，鉴于我们不需要做重复的对比，所以二号点的对比结果将比一号点少一个，即21个。继续这个过程：三号点的对比结果将是20个。最终，对比结果的总数不是22，而是22＋21＋20＋19＋…＋1＝253。

现在，解释一条常在数学思考中发挥作用的原理：要证明某件事是真的，可以证明它的反面是假的。那么，我们能算出23个人中没有两个人同一天生日的概率吗？当然，一个人的生日必然是365天中的某一天（不算闰年的2月29日），不是这一天生日的共有364种可能，所以任何两个人生日不是同一天的概率就是364／365，等于99．726027%。

现在，用这种方法来分析23个人。每个对比结果不相同的概率是99．726027%，23个人共有253种可能的对比结果，所以23个人中没有

两个人同一天生日的概率就是99．726027×99．726027× 99．726027×…乘上253次（也可以把这个等式简写为$99．726027^{253}$），最后的结果是49．952%。如果23个人中没有两个人同一天生日的概率是49．952%，那么，这群人中有两个人同一天生日的概率就是50．048%。

下次当你身处一大群人中时，不妨调查一下其他人的生日，看看结果怎样。

9月16日

根据美国国家公共广播电台数据记者马特·斯蒂尔斯的调查，9月16日是年龄在14～40岁的美国人最常见的生日。他发现，7月和9月是最常见的生日月份，最不常见的生日是2月29日，其次是12月25日。

79 教堂钟与数学

数学概念：排列组合

每当钟声响起，我们可能会联想到宗教服务、大学校园、中世纪的城镇广场以及每年圣诞节电视上的赫尔希巧克力糖广告。不过，有些钟声和数学，尤其是排列组合（当排列次序十分重要的时候，对给定的物体进行重新排列）也有着密切的联系。

与数学存在内在联系的鸣钟法被称为转调鸣钟，即每个人分别负责敲击一个钟的团队活动（钟的个数通常为6～8个，最多有16个）。这种钟声你可能在电影里听过，尤其是大型婚礼过后或国王加冕时。通常，音最高的钟被称为高音钟，音最低的钟被称为低音钟。在一组钟里，高音钟的编号为1，其他钟也依次编号（如果有四个钟，低音钟的编号就是4）。

转调鸣钟时，钟的敲击要按照次序，这个次序被称为列或者转调，每列中的钟被敲击的次数都不超过一次。当列变化时，每个钟的位置只能变换一次。所以，鸣钟者最开始敲击的次序可能是1，2，　3，4，然后是2，1，4，3，再然后是2，4，1，3。而且，每个次序都不能重复。最后一轮敲击时，则再次按照第一次的顺序，1，2，3，4。如果你生活在北美，或者想亲耳听听转调鸣钟，可以登录北美转调鸣钟指南网站：www．nagcr．org。

编钟

转调鸣钟不同于其他鸣钟法，例如演奏编钟，即由乐师坐在椅子或长凳上，按压一系列像键盘一样分布的控制杆。世界上最大的一套编钟共有77件，现存于美国密歇根州的苏格兰长老会教堂。

80 贝叶斯统计

数学概念：贝叶斯统计

如果让一名大学生说说哪个数学领域最枯燥、最无聊、最无可救药，她可能会说是统计学。单是这个名称就让我们联想到计算器和成堆枯燥的表格，至少，这就是统计学留给我们的印象。

但如果我告诉你统计学绝没有你想象的那么枯燥无味呢？

能够用来说服你的例子应该是贝叶斯统计了，这门学科是由18世纪的英国长老会牧师托马斯·贝叶斯创立的。在这门统计学中，你可能更熟悉的是频次统计。假如你正在玩21点，手里有一张9和一张K，你可以利用频次统计来计算自己下一轮凑齐21点的概率。

此外，根据贝叶斯统计，随着新信息的不断出现，应该不断调整概率。在21点游戏中，你不应该只考虑拿到3的概率，或者纯粹地分析数据，也要考虑哪些牌已经派出去了以及庄家的牌技，随着新信息的出现，不断修正概率。

不过，贝叶斯统计不仅可以帮你计算赢牌的概率，还可以挽救生命。举个例子，它曾被用来寻找2013年在长岛沿海的捕虾船上落水的渔民约翰·奥尔德里奇，当时，他在大西洋一片广阔的海域中失踪了，好在海岸警卫队考虑了该区域的洋流以及救援直升机已经搜索过的路线，最终缩小了这位渔民可能的位置范围。海岸警卫队估算了奥尔德里奇落水最可能的时间，利用搜救优化计划系统（SA✓ROPS）这个计算机程序分析了风流和洋流，找到了他最可能的位置。当海岸警卫队最后找到他的时候，他已经在海上漂了12个小时。

贝叶斯推断

贝叶斯推断的一个经典例子是看太阳升起的新生儿，这名婴儿每天早上都观察到太阳升起，所以越来越相信太阳实际上是在早上升起，而且未来的早上也一定会升起。在这个例子中，婴儿每天的

观察就是不断更新的信息，最终成为影响婴儿对未来日出的预期的一个因素。

81 棒球与自责分率

数学概念：统计学

或许没有什么体育项目像棒球那样与数学有着如此密切的联系了。统计涉及棒球运动的方方面面，从安全打，到防守，再到投球，没有基本的数字知识，研究棒球者将寸步难行。可是，人们是怎样计算这些数字的呢？

以自责分率（ERA）为例，这项统计只适用于投手，是为了判断投手到底有多优秀。在早期的棒球中，没有后援投手，一开始就上场的投手必须打完整场比赛，所以，如果要判断一名投手连续击球的效率，或者至少确保他不会在上垒时击球，可以看看这名投手赢过多少场比赛。然而，后援投手出现后，比赛的结果开始不只取决于一名投手，所以，只看比赛成败并不能判断某个投手的技能。

自责分率恰恰解决了这个问题：这个数据以局数为统计对象，而非整场比赛。要计算自责分率，只用把投手失分的次数相加，除以他投球的局数（自责分是由投手而不是其他运动员的失误导致的），再乘以9（一场比赛共有9局）。例如，在90局比赛中，某名投手共失分30次，他的自责分率就是3．00（即$\frac{30}{90}\times 9=3$）。

