

**مسئله‌ی ۱. پشتگان پرتوان [۲۵ نمره]**

(آ) نشان دهید می‌توان با استفاده از یک آرایه و حافظه‌ی اضافی $O(1)$ دو پشته را پیاده‌سازی کرد. (توجه کنید که زمانی یک پشته نمی‌تواند عمل Push را انجام دهد که کل آرایه پر شده باشد) (۱۲ نمره)

(ب) در صورت پر شدن آرایه، دستور Push بدین شکل انجام می‌شود: اگر اندازه آرایه فعلی n باشد، یک آرایه به اندازه $2n$ ایجاد و مقادیر به آرایه جدید کپی و بعد دستور Push بصورت معمول اجرا می‌شود. با این اوصاف هزینه‌ی سرکشن اعمال Push و Pop را محاسبه کنید. (۱۳ نمره)

مسئله‌ی ۲. انتخاب تصادفی [۱۵ نمره]

الگوریتمی را در نظر بگیرید که ورودی a_1, \dots, a_n شامل n عدد مجزا را به ترتیب داده شده می‌خواند و هنگام خواندن a_i مقدار متغیر x را به احتمال $1/i$ برابر a_i قرار می‌دهد. الگوریتم در پایان مقدار x را به عنوان خروجی گزاری می‌کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم a_i است؟

مسئله‌ی ۳. رابطه‌ی بازگشتی [۲۰ نمره]

فرض کنید a و b دو عدد داده شده در بازه $(0, 1)$ است. رابطه‌ی بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$T(n) = T(an) + T(bn) + n$$

(آ) ثابت کنید اگر $a + b < 1$ آنگاه $T(n)$ از $\Theta(n)$ است. (۱۰ نمره)

(ب) ثابت کنید اگر $a + b = 1$ آنگاه $T(n)$ از $\Theta(n \log n)$ است. (۱۰ نمره)

مسئله‌ی ۴. هرم بیشینه d -تایی [۲۰ نمره]

یک هرم بیشینه d -تایی یک درخت متوازن است که هر گره داخلی (به استثنای حداکثر یک گره) دقیقاً d فرزند دارد. برگ‌های سطر آخر آن از سمت چپ چیده شده‌اند و کلید هر عنصر بزرگ‌تر یا مساوی کلید همه‌ی نوادگانش است.

(آ) مشابه روش ارائه شده برای $d = 2$ روش پیاده‌سازی هرم بیشینه d -تایی را با آرایه را تشریح کنید. (۸ نمره)

(ب) الگوریتم Extract-Max را توضیح داده و زمان اجرای آن را برحسب d و n محاسبه و درستی آن را ثابت کنید. (۱۲ نمره)

مسئله‌ی ۵. بازسازی [۲۰ نمره]

در این مسئله قصد داریم بازسازی درخت‌های دودویی کامل را (درختی که هر گره دقیقاً دو فرزند دارد) از روی پیمایش‌های پیش‌وندی و پس‌وندی بررسی کنیم. فرض کنید برچسب گره‌های درخت متمایز هستند.

(آ) پیمایش پیش‌وندی و پس‌وندی یک درخت دودویی کامل در زیر داده شده است با ذکر دلیل مشخص کنید که آیا می‌توان درخت فوق را ساخت؟ (۶ نمره)

Preorder : abehdfilcjmknk

Postorder : edfhblmnjkcia

(ب) آیا در حالت کلی می‌توان با پیمایش‌های پیش‌وندی و پس‌وندی یک درخت دودویی کامل، درخت را ساخت؟ در صورتی که پاسخ‌تان مثبت است یک الگوریتم با زمان اجرای چندحمله‌ای ارائه دهید و در غیر این صورت یک مثال نقض بنزید. (۱۴ نمره)