2 椭圆问题的有限元方法

有限元方法中的“元”是什么意思？有些书上说是网格单元，有些书上是说有限元空间的基函数。

一些相关的方法介绍：

1. Rayleigh-Ritz方法要求双线性型是对称的。
2. Galerkin方法是一个比较宽泛的概念，它不要求双线性型是对称的。
3. Petrov-Galerkin方法不要求测试函数空间和试探函数空间相同，只是要求它们的维度相同。
4. 有限元方法是Galerkin方法中的一种，使用分片多项式函数构造离散的函数逼近空间。
5. 加权余量法 我上网查了Galerkin方法和Rayleigh-Ritz方法的区别。 协调元

2.2 有限元空间的构造

有限元空间指的是有限元方法中使用的函数空间，我们将在这个函数空间中求解变分问题。我们将给定的区域Ω划分成有限多个子区域，并讨论每个子区域上的多项式函数。这里的子区域称为有限元方法中的"元"或者"元素"，"单元"。对于平面问题，元可以是三角形或者四边形，对于三维问题，我们可以使用四面体或六面体等。简单起见，我们的讨论限制在三角形单元或者四面体单元上的分片多项式逼近。

可以用具有以下特性的三元组$(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$定义一个有限元：

1. K⊂ Rd是具有分段光滑边界的闭集（元素）
2. P是K上函数的有限维空间（空间函数
3. N={N1, ..., Nn}是$\mathcal{P}'$（节点变量或自由度）的一组基函数。

? $\mathcal{P}'$ 是什么意思?

三元组$(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$定义了一个有限元，令$\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$ 为 $\mathcal{P}$ 对偶到 $\mathcal{N}$ 的基函数，也就是说$N_i(\psi_j)=\delta_{ij}$。也称之为$\mathcal{P}$的节点基。因此，对任意$v\in\mathcal{P}$都有

$$v(x)=\sum_{i=1}^{n}N_i(v)\psi_i(x)$$

成立。 令P_k为次数$\leq k$的多项式的集合

2.4 线形元

令 $K\subset\mathbb{R}^d$ 是一个单纯形，它的顶点为 $A_i(i=1,\cdots,d+1),\mathcal{P}=P_1$ ， $\mathcal{N}=\{N_1,\cdots,N_{d+1}\}$，其中$N_i(v)=v(A_i)\quad\forall v\in\mathcal{P}$。那么 $(K,\mathcal{P},\mathcal{N})$ 定义了一个有限元。

有限元的节点基 $\{\lambda_1(x),\cdots,\lambda_{d+1}(x)\}$ 满足

$$\lambda_i(x)\text{是线形的，并且}\lambda_i(A_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,\cdots,d+1\text{。}$$

2.5

ExAMPLE 2.5 (The Argyris element). Let K be a triangle in $\mathbb{R}^2,\mathcal{P}=P_5$ of dimension 21, $\mathcal{N}=$ the 21 degrees of freedom shown in Figure 2. "•" denotes the evaluation at that point, the inner circle denotes the evaluation of the gradient at the center, the outer circle denotes the evaluation of three second derivatives at the center, and the arrows represent the evaluation of the normal derivatives at three midpoints.

DEFINITION 2.8. A triangular (tetrahedral) mesh $\mathcal{M}_h$ is a partition of the domain Ω in $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ into a finite collection of triangles (tetrahedrons) $\{K_i\}$ satisfying the following conditions:

(i) The intersection of the interior of any two elements is empty;

(ii) $\cup K_i = \bar{\Omega}$;

(iii) No vertex of any triangle (tetrahedron) lies in the interior of an edge (a face or an edge) of another triangle (tetrahedron).

In this book, a triangular or tetrahedral mesh is called a *triangulation*, or simply a *mesh*.

一个有限元

例子2.10 协调线形元

采用例子2.4中的$(K, \mathcal{P}, \mathcal{N})$定义的有限元。因为任何分片线形函数在单元节点处都是连续的，我们引入

$$V_h = \{v : v|_K \in P_1, \quad \forall K \in \mathcal{M}_h,$$
$$v \text{ is continuous at the vertices of the elements}\}.$$

根据定理2.9，我们知道$V_h \subset H_1$，V_h是一个H_1-协调有限元空间

协调有限元空间