ساختمان دادهها و طراحي الگوريتمها

نيمسال اول ۲۰-۳۰



مسائل نظری سری ششم زمان آزمون: ۲۴ دی

مسئلهی ۱. کوتاه کردن تدریجی

فرض کنید در یک گراف وزندار (منفی یا مثبت) که وزن همه ی دورها در آن مثبت است می خواهیم کوتاه ترین $u \neq s: d(u) = +\infty$ و d(s) = * و کام در ابتدا $u \neq s: d(u) = +\infty$ و کام و $u \neq s: d(u) = +\infty$ و فاصله از راس $u \neq s: d(u) = +\infty$ و محالم از راس $u \neq s: d(u) = +\infty$ و مقدار $u \neq s: d(u) = +\infty$ انتخاب کرده و مقدار $u \neq s: d(u) = +\infty$ و مقدار $u \neq s: d(u) = +\infty$ انتخاب کرده و مقدار $u \neq s: d(u) = +\infty$ و محالم از را با با بروزرسانی می کنیم که $u \neq s: d(u) = +\infty$ و می باشد. درستی الگوریتم فوق را اثبات و می باشد. درستی الگوریتم فوق را اثبات و می باشد. و با با بروزرسانی می کنیم کنید.

مسئلهی ۲. جست وجو در ژرف

فرض کنید یک گراف ۵ راسی همبند داریم که راسهای آن با شمارههای ۱ تا ۵ شمارهگذاری شدهاند. فرض کنید از راس ۱ DFS را اجرا میکنیم. فرض کنید تمام حالتهایی که DFS میتواند رئوس را ملاقات کند عبارتند از راس ۱ DFS را اجرا کنیم ترتیب 0 کنیم ترتیب کنیم ترتیب ملاقاتها به چه شکل میتواند باشد. دلیل خود را بیان کنید.

مسئلهی ۳. دوبینی

فرض کنید یک گراف بدون جهت داریم که هر یال آن دارای دو وزن مثبت است. بار اولی که از یک یال عبور میکنیم باید به اندازه وزن بیشتر آن یال هزینه پرداخت کنیم و بارهای بعدی به اندازه وزن سبکتر هزینه پرداخت میکنیم. میخواهیم از راس u به راس v برویم و در مسیر از راس v عبور کنیم. الگوریتمی از مرتبه v ارائه دهید که مسیر با کمترین وزن را پیدا کند که v و v به ترتیب تعداد رئوس و تعداد یالهای گراف میباشند.

مسئلهی ۴. کوتاهترین مسیر

فرض کنید گراف G یک گراف وزن دار همبند با n راس باشد که دارای دور منفی نیست. رئوس گراف را به ترتیب دلخواه از ۱ تا n شماره گذاری می کنیم. فرض کنید d(u,v) برابر طول کوتاهترین مسیر از u به باشد. به ازای عدد دلخواه $k\leqslant n$ ($k\leqslant n$) دو تابع فاصله زیر را تعریف می کنیم.

- .۱ باشد. مسیر حداکثر k باشد. و با به v که تعداد یالهای مسیر حداکثر $g^k(u,v)$.
- برابر طور کوتاهترین مسیر از u به v که شماره ی راسهای میانی (به غیر از u و v) حداکثر k باشد. $h^k(u,v)$. Y

ابتدا نشان دهید $g^{\,\prime}(u,v)=h^n(u,v)=h^n(u,v)=h^n(u,v)$ است. سپس مقدار $g^{\,\prime}(u,v)$ و $g^{\,\prime}(u,v)=h^n(u,v)$ را محاسبه کنید. نهایتا برای هر دو تابع $g^{\,\prime}(u,v)=h^n(u,v)=h^n(u,v)$ بنویسید.

مسئلهی ۵. رنگآمیزی

دور یک دایره اعداد یک تا n را طوری نوشته ایم که هر عدد دقیقاً دوبار آمده است. میخواهیم با دو رنگ تمام اعداد را رنگ آمیزی کنیم، به طوری که هیچ سه عدد متوالی ای همرنگ نشوند و هر دو عددی که مقدارشان یکسان است نیز ناهمرنگ شوند. الگوریتمی ارائه دهید که در مرتبه زمانی O(n) این کار را انجام دهد.

