Logique

Récursion primitive

Thomas Pietrzak
Licence Informatique

Université de Lille 1 Sciences et Technologies

Récursion primitive

Petit langage de programmation.

Tous les programmes terminent.

Numéral

Un **numéral** représente un nombre entier défini par

0 est un numéral

Si x est un numéral, Succ(x) est un numéral.

Exemple : Succ(Succ(0)) est le numéral qui représente l'entier 2

Notation : $Succ^n(0)$ = Succ(Succ(…(0))) avec n Succ

Fonctions primitives récursives

Soient h et g deux fonctions primitives récursives, x un numéral et $\vec{y}$ un vecteur de numéraux.

f définie comme suit est une fonction primitive récursive :

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y})$$
$$f(Succ(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y})$$

Exemple

Addition

add(0, y) = y

add(Succ(x), y) = Succ(add(x,y))

Exemple

add(Succ(Succ(0)), Succ(0)) = Succ(add(Succ(0), Succ(0)))

= Succ(Succ(add(0, Succ(0))))

= Succ(Succ(Succ(0)))

Syntaxe

Termes

Définition

L'ensemble $\mathcal{P}$ des termes primitifs récursifs est le plus petit ensemble contenant :

Constante : 0

Variables : a, b, …

Si t, b et s $\in \mathcal{P}$

Successeur : S(t)

Récurrence : Rec(t, b, (x, y)s)

où x est le prédécesseur de t et y le résultat de l'appel récursif

b est le cas de base et s le cas de récurrence

Notation

$S^n(0) = S(S(\ldots(0)))$ avec n S

Exemple

Addition

add(0, p) = p

add(Succ(x), p) = S(add(x,p))

Terme

Rec(n, p, (x,y) S(y))

Variables libres

$vl(0) = \emptyset$

$vl(x) = \{x\}$

$vl(S(t)) = vl(t)$

$vl(Rec(t, b, (x,y)s)) = vl(t) \cup vl(b) \cup (vl(s) - \{x, y\})$

Un terme est **clos** s'il n'a pas de variable libre.

Exemple

vl(Rec(n, p, (x,y) S(y))) =

Exemple

$vl(Rec(n, p, (x,y)\ S(y))) = vl(n) \cup vl(p) \cup (vl(S(y)) - \{x, y\})$

Exemple

$$vl(Rec(n, p, (x,y)\ S(y))) = vl(n) \cup vl(p) \cup (vl(S(y)) - \{x, y\})$$

$$= \{n\} \cup \{p\} \cup (\{y\} - \{x, y\})$$

Exemple

$$\mathrm{vl}(\mathrm{Rec}(n, p, (x,y)\ S(y))) = \mathrm{vl}(n) \cup \mathrm{vl}(p) \cup (\mathrm{vl}(S(y)) - \{x, y\})$$

$$= \{n\} \cup \{p\} \cup (\{y\} - \{x, y\})$$

$$= \{n, p\} \cup \varnothing$$

Exemple

$$\mathrm{vl}(\mathrm{Rec}(n, p, (x,y)\ S(y))) = \mathrm{vl}(n) \cup \mathrm{vl}(p) \cup (\mathrm{vl}(S(y)) - \{x, y\})$$

$$= \{n\} \cup \{p\} \cup (\{y\} - \{x, y\})$$

$$= \{n, p\} \cup \varnothing$$

$$= \{n, p\}$$

Substitution

$0[x \leftarrow u] = 0$

$y[x \leftarrow u] = u$ si $x = y$
$\quad y$ sinon

$S(t)[x \leftarrow u] = S(t[x \leftarrow u])$

$Rec(t, b, (x', y')s)[x \leftarrow u] = Rec(t[x \leftarrow u], b[x \leftarrow u], (x', y')s[x \leftarrow u])$

ni x' ni y' ne doivent être libres dans u

Exemple

$Rec(n, p, (x,y)\ S(y))[p \leftarrow S(x)]$

Exemple

$\mathrm{Rec}(n, p, (x,y)\ S(y))[p \leftarrow S(x)]$

$= \mathrm{Rec}(n, p, (x',y')\ S(y'))[p \leftarrow S(x)]$

Exemple

$\mathrm{Rec}(n, p, (x,y)\ S(y))[p \leftarrow S(x)]$

$= \mathrm{Rec}(n, p, (x',y')\ S(y'))[p \leftarrow S(x)]$

$= \mathrm{Rec}(n[p \leftarrow S(x)], p[p \leftarrow S(x)], (x',y')\ S(y')[p \leftarrow S(x)])$

