

مسایلی در اُریگامی محاسباتی کاوه حسینی

مسائل مربوط به تا کردن و باز کردن کاغذ از اوایل سده‌ی پانزدهم میلادی مورد توجه بوده ولی تا سالهای های اخیر به شکل جدی از لحاظ ریاضیات مورد مطالعه قرار نگرفته بود. این مسایل در چند سال اخیر در حوزه‌ی هندسه‌ی گسته و محاسباتی مورد توجه قرار گرفته است. در ادامه شرح مختصری از کارهای اصلی انجام شده در این حوزه را ارایه دهیم. بیشتر مطالب این مقاله در رساله‌ی دکتری اریک دیمین [D⁰¹] آمده است.

در واقع هدف کلی بررسی نحوه تغییر شکل دادن اشیایی هندسی با توجه به محدودیتهای خاص وابسته به شیء است. مانند پیوند^۱، قطعه‌ی کاغذ و چند ضلعی.

در ادامه این سه نوع شیء هندسی را به طور جداگانه بررسی می‌کنیم.

پیوند یا چارچوب^۲ به مجموعه‌ی ای از پاره خط‌ها گفته می‌شود که از نقاط انتهایی (رئوس) به هم وصل شده‌اند و یک گراف را به وجود آورده‌اند. یک پیوند را می‌توان در فضای \mathbb{R}^d تاکرد^۳ به این مفهوم که می‌توان رئوس را طوری حرکت داد که طول پاره خط‌ها تغییر نکند. یک مثال از تا کردن پیوند را در شکل ۱ می‌بینید.

در حالتی که پاره خط‌ها بتوانند هم دیگر را قطع کنند این مسئله بسیار مطالعه شده است. البته این پیوند‌ها حتی در صفحه می‌توانند بسیار پیچیده شوند. در ۱۸۷۶ کمپ^۴ [Kempe^{۷۶}] نشان داد که یک پیوند مسطح پیوند وجود دارد که یک راس آن روی نمودار یک تابع چند جمله‌ای دلخواه قرار حرکت می‌کند. هوپکرافت^۵، جوزف^۶ و وایتسایدز^۷ [HJW^{۸۴}] نشان دادند مسئله‌ی تعیین اینکه آیا یک پیوند دلخواه را می‌توان به یک پیکربندی دلخواه داده شده تبدیل کرد یک مسئله‌ی PSPACE-Complete است. یک نشاندن یک پیوند در فضای \mathbb{R}^d یک پیکربندی یا یک حالت می‌نماییم و به مجموعه‌ی همه‌ی پیکربندی‌های یک پیوند، فضای پیکربندی^۸ می‌گوییم. جوردن^۹ و اشتاینر^{۱۰} [JS^{۹۹}] ثابت کردند برای هر چندگونای جبری حقیقی^{۱۱} دلخواه Z با توپولوژی اقلیدسی، یک پیوند مسطح^{۱۲} وجود دارد که فضای پیکربندی آن با Z هم ریخت است. بنابراین پیوند‌های مسطح با نظریه‌ی حل دستگاه ناساوانی چندجمله‌ای‌ها روی اعداد حقیقی یکسان است. از طرفی برای هر پیوندی که گراف آن یک دور است، هر عضوی از فضای پیکربندی‌ای را می‌توان با دنباله‌ای از حرکت‌ها (تا کردن و انتقال) در فضای \mathbb{R}^d , $d > 2$ روی یک پیکربندی دلخواه اولیه بدست آورد [Sal^{۷۳}, LW^{۹۵}].

اخیراً کارهای زیادی روی حالتی که پیوند باید ساده باشد (هیچ دو پاره خطی هم‌دیگر را قطع نکنند). انجام شده است.^{۱۳}.

^۱Linkage

^۲Framework

^۳Fold

^۴Kempe

^۵Hopcroft

^۶Joseph

^۷Whitesides

^۸Configuration Space

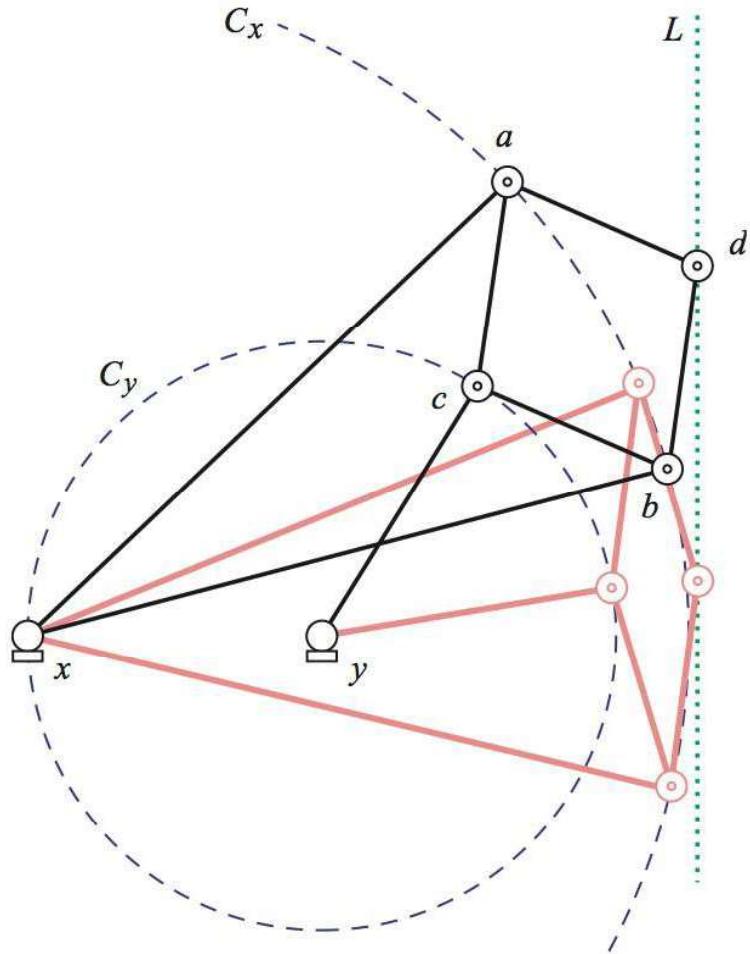
^۹Jordan

^{۱۰}Steiner

^{۱۱}Real Algebraic variety

^{۱۲}Planar Linkage

^{۱۳}البته پاره خط‌ها می‌توانند مماس باشند.



شکل ۱: یک مثال از تا کردن پیوند

این نسخه از مسئله کاربردهایی در خم کردن لوله های آب^{۱۴} [OR'۹۸] و برنامه ریزی حرکت^{۱۵} بازوی ربات ها دارد. همچنین این مسئله در تا کردن پروتئین^{۱۶} ها در زیست شناسی مولکولی هم کاربردهای مهمی پیدا کرده است.

شاید بینایی ترین مسئله ای که راجع به تا کردن پیوند ها بتوان مطرح کرد این است که آیا می توان با تا کردن و انتقال از هر پیکربندی به پیکربندی دیگر رسید؟ حال با توجه به اینکه این حرکت ها برگشت پذیراند سوال را می توان به شکل دیگری بیان کرد. آیا می توان هر پیکربندی را به یک پیکربندی کانونی^{۱۷} تبدیل کرد؟ البته تعریف پیکربندی کانونی به نوع پیوند بستگی دارد.

در حالتی که پاره خط ها نمی توانند هم دیگر را قطع کنند سه نوع پیوند (با توجه به ساختار گراف مربوطه) به طور معمول مطالعه می شوند: یک مسیر چند ضلعی باز، درخت چند ضلعی و دور چند ضلعی یا همان چند ضلعی ساده. در زیر پیکربندی های کانونی ذکر شده را می بینید.

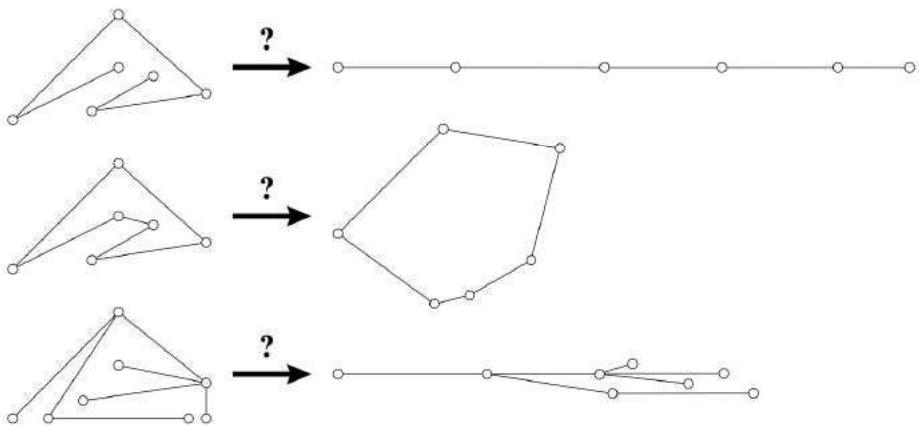
حال مسئله اولیه به این تبدیل می شود: آیا هر زنجیری را می توان راست، هر چند ضلعی را محدب و هر درخت را مسطح کرد؟ جواب این مسئله به بعد فضای اولیه پیوند و بعد فضایی که پیوند را در آن تا می کنیم بستگی دارد. در سالهای اخیر این دسته

^{۱۴}hydraulic tube bending

^{۱۵}motion planning

^{۱۶}protein folding

^{۱۷}Canonical configuration

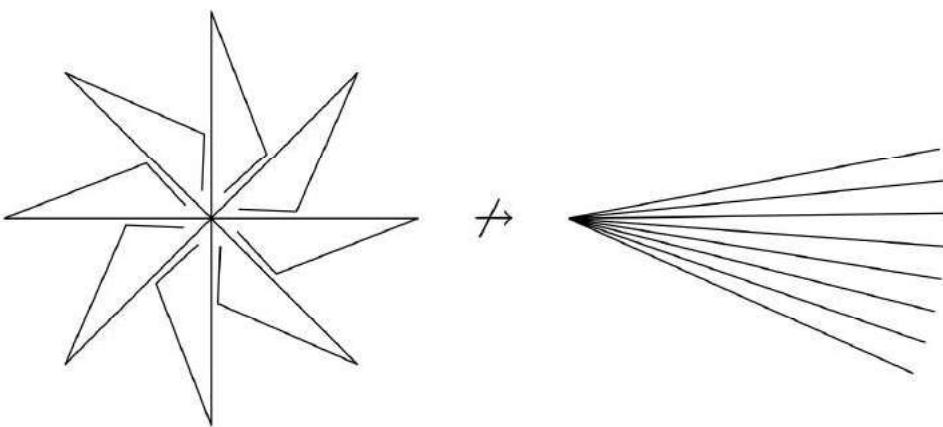


از مسایل به طور کامل حل شده‌اند. در جدول زیر برای حالتی که فضای اولیه و فضای تا کردن هم بعد باشند نتایج را می‌بینید.

