مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی دوم (بهار ۱۴۰۳)

تعالی اعداد

نوید دژبرد*

چکیده. در این نوشته ابتدا مفهوم و وجود اعداد متعالی مطالعه می‌شود و سپس نشان داده می‌شود که اعداد e و π متعالی‌اند.

۱. مقدمه

از نخستین و شناخته‌شده‌ترین افسانه‌های ریاضی است که وقتی هیپاسوس[۱]، ریاضی‌دان یونانی، وجود اعداد گنگ را کشف کرد، فیثاغورسیان خشمگین او را غرقه در آب کردند. خوش‌بختانه طی قرن‌های بعدی جهان آکادمیک فرهنگ مسامحت‌آمیزتری با کشفیات و ابتکارات بدیع نشان داد، تا جایی که در قرن ۱۹ م. ریاضی‌دانان توانستند با اطمینان خاطر از دوگانه‌ی گویا و گنگ نیز فراتر روند و به مطالعه اشیائی بپردازند که به اعداد متعالی[۲] معروف شد؛ اشیائی که حتی در حل مسائل کهن ریاضی، هم‌چون مسئله‌ی تربیع دایره، نیز کارساز بوده‌اند. معرفی اعداد متعالی نیازمند معرفی اعداد جبری[۳] است—که نوعاً متمم هم محسوب می‌شوند.

تعریف ۱.۱. عددی حقیقی را جبری گوییم هرگاه ریشه یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب صحیح باشد.

تعریف ۲.۱. عددی حقیقی را متعالی گوییم هرگاه جبری نباشد.

تعریف اعداد جبری و متعالی قابل گسترش به اعداد مختلط است. هم‌چنین می‌توان در تعاریف فوق از از چندجمله‌ای‌های ناصفر با ضرایب گویا استفاده کرد، که در نهایت با آن‌چه معرفی کردیم معادل است.

۲. وجود اعداد متعالی

مطالعه‌ی اعداد متعالی از قرن ۱۸ م. آغاز گشت و در قرن ۱۹ م. برای نخستین بار وجود عدد متعالی اثبات شد. برخی از مهم‌ترین برهان‌هایی که برای وجود اعداد متعالی ارائه شده، از آن گئورگ کانتور[۴] است. وی نه تنها وجود اعداد متعالی را نشان داد، بلکه توانست کاردینالیتی اعداد متعالی را نیز مطالعه کند. در ادامه دو برهانی را که کانتور —به ترتیب در سال‌های ۱۸۷۴ و ۱۸۹۱— ارائه کرده‌است، معرفی می‌کنیم.

قضیه ۱.۲. مجموعه‌ی اعداد جبری شماراست؛ به عبارت دیگر، می‌توان مجموعه‌ی اعداد جبری را به صورت یک دنباله‌ی نامتناهی نمایش داد.

اثبات. تمرین. $\square$

قضیه ۲.۲ (۱۸۷۴). به ازای هر دنباله‌ی نامتناهی از اعداد حقیقی و هر بازه‌ی $[a,b] \subset \mathbb{R}$، می‌توان عضو $r \in [a,b]$ را طوری یافت که جزو آن دنباله نباشد. ضمناً مجموعه‌ی چنین اعضایی ناشماراست.

---
[1] Hippasus
[2] Trenscendental Numbers
[3] Algebraic Numbers
[4] Georg Cantor

اثبات. دنباله‌ی $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را در نظر بگیرید. برای سادگی فرض کنید که اعضای این دنباله دوبه‌دو متمایزند. نخستین دو عضو این دنباله را که در بازه‌ی $I=[a,b]$ قرار می‌گیرند در نظر بگیرید. عضو کوچک‌تر را a_1 و عضو بزرگ‌تر را b_1 بنامید. بازه‌ی $I_1=[a_1,b_1]$ را بسازید و نخستین دو عضو دنباله را که در بازه‌ی جدید قرار می‌گیرند در نظر بگیرید. به طریقی مشابه بازه‌ی جدید $I_2=[a_2,b_2]$ را بسازید. دنباله‌ی بازه‌هایی که به این طریق می‌توانیم بسازیم یا متناهی‌اند یا متناهی. در حالت اول، فرض کنید $I_N=[a_N,b_N]$ آخرین بازه‌ی تولیدشده به این شیوه باشد. بنابراین حداکثر یک عضو از دنباله، مانند x_k، می‌تواند عضو این بازه باشد و هر عضو دیگری در بازه‌ی نهایی برای برقراری حکم کافی است.

