

- $u$ 가  $v$ 의 Dominator이면서  $v$ 가  $u$ 의 Dominator일 수 없다.  $v$ 를 통하는 어떠한 단순 경로는  $u$ 를 거치는데, 이 경로를  $u$ 에서 자르면  $v$ 를 거치지 않고  $u$ 를 도달하는 경로를 찾을 수 있기 때문이다. 대우 명제에 따라서,  $u \leq v$ 이면서  $v \leq u$ 이기 위해서는  $u = v$ 여야 한다.
- $u$ 가  $v$ 의 Dominator이면서  $v$ 가  $w$ 의 Dominator이면,  $u$ 는  $w$ 의 Dominator이다. 즉,  $u \leq v$ 이면서  $v \leq w$  이면  $u \leq w$ 이다.
- $u \neq v$ 일 때,  $u$ 가  $v$ 의 Dominator이거나  $v$ 가  $u$ 의 Dominator이다.  $s$ 에서  $x$ 를 지나는 모든 경로는  $u$ 와  $v$ 를 모두 포함한다. 둘이 Dominator 관계가 아니라면,  $u$  다음에  $v$ 를 지나는 경로  $P_1$ 과  $v$  다음에  $u$ 를 지나는 경로  $P_2$ 가 존재한다. 이들을 적당히 잘라서  $u$ 를 지나지 않는 경로  $s-x$ 를 찾을 수 있다. 고로 가정에 모순이다.

Total ordering에서는 최댓값이 유일하게 존재한다. 이 최댓값은  $v$ 의 Immediate Dominator와 일대일 대응한다. □

**Definition 3.**  $s$ 가 아닌 모든 정점  $v$ 에 대해서,  $(idom(v), v)$ 를 이은 간선 집합으로 이루어진 그래프를 Dominator Tree라고 한다.

**Theorem 2.** Dominator Tree는  $s$ 를 루트로 하는 트리이다.

*Proof.* Dominator 관계는 Total ordering이기 때문에 사이클이 없다. 사이클이 없고  $|E| = |V| - 1$ 인 그래프는 트리이다.  $s$ 를 루트로 할 시,  $idom(v)$ 는  $v$ 의 부모가 된다. 고로 기분이 좋다. □