Exemple

$\mathrm{Rec}(n, p, (x,y)\ S(y))[p \leftarrow S(x)]$

$= \mathrm{Rec}(n, p, (x',y')\ S(y'))[p \leftarrow S(x)]$

$= \mathrm{Rec}(n[p \leftarrow S(x)], p[p \leftarrow S(x)], (x',y')\ S(y')[p \leftarrow S(x)])$

$= \mathrm{Rec}(n, S(x), (x',y')\ S(y'[p \leftarrow S(x)]))$

Exemple

$\mathrm{Rec}(n, p, (x,y)\ S(y))[p \leftarrow S(x)]$

$= \mathrm{Rec}(n, p, (x',y')\ S(y'))[p \leftarrow S(x)]$

$= \mathrm{Rec}(n[p \leftarrow S(x)], p[p \leftarrow S(x)], (x',y')\ S(y')[p \leftarrow S(x)])$

$= \mathrm{Rec}(n, S(x), (x',y')\ S(y'[p \leftarrow S(x)]))$

$= \mathrm{Rec}(n, S(x), (x',y')\ S(y'))$

Sémantique

Environnement

Un **environnement** ρ associe une valeur entière aux variables.

$$\rho\{x \leftarrow n\}(y) = \begin{cases} n & \text{si } x = y \\ \rho(y) & \text{sinon} \end{cases}$$

Interprétation

Soit t un terme et ρ un environnement, l'**interprétation** de t dans ρ, notée $[\![t]\!]_\rho$ est :

$[\![0]\!]_\rho = 0$

$[\![x]\!]_\rho = \rho(x)$

$[\![S(t')]\!]_\rho = [\![t']\!]_\rho + 1$

$[\![\mathrm{Rec}(t', b, (x,y)s)]\!]_\rho = v_n$ où $n = [\![t']\!]_\rho$ et v_i $(0 \leq i \leq n)$ définis récursivement par :

$v_0 = [\![b]\!]_\rho$

$v_{k+1} = [\![s]\!]_{\rho'}$ avec $\rho' = \rho\{x \leftarrow k, y \leftarrow v_k\}$

Exemple

$$\rho\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 1\}$$

$[\![\text{Rec}(a, b, (x,y)S(y))]\!]_\rho = v_n$

Exemple

$\rho\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 1\}$

$[\![\text{Rec}(a, b, (x,y)S(y))]\!]_\rho = v_n$

$n = [\![a]\!]_\rho = \rho(a) = 2$

Exemple

$\rho\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 1\}$

$[\![\mathrm{Rec}(a, b, (x,y)S(y))]\!]_\rho = v_n$

$n = [\![a]\!]_\rho = \rho(a) = 2$

$v_n = v_2 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v1\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v1\}} + 1$

Exemple

$\rho\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 1\}$

$[\![\text{Rec}(a, b, (x,y)S(y))]\!]_\rho = v_n$

$n = [\![a]\!]_\rho = \rho(a) = 2$

$v_n = v_2 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v1\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v1\}} + 1$

$v_1 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 0,\, y \leftarrow v0\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v0\}} + 1$

Exemple

$$\rho\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 1\}$$

$[\![\text{Rec}(a, b, (x,y)S(y))]\!]_\rho = v_n$

$n = [\![a]\!]_\rho = \rho(a) = 2$

$v_n = v_2 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v1\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v1\}} + 1$

$v_1 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 0,\, y \leftarrow v0\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1,\, y \leftarrow v0\}} + 1$

$v_0 = [\![b]\!]_\rho = \rho(b) = 1$

Exemple

$\rho\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 1\}$

$[\![\text{Rec}(a, b, (x,y)S(y))]\!]_\rho = v_n$

$n = [\![a]\!]_\rho = \rho(a) = 2$

$v_n = v_2 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow v1\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow v1\}} + 1$

$v_1 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 0, y \leftarrow v0\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow v0\}} + 1$

$v_0 = [\![b]\!]_\rho = \rho(b) = 1$

$v_1 = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow 1\}} + 1 = \rho(y) + 1 = 1 + 1 = 2$

Exemple

$$\rho\{a \leftarrow 2, b \leftarrow 1\}$$

$[\![\text{Rec}(a, b, (x,y)S(y))]\!]_\rho = v_n$

$n = [\![a]\!]_\rho = \rho(a) = 2$

$v_n = v_2 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow v1\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow v1\}} + 1$

