ساختمان‌داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۱–۰۲

مدرس: دکتر آبام

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

زمان آزمون: ۵ دی

تمرین سری چهارم

مسئله‌ی ۱.

ثابت کنید در زمان $o(n \log n)$ نمی‌توان n عدد را بصورت درخت دودویی جستجو درآورد.

مسئله‌ی ۲.

مسئله درخت دودویی جستجوی (د.د.ج) بهینه با n عدد را در نظر بگیرید. در مسئله د.د.ج بهینه n عدد به همراه تعداد دفعاتی که پرسمان خواهند شد داده می‌شود. هدف ساخت یک د.د.ج است به گونه‌ای که مجموع حاصلضرب پرسمان اعداد در عمق آن‌ها در د.د.ج کمینه شود. الگوریتم حریصانه زیر را در نظر بگیرید. عدد با بیشترین پرسمان را در ریشه درخت قرار می‌دهیم. براساس ریشه مشخص شده اعداد باقی‌ماده براساس خاصیت د.د.ج در یکی از زیردرخت‌های چپ یا راست قرار می‌گیرند. بصورت بازگشتی زیردرخت چپ و راست را می‌سازیم. کوچکترین nی که این الگوریتم حریصانه درست کار نمی‌کند چند است.

مسئله‌ی ۳.

چند درخت دودویی جستجوی متفاوت با n گره و برچسب‌های ۱ تا n وجود دارد طوری که پیمایش پیش‌ترتیب و میان‌ترتیب آن‌ها یکسان باشد؟ دلیل خود را ذکر کنید.

مسئله‌ی ۴.

اعداد ۱ تا ۵۰۰ را در یک درخت دودویی جستجو ذخیره کرده‌ایم. می‌خواهیم عدد ۱۹۳ را در این درخت جستجو کنیم. کدام یک از دنباله‌های زیر نمی‌تواند مسیر جستجو برای عدد ۱۹۳ باشد. دلیل خود را ذکر کنید.

۱. ۵, ۴۵۴, ۳۰۰, ۱۰۰, ۲۵۰, ۱۵۰, ۲۰۰, ۱۹۳

۲. ۵۰۰, ۴۰۰, ۳۰۰, ۲۰۰, ۵۰, ۱۰۰, ۱۵۰, ۱۹۳

۳. ۴۳۷, ۱۵۷, ۲۳۷, ۲۳۱, ۲۰۱, ۱۴۳۱۹۰, ۱۹۳

۴. ۴, ۲۰, ۳۰, ۵۵, ۱۰۱, ۱۰۲, ۱۰۵, ۱۷۷, ۱۹۳

مسئله‌ی ۵.

فرض کنید یک درخت دودویی جست‌وجو با n گره داریم. به ازای گره v از این درخت وزن آن را تعداد گره‌ها در زیر درخت به ریشه v (شامل v) در نظر بگیرید. می‌دانیم در درخت فوق به ازای هر گره‌ی داخلی v نسبت وزن فرزند چپ و فرزند راست حداقل ۵.۰ و حداکثر ۲ است. بهترین کران بالا برای زمان جست‌وجو در این درخت در بدترین را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۶.

یک درخت دودویی جست‌وجو متوازن با n گره داریم که به علت نویز، اعداد ذخیره شده در برخی از گره‌های آن تغییر کرده است. تنها عملی که می‌توان برای اصلاح این درخت انجام داد جابه‌جا کردن مقادیر ذخیره شده در یک گره و یکی از فرزندان آن است. در بدترین حالت با چند عمل فوق می‌توان درخت را به درخت دودویی جست‌وجو معتبر تبدیل کرد.

مسئله‌ی ۷.

درستی یا نادرستی جملات زیر در مورد درخت دودویی جست‌وجو (د.د.ج) را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. اگر یک عنصر موجود در د.د.ج را حذف و بلافاصله درج کنیم، د.د.ج قبل و بعد از دو عمل فوق یکسان است.

