南昌大学 2018-2019 学年第二学期期末考试试卷 A 答案

一、 填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、5； 2、 $z = x^2 + y^2 + 2$； 3、0； 4、 π； 5、3

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、A; 2、D; 3、C; 4、C; 5、C

三、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解： $F = e^z - z + xy - 3$,

$\vec{n} = (y, x, e^z - 1)$

$\vec{n}|_{(2,1,0)} = (1,2,0)$

切平面： $x + 2y - 4 = 0$

法线： $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$

2、解： $F(x,y,z) = z^2 y - xz^3 - 1$

$F_x = -z^3; F_y = z^2; F_z = 2zy - 3xz^2$

$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{-z^3}{2zy - 3xz^2}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{z^2}{2zy - 3xz^2}$

$x = 1, y = 0,$ 则 $z = -1$

则 $dz|_{(1,0)} = \frac{1}{3}(dx + dy)$

四、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：$P=\dfrac{y}{x^2+y^2},Q=\dfrac{-x}{x^2+y^2}$，则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\mathrm{x}^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$L_1: x^2+y^2=\varepsilon^2$ 顺时针

$\because \oint\limits_{L+L_1}=\iint\limits_{D}0dxdy=0$

又 $\int\limits_{L_1}=2\pi$

$\therefore \oint\limits_{L}=\oint\limits_{L+L_1}-\int\limits_{L_1}=\iint\limits_{D}0dxdy-\int\limits_{L_1}$

$=\text{-}2\pi$

2、解：$\because \dfrac{\partial P}{\partial y}=12xy-3y^2=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$

$\therefore$该积分与路径无关。

$I=\int_0^1 0dx+\int\limits_0^1 6y-3y^2dy$ 或 $I=\int_0^1 0dy+\int\limits_0^1 6x-1dy$

$=2$

五、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：设 Σ_0：$\boldsymbol{z=0}$ $\mathrm{x}^2+y^2\le 1$，取下侧

$\because \oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}=\iiint\limits_{\Omega}x^2+y^2+z^2dv=\dfrac{2\pi}{5}$

$\iint\limits_{\Sigma_0}=-\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}dxdy=-\pi$

$\therefore I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}-\iint\limits_{\Sigma_0}$

$I=\dfrac{7\pi}{5}$

2、解：$u_n(x)=(2n+1)x^{2n+1}$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}|=x^2$

$x^2<1$时收敛；$x^2>1$时发散。

$x=1:\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)$发散；$x=-1:\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+1}(2n+1)$发散

$\therefore$收敛域为（-1，1）

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(x^{2n+1})'$$

$$=x(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})'=x(\frac{x}{1-x^2})'$$

$$=\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\quad(-1,1)$$

六、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：$\mathrm{ds}=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}dxdy$

$S_1=\iint\limits_{\Sigma}ds=\sqrt{2}\iint\limits_{D}dxdy$ D: $\mathrm{x}^2+y^2\le 1$

$=\sqrt{2}\pi$

$S=\pi+\sqrt{2}\pi=(\sqrt{2}+1)\pi$

$V_{圆锥}=\frac{1}{3}\pi 1^2\times 1=\frac{1}{3}\pi$

2、解：设$\mathrm{z}=x^2+y^2$上的点(x,y,z)到平面$x+y-2z=2$之间的距离

$$d=\frac{|x+y-2z-2|}{\sqrt{6}}$$

$$F=(x+y-2z-2)^2+\lambda(x^2+y^2-z)$$

$$F_x=2(x+y-2z-2)+2\lambda x=0$$

$$F_y=2(x+y-2z-2)+2\lambda y=0$$

$$F_z = -4(x+y-2z-2) - \lambda = 0$$

$$\mathrm{z} = x^2 + y^2$$

解方程组可得唯一的驻点$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8})$

易知$d = \frac{|x+y-2z|}{\sqrt{6}}$在条件下存在最大值,则$d_{\max} = \frac{7}{4\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{24}$

七、证明题（6 分）

证：由$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n+1} - u_n}{(u_n - 1)(u_{n+1} - 1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1})$ 收敛

则 $S_n = \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_2 - 1} + \frac{1}{u_2 - 1} - \frac{1}{u_3 - 1} + \cdots\cdots + \frac{1}{u_n - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$

$= \frac{1}{u_1 - 1} - \frac{1}{u_{n+1} - 1}$ 收敛

又$\{u_n\}$非无穷大 则 $\{u_n\}$收敛，$\therefore$不妨设$|u_n| < M, n$充分大时

$\therefore |u_n v_n| \le M|v_n|, n$充分大时，　又已知$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛

所以 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_n)$ 绝对收敛