$v_1 = [\![S(y)]\!]_{\rho\{x \leftarrow 0, y \leftarrow v0\}} = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow v0\}} + 1$

$v_0 = [\![b]\!]_\rho = \rho(b) = 1$

$v_1 = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow 1\}} + 1 = \rho(y) + 1 = 1 + 1 = 2$

$v_n = v_2 = [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow 1, y \leftarrow 2\}} + 1 = \rho(y) + 1 = 2 + 1 = 3$

Calcul

Réduction

redex $\longrightarrow$ contractum

$\mathrm{Rec}(0, b, (x,y)s) \longrightarrow b$

$\mathrm{Rec}(S(t), b, (x,y)s) \longrightarrow s[x \leftarrow t, y \leftarrow \mathrm{Rec}(t, b, (x,y)s)]$

Règles additionnelles

Si $t \longrightarrow u$ alors $S(t) \longrightarrow S(u)$

Si $t \longrightarrow u$ alors $Rec(t, b, (x,y)s) \longrightarrow Rec(u, b, (x,y)s)$

Si $b \longrightarrow c$ alors $Rec(t, b, (x,y)s) \longrightarrow Rec(t, c, (x,y)s)$

Si $s \longrightarrow u$ alors $Rec(t, b, (x,y)s) \longrightarrow Rec(t, b, (x,y)u)$

Exemple

$\mathrm{add}(n, p)[n \leftarrow S(S(0)), p \leftarrow S(0)] = \mathrm{rec}(S(S(0)), S(0), (x,y)S(y))$

Exemple

$\mathrm{add}(n, p)[n \leftarrow S(S(0)), p \leftarrow S(0)] = \mathrm{rec}(S(S(0)), S(0), (x,y)S(y))$

$\longrightarrow S(y)[x \leftarrow S(0), y \leftarrow \mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y))]$

Exemple

$\mathrm{add}(n, p)[n \leftarrow S(S(0)), p \leftarrow S(0)] = \mathrm{rec}(S(S(0)), S(0), (x,y)S(y))$

$\longrightarrow S(y)[x \leftarrow S(0), y \leftarrow \mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y))]$

$= S(\mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y)))$

Exemple

$\mathrm{add}(n, p)[n \leftarrow S(S(0)), p \leftarrow S(0)] = \mathrm{rec}(S(S(0)), S(0), (x,y)S(y))$

$\longrightarrow S(y)[x \leftarrow S(0), y \leftarrow \mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y))]$

$= S(\mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y)))$

$\longrightarrow S(S(y)[x \leftarrow 0, y \leftarrow \mathrm{rec}(0, S(0), (x,y)S(y))])$

Exemple

$\mathrm{add}(n, p)[n \leftarrow S(S(0)), p \leftarrow S(0)] = \mathrm{rec}(S(S(0)), S(0), (x,y)S(y))$

$\longrightarrow S(y)[x \leftarrow S(0), y \leftarrow \mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y))]$

$= S(\mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y)))$

$\longrightarrow S(S(y)[x \leftarrow 0, y \leftarrow \mathrm{rec}(0, S(0), (x,y)S(y))])$

$= S(S(\mathrm{rec}(0, S(0), (x,y)S(y))))$

Exemple

$\mathrm{add}(n, p)[n \leftarrow S(S(0)), p \leftarrow S(0)] = \mathrm{rec}(S(S(0)), S(0), (x,y)S(y))$

$\longrightarrow S(y)[x \leftarrow S(0), y \leftarrow \mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y))]$

$= S(\mathrm{rec}(S(0), S(0), (x,y)S(y)))$

$\longrightarrow S(S(y)[x \leftarrow 0, y \leftarrow \mathrm{rec}(0, S(0), (x,y)S(y))])$

$= S(S(\mathrm{rec}(0, S(0), (x,y)S(y))))$

$\longrightarrow S(S(S(0)))$

Fermeture

S'il existe t, u, v_1, …, v_n tels que :

$v_1 = t$,

$v_n = u$

pour tout i ($1 \leq i \leq n$) $v_i \longrightarrow v_{i+1}$

alors $t \longrightarrow^* u$

$$t = v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_{n-1} \longrightarrow v_n = u$$

Équivalence

S'il existe t, u, v_1, …, v_n tels que :

$v_1 = t$,

$v_n = u$

pour tout i ($1 \leq i \leq n$) $v_i \longrightarrow v_{i+1}$ ou $v_{i+1} \longrightarrow v_i$

alors $t \simeq u$

$$t = v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow v_3 \longrightarrow \ldots \longleftarrow v_{n-1} \longleftarrow v_n = u$$

Normalisation

Forme Normale

t est en **forme normale** si $t \longrightarrow^* u \Rightarrow t = u$

Intuitivement : t ne peut pas être réduit.