مسئلهی ۶. بیافاس کمعمق

در گراف همبند G=(V,E) شامل n راس، اگر از هر راس BFS را اجرا کنیم ارتفاع درخت BFS حداکثر ۲ می شود. نشان دهید برای هر $n-1 \leqslant i \leqslant n(n-1)/1$ می توان گرافی با i یال مثال زد که این ویژگی را داشته باشد.

مسئلهی ۷. ترتیب ملاقات

فرض کنید رئوس گراف همبند و بدون جهت G با اعداد $1, 1, 1, \dots, n$ شماره گذاری شدهاند. ار راس شماره ۱ الگوریتم BFS را اجرا کرده ایم و ترییب ملاقات رئوس از چب به راست به ترتیب $1, 1, 1, \dots, n$ شده است. درستی گزاره های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

- ۱. بین راس i و i+1 به ازای هر i یال وجود دارد.
- ۲. از راس n میتوان به گونه ای BFS را اجرا کرد که ترتیب ملاقات رئوس $n, \ldots, r, 1$ شود.
 - ۳. به ازای هر i>1 حتما یک j< i وجود دارد که بین i و j یک یال وجود دارد.

مسئلهی ۸. تبدیل ارز

فرض کنید نرخ تبدیل n ارز موجود به یکدیگر را می دانیم. m ریال پول در اختیار داریم. می خواهیم بدانیم با چندین بار تبدیل پول و نهایتا تبدیل آن به ریال می توانیم مقدار m را افزایش دهیم. الگوریتمی با زمان اجرای چندجملهای برای تشخیص چنین کاری ارائه دهید.

مسئلهی ۹. میزبانی جام ملتهای آسیا

قرار است میزبان جام ملتهای آسیا دوره ی بعد بزودی مشخص شود. لیست نامزدها مشخص است و کنفدراسیون فوتبال آسیا (ایافسی) بررسیهای لازم خود را از کشورهای نامزد انجام داده است. باتوجه به بررسیهای انجام شده درحال حاضر مشخص است اگر ایافسی بخواهد بین دو کشور نامزد A و B یکی را انتخاب کند کدام کشور را انتخاب خواهد کرد. سیستم انتخاب میزبان توسط ایافسی بدین شکل است. در هر مرحله از بین نامزدهای باقی مانده، دو نامزد را بطور کاملا تصادفی انتخاب می کند و نامزدی که رای ایافسی با او نیست را حذف می کند. با فرض آنکه نظر ایافسی را در مورد هر دو کشور نامزد می دانیم، می خواهیم کشورهایی که شانس کسب میزبانی را دارند را پیدا کنیم. برای این کار یک گراف جهت دار n راسی می سازیم که n تعداد کشورهای نامزد است و هر راس متناظر با یک کشور نامزد است. برای هر دو راس A و B یک یال بین آنها می گذاریم و جهت یال را به سمت کشوری می گذاریم که نظر ایافسی با آن کشور است.

۱. نشان دهید کشور A شانس میزبانی دارد اگر و فقط اگر از همهی رئوس به راس A مسیر وجود داشته باشد.

۲. الگوریتمی با زمان اجرای $\Theta(n^{\mathsf{Y}})$ ارائه دهید که تمام کشورهایی که شانس میزبانی را دارند را پیدا کند. دقت کنید که تعداد یالهای گراف از $\Theta(n^{\mathsf{Y}})$ است.

مسئلهی ۱۰. بلندترین مسیر کوتاه

گراف جهت دار G=(V,E) با وزنهای دلخواه $w:E\to \mathbb{Z}$ و دو راس $s,t\in V$ را در نظر بگیرید. الگوریتمی با مرتبه زمانی $O(|V|^r)$ ارائه دهید که بتواند کمینه وزن هر مسیری از s به که شامل حداقل |V| یال است را بیابد.

مسئلهی ۱۱. درخت مینیمال

در گرافهای وزندار، «درخت دایگسترای راس s» درختی ریشهدار از راس s است که فاصلهی هرراس در آن (جمع وزن یالها) تا ریشه (راس s) برابر کمینه فاصلهی آن راس تا ریشه در گراف اصلی است. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O((n+m)\log n)$ ارائه دهید که از بین درختهای دایگسترای راس s، درختی که جمع وزن یالهای آن کمینه است را پیدا کند.