حال فرض کنید دنباله‌ی بازه‌هایی که در این پروسه ساخته‌ایم، نامتناهی است. تعریف کنید $a_\infty=\lim_{n\to\infty}a_n$ و $b_\infty=\lim_{n\to\infty}b_n$. از آن‌جایی که $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ دنباله‌هایی یک‌نوا در بازه‌ای کران‌دار هستند، این حدها وجود دارند. ضمناً هیچ یک از a_∞ و b_∞ در دنباله‌ی $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ظاهر نشده‌اند (چرا؟). اگر $a_\infty=b_\infty$ آن‌گاه تعریف کنید $r=a_\infty=b_\infty$؛ اگر هم $a_\infty<b_\infty$ هر عددی در بازه‌ی $[a_\infty,b_\infty]$ جهت برقراری حکم کافی خواهدبود.

حال فرض کنید مجموعه‌ی همه چنین اعضایی شمارا باشد، و بتوان آن‌ها را به صورت دنباله‌ی $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نمایش داد. دنباله‌ی $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ به صورت زیر تعریف کنید

$$\overline{x}_n=\begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & 2\nmid n,\\ r_{\frac{n}{2}} & 2\mid n.\end{cases}$$

با تکرار روش مذکور می‌توان $\overline{r}\in[a,b]$ را طوری ساخت که جزوی از دنباله‌ی $(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نباشد. پس مجموعه‌ی چنین اعضایی ناشماراست. □

نتیجه ۳.۲. در هر بازه‌ی $[a,b]\subset\mathbb{R}$ ناشمارا عدد متعالی وجود دارد.

نتیجه ۴.۲. مجموعه اعداد حقیقی ناشماراست.

قضیه ۵.۲ (۱۸۹۱). مجموعه‌ی همه‌ی دنباله‌های نامتناهی ناشماراست.

اثبات. فرض کنید M شامل همه اشیاء $S=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ است، و برای سادگی فرض کنید در هر دنباله و به ازای هر n، $x_n\in\{0,1\}$. فرض کنید M شماراست؛ به عبارتی دیگر می‌توان اعضای آن را به صورت یک دنباله نمایش داد. فرض کنید $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ چنین نمایشی باشد. فرض کنید $x_{i,j}$ عضو iـام دنباله‌ی S_j باشد، و قرار دهید $\overline{S}=(\overline{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ را به این شکل بسازید: $\overline{x}_n=1-x_{n,n}$. به بیانی ساده‌تر دنباله‌ی $\overline{S}$ عضو nـام دنباله‌ی S_n را برمی‌گزیند و مقدار آن را تغییر می‌دهد. دنباله‌ی ساخته شده، $\overline{S}$، عضو M است، اما جزو $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ نیست؛ زیرا با هر یک از اعضای آن، حداقل در یک درایه، مغایرت دارد. بنابراین هرگز نمی‌توان M را در یک تناظر یک‌به‌یک با مجموعه‌ی اعداد طبیعی قرار داد. □

نتیجه ۶.۲. مجموعه‌ی اعداد حقیقی و متعالی ناشمارا هستند.

اثبات. ابتدا نشان دهید اعداد حقیقی در تناظری یک‌به‌یک با بازه‌ی $[0,1]$ قرار دارد، سپس با در نظر گرفتن نمایش دودویی اعداد در این بازه از قضیه‌ی فوق استفاده کنید. □

روش به‌کارگرفته‌شده در برهان فوق به قطری‌سازی[1] معروف است و بخشی از شهرت کانتور به خاطر معرفی این ابزار قدرت‌مند در ریاضی است. ضمناً از هر دو برهان کانتور می‌توان برای ساختن اعداد متعالی استفاده کرد [1]. هرچند نشان دادیم که مجموعه‌ی اعداد متعالی ناشماراست، لکن اثبات این که یک عدد خاصی متعالی است، کار ساده‌ای نیست.

در ادامه قصد داریم متعالی‌بودن اعداد e و π را نشان دهیم. ابتدا ثابت خواهیم‌کرد که e ریشه‌ی هیچ چندجمله‌ای با ضرایب صحیحی نمی‌تواند باشد، و با کمک برهان متعالی‌بودن e نشان خواهیم‌داد π نیز متعالی است.

[1] Diagonalization

۳. e متعالی است.