在整个棒球史上，关于自责分率好坏的标准不断变化，但总体上越低越好。20世纪初期，一名优秀投手的自责分率应该低于2，而如今，低于4的自责分率就已经相当不错了。

克莱顿·柯萧

2011—2014年的美国职业棒球大联盟中，洛杉矶道奇队的克莱顿·柯萧是所有先发投手中自责分率最低的一个，他在2014年的自责分率最低，只有1．77。相比之下，在棒球史上，特洛伊人队的蒂姆·基夫的自责分率是最低的，在1880年的赛季中只有0．86。

82 细菌分裂

数学概念：纽结理论、形状、分割

在每个人的生命中，最确定的事要数死亡和纳税，或许除了细菌的存在以外。这些微小的生物体无处不在，它们生活在每个大洲和每个环境中，甚至在我们的肠道里，帮助我们消化食物。由于它们极小，所以研究细菌时必须要用到一个重要的工具———显微镜。但是，还有一个工具不容忽视，那就是数学，它有助于判断细菌的生命周期，从而促进人类的健康。

不像人类的DNA，细菌的遗传物质并不是双螺旋形，而是环状的。当细菌的一个细胞分裂成两个细胞时，它的遗传物质也必须分裂成两个。在分裂的过程中，它不断地缠结和分开，直到产生两个新的环状遗传物质。生物学家费了很大工夫也没弄清楚细菌复制机制的内在原理，反倒是数学帮助解决了这个问题。

研究者利用缠结分析这个数学工具，更好地了解了酶———启动或停止化学反应的分子———是如何连接和拆散环状的遗传物质的，包括酶分子呈现的形状（通过实验，科学家了解了这个过程，但尚不清楚具体的步骤）。

科学家对细菌是如何复制的了解得越多，就越有助于他们开发出新一代的抗生素。如果你下次生了病能迅速康复的话，可能要感谢数学的功劳！

微生物

科学家们一直在研究人体内的微生物，以及它们是如何维持我们生命的。人体约有100兆个细胞，但估计只有1%构成了我们的身体，此外则都是细菌、病毒及其他微生物。

83 星盘

数学概念：立体投影

立体投影不仅出现在墙上的地图里（参见第28章），几百年来，它也是人类历史上最受欢迎的天文仪器星盘的设计原理。星盘通常由黄铜制成，直径在6英寸（约等于15．24厘米）以上，相当于一种便携式计算机，帮助水手们计算白天和黑夜的时间、天体离地面的高度、未来日出日落的时刻以及观测者所在的纬度。它也可以被用来完成星象计算（几百年来，天文学和星相学的关系一直密不可分）。

星盘是最古老的科学仪器之一，早在古希腊就已出现，中世纪时期，星盘技术在阿拉伯世界里得以保存，实际上，在文艺复兴时期，人们还一直在使用星盘，直到18世纪六分仪流行起来以后（六分仪的镜像可以帮助领航员在实际地平线的基础上进行计算，不用像星盘的使用者那样依靠推测的地平线）。

星盘可以进行复杂的计算，但它只由简单的几部分组成：

●盘面是承载其他部分的圆形金属框架。

●地带是指有蚀刻线条的金属盘，它与盘面严丝合缝，根据使用者所在的地理位置，可以在盘面上装不同的地带。

●网环被固定在地带上方，它是镂空的，方便观测者看到下方的地带，网环上也有一些指示地带重要特征的标志。

●星盘上还有一个测高仪，帮助观测者测量天体的高度。

●星盘顶部边缘处还有一个圆环，方便用绳子将它挂起来（辅助计算）。

在星盘的地带上可以看到立体投影，每个地带的蚀刻线条都对应地球的纬度线，就像一个可折叠的球体被压成了一个平面。有些地带上的

线条还代表其他的地图特征，如时间线、地平经度线和地平纬度圈。总而言之，没有立体投影，就没有海上导航或者星座命运预测，这一切都是因为数学。

星盘手表

戴上一只星盘手表（网上有卖），让别人看看你对数学的痴迷吧，不过它可能太小了，一点也不实用！

84 休止角

数学概念：休止角

你可以在任何地方找到数学，甚至是你的餐桌上，比如在一张纸上倒一堆盐，它会形成一个锥体，虽然看着不美观，但也能体现一个数学现象———休止角，即盐堆表面与桌子的水平面所成的角。

其实，所有颗粒物料，包括沙子和石块，都有休止角，甚至是山崩时从山上滚落的巨石。另外，休止角并不是随机的，它每次出现时都不会变化，而是取决于一些因素的组合，包括颗粒的大小、颗粒是光滑的还是有尖突的、颗粒之间是否有水分（可能让颗粒黏在一起），以及下表面有多粗糙。

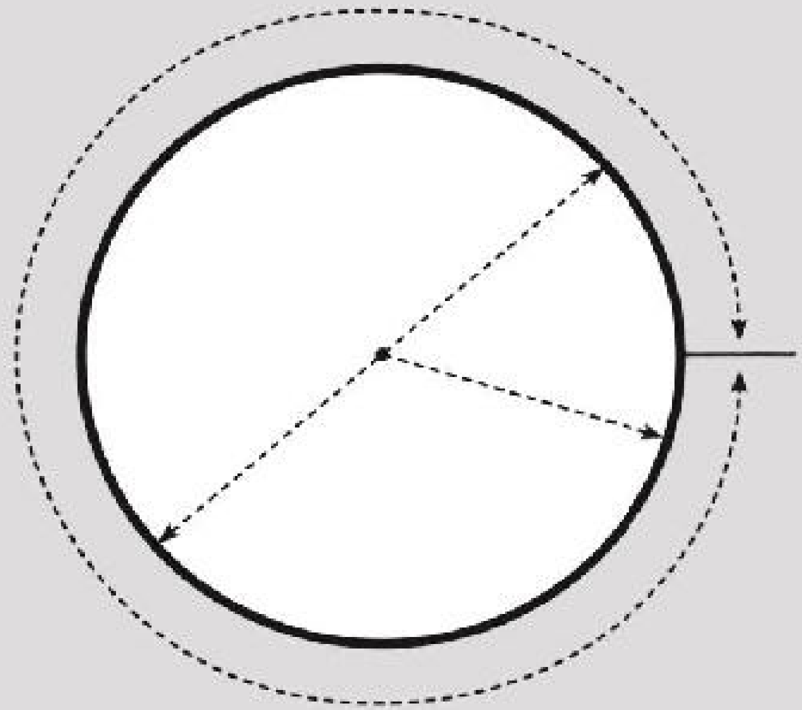
食盐的休止角是32°，其他物料的休止角可能更大，比如树皮和椰子片的休止角是45°；也可能更小，比如湿黏土的休止角是45°。人们甚至可以利用休止角来计算一堆物料，如沙砾，是不是会崩塌。

