مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی دوم (بهار ۱۴۰۳)

بحران در مبانی ریاضیات*
بخش اول

ژوزه فریروس

سرآغاز

در میان ریاضی‌دانان، بحران در مبانی ریاضیات مساله‌ای پذیرفته‌شده است که زمزمه‌اش حتی به غیرریاضی‌دانان نیز رسیده‌است. از یک ریاضی‌دان خبره انتظار می‌رود در مورد سه مکتب «منطق‌گرایی»، «صورت‌گرایی»، و «شهودگرایی» — که در ادامه توضیح داده می‌شوند — اطلاعاتی داشته باشد، و هم‌چنین بداند نتایج ناتمامیت گودل [۱، V.15] در مورد وضعیت فعلی دانش ریاضی به ما چه می‌گویند. ریاضی‌دانان حرفه‌ای معمولاً در این کشمکش عقاید راسخی دارند. گروهی بحث در مورد مبانی ریاضیات را به‌کلی ناموجه می‌دانند — و نتیجتاً گفتمان غالب را تقویت می‌کنند — و گروهی، یا به عنوان یک امر بنیادی و یا صرفاً به عنوان یک گزینه‌ی جذاب، نوعی رویکرد تجدیدنظرخواهانه به ریاضیات را پیش می‌گیرند. اما پیکره‌ی اصلی این مجادله‌ی تاریخی چندان شناخته‌شده نیست، و ایرادات فلسفی ظریف در این میان معمولاً به‌کلی نادیده گرفته می‌شوند. در این نوشتار، بیشتر به مسأله‌ی نخست پرداخته می‌شود، به این امید که با این کار، ایرادات بنیادین این بحث بیشتر در مرکز توجه قرار گیرند.

تصور غالب از بحران بنیادین، دوره‌ای نسبتاً کوتاه در دهه‌ی ۱۹۲۰ میلادی‌ست؛ مجادله‌ای مفصل بین طرفداران ریاضیات «کلاسیک» (اینجا منظور از ریاضیات کلاسیک، ریاضیات اواخر سده‌ی نوزدهم است.)، به رهبری هیلبرت [۱، VI.63]، و منتقدینشان، به رهبری براوئر [۱، VI.75]، که قائل به لزوم تجدیدنظر اساسی در اصول ریاضیات کلاسیک بودند. به عقیده‌ی من، طرز فکر بسیار مهم دیگری وجود دارد؛ اینکه این «بحران بنیادین»، روندی طولانی و جهان‌شمول بوده‌است؛ روندی که با ظهور ریاضیات جدید و مسائل فلسفی و روش‌شناسانه‌ی برآمده از آن نیز ارتباط تنگاتنگی داشته‌است. این نوشتار نیز از همین زاویه‌ی دید نگاشته شده‌است.

در روند طولانی‌تری که ذکر شد، همچنان می‌توان بازه‌هایی نسبتاً مهم‌تر متصور بود. در حوالی سال ۱۸۷۰، بحث‌هایی درباره‌ی پذیرفته بودن یا نبودنِ هندسه‌های نااقلیدسی، و هم‌چنین درباره‌ی یافتن بنیادهایی شایسته برای آنالیز مختلط و حتی اعداد حقیقی شکل گرفته بود. در اوایل سده‌ی بیستم مجادلاتی درباره‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها، مفهوم پیوستگی، و هم‌چنین درباره‌ی نقش منطق و روش اصل موضوعی در برابر شهود در ریاضیات وجود داشت. در سال ۱۹۲۵، وجود یک بحران در مبانی ریاضیاتْ دیگر به‌سادگی قابل مشاهده بود. در همین حین، ایده‌های اصلیِ مطرح‌شده در این مجادلات پرورش یافته و به پروژه‌های تحقیقاتی مفصلی در ریاضیات تبدیل شدند. و نهایتا در دهه‌ی ۱۹۳۰، گودل [۱، VI.92] قضایای ناتمامیت خود را اثبات کرد؛ نتایجی که برای هضم آن‌ها، لازم بود ریاضی‌دانان از برخی باورهای محبوب خود دل بکنند. در ادامه تعدادی از این رویدادها و مسائل را با جزئیات بیشتر بررسی می‌کنیم.

۱. پرسش‌های بنیادین اولیه

شواهدی وجود دارد که هیلبرت در سال ۱۸۹۹، بر تفکری بود که بعدها منطق‌گرایی نام گرفت. ایده‌ی منطق‌گرایی این است که مفاهیم اولیه‌ی ریاضیات با استفاده از ابزارآلات منطقی قابل تعریف‌اند، و ضمناً اصول کلیدی ریاضیات را نیز می‌توان

*این نوشته، ترجمه‌ای از مقاله‌ی زیر است:

Ferreirós, J. (2008). The Crisis in the Foundations of Mathematics. *The Princeton Companion to Mathematics*, 142-156.

تنها با استفاده از اصول منطقی استنتاج کرد.
با گذشت زمان، این ایده قدری مبهم شده‌است، زیرا این‌گونه به نظر می‌رسد که در مورد قلمرو یک نظریه‌ی منطقی دچار کج‌فهمی‌ست. اما از نظر تاریخی، منطق‌گرایی واکنشی هوشمندانه به ظهور ریاضیات جدید، به‌ویژه رویکرد و روش‌های برخاسته از نظریه مجموعه‌ها بود. از آن‌جا که به نظر اکثر ریاضی‌دانان° نظریه‌ی مجموعه‌ها صرفاً بخشی از منطق بود،[1] به نظر می‌رسید حقایقی مانند اینکه نظریات مربوط به اعداد طبیعی و حقیقی را می‌توان از نظریه‌ی مجموعه‌ها استنتاج کرد، و هم‌چنین اهمیت روزافزون روش‌های مبتنی بر نظریه‌ی مجموعه‌ها در جبر، آنالیز حقیقی و آنالیز مختلط، مؤید این ایده باشند.

