مسئله‌ی ۱.

فرض کنید برای درهم‌سازی n کلید متمایز از روش درهم‌سازی زنجیره‌ای استفاده شده است. تابع درهم‌سازی ساده و یکنوا و اندازه آرایه m می‌باشد. امید ریاضی تعداد برخوردها (تعداد جفت کلیدهایی که به یک خانه نگاشت می‌شوند) برحسب m و n چه پیچدگی محاسباتی دارد؟

مسئله‌ی ۲.

فرض کنید از روش آدرس‌دهی باز با استفاده از وارسی خطی برای درهم‌سازی استفاده شده است. اندازه جدول درهم‌سازی ۱۰ و تابع درهم ساز $h(x) = x^{۲} \bmod ۱۰$ است. با فرض آنکه ورودی‌ها به ترتیب $۵, ۱۷, ۵۳, ۱۲۳, ۳۷, ۵۲, ۴۹, ۳۰, ۱, ۱۹$ (از چپ به راست) باشد، اعداد به چه ترتیب در جدول ذخیره می‌شوند.

مسئله‌ی ۳.

وضعیت فعلی یک جدول درهم‌ساز در زیر آمده است. فرض کنید برای رفع مشکل تصادم از روش وارسی خطی استفاده شده است. با در نظر گرفتن فرض یکنواختی تابع درهم‌ساز، کلید بعدی با چه احتمالی در خانه‌ی دوم قرار می‌گیرد؟ (خانه‌های جدول از چپ به راست از ۱ تا ۱۸ شماره‌گذاری شده‌اند.)

$$H[۱..۱۸] = \{۶, -, ۱, -, ۳, -, ۱۴, -, ۹, ۲, -, ۱۱, -, -, -, ۰, ۴, ۵\}$$

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید از آدرس‌دهی باز و وارسی خطی برای درهم‌سازی استفاده شده و تابع درهم سازی $i^{۲}$ به پیمانه ۷ است. بعد از دریافت همه اعداد $۰, \ldots, ۶$ می‌دانیم نحوه‌ی قرار گیری اعداد در جدول درهم‌ساز به صورت زیر است:

$$A[۰, .., ۶] = ۰, ۶, ۴, ۳, ۱, ۵, ۲$$

به ازای چند جایگشت ورودی وضعیت جدول درهم‌ساز به شکل بالا خواهد بود.

مسئله‌ی ۵.

جدول درهم‌سازی ۱۰ خانه‌ای و تابع درهم‌ساز $h(x) = ۳x + ۵ \mod ۱۰$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است. توضیح دهید.

۱. احتمال آن که ورودی $x = ۴$ به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۱/۱۰ است.

۲. احتمال آن که ورودی $x = ۴$ به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۰ است.

۳. احتمال آن که ورودی $x = ۴$ به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۱ است.

۴. احتمال آن که دو ورودی مختلف به یک خانه نگاشت شوند برابر ۱/۱۰ است.

مسئله‌ی ۶.

اگر اعداد ۱ تا n را به ترتیب تصادفی در یک درخت جست‌وجوی دودویی درج کنیم، رابطه‌ی بازگشتی امید ریاضی ارتفاع این درخت را بدست آورید.

مسئله‌ی ۷.

فرض کنید $H : \{1, \cdots, n\} \rightarrow \{1, \cdots, n\}$ یک تابع درهم‌ساز یکنواخت باشد. برای ورودی x، عدد z را برابر تعداد صفرهای سمت راست $H(x)$ قرار می‌دهیم. برای عدد $0 \leqslant c \leqslant 1$، احتمال $z \geqslant c \log n$ از چه مرتبه‌ای است؟ فرض کنید c ثابت است.

.

مسئله‌ی ۸.

الگوریتمی را در نظر بگیرد که ورودی $a_1, \ldots, a_n$ شامل n عدد مجزا را به ترتیب داده‌شده می‌خواند و هنگام خواندن a_i مقدار متغیر x را به احتمال $1/i$ برابر a_i قرار می‌دهد. الگوریتم در پایان مقدار x را به عنوان خروجی گزارش می‌کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم برابر a_i است؟

مسئله‌ی ۹.

ثابت کنید اگر H یک خانواده ۲ـ سراسری از توابع درهم‌ساز باشد، یک خانواده سراسری نیز خواهد بود.

مسئله‌ی ۱۰.

فرض کنید می‌خواهیم درون یک جدول درهم‌سازی با خانه‌های $\{0, 1, ..., m-1\}$ دنبال عنصر داده‌شده‌ی k بگردیم. همچنین تابع درهم‌سازی $h : \mathcal{I} \rightarrow \{0, 1, ..., m-1\}$ که $\mathcal{I}$ نمایش‌دهنده‌ی فضای عناصر می‌باشد را در اختیار داریم. روش جست‌وجوی ما در زیر آمده است:
۱) مقدار $i \leftarrow h(k)$ را محاسبه کن و $j \leftarrow 0$ قرار بده.
۲) در درایه‌ی i به دنبال k بگرد. اگر آن را یافتی یا اگر درایه خالی بود جست‌وجو را متوقف کن.
۳) $j \leftarrow (j+1) \; mod \; m$ و $i \leftarrow (i+j) \; mod \; m$ قرار بده و به مرحله‌ی ۲ برگرد.
فرض کنید m توانی از ۲ است.

