



ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۲-۰۱

مدرس: آبام

زمان آزمون: ۸ دی

درخت دودویی جستجو و مجموعه‌های مجزا

تمرین سری سوم

مسئله‌ی ۱.

ثابت کنید در زمان $O(n \log n)$ نمی‌توان n عدد را بصورت درخت دودویی جستجو درآورد.

مسئله‌ی ۲.

مسئله درخت دودویی جستجوی (د.د.ج) بهینه با n عدد را در نظر بگیرید. در مسئله د.د.ج بهینه n عدد به همراه تعداد دفعاتی که پرسمان خواهند شد داده می‌شود. هدف ساخت یک د.د.ج است به گونه‌ای که مجموع حاصلضرب پرسمان اعداد در عمق آن‌ها در د.د.ج کمینه شود. الگوریتم حریصانه زیر را در نظر بگیرید. عدد با بیشترین پرسمان را در ریشه درخت قرار می‌دهیم. براساس ریشه مشخص شده اعداد باقی‌ماده براساس خاصیت د.د.ج در یکی از زیردرخت‌های چپ یا راست قرار می‌گیرند. بصورت بازگشتی زیردرخت چپ و راست را می‌سازیم. کوچکترین n ی که این الگوریتم حریصانه درست کار نمی‌کند چند است.

مسئله‌ی ۳.

چند درخت دودویی جستجوی متفاوت با n گره و برچسب‌های ۱ تا n وجود دارد طوری که پیمایش پیش‌ترتیب و میان‌ترتیب آن‌ها یکسان باشد؟ دلیل خود را ذکر کنید.

مسئله‌ی ۴.

اعداد ۱ تا ۵۰۰ را در یک درخت دودویی جستجو ذخیره کرده‌ایم. می‌خواهیم عدد ۱۹۳ را در این درخت جستجو کنیم. کدام یک از دنباله‌های زیر نمی‌تواند مسیر جستجو برای عدد ۱۹۳ باشد. دلیل خود را ذکر کنید.

۱. ۱۹۳، ۲۰۰، ۱۵۰، ۲۵۰، ۱۰۰، ۳۰۰، ۴۵۴، ۵

۲. ۱۹۳، ۱۵۰، ۱۰۰، ۵۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰

۳. ۱۹۳، ۱۴۳۱۹۰، ۲۰۱، ۲۳۱، ۲۳۷، ۱۵۷، ۴۳۷

۴. ۱۹۳، ۱۷۷، ۱۰۵، ۱۰۲، ۱۰۱، ۵۵، ۳۰، ۲۰، ۴

مسئله‌ی ۵.

فرض کنید یک درخت دودویی جستجو با n گره داریم. به ازای گره v از این درخت وزن آن را تعداد گره‌ها در زیر درخت به ریشه v (شامل v) در نظر بگیرید. می‌دانیم در درخت فوق به ازای هر گره‌ی داخلی v نسبت وزن فرزند چپ و فرزند راست حداقل ۰.۵ و حداکثر ۲ است. بهترین کران بالا برای زمان جستجو در این درخت در بدترین را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۶.

یک درخت دودویی جست و جو متوازن با n گره داریم که به علت نويز، اعداد ذخيره شده در برخي از گره‌هاي آن تغيير کرده است. تنها عملي که مي‌توان براي اصلاح اين درخت انجام داد جابه‌جا کردن مقادير ذخيره شده در یک گره و یکی از فرزندان آن است. در بدترین حالت با چند عمل فوق می‌توان درخت را به درخت دودویی جست و جو معتبر تبدیل کرد.

مسئله‌ی ۷.

درستی یا نادرستی جملات زیر در مورد درخت دودویی جست و جو (د.د.ج) را با ذکر دليل مشخص کنید.

۱. اگر یک عنصر موجود در د.د.ج را حذف و بلافاصله درج کنیم، د.د.ج قبل و بعد از دو عمل فوق یکسان است.
۲. هر د.د.ج را می‌توان با چند عمل چرخش (rotation) به یک د.د.ج متوازن تبدیل کرد.
۳. عدد بلافاصله بعد از x در ترتیب صعودی، لزوماً در زیردرخت به ریشه گره‌ای که x در آن ذخیره شده قرار نمی‌گیرد.

مسئله‌ی ۸.

فرض کنید یک درخت دودویی با n گره داده شده است. درخت لزومن متوازن نیست. به ازای هر گره u از درخت، اندازه دو زیردرخت سمت چپ و راست آن را محاسبه کرده و مینیمم این دو را به عنوان برجسب گره u در نظر می‌گیریم. منظور از اندازه یک زیردرخت تعداد گره‌های آن می‌باشد. اگر زیردرختی تهی باشد اندازه آن را صفر در نظر می‌گیریم. نشان دهید مجموع برجسب‌ها از مرتبه $O(n \log n)$ است.

مسئله‌ی ۹.

درستی عبارات زیر را با ذکر دليل مشخص کنید.

۱. گره‌های هر درخت دودویی جست و جو را می‌توان با رنگ‌های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز-سیاه شود.
۲. ب گره‌های هر درخت دودویی جست و جو با n عنصر و ارتفاع حداکثر $2 \log n$ را می‌توان با رنگ‌های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز-سیاه شود.
۳. یک درخت دودویی جست و جوی کاملاً متوازن را می‌توان با رنگ‌های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز-سیاه شود.

مسئله‌ی ۱۰.

در درخت بازه توضیح داده شده در کلاس، فرض کنید می‌خواهیم به ازای عدد داده شده x تمام بازه‌هایی که نقطه x را شامل می‌شوند گزارش دهیم. چه تغییرات در روال پاسخ‌دهی به پرسمان باید ایجاد کنیم. زمان پاسخگویی به پرسمان را برحسب n و k مشخص کنید که n و k به ترتیب تعداد بازه‌های ذخیره شده در درخت بازه و تعداد بازه‌هایی که x را شامل می‌شوند می‌باشند.