اگر نشان دهیم که e متعالی است، مستقیماً نتیجه خواهدشد که گنگ است؛ لکن برای نوعی ملموس‌ساختن ایده‌هایی که بعداً به کار خواهیم‌برد، ابتدا نشان می‌دهیم که e گنگ است.

قضیه ۱.۳. e گنگ است.

اثبات. فرض کنید $e = \frac{a}{b}$ که $a, b \in \mathbb{Z}$ و $b > ۰$. می‌دانیم $e = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{۱}{n!}$. قرار دهید

$$\frac{a}{b} = \frac{۱}{۰!} + \frac{۱}{۱!} + \cdots + \frac{۱}{b!} + \cdots = (\frac{۱}{۰!} + \frac{۱}{۱!} + \cdots + \frac{۱}{b!}) + \frac{۱}{b!}(\frac{۱}{b+۱} + \frac{۱}{(b+۱)(b+۲)} + \cdots).$$

عبارت داخل پرانتز اول را می‌توان به صورت $\frac{N}{b!}$ نوشت که $N \in \mathbb{N}$. از طرفی در مورد عبارت داخل پرانتز دوم داریم

$$\delta = \frac{۱}{b+۱} + \frac{۱}{(b+۱)(b+۲)} + \cdots < \frac{۱}{b+۱} + \frac{۱}{(b+۱)^۲} + \cdots = \frac{۱}{b} \leq ۱.$$

پس عبارت فوق به شکل

$$\frac{a}{b} = \frac{N+\delta}{b!} \tag{۱.۳}$$

درمی‌آید که $\delta < \frac{۱}{b}$. اگر طرفین (۱.۳) را در $b!$ ضرب کنیم، خواهیم‌داشت $a(b-۱)! = N + \delta$ و نتیجتاً

$$a(b-۱)! - N = \delta. \tag{۲.۳}$$

طرف چپ تساوی (۲.۳) یک عدد صحیح است، در حالی که طرف راست آن بین ۰ و ۱ است که واضحاً غیرممکن است. بنابراین e گویا نیست. □

تمرین ۲.۳. نشان دهید e یک عدد گنگ درجه‌ی دو نیست؛ یعنی نمی‌تواند ریشه‌ی یک چندجمله‌ای درجه دوی ناصفر با ضرایب صحیح باشد.

(**راهنمایی:** معادله‌ی فرضی $ae^۲ - be + c = ۰$ را به صورت $ae + \frac{c}{e} = b$ بازنویسی کنید. دقت کنید که $\frac{۱}{e} = \sum_{n=۰}^{\infty} \frac{(-۱)^n}{n!}$، و برهانی مشابه برهان پیشین را دنبال کنید.)

برهانی که برای متعالی‌بودن e ارائه خواهیم‌داد به نوعی مشابه همین برهان است، از این حیث که می‌توان e^k را به شکل $e^k = \frac{N_k + \delta_k}{N}$ تخمین زد که در آن، N و N_k اعدادی صحیح و δ_k به اندازه‌ی دل‌خواه کوچک است؛ با این تفاوت که این بار از بسط تیلور برای این تخمین‌ها استفاده نخواهیم‌کرد.

قضیه ۳.۳. e عددی متعالی است.

اثبات. فرض کنید e ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفر با ضرایب صحیح باشد. با انتخاب یک چندجمله‌ای با کم‌ترین درجه خواهیم‌داشت

$$a_n e^n + \cdots + a_۱ e + a_۰ = ۰, \quad a_۰ \neq ۰. \tag{۳.۳}$$

اگر نشان دهیم برای هر $k \in \{۱, \ldots, n\}$ می‌توان نوشت

$$e^k = \frac{N_k + \delta_k}{N} \tag{۴.۳}$$

که در آن، $N, N_۱, \ldots, N_n \in \mathbb{Z}$ و δ_kها به اندازه‌ی دل‌خواه کوچک هستند، آن‌گاه می‌توانیم (۴.۳) را به صورت

$$a_۰ N + (a_۱ N_۱ + \cdots + a_n N_n) + (a_۱ \delta_۱ + \cdots + a_n \delta_n) = ۰ \tag{۵.۳}$$

بازنویسی کنیم. تخمین‌مان از e^kها را طوری خواهیم‌ساخت که بخش صحیح (۵.۳) ناصفر و اندازه‌ی بخش δ آن به اندازه‌ی دل‌خواه کوچک ـــمثلاً کمتر از ۱ـــ باشد. به کمک چنین تخمینی ثابت می‌شود که تساوی (۳.۳) ناممکن است و نتیجتاً e متعالی است.

