ch3 ~~Proj. least square orth. GR&QR.~~

- A ~~with cols l.i~~

~~proj C(A)~~ $P=A(A^TA)^{-1}A^T$ (A I 可以对称) 填空题多做几道

most important (应用题)

ch3 最小二乘. QR分解

ch4 三对角行列式的计算 (递推公式, 通项)

☆ ch5. most important. 特征值 对角化. 正交对角化 幂等矩阵.

ch6. SVD (填空5分或大题15分)

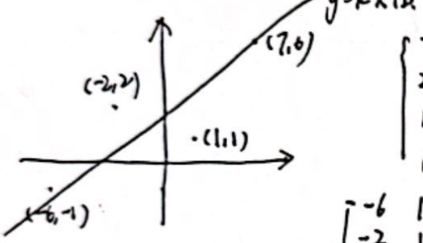
正定 二次型 (一个大题, 小题(可能) 共20分),

最小二乘

$Ax=b$

- $A^TAx=A^Tb$. 写成增广 $[A^T][A|b]$, 求解,

应用: 拟合成直线



$$\begin{cases} -1=-6k+b \\ 2=-2k+b \\ 1=1\cdot k+b \\ 6=7\cdot k+b. \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$y=ax^2+bx+c$

(1,1) (2,4)

$$\begin{cases} 1=a+b+c \\ 4=4a+2b+c \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \\ A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \\ b \end{bmatrix}$$

不要硬算, 想办法简化.

QR分解

$A_{m\times n}=Q_{m\times n}\cdot R_{n\times n}$ $(k\leq n)$. (只要线性无关就可以)

G-S时, 每步验证是否与前面正交.

$$u_3=v_3-\frac{w_1^Tv_3}{w_1^Tw_1}\cdot w_1-\frac{w_2^Tv_3}{w_2^Tw_2}\cdot w_2$$

分解时可以不管长度, 怎么方便怎么来

$A=QR$ $R=Q^TA$, 是上三角.

三对角

递推, 不要跳步

可以用数学归纳法.

特征值与对角化

$|A-\lambda I|=0 \Rightarrow \lambda$ (特根)

几何重数: 线性无关的特征向量

几何重=代数 可对角化

例: $A=\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda_1=\lambda_2=2$ $\lambda_3=3$

代数 2

$A-2I=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1个自由列, 1个线性无关 几何重数为 $1<2$

☆ 实对称矩阵一定可以正交对角化. (谱定理) $A=Q\Lambda Q^T$

验证 e-vals: 加起来和 trace 比.

酉对角化. $A=U\Lambda U^H$ $A^H=A$

二次型和正定

$$A=\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & & & \\ x_2 & & & \\ x_3 & & & \end{array}$$

$A=Q\Lambda Q^T$ $f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-4x_2^2-5x_3^2+4x_1x_3$

$$A=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & & \\ & -4 & \\ & & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & 0 & \frac{1}{\sqrt5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt5} & 0 & -\frac{2}{\sqrt5} \end{bmatrix}=Q\Lambda Q^T$$

$y=Qx$

$$f(x_1,x_2,x_3)=-\left(\frac{2}{\sqrt5}x_1+\frac{1}{\sqrt5}x_3\right)^2-4x_2^2-6\left(\frac{1}{\sqrt5}x_1-\frac{2}{\sqrt5}x_3\right)^2$$

$$A=LDL^T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & & \\ & -4 & \\ & & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SVD

$A=U\Sigma V^T$

U: e-vectors of AA^T

V: e-vectors of A^TA

step 1: find e-vals and e-vectors (ortho) A^TA to get V.

step 2: By $Av_i=\sigma_i u_i$, find $u_1 \sim u_r$

Step 3: find an orthonormal basis for $N(A^T)$ for the rest cols in U

$|A+B| \neq |A|+|B| \quad |AB| = |A||B|$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad |A^T| = |A|$ $\quad \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$

$|I_m - AB| = |I_n - BA| \longrightarrow$ proof $\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 = C_2 - AC_1} \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n - BA \end{bmatrix}$ $\quad |I_m||I_n - BA| = |I_n||I_m - AB|$

同证 $\begin{bmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 = r_1 - Ar_2} \begin{bmatrix} I_m - AB & 0 \\ B & I_n \end{bmatrix}$

Ch 5

1. A, A^T e-vals 相同, e-vectors 不同.

~~$A \sim \lambda \quad A^{-1} \sim \frac{1}{\lambda}$~~

2. A e-vals λ, A^{-1} e-vals $\frac{1}{\lambda}$, same e-vectors.
3. A e-vals λ, $f(A)$ evals $f(\lambda)$, same e-vectors.
4. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B) \quad tr(AB) = tr(BA)$

☆ 5. if A and B 都可对角化, AB 可对角化当且仅当 $AB = BA$

6. e-vals of $A+B \neq$ e-vals of A + e-vals of B

& 特征向量不变

7. $A \sim B$, then $A^T \sim B^T$ $(A \sim A^T)$, $A^{-1} \sim B^{-1}$, $A + A^{-1} \sim B + B^{-1}$, $A^k \sim B^k$; $A + I \sim B + I$, but $A + A^T$ not similar to $B + B^T$

Ch 6

1. A, B pos.def, $A+B$ pos.def
2. $A \cdot B$ pos.def, $A \cdot B$ not pos.def (unless $AB = BA$)
3. A pos.def, A^{-1} pos.def.
4. A pos.semidef, $A + kI \ (k>0)$ pos.def

e-vals: normal:

1. Hermitian: $A^H = A \quad \lambda$ are real
2. Skew-Hermitian: $A^H = -A \quad \lambda$ are imaginary (虚数)
3. unitary ~~matr~~: $U^H U = I \quad |\lambda| = 1$
4. rank-1 $\quad A = uv^T$, e-vals are 0 with 几何重数 $n-1$
   $A = u^T v$ $\quad$ 几何重数 1
   可对角化 unless $u^T v = 0$ (orthogonal)
5. $A^H A, AA^H$, e-vals are real and $\lambda \geq 0$
6. Projection matrices $P = A(A^T A)^{-1} A^T$, ~~e-vals~~
   $\lambda = 0$ 几何重数 $n-r$ $\quad \lambda = 1$ 几何重数 r
7. Idempotent matrices $A^2 = A$ (投影也是幂等矩阵)
   $\lambda = 0$ 几何重数 $n-r$ $\quad \lambda = 1$ 几何重数 r

rank

$A(A-I) = 0$ if $AB = 0$, $r(A) + r(B) \leq n$

$r(A) + r(B) \geq r(A+B)$

$n = r(I) \leq r(A) + r(A-I) \leq n$