Normalisable

t est **normalisable** s'il existe un terme u en forme normale tel que $t \longrightarrow^* u$

Théorème 1

Tous les termes clos sont soit sous la forme $S^n(0)$ soit contiennent un redex.

Démonstration

Par induction sur un terme clos t

$0 = S^0(0)$

Les variables ne sont pas en forme closes $\Rightarrow$ contradiction.

HR : si t est est clos, soit $t = S^n(0)$, soit t admet un redex : $\exists u.\ t \longrightarrow u$

Soit $S(t) = S^{n+1}(0)$,

soit $S(t)$ admet un redex $S(t) \longrightarrow S(u)$.

Soit $Rec(S^n(0), b, (x,y)s) \longrightarrow s[x \leftarrow S^{n-1}(0), y \leftarrow Rec(S^{n-1}(0), b, (x,y)s)]$,

soit $Rec(t, b, (x,y)s)$ admet un redex $Rec(t, b, (x,y)s) \longrightarrow Rec(u, b, (x,y)s)$

Corollaire 1

Tous les termes clos en forme normale sont sous la forme $S^n(0)$.

Théorème 2

Théorème de normalisation

Tous les termes clos sont normalisables.

Démonstration

Par induction sur un terme clos t

0 est en forme normale.

Les variables ne sont pas closes $\Rightarrow$ contradiction.

HR : si t est est clos alors t $\longrightarrow S^n(0)$.

S(t) $\longrightarrow S^{n+1}(0)$ en forme normale.

Rec(t, b, (x,y)s) $\longrightarrow$ Rec($S^n(0)$, b, (x,y)s)

Par récurrence sur n :

n = 0 : Rec(0, b, (x,y)s) $\longrightarrow$ b, en forme normale par HR

n > 0 : Rec($S^n(0)$, b, (x,y)s) $\longrightarrow$ s[x $\leftarrow S^{n-1}(0)$, y $\leftarrow$ Rec($S^{n-1}(0)$, b, (x,y)s)]

Rec($S^{n-1}(0)$, b, (x,y)s) $\longrightarrow S^k(0)$ par HR

Rec($S^n(0)$, b, (x,y)s) $\longrightarrow$ s[x $\leftarrow S^{n-1}(0)$, y $\leftarrow S^k(0)$], en forme normale par HR

Correction

Lemme

Transmission de l'interprétation dans les substitutions

$$[\![t]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]_\rho\}} = [\![t[x \leftarrow u]]\!]_\rho$$

Démonstration

$t = 0 \Rightarrow [\![0]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} = [\![0[x \leftarrow u]]\!]_\rho = [\![0]\!]_\rho$

$t = y \Rightarrow [\![y]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} = \rho\{x \leftarrow [\![u]\!]_\rho\}(y) = [\![u]\!]_\rho$ si $x = y$, $\rho(y)$ sinon $= [\![y[x \leftarrow u]]\!]_\rho$

$t = S(t') \Rightarrow [\![S(t')]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} = [\![t']\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} + 1 = [\![t'[x \leftarrow u]]\!]_\rho + 1$ (par HR) $= [\![S(t')[x \leftarrow u]]\!]_\rho$

$t = Rec(t', b, (x,y)s)$

$\Rightarrow [\![Rec(t', b, (x',y')s)]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} = v_n,$

$n = [\![t']\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} = [\![t'[x \leftarrow u]]\!]_\rho$ (HR)

$v_0 = [\![b]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} = [\![b[x \leftarrow u]]\!]_\rho$ (HR)

$v_{k+1} = [\![s]\!]_{\rho'\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}}$ avec $\rho' = \rho\{x' \leftarrow k, y' \leftarrow v_k\}$

$= [\![s[x \leftarrow u]]\!]_{\rho'}$ avec $\rho' = \rho\{x' \leftarrow k, y' \leftarrow v_k\}$ (HR)

$[\![Rec(t', b, (x',y')s)]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![u]\!]\rho\}} = [\![Rec(t'[x \leftarrow u], b[x \leftarrow u], (x',y')s[x \leftarrow u])]\!]_\rho$

$= [\![Rec(t', b, (x',y')s)[x \leftarrow u]]\!]_\rho$

Proposition

La réduction conserve la sémantique

$$\text{Si } t \longrightarrow u \text{ alors } [\![\, t \,]\!]_\rho = [\![\, u \,]\!]_\rho$$

Démonstration

$t = 0$ ou $t = x$ ➔ t se réduit à lui-même et la propriété est triviale.

