ساختمان‌داده‌ها و طراحی الگوریتم‌ها

نیم‌سال اول ۰۳-۰۲

مدرس: آبام-بهرامی

دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر

تمرین سری اول | زمان اجرا، تقسیم و حل، سرشکن، تصادفی | زمان آزمون: ۲ آذر

مسئله‌ی ۱. رشد توابع

توابع زیر را بر حسب درجه رشدشان مرتب کنید.

$(\sqrt{2})^{lgn}$	n^2	$n!$	$(lgn)!$	$(\frac{3}{2})^n$
$lg^2 n$	n^3	$lg(n!)$	2^{2^n}	$n^{\frac{1}{lgn}}$
$lg(lg(n))$	$n2^n$	$n^{lg(lg(n))}$	lgn	$2^{2^{n+1}}$
2^{lgn}	$(lgn)^{lgn}$	$nlgn$	$2^{\sqrt{2lgn}}$	$\sqrt{lgn}$

مسئله‌ی ۲. مردافکن

دو تابع $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ بیابید، که اکیدا صعودی باشند و داشته باشیم:

$$g(n) \notin O(f(n)), f(n) \notin O(g(n))$$

مسئله‌ی ۳. تعداد جمع بهینه

آرایه‌ی nتایی A داده شده است. می‌خواهیم از آن ماتریس B را بسازیم که در آن برای همه مقادیر $i \leqslant j$ داشته باشیم $B[i, j] = \sum_{k=i}^{j} A[k]$. اگر $i > j$ باشد مقدار $B[i, j]$ مهم نیست.

الف) الگوریتم زیر را برای محاسبه‌ی B پیشنهاد می‌کنیم:

for $i \leftarrow 1$ *to* n **do**
  for $j \leftarrow i$ *to* n **do**
    $B[i, j] = \sum_{k=i}^{j} A[k]$

دقیقا چه تعداد عمل جمع در این الگوریتم انجام می‌شود؟

ب) الگوریتمی با تعداد جمع بهینه ارائه دهید. این تعداد دقیقا چقدر است؟

مسئله‌ی ۴. رشد عجیب

فرض کنید توابع f و g به گونه ای داده شده اند که $f(n) \in O(g(n))$. برای هر یک از گزاره‌های زیر درستی و نادرستی آن‌ها را با ذکر دلیل ثابت کنید. (برای اثبات نادرستی، مثال نقض کافی است)

الف) $log(f(n)) \in O(log(g(n)))$

ب) $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$

ج) $f(n)^2 \in O(g(n)^2)$

مسئله‌ی ۵.

ثابت کنید: $\sum_{i=1}^{n} \sqrt{i} \in \Theta(n\sqrt{n})$

مسئله‌ی ۶. بازگشتی

روابط بازگشتی زیر را حل کنید.

الف) $T(n) = T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

ب) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + \frac{n}{\log n}$

مسئله‌ی ۷. دنباله‌ی طلایی

a_1 تا a_k، k عدد حقیقی بزرگتر از یک می‌باشند. برای a_i ها یک شرط لازم و کافی پیدا کنید به طوری که $T(n) = \sum_{i=1}^{k} T(\frac{n}{a_i}) + \Theta(\frac{n}{\log n})$ از مرتبه‌ی $\Theta(\frac{n}{\log n})$ باشد.

مسئله‌ی ۸. بازگشت عجیب

تابع $T : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ توسط رابطه‌ی بازگشتی زیر داده شده است:

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{اگر } n = 1 \\ bn^2 + nT(n-1) & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

که a, b اعداد حقیقی و مثبت‌اند.

الف) ثابت کنید $T(n) \in \Theta(n!)$.

ب) رابطه‌ی دقیق و صریح $T(n)$ را بیابید. این رابطه را برحسب a و b و c بنویسید که

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{T(n)}{n!}$$

همچنین بررسی کنید $a \leqslant c \leqslant a + 5b$.

ج) فرض کنید تابع $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ با این رابطه داده شده باشد:

$$g(n) = \begin{cases} a & \text{اگر } n = 1 \\ bn^k + ng(n-1) & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ثابت کنید $g(n) \in \Theta(n!)$.

مسئله‌ی ۹. حدس پیچیده

در هر قسمت، برای $T(n)$ بهترین مرتبه‌ی ممکن را بیابید.

