



مسئله‌ی ۱. کوتاه کردن تدریجی

فرض کنید در یک گراف وزن‌دار (منفی یا مثبت) که وزن همه‌ی دورها در آن مثبت است می‌خواهیم کوتاه‌ترین فاصله از راس s به بقیه راس‌ها را محاسبه کنیم. برای این کار در ابتدا $d(s) = 0$ و $d(u) = +\infty$ $\forall u \neq s$ می‌گذاریم. هر بار به دلخواه یک یال (u, v) را که $d(u) + w(u, v) < d(v)$ انتخاب کرده و مقدار $d(v)$ را با مقدار $d(u) + w(u, v)$ بروزرسانی می‌کنیم که $w(u, v)$ وزن یال (u, v) می‌باشد. درستی الگوریتم فوق را اثبات و چندجمله‌ای بودن زمان اجرای آن در بدترین حالت را بررسی کنید.

مسئله‌ی ۲. جست‌وجو در ژرف

فرض کنید یک گراف ۵ راسی همبند داریم که راس‌های آن با شماره‌های ۱ تا ۵ شماره‌گذاری شده‌اند. فرض کنید از راس ۱ DFS را اجرا می‌کنیم. فرض کنید تمام حالت‌هایی که DFS می‌تواند رئوس را ملاقات کند عبارتند از $\langle 1, 2, 4, 3, 5 \rangle$, $\langle 1, 3, 4, 2, 5 \rangle$ و $\langle 1, 3, 5, 4, 2 \rangle$. حال اگر از راس ۵ DFS را اجرا کنیم ترتیب ملاقات‌ها به چه شکل می‌تواند باشد. دلیل خود را بیان کنید.

مسئله‌ی ۳. دوبینی

فرض کنید یک گراف بدون جهت داریم که هر یال آن دارای دو وزن مثبت است. بار اولی که از یک یال عبور می‌کنیم باید به اندازه وزن بیشتر آن یال هزینه پرداخت کنیم و بارهای بعدی به اندازه وزن سبک‌تر هزینه پرداخت می‌کنیم. می‌خواهیم از راس u به راس v برویم و در مسیر از راس w عبور کنیم. الگوریتمی از مرتبه $O(n \log n + m)$ ارائه دهید که مسیر با کم‌ترین وزن را پیدا کند که n و m به ترتیب تعداد رئوس و تعداد یال‌های گراف می‌باشند.

مسئله‌ی ۴. کوتاه‌ترین مسیر

فرض کنید گراف G یک گراف وزن‌دار همبند با n راس باشد که دارای دور منفی نیست. رئوس گراف را به ترتیب دلخواه از ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. فرض کنید $d(u, v)$ برابر طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v باشد. به ازای عدد دلخواه k ($0 \leq k \leq n$) دو تابع فاصله زیر را تعریف می‌کنیم.

۱. $g^k(u, v)$ برابر طول کوتاه‌ترین مسیر از u به v که تعداد یال‌های مسیر حداکثر k باشد.

۲. $h^k(u, v)$ برابر طور کوتاه‌ترین مسیر از u به v که شماره‌ی راس‌های میانی (به غیر از u و v) حداکثر k باشد.

ابتدا نشان دهید $g^n(u, v) = h^n(u, v) = d(u, v)$ است. سپس مقدار $g^1(u, v)$ و $h^1(u, v)$ را محاسبه کنید. نهایتاً برای هر دو تابع h و g یک رابطه بازگشتی بنویسید.

مسئله‌ی ۵. صفحه شطرنج

یک صفحه شطرنج با اندازه $n \times n$ داریم که تعدادی از خانه‌های آن حذف شده‌اند. می‌خواهیم این صفحه شطرنج را با تعدادی دومینو (کاشی‌های 1×2 یا 2×1) بپوشانیم. الگوریتمی با زمان چندجمله‌ای ارائه دهید که امکان انجام چنین کاری را بررسی کند.

مسئله‌ی ۶. بی‌افاس کم عمق

در گراف همبند $G = (V, E)$ شامل n راس، اگر از هر راس BFS را اجرا کنیم ارتفاع درخت BFS حداکثر ۲ می‌شود. نشان دهید برای هر $1 \leq i \leq n(n-1)/2$ می‌توان گرافی با i یال مثال زد که این ویژگی را داشته باشد.

مسئله‌ی ۷. ترتیب ملاقات

فرض کنید رئوس گراف همبند و بدون جهت G با اعداد $1, 2, \dots, n$ شماره‌گذاری شده‌اند. از راس شماره ۱ الگوریتم BFS را اجرا کرده‌ایم و ترتیب ملاقات رئوس از چپ به راست به ترتیب $1, 2, \dots, n$ شده است. درستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. بین راس i و $i+1$ به ازای هر i یال وجود دارد.
۲. از راس n می‌توان به گونه‌ای BFS را اجرا کرد که ترتیب ملاقات رئوس $1, 2, \dots, n$ شود.
۳. به ازای هر $i > 1$ حتماً یک $j < i$ وجود دارد که بین i و j یک یال وجود دارد.

مسئله‌ی ۸. تبدیل ارز

فرض کنید نرخ تبدیل n ارز موجود به یکدیگر را می‌دانیم. m ریال پول در اختیار داریم. می‌خواهیم بدانیم با چندین بار تبدیل پول و نهایتاً تبدیل آن به ریال می‌توانیم مقدار m را افزایش دهیم. الگوریتمی با زمان اجرای چندجمله‌ای برای تشخیص چنین کاری ارائه دهید.

مسئله‌ی ۹. میزبانی جام ملت‌های آسیا

قرار است میزبان جام ملت‌های آسیا دوره‌ی بعد بزودی مشخص شود. لیست نامزدها مشخص است و کنفدراسیون فوتبال آسیا (ای‌اف‌سی) بررسی‌های لازم خود را از کشورهای نامزد انجام داده است. با توجه به بررسی‌های انجام شده، درحال حاضر مشخص است اگر ای‌اف‌سی بخواهد بین دو کشور نامزد A و B یکی را انتخاب کند کدام کشور را انتخاب خواهد کرد. سیستم انتخاب میزبان توسط ای‌اف‌سی بدین شکل است. در هر مرحله از بین نامزدهای باقی‌مانده، دو نامزد را بطور کاملاً تصادفی انتخاب می‌کند و نامزدی که رای ای‌اف‌سی با او نیست را حذف می‌کند. با فرض آنکه نظر ای‌اف‌سی را در مورد هر دو کشور نامزد می‌دانیم، می‌خواهیم کشورهایی که شانس کسب میزبانی را دارند را پیدا کنیم. برای این کار یک گراف جهت‌دار n راسی می‌سازیم که n تعداد کشورهای نامزد است و هر راس متناظر با یک کشور نامزد است. برای هر دو راس A و B یک یال بین آن‌ها می‌گذاریم و جهت یال را به سمت کشوری می‌گذاریم که نظر ای‌اف‌سی با آن کشور است.

۱. نشان دهید کشور A شانس میزبانی دارد اگر و فقط اگر از همه‌ی رئوس به راس A مسیر وجود داشته باشد.
۲. الگوریتمی با زمان اجرای $\Theta(n^2)$ ارائه دهید که تمام کشورهایی که شانس میزبانی را دارند را پیدا کند. دقت کنید که تعداد یال‌های گراف از $\Theta(n^2)$ است.