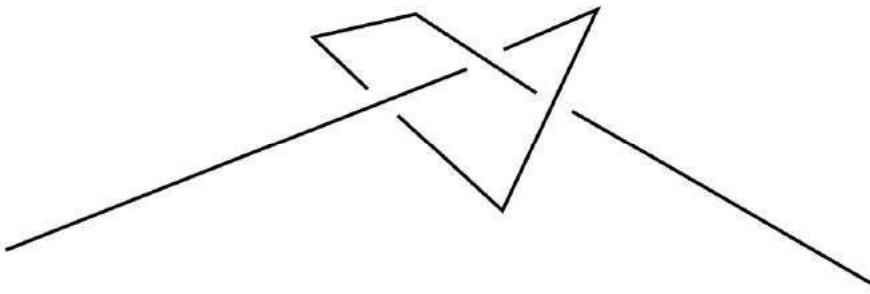
بعد	آیا هر زنجیری را می‌توان راست کرد؟	آیا هر چند ضلعی را می‌توان محدب کرد؟	آیا هر درخت را می‌توان مسطح کرد؟
۲	بله (در آدامه)	بله (در آدامه)	خیر [BDD+۰۱b]
۳	خیر	خیر [CJ۹۸.BBD+۰۱a]	[CJ۹۸.BBD+۰۱a]
بالاتر	بله [CO۰۱]	[CO۹۹, CO۰۱]	[CO۹۹, CO۰۱]

مسئلهٔ خط‌کش نجار: زنجیرهای چندضلعی در صفحه

مسئلهٔ راست کردن زنجیر با نام مسئلهٔ خط‌کش نجار شناخته شده است. زیرا خط‌کش نجارها مانند یک زنجیر چند ضلعی تا می‌شود. این مسئله را بعداً بررسی می‌کنیم. بدل و بقیه [BDD+۰۱b] نشان دادند همهٔ درخت‌ها را نمی‌توان مسطح کرد. مثال نقض آنها را در زیر می‌بینید.



در واقع به طور شهودی می‌توان گفت هیچ پاره خطی را نمی‌توان حرکت داد مگر اینکه فضای کافی برای دوران آن موجود باشد. مسایل مربوطه در بعد ۳ توسط اردوش [Erd۳۵] در ۱۹۳۵ برای اولین بار مطرح شد. فرض کنید پیوند اولیه در فضای ۳ بعدی باشد. به طور کلی یک زنجیر چندضلعی یا یک چند ضلعی بدون گره در فضای ۳ بعدی را نمی‌توان به پیکر بندی کانونی تبدیل کرد [CJ۹۸, Tou۰۱, BDD+۰۱a]. شکل زیر یک گره را در ۳ بعد نشان می‌دهد.



مسئله‌ی تعیین اینکه یک مسیر چندضلعی یا یک دور چندضلعی بدون گره را می‌توان یه ترتیب راست یا محدب شود هنوز باز است و تنها کران بالای موجود الگوریتمی PSpace است [Can87, Can88]. در ابعاد ۴ و بالاتر همه‌ی گره‌ها را می‌توان باز کرد ، به عبارتی هر مسیر چندضلعی را می‌توان راست و هر دور چندضلعی را می‌توان محدب کرد.[CO99, CO01]

کاربرد در تا کردن پروتئین

تا کردن پروتئین مسئله‌ی مهمی در زیست‌شناسی مولکولی است به طوری که نحوه‌ی تاشدن پروتئین به طور کلی رفتار آن را تعیین می‌کند.

پروتئین را می‌توان با یک پیوند مدل کرد به طوری که رئوس نشان دهنده‌ی آمینو اسید‌ها و پاره خط‌ها نشان دهنده‌ی پیوند‌های شیمیایی بین آمینو اسید‌هاست. معمولاً طول پیوند‌های شیمیایی در حد یک ضربی دو به هم نزدیک هستند. می‌توان پروتئین را به شکل یه درخت (با جزئیات بیشتر) یا یک زنجیر (با جزئیات کمتر).

یکی از ویژگی‌های جالب پروتئین‌ها این است که سریعاً به پیکربندی با انرژی کمینه تا می‌شوند. مدل دقیق ریاضی از پروتئین‌ها با پیوند‌های معمولی انجام نمی‌شود و به جای آن از پیوند پیچیده^{۱۸} استفاده می‌شود که در آن زاویه‌ی هر راس ثابت است. این محدودیت زاویه‌ای به طور کلی تعداد درجه‌های آزادی پیوند را نصف می‌کند. عمل اصلی به دوران دادن بخشی از پیوند حول یکی از میله‌های آن تبدیل می‌شود [Sos00, ST00]. نشان داده شده که مسئله‌ی تعیین اینکه یک زنجیر چندضلعی پیچیده مسطح می‌شود یا نه مسئله‌ای NP-Complete است [ST00].

کاغذ

اریگامی کاغذ در حدود ۲۵ سال اخیر به مسائل ریاضیاتی و محاسباتی جالی رسیده است. یک قطعه کاغذ ، یک چندضلعی ساده مانند مربع یا مستطیل است و آن را می‌توان با هر عملی که فاصله‌ها در کاغذ را حفظ کرده و کاغذ را نبرد تا کرد. به عبارت دیگر کاغذ را نباید پاره کرد، کشید یا چسباند. به طور رسمی یک عمل تا کردن دنباله‌ای از جاسازی^{۱۹} های هم اندازه‌ی قطعه‌ی کاغذ در \mathbb{R}^3 است. البته استفاده از اصطلاح "جاسازی" ضعیف است زیرا دو بخش از کاغذ را می‌توان بر هم مماس کرد. همچنین یک تا کردن مسطح کاغذ را به شکل مسطح در می‌آورد. معمولاً به حرکت پیوسته‌ی تا کردن توجهی نمی‌کنیم و حالت نهایی تا کردن مورد توجه است.

طراحی اریگامی

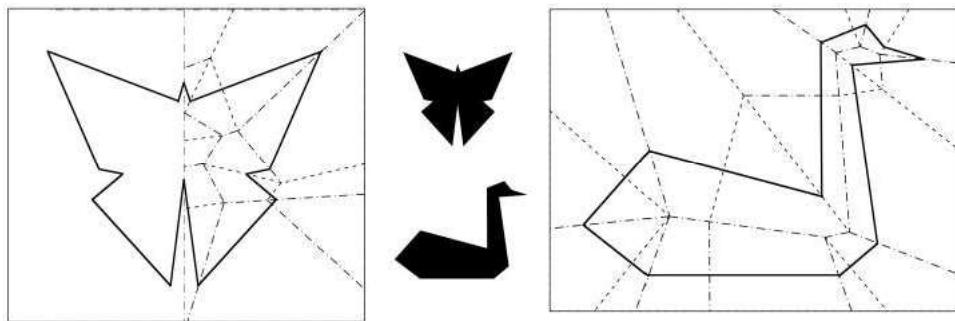
طراحی اریگامی به عمل تا کردن کاغذ به شیئی با ویژگی خاصی (مثلاً یک شکل خاص) اطلاق می‌شود. یکی از موضوعات طراحی اریگامی را در زیر بررسی می‌کنیم.

^{۱۸}Revolute linkages

^{۱۹}Embedding

یک برش مستقیم

یک قطعه کاغذ را تا کنید، آن را سطح کنید، روی یک خط مستقیم کاغذ را ببرید. و قطعه ها را جدا کنید. این مسئله تا کردن و برش ابتدا توسط مارتین گاردنر در ۱۹۶۰ مطرح شد. البته مسئله بسیار قدیمی تر است و به یک کتاب معماه ژاپنی بر می گردد. به عبارت دیگر، فرض کنید یک گراف مستطح رسم شده روی کاغذ به شما داده شده است. آیا می توان کاغذ را طوری مستطح تا کرد که همهی پاره خط های گراف روی یک خط قرار بگیرند؟ پاسخ این است که برای هر مجموعه ای از پاره خط ها در صفحه می توان این کار را انجام داد. دو روش کلی برای حل این مسئله وجود دارد. روش اول (حل جزئی) [DDL۹۸:DDL۹۹b] بر اساس ساختاری به نام اسکلت راست^{۲۰} که دو مثال از آن در شکل پایین نشان داده شده است.



شکل ۲: اسکلت راست

روش دوم (حل کامل) [BDEH^{۲۱}] بر اساس بسته بندی دیسک^{۲۲} انجام می شود و کران های پایینی روی تعداد تا کردن های لازم می یابد.

چندوجهی

یکی از روش های استاندارد برای ساخت چندوجهی این است که ابتدا یک شبکه مستطح (یا همان گستردهی چندوجهی) می سازیم، سپس آن را تا کرده و لبه ها را با چسب وصل می کنیم. برای یک چندوجهی داده شده یک سوال طبیعی پیدا کردن گستردهی چندوجهی است. از طرف دیگر فرض کنید یک چند ضلعی داده شده است. این سوال ممکن است پیش بیاید که آیا می توانیم چند ضلعی را تا کرده و یک چند وجهی محدب از آن بسازیم؟ به سوال اول در بخش بعد پاسخ می دهیم.