۲. هر د.د.ج را می‌توان با چند عمل چرخش (rotation) به یک د.د.ج متوازن تبدیل کرد.

۳. عدد بلافاصله بعد از x در ترتیب صعودی، لزوما در زیردرخت به ریشه گره‌ای که x در آن ذخیر شده قرار نمی‌گیرد.

مسئله‌ی ۸.

فرض کنید یک درخت دودویی با n گره داده شده است. درخت لزومن متوازن نیست. به ازای هر گره u از درخت، اندازه دو زیردرخت سمت چپ و راست آن را محاسبه کرده و مینیمم این دو را به عنوان برچسب گره u در نظر می‌گیریم. منظور از اندازه یک زیردرخت تعداد گره‌های آن می‌باشد. اگر زیردرختی تهی باشد اندازه آن را صفر در نظر می‌گیریم. نشان دهید مجموع برچسب‌ها از مرتبه $O(n \log n)$ است.

مسئله‌ی ۹.

درستی عبارات زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

۱. گره‌های هر درخت دودویی جست و جو را می‌توان با رنگ‌های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز_ سیاه شود.

۲. گره‌های هر درخت دودویی جست و جو با n عنصر و ارتفاع حداکثر $۲ \log n$ را می توان با رنگ‌های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز_ سیاه شود.

۳. یک درخت دودویی جست و جوی کاملا متوازن را می‌توان با رنگ‌های قرمز و سیاه رنگ کرد طوری که درخت حاصل قرمز_ سیاه شود.

مسئله‌ی ۱۰.

در درخت بازه توضیح داده شده در کلاس، فرض کنید می‌خواهیم به ازای عدد داده شده x تمام بازه‌هایی که نقطه x را شامل می‌شوند گزارش دهیم. چه تغییرات در روال پاسخ‌دهی به پرسمان باید ایجاد کنیم. زمان پاسخگویی به پرسمان را برحسب n و k مشخص کنید که n و k به ترتیب تعداد بازه‌های ذخیره شده در درخت بازه و تعداد بازه‌هایی که x را شامل می شوند می‌باشند.

مسئله‌ی ۱۱.

فرض کنید b_n برابر تعداد درخت‌های دودویی متفاوت با n راس باشند؛ برای مثال $b_۰ = b_۱ = ۱$ و $b_۲ = ۲$ است. رابطه‌ای بازگشتی برای b_n ارائه دهید و به کمک آن فرمول صریحی برای آن پیدا کنید.

مسئله‌ی ۱۲.

اعداد صحیح $x_۱, \cdots, x_n$ را در یک درخت دودویی جستجو با ارتفاع h ذخیره کرده‌ایم. فرض کنید هزینه‌ی جستجوی x_i (تعداد مقایسه‌های لازم در درخت برای پیدا کردن x_i) برابر c_i باشد. می دانیم $\sum_{i=۱}^{n} c_i = O(n \log n)$ است. برای درستی و یا نادرستی عبارات زیر دلیل بیاورید.

الف) $h = O(\log n)$

ب) $h = O(\sqrt{n \log n})$

ج) می‌توان مثالی زد که $h = \Omega(n)$ باشد.

د) $h = \Omega(\sqrt{n})$

مسئله‌ی ۱۳.

یک درخت دودویی جستجو به ارتفاع h داریم. فرض کنید اعداد $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ در آن ذخیره شده‌اند. می‌خواهیم مقدار عدد x_k را به وسیله‌ی درخت پیدا کنیم. الگوریتمی از مرتبه زمانی $O(h+k)$ ارائه دهید که بتواند مقدار این عدد را به وسیله‌ی درخت پیدا کند. توجه داشته باشید که ما به ازای هر راس فقط به بچه‌ی سمت راست و چپ آن (در صورت وجود) دسترسی داریم و حق نگه‌داری پارامتر دیگری در درخت خود به ازای رئوس مختلف در روند اضافه کردن مقادیر به درخت نداریم.