下次家庭聚会的时候，试试把盐从盐罐里倒出来吧，告诉其他人你是在做数学实验！

物质	休止角
灰烬	40°
麸皮	30°～45°
沙砾	30°～35°
干沙	34°
雪	38°
小麦	27°

各种物质的休止角

第四部分 特殊数字



85 让人大惊小怪的π

数学概念：无理数

随便找一个圆，测测它的周长（边长的长度）和直径（穿过圆的中心点并连接圆两边的直线的长度），两者一样长吗？如果不一样，前者比后者大多少？

你会发现，周长总是大于直径，单这一点就已经让人吃惊了，对于世界上的任何一个圆———无论是咖啡杯的边缘，自行车的车轮，还是镍币———它的周长总是大于直径。你甚至都无须测量或检验（尽管你可以，就算只为了证明我说的是正确的），这个特征是普遍的，适用于任何时间、任何地点的圆（假定我在这里说的圆都是平面的）。

现在，我们来看看圆的周长和直径的第二个特征。对于所有圆来说，周长总比直径大相同的量，而且这个量是一个特定的数字，就像39一样。当然，一个大圆的周长与直径之间的差肯定大于一个小圆的周长与直径的差，这里说的相同是指比率，或者说比较差异。“好吧，”你会说，“周长究竟比直径大多少呢？2倍？1．5倍？”

这就是π的奇异之处。在某种程度上，很难说圆的周长究竟比直径大多少，几千年来，人们只知道圆的周长大约是直径的3倍，但其实这个数字更接近3．14，再精确一点，是3．14159。不过，小数点后的数字没完没了，而且永远不重复。目前为止，这个数字已经精确到小数点后8000兆位。

这个数字———圆的周长和直径比，或者说周长对直径的倍数———被称作π，它是个希腊字母，但名称并不重要，就算叫它“弗兰克”“山姆”或者“弗雷西亚”也无所谓。真正重要的是它在我们的世界里有多么常见———每个圆都离不开它，多么奇怪呀！为了进一步了解π的奇异之处，可以假设一个朋友问你，你比你的狗高多少，假设你的回答是“呃，我不确定，我大约是它的2倍高，可是越测量越发现，很难得到一个精确的数字”。这个问题怎么会没有一个确切的答案呢？这就是π令人困惑的地方。

π日

对数学极客来说，3月14日是个特殊的日子，这一天是π日，庆祝活动从下午1：59开始（月、日和时刻共同组合成3．14159这个数字），π日是由美国旧金山的科学、艺术和人类历史实践博物馆———探索科学博物馆发起的。

86 质数

数学概念：数论、质数

有些数是很特别的，其中最特别的要数质数。质数只能被1和它本身除尽，例如，5是质数，只能被5和1除尽，10不是质数，它可以被1、2、5和10除尽。自古希腊和欧几里得（历史上最伟大的数学家之一，人类历史上最具影响力的书之一《几何原本》的作者）时代以来，质数已经吸引了数学家2000多年。

质数的有趣之处在于，它们像是其他数的最基本的构成元素，其实，质数有时也被称作数学的原子，但质数的出现并不符合任何规律。根据基本的运算法则，任何一个比1大的数要么是质数，要么是若干质数的乘积。下面是几个例子：

2是质数

3是质数

4＝2×2

5是质数

6＝2×3

7是质数

8＝2×2×2

9＝3×3

10＝2×5

11是质数

12＝2×2×3

13是质数

如此等等，还有很多。

究竟有多少质数呢？欧几里得已经证明，质数事实上有无限个。无论我们沿着数轴走多远，永远都不可能找到最后一个质数，前面总是会有更多的质数。

欧几里得的证明方法是值得考察的，因为它生动地体现了数学家是如何利用推理来了解数和它们的性质的。

1．首先记住，任何一个数要么是质数，要么是若干质数的乘积。

2．其次，我们要用的证明方法是反证法：我们将假定要证明的问题的反面，如果我们发现问题的反面不可能是真的，那么，我们将知道它的反面———我们最初要证明的问题———必然是真的。

换句话说，我们首先要假定质数是有限的。剧透警报：如果发现我们的证明不符合逻辑，我们就能间接证明它的反面是真的，即质数是无限的。

第一步：我们来造一个数，姑且称为“乔治”，假设它是所有质数的乘积加上1（不要忘了，我们假定质数是有限的），我们知道，乔治要么是质数，要么是质数的乘积，我们可以立马发现，如果乔治是一个质数，我们已经发现了一个原本没有的质数———乔治！我们现在可以停下来自豪一下了，因为我们的发现是站得住脚的，不论已经有了多少个质数。

假设是另外一种情况：如果乔治不是一个质数，那么，它必然是两个或多个质数的乘积，但是我们已知的质数没有一个能满足条件，因为如果把它们相乘，最后总有一个余数1。因此，必然还有一些质数是我们还没有发现的，当它们相乘，就能得到乔治。我们再一次发现，对于任何一个质数集合，总会有一些质数不在这个集合内。

这只是证明数学推理的力量和魅力的一个例子而已。

费马质数

有些质数甚至更奇怪。例如，费马质数是具有形式$2^{2^n}+1$的费马数，目前仅知的费马质数是n等于0，1，2，3，4时的结果———3，5，17，257和65537。

87 网络安全

数学概念：质数

忘了电子邮件和社交媒体吧。互联网对这个世界最深刻的影响或许就是网购，可是电子商务充满了风险。当你把信用卡号码输进亚马逊等网站，点击“购买”之后，是什么阻止网络大盗拦截和盗取这个号码的呢？

是数学。网络安全或者说公开密钥加密的基础是质数，一种只能被1和它本身除尽的特殊数（相比之下，10这个数可以被它本身、1、2和5除尽）。1，3，5，7和11都是质数，但质数是无限的，相应地，有些质数就是巨大的。我们已经讲过证明质数为什么是无限的数学证明（参见第86章），可还有另外一个故事。

当你在网上提交信用卡号码时，其实是利用了RSA公钥加密算法，它是以它的发明者———罗纳德·李维斯特、阿迪·萨莫尔和伦纳德·阿德曼的名字命名的。RSA算法于1977年提出，是一个以巨大的质数为基础的加密系统。基本上，这个系统可以将你的信用卡号码转换成一个巨大的数字，即两个随机挑选的大质数的乘积，从而保护你的个人数据。要是知道这两个质数是什么，你完全可以将这个数字再转换成你的信用卡号码，但不要忽略了另外一个数论事实：想要对两个大质数的乘积进行因式分解是极其困难的。事实上，一个足够长的数字可能需要一堆超级计算机花成百上千年才能将其分解为两个质数。