یکی از مسایل کلاسیک باز در این زمینه این است: آیا می توان یک چند وجهی محدب را از روی ضلع هاییش طوری برد و سپس چند وجهی را باز کرد به طوری که گستردهی آن مستطح بوده و همپوشانی نداشته باشد؟ [She^{۷۵}, O'R^{۹۸}] این مسئله دارای کاربردهای مهمی در تاکردن صفحات فلزی دارد. حدس کلی در مورد این مسئله پاسخ مثبت است ولی همهی تلاشها برای حل آن تا به حال به شکست منجر شده است. آزمایش‌های شون^{۲۳} نشان داده است که یک بازکردن تصادفی از چند وجهی تصادفی با احتمال ۱ دارای همپوشانی خواهد بود.

به جای پاسخ دادن به این مسئله سخت می توان تعیین هایی از آن را بررسی کرد. یک چندوجهی را محاسبه توپولوژیکی^{۲۴} می گوییم اگر گراف یک-اسکلت یک گراف آن^{۲۵} است؟ آیا هر چند وجهی محدب باشد. آیا هر چندوجهی محدب توپولوژیکی دارای یک گستردهی ضلعی است؟ به طور خاص هر چندوجهی که از وجه های محدب ساخته شده باشد و با کره هم ریخت باشد، محاسبه توپولوژیکی است. آیا اینها دارای گستردهی ضلعی هستند؟ [Sch^{۸۷}]

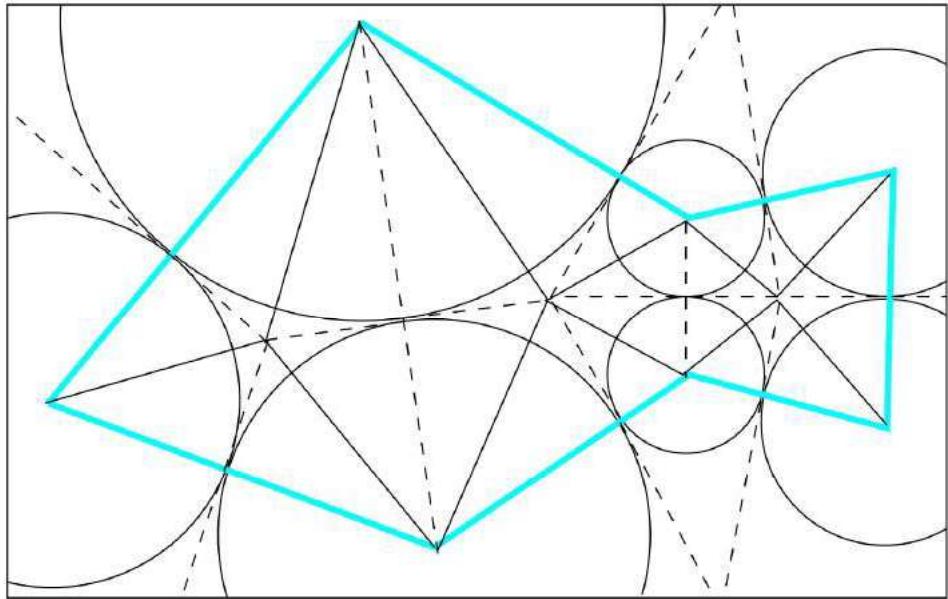
^{۲۰}straight skeleton

^{۲۱}Disk packing

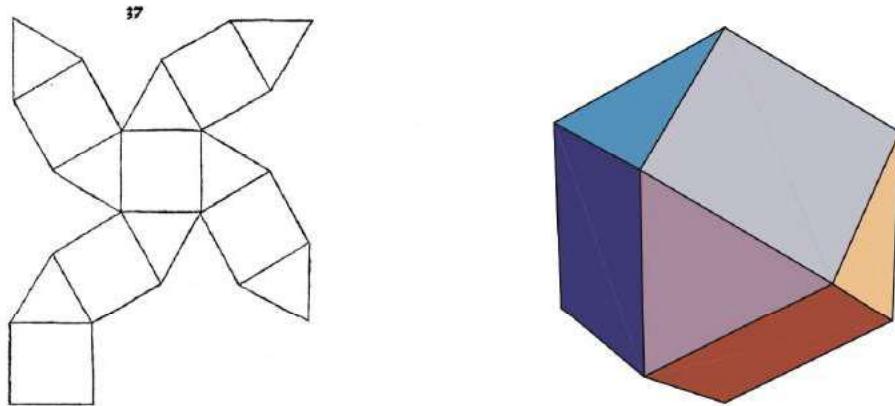
^{۲۲}Schevon

^{۲۳}topologically convex

^{۲۴}Edge unfolding



شکل ۳: بسته‌بندی دیسک

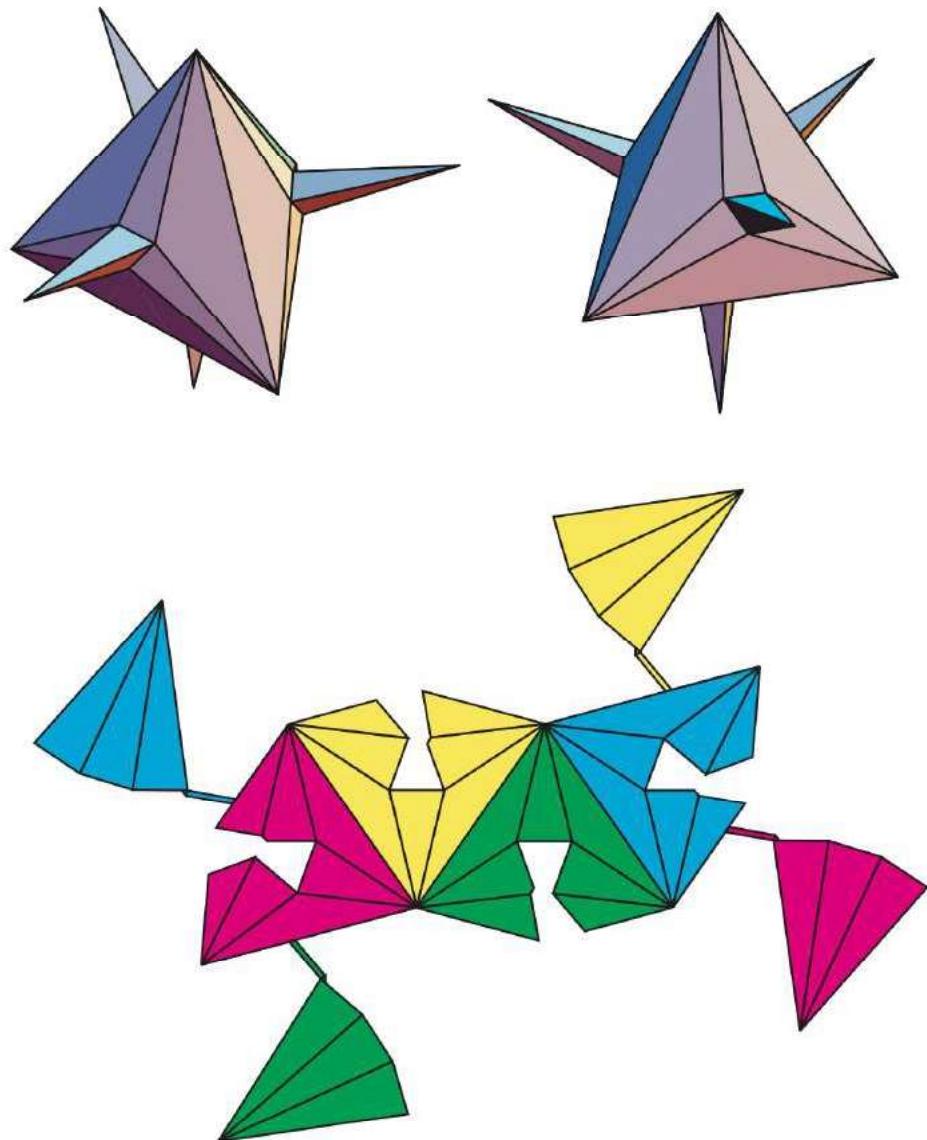


شکل ۴: آیا می‌توانیم چند ضلعی را تا کرده و یک چند وجهی محدب از آن بسازیم؟

برن و بقیه نشان [۱] BDE+۰۰] داده اند که پاسخ هر دوی این سوالات منفی است. چندوجهی شکل پایین را به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید. که در گسترهٔ نشان داده شده برش‌ها از وجه‌ها هم عبور کرده اند.
پیچیدگی تعیین اینکه آیا یک چندوجهی محدب توبولوژیکی داده شده دارای گسترهٔ ضلعی است هنوز مسئله‌ای باز است. یکی از مسایل باز دیگر در این زمینه این است که آیا هر چندوجهی هم‌ریخت با کره دارای یک گسترهٔ همبند است یا نه؟ (لزومی ندارد برش‌ها روی ضلعها باشد). می‌دانیم که هر چندوجهی محدب این خاصیت را دارد. به طور خاص در تاکردن ستاره‌ای ^{۲۵} AAOS۹۷، AO۹۲ [مجموعه‌ای از مسیرهای برش داریم که همه در یک راس چندوجهی به هم می‌رسند. در این روش گسترهٔ حاصل همپوشانی نخواهد داشت.