درک هیلبرت از ریاضیات، متاثر از ددکیند [۱، VI.50] بود. پایه و اساس منطق‌گرایی هیلبرت و ددکیند، پشتیبانی جسورانه‌شان از روش‌هایی بود که در آن زمان جدید و ناشناخته بودند. روش‌هایی که تولدشان به قرن نوزدهم و دانشگاه گوتینگن[2] (گاوس [۱، VI.26] و دیریکله [۱، VI.36]) باز می‌گردد. پس از آن ایده‌های بدیع ریمان [۱، VI.49] نقطه عطفی برای این روش‌ها بود، و در نهایت ددکیند، کانتور [۱، VI.54]، هیلبرت، و افراد دیگری روی توسعه‌ی آن‌ها کار کردند. در همین حال، مکتب پرنفوذ برلین، شامل افرادی چون کرونکر [۱، VI.48] و وایرشتراس [۱، VI.44]، مخالف این گرایش جدید بود. (گرچه نام وایرشتراس با معرفی دقت در آنالیز حقیقی پیوند خورده‌است، اما خواهیم دید که او روش‌های جدیدی که در آن زمان در حال شکل‌گیری بودند را چندان قبول نداشت.) ریاضی‌دانان در پاریس و بقیه‌ی دنیا نیز در مورد این ایده‌های رادیکال و نو، تردید داشتند.

شاخص‌ترین ویژگی‌های رویکرد جدید در ریاضیات، عبارت بودند از:

(آ) پذیرش مفهوم توابع «دلخواه»، به پیشنهاد دیریکله؛
(ب) پذیرش تمام و کمال مجموعه‌های نامتناهی و بی‌نهایت‌های متعالی؛
(پ) تلاش برای «قرار دادن اندیشه‌ها به جای محاسبات» (دیریکله)، و تمرکز بر «ساختار»هایی که ویژگی‌های آن‌ها از اصول موضوعه نتیجه می‌شود؛ و
(ت) تکیه‌ی مکرر بر اثبات‌های «کاملا وجودی».

به عنوان مثالی برای این ویژگی‌ها، می‌توان از رویکرد ددکیند در سال ۱۸۷۱ در مواجهه با نظریه‌ی جبری اعداد نام برد. ددکیند میدان‌های عددی [۱، III.63] و ایده‌آل‌ها [۱، III.81 §2] را با استفاده از مفاهیم نظریه‌ی مجموعه‌ها تعریف کرد، و از روش‌های مبتنی بر ریاضیات جدید برای اثبات نتایجی چون قضیه‌ی اساسی یکتایی تجزیه استفاده کرد. او بر خلاف عرف رایج در نظریه‌ی اعداد، به بررسی تجزیه‌ی اعداد صحیح جبری بر اساس ایده‌آل‌ها، که مجموعه‌هایی نامتناهی از اعداد صحیح جبری‌اند، پرداخت و با استفاده از این مفهوم مجرد جدید به همراه تعریفی متناسب از ضرب دو ایده‌آل، توانست در حالت کلی اثبات کند که در هر حلقه از اعداد صحیح جبری، ایده‌آل‌ها به‌طور یکتا به ایده‌آل‌های اول تجزیه می‌شوند.

کرونکر، جبردان صاحب‌نظر، بر اثبات‌های ددکیند این نقد را داشت که با استفاده از آن‌ها نمی‌توان شمارنده‌ها یا ایده‌آل‌های موردنظر را به دست آورد؛ به عبارت دیگر، اثبات او کاملا وجودی بود. نظر کرونکر این بود که این طرز فکر، که به لطف روش‌های مبتنی بر نظریه‌ی مجموعه‌ها و تمرکز روی ویژگی‌های جبری ساختارها ممکن شده بود، فاصله‌ی زیادی با روش‌های ساختی داشت. اما از نظر ددکیند این نقد وارد نبود و صرفاً نشان‌دهنده‌ی این بود که او در مسیر اثبات توانسته بود با موفقیت اصل قرار دادن اندیشه‌ها به جای محاسبات را نشان دهد؛ اصلی که کاربردش هم‌چنین در نظریه‌ی توابع مختلط ریمان نیز به کرات دیده می‌شد. البته، برای مسائلی که کم‌تر جنبه‌ی انتزاعی داشتند هم‌چنان توسعه‌ی روش‌های محاسباتی لازم بود و ددکیند نیز در چندین مقاله به این موضوع پرداخته بود، اما او بر اهمیت یک نظریه‌ی عمومی و انتزاعی نیز پافشاری داشت.

روش‌ها و ایده‌های ریمان و ددکیند در پی مقالات منتشرشده در دوره‌ی ۱۸۶۷ تا ۱۸۷۲ بیشتر شناخته شدند. دفاع صریح آن‌ها از این ایده که نظریه‌ها در ریاضیات باید نه بر پایه‌ی فرمول‌ها و محاسبات، بلکه بر پایه‌ی مفاهیم کلی باشند، و عبارات تحلیلی و ابزارهای محاسباتی صرفاً در مقام ابزارهایی برای کمک به توسعه‌ی نظریه‌ها هستند.

نمونه‌ای از تفاوت بین این دیدگاه‌ها را می‌توان در رویکردهای متفاوتی دید که ریمان و وایرشتراس به نظریه‌ی تابع‌ها داشتند. وایرشتراس توابع تحلیلی را توابعی می‌دانست که نمایشی به‌شکل یک سری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ داشتند، و با فرابرد تحلیلی [۱، I.3] به یک‌دیگر مرتبط می‌شدند. در مقابل، ریمان رویکردی کاملا متفاوت داشت. او یک تابع را تحلیلی می‌دانست

[1] باید خاطرنشان کرد که افراد شاخصی چون ریمان و کانتور مخالف این موضوع بودند (ر.ک. Ferreirós 1999). اکثریت مورد اشاره شامل افرادی چون ددکیند، پئانو [۱، VI.62]، هیلبرت، و راسل است.

[2] Göttingen

اگر شرایط مشتق‌پذیری کوشی – ریمان [1] [۱، I.3] را ارضا می‌کرد. از آنجا که ویژگی‌های توابع مشتق‌پذیر تا آن زمان هیچ‌گاه به‌طور موشکافانه مشخص نشده بود، وایرشتراس این تعریف انتزاعی را غیرقابل‌قبول می‌دانست. او با توانایی‌های نقادانه‌ی مشهور خود، مثال‌هایی از توابعی پیوسته اما همه‌جامشتق‌ناپذیر یافت.

