مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی دوم (بهار ۱۴۰۳)

شمارش قدم‌زدن‌های خودپرهیز روی مشبکه‌ی شش ضلعی

هوگو دامینیل کوپن

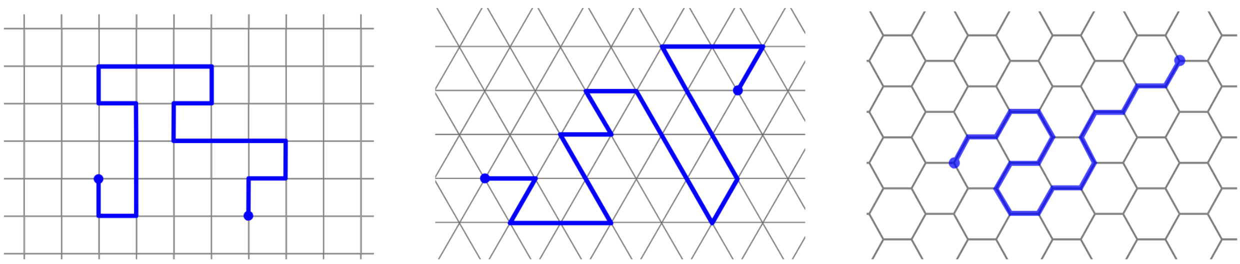
چکیده. به چند طریق می‌توانید روی یک مشبکه‌ی توری قدم بزنید، به طوری که هیچ‌گاه به مسیری که قبلا طی کرده‌اید برخورد نکنید؟ در این‌جا به برخی جنبه‌های ترکیبیاتی و آماری این قدم‌زدن به اصطلاح «خودپرهیز» می‌پردازیم. به طور خاص، نتایج اخیر به‌دست‌آمده درباره‌ی تعداد قدم‌زدن‌های تصادفی روی مشبکه‌ی شش ضلعی (مشبکه‌ی کندوی عسل) را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در بخش آخر، به طور خلاصه به ارتباط با هندسه‌ی قدم‌زدن‌های تصادفی خودپرهیز با طول بالا اشاره می‌کنیم.

۱. قدم‌زدن‌های تصادفی خودپرهیز روی یک مشبکه

در اواسط قرن بیستم میلادی، پاول فلوری[۱] و اور[۲] قدم‌زدن‌های تصادفی خودپرهیز[۳] (SAWs) را به عنوان یک مدل ریاضی برای شکل پلیمرها معرفی کردند. پلیمر ایده‌آل، یک زنجیره‌ی بلند از مولکول‌هاست که از تعداد زیادی اتصالات مشابه، به نام مونومر، تشکیل شده‌است [۵، ۱۱].

بیایید یک مشبکه، مانند مشبکه‌ی مربعی، مشبکه‌ی مثلثی، یا مشبکه‌ی شش ضلعی را در نظر بگیریم (شکل ۱). یک قدم‌زدن خودپرهیز روی یک مشبکه، یک دنباله از رأس‌های مجاور است که به هیچ‌یک از رأس‌های قبلی باز نمی‌گردد. اولین سوالی که در ذهن ایجاد می‌شود این است:

چند SAW به طول n با شروع از رأس داده‌شده وجود دارد؟



شکل ۱. مثال‌هایی از قدم‌زدن‌های خودپرهیز با طول ۱۹ روی مشبکه‌ی مربعی، مثلثی و شش‌ضلعی. واحد طول برابر با طول هر یال در مشبکه است.

برای پرداختن به این سوال، ابتدا نیاز داریم نگاهی دقیق‌تر به تعاریف بیندازیم. یک گراف، مجموعه‌ای از رئوس و یال‌هاست، به طوری که هر یال، دو رأس را به هم متصل می‌کند: زمانی که دو رأس با یک یال به هم متصل می‌شوند، می‌گوییم آن دو رأس مجاور یکدیگرند[۴]. یک گراف، تراگذر[۵] است اگر، هر رأس گراف را بتوان با یک «تقارن» گراف به هر رأس دیگر آن تصویر

*این نوشته ترجمه‌ای از مقاله‌ی زیر است:

Duminil-Copin, H. (2019). Counting self-avoiding walks on the hexagonal lattice. Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach.