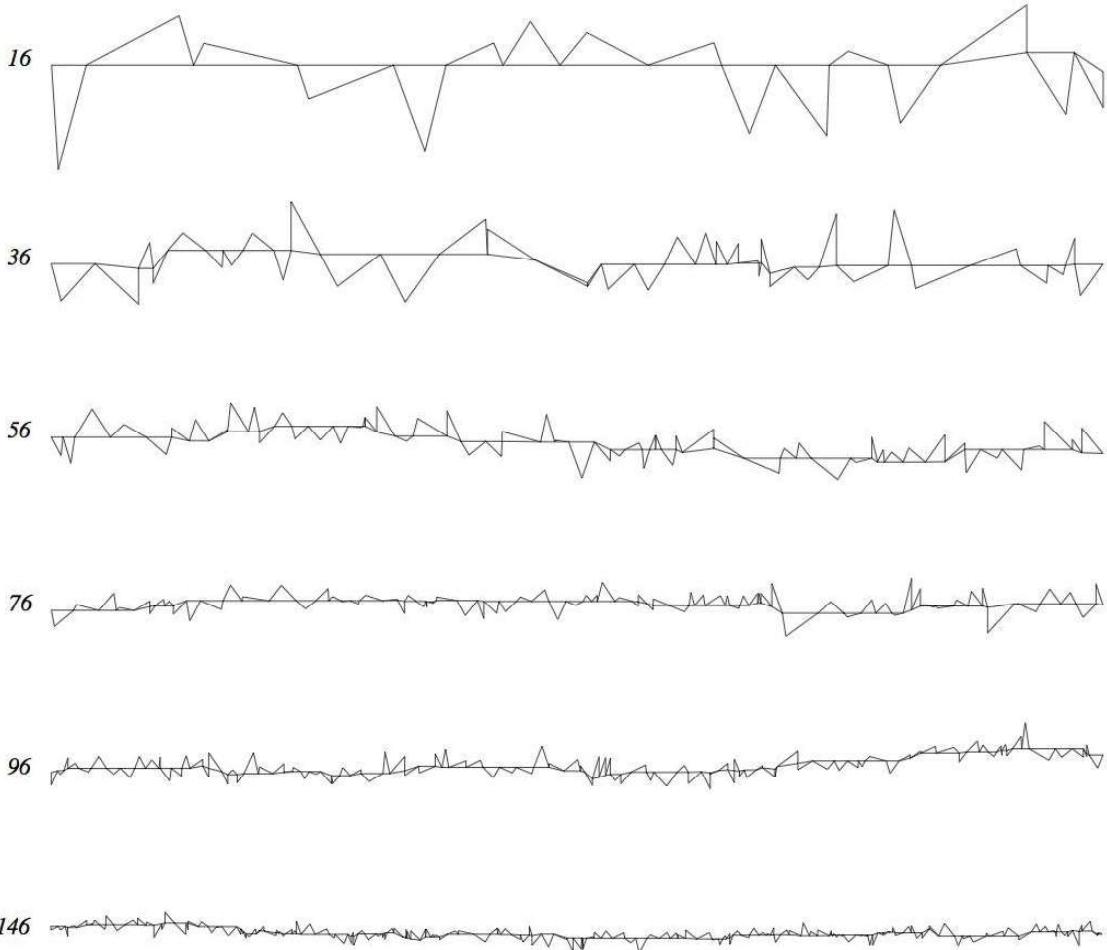
^{۲۵}star unfolding

اما بسیاری از چندوجهی‌های غیرمحدب هم دارای چنین گسترده‌هایی هستند. شکل پایین را بینید. بیدل و بقیه [BDD+۹۸] روش‌هایی برای باز کردن بسیاری از چندوجهی‌های متعامد را ارایه کرده‌اند. گرچه مسئله‌ی تعیین این چندوجهی‌ها نیز هنوز باز است.



یکی از روش‌های اخیر در مورد گسترده‌های ضلعی و گسترده‌های کلی از چندوجهی‌های غیرمحدب باز کردن^{۲۶} راسی است [DEE+۰۱] (گسترده‌ی حاصل را گسترده‌ی راسی می‌نامیم). شکل پایین را بینید که گسترده‌ی راسی تعدادی از چندوجهی‌ها با تعداد مختلف وجهه متشابه را نشان می‌دهد. البته در باز کردن راسی می‌توان فقط روی ضلعها برش داد ولی در این روش وجهه‌های که تنها در یک راس اشتراک دارند در مولفه‌ی همبندی محسوب می‌شوند. بنابراین گسترده‌ی حاصل همبند است ولی ممکن است درون آن ناهمبند باشد.

^{۲۶}vertex-unfolding



تغییر پیکربندی چندضلعی های محدب

در اینجا نشان می دهیم هر (دور) چندضلعی محدب را به چندضلعی محدب دلخواه دیگر می توان تبدیل کرد به شرطی که دنباله‌ی پادساعتگرد ضلعهای چندضلعی های یکسان باشد. تبدیل انجام شده هم طول ضلعها را حفظ کرده و چند ضلعی در طول تبدیل محدب باقی می‌ماند. این کار مربوط به دیمین و بقیه [ADE+00] است.

راس های چندوجهی P را با دنباله‌ی v_1, \dots, v_n نشان می‌دهیم که در آن رئوس به صورت پادساعتگرد مرتب شده‌اند. ضلع‌ها را به صورت $(v_i, v_{i+1}) = e_i$ و طول ضلع‌ها را با $|e_i| = |v_i - v_{i+1}| = l_i$ نشان می‌دهیم که اندیس‌ها به هنگ n هستند. یک پیکربندی محدب از l_1, \dots, l_n یک چندضلعی محدب است که طول اضلاع آن به ترتیب پادساعتگرد، l_1, \dots, l_n باشد.

چندضلعی محدب می‌تواند رئوس با زاویه‌ی π داشته باشد و اضلاع می‌توانند همپوشانی داشته باشند.

لم ۱. ([LW95]) طول‌های l_1, \dots, l_n طول اضلاع یک چندضلعی محدب می‌توانند باشند اگر و تنها اگر

$$l_i \leq \sum_{j \neq i} l_j$$

یک حرکت^{۲۷} یا تغییر پیکربندی^{۲۸} یک تابع پیوسته از بازه‌ی $[1, 0]$ (به عنوان زمان) به یک پیکربندی است به طوری که هر پیکربندی یک چندضلعی با دنباله‌ی پادساعتگرد اضلاع یکسان است. یک حرکت زاویه-یکنوا حرکتی است که زاویه‌ی هر راس تابعی صعودی نسبت به زمان است.

لم ۲. یک چهارضلعی v_1, v_2, v_3, v_4 داده شده است. حرکتی وجود دارد که زاویه‌ی v_1 و v_3 را کاهش داده و زاویه‌ی v_2 و v_4 را افزایش می‌دهد. حرکت را می‌توان تا زمانی که یکی از زاویه‌ها π شود، ادامه داد.

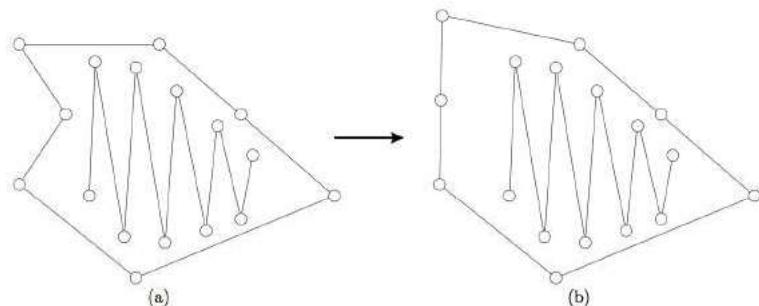
قضیه ۳. دو پیکربندی C و C' با دنباله‌ی طول اضلاع یکسان l_1, \dots, l_n داده شده است. یک حرکت زاویه-یکنوا از C به C' با حرکت، که هر کدام زاویه‌ی چهار راس را تغییر می‌دهند وجود دارد.

اثبات. مراجعه کنید به [D ۰ ۱]. \square

راست کردن مسیرهای چندضلعی و محدب سازی دورهای چندضلعی

یک پیوند مسطح را در نظر بگیرید که شامل تعدادی دور و مسیر چندضلعی مجزا است با این ویژگی که هیچ دوری، مسیر یا دور دیگر را احاطه نمی‌کند. در این بخش نشان می‌دهیم همواره مسیرهای را می‌توان راست و دورهای را محدب کرد به طوری که در طول عمل محدب سازی اضلاع همدیگر را قطع نکنند و دورها، محدب باقی بمانند]. CDR ۰۰.

برای دور چند ضلعی در این روش از یک حرکت توسعی^{۲۹} استفاده می‌کنیم که فاصله‌ی رئوس را افزایش می‌دهد. همچنین نشان می‌دهیم که مساحت چند ضلعی در طول حرکت افزایش می‌یابد. وضعیت کلی تری را در نظر می‌گیریم که به آن مجموعه‌ی مسیر-دور A می‌گوییم که شامل تعداد متناهی از دور و مسیر چند ضلعی است به طوری که هیچ‌کدام همدیگر را قطع نمی‌کنند. مسیر A در یک پیکربندی محدب-بیرونی^{۳۰} است اگر هر مولفه‌ی A که در هیچ دوری از A قرار ندارد یا محدب (اگر دور باشد) و یا راست (اگر مسیر باشد) باشد. بهترین انتظاری که می‌توان داشت این است که A را به وضعیت محدب-بیرونی در آورد زیرا بقیه مولفه‌ها که در دور قرار دارند را ممکن است نتوان راست یا محدب کرد. شکل زیر را ببینید.



یک حرکت را توسعی^{۳۱} می‌گوییم اگر در طول حرکت فاصله‌ی هیچ دوری از A کاهش نیابد. با این تعریف هر زمان که دو ضلع هم خطی می‌شوند در طول ادامه‌ی هر حرکت توسعی دیگر نیز هم خطی باقی می‌مانند. به یک حرکت توسعی اکید می‌گوییم اگر فاصله‌ی دور را کاهش نماییم یا یک مسیر مستقیم از اضلاع وجود دارد ثابت باقی بماند. همچنین فاصله‌ی رئوس روی مرز یا داخل یک دور ثابت باقی بماند.

