南昌大学 2016-2017 学年第二学期期末考试试卷答案

一、填空题（每空 3 分，共 15 分）

1、$\{(x,y)\,|\,x+y\ge 0, x^2+y^2\ne 1\}$；2、$e^y$；3、$2(x-1)+2(y-1)-(z-2)=0$；

4、$\frac{3}{4}$；　　5、$(C_1+C_2x)e^{3x}$

二、单项选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1、D;　　2、D;　　3、D;　　4、D;　　5、D

三、计算题（每小题 8 分，共 24 分）

1、解：$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin(xy)+x^2y\cos(xy)$；

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3x^2\cos(xy)-x^3y\sin(xy)$$

2、解：$\iint\limits_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy=\iint\limits_D drd\theta$

$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}dr$$

$$=\int_0^{\pi}2\sin\theta d\theta=4$$

3、解：特征方程为：$r^2+1=0$；　$r_{1,2}=-i$；

对应的齐次方程的通解为：$y=C_1\cos x+C_2\sin x$

因为$-i$是特征方程的根，可设特解为$y^*=x(a\cos x+b\sin x)$

代入，得　$a=-\frac{1}{2}$，　$b=0$

非齐次方程的通解为：$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{2}x\cos x$

四、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：添加路径 $\overrightarrow{BA}$, 使得 L+ $\overrightarrow{BA}$ 成为闭路, 设闭路所围的区域为 D

原式= $\oint\limits_{L+\overrightarrow{BA}}(\frac{\sin y}{x}+2y)dx+(\cos y\ln x+3x)dy$

$$-\oint\limits_{\overrightarrow{BA}}(\frac{\sin y}{x}+2y)dx+(\cos y\ln x+3x)dy$$

$$=\iint\limits_{D}dxdy=\frac{\pi}{2}$$

2、解：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{3^{n+1}}{n+2}}{\frac{3^n}{n+1}}=3$， $R=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{3}$

当 $x=\frac{1}{3}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 发散，当 $x=-\frac{1}{3}$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$ 收敛。所以，收敛域为 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

令 $s(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n+1}x^n, x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$， 令 $t=3x$， $T(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n+1}$ 。

则 $[tT(t)]'=\sum\limits_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$

两边积分得：$tT(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$

$$s(x)=\begin{cases}-\dfrac{\ln(1-3x)}{3x}, & x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}),\ \ x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$ 。

五、计算题（每小题 8 分，共 16 分）

1、解：令 $F(x,y,z)=x^2-2y^2+z^2-xyz-4x+2z-6$

在点 $(0,1,2)$ 处， $F_x{}'=2x-yz-4=-6$，

$$F_y{}'=-4y-xz=-4，$$

$$F_z' = 2z - xy + 2 = 6$$

取法向量$\vec{n} = \{-3,-2,3\}$

切平面方程：$-3x - 2(y-1) + 3(z-2) = 0$

法线方程：$\frac{x}{-3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-2}{3}$

2、解：目标函数：　$R(x,y) = 80x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$

约束条件：$600x + 2000y = 400000$

或：$3x + 10y = 2000$

令$L(x,y,\lambda) = 80x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}} + \lambda(3x + 10y - 2000)$，

则$\begin{cases} L_x = 60x^{-\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{4}} + 3\lambda = 0 \\ L_y = 20x^{\frac{3}{4}}y^{-\frac{3}{4}} + 10\lambda = 0 \\ L_\lambda = 3x + 10y - 2000 = 0 \end{cases}$，

$\frac{x}{3y} = \frac{10}{3}$，　$x = 500$，$y = 50$。即劳动力数为 500，原材料数为 50

六、计算题（8 分）

解：$\oiint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy = \iiint\limits_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$

$= \iiint\limits_{\Omega} 3r^4 \sin\varphi dr d\theta d\varphi = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^2 r^4 dr$

$= \frac{384}{5}\pi$

七、证明题（6 分）

证明：因为正项数列$\{a_n\}$单调递减，$\{a_n\}$存在极限。

又级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$。

而$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \frac{1}{1+a} < 1$，由柯西判别法，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$收敛。