شایان ذکر است که ترجیح وایرشتراس بر اصل قرار دادن سری‌های نامتناهی در تحقیقات مربوط به آنالیز و نظریه‌ی تابع‌ها، او را به تفکر کهنه‌ی قرن هجدهمی مبنی بر اینکه هر تابع یک عبارت تحلیلی است نزدیک‌تر قرار می‌داد. در مقابل، ریمان و ددکیند ایده‌ی انتزاعی‌تر دیریکله را ترجیح می‌دادند، که یک تابع f در واقع روشی برای نسبت دادن یک $y = f(x)$ دلخواه به هر x است (و نیازی نیست این مقدار، لزوماً به‌صورت یک عبارت صریح بر حسب x مشخص شود). وایرشتراس در نامه‌هایش این تفکر دیریکله را به دلیل بیش از حدّ کلی و عمومی بودن، برای ایفای نقش به‌عنوان نقطه‌ی شروعی برای گسترش ریاضیات قابل نمی‌دانست. به نظر می‌رسد او در این مورد اشتباه می‌کرد، و این طرز فکر دقیقا چارچوب مورد نیاز برای تعریف و بررسی مفاهیمی چون پیوستگی و انتگرال‌گیری را فراهم می‌کرد. این چارچوب بعدها در قرن نوزدهم به رویکرد مفهوم‌گرایانه معروف شد.

مجادلات روش‌شناسانه مشابهی در شاخه‌های دیگر نیز در حال شکل‌گیری بودند. کرونکر سال ۱۸۷۰ در نامه‌ای ادعا می‌کند که قضیه‌ی بولتسانو – وایرشتراس یک «سفسطه‌ی آشکار» است، و او مثال‌های نقضی را برای آن مطرح خواهد کرد. این قضیه، که صورت آن بیان می‌کند که هر مجموعه‌ی کران‌دار نامتناهی از اعداد حقیقی، یک نقطه‌ی انباشتگی دارد، قضیه‌ای بنیادین در آنالیز کلاسیک است، و وایرشتراس نیز در سخنرانی‌های برلین خود به این موضوع تاکید کرده بود. اشکال کرونکر این بود که این قضیه تکیه‌ای اساسی بر اصل تمامیت اعداد حقیقی (که یک صورت‌بندی از آن این است که اشتراک هر دنباله‌ای از بازه‌های بسته‌ی تودرتو در $\mathbb{R}$، ناتهی است.) دارد. ساخت اعداد حقیقی از روی اعداد گویا با روش‌های مقدماتی ممکن نیست و نیاز به به‌کارگیری مجموعه‌های نامتناهی (مانند مجموعه‌ی تمام برش‌های ددکیند، که عبارت از زیرمجموعه‌هایی از اعداد گویا مانند $C \subset \mathbb{Q}$ است به طوری که اگر $q \in C$ و $p < q$ آنگاه $p \in C$ باشد.) دارد. به عبارت دیگر، مسئله‌ی کرونکر این بود در اکثر مواقع، که نقطه‌ی انباشتگی مورد اشاره در این قضیه را نمی‌توان با روش‌های مقدماتی از روی اعداد گویا ساخت. ایده‌ی ریاضی‌دانان کلاسیک از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، یا پیوستار، در آن زمان نیز شامل هسته‌های اولیه‌ی قسمت‌های غیرساختی ریاضیات جدید می‌شد.

بعدتر، حدود سال ۱۸۹۰، کارهای هیلبرت در نظریه‌ی ناوردا[2] منجر به در گرفتن جدالی شد درباره‌ی اثبات کاملا وجودی او از یک حکم ساده‌ی دیگر، قضیه‌ی پایه، که می‌گوید هر ایده‌آل در یک حلقه‌ی چندجمله‌ای به طور متناهی تولید می‌شود. پل گردان، که به دلیل کار جدی الگوریتمی در زمینه‌ی ناورداها به پادشاه این موضوع مشهور است، به طور طنزآمیزی اظهار کرده بود که این اثبات نوعی خداشناسی‌ست و نه ریاضیات. (منظور او ظاهرا این بوده که به دلیل اینکه اثبات هیلبرت کاملا وجودی — و نه ساختی — است، می‌توان آن را هم‌رده با اثبات‌های فلسفی بر وجود خدا دانست.)

این جدال پایه‌ای باعث شد نقطه‌نظرهای دو طرف روشن‌تر شود. اثبات‌های کانتور در نظریه‌ی مجموعه‌ها نیز به مثال‌هایی اصیل از روش جدید اثبات وجودی تبدیل شد. او در مقاله‌ای که سال ۱۸۸۳ به چاپ رسید، دفاعیه‌ای صریح از بی‌نهایت متعالی و روش‌های جدید ریاضی‌ورزی ارائه داد، و هم‌چنین به‌طور مخفی نظرات کرونکر را مورد حمله قرار داد. کرونکر نیز در ۱۸۸۲ به‌طور عمومی سیاق ددکیند را نقد کرد، در محافل خصوصی بر علیه کانتور سخن گفت، و در ۱۸۸۷ تلاش کرد با انتشار مقاله‌ای، نقطه‌نظرات خود درباره‌ی بنیان‌های ریاضی را مشخص کند. ددکیند در پاسخ به او، در ۱۸۸۸ نظریه‌ای بر پایه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها (و بنابرین، از نظر خودش، منطق‌گرایانه) درباره‌ی اعداد طبیعی مطرح کرد.

موج اول انتقادات ظاهرا با پیروزی جبهه‌ی مدرن به پایان رسید. جبهه‌ای که همراهان جدید و قدرت‌مندی مانند هورویتز، مینکفسکی [۱، VI.64]، هیلبرت، ولترا، پئانو، و هادامارد [۱، VI.65] داشت، و توسط اشخاص تاثیرگذاری مانند کلاین [۱، VI.57] حمایت می‌شد. با اینکه نظریه تابع‌های ریمانی هنوز به اصلاحاتی نیاز داشت، اما پیشرفت‌های اخیر در آنالیز حقیقی، نظریه‌ی اعداد و زمینه‌های دیگر قدرت و دورنمای روش مدرن را نشان می‌داد. در دهه‌ی ۱۸۹۰، دیدگاه مدرن به‌طور کلی، و منطق‌گرایی به‌طور ویژه، بسیار گسترش یافت. هیلبرت این روش نو را در قالب روش اصل موضوعی توسعه داد، و سپس از آن برای اصلاح هندسه (۱۸۹۹ و ویرایش‌های بعدی) و دستگاه اعداد حقیقی استفاده کرد.