$t = S(t') \longrightarrow S(u')$ ➔ $[\![S(t')]\!]_\rho = [\![t']\!]_\rho + 1 = [\![u']\!]_\rho + 1$ (par HR) $= [\![S(u')]\!]_\rho$

$t = Rec(0, b,(x,y)s) \longrightarrow b$ ➔ $[\![Rec(0, b,(x,y)s)]\!]_\rho = [\![b]\!]_\rho$

$t = Rec(S(t'), b,(x,y)s) \longrightarrow s[x \leftarrow t', y \leftarrow Rec(t', b, (x,y)s]$

➔ $[\![Rec(S(t'), b,(x,y)s)]\!]_\rho = v_n$ $\quad$ $n = [\![t']\!]_\rho$, $v_0 = [\![b]\!]_\rho$, $v_{k+1} = [\![s]\!]_{\rho'}$ avec $\rho' = \rho\{x \leftarrow k, y \leftarrow v_k\}$

$= [\![s]\!]_{\rho\{x \leftarrow n\text{-}1,\ y \leftarrow vn\text{-}1\}}$

$= [\![s]\!]_{\rho\{x \leftarrow [\![t']\!]\rho,\ y \leftarrow [\![Rec(t', b,(x,y)s)]\!]\rho\}}$

$= [\![s[x \leftarrow t', y \leftarrow Rec(t', b, (x,y)s]]\!]_\rho$ (Lemme)

$t = Rec(t', b,(x,y)s) \longrightarrow Rec(u, b,(x,y)s)$

➔ $[\![Rec(t', b,(x,y)s)]\!]_\rho = v_n$ $\quad$ $n = [\![t']\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho$ (HR), …

$= [\![Rec(u, b,(x,y)s)]\!]_\rho$

$t = Rec(t', b,(x,y)s) \longrightarrow Rec(t', c,(x,y)s)$ Idem

$t = Rec(t', b,(x,y)s) \longrightarrow Rec(t', b,(x,y)u)$ Idem

Corollaire 2

La normalisation conserve la sémantique

$$\text{Si } t \longrightarrow^* u \text{ alors } [\![t]\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho$$

Démonstration

Par récurrence sur la longueur de dérivation

$t \longrightarrow^{0} u$ alors $t = u$, et donc $[\![t]\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho$

$t \longrightarrow^{k+1} u$, alors il existe t' tel que $t \longrightarrow t' \longrightarrow^{k} u$

Par le corollaire on a $[\![t]\!]_\rho = [\![t']\!]_\rho$

Par HR on a $[\![t']\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho$

Donc $[\![t]\!]_\rho = [\![u]\!]_\rho$

Corollaire 3

Unicité de la forme normale

Pour tout terme clos t, si $t \longrightarrow^* S^n(0)$ et si $t \longrightarrow^* S^p(0)$, alors $n = p$

Démonstration

Soit t un terme clos

Si $t \longrightarrow^* S^n(0)$, d'après le corollaire 2 $[\![t]\!]_\rho = [\![S^n(0)]\!]_\rho$

Si $t \longrightarrow^* S^p(0)$, d'après le corollaire 2 $[\![t]\!]_\rho = [\![S^p(0)]\!]_\rho$

Donc $[\![t]\!]_\rho = [\![S^n(0)]\!]_\rho = [\![S^p(0)]\!]_\rho$ et donc $n = p$

Théorème 3

Pour tout terme clos t, si $t \longrightarrow^* S^n(0)$, alors $[\![t]\!]_\varnothing = n$

Démonstration

Soit t un terme clos tel que $t \longrightarrow^* S^n(0)$

D'après le corollaire 2, $[\![\, t \,]\!]_\varnothing = [\![\, S^n(0) \,]\!]_\varnothing$

On montre par récurrence que $[\![\, S^n(0) \,]\!]_\varnothing = n$:

