南昌大学 2017-2018 学年第二学期期末考试试卷 A 答案

一、 填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、$\{(x,y)\,|\,0\le x^2+y^2<2,4y\ge x^2,x^2+y^2\ne 1\}$；2、$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$；3、$-1$；

4、$\dfrac{20}{3}$；　5、$\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\dfrac{x-1}{3})^n,|x-1|<3$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、D;　2、A;　3、D;　4、B;　5、C

三、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：特征方程为：$r^2+2r-3=0$, 得 $r_1=1,r_2=-3$,

设特解为 $y^*=ax+b$,

代入原方程得 $2a-3(ax+b)=x$, 得 $a=-\dfrac{1}{3},b=-\dfrac{2}{9}$,

从而通解为 $y=c_1e^x+c_2e^{-3x}-\dfrac{x}{3}-\dfrac{2}{9}$，$c_1,c_2$ 为任意实数

2、解：方程组两边对 x 求导得

$$\begin{cases}2x+2yy'+2zz'=3\\2-3y'+5z'=0\end{cases}，即\begin{cases}2yy'+2zz'=3-2x\\-3y'+5z'=-2\end{cases}$$

解之得

$$y'=\frac{\begin{vmatrix}3-2x & 2z\\-2 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2y & 2z\\-3 & 5\end{vmatrix}}=-\frac{10x-4z-15}{2(5y+3z)}$$

$$z' = \frac{\begin{vmatrix} 2y & 3-2x \\ -3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{4y+6x-9}{2(5y+3z)}$$

四、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解： $\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + (-\frac{y}{x^2}) f_2' + \frac{1}{y} g'$

$\frac{\partial z}{\partial y} = xf_1' + (\frac{1}{x}) f_2' + (-\frac{x}{y^2}) g'$

代入，得

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = x(yf_1' + (-\frac{y}{x^2}) f_2' + \frac{1}{y} g') + y(xf_1' + (\frac{1}{x}) f_2' + (-\frac{x}{y^2}) g')$$

$$= 2xyf_1'$$

2、解：令 $F(x,y,z) = \arctan\frac{y}{x} - z$，

则 $F_x{}' = -\frac{y}{x^2+y^2}$， $F_y{}' = \frac{x}{x^2+y^2}$， $F_z{}' = -1$

$F_x{}'(1,1,\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{2}, F_y{}'(1,1,\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}, \vec{n} = (1,-1,2)$

切平面方程为： $(x-1)-(y-1)+2(z-\frac{\pi}{4}) = 0$

法线方程为： $\frac{x-1}{1} = -\frac{y-1}{1} = \frac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$

五、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：在 ox 轴上作连接点 $o(0,0)$ 与点 $A(a,0)$ 的辅助线 l_1，方向由点 o 指向 A。

由格林公式得

$$\oint_{l+l_1}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=\iint_D mdxdy=\frac{\pi ma^2}{8}$$

因为 $\int_{l_1}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy=0$

所以 原式$=\oint_{l+l_1}-\int_{l_1}=\frac{\pi ma^2}{8}$

2、解：令$\sum_1$:$z=0,(x^2+y^2\le 4)$，取下侧。

设Ω为$\sum_1$与$\sum$围成的空间区域。由高斯公式得

$$(\iint_{\sum_1}+\iint_{\sum})yzdzdx+2dxdy=\iiint_{\Omega}zdxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^2 r^3\sin\varphi\cos\varphi dr=4\pi$$

又 $\iint_{\sum_1}yzdzdx+2dxdy=\iint_{\sum_1}2dxdy=-\iint_{x^2+y^2\le 4}2dxdy=-8\pi$

故 原式$=\iiint_{\Omega}zdxdydz-\iint_{\sum_1}yzdzdx+2dxdy=12\pi$

六、计算题（8 分）

1、解：椭圆上点(x,y)点到直线$2x+3y\text{-}6=0$的距离为

$$d=\frac{|2x+3y\text{-}6|}{\sqrt{4+9}},d^2=\frac{(2x+3y\text{-}6)^2}{13},$$

作拉格朗日函数$L(x,y)=(2x+3y\text{-}6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$

得$\begin{cases}4(2x+3y-6)+2\lambda x=0\\6(2x+3y-6)+8\lambda y=0\\x^2+4y^2-4=0\end{cases}$

解之得$x=\pm\frac{8}{5},y=\pm\frac{3}{5}$

从而$d_{\min}=\frac{\sqrt{13}}{13}$

2、解：令 $p=2xy$，则

$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=2x$，故 $Q(x,y)=x^2+f(y)$，

因为

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^1(t^2+f(y))dy=t^2+\int_0^1 f(y)dy$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xydx+Q(x,y)dy=\int_0^t(1+f(y))dy$$

故 $t^2+\int_0^1 f(y)dy=\int_0^t(1+f(y))dy$

上式两边对 t 求导得

$2t=1+f(t),f(t)=2t-1$，故 $f(y)=2y-1$

从而　$Q(x,y)=x^2+2y-1$

七、证明题（6 分）

证明：因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$

所以 $f(0)=0, f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0,$

又因为 $f''(x)>0$，故 $f'(x)$ 单调递增，从而当 $x>0$ 时

$f'(x)>f'(0)=0$

即 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增且 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0,$

从而 $u_n=f(\frac{1}{\sqrt{n}})>0$ 单调减少趋于 0，

因此由交错级数的莱布尼茨定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}f(\frac{1}{\sqrt{n}})$ 收敛。