می‌گوییم مجموعه‌ی A جداشده^{۳۲} است اگر خط L در صفحه وجود داشته باشد به طوری که L با A تقاطع نداشته و حداقل یک مولفه از A در طرف دیگر از L قرار دارد. نتیجه‌ی اصلی قضیه‌ی زیر است:

^{۲۷}motion

^{۲۸}reconfiguration

^{۲۹}Expansion motion

^{۳۰}Outer-convex

^{۳۱}expansive

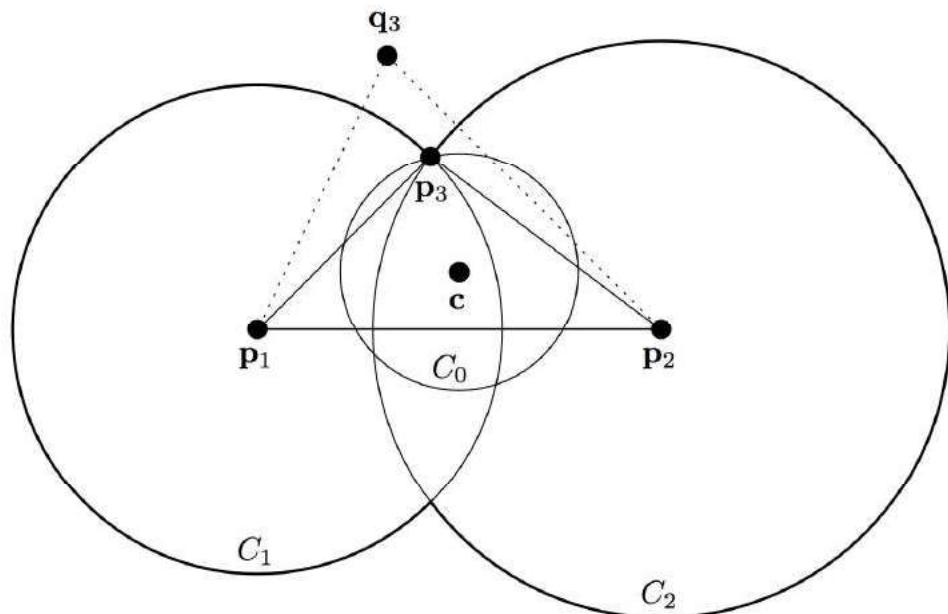
^{۳۲}separated

قضیه ۴. هر مجموعه دور-مسیر دارای یک حرکت معتبر قطعه قطعه پیوسته است که آن را به یک حالت محدب-بیرونی می‌برد. همچنین حرکت توسعی اکید است تا زمانی که A جدا می‌شود.

ابزار لازم برای اثبات قضیه از نظریه مکانیزم ها و چارچوب های صلب می‌آید.^{۳۳} مسیر و دور را می‌توان به عنوان چارچوب در نظر گرفت.

یک روش حل مسئله این است که نشان دهیم برای هر پیکربندی یک حرکت جزئی وجود دارد که فاصله ها را افزایش می‌دهد. سپس می‌توان نشان داد این حرکت های موضعی را می‌توان به یک حرکت کامل تبدیل کرد. یک پیوند^{۳۴} یا چارچوب میله ای^{۳۵} $G(p) = (V, E)$ یک گراف متناهی است. فرض می‌کنیم $V = \{1, \dots, n\}$ اعضای E متناظر با اضلاع چارچوب هستند. مجموعه های دور-مسیر یک نوع خاص از چارچوب ها هستند که گراف مربوط به آنها اجتماعی از مسیر ها و دور هاست. یک خم کردن^{۳۶} یا حرکت^{۳۷} از $G(p)$ ، مجموعه ای از توابع پیوسته^{۳۸} بماند. می خواهیم حرکتی روی مجموعه دور-مسیر بیابیم که توسعی اکید باشد. برخی از ویژگی های اولیه حرکت های توسعی را نشان می‌دهیم.

لم ۵. فرض کنید نقطه^{۳۹} c داخل مثلث $p_1 p_2 p_3$ باشد و فرض کنید نقطه^{۴۰} q_3 طوری انتخاب شده است که $\|q_3 - p_1\| \geq \|q_3 - p_2\| + \|p_2 - p_3\| \geq \|q_3 - p_2\| + \|q_3 - p_3\| \geq \|p_3 - c\| \geq \|p_3 - p_1\|$ که تساوی دقیقاً زمانی برقرار است که تساوی در هر دو طرف نامساوی های بالا برقرار باشد. شکل ۵ را بینید.



شکل ۵: لم ۵

^{۳۹}theory of mechanisms and rigid frameworks

^{۴۰}linkage

^{۳۵}Bar framework

^{۳۷}flex

^{۳۸}motion

اثبات. مراجعه کنید به [D+1].

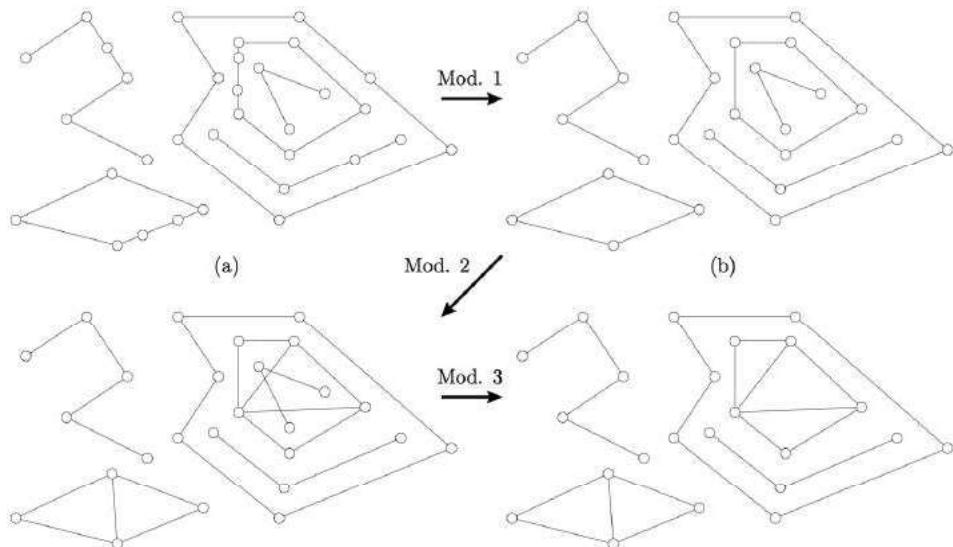
می خواهیم مجموعه دور-مسیر داده شده A را به پیکربندی محدب-بیرونی تبدیل کنیم. ابتدا A را کمی تغییر میدهیم. این کار در چهار مرحله صورت می‌گیرد.

مرحله‌ی ۱. حذف رئوس راست. نشان می‌دهیم می‌توان فرض کرد A هیچ راس راستی (با زاویه‌ی نیم صفحه) ندارد. به علاوه اگر در طول حرکت یک راس راست شود می‌توانیم با استقرار ادامه دهیم. اگر یک پاره خط در واقع از دو پاره خط تشکیل شده باشد می‌توانیم آنها را ادغام کنیم.

مرحله‌ی ۲. صلب کردن^{۳۸} چندضلعی‌های محدب. از زمانی که یک چندضلعی محدب می‌شود دیگر نیازی به توسعه دادن آن نداریم، در واقع این کار ممکن هم نیست. پس از این نظر آن را صلب می‌گیریم و دیگر نمی‌توان زاویه‌های آن را تغییر داد.

مرحله‌ی ۳. حذف مولفه‌های درون دورها. زمانی که یک دور محدب می‌شود به علاوه می‌توانیم مولفه‌های درون آن را نیز صلب کنیم. در واقع این مولفه‌ها را می‌توان حذف کرد.

مرحله‌ی ۴. اضافه کردن بست^{۳۹}. برای مدل کردن بهتر از بست هم استفاده می‌کنیم که در طول حرکت طولش می‌تواند افزایش یابد یا ثابت بماند. در این مرحله بین هر دو راس از A که بین آنها ضلع وجود نداشته باشد یا روی یک دور چندضلعی نباشد، بست اضافه می‌کنیم.



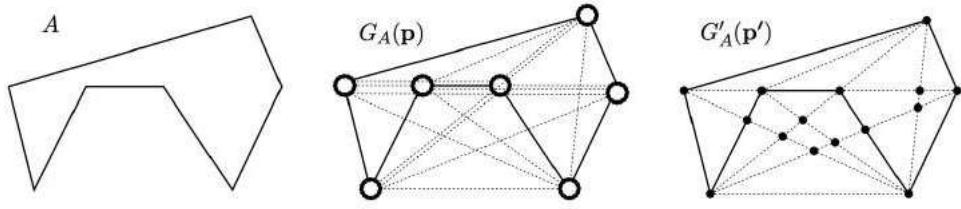
شکل ۶: تبدیل به پیکربندی محدب-بیرونی

شکل ۷ را ببینید. $G'_A(p')$ را بعداً تعریف می‌کنیم.