مسئلهی ۱۲. به وقت ملاقات

در کشور آبادستان، n شهر وجود دارد که با m جاده دو طرفه به یکدیگر راه دارند. علی در شهر شماره ۱ و اکبر در شهر شماره n است. زمان طی کردن یک جاده برای هر دو نفر دقیقا یک واحد زمان است. علی میخواهد به شهر n برود و اکبر میخواهد به شهر ۱ برود. آنها نمیخواهند در هیچ لحظهای یکدیگر را ببینند اما دیدار در طول یک جاده (زمانی که هر کدام در جهت مخالف یکدیگر حرکت میکنند) مجاز است. آنها تا زمانی که هر دو به مقصد نرسند، نمیتوانند در یک شهر متوقف بمانند و همچنین میخواهند در کمترین زمان ممکن هر دو همزمان به مقصد خود برسند. الگوریتمی از $O(n^7 + nm)$ ارائه دهید که کمترین زمان ممکن را بیابد، یا گزارش کند که چنین کاری ممکن نبست.

مسئلهی ۱۳. راس حیاتی

فرض کنید یک گراف ساده ی n راسی $G=\langle V,E\rangle$ به همراه دو راس s و t در V به ما داده شده است. میدانیم که هر مسیر میان این دو راس در گراف G بیش از $\frac{n}{7}$ یال خواهد داشت. الگوریتمی از مرتبه زمانی O(n+m) ارائه دهید که راس O(n+m) باشد.

مسئلهی ۱۴. اول بالا بعد پایین

على امروز امتحان دى اس دارد ولى دير از خواب بلند شده است، براى همين تصميم گرفته است براى رفتن به دانشگاه بدود. او مسيرى را نياز دارد كه ابتدا كاملا سربالايى و بعد از آن كاملا سرپايينى باشد تا بتواند از انرژى خود به صورت بهينه استفاده كند. حركت از خانه شروع و به دانشگاه ختم مى شود. او همچنين يك نقشه كه در آن m جاده و n تقاطع وجود دارد را در اختيار دارد (هر جاده ميان دو تقاطع واقع شده است). هر جاده داراى طول مثبت است و هر تقاطع نيز داراى ارتفاع مشخصى است.

- 1. فرض كنيد هر جاده يا سربالايى است يا سرپايينى، در اين صورت يك الگوريتم بهينه ارائه دهيد تا بتواند كوتاه ترين مسير را مطابق توضيحات گفته شده به دست آورد.
- ۲. یک الگوریتم بهینه ارائه دهید که بتواند این مشکل را که اگر دو تقاطع در یک ارتفاع باشند (به عبارت دیگر جاده مسطح باشد) را حل کند.

مسئلهی ۱۵. قدرت مغول

یک درخت n راسی ریشه دار در اختیار داریم. چنگیز و چونه روی این درخت با یکدیگر بازی میکنند. در ابتدای بازی یک مهره بر روی راس ریشه قرار گرفته است. بازی به صورت نوبتی انجام می شود و هرکس در نوبت خود می تواند مهره را از راس کنونی به یکی از راس های فرزند آن راس انتقال بدهد. اگر در نوبت کسی مهره در یک راس برگ باشد (فرزندی نداشته باشد) او بازنده خواهد شد. به کمک الگوریتمی در مرتبه زمانی O(n) مشخص کنید در صورتی که دو نفر به بهترین شکل ممکن بازی کنند، چه کسی برنده ی بازی خواهد شد.

مسئلهي ۱۶.

گرافی با n راس و m یال داریم.

- d راس d و از راس d به راس
- ب) به کمک الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(n^{\mathsf{Y}}+nm)$ حداکثر تعداد یالهای ممکن را بیابید که با حذف کردن آنها، از راس a به راس b مسیری به طول حداکثر l_{Y} باقی مماند.

مسئلهی ۱۷. گراف باینری

گراف وزندار G(V,E) را در نظر بگیرید. وزن هر یال در این گراف برابر صفر یا یک است. حال الگوریتمی ارائه n دهید که در زمان O(m+n) فاصلهی همهی راسها را تا یک راس مشخص حساب کند O(m+n) تعداد یالها و O(m+n) تعداد راسهای گراف است).