过去几年里，一直有谣言称RSA加密系统并没有我们想象的那么安全。这个系统的安全性取决于随机质数的生成，但负责生成随机质数的程序———随机数发生器，好像不一定总能生成完全随机的数字。于是，这个差异就给了黑客可乘之机，让他们发现两个质数的相似性，从而盗走敏感信息。

目前来看，电子商务以及网上银行和联机通信总体上还是安全的，只希望有哪些数学家能设计出一个更新、更安全的加密系统。

比特币

所有使用比特币（2008年发明的虚拟货币）的人都得有一个电子钱包，它的安全性也全赖公开密钥加密系统。其实，比特币是第一种要依赖加密系统的货币，为了使用你的比特币，你必须有两个密钥：一个是公开密钥，另一个是私人密钥，就像个人识别码和用户密码。这两个密钥在数学上是相互联系的。

88 无穷性的奇迹和挫败

数学概念：无穷性

人人都见过表示无穷的符号———一个平躺的8字形符号（∞），但什么是无穷，它和数学有什么关系？

无穷有时被当成一个可能很大的数，这种理解并不准确。无穷并不是一个数，而是一个概念，表示无限、无尽和无边，它在数学里反复出现。我们说，π小数点后的数是无穷的，1除以3的商也是如此。在几何学中，我们说，一条直线上有无穷个点，直线向两端无限延展。在数学领域，无穷既是一个“本地人”，又是一个“外来户”。

艺术中也存在无穷。M．C．埃舍尔曾画过蚂蚁沿着一条莫比乌斯带，在没有终点的旅程中爬行。在名为《巴别塔图书馆》的短篇小说中，作者豪尔赫·路易斯·博尔赫斯想象那里有无穷无尽的书，包含了每一种可能的字母和标点组合，收藏着每一本已经出版和将要出版的书。

无穷的概念也激发了一些听起来有些古怪的想法。在19世纪晚期和20世纪初期，数学家乔治·康托尔提出可能存在不同大小的无穷性，自然数（1，2，3，4，...）和实数（包括π，1／3和45．6778765等）都是无穷的，但实数的无穷性大于自然数。对无穷性的思考有助于我们理解其他一些与直觉相反的概念。你可能觉得，1英尺长的线段上的点肯定比无限长的直线上的点少，但其实两条线上的点都是无穷的。

虽然无穷性令人着迷，但和很多与数学相关的概念一样，它也让我们觉得困惑和沮丧。

有穷论

并不是所有的数学家都接受无穷的概念。数学哲学有一个分支被称为有穷论，它的拥护者坚信，只有有穷的物体才是真实的，正如数学家利奥波德·克罗内克所说：“上帝只创造了自然数，其余都是人做的工作。”

89 自然中的斐波那契数

数学概念：斐波那契数列

1202年，一位意大利数学家出版了《珠算原理》一书，书中提出了一个神奇的数列———斐波那契数列（以这位数学家列昂纳多·斐波那契的名字命名），这些数刚开始并没有什么特别之处，数列往往以数字1和1（有时是0和1）开始，接下来的每个数都是前两个数之和。1＋1＝2，所以，第三个数是2，然后是3，5，8，13，21，34，依此类推。这个数列的有趣之处在于，数列里的数变大得相对较快（这个数列到第18位就是：1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，1597，2584）。斐波那契数列的另一个特征更值得注意：令人惊讶的是，自然中似乎也蕴藏着斐波那契数。

用数学来考察世界，你将发现，自然中到处都蕴藏着斐波那契数。举个例子，叶片的生长中就蕴藏着这些数字，叶在茎上排列的方式称为叶序，这个词来自希腊语，意思是植物和排列。在某些植物上，叶片在茎上的生长是呈螺旋式的，如果从一片叶子开始，沿着这个螺旋向上，数数经过多少片叶子才能达到第一片叶子正上方的位置，你经过的叶片数和你沿树茎旋转的圈数就是两个斐波那契数，这两个数的比称为叶序比。例如，苹果树的叶序比是2∶5，黑莓树和榛树的叶序比是1∶3。

也可以观察一下松球。俯瞰松球的顶部，可以明显看到松球的表面上有两类曲线：一类顺时针环绕松球，另一类则逆时针环绕松球。数数这两类曲线的条数，你会发现，这两个数也是相邻的斐波那契数。

蜜蜂与斐波那契数

> 蜜蜂的谱系图里也蕴藏着斐波那契数。由于雄蜂产自未受精卵，所以它们只有母亲（蜂王），而雌蜂则来自受精卵，所以它们既有母亲也有父亲（蜂王和雄蜂）。分析一下雄蜂和雌蜂的祖先，就可以发现斐波那契数：雄蜂有1个母亲，2个祖父母，3个曾祖父母，5个高祖父母，8个天祖父母，依此类推；雌蜂有2个父母，3个祖父母，5个曾祖父母，8个高祖父母，等等。

90 杜威十进分类法

数学概念：普通数

数字无处不在，扮演着各种不同的角色。有的数字，如交通标志上的数字，让人们知道他们可以开多快；有的数字，如体育记分系统里的数字，帮助我们记录哪组能赢；医学测量所使用的数字可以量化我们的健康状况（如血压和胆固醇水平），让我们更实际地了解自己身体难以感知的部分；还有的数字被用于归类和排列，比如书脊上的数字，它们属于杜威十进分类法。

杜威十进分类法是麦尔威·杜威1876年在阿默斯特学院工作时发明和公布的，完全革新了当时的图书分类法。在杜威分类法出现之前，图书馆的图书往往是按照购进日期排列在书架上的，而杜威分类法的出现，则让图书管理员实现了按主题分类，也可以让借阅者更方便地浏览书架，找到需要的书（之前，图书馆的书架是向借阅者封闭的，只有图书管理员可以检索图书）。下面是杜威十进分类法的十个大类：