$n = 0 \Rightarrow [\![\, 0 \,]\!]_\varnothing = 0$

$n = S^m(0) \Rightarrow [\![\, S^m(0) \,]\!]_\varnothing = [\![\, S(S^{m-1}(0)) \,]\!]_\varnothing$

$= [\![\, S^{m-1}(0) \,]\!]_\varnothing + 1$

$= m - 1 + 1$ (par HR)

$= m$

Théorème 4

Pour tout terme clos t, $[\![t]\!]_{\varnothing} = n$

Démonstration

Soit t un terme clos

D’après le théorème 2, t est normalisable, donc il existe u en forme normale tel que $t \longrightarrow^* u$

D’après le corollaire 1, il existe un n tel que $u = S^n(0)$, donc $t \longrightarrow^* S^n(0)$

D’après le théorème 3, $[\![t]\!]_\varnothing = n$

Limites

Fonction d'Ackermann

La **fonction d'Ackermann** n'est pas primitive récursive

Ack(0, p) = Succ(p)

Ack(Succ(n), 0) = Ack(n, Succ(0))

Ack(Succ(n), Succ(p)) = Ack(n, Ack(Succ(n), p)

Fonction d’Ackermann

Chaque niveau de la **fonction d’Ackermann** est primitif récursif

Ack(0, p) = Succ(p)

Ack(Succ(0), n) = Rec(n, Succ(Succ(0)), (x,y) Succ(y))

Ack(Succ(1), n) = Rec(n, Succ(Succ(Succ(0))), (x,y) Rec(y, Succ(Succ(0)), (x’,y’) Succ(y’)))

Fonction d’Ackermann

A(n, n) n’est pas primitif récursif

Ack(0, 0) = Succ(0)

Ack(Succ(n), Succ(n)) = Ack(n, Ack(Succ(n), n))

Intuitivement : on ne peut pas définir Ack(Succ(n), x) en fonction de Ack(Succ(n), y)

Algorithme du minimum

min(0, p) = 0

min(Succ(n), 0) = 0

min(Succ(n), Succ(p)) = Succ(min(n, p))

Intuitivement : on ne peut pas faire deux récurrences simultanées.

Système T
Gödel

Fonctions primitives récursives

La définition est similaire aux fonctions primitives récursives

les éléments de $\vec{y}$ peuvent être des fonctions

$$f(0, \vec{y}) = g(\vec{y})$$
$$f(Succ(x), \vec{y}) = h(x, f(x, \vec{y}), \vec{y})$$

Termes

Constante : 0

Variables : a, b, …

Si t, b et s sont des termes :

Successeur : S(t)

Fonctions : $\lambda x.t$

Récurrence : Rec(t, b, (x, y)s)

Typage

$$\dfrac{}{\vdash x : A}\, var \qquad \dfrac{}{\vdash 0 : N}\, N_{i0} \qquad \dfrac{t : N}{\vdash St : N}\, N_{is}$$

$$\dfrac{x : A \vdash t : B}{\vdash \lambda x.t : A \to B} \to_i \qquad \dfrac{\vdash t : A \to B \qquad \vdash u : A}{\vdash tu : B} \to_e$$

$$\dfrac{n : N \qquad b : A \qquad s : N \to A \to A}{\vdash rec(n, b, (x, y)s) : A}\, N_{is}$$

Théorème

Théorème de normalisation

Tous les termes clos sont normalisables.

Démonstration

Par induction sur un terme clos t

0 est en forme normale.

Les variables ne sont pas closes ⇒ contradiction.

HR : si t est est clos alors $t \longrightarrow S^n(0)$.

$S(t) \longrightarrow S^{n+1}(0)$ en forme normale.

$Rec(t, b, (x,y)s) \longrightarrow Rec(S^n(0), b, (x,y)s)$

Par récurrence sur n :

$n = 0$: $Rec(0, b, (x,y)s) \longrightarrow b$, en forme normale par HR

$n > 0$: $Rec(S^n(0), b, (x,y)s) \longrightarrow s[x \leftarrow S^{n-1}(0), y \leftarrow Rec(S^{n-1}(0), b, (x,y)s)]$

$Rec(S^{n-1}(0), b, (x,y)s) \longrightarrow S^k(0)$ par HR

$Rec(S^n(0), b, (x,y)s) \longrightarrow s[x \leftarrow S^{n-1}(0), y \leftarrow S^k(0)]$, en forme normale par HR