[1] ریمان توابع را بر اساس تعدادی ویژگی مستقل مانند سطح ریمانی متناظر و رفتار در نقاط تکینه مشخص می‌کرد. این ویژگی‌ها تابع را بر اساس اصل دیریکله مشخص می‌کرد؛ اصلی که وایرشتراس بر آن نیز نقدهایی ایراد کرده و مثال نقض ارائه داده بود. بعدها هیلبرت و نسر این اصل را مجددا صورت‌بندی و توجیه کردند.

[2] invariant theory

بعد از آن، ظهور پارادوکس‌های منطقی — که کانتور، راسل، زرملو و دیگران کاشف آن‌ها بودند — باعث نابودی چشم‌انداز زیبایی شد که منطق‌گرایی و پیشرفت‌های حاصل از آن ایجاد کرده بود. این پارادوکس‌ها دو دسته‌اند؛ در یک رده، استدلال‌هایی هستند که نشان می‌دهند فرض وجود برخی مجموعه‌ها، به تناقض ختم می‌شود. این تناقضات بعدها تناقضات نظریه‌مجموعه‌ای نام گرفتند. در رده‌ی دیگر، تناقض‌های معنایی هستند، که بیانگر سختی‌هایی در مورد مفاهیم راستی و تعریف‌پذیری‌اند. به‌واقع دوران اوج منطق‌گرایی پیش از ظهور این تناقض‌ها — پیش از سال ۱۹۰۰ — بود؛ اگرچه بعدها راسل با «نظریه‌ی انواع» تا حدی باعث بازگشت منطق‌گرایی به دوران اوج شد، اما در ۱۹۲۰ منطق‌گرایی بیش‌تر برای فلاسفه جذاب بود تا ریاضی‌دانان. با این حال، اختلاف میان طرفداران روش‌های مدرن با منتقدان ساخت‌گرای آنان از بین نرفت.

۲. حدود ۱۹۰۰

هیلبرت لیست مسائل معروف خود را در ۱۹۰۰ در کنگره‌ی بین‌المللی ریاضیات پاریس با مسئله‌ی پیوستار [۱، IV.22 §5] کانتور، مسئله‌ای مهم در نظریه‌ی مجموعه‌ها، و این مسئله که آیا هر مجموعه خوش‌ترتیب است یا نه آغاز کرد. مسئله‌ی دوم او مربوط به تصدیق سازگاری مجموعه‌ی اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ می‌شد. آغاز لیست هیلبرت با این دو مسئله اتفاقی نبود؛ بلکه روش او بود برای اعلام نظر درباره‌ی اینکه ریاضیات در قرن بیستم به چه سمتی باید برود. این دو مسئله، و اصل انتخاب [۱، III.3] — که زرملو، همکار جوان هیلبرت، با استفاده از آن نشان داد که برای $\mathbb{R}$ یک خوش‌ترتیبی وجود دارد — مثال‌هایی بنیادین از ویژگی‌های چهارگانه‌ای که پیش‌تر آمد هستند. تعجبی ندارد که ذهن‌های محافظه‌کارتر مخالفت کردند و تشکیک‌های کرونکر را تکرار کردند، و این موضوع در بسیاری از مقالات منتشرشده در ۶–۱۹۰۵ مشهود است. با بیان این نکته، حال به موج بعدی جدال‌ها می‌رویم.

۱.۲. تناقض‌ها و مسئله‌ی سازگاری.

در ۱۸۹۶، کانتور کشف کرد که مفاهیم ظاهرا بی‌دردسر «مجموعه‌ی تمام اعداد ترتیبی» و «مجموعه‌ی تمام اعداد اصلی»، مفاهیمی متناقض‌اند. مورد اول به تناقض بورالی–فورتی و مورد دوم به تناقض کانتور مشهورند. این فرض که تمام اعداد ترتیبی ترامتناهی تشکیل یک مجموعه می‌دهند، به‌دنبال نتایج پیشین کانتور، به این نتیجه ختم می‌شود که عدد ترتیبی‌یی وجود دارد که کمتر از خودش است. برای اعداد اصلی نیز تناقض مشابهی وجود دارد. ددکیند پس از خبردار شدن از این پارادوکس‌ها به شک افتاد که آیا اصلاً فکر آدمیزاد لزوماً منطقی‌ست یا نه. حتی بدتر، در ۲–۱۹۰۱ زرملو و راسل تناقضی بسیار ابتدایی پیدا کردند که امروزه به پارادوکس راسل، یا پارادوکس زرملو–راسل معروف است. ناشایستگی درک کلاسیک از نظریه‌ی مجموعه‌ها که آن را هم‌تراز با منطق می‌دانست عیان شد، و عصر جدیدی از ناپایداری شروع شد. البته باید گفت فقط منطق‌گرایان — که نظریاتشان با تناقض مواجه شده بود — از این موضوع نگران بودند.

خوب است در اینجا به اهمیت پارادوکس زرملو–راسل بپردازیم. ریاضی‌دانان بسیاری، از ریمان گرفته تا هیلبرت، این اصل را پذیرفته بودند که برای هر ویژگی منطقی یا ریاضیاتیِ خوش‌تعریف، مجموعه‌ای وجود دارد شامل تمام اشیایی که دارای آنند. به عبارت دیگر، برای هر ویژگی خوش‌تعریف p، وجود دارد مجموعه‌ی $\{x : p(x)\}$. مثلا برای ویژگی «عدد حقیقی بودن» — که با استفاده از اصول موضوعه‌ی هیلبرت به طور دقیق بیان می‌شود — مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی، و برای ویژگی «عدد ترتیبی بودن» مجموعه‌ی تمام اعداد ترتیبی وجود دارد. این اصل که اصل تفهیم[1] نام دارد، سنگ بنای درک منطق‌گرایانه از نظریه‌ی مجموعه‌هاست، که معمولاً نظریه‌ی طبیعی[2] مجموعه‌ها نامیده می‌شود. ساده‌اندیشانه بودن این ایده البته تنها با نگاه به گذشته معلوم می‌شود. این اصل به عنوان یک قانون پایه‌ای منطق پنداشته می‌شد، و بنابرین تمام نظریه‌ی مجموعه‌ها صرفاً بخشی از منطق مقدماتی بود.