برای تخمین از تابع Γ[۱] استفاده خواهیم‌کرد. در این برهان نیازی به تمام قوای این تابع نداریم و به خاطر ارتباطی که بین e^{-x} و فاکتوریل‌ها برقرار می‌کند به این تابع علاقه‌مندیم. با یک انتگرال جزءبه‌جزء می‌توان نشان داد

$$\frac{۱}{(p-۱)!}\int_{۰}^{\infty} e^{-x}x^{j}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} ۱, & j=p-۱; \\ mp,\ m\in\mathbb{Z} & j\geq p. \end{cases} \tag{۶.۳}$$

هم‌چنین اگر f یک چندجمله‌ای دل‌خواه باشد، واضح است که $e^{k} = \dfrac{\int_{۰}^{\infty} e^{k-x}f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{۰}^{\infty} e^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x}$. حال قرار دهید

$$f(x) = x^{p-۱}(x-۱)^{p}(x-۲)^{p}\cdots(x-n)^{p}. \tag{۷.۳}$$

به ازای هر $k\in\{۱,\ldots,n\}$ تعریف کنید

$$\begin{cases} N &= \dfrac{۱}{(p-۱)!}\int_{۰}^{\infty} e^{-x}f(x)\,\mathrm{d}x, \\ N_k &= \dfrac{۱}{(p-۱)!}\int_{k}^{\infty} e^{k-x}f(x)\,\mathrm{d}x, \\ \delta_k &= \dfrac{۱}{(p-۱)!}\int_{۰}^{k} e^{k-x}f(x)\,\mathrm{d}x. \end{cases} \tag{۸.۳}$$

توجه کنید که

$$f(x) = (-۱)^{p}(-۲)^{p}\cdots(-n)^{p}x^{p-۱} + \sum c_i x^{p+i}$$

پس طبق (۶.۳) نتیجه می‌شود

$$N = (-۱)^{np}(n!)^{p} + mp,\ m\in\mathbb{Z}.$$

اگر عدد اول p را بزرگ‌تر از n برگزینیم، آن‌گاه $p\nmid n!$ و در نتیجه $p\nmid N$، پس $N\neq ۰$. حال N_k را در نظر بگیرید. قرار دهید $y=x-k$ و بخش دوم (۸.۳) را به صورت

$$N_k = \frac{۱}{(p-۱)!}\int_{۰}^{\infty} e^{-y}f(y+k)\,\mathrm{d}y$$

بازنویسی کنید. توجه کنید که $y^{p}\mid f(y+k)$، پس طبق (۶.۳) $p\mid N_k$. اگر $p>|a_{۰}|$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} p\nmid a_{۰}N,\ p|a_{۱}N_{۱}+\cdots+a_nN_n &\implies p\nmid a_{۰}N+(a_{۱}N_{۱}+\cdots+a_nN_n), \\ &\implies a_{۰}N+(a_{۱}N_{۱}+\cdots+a_nN_n)\neq ۰. \end{aligned}$$

حال کافی است نشان دهیم اگر p را به اندازه‌ی کافی بزرگ کنیم، می‌توانیم δ_kها را به اندازه‌ی دل‌خواه کوچک نگه داریم. توجه کنید انتگرالی که در بخش سوم (۸.۳) δ_kها معرفی می‌کند، در بازه $[۰,k]$ تعریف شده‌است. از طرفی اگر $x\in[۰,n]$ آن‌گاه $|x-k|\leq n$، پس در این بازه $|f|\leq n^{(n+۱)p-۱}$ و با استفاده از این کران بالا نتیجه می‌گیریم

$$\delta_k \leq \frac{e^{n}\cdot n^{(n+۱)p}}{(p-۱)!},\quad \forall k\in\{۱,\ldots,n\}.$$

با مقداری حسابان مقدماتی به سادگی قابل مشاهده است که اگر $p\to\infty$ آن‌گاه $\delta_k\to ۰$.

