浸没边界法

IBFE的PPT

浸没边界法(Immersed Boundary Method, IBM)已广泛应用于模拟生物流体动力学(biological fluid dynamics)和其他流固耦合问题(Fluid Structure Interaction, FSI)中，这类问题的一个特点是结构体浸没在流动的流体中。浸没边界法的公式中，结构体的形变、应力、力使用了拉格朗日描述(Lagrangian description)，流固耦合系统(fluid-structure system)的动量、粘性、不可压性使用了欧拉描述(Eulerian description)。拉格朗日变量和欧拉变量通过与delta 函数核 做积分变换耦合起来。对连续方程离散后，拉格朗日方程在一个曲面网格上逼近，欧拉方程在笛卡尔网格上逼近。拉格朗日-欧拉相互作用方程中奇异的delta 函数核用正则化的delta 函数核替换。浸没边界法允许流体和浸没其中的结构体采用非协调网格离散，因此在数值求解过程中不需要动态生成贴体网格，这是浸没边界法的一个优点。特别是当结构体发生大变形、大位移，结构体之间接触时，这个优点特别重要。

浸没边界法的很多应用都是采用纤维系统来模拟浸没结构体的弹性，压缩、延展或弯曲。纤维系统可以描述很多生物学应用中遇到的各项异性材料，在生物流体动力学中也有很多成果，例如三维的心脏流体动力学模拟。纤维系统可以离散成一些通过直杆或者弹簧连接的点，因此在使用时很方便。但是纤维系统模型有一些不足，它很难描述真实材料的剪切性质。离散后的纤维系统中的点必须非常密集，否则在结构体发生大变形时流体会发生泄漏。

传统的浸没边界法大多使用纤维系统描述的弹性模型，它只是有限变形结构力学模型中的特殊情况，结构体的响应只与材料单个方向上的应变有关(例如，纤维方向上的应变)。事实上，浸没边界法的使用范围远不限于此，可以将它拓展到通用的有限变形结构力学模型。例如，Liu等人提出了浸没有限元方法(immersed finite element, IFE)，拉格朗日方程和欧拉方程均采用有限元方法离散；Devendran等人提出了一种基于能量泛函计算固体弹性力的方法。Boffi等人提出了完全变分形式的浸没边界法，可以避免使用delta 函数核；Gil等人对结构体采用无网格方法离散。

本文的主要创新点是在处理拉格朗日-欧拉相互作用方程的方法上。传统的浸没边界法中，力的延拓算子和速度的插值算子是拉格朗日网格节点与笛卡尔网格节点之间的直接作用。这种方法有个缺点，拉格朗日网格节点的物理间距如果比欧拉网格大，那么流体和固体的接触面处会产生很严重的流体泄漏现象，即流线会穿过固体。按经验，拉格朗日网格要比欧拉网格密2倍以上才能避免出现这种流体泄漏的现象，尤其是固体会发生大变形的问题。

这是浸没边界法提出以来长期存在的问题，本文提出的方法克服了这个问题。我们引入作用点的概念，作用点是拉格朗日网格单元中的数值积分点。拉格朗日网格的节点称为控制点，作用点是通过控制点来确定的。作用点比控制点密，可以将更多的拉格朗日网格上的信息传递到欧拉网格上，从而避免出现流体泄漏的现象。

Shankar等人提出过类似的方法。他们使用数据点(data sites)和样本点(sample sites)两个名词，对应本文中的控制点和作用点，他们使用径向基函数(radial basis function, RBF)代替了正则化的delta 函数核。不同的是，本文中的插值算子和延拓算子满足离散形式的对偶性

(discrete adjoint property)，意味着拉格朗日-欧拉相互作用的的过程中满足能量守恒性质。如果不满足这个性质，那么时间推进的过程中容易出现数值不稳定的现象。

对于弹性结构体，我们考虑运动方程的两种弱形式，分别称它们为统一弱形式和分离弱形式。统一弱形式和早期IB方法类似，用一项体积力密度描述浸没结构体的力学响应。分离弱形式用一项内部体积力密度和表面接触力密度，表面接触力密度只出现在结构体的表面。事实上，在数值格式中，统一弱形式将表面接触力密度正则化了，将它投影到了有限元空间中。分离弱形式则单独处理表面接触力密度，这在之前的浸没有限元方法从未这样使用过。在数值算例中，我们发现分离弱形式有个优点，拉格朗日网格即使远比欧拉网格粗，也能得到非常精确的数值结果。

数值结果中浸没结构体表现出的"贴水性"是本文提出的方法的一个重要特性，只要作用点足够密集，就能避免流体泄漏现象。对于形变非常大的物体，我们可以动态调整作用点的数量，仍能维持本算法的贴水性。在模拟浸没刚体的时候，我们发现，对于同一欧拉网格，使用粗拉格朗日网格得到的结果比使用细拉格朗日网格的结果误差小一个数量级。此外，和Liu等人提出的浸没有限元方法相比，本文改进的浸没有限元方法在结构体的体积守恒性上表现得也很好。