پارادوکس زرملو–راسل نشان می‌دهد که اصل تفهیمْ متناقض است. این امر با ساخت یک ویژگی انجام می‌شود که در نگاه اول کاملا ساده و منطقی[3] به نظر می‌آید. فرض کنید $p(x)$ ویژگی $x \notin x$ (توجه کنید که نفی و عضویت مفاهیمی کاملا منطقی فرض می‌شدند) باشد. اصل تفهیم وجود مجموعه‌ی $R = \{x : x \notin x\}$ را منجر می‌شود، اما وجود چنین مجموعه‌ای

[1] comprehension principle

[2] در متن اصلی، عبارت naive set theory آمده که شاید بهتر باشد آن را نظریه‌ی مجموعه‌های ساده‌اندیشانه ترجمه کرد. نیم‌نگاهی به این ترجمه‌ی دیگر برای فهم جمله‌ی بعدی لازم است.

[3] مقصودْ اینجا از منطقی، این است که در ساخت آن به استفاده از ابزارهای خارج از منطق، مانند ریاضیات، نیازی پیدا نمی‌شود؛ و نه اینکه ویژگی مورد بحث عقلانی‌ست.

تناقض دارد، زیرا اگر $R \in R$، طبق تعریف $R \notin R$، و نیز اگر $R \notin R$، آنگاه $R \in R$. هیلبرت (مانند همکار بزرگ‌ترش فرگه [۱، VI.56]) تصمیم گرفت منطق‌گرایی را رها کند، و حتی به این فکر بیفتد که شاید تمام این مدت حق با کرونکر بوده‌است. در نهایت او به این نتیجه رسید که نظریه‌ی مجموعه‌ها نشان می‌دهد اصلاح اساسی نظریه‌ی منطق ضروری است. در ضمن نیاز بود نظریه‌ی مجموعه‌ها دوباره و این‌بار به روش اصل موضوعی بنا شود؛ به عنوان یک نظریه‌ی ریاضیاتی و بر پایه‌ی اصول موضوعه‌ی برخاسته از ریاضی (و نه منطق)، و زرملو این کار را کرد.

هیلبرت اعتقاد داشت که ادعای وجود مجموعه‌ای از اشیایی ریاضیاتی، معادل با اثبات سازگاری (خالی از تناقض بودن) دستگاه اصول موضوعه‌ی متناظرش است. از شواهد تاریخی بر می‌آید که این اعتقاد او، واکنشی به پارادوکس‌های کانتور بوده‌است. استدلال او ممکن است این بوده باشد که به جای پرش مستقیم از مفاهیم خوش‌تعریف به مجموعه‌های متناظر با آن‌ها، ابتدا باید اثبات کنیم که مفاهیم مورد نظر منطقاً سازگارند. به عنوان مثال، پیش از پذیرفتن وجود مجموعه‌ی تمام اعداد حقیقی، باید سازگاری دستگاه اصول موضوعه‌ی هیلبرت برای اعداد حقیقی را ثابت کرد. این اصل هیلبرت روشی برای زدودن مفهوم وجود در ریاضی از مسائل متافیزیکی بود. این ایده که اشیا ریاضی دارای نوعی «وجود ایده‌آل» در قلمرو ذهن هستند و نه یک وجود مستقل متافیزیکی، پیش‌تر توسط ددکیند و کانتور هم گفته شده بود.

پارادوکس‌های منطقی علاوه بر پارادوکس‌های بورالی–فورتی، کانتور، و راسل، شامل چندین پارادوکس معنایی — از جمله پارادوکس‌های مطرح‌شده توسط راسل، ریچارد، کنیگ، گرلینگ و ... — نیز می‌شد. وفور تناقضات منطقی باعث سردرگمی زیادی شد، اما یک چیز واضح بود: نقش مهم آن‌ها در تسریع رشد منطق مدرن و اقناع ریاضی‌دانان درباره‌ی لزوم ارائه‌ی کاملا صوری نظریاتشان. از تناقضات منطقی تنها زمانی می‌توان صرف نظر کرد — و آن‌ها را از تناقضات نظریه‌مجموعه‌ای تمییز داد — که نظریه در قالب یک زبان صوری دقیق بیان شود.

۲.۲. محمولیت. [۱]

وقتی کتاب‌های فرگه و راسل باعث شناخته شدن تناقضات نظریه‌ی مجموعه‌ها در جامعه‌ی ریاضی‌دانان شدند، پوانکاره [۱، VI.61] از آن‌ها استفاده کرد تا نسبت به هر دوی منطق‌گرایی و صورت‌گرایی انتقاداتی ایراد کند.

تحلیل او از این تناقض‌ها باعث شد او ایده‌ی جدید محمولیت را مطرح کند، و بر این باشد که در ریاضی باید از تعاریف نامحمولی پرهیز کرد. به بیان ساده، یک تعریف نامحمولی‌ست اگر شیئی را با ارجاع به کلیتی معرفی کند که پیش‌تر شامل آن است. ددکیند مجموعه‌ی اعداد طبیعی را اشتراک تمام مجموعه‌های شامل ۱ و نسبت به تابع تالی بسته تعریف می‌کند (عدد ۱ در برد تابع تالی نیست). هدف او معرفی $\mathbb{N}$ به‌عنوان یک مجموعه‌ی مینیمال بود، اما در تلاش برای این کار او در تعریف $\mathbb{N}$ از یک کلیت از مجموعه‌ها بهره می‌جوید که باید قبلاً شامل $\mathbb{N}$ باشد. پوانکاره (و هم‌چنین راسل) چنین روشی را پذیرفتنی نمی‌دانستند، به‌ویژه زمانی که شی مورد اشاره، تنها با چنین روشی قابل تعریف باشد. پوانکاره روش‌های نامحمولی مانند این را در هر یک از تناقضاتی که مطالعه می‌کرد، می‌یافت.