برای اثبات قضیه ۴، می‌خواهیم حرکتی پیدا کنیم که در آن طول همهٔ اضلاع ثابت بماند و طول بست‌ها افزایش یابد. به عبارت دیگر حرکت $p(t)$ که $1 \leq t \leq 0$ را می‌خواهیم بیاییم که $p = p^{(0)}$ و

$$\frac{d}{dt} \|p_j(t) - p_i(t)\| = 0 \quad \text{for } \{i, j\} \in B$$

^{۳۸}rigidify
^{۳۹}struts



شکل ۷

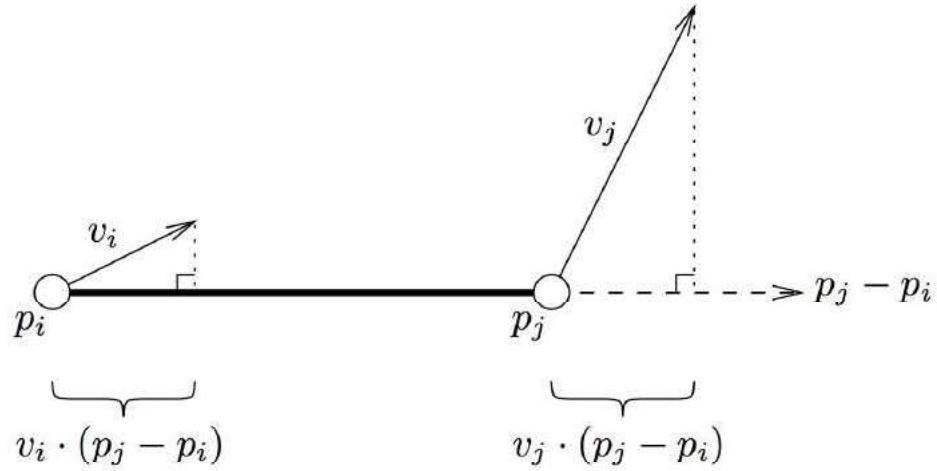
$$\frac{d}{dt} \|p_j(t) - p_i(t)\| > 0 \quad \text{for } \{i, j\} \in S$$

$$v_i(t) := \frac{d}{dt} p_i(t)$$

$$(v_j(t) - v_i(t)) \cdot (p_j(t) - p_i(t)) = 0 \quad \text{for } \{i, j\} \in B$$

$$(v_j(t) - v_i(t)) \cdot (p_j(t) - p_i(t)) > 0 \quad \text{for } \{i, j\} \in S$$

یک حرکت کوچک اکید ($v = (v_1, \dots, v_n)$ مشتق حرکت توسعی اکید را در زمان t تعیین می‌کند). (شکل ۸)



شکل ۸

باید داشته باشیم:

$$(v_j - v_i) \cdot (p_j - p_i) = 0 \quad \text{for } \{i, j\} \in B \quad (1)$$

$$(v_j - v_i) \cdot (p_j - p_i) > 0 \quad \text{for } \{i, j\} \in S \quad (2)$$

که p_i مکان اولیه راس i است.

قضیه ۶. برای هر مجموعه کاهش یافته A حرکت کوچک v برای $G_A(p)$ وجود دارد که معادلات ۱ و ۲ در آن برقرار است $[D^+]$.

$$\sum_{j: \{i, j\} \in B \cup S} \omega_{ij} (p_j - p_i) = 0 \quad (3)$$

دوگان ۳ را در نظر می‌گیریم و بر اساس تنش آن را بیان می‌کنیم. تنش^۴ در چارچوب $G(p)$ یک مقداردهی $\omega_{ij} = \omega_{ij}$ به همهی زوج‌های $\{i, j\}$ است (ضلع‌ها و بست‌ها). برای مثال مقدار مثبت به این معنی است که یال به دو راس آن به اندازه‌ی یکسان نیروی بیرونی وارد می‌کند. تنش w را یک تنش تعادلی می‌گوییم اگر هر راس i از G در تعادل باشد.(یال را بجای ضلع و بست به کار میبریم).

تش w را معتبر می‌گوییم اگر برای همهی بست‌های $\{i, j\}$ ، $w_{ij} \geq 0$.

تش صفر^۵ را که یک تنش تعادلی است تنشی می‌گیریم که به هر ضلع و بست مقدار صفر نسبت داده شده است.

لم ۷. اگر تنها تنش تعادلی معتبر یک چارچوب ضلع-بست ، تنش صفر باشد ، در این صورت چارچوب دارای حرکت کوچک است.

□

D۰۱. را بیینید.

قضیه ۸. چارچوب $G_A(p)$ مربوط به مجموعه‌ی کاهش یافته‌ی A تنها دارای تنش معتبر صفر است.

□

D۰۱. را بیینید.

برای اثبات قضیه ۸ از قضیه‌ی ماکسول-کرمونا^۶ استفاده می‌کنیم. برای استفاده از این قضیه ابتدا $G_A(p)$ را به یک چارچوب مسطح $G'_A(p')$ تبدیل می‌کنیم. برای همهی نقاط تقاطع در (p) یک راس تعریف می‌کنیم و اضلاع و بست‌های متناظر را تقسیم می‌کنیم.

یک تنش را صفر-بیرونی می‌گوییم اگر اضلاعی که تنش نا صفر دارند اضلاع دور های چند ضلعی محدب یا اضلاع داخل آنها باشند. در غیر این صورت تنش را ناصفر-بیرونی می‌نامیم.

لم ۹. اگر $G_A(p)$ دارای تنش معتبر نا صفر باشد $(G'_A(p'))$ ، دارای تنش ناصفر-بیرونی معتبر w است.

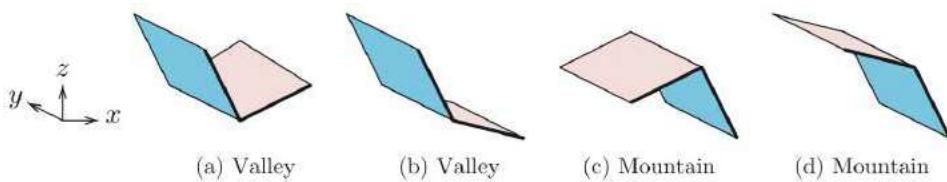
□

اثبات. برای اثبات به [D۰۱] مراجعه کنید.

قضیه‌ی ماکسول-کرمونا

یک گراف چند وجهی Γ از اختصاص دادن یک مولفه‌ی سوم z به رئوس یک چارچوب مسطح به دست می‌آید به طوری که نقاط هر ناحیه از چندضلعی هم صفحه باقی بمانند. بدین ترتیب هر ناحیه از چندضلعی به یک چندضلعی در فضا تبدیل می‌شود.

یال $\{i, j\}$ از یک چارچوب مسطح را در نظر بگیرید که دو وجه F و F' را از هم جدا می‌کند. بین حالاتی که که این یال در Γ به "دره" ، "کوه" یا "سطح" تبدیل می‌شود تمایز قائل می‌شویم. شکل ۹ را ببینید.



شکل ۹: دره، کوه، سطح

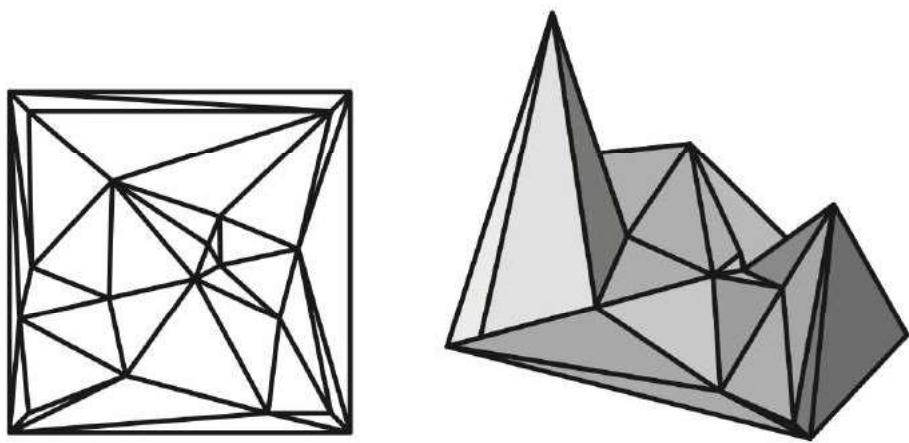
حال فرض کنید:

$$z(p) = a.p + b, z'(p) = a'.p + b'$$

^۴stress

^۵zero stress

^۶Maxwell-Cremona theorem



دوتابع خطی باشند که Γ را به ترتیب روی F' و F'' تعیین می‌کنند. a و a' در \mathbb{R}^3 و b و b' اعداد حقیقی هستند. باید داشته باشیم:

$$a' - a = \omega_{ij} e_{ij}^\perp \quad (4)$$

که e_{ij}^\perp بردار عمود بر $p_i - p_j$ و با طول برابر با طول $p_j - p_i$ و جهت آن از F' به F'' است. $\{\{i, j\} \mid \omega_{ij} > 0\}$ را دره می‌نامیم اگر $\omega_{ij} > 0$ و سطح اگر $\omega_{ij} < 0$.

قضیه ۱۰. (قضیه‌ی ماکسول-کرمونا)

۱) برای هر گراف چندوجهی Γ که به یک چارچوب مسطح $G(p)$ تصویر می‌شود تنش w تعریف شده با ۴ یک تنش تعادلی روی $G(p)$ تعریف می‌شود.

۲) برای هر تنش تعادل معتبر w روی $G(p)$ را می‌توان به یک گراف چندوجهی Γ تبدیل کرد که ۴ برای همه‌ی یال‌ها برقرار باشد. به علاوه Γ در حد اضافه کردن یک تابع خطی-آفینی یکتاست.

اثبات. مرجع [CW۹۴] را ببینید. □

لم ۱۱ (HJW۸۴). هر کوه در گراف چندوجهی Γ در چارچوب مسطح $G'_A(p')$ به یک ضلع تصویر می‌شود.

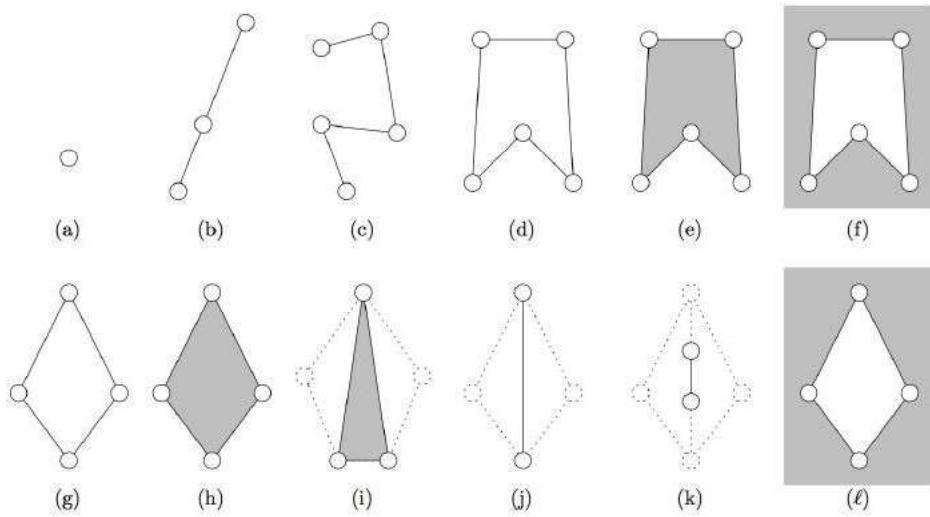
اثبات. بست تنهای می‌توان تنش منفی داشته باشد. پس بنا بر قضیه ۱۰ بست تنهای می‌توان به دره یا سطح تبدیل شود. قضیه اصلی برای اثبات قضیه ۴ قضیه‌ی زیر است.

