ساختمان‌داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۲-۰۱

مدرس: آبام

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری پنجم — تصادفی، درهم‌سازی — زمان آزمون: ۹ بهمن

مسئله‌ی ۱.

فرض کنید برای درهم‌سازی n کلید متمایز از روش درهم‌سازی زنجیره‌ای استفاده شده است. تابع درهم‌سازی ساده و یکنوا و اندازه آرایه m می‌باشد. امید ریاضی تعداد برخوردها (تعداد جفت کلیدهایی که به یک خانه نگاشت می‌شوند) برحسب m و n چه پیچدگی محاسباتی دارد؟

مسئله‌ی ۲.

فرض کنید از روش آدرس‌دهی باز با استفاده از وارسی خطی برای درهم‌سازی استفاده شده است. اندازه جدول درهم‌سازی ۱۰ و تابع درهم ساز $h(x) = x^{۲} \bmod ۱۰$ است. با فرض آنکه ورودی‌ها به ترتیب $۵, ۱۷, ۵۳, ۱۲۳, ۳۷, ۵۲, ۴۹, ۳۰, ۱, ۱۹$ (از چپ به راست) باشد، اعداد به چه ترتیب در جدول ذخیره می‌شوند.

مسئله‌ی ۳.

وضعیت فعلی یک جدول درهم‌ساز در زیر آمده است. فرض کنید برای رفع مشکل تصادم از روش وارسی خطی استفاده شده است. با در نظر گرفتن فرض یکنواختی تابع درهم‌ساز، کلید بعدی با چه احتمالی در خانه‌ی دوم قرار می‌گیرد؟ (خانه‌های جدول از چپ به راست از ۱ تا ۱۸ شماره‌گذاری شده‌اند.)

$$H[۱..۱۸] = \{۶, -, ۱, -, ۳, -, ۱۴, -, ۹, ۲, -, ۱۱, -, -, -, ۰, ۴, ۵\}$$

مسئله‌ی ۴.

فرض کنید از آدرس‌دهی باز و وارسی خطی برای درهم‌سازی استفاده شده و تابع درهم سازی $i^{۲}$ به پیمانه ۷ است. بعد از دریافت همه اعداد $۰, \dots, ۶$ می‌دانیم نحوه‌ی قرار گیری اعداد در جدول درهم‌ساز به صورت زیر است:

$$A[۰, .., ۶] = ۰, ۶, ۴, ۳, ۱, ۵, ۲$$

به ازای چند جایگشت ورودی وضعیت جدول درهم‌ساز به شکل بالا خواهد بود.

مسئله‌ی ۵.

جدول درهم‌سازی ۱۰ خانه‌ای و تابع درهم‌ساز $h(x) = ۳x + ۵ \mod ۱۰$ را در نظر بگیرید. کدام گزینه درست است. توضیح دهید.

۱. احتمال آن که ورودی $x = ۴$ به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۱/۱۰ است.

۲. احتمال آن که ورودی $x = ۴$ به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۰ است.

۳. احتمال آن که ورودی $x = ۴$ به خانه ۷ نگاشت شود برابر ۱ است.

۴. احتمال آن که دو ورودی مختلف به یک خانه نگاشت شوند برابر ۱/۱۰ است.

مسئله‌ی ۶.

گر اعداد ۱ تا n را به ترتیب تصادفی در یک درخت جست‌وجوی دودویی درج کنیم، رابطه‌ی بازگشتی امید ریاضی ارتفاع این درخت را بدست آورید.

مسئله‌ی ۷.

فرض کنید $H : \{۱, \cdots, n\} \rightarrow \{۱, \cdots, n\}$ یک تابع درهم‌ساز یکنواخت باشد. برای ورودی x، عدد z را برابر تعداد صفرهای سمت راست $H(x)$ قرار می‌دهیم. برای عدد $۱ \geqslant c \geqslant ۰$، احتمال $z \geqslant c \log n$ از چه مرتبه‌ای است؟ فرض کنید c ثابت است.

.

مسئله‌ی ۸.

الگوریتمی را در نظر بگیرد که ورودی $a_۱, \ldots, a_n$ شامل n عدد مجزا را به ترتیب داده‌شده می‌خواند و هنگام خواندن a_i مقدار متغیر x را به احتمال $۱/i$ برابر a_i قرار می‌دهد. الگوریتم در پایان مقدار x را به عنوان خروجی گزارش می‌کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم برابر a_i است؟

مسئله‌ی ۹.

ثابت کنید اگر H یک خانواده ۲-سراسری از توابع درهم‌ساز باشد، یک خانواده سراسری نیز خواهد بود.

مسئله‌ی ۱۰.

فرض کنید می‌خواهیم درون یک جدول درهم‌سازی با خانه‌های $\{۰, ۱, ..., m - ۱\}$ دنبال عنصر داده‌شده k بگردیم. همچنین تابع درهم‌سازی $h : \mathcal{I} \rightarrow \{۰, ۱, ..., m - ۱\}$ که $\mathcal{I}$ نمایش‌دهنده‌ی فضای عناصر می‌باشد را در اختیار داریم. روش جست‌وجوی ما در زیر آمده است:

۱) مقدار $i \leftarrow h(k)$ را محاسبه کن و $j \leftarrow ۰$ قرار بده.

۲) در درایه‌ی i به دنبال k بگرد. اگر آن را یافتی یا اگر درایه خالی بود جست‌وجو را متوقف کن.

۳) $j \leftarrow (j + ۱) \ mod \ m$ و $i \leftarrow (i + j) \ mod \ m$ قرار بده و به مرحله‌ی ۲ برگرد.

فرض کنید m توانی از ۲ است.

۱. نشان دهید که این روش یک روش از روش کلی وارسی درجه ۲ است. این کار را با تعیین مقدارهای مناسب برای ثابت‌های $c_۱$ و $c_۲$ انجام دهید.

۲. ثابت کنید این الگوریتم در بدترین حالت هر درایه از جدول را وارسی می‌کند.

مسئله‌ی ۱۱.

فرض کنید σ یک چایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد. امیدریاضی تعداد i ها را بدست اورید که $\sigma(i) = i$.

مسئله‌ی ۱۲.

فرض کنید σ یک چایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد امیدریاضی تعداد وارونه‌ها را بدست اورید. یک وارونه، یک زوج (i, j) است بطوری که $i < j$ اما $\sigma(i) > \sigma(j)$.