برای مثال، پارادوکس ریچارد را بنگرید، که یک پارادوکس زبان‌شناسانه یا معنایی‌ست (که همانطور که گفته شد، با مفاهیم صدق و تعریف‌پذیری سر و کار دارد). با آغاز از مفهوم اعداد حقیقی تعریف‌پذیر، و چون تعاریف باید با زبانی خاص بیان شوند و عبارات زبان نیز متناهی‌اند، نتیجه می‌شود که تنها تعداد شمارایی عدد حقیقی تعریف‌پذیر وجود دارد. پس می‌توانیم این اعداد را با استفاده از ترتیب لغت‌نامه‌ای تعاریف‌شان بشماریم. ایده‌ی ریچارد این بود که، مشابه ایده‌ی قطری‌سازی کانتور برای اثبات ناشمارایی $\mathbb{R}$، از یک روند قطری استفاده کند. فرض کنید $a_۱, a_۲, a_۳, \cdots$ اعداد تعریف‌پذیر باشند. عدد جدید r را طوری تعریف کنید که مطمئن باشید رقم nام آن با رقم nام a_n متفاوت است (مثلا، این رقم را ۲ تعریف کنید مگر این‌که رقم nام a_n نیز ۲ باشد، در این صورت آن را ۴ بگذارید). این عدد نمی‌تواند عضو مجموعه‌ی اعداد تعریف‌پذیر باشد، اما همین لحظاتی پیش آن را با تعدادی متناهی کلمه تعریف کردیم! پوانکاره با ممنوع ساختن تعاریف نامحمولی، جلوی معرفی عددی چون r را می‌گیرد، زیرا برای تعریف آن از ارجاع به کلیتِ تمام اعداد تعریف‌پذیر بهره بردیم.[۲]

در این رویکرد در مورد مبانی ریاضیات، تمام اشیای ریاضی (فرای اعداد طبیعی) باید با تعاریفی صریح معرفی شوند. اگر در تعریفی، از کلیتی استفاده شود که شی مورد تعریف به آن تعلق دارد، با یک دور مواجه می‌شویم: شی مورد تعریف، خود جزئی

[1] predicativity

[۲] راه حل امروزی این مسئله، ساختن تعاریف ریاضیاتی در یک نظریه‌ی صوری خوش‌تعریف است که زبان و عبارات آن از ابتدا مشخص‌اند. پارادوکس ریچارد از ابهامی که در مورد روش‌های در دسترس برای تعریف وجود دارد حاصل می‌شود.

از تعریف خود است. در این دیدگاه، تعاریف باید محمولی باشند: تنها ارجاع به کلیت‌هایی مجاز است که پیش‌تر آن‌ها را معین کرده‌ایم. مؤلفان مهمی چون راسل و ویل [۱، VI.80] این دیدگاه را پذیرفته و به گسترش آن کمک کردند.

این دیدگاه زرملو را قانع نکرده بود، و او همچنان عقیده داشت بهره جستن از تعاریف نامحمولی، نه‌تنها در نظریه‌ی مجموعه‌ها (مانند تعریف ددکیند از $\mathbb{N}$)، بلکه در آنالیز کلاسیک هم معمولاً بی‌اشکال است. به‌عنوان یک مثال خاص، او به اثبات کوشی [۱، VI.29] از قضیه‌ی اساسی جبر[1] [۱، V.13] اشاره کرد، اما یک مثال ساده‌تر از چنین تعریفی مفهوم کوچک‌ترین کران بالا در آنالیز حقیقی است. اعداد حقیقی نه مستقلاً با تعاریف محمولی از هر یک، بلکه به‌عنوان یک کلیت کامل تعریف می‌شوند، و در نتیجه روشی که کوچک‌ترین کران بالای یک مجموعه‌ی نامتناهی کران‌دار از اعداد حقیقی را مشخص می‌کند نامحمولی خواهد بود. اما زرملو اصرار داشت که این تعاریف بی‌آزارند، زیرا شی مورد تعریف نه در حال ساخته شدن، بلکه تنها در حال مشخص شدن است (ر.ک. مقاله‌ی ۱۹۰۸ او، چاپ شده در صص. ۹۸–۱۸۳ کتاب ۱۹۶۷ ون‌هاینورت).

ایده‌ی پوانکاره برای از بین بردن تعاریف نامحمولی، برای راسل اهمیت بسیاری پیدا کرد، تا جایی که در نظریه‌ی تاثیرگذار انواعش از آن به‌عنوان «اصل دور باطل» یاد کرد. نظریه‌ی انواع یک دستگاه منطقی مرتبه بالاتر است که تسویر روی ویژگی‌ها، مجموعه‌ها، رابطه‌ها، مجموعه‌هایی از مجموعه‌ها، و به همین ترتیب را ممکن می‌سازد. با صرف نظر از جزئیات، این نظریه بر پایه‌ی این ایده بنا می‌شود که اعضای هر مجموعه باید اشیایی در یک نوع همگن خاص باشند. مثلا، مجموعه‌هایی از «اشخاص»، مانند $\{a, b\}$، یا از مجموعه‌هایی از اشخاص، مانند $\{\{a\}, \{a, b\}\}$، مجاز، اما مجموعه‌ای با اعضای مخلوط، مثلا $\{a, \{a, b\}\}$، غیرمجاز دانسته می‌شود. تفسیر راسل از نظریه‌ی انواع به دلیل انشعاباتی که برای جلوگیری از نامحمولیت وارد آن کرده بود، به‌نسبت پیچیده بود. این دستگاه، به همراه اصول موضوعه‌ی بی‌نهایت، انتخاب، و «تحویل‌پذیری» (که راه حلی موضعی برای حل مشکل انشعاب‌ها بود)، برای توسعه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها و دستگاه‌های اعداد کفایت می‌کرد و بنابرین به سنگ بنای منطقی کتاب مشهور وایتهد و راسل، *Principia Mathematica*، که در آن مؤلفان با دقت نظر مبانی ریاضیات خود را بنا کردند، تبدیل شد.