الف) $T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + 1$

ب) $T(n) = 2T(\frac{n}{2} + \sqrt{n}) + T(\frac{n}{2}) + 1$

مسئله‌ی ۱۰. شمارنده دودویی

همان‌طور که قبلاً دیده بودیم هزینه‌ی سرشکن افزایش در یک شمارنده‌ی دودویی از مرتبه‌ی $\mathcal{O}(۱)$ بود. حالا یک شمارنده دودویی در نظر بگیرید که در آن هزینه تغییر iامین بیت برابر i باشد. ثابت کنید در این حالت نیز بازهم هزینه سرشکن عمل افزایش $\mathcal{O}(۱)$ است.

مسئله‌ی ۱۱. حذف پر هزینه

فرض کنید n عدد دودویی دارید که در ابتدا همه‌ی آن‌ها برابر یک هستند. در هر مرحله دو عدد دلخواه را انتخاب کرده و از مجموعه حذف می‌کنیم و به جای آن‌ها حاصل جمعشان را قرار می‌دهیم. اگر دو عددی که حذف کردیم $b_۱$ و $b_۲$ بیتی باشند، هزینه‌ی این عمل برابر است با $\min(b_۱, b_۲)$ به علاوه‌ی تعداد بیت‌های نقلی در جمع که بعد از بیت سمت چپ عدد کوچکتر به وجود می‌آید. مثلا هزینه‌ی جمع دو عدد ۱۱۰۰ و ۱۰۱۱۰۱۰۰ برابر است با ۷ = ۳ + ۴ و هزینه‌ی جمع دو عدد ۱۰۱ و ۱۰۰۰۰۱ برابر ۳ است. حال ثابت کنید اگر m بار این عمل را انجام دهیم حداکثر از $\mathcal{O}(m)$ هزینه صرف کرده‌ایم.

مسئله‌ی ۱۲. آرایه‌ی جادار

می‌خواهیم n عدد را به ترتیب، در انتهای آرایه‌ای اضافه کنیم. طول آرایه در ابتدا ۱ است. در نوبت اضافه‌کردن یک عدد به انتهای آرایه، اگر آرایه فضای خالی داشت، عدد را در انتها اضافه می‌کنیم. در غیر این صورت، آرایه‌ای جدید به طول دو برابر آرایه فعلی ایجاد می‌کنیم، عناصر را از آرایه قبلی به آرایه‌ی جدید منتقل می‌کنیم و سپس عنصر جدید را در انتهای آرایه اضافه می‌کنیم. پیچیدگی زمانی سرشکن هر عمل اضافه کردن را محاسبه کنید.

مسئله‌ی ۱۳. کار و بار

تعداد نامعلومی کار باید انجام شود. اگر i به صورت توانی از ۲ بود، انجام کار iام هزینه‌ای برابر با i خواهد داشت و در غیر این صورت هزینه‌ی آن کار ۱ است. با سه روش الف) انبوهه، ب) حسابداری و ج) تابع پتانسیل ثابت کنید که هزینه‌ی سرشکن هر کار $O(۱)$ می‌باشد.

مسئله‌ی ۱۴. نقطه ثابت

فرض کنید σ یک چایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد. امیدریاضی تعداد i ها را بدست اورید که $\sigma(i) = i$.

مسئله‌ی ۱۵. امیدریاضی وارونه‌ها

فرض کنید σ یک چایگشت تصادفی از اعداد ۱ تا n باشد امیدریاضی تعداد وارونه‌ها را بدست اورید. یک وارونه، یک زوج (i, j) است بطوری که $i < j$ اما $\sigma(i) > \sigma(j)$.

مسئله‌ی ۱۶. انتخاب تصادفی

الگوریتمی را در نظر بگیرد که ورودی $a_۱, \ldots, a_n$ شامل n عدد مجزا را به ترتیب داده‌شده می‌خواند و هنگام خواندن a_i مقدار متغیر x را به احتمال $۱/i$ برابر a_i قرار می‌دهد. الگوریتم در پایان مقدار x را به عنوان خروجی گزارش می‌کند. با چه احتمالی خروجی الگوریتم برابر a_i است؟

مسئله‌ی ۱۷. ارتفاع د.د.ج تصادفی

اگر اعداد ۱ تا n را به ترتیب تصادفی در یک درخت جست‌وجوی دودویی درج کنیم، رابطه‌ی بازگشتی امید ریاضی ارتفاع این درخت را بدست آورید.