000～099　总论

100～199　哲学和心理学

200～299　宗教

300～399　社会科学

400～499　语言

500～599　自然科学和数学

600～699　技术

700～799　艺术

800～899　文学和修辞学

900～999　历史、地理和生物学

510

按照杜威分类法，你现在正在读的这本书很可能被列为510，属于数学主题。

91 随机数真的是随机的吗

数学概念：数论、密码学

人人都听过某人说“太随机了”。究竟什么是随机？数学随机性和我们的日常生活有什么关系？

事实上，在这个互联网时代，随机性至关重要。网上交易涉及银行、零售商及其他组织，需要传送敏感信息，需要靠生成随机数来建立安全的连接（参见第87章）。当一组数没有可辨别的规律，无法预测一个数后面的另一个数是什么时，就是随机数。掷骰子得到的数也是随机的，但由于网上交易量太大，对随机数的需求太多，掷骰子———用帽子抽签或抽扑克牌———都是行不通的。

科学家们转而靠计算机来生成随机数，但计算机本质上还是确定性机器（它们遵守规则），所以计算机生成的随机数也不是真正随机的。如果某个人把握了计算机挑选数字的算法，知道了它的种子，或者说初始值，理论上，这个人就能预测出生成的数列。这个数列貌似是随机的，但其实并不是。因此，基于计算机的随机数发生器也被称作伪随机数发生器。

然而，通过利用研究无线电噪音、光子的量子行为、热放射等物理现象的设备，科学家们又向生成真正的随机数走近了一步。这些现象可以决定各自的随机性，而无须使用人为创造的算法。随着我们越来越依赖互联网，也越来越依赖随机数，我们需要我们能得到的一切真正的随机数。

随机数和彩票

随机数发生器不只是科学家和数学家的工具。如果你喜欢玩彩票，可以利用几个生成随机彩票号码的网站，不过切记，那不一定会让你中奖。

92 十的次方

数学概念：比例

1977年，设计师查尔斯·埃姆斯和雷·埃姆斯共同创作了一部纪录片，展示了全世界的各种量级，从微小的原子到广袤的已知宇宙。这部短片名为《十的次方：展示宇宙万物的相对大小及再加一个零的力量》，影片一开始，是一对夫妇在芝加哥公园里休息，然后，镜头开始拉远：每隔10秒，镜头就拉远10倍，画面也变成10倍。不久，镜头里出现了整个芝加哥，然后是整个地球。最后，镜头离开了太阳系，甚至银河系，以光年的速度移向整个宇宙的各个星系。

然后，镜头又回到了最开始的那对夫妇身上，开始向丈夫的一只手拉近，这次，每隔10秒，镜头则拉近10倍，最终，镜头里显示了这只手的一个碳原子核里的质子和中子。

这段旅程共包含了10的40个次方，从10^{15}[1]米到10^{24}米的距离，只靠不断再加一个零，就完成了整段旅程的尺度测量。

古戈尔

有的数虽然可以命名，但由于太大，很难让人理解，其中一个例子就是古戈尔，即10^{100}，或者1后面加100个零。“古戈尔”这个词是美国数学家爱德华·卡斯纳九岁的侄子米尔顿·西罗蒂在1938年造出来的。一个古戈尔有多大？不妨想象一下，整个宇宙里的基本粒子也只有10^{80}个。

注释

[1]原书疑有误，结合上下文似应为10－15。

93 公制单位

数学概念：测量

在全世界大部分地区，最重要的测量标准当属公制单位。公制单位系统出现于1799年的法国，设计初衷是为了取代当时欧洲镇与镇、县与县、国与国各不相同的混乱的测量标准。这个系统设置了一系列基本的测量单位，如米、千米和秒，让人们可以通过添加前缀来调整大小，从而简化了测量。由于这些前缀是以10的倍数为基础的，所以公制单位系统也被称为十进制系统。下面是一些前缀的例子：

微＝1／1000000

毫＝1／1000

厘＝1／100

分＝10

七＝100

千＝1000

百万＝1000000

例如，1千米等于1000米的距离，1毫克等于1／1000克的重量。其他基本的公制单位还有电流单位安培，热力温度单位开尔文，物质数量单位摩尔，以及发光强度单位坎德拉。

公制单位最吸引人的一点是，究竟如何定义基本单位。以米为例，首先，标准米的定义是：赤道与北极的距离（穿过巴黎）的百万分之一，但计算中忽略了地球曲率的轻微扁平，也就是说，计算结果减去了0．2毫米（地球并不是一个完美的球体）。后来，到了1889年，米又被定义为一根由铂和铱特制的金属棒的长度。然而，科学家们对这个标准

并不满意，因为在不同的温度下，或者在摆放不正确的情况下，金属棒可能会变形，而测量金属棒的温度或者支架又要靠公制单位，包括厘米在内。由于这根金属棒被当成标准的公制长度单位，用其他公制的长度单位来定义它也是行不通的。

如今，标准米有了一个更普遍的定义：光在真空中于1／299792458秒内行进的距离。

英制单位

英制单位与公制单位相反，英制单位是英国使用了几百年的测量单位，同时融合了古罗马人和盎格鲁撒克逊人用过的测量单位。英制单位的名称都很好听，包括“打兰”“及耳”“大桶”“隆勒”，等等。当然，如果你熟悉酒的话，一定知道4．5升的酒瓶叫罗霍博姆，15升的酒瓶叫尼布甲尼撒。

94 阿秒

数学概念：小数、测量

在最基本的层面上，数学研究的是数，其中有的数让人觉得非常不可思议。例如，人类测量过的最短时间是多少？

最近，德国的马克斯·玻恩非线性光学与短脉冲激光研究所的科学家找到了一种测量只有12阿秒的事件的方法。阿秒究竟有多短？1阿秒等于1／1000000000000000000秒（10^{-18}秒）。这段时间到底有多短？1阿秒内，光可以走过3个氢原子的距离。理解这段短得惊人的时间的另一种方法是类比：1阿秒之于1秒，相当于1秒之于320亿年（接近宇宙年龄的3倍）。