نظریه‌ی انواع تا حدود ۱۹۳۰ در جایگاه خود به عنوان دستگاه منطقی اصلی مورد استفاده در ریاضی باقی ماند، اما در قالب نظریه‌ی انواع ساده (بدون انشعابات راسل)؛ که همانطور که چویستک،[2] رمزی و دیگران پی بردند، برای یک مبنا در سبکی مشابه پرینکیپیا کافی بود. رمزی دلایلی در جهت حذف نگرانی‌ها درباره‌ی نامحمولیت مطرح کرد، و تلاش کرد باقی اصول موضوعه‌ی وجودی پرینکیپیا — اصل بی‌نهایت و اصل انتخاب — را به عنوان اصولی منطقی توجیه کند، اما دلایل او ناکافی بودند. تلاش راسل برای نجات منطق‌گرایی از تناقض نیز، جز برای گروه محدودی از فلاسفه (به‌ویژه اعضای مکتب وین)، ناموفق بود.

پیشنهادات پوانکاره هم‌چنین جزئی کلیدی از رویکرد جالبی که ویل در کتاب ۱۹۱۸ خود *Das Kontinuum* در مورد مبانی ریاضیات پیش می‌برد بودند. ایده‌ی اصلی این بود که نظریه‌ی اعداد طبیعی را همان گونه که عرفاً پذیرفته بود — با استفاده از منطق کلاسیک — بپذیریم، اما پس از آن از روش‌های محمولی استفاده کنیم. بنابرین بر خلاف براوئر، ویل اصل طرد شق ثالث را پذیرفت. (در بخش بعدی به تفصیل به این موضوع و هم‌چنین نظرات براوئر می‌پردازیم.) اما اعداد حقیقی به طور کامل رام او نبودند، زیرا در دستگاه او مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ تمامیت نداشت و قضیه‌ی بولتسانو–وایرشتراس قابل اثبات نبود. به همین دلیل او ناچار به ابداع جایگزین‌های پیچیده‌ای برای اثبات‌های معمول حکم‌های آنالیزی شد.

ایده‌ی مبانی محمولی برای ریاضیات، به سبک ویل، در دهه‌های اخیر منجر به حصول نتایج قابل توجهی شده‌است (ر.ک. ففرمن[3] ۱۹۹۸). دستگاه‌های محمولی جایگاهی در میان دستگاه‌هایی که با سخت‌گیری از روش‌های ساختی حمایت می‌کنند، و آن‌ها که با سرسختی پشتیبان روش‌های جدید هستند دارند. این رویکرد به مبانی ریاضیات، یکی از بسیار رویکردهایی‌ست که در سه‌گانه‌ی مرسوم اما کهنه‌ی منطق‌گرایی، صورت‌گرایی و شهودگرایی نمی‌گنجد.

۳.۲. انتخاب‌ها.

[1] استدلال کوشی کاملا ناساختی، یا آنطور که در این نوشته گفته‌ایم «کاملا وجودی» بود. برای نشان دادن این که چندجمله‌ای مورد نظر باید حداقل یک ریشه داشته باشد، کوشی از مقدار چندجمله‌ای استفاده کرد. این مقدار یک کمینه‌ی سراسری مانند σ دارد، که تعریف این مقدار کمینه نامحمولی‌ست. او سپس از این فرض که σ مثبت است استفاده کرد و به تناقض رسید.

[2] Chwistek

[3] Feferman

با تمام اهمیتی که پارادوکس‌ها داشتند، تاثیر آن‌ها بر مناظرات بر سر مبانی، معمولاً بیش‌پنداشته می‌شود. روایات بسیاری هستند که بر خلاف بررسی ما در بخش ۱، از آن‌ها به عنوان نقطه‌ی شروع واقعی مجادلات یاد می‌کنند. با این حال حتی اگر توجه‌مان را به دهه‌ی اول قرن بیستم محدود کنیم، هم‌چنان مشاجره‌ای دیگر، بر سر اصل انتخاب و اثبات زرملو از قضیه‌ی خوش ترتیبی، وجود دارد که اگر نگوییم مهم‌تر، به همان اندازه مهم است.

از قسمت ۱.۲ به یاد داریم که ارتباط بین مجموعه‌ها و مشخصه‌های معرف آن‌ها، در آن زمان، (به واسطه‌ی اصل متناقض تفهیم) در اذهانِ هم ریاضی‌دانان و هم منطق‌دانان ریشه دوانده بود. اصل انتخاب عبارت است از این که برای هر خانواده‌ی نامتناهی از مجموعه‌های مجزا و ناتهی، مجموعه‌ای (مجموعه‌ی انتخاب) وجود دارد که از هر یک از اعضای خانواده، دقیقا یک عضو در آن وجود دارد. مشکل منتقدان با این اصل، این بود که صرفاً وجود مجموعه‌ی انتخاب را مقرر می‌کند، اما تعریف آن را ارائه نمی‌دهد. اتفاقاً در مواقعی که مشخص کردن مجموعه‌ی انتخاب به طور صریح ممکن است، اصلاً نیازی به بکارگیری اصل انتخاب نیست! از طرفی اثبات زرملو برای قضیه‌ی خوش‌ترتیبی به استفاده از این اصل نیاز دارد. خوش‌ترتیبی مورد بحث برای $\mathbb{R}$، به معنای ایده‌آل مورد نظر کانتور، ددکیند و هیلبرت «وجود» دارد، اما در یک چشم‌انداز ساختی غیرقابل‌دسترس است.

این شد که اصل انتخاب، به ابهام‌های موجود درباره‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها شدت بخشید، و ریاضی‌دانان را ناچار به شفاف‌سازی کرد. از طرفی، اصل انتخاب چیزی بیش از بیان صریح دیدگاه‌های موجود درباره‌ی زیرمجموعه‌های دلخواه نبود، اما از طرف دیگر ایده‌ی آن به وضوح با این دیدگاه که مجموعه‌های نامتناهی را باید با ویژگی‌هایشان صریحاً تعریف کرد اختلاف داشت. صحنه برای مناظره‌ای عمیق آماده بود. بحث‌های حول این موضوع، بیش از هر چیز، پیامدهای وجودی روش‌های جدید ریاضیات را روشن کرد. حتی بورل [۱، VI.70]، بیر، و لبگ [۱، VI.72]، که بعدها منتقد این اصل شده بودند، همگی به طرقی که کمتر آشکار بودند، در اثبات قضیه‌های آنالیز از اصل انتخاب بهره برده بودند. اتفاقی نبود که این اصل را ارهارد اشمیت، که شاگرد هیلبرت و یک آنالیزکار بود، به زرملو پیشنهاد کرده بود.

