



ساختمان داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۲-۰۱

مدرس: آبام

زمان آزمون: ۳ آذر

لیست پیوندی، صف، پشته، درخت

تمرین سری اول

مسئله‌ی ۱.

نشان دهید یک صف را تنها با استفاده از دو پشته می‌توان طوری پیاده‌سازی کرد که هزینه سرشکن هر عمل enqueue و dequeue از $O(1)$ باشد.

مسئله‌ی ۲.

یک quack داده‌ساختاری است که قابلیت صف و پشته را با هم دارد. در واقع آن را می‌توان به صورت یک لیست از اعضا که از چپ به راست نوشته شده‌اند، مشاهده کرد که سه عمل زیر را پشتیبانی می‌کند:

- Push یک عضو جدید به انتهای سمت چپ لیست اضافه می‌کند.
- Pop سمت چپ ترین عضو لیست را حذف می‌کند.
- Pull سمت راست ترین عضو لیست را حذف می‌کند.

داده ساختار quack را با استفاده از ۳ پشته و حافظه‌ی اضافی $O(1)$ طوری پیاده‌سازی کنید که زمان سرشکن هریک از این اعمال از $O(1)$ باشد. توجه کنید که تنها نوع دسترسی به هر کدام از این ۳ پشته از طریق اعمال push و pop می‌باشد.

مسئله‌ی ۳.

فرض کنید n ورودی به یک پشته به ترتیب داده شده است. پشته در هر مرحله می‌تواند عمل push را انجام دهد و یک عنصر از ورودی بخواند و یا می‌تواند با عمل pop یک عنصر را در خروجی قرار دهد. در نهایت تمام n عنصر از ورودی وارد پشته شده و در خروجی قرار می‌گیرند و دنباله‌ی خروجی تولید می‌شود. تعداد دنباله‌های خروجی را که پشته می‌تواند تولید کند بیابید.

مسئله‌ی ۴.

منظور از عمل getMax برگرداندن کوچکترین عنصر و getMin برگرداندن بزرگترین عنصر در داده‌ساختار است.

الف) داده‌ساختاری شبیه پشته ارائه دهید که اعمال Push و Pop و getMax و getMin را در زمان سرشکن $O(1)$ انجام دهد.

ب) داده‌ساختاری شبیه صف ارائه دهید که اعمال enqueue و dequeue و getMax و getMin را در زمان سرشکن $O(1)$ انجام دهد.

مسئله‌ی ۵.

یک لیست پیوندی از اعداد داریم که در آن هر عضو تنها به عضو بعدی دسترسی دارد. روشی کارا ارائه دهید که بدون تغییر در ساختار لیست و تنها با استفاده از $O(1)$ حافظه اضافی مشخص کند که آیا در این لیست دور وجود دارد یا خیر. (توجه کنید

که ساختار لیست در طول اجرای الگوریتم ثابت بماند و یکسان ماندن آن تنها در ابتدا و انتها کافی نیست) کارایی الگوریتم خود را ثابت کنید.

مسئله ۶.

یک deque داده ساختاری مانند صف است با این تفاوت که عمل درج و حذف از هر دو طرف در آن صورت می گیرد. داده ساختار deque را با استفاده از یک آرایه پیاده سازی کنید بدین صورت که چهار رویه با زمان اجرای $O(1)$ بنویسید که اعمال درج و حذف عنصر از دو طرف را انجام دهند.

مسئله ۷.

نشان دهید می توان با استفاده از یک آرایه و حافظه ی اضافی $O(1)$ دو پشته را پیاده سازی کرد. (توجه کنید که زمانی یک پشته نمی تواند عمل Push را انجام دهد که کل آرایه پر شده باشد)

مسئله ۸.

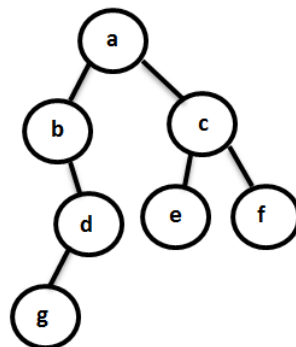
در یک گراف مرکز به رأسی گفته می شود که فاصله ی دورترین رأس از آن کمینه باشد. ثابت کنید مرکز یک درخت یا یک رأس است و یا دو رأسی که با یکدیگر همسایه اند.

مسئله ۹.