با توجه به توضیحات ابتدای برهان و نتایج حاصل‌شده تساوی (۵.۳) و معادلاً (۳.۳) نامکن است؛ پس e متعالی است. $\square$

نشان دادیم تساوی (۵.۳) ناممکن است. حال معادله‌ی زیر را در نظر بگیرید

$$a_{۱}e^{b_{۱}}+\cdots+a_ne^{b_n} = ۰$$

[۱] جهت یادآوری، تابع Γ توسیع تابع فاکتوریل به اعداد مختلط است، بدین نحو که $\Gamma(z)=\int_{۰}^{\infty} e^{-x}x^{z-۱}\,\mathrm{d}x$ که $\Re(z)>۰$؛ به طور خاص برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\Gamma(n)=(n-۱)!$.

که $a_1, \dots, a_n$ و $b_1, \dots, b_n$ جبری هستند، $\exists i \leq n\ a_i \neq 0$ و $\forall i,j \leq n\ b_i \neq b_j$. می‌توان نشان داد حتی چنین حالتی هم ممکن نیست. این حکم به قضیه لیندمان[1] معروف است. برای جزئیات بیش‌تر به [۲] مراجعه کنید.

۴. π متعالی است.

برهانی که در این بخش برای اثبات متعالی‌بودن عدد π ارائه می‌شود، چارچوبی مشابه برهان متعالی‌بودن e است؛ لکن در برخی جزئیات نیاز به ابزارهای بیش‌تری دارد. ما نیز ابتدا چارچوب کلی برهان را در این بخش ترسیم می‌کنیم، سپس جزئیات آن را تکمیل می‌کنیم.

قضیه ۱.۴. π متعالی است.

اثبات. فرض کنید چندجمله‌ای ناصفر p با ضرایب صحیح وجود داشته‌باشد که $p(\pi) = 0$. از این فرض می‌توان نتیجه گرفت که $i\pi$ ریشه‌ی چندجمله‌ای $q(z) = p(iz)p(-iz)$ خواهدبود. فرض کنید q یک چندجمله‌ای درجه‌ی n باشد. طبق قضیه‌ی اساسی جبر، این چندجمله‌ای دارای n ریشه خواهدبود. q را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم

$$q(z) = a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n), \quad a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},\ \alpha_1 = i\pi \tag{۱.۴}$$

می‌دانیم $1 + e^{\alpha_1} = 0$ پس

$$(1+e^{\alpha_1})(1+e^{\alpha_2})\cdots(1+e^{\alpha_n}) = 0$$

تساوی فوق را به صورت $\sum_{k=1}^{2^n} e^{\beta_k} = 0$ بازنویسی می‌کنیم که در آن β_kها جمع‌های مختلف α_jهای مجزاست، و البته شامل 0. فرض کنید $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ همه‌ی اعضای ناصفر بین β_kها باشد؛ بنابراین می‌توان تساوی مذکور را به صورت زیر بازنویسی کرد

$$r + e^{\beta_1} + e^{\beta_2} + \cdots + e^{\beta_m} = 0, \quad r = 2^n - m > 0. \tag{۲.۴}$$

سعی می‌کنیم برهان ارائه‌شده برای e را تقلید کنیم. برای $z \in \mathbb{C}$ چندجمله‌ای

$$f(z) = z^{p-1}\big(g(z)\big)^p \tag{۳.۴}$$

را تعریف می‌کنیم، که در آن p یک عدد اول است و

$$g(z) = a^m(z-\beta_1)(z-\beta_2)\cdots(z-\beta_m), \quad a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \tag{۴.۴}$$

سپس مقادیر N و δ را مشابه بخش قبل معرفی می‌کنیم، با این ملاحظه که انتگرال‌های به کار رفته در فرمول‌های زیر در صفحه‌ی اعداد مختلط تعریف شده‌اند. در انتگرال‌های زیر $\gamma = \mathbb{R}_{\geq 0}$، γ_k خط افقی $\beta_k + t$ که $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$، و γ'_k پاره‌خطی است که 0 را به β_k متصل می‌کند.

$$\begin{cases} N &= \dfrac{1}{(p-1)!}\int_\gamma e^{-z} f(z)\,\mathrm{d}z, \\ N_k &= \dfrac{1}{(p-1)!}\int_{\gamma_k} e^{\beta_k - z} f(z)\,\mathrm{d}z, \\ \delta_k &= \dfrac{1}{(p-1)!}\int_{\gamma'_k} e^{\beta_k - z} f(z)\,\mathrm{d}z. \end{cases} \tag{۵.۴}$$