پس از انتشار اثبات زرملو، بحث شدیدی در اروپا در گرفت. زرملو تصمیم به کار کردن روی مبانی نظریه‌ی مجموعه‌ها گرفته بود تا نشان دهد که اثباتش در یک دستگاه مقبول و اعتراض‌ناپذیر از اصول موضوعه معتبر است. نتیجه‌ی تلاش او، دستگاه اصول موضوعه‌ی مشهورش [۱، IV.22 §3] شد که حاصل تحلیل هشیارانه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها — آن طور که کانتور و ددکیند عقیده داشتند و در قضیه‌ی خودش هم وجود داشت — بود. پس از برخی اصلاحات (اصول جایگزینی و انتظام) که به پیشنهاد فرانکل و فون نویمان [۱، VI.91] انجام شد و ایده‌ی نوآورانه‌ی مهمی که توسط ویل و اشکولم [۱، VI.81] مطرح شد (صورت‌بندی آن در منطق مرتبه اول [۱، IV.23 §1]، یعنی تسویر روی اشیا منفرد — مجموعه‌ها — و نه روی ویژگی‌هایشان)، دستگاه زرملو در دهه‌ی ۱۹۲۰ همان شکلی را گرفت که امروزه می‌شناسیم.

دستگاه ZFC (حروف ابتدای اسامی زرملو و فرانکل، و C برای اصل انتخاب) جنبه‌های اصلی روش‌شناسانه‌ی ریاضیات مدرن را در بر گرفته، و چارچوبی مطبوع برای توسعه‌ی نظریات ریاضی و پرداختن به اثبات‌ها ارائه می‌کند و به‌ویژه، دارای اصول وجودی قدرتمند است، امکان ارائه‌ی تعاریف نامحمولی و توابع دلخواه را فراهم می‌سازد، اثبات‌های کاملا وجودی را می‌پذیرد، و تعریف مناسب ساختارهای اصلی ریاضیات در آن ممکن است. به این دلایل، همه‌ی ویژگی‌های چهارگانه‌ی گفته‌شده در بخش ۱ را دارد. کار زرملو کاملا در راستای تلاش‌های غیررسمی هیلبرت در حوالی ۱۹۰۰ برای اصل‌موضوعی‌سازی بود، و فراموش نکرد اثباتی برای سازگاری دستگاهش را نیز وعده دهد. نظریه‌ی اصل موضوعی مجموعه‌ها، خواه به بیان زرملو–فرانکل و خواه به بیان فون نویمان–برنیز–گودل، دستگاهی‌ست که اکثر ریاضی‌دانان به عنوان مبنایی کارا برای نظام خود می‌پذیرند.

تا ۱۹۱۰، تقابلی شدید بین نظریه‌ی انواع راسل و نظریه‌ی مجموعه‌های زرملو وجود داشت. اولی در چارچوب منطق صوری پرورده شده بود، و محل انحرافش (که البته بعدها به دلایل پراگماتیک به خطر افتاد) در راستای محمولیت بود. برای رسیدن به ریاضیات، نیاز بود فرض‌های وجودی بی‌نهایت و انتخاب را بپذیریم، اما این دو نه اصولی آشکار، بلکه فرضیاتی تجربی تلقی می‌شدند. دومی دستگاهی بود که ابتدا به‌شکل غیررسمی پیشنهاد شده بود، به دیدگاه نامحمولی ایمان کامل داشت، و اصولش فرض‌های وجودی قدرتمندی بودند که برای اشتقاق کل ریاضیات کلاسیک و علاوه بر آن نظریه‌ی بی‌نهایت متعالی کانتور کفایت می‌کردند. در دهه‌ی ۱۹۲۰ فاصله‌ی این دو بسیار کاهش یافت، به‌خصوص در مورد دو ویژگی اولی که مطرح کردیم. دستگاه زرملو به کمال رسید و در قالب زبان منطق صوری مدرن صورت‌بندی شد. راسل‌گراها نیز نظریه‌ی انواع ساده را پذیرفته، و در جریان این پذیرش روش «وجودی» و نامحمولی ریاضیات مدرن را قبول کردند. این موضوع معمولاً (شاید به

طرزی گیج‌کننده) «افلاطون‌گرایی» خوانده می‌شود: به اشیا مورد بحث نظریه طوری نگاه می‌شود که انگار وابستگی‌یی به آنچه ریاضی‌دان می‌تواند واقعا و به طور صریح تعریف کند ندارند.

در همان دهه‌ی اول قرن بیستم، ریاضی‌دانی هلندی در مسیر رسیدن به نوعی شهودگرایی قرار گرفته بود که از نظر فلسفی غنی‌تر بود. براوئر جوان در ۱۹۰۵ عقاید عجیب و غریبش در متافیزیک و اخلاقیات را بیان کرد، و در همان راستا مبانی ریاضیات خود را در تزش در ۱۹۰۷ توضیح داد. فلسفه‌ی «شهودگرایی» او در این دیدگاهِ متافیزیکی‌اش ریشه داشت که آگاهیِ فرد منبع یگانه و یکتای دانش است. این نگاه به خودیِ خود چندان جذاب نمی‌نماید، بنابرین بهتر است بیش‌تر روی عقاید ساخت‌گرایانه‌ی براوئر تمرکز کنیم. در حوالی ۱۹۱۰، براوئر — از جمله به دلیل نتایج حیاتی‌یی در توپولوژی مانند قضیه‌ی نقطه‌ی ثابت [۱، V.11] — به ریاضی‌دانی شناخته‌شده تبدیل شد. هنگامی که نخستین جنگ جهانی به پایان رسید، او شروع به انتشار جزئیات ایده‌هایش در مورد مبانی ریاضی کرد، و این اقدامش نقش بزرگی در ایجاد «بحران» معروف – که حال به آن می‌پردازیم – داشت. او هم‌چنین موفق شد مرزِ مرسوم (اما گمراه‌کننده) میان صورت‌گرایی و شهودگرایی را جا بیندازد.

مراجع

[1] Gowers, T., Barrow-Green, J. & Leader, I. (2009). *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

مترجم: پارسا تربتی†

†دانشجوی کارشناسی علوم کامپیوتر، دانشگاه صنعتی شریف
رایانامه: ptorbatii@icloud.com