在丹麦语中，“阿”这个前缀表示第18，它也是公制单位的一个数量级。公制单位包含各种表示极小和极大尺度的前缀。下面是公制单位目前的前缀表：

尧　10^{24}，1000的8次方

泽　10^{21}，1000的7次方

艾　10^{18}，1000的6次方

拍　10^{15}，1000的5次方

太　10^{12}，1000的4次方

吉　10^{9}，1000的3次方

兆　10^{6}，1000的2次方

千　10^{3}，1000

毫　10^{-3}，1／1000

微　10^{-6}，1／10^{6}

纳　10^{-9}，1／10^{9}

皮　10^{-12}，1／10^{12}

飞　10^{-15}，1／10^{15}

阿　10－18，1／1018

仄　10－21，1／1021

幺　10^{-24}，1／1024

闪电侠

闪电侠是一个可以以光速奔跑并且能感知持续时间不超过1阿秒的事件的漫画英雄，当然，这些事件出现的时间不会超过我们一眨眼的工夫。

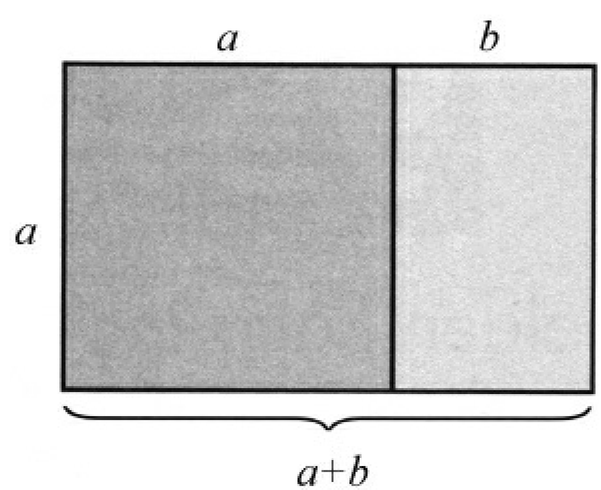
95 艺术与建筑中的黄金比例

数学概念：黄金比例

达·芬奇的《最后的晚餐》和米开朗基罗的《创世记》有什么共同点呢？这两幅画当中都包含黄金比例，一个在自然和人类社会中随处可见的比例。

数学课上讲过，比例是比较两个数字或尺度的一种方法。举个例子，假设你有一辆四门轿车，它有四个座和四个车轮，所以，车门和车轮的比例就是4∶4（然后可以把这个比例简化成1∶1）。或者，假设你喜欢宠物，养了2条狗和5只猫，那么，你家里狗和猫的比例就是2∶5。

黄金比例与1∶1和2∶5这两个比例一样，除了一点———黄金比例是1∶1．618（第二个数字其实是无穷无尽的，而且永不重复，这里为了方便才取这个近似值。如果在小数点后多加几位数，它将是1．61803398874989…）。



所谓的黄金矩形中也蕴含着黄金比例，因为黄金矩形的宽与长之比是1∶1．618（无穷无尽）。另外，如果在这个矩形内部画一个正方形，剩余矩形的宽与长之比也是1∶1．618，和大矩形的比例完全相

等！换句话说，小矩形的宽与长之比（b∶a）等于大矩形的宽与长之比（a∶a＋b）。

几百年来，建筑师和艺术家都曾在他们的设计中运用黄金比例，似乎人类尤其青睐这个比例。下面是几个例子：

●假想雅典巴特农神庙正面是一个矩形，它的宽与长之比就是黄金比例。

●世界七大奇迹之一的吉萨金字塔也蕴藏着黄金比例，大金字塔的一条斜边长与底座边长的一半之比是1∶1．61804。

●分析一下列奥纳多·达·芬奇的《最后的晚餐》和西斯廷教堂穹顶上的壁画———米开朗基罗的《创世记》，你会发现，两幅画的创作靠的都是黄金比例。

黄金比例：事实还是虚构？

很多人相信，几千年来，人们一直在艺术和建筑中应用黄金比例。然而，有些数学家提出，没有证据可以证明这一点，而吉萨金字塔、万神庙甚至列奥纳多·达·芬奇画里的黄金比例都只是传说。

