



## مسئله‌ی ۱. پشتگان پرتوان [۲۵ نمره]

- (آ) نشان دهید می‌توان با استفاده از یک آرایه و حافظه‌ی اضافی  $O(1)$  دو پشته را پیاده‌سازی کرد. (توجه کنید که زمانی یک پشته نمی‌تواند عمل  $Push$  را انجام دهد که کل آرایه پر شده باشد) (۱۰ نمره)
- (ب) فرض کنید در صورتی که آرایه‌ی ما پر شود، آرایه‌ای با سایز  $2n$  گرفته و عناصر آرایه‌ی اولیه را در آرایه‌ی دوم کپی می‌کنیم. ضمن مشخص کردن ترتیب کپی، هزینه‌ی سرکشن اعمال  $Push$  و  $Pop$  را محاسبه کنید. (۱۵ نمره)

## مسئله‌ی ۲. انتخاب تصادفی [۲۰ نمره]

الگوریتمی را در نظر بگیرید که ورودی  $a_1, \dots, a_n$  شامل  $n$  عدد مجزا را به ترتیب داده شده می‌خواند و هنگام خواندن  $a_i$  مقدار متغیر  $x$  را به احتمال  $1/i$  برابر  $a_i$  قرار می‌دهد. الگوریتم در پایان مقدار  $x$  را به عنوان خروجی گزاری می‌کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم  $a_i$  است؟

## مسئله‌ی ۳. رابطه‌ی بازگشتی [۲۰ نمره]

رابطه‌ی بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$T(n) = T(an) + T(bn) + O(n)$$

- (آ) ثابت کنید اگر  $a + b < 1$  آنگاه  $T(n)$  از  $O(n)$  است.
- (ب) ثابت کنید اگر  $a + b = 1$  آنگاه  $T(n)$  از  $O(n \log n)$  است.

## مسئله‌ی ۴. ابر هرم بیشینه [۲۵ نمره]

یک هرم چند وجهی یا  $d$ -هرم یک درخت  $d$  تایی کامل است (بجز حداکثر یک عنصر یا یک فرزند) که برگ‌های سطر آخر آن از سمت چپ چیده شده‌اند و کلید هر عنصر بزرگ‌تر یا مساوی کلید همه‌ی نوادگانش است. در این مسئله قصد داریم اعدادی که در آرایه‌ای به طول  $n$  ذخیره شده‌اند را به یک  $d$ -هرم تبدیل کنیم که در همان آرایه نگهداری شود.

- (آ) اگر آرایه‌ی داده شده خاصیت  $d$ -هرم را داشته باشد، فرزندان و پدر گره‌ای که در اندیس  $i$  ذخیره شده است در چه خانه‌هایی ذخیره می‌شوند؟ (۵ نمره)
- (ب) الگوریتم ساخت این هرم را بنویسید. (۱۰ نمره)
- (ج) ضمن نوشتن الگوریتم حذف بزرگترین کلید یا همان Extract-Max زمان اجرای آن محاسبه و درستی آن را ثابت کنید. (۱۰ نمره)

## مسئله‌ی ۵. بازسازی [۲۰ نمره]

در این مسئله قصد داریم بازسازی درخت‌های دودویی کامل از روی پیمایش‌های پیش‌وندی و پس‌وندی بررسی کنیم.

(آ) فرض کنید پیمایش پیش‌وندی و پس‌وندی یک درخت به شرح زیر است. آیا می‌توانید این درخت را بسازید؟

Preorder : abehdfilcjmknk

Postorder : edfhlblmnjkcia

- (ب) آیا در حالت کلی می‌توان با پیمایش‌های پیش‌وندی و پس‌وندی یک درخت دودویی کامل را ساخت؟ در صورتی که پاسخ‌تان مثبت است یک الگوریتم به این منظور ارائه دهید و در غیر این صورت یک مثال نقض بزنید.