پیش پردازشی از $O(n \log n)$ روی یک درخت ریشه دار اجرا کنید که بتوان پرسمان زیر را در $O(1)$ پاسخ داد: آیا گرهی u از اجداد گرهی v هست یا خیر؟

مسئله ۱۰.

درخت زیر را به شکل درخت چپ ترین فرزند-برادر راست تغییر دهید و سپس پیمایش میان ترتیب آن را به دست آورید. این پیمایش مشابه چه پیمایشی در درخت اصلی است؟ ادعای خود را در حالت کلی ثابت کنید.



مسئله ۱۱.

هرم کمینه ای شامل n عدد داریم. روشی ارائه دهید که بتواند به پرسش زیر در $O(i)$ پاسخ بدهد: آیا i امین کوچکترین عدد از x بزرگتر است یا خیر؟

مسئله ۱۲.

برای عبارت $(((((ab) * c) + d)((e/g)/h)))$

الف) درخت عبارت رسم کنید.

ب) پیمایش پیش‌ترتیب، میان‌ترتیب و پس‌ترتیب بنویسید.

مسئله‌ی ۱۳.

زبان A از n کلمه و زبان B از m کلمه تشکیل شده است. حروف به کار رفته در کلمات این دو زبان از مجموعه حروف الفبای فارسی است. بنابراین حداکثر ۳۲ حرف داریم. می‌دانیم طول هر کلمه در هر دوی این دو زبان حداکثر ۱۰۰ حرف است. می‌گوییم کلمه‌ی w در زبان X یافت می‌شود اگر و فقط اگر کلمه‌ای مانند S در X وجود داشته باشد که w پیشوند S باشد. الگوریتمی از مرتبه‌ی $O(m+n)$ ارائه دهید که همه‌ی کلماتی از زبان B را که در زبان A یافت می‌شوند، چاپ کند.

مسئله‌ی ۱۴.

ثابت کنید اگر $T(n)$ زمان پیمایش درخت دودویی با n رأس باشد، برای هریک از پیمایش‌های پیش‌ترتیب، میان‌ترتیب و پس‌ترتیب ثابت کنید $T(n) \in \Theta(n)$.

مسئله‌ی ۱۵.

فرض کنید T یک درخت دودویی کامل با n گره و به ارتفاع $\log n$ است. می‌خواهیم مسیر ساده‌ای بین یک رأس v به یک رأس u پیدا کنیم. گره‌های u و v داده شده‌اند و می‌دانیم که هر گره از این درخت به گره‌های فرزند و گره‌ی پدر دسترسی دارد. این کار را با چه مرتبه‌ای می‌توان انجام داد؟

مسئله‌ی ۱۶.

درخت مبنا درختی دودویی است که مانند ترای، مجموعه‌ای از رشته‌های ساخته شده از ۰ و ۱ را نشان می‌دهد. در این درخت، هر گره متناظر با یک رشته است: برای ریشه این رشته تهی است. رشته‌ی هر گره برابر رشته‌ی پدر این گره به اضافه‌ی یک حرف است؛ این حرف برابر ۱ است اگر فرزند راست باشد و ۰ است اگر فرزند چپ باشد. هر گره علاوه بر اشاره‌گر به فرزندان راست و چپ حاوی یک متغیر منطقی است. اگر رشته‌ی متناظر با این گره در مجموعه‌ی رشته‌های درخت مبنا وجود داشته باشد، این متغیر ۱ است.

الف) رشته‌های ۱۱۰۱، ۰۱۰۰، ۰۰۱۱، ۰۰۱۰، ۰۰۰۱، ۱۰۰۰ و ۱۰۰۱ را به ترتیب در یک درخت مبنای تهی درج می‌کنیم. درخت حاصل را رسم کنید.

ب) الگوریتمی طراحی کنید که با گرفتن مجموعه‌ای از n رشته از ۰ و ۱، درخت مبنا را بسازد.

مسئله‌ی ۱۷.

یک درخت دودویی $T = (V, E)$ به ما داده شده (به شکل ماتریس مجاورت) و رأس پدر آن را نیز داریم. همچنین یک آرایه‌ی x نیز داریم که به هر گره‌ی درخت یک عدد نسبت می‌دهد. آرایه‌ی جدید z را این‌گونه بسازید که برای هر $u \in V$ ، $z[u]$ برابر ماکسیمم مقادیر x برای نوادگان u (descendants) است. الگوریتمی خطی ($O(n)$) ارائه دهید تا آرایه‌ی z را تماماً حساب کند.