۱. نشان دهید که این روش یک روش از روش کلی وارسی درجه ۲ است. این کار را با تعیین مقدارهای مناسب برای ثابت‌های c_1 و c_2 انجام دهید.

۲. ثابت کنید این الگوریتم در بدترین حالت هر درایه از جدول را وارسی می‌کند.

مسئله‌ی ۱۱.

فرض کنید σ یک چایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد. امیدریاضی تعداد i هایی را بدست آورید که $\sigma_i = i$.

مسئله‌ی ۱۲ .

فرض کنید σ یک چایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد. امیدریاضی تعداد وارونه‌ها را بدست آورید. یک وارونه، یک زوج (i, j) است بطوری که $i < j$ اما $\sigma(i) > \sigma(j)$.

مسئله‌ی ۱۳ .

یک رشته از حروف انگلیسی به طول n داریم. به یک زیررشته از آن «پالیندروم» گفته می‌شود، اگر و تنها اگر آن رشته از دو طرف (چپ به راست و راست به چپ) به صورت یکسان خوانده شود. برای مثال رشته‌ی abba پالیندروم است، ولی رشته‌ی abaa پالیندروم نیست. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \times \log(n))$ ارائه دهید که تعداد تمام زیررشته‌های پالیندروم رشته‌ی اصلی را پیدا کند (اگر زیررشته‌ای چندین بار در رشته‌ی اصلی تکرار شده بود، آن را به تعداد تکرارهایش می‌شماریم).

مسئله‌ی ۱۴ .

به دو درخت T_1 و T_2 یک‌ریخت می‌گوییم، اگر و تنها اگر بتوان این دو درخت را از راسی ریشه‌دار کرد و سپس به بچه‌های هر راس ترتیبی داد که دو درخت دقیقاً یکسان شوند. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n \times \log(n))$ ارائه دهید که برای دو درخت داده‌شده‌ی T_1 و T_2 با سایز برابر n مشخص کند که آیا این دو درخت یک‌ریخت هستند یا خیر.

مسئله‌ی ۱۵ .

دنباله‌ی $a_1, \ldots, a_n$ داده شده‌است که $1 \leqslant a_i \leqslant k$ است. به یک دنباله از اعداد که تعداد تکرار تمام اعداد ۱ تا k در آن برابر باشد (یعنی تعداد ۱ های دنباله برابر تعداد ۲ های دنباله، برابر تعداد ۳ های دنباله، ... و برابر تعداد k های دنباله باشد) طلایی می‌گوییم. الگوریتمی از $O(n)$ ارائه دهید که تعداد زیردنباله‌های متوالی طلایی دنباله‌ی a را محاسبه کند.

مسئله‌ی ۱۶ .

رشته A را **ریشه** یک رشته دیگر مانند B می‌گوییم اگر A یک جایگشت از حروف رشته B باشد. به طور مثال رشته‌های (indicatory, dictionary) و (brush, shrub) زوج مرتبی از کلمات هستند که ریشه یک‌دیگر اند. در این مسئله تمام رشته‌ها به صورت $ASCII$ می‌باشند و فقط شامل حروف انگلیسی کوچک از a تا z هستند. دو رشته A و B داده شده است، **تعداد زیررشته ریشه** برای رشته B در A برابر با است با تعداد زیررشته‌های مجاور از A به طوری که ریشه B هستند. به طور مثال، اگر $A =$ 'esleastealaslatet' و $B =$ 'tesla' باشد، در این صورت سه‌تایی مرتب ('least', 'steal', 'slate') را در نظر بگیرید و خواهیم داشت تعداد زیررشته‌های ریشه از B در A برابر با ۳ خواهد بود.

الف) رشته A و عدد طبیعی k داده شده است. یک داده ساختار ارائه دهید که می‌تواند در زمان $O(|A|)$ ساخته شود و اگر یک رشته دیگر مانند B به طوری که $|B| = k$ باشد داده شود، بتواند تعداد زیررشته‌های ریشه B را در A با زمان $O(k)$ بیابد.

ب) رشته T و آرایه‌ای متشکل از n رشته که هر یک به طول k هستند به صورت $S = (S_0, ..., S_{n-1})$ را در نظر بگیرید. اگر $0 < k < |T|$ برقرار باشد، یک الگوریتم با زمان $O(|T|+nk)$ ارائه دهید که آرایه‌ای به صورت $A = (a_0, ..., a_{n-1})$ که هر a_i تعداد زیررشته‌های ریشه S_i در T است را به ازای تمام $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ برگرداند.