قضیه ۱۲. فرض کنید M بخشی از صفحه‌ی xy باشد که مقدار z روی گراف چندوجهی Γ ماکسیمم است. در این صورت M شامل همه‌ی صفحاتی از $G'_A(p')$ است که بیرون از همه‌ی دورهای محدب قرار دارند.

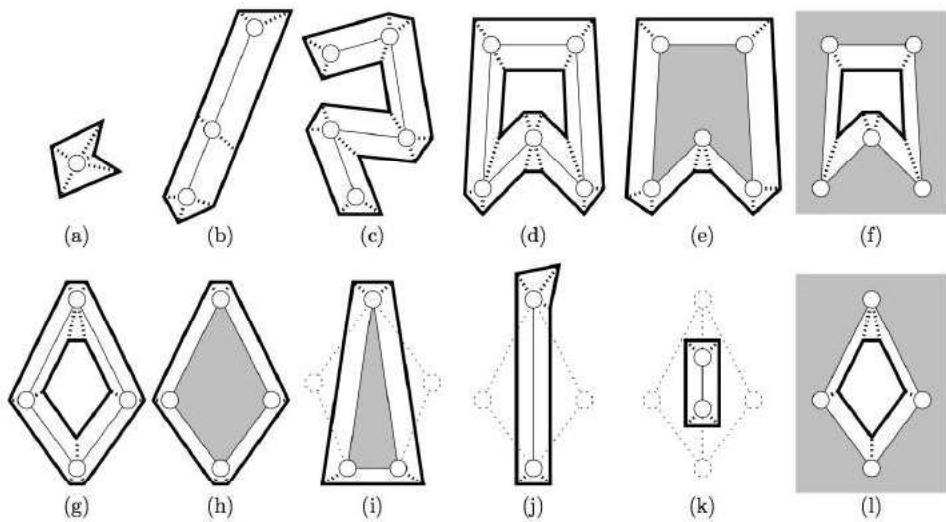
۱۱ همه‌ی یال‌های ∂M باید اضلاع چارچوب باشند. شکل ۱۰ را ببینید.

در همه‌ی حالت‌های بالا به جز I برش گراف چندوجهی است. صفحه‌ی Π موازی با xy و زیر بالاترین z را در نظر بگیرید که بالاتر از همه‌ی نقاط دیگر باشد. اشتراک Π با سطح Γ را بگیرید و اشتراک را روی xy تصویر کنید. تصویر حاصل X برای حالت‌های مختلف در شکل ۱۱ نشان داده شده است.

X بسیاری از ویژگی‌های گراف چندوجهی را دارد. با توجه به اینکه X مرز همسایگی کوچکی از M است اجتماعی مجزا از دورها است. به علاوه چندوجهی است. هر یال X به یک ناحیه از Γ و هر راس از X به یک یال از Γ مربوط است.



شکل ۱۰:



شکل ۱۱: تصویر حاصل

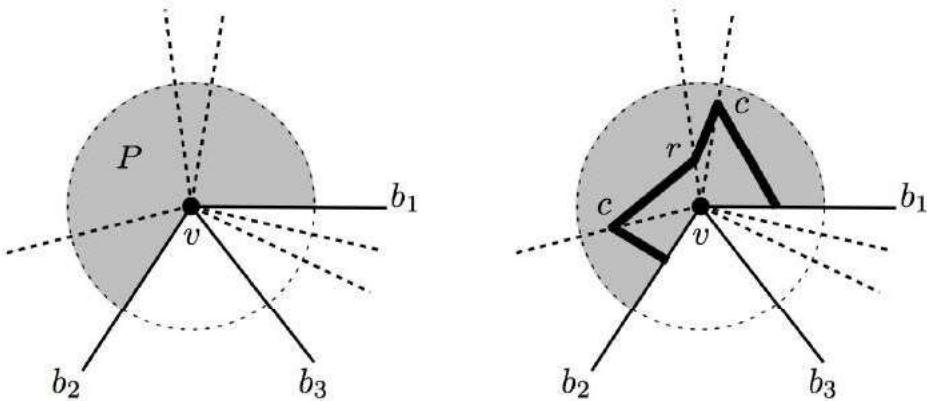
ایده‌ی اصلی این است نشان دهیم X دارای تعداد زیادی زاویه‌ی محدب است و سپس از لم ۱۱ استفاده کنیم برای اثبات اینکه چارچوب دارای ضلع‌های زیادی است. کلید اصلی در اثبات قضیه این است که مجموعه‌ی دور مسیر اولیه دارای درجهٔ ضلعی حداقل دو است. در $G'_A(p')$ تنها رؤوس v از دورهای محدب می‌توانند درجهٔ ضلعی بیش از دو داشته باشند. در لم زیر نشان می‌دهیم حالت‌های a تا k نمی‌توانند وجود داشته باشند.

لم ۱۳. فرض کنید v راسی روی مرز M باشد و b_1, \dots, b_k اضلاع متصل به v در جهت ساعتگرد باشند. یک گوی کوچک D حول v در نظر بگیرید.

۱) اگر بین دو ضلع متواالی از بین b_k, \dots, b_1 مثل b_i و b_{i+1} زاویهٔ حداقل π باشد، در این صورت بخش سایه‌دار در شکل ۱۲

به M تعلق دارد.

۲) اگر حداقل یک ضلع مجاور v وجود داشته باشد، همهی D در M است.



شکل ۱۲: لم ۱۳

اثبات. ۱) با توجه به اینکه هیچ ضلعی در P وجود ندارد، P باید کاملاً داخل M باشد یا از آن مجزا باشد. فرض کنید P با M مجزا باشد. در این صورت اشتراک X با P یک مسیر چندضلعی ستاره‌ای شکل حول v است که از b_i شروع شده و به b_{i+1} ختم می‌شود. نقاط محاسب این مسیر مربوط به کوه های است که یک سر آنها v بوده است. با توجه به اینکه زاویه‌ی P حداقل π است، مسیر باید حداقل شامل یک راس محدب در P باشد. بنابر لم ۱۱ یک ضلع باید در P باشد که تناقض است.

۲) اگر $k = 1$ که b_i و b_{i+1} یکی هستند و همان اثبات کار می‌کند. مسیر ستاره‌ای چندضلعی به دور ستاره‌ای چندضلعی v تبدیل می‌شود که باید حداقل دو راس محدب غیر از $b_i - b_{i+1}$ داشته باشد. اگر $X, k = 0$ یک دور چندضلعی حول v دارد که باید حداقل ۳ راس محدب داشته باشد ولی v هیچ ضلع مجاوری ندارد.

□

توجه کنید که این لم روی هر راس از $G'_A(p')$ کار می‌کند.
با استفاده از این لم به راحتی می‌توان نشان داد که حالت‌های $k = a$ با آن متناقض هستند.

اثبات قضیه‌ی ۱۲

ابتدا یک راس v درجه ۰ یا ۱ را در ∂M در نظر بگیرید. بنابر لم ۱۳ می‌دانیم ناحیه‌ای دو بعدی حول v به M تعلق دارد که با اینکه v در ∂M درجه‌ی ۰ یا ۱ دارد متناقض است.

بنابراین ∂M اجتماعی از دورهاست. یک مولفه از ∂M می‌تواند به دو صورت باشد:

۱. اگر از یک دور محدب و مثلث‌بندی آن به دست آمده باشد لم ۱۳ به هر راس آن اعمال می‌شود، نتیجه می‌گیریم M شامل ناحیه‌ای از چارچوب است که بیرون دور است. بدین ترتیب حالت‌های $i - g$ حذف می‌شوند.

۲. اگر شامل یک دور غیر محدب است، لم ۱۳ را می‌توانیم به یک راس محدب و به یک راس بازتاب^{۴۳} اعمال کرده و نتیجه می‌گیریم M شامل دو ناحیه‌ی چارچوب مجاور داخل و خارج دور است. بدین ترتیب حالت‌های $f - d$ حذف می‌شوند.

^{۴۳}Reflex vertex

حرکت سرتاسری

در این بخش حرکت های کوچک را ترکیب کرده و به یک حرکت سرتاسری می رسیم که به اثبات قضیه‌ی ۴ منجر می شود. قضیه‌ی ۶ وجود یک جهت حرکت v را تضمین می کند. بردار یکتای $(f(p) - v)$ را برای هر پیکربندی p به عنوان جواب مسئله‌ی بهینه‌سازی محدود انتخاب می کنیم. سپس معادله دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\frac{d}{dt}p(t) = f(p(t))$$

جواب این معادله دیفرانسیل پیکربندی فعلی را به حالتی می رساند که زاویه‌ی بین دو ضلع راست شود. در این حالت دو ضلع را ادغام کرده و کار را ادامه می دهیم ، بدین ترتیب هر بار یک راس کم می شود.