حال طبق قضیه‌ی انتگرال کوشی داریم[2]

$$Ne^{\beta_k} = N_k + \delta_k. \tag{۶.۴}$$

[1] Lindemann Theorem

[2] فرض کنید $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ و γ مسیری بسته و ذوزنقه‌ای است که رئوس آن 0، β_k، $\beta_k + t$ و t است. قضیه‌ی کوشی نتیجه می‌دهد که اگر F یک تابع مشتق‌پذیر در $\mathbb{C}$ باشد، $\int_\gamma F = 0$. حال فرض کنید $t \to +\infty$؛ از آن‌جایی که $e^{-t} \to 0$، روی مسیر γ_k^t که خط عمودی واصل بین t و $\beta_k + t$ است، $\int_{\gamma_k^t} e^{\beta_k - z} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$، پس (۶.۴) برقرار است.

می‌دانیم چندجمله‌ای q دارای ضرایب صحیح است. به کمک لم ۴.۴ که در ادامه خواهدآمد، می‌توان نتیجه گرفت که f و g نیز دارای ضرایب صحیح‌اند. مشابه استدلالی که در برهان پیشین مطرح شد، عدد اول p را بزرگ‌تر از $|a^m|$ برمی‌گزینیم و طبق (۶.۳) ثابت می‌شود که $N \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$، در نتیجه $N \neq ۰$. حال می‌توان (۲.۴) را به صورت زیر بازنویسی کرد. ضمناً به یاد آورید که اگر $p > r$ آن‌گاه $rN \notin p\mathbb{Z}$.

$$rN + (N_۱ + N_۲ + \cdots + N_m) + (\delta_۱ + \delta_۲ + \cdots + \delta_m) = ۰. \quad (۷.۴)$$

این‌جا N_kها رفتار نسبتاً متفاوتی از خود نشان می‌دهند و به طور کلی اعدادی مختلط هستند. با این حال مجموع N_kها به طور مطلوبی رفتار می‌کنند؛ به عبارت دقیق‌تر، $N_۱ + N_۲ + \cdots + N_m \in p\mathbb{Z}$. اگر چنین خاصیتی برقرار باشد، بخش صحیح (۷.۴) با استدلالی مشابه برهان پیشین ناصفر خواهدبود. جهت اثبات این خاصیت تغییر متغیر $w = z - \beta_k$ را در هر یک از انتگرال‌های بخش دوم (۵.۴) اعمال کنید. با این تغییر متغیر و جمع‌کردن N_kها خواهیم‌داشت

$$N_۱ + \cdots + N_m = \frac{۱}{(p-۱)!} \int_\gamma e^{-w} h(w)\, \mathrm{d}w, \quad \gamma = \mathbb{R}_{\geq ۰}; \quad (۸.۴)$$

$$h(w) = f(w + \beta_۱) + \cdots + f(w + \beta_m). \quad (۹.۴)$$

با توجه به تعریف $f(w)$، $w^p \mid f(w+\beta_k)$؛ در نتیجه $w^p \mid h(w)$. مجدداً از این که چندجمله‌ای q دارای ضرایب صحیح است و لم ۴.۴ می‌توان نتیجه گرفت h ضرایب صحیح خواهدداشت، و بنا بر (۶.۳) داریم $N_۱ + \cdots + N_m \in p\mathbb{Z}$. این حکم در کنار $rN \notin p\mathbb{Z}$ نتیجه می‌دهد که بخش صحیح تساوی (۷.۴) ناصفر است.

حال کافی است به بخش δ تساوی (۷.۴) بپردازیم. قرار دهید $M = \max|\beta_k|$. اگر $|z| \leq M$ آن‌گاه در این دیسک $|f| \leq |a|^{mp}(۲M)^{mp}M^{p-۱}$. δ_kها همگی درون این دیسک محاسبه می‌شوند، پس با استفاده کران بالای به‌دست‌آمده داریم

$$\delta_k \leq \frac{e^M \cdot \left(۲^m |a|^m M^{m+۱}\right)^p}{(p-۱)!}, \quad \forall k \in \{۱, \ldots, m\}.$$

مجدداً δ_k را می‌توان به اندازه‌ی دل‌خواه کوچک کرد؛ زیرا $\delta_k \to ۰$ هرگاه $p \to \infty$.