96 DNA 的黄金比例

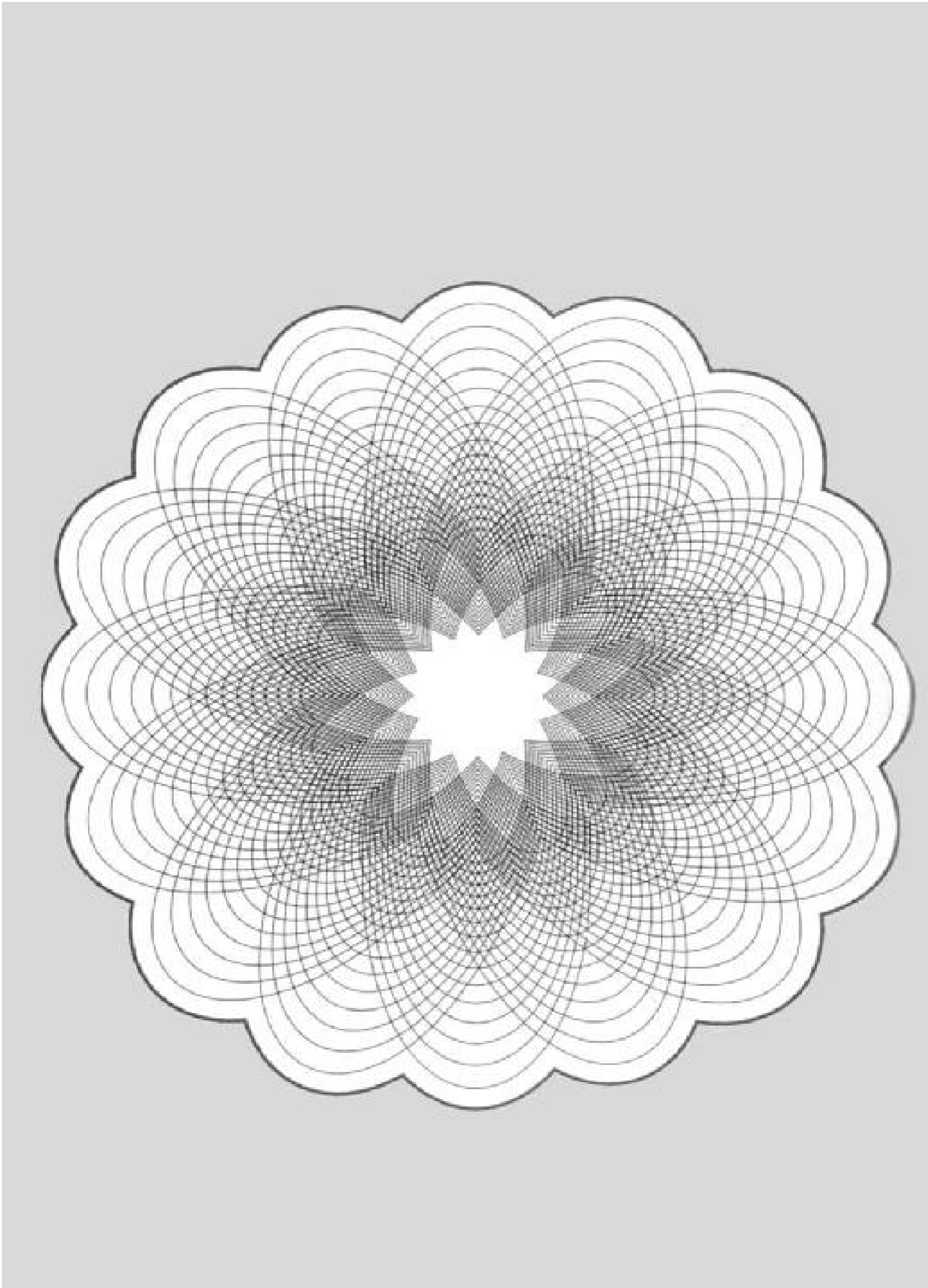
数学概念：黄金比例、斐波那契数列

黄金比例不仅经常出现在艺术里，它也是自然中反复出现的主题。其实，黄金比例也是你的一部分，它在你身体的每个细胞的每个DNA分子中（DNA，脱氧核糖核酸的简称，其中包含组成蛋白质的指令，反过来又构成身体的器官组织，调节各器官的功能。荷尔蒙和酶都是蛋白质，比如可以帮助肌肉收缩的肌动蛋白，它也是细胞内部骨架的一部分，可以让细胞呈现各自的形状）。众所周知，DNA分子结构———双螺旋结构，是詹姆斯·沃森和弗朗西斯·克里克在1953年发现的。双螺旋结构的每一个完整螺旋长34埃米，宽21埃米（1埃米等于百万分之一厘米），这两个数字的比是1∶1．6190，非常接近黄金比例的1．618。

34和21这两个数字还有一个特别之处，它们也出现在斐波那契数列中，即列昂纳多·斐波那契在13世纪提出的一个数列（参见第89章）。在这个数列中，每个数都是前两个数的和，比较其中任何两个相邻的数，它们之间的比都接近黄金比例。此外，数越大，它们的比越接近黄金比例。因此，5和8是斐波那契数列中较早出现的两个数，它们的比是1∶1．6，377和610这两个后出现的数的比则是1∶1．61803714，小数点后的五位数与黄金比例完全相同。

φ与黄金比例

1909年，为纪念古希腊雕塑家菲狄亚斯（很多人认为他在雕塑中应用了黄金比例），美国数学家马克·巴尔首次用希腊字母 来表示黄金比例。



97 孩子的玩具来画外次摆线

数学概念：形状

某些最有趣的数学形状出现在玩具里，譬如，玩万花尺可以让我们加深对外次摆线、内次摆线和旋轮线的认识。如果你玩过这种绘图玩具的话，一定知道它是由两个中空的圆圈组成的，就像甜甜圈，并且内外边缘都有轮齿。另外还有一系列硬塑料轮，塑料轮的外边缘也有轮齿，内部有穿孔，可以容纳笔尖。绘图时，用卡纸背板将其中一个塑料圆圈固定在纸上，然后选择一个塑料轮，将笔尖插入孔内，将塑料轮与圆圈的内侧或外侧轮齿连接，用笔拨动塑料轮，绕着圆圈旋转，就可以画出错综复杂的几何图案。

这时，那些稀奇古怪的数学名词就出现了。当你把塑料轮放在圆圈外侧时，画出的图案称为外次摆线，它看起来就像一堆先趋近后又远离圆圈边缘的曲线。相反，当你把塑料轮放在圆圈内侧时，画出的图案称为内次摆线，它看起来就像海星、边向内凹的五角形或者星星。这两种曲线都属于旋轮线，即由一个形状绕着一个固定的平面旋转，在该形状上的一个点所形成的摆线（这个形状不一定是圆的）。

汪克尔转子发动机

为某些马自达汽车提供动力的汪克尔转子发动机，其外壳形似一条外次摆线。这种发动机是德国工程师菲加士·汪克尔发明的，他在1929年首次获得该发动机的专利。不像活塞式发动机，汪克尔发动机只有一个活动机件：一个形似边缘略微弯曲的三角形的旋转机件。

98 寻找外星人的数学原因

数学概念：概率

此刻，位于旧金山北部的一组巨型望远镜正在搜寻太空中地外文明的踪迹。艾伦望远镜阵列（ATA）是以对它的建设做出贡献的微软前高管保罗·艾伦的名字命名的，由42架射电望远镜组成，每架直径6．1米（有计划将艾伦望远镜阵列增加到350架）。目前，艾伦望远镜阵列的使用者是搜寻地外文明计划（SETI），这是一个坐落于美国加州山景城的组织。所有望远镜到位后，将占地1万平方米。

除了制造如此巨型的设备和处理艾伦望远镜阵列搜集的信号所涉及的数学知识之外，数学也促成了这个计划的整体构思。1961年，搜寻地外文明计划的创始人之一法兰克·德雷克博士提出了一个方程式，给出了搜寻能够发射人类在地球上可以检测到的信号的地外文明时应当考虑的所有因素。德雷克提出的方程如下：

$N=R^{‹}f_{p}neflfifcL$

其中，N———整个银河系中，发射人类能检测到的电磁信号的地外文明总数

$R‹$———能够支持智慧生命的恒星形成率

f_p———能够支持智慧生命的恒星中，有行星环绕的恒星比例

n_e———每个恒星周围能实际支持生命的行星比例

f_l———能支持生命的行星中，实际有生命的行星比例

f_i———有生命的行星中，有智慧生命的行星比例

f_c———发射人类能检测到的信号的文明所占的比例

L———这些文明向太空发射信号的时长

在这个例子中，数学语言的使用让集体的构思有了成果，并且阐明了项目的参数。

费米悖论

物理学家恩利克·费米（1901—1954年）对地外文明也深感兴趣，他提出了所谓的费米悖论。根据费米的计算，目前为止，地外文明应该已经跟人类联系上了。但现在并没有，费米不禁问道：“他们都在哪儿呢？”

99 蝉会用数学保护自己的物种吗

数学概念：质数

要说昆虫富有数学智慧，你会觉得有趣吗？如果这种昆虫是周期蝉，答案肯定是有趣的。周期蝉生活在美国东部的森林里，属于周期蝉属，这个属共包括七个物种。当它们在树干上鸣叫求偶的时候，你可能听到过。