حال وارد جزئیات اثبات می شویم. از مسئله‌ی بهینه‌سازی غیرخطی زیر برای تعریف جهت یکتای v برای هر پیکربندی p از یک مجموعه‌ی دور-مسیر کاهش یافته استفاده می کنیم.

$$\text{minimize } \sum_{i \in V} \|v_i\|^r + \sum_{\{i,j\} \in S} \frac{1}{(v_i - v_j) \cdot (p_j - p_i) - \|p_j - p_i\|} \quad (5)$$

$$\text{to subject } (v_j - v_i) \cdot (p_j - p_i) > \|p_j - p_i\|, \quad \text{for } \{i,j\} \in S \quad (6)$$

$$(v_j - v_i) \cdot (p_j - p_i) = 0, \quad \text{for } \{i,j\} \in B \quad (7)$$

$$v_1 = v_2 = 0 \quad (8)$$

محدودیت‌های ۶ یک محدودیت یکنواخت روی افزایش بسته های S اعمال می کند. مشتق طول هر بست باید بیش از ۱ باشد. با توجه به اینکه دستگاه معادلات ۱ و ۲ همگن است، دستگاه ۶ و ۷ برای هر انتخاب طرف راست ۶، جواب دارد. در تابع هدف نرم v به توان دو به اضافه‌ی یک عامل خطأ که جواب را از مرز مجموعه جواب ۶ دور نگه می دارد. این خطأ برای واپسی بودن هموار جواب نسبت به داده ضروری است. تابع هدف محدود اکید است زیرا مجموع تعدادی تابع محدود اکید است. همچنین با توجه به اینکه تابع هدف با نزدیک شدن v به مرز به بی نهایت نزدیک می شود، دقیقاً یک جواب یکتا برای هر p وجود دارد که آن را با $f(p)$ نشان می دهیم.

تابع $f(p)$ روی یک زیرمجموعه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^n$ تعریف می شود که با شرایط قضیه‌ی ۶ تعریف می شود. نشان می دهیم f روی U مشتق پذیر است. این از نظریه‌ی پایداری بهینه‌سازی محدود با محدودیت‌های به شکل تساوی ناشی می شود که روی مسئله‌ی بهینه‌سازی به شکل زیر اعمال می کنیم.

$$\min\{g(p, x) : x \in \Omega(p) \subset \mathbb{R}^n, A(p)x = b(p)\} \quad (9)$$

که $A(p)$ یک ماتریس $n \times m$ و $b(p)$ یک بردار m -تایی است. تابع هدف g ، دامنه‌ی $\Omega(p)$ و محدودیت‌های خطی (A, b) به پارامتر p بستگی دارند که روی ناحیه‌ی باز $U \subset \mathbb{R}^k$ تغییر می کند. برای این مسئله‌ی بهینه‌سازی لم زیر واپسگی هموار بردار جواب بر حسب $A(p)$ و $b(p)$ را بیان می کند.

لم ۱۴. فرض کنید شرایط زیر در مسئله‌ی بهینه‌سازی ۹ ارضاء شده باشد:

(الف) تابع هدف $g(p, x)$ دوباره مشتق پذیر پیوسته و محدود اکید به عنوان تابعی از $\Omega(p)$ برای $x \in \Omega(p)$ باشد که ماتریس هسیان H_g برای هر $p \in U$ مثبت و معین است.

(ب) دامنه‌ی $\Omega(p)$ برای هر $p \in U$ مجموعه‌ای باز است.

(ج) راس‌های ماتریس $A(p)$ برای هر $p \in U$ مستقل خطی است.

(د) $b(p)$ و $A(p)$ و گرادیان ∇_g نسبت به x مشتق پذیر با مشتق پیوسته نسبت به p هستند، برای هر U .

(ه) نقطه‌ی بهینه‌ی (p) از مسئله‌ی ۹ برای هر x^* موجود است.

در این صورت (p) روی U مشتق پذیر با مشتق پیوسته است.

اثبات. اثبات بر اساس قضیه‌ی تابع ضمنی است. [BS74] x^* را می‌توان به عنوان جواب یکتای (x^*, λ) دستگاه معادلات $h(p, x, \lambda) = 0$ در نظر گرفت که شرط‌های درجه اول ضروری بهینگی را ارضاء می‌کند. به طور دقیق‌تر λ بردار k -تایی ضرایب لاغرانژ است که:

$$h : U \times \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$$

$$h = \begin{pmatrix} \nabla_g - \lambda^T A^T \\ Ax - b \end{pmatrix}$$

قضیه‌ی تابع ضمنی وجود جواب موضعی (p) را به عنوان جواب \circ تضمین می‌کند، اگر ماتریس ژاکوبیان $J = \partial h / \partial(x, \lambda)$ برای هر $p \in U$ معکوس‌پذیر باشد. همچنین $x(p)$ مشتق‌پذیر است اگر h مشتق‌پذیر با مشتق پیوسته باشد. ماتریس ژاکوبی به شکل زیر است:

$$J = \frac{\partial h(p, x, \lambda)}{\partial(x, \lambda)} = \begin{pmatrix} H_g & A^T \\ A & \circ \end{pmatrix}$$

مشتق‌پذیری h از فرض (د) حاصل می‌شود. باید معکوس‌پذیری J را چک کنیم. بنابر الف داریم:

$$\det J = \det H_g \cdot \det(-A H_g^{-1} A^T)$$

بنابراین $A A^T$ مثبت معین است و با توجه به اینکه H_g مثبت معین است، پس برای $A H_g^{-1} A^T$ هم همین‌طور. پس \circ .

لم ۱۵. f روی U مشتق‌پذیر است.

□ اثبات. اثبات را در [D۰۱] بیینید.

حل معادله‌ی دیفرانسیل و اثبات قضیه‌ی ۴

با توجه به لم ۱۵ درمی‌یابیم که معادله‌ی مقدار اولیه‌ی

$$\frac{d}{dt} p(t) = f(p(t)), \quad p(\circ) = p_\circ \quad (10)$$

دارای جواب یکتای ماکسیمال $p(t)$ است. یکی از حالت‌های زیر ممکن است رخ دهد:

الف) برای هر t وجود دارد. ($T = \infty$)

ب) T متناهی است و $p(t) \rightarrow t \rightarrow T$ بی‌کران افزایش می‌یابد.

ج) T متناهی است و $p(t) \rightarrow T$ به مرز U نزدیک می‌شود.

حالت الف و ب را می‌توان کنار گذاشت. [D۰۱] می‌توان نشان داد $p(t) \rightarrow T$ همگرا می‌شود. [D۰۱] بنابراین قضیه‌ی ۴ ثابت می‌شود.

مراجع

[AAOS97] Pankaj K. Agarwal, Boris Aronov, Joseph O'Rourke, and Catherine A. Schevon. Star unfolding of a polytope with applications. SIAM Journal on Computing, 26(6):1689–1713, December 1997.

[AO92] Boris Aronov and Joseph O'Rourke. Nonoverlap of the star unfolding. Discrete & Computational Geometry, 8(3):219–250, 1992.

- [BDD+01a] T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, S. Lazard, A. Lubiw, J. O'Rourke, M. Overmars, S. Robbins, I. Streinu, G. Toussaint, and S. Whitesides. Locked and un-locked polygonal chains in three dimensions. *Discrete & Computational Geometry*, 26(3):283–287, October 2001. The full version is Technical Report 060, Smith College, 1999, and arXiv:cs.CG/9910009, <http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/9910009>.
- [BDD+01b] Therese Biedl, Erik Demaine, Martin Demaine, Sylvain Lazrd, Anna Lubiw, Joseph O'Rourke, Steve Robbins, Ileana Streinu, Godfried Toussaint, and Sue Whitesides. A note on reconfiguring tree linkages: Trees can lock. *Discrete Applied Mathematics*, 2001. To appear. The full version is Technical Report SOCS-00.7, School of Computer Science, McGill University, September 2000, and Computing Research Repository paper cs.CG/9910024. <http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/9910024>.
- [BDE+ 01] Marshall Bern, Erik D. Demaine, David Eppstein, Eric Kuo, Andrea Mantler, and Jack Snoeyink. Ununfoldable polyhedra with convex faces. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 2001. To appear.
- [CDR00] Robert Connelly, Erik D. Demaine, and Gu'nter Rote. Straightening polygonal arcs and convexifying polygonal cycles. In *Proceedings of the 41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 432–442, Redondo Beach, California, November 2000.
- [CJ98] Jason Cantarella and Heather Johnston. Nontrivial embeddings of polygonal intervals and unknots in 3-space. *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 7(8):1027–1039, 1998.
- [CO99] Roxana Cocan and Joseph O'Rourke. Polygonal chains cannot lock in 4D. In *Proceedings of the 11th Canadian Conference on Computational Geometry*, Vancouver, Canada, August 1999. http://www.cs.ubc.ca/conferences/CCCG/elec_proc/c17.ps.gz.
- [CO01] Roxana Cocan and Joseph O'Rourke. Polygonal chains cannot lock in 4D. *Technical Report 063*, Smith College, February 2001. <http://www.arXiv.org/abs/cs.CG/9908005>.
- [D01] Erik D. Demaine, *Folding and Unfolding*, PhD Thesis, University of Waterloo, 2001 Main Reference .Some of Figures from here , with permission
- [HJW84] John Hopcroft, Deborah Joseph, and Sue Whitesides. Movement problems for 2-dimensional linkages. *SIAM Journal on Computing*, 13(3):610–629, August 1984.
- [JS99] D. Jordan and M. Steiner. Configuration spaces of mechanical linkages. *Discrete & Computational Geometry*, 22:297–315, 1999.
- [Kem76] A. B. Kempe. On a general method of describing plane curves of the nth degree by linkwork. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 7:213–216, 1876.
- [LW95] W. J. Lenhart and S. H. Whitesides. Reconfiguring closed polygonal chains in Euclidean d-space. *Discrete & Computational Geometry*, 13:123–140, 1995.
- [O'R98] Joseph O'Rourke. Folding and unfolding in computational geometry. In *Revised Papers from the Japan Conference on Discrete and Computational Geometry*, volume 1763 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 258–266, Tokyo, Japan, December 1998.

[Sal73] G. T. Sallee. Stretching chords of space curves. *Geometriae Dedicata*, 2:311–315, 1973.

[ST00] Michael Soss and Godfried T. Toussaint. Geometric and computational aspects of polymer reconfiguration. *Journal of Mathematical Chemistry*, 27(4):303–318, 2000.