برای تکمیل برهان متعالی‌بودن π کافی است نشان دهیم چندجمله‌ای‌های f، g و h دارای ضرایب صحیح‌اند. با تعاریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۲.۴. می‌گوییم چندجمله‌ای $P(x_۱, \ldots, x_n)$ یک چندجمله‌ای متقارن[1] است، هرگاه به ازای هر جایگشت σ روی مجموعه‌ی $\{۱, \ldots, n\}$،

$$P(x_۱, \ldots, x_n) = P(x_{\sigma(۱)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

تعریف ۳.۴. چندجمله‌ای‌های متقارن پایه‌ای[2] روی $x_۱, \ldots, x_n$ عبارت‌اند از

$$\begin{aligned}
s_۱(x_۱, \ldots, x_n) &= \sum_i x_i, \\
s_۲(x_۱, \ldots, x_n) &= \sum_{i<j} x_i x_j, \\
&\vdots \\
s_t(x_۱, \ldots, x_n) &= \sum_{i_۱ < \cdots < i_t} x_{i_۱} \cdots x_{i_t}, \\
&\vdots \\
s_n(x_۱, \ldots, x_n) &= x_۱ \cdots x_n.
\end{aligned}$$

[1] Symmetric Polynomial
[2] Elementary Symmetric Polynomials

لم ۴.۴ (قضیه‌ی بنیادی چندجمله‌ای‌های متقارن). چندجمله‌ای $P(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ یک چندجمله‌ای متقارن است، اگر و تنها اگر

$$P(x_1,\dots,x_n)=Q\big(s_1(x_1,\dots,x_n),\dots,s_n(x_1,\dots,x_n)\big),\quad Q(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{Z}[y_1,\dots,y_n].$$

ضرایب صحیح چندجمله‌ای q در (۱.۴) همگی به شکل $\pm a\cdot s_t(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ هستند. بنابراین اگر $P(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]$ متقارن باشد، $P(a\alpha_1,\dots,a\alpha_n)\in\mathbb{Z}$. حکم اخیر درباره‌ی چندجمله‌ای‌های صحیح متقارن روی $a\beta_1,\dots,a\beta_{2^n}$ نیز صدق می‌کند (چرا؟).

چند جمله‌ای

$$G(z)=(z-a\beta_1)\cdots(z-a\beta_m)=\frac{1}{z^r}(z-a\beta_1)\cdots(z-a\beta_{2^n}) \tag{۱۰.۴}$$

در نظر بگیرید. ضرایب این چندجمله‌ای، خود چندجمله‌ای‌هایی صحیح و متقارن روی $a\beta_1,\dots,a\beta_{2^n}$ هستند، بنابراین همگی صحیح‌اند. طبق (۴.۴) $g(z)=G(az)$، بنابراین g و در نتیجه f در (۳.۴) نیز دارای ضرایب صحیح‌اند. برای نشان‌دادن حکم مشابه برای h در (۹.۴) از چندجمله‌ای‌های زیر استفاده می‌کنیم. قرار دهید

$$\begin{cases} H(w) &= w^{p-1}\big(G(w)\big)^p,\\ J(w) &= \frac{1}{w^p}\sum_{k=1}^{m}H(w+a\beta_k)=\frac{1}{w^p}\big(-rH(w)+\sum_{k=1}^{2^n}H(w+a\beta_k)\big).\end{cases} \tag{۱۱.۴}$$

با توجه به صحیح‌بودن ضرایب G مجدداً می‌توان نشان داد H و J نیز چندجمله‌ای‌هایی با ضرایب صحیح هستند. با ترکیب (۳.۴)، (۴.۴)، (۱۰.۴) و (۱۱.۴) داریم

$$h(w)=\sum_{k=1}^{m}(w+\beta_k)^{p-1}\big(g(w+\beta_k)\big)^p=\frac{aw^p}{(aw)^p}\sum_{k=1}^{m}(aw+a\beta_k)^{p-1}\big(G(aw+a\beta_k)\big)^p=aw^pJ(aw).$$

از آن‌جایی که ضرایب چندجمله‌ای J صحیح است، h نیز یک چندجمله‌ای با ضرایب صحیح خواهدبود. □

مراجع

[1] R. Gray, *Georg Cantor and Transcendental Numbers*, The American Mathematical Monthly, **9**, (1994), 819-832.

[2] R. Steinberg and R. M. Redheffer, *Analytic proof of the Lindemann theorem*, Pacific Journal of Mathematics, **2** (1952), 231-242.

* دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی محض، دانشگاه صنعتی شریف

رایانامه: navid.dejbord@gmail.com