蝉与数学的关联在于它们独特的生命周期。大部分时间里，周期蝉都处于幼虫阶段，生活在地下，以植物的木质部（植物中将水分向上输送的组织）为食。几年后，它们破土而出，像蝴蝶一样，褪去自己的外壳，变成有翅膀的成虫，准备交配。蝉究竟何时破土而出呢？这取决于物种，这一刻通常是每隔13或17年，这两个数字并不寻常：13和17都是质数，只能被1和它本身除尽，5和11也是质数（参见第86章）。

蝉的生命周期为什么会蕴含质数呢？某些科学家推测，蝉基于质数的生命周期是为了智胜天敌。要了解质数是如何保护蝉不被其他动物消灭的，可以假设蝉每隔6年破土而出，由于6可以被1，2，3和6除尽，生命周期包含这几个数字的动物将与蝉的生活保持同步，这样一来，每一代初生的蝉更容易遭到攻击。不过，如果蝉选择在质数年份破土而出，蝉的幼虫在走向成熟的过程中，其他动物的幼虫恰好也在觅食的概率就小了很多。实际上，周期蝉可能是将质数当成了它们的自卫机制。

竹子

蝉不是唯一会根据天敌来选择繁衍周期的生物。日本竹每120年才开一次花，科学家推测，这么长的开花周期是为了等待以竹子的种子为食的啮齿类动物死绝，同时也能有效控制啮齿类动物的数量。不论它们种在哪里，都不重要———它们每120年才开一次花，就像钟表一样准时。

100二进制

数学概念：数制

我们对日常使用的数字太过熟悉，以致有时忽略了它们的某些特点。认真观察这些数字，你就会发现它们的奇特之处。所有数字都是由十个数字符号组成的：0，1，2，3，4，5，6，7，8，9，可是，为什么没有表示十的特殊符号呢？或者85？或者3001呢？

答案是，我们的数字采用的是十进制。在十进制中，每个数位都代表一个10的倍数，如果该位数是1，2，3或其他数字符号，我们就用它乘以相应的10的倍数。试看下面这个例子：

642

在这个数字中，2是从右到左的第一位数，这个数位是个位，代表10^0，所以，我们用2乘以1；第二位数是4，这个数位是十位，代表10^1，所以，我们用4乘以10；6是百位，代表10^2，所以，我们用6乘以100。因此，642表示6×100＋4×10＋2×1，结果是642。

除十进制之外，还存在其他数制吗？当然，其实它也是每台计算机的设计原理！那就是二进制，和十进制一样，它也是位值制。最右边的第一个数位是1，代表20，第二个数位是2，代表21，接下来的数位从右往左分别代表4，8和16。和十进制不同的是，二进制只有两个数字符号——1和0。如果要用二进制表示五这个数，应该写作：

101

表示4的数位上是1，表示2的数位上是0，表示1的数位上是1，最后的计算结果等于5（计算机采用二进制，主要是因为与十进制相比，1和0分别对应开和关，很容易区分）。

1和0

1和0也可以用来加密字母，二进制代码可以将每个字母转换成一串由八个1和0组成的独特数字。16世纪的思想家弗朗西斯·培根和17世纪的数学家兼哲学家戈特弗里德·莱布尼茨都研究过类似的代码。

Table of Contents

版权信息
作者简介
前　言
致　谢
第一部分 形　状
1 奇妙的罗马花椰菜
2 测量海岸线的长度
3 有趣和有效的肥皂泡
4 波洛克的画里有数学吗
5 科赫雪花
6 你生活在第四维空间吗
7 造出更好的传送带
8 鞋带与DNA的数学联系
9 地铁线路图遗漏了什么
10 日本折纸艺术
11 绳结背后的数学
12 自行车齿轮为什么大小不同
13 雨滴与泪珠的形状是不同的
14 交通标志为什么有不同的形状
15 五角大楼为什么是五角形
16 三角形
17 井盖为什么是圆的
18 乐高积木
19 会飞的四边形
20 疱疹和食盐有什么共同点
21 高尔夫球表面为什么有凹痕
22 高斯与比萨
23 短程线穹顶
24 数学幻想小说
25 足球不只是一个球
26 鲁比克魔方——玩具还是数学奇迹
27 纸张尺寸
28 用地图描绘地球的不同方式

29 M＆M巧克力豆
30 七巧板
31 天鹅绒绳的数学问题
32 吊桥是如何承重的
第二部分 行　为
33 公交车为什么成群出现
34 让你在赌场不再输钱
35 怎样让电影赢得奥斯卡奖
36 如何不被雨淋
37 最快的结账排队法
38 怎样准备图灵测试
39 六分仪
40 分摊房租
41 公平切蛋糕
42 让包裹配送更高效
43 算法对互联网体验有什么影响
44 解释蒙提霍尔问题
45 抛球杂耍背后的数学
46 纳什均衡
47 椋鸟群背后的数学
48 让堆放井然有序
49 法庭中的数学
50 40%的降水概率究竟是什么意思
51 基于数学的应试策略
52 免疫系统也会做数学
53 谷歌翻译的工作原理
54 不要紧跟前车行驶
55 巴西果效应
56 路多不代表流量少
57 一张纸能折多少次
58 真的有更好的登机方法
第三部分 图　案
59 铺嵌
60 领带的177 147种打法
61 音乐与数学鲜为人知的关联
62 围棋
63 棋盘与麦子

64 汉诺塔
65 鸽巢原理
66 迷宫
67 解开数独需要几条线索
68 梵高画里的数学图案
69 穿过一个房间堪称数学壮举
70 信息论
71 社交媒体的嫉妒
72 录音如何变成数字音乐文件
73 一张地图需要几种颜色
74 数学创造了孩子最喜欢的电影
75 糖果消消乐
76 你是否呼吸过恺撒的最后一口气
77 计算机的工作原理
78 同一天生日的概率
79 教堂钟与数学
80 贝叶斯统计
81 棒球与自责分率
82 细菌分裂
83 星盘
84 休止角
第四部分 特殊数字
85 让人大惊小怪的π
86 质数
87 网络安全
88 无穷性的奇迹和挫败
89 自然中的斐波那契数
90 杜威十进分类法
91 随机数真的是随机的吗
92 十的次方
93 公制单位
94 阿秒
95 艺术与建筑中的黄金比例
96 DNA 的黄金比例
97 孩子的玩具来画外次摆线
98 寻找外星人的数学原因
99 蝉会用数学保护自己的物种吗

100二进制