[1] Paul J. Flory
[2] W. J. C. Orr
[3] self-avoiding walks
[۴] در این‌جا فقط گراف‌های ساده —یعنی گراف‌هایی که طوقه یا یال چندگانه ندارند— را بررسی می‌کنیم.
[5] transitive

کرد. به بیان دیگر، گراف از همه‌ی رئوسش یکسان دیده می‌شود. در دیدگاه پلیمری، رئوس گراف همان مونومرها هستند که با یال‌ها به هم متصل شده‌اند.

یک گراف، نامتناهی است اگر تعداد نامتناهی رأس داشته‌باشد، و به صورت موضعی متناهی است اگر هر رأس آن، درجه‌ی متناهی داشته‌باشد. بر این اساس، یک مشبکه را تعریف می‌کنیم: یک گراف نامتناهی تراگذر موضعی-متناهی. علاوه بر مشبکه‌های مربعی، مثلثی و شش ضلعی که قبل‌تر به آن‌ها اشاره کردیم و همگی در صفحه‌ی $\mathbb{R}^۲$ هستند، یک مثال دیگر از مشبکه، مشبکه‌ی مکعبی در $\mathbb{R}^۳$ است؛ که مجموعه‌ی رئوس آن $\mathbb{Z}^۳$ است، و دو رأس همسایه‌اند اگر فاصله‌ی آن‌ها از یکدیگر ۱ باشد.

برای گراف داده‌شده‌ی $\mathbb{G}$ ، یک قدم‌زدن به طول $n \in \mathbb{N}$ روی $\mathbb{G}$ ، یک نگاشت $\gamma : \{۰, \dots, n\} \to \mathbb{G}$ است؛ به طوری که به ازای هر $i \in \{۰, \dots, n-۱\}$ دو رأس $\gamma(i)$ و $\gamma(i+۱)$ با هم مجاور باشند. به یک قدم‌زدن خودپرهیز می‌گوییم اگر یک به یک باشد؛ یعنی داشته‌باشیم: $\gamma(i) \neq \gamma(j)$ برای $i \neq j$. از این‌جا به بعد، تنها قدم‌زدن روی گراف‌هایی را در نظر می‌گیریم که مشبکه باشند.

برای پاسخ دادن به سوال قبلی شمارش تعداد قدم‌زدن‌های خودپرهیز، مشبکه‌ی $\mathbb{L}$ را در نظر بگیرید، و فرض کنید c_n تعداد قدم‌زدن‌های خودپرهیز به طول n روی مشبکه‌ی $\mathbb{L}$ با شروع از یک نقطه‌ی ثابت باشد. از آن‌جایی که مشبکه تراگذر است، مقدار c_n به نقطه‌ی شروع بستگی ندارد. برای مقادیر کوچک n، مقدار c_n را می‌توان دستی حساب کرد و این کار سرگرم‌کننده است. با این حال با افزایش n، این محاسبه‌ی دستی عملاً ناممکن می‌شود. این به این علت است که، همان‌طور که در زیر می‌بینیم، c_n به صورت نمایی رشد می‌کند. با استفاده از تکنولوژی امروز و با استفاده از الگوریتم‌های کارا، محاسبه‌ی تعداد قدم‌زدن‌ها تا طول ۳۶ روی $\mathbb{Z}^۳$ ممکن است، که برای آن یک الگوریتم جدید و ۵۰۰۰۰ ساعت محاسبه لازم است تا مقدار $c_{۳۶} = ۲۹۴۱۳۷۰۸۵۶۳۳۴۷۰۱۷۲۶۵۶۰۶۷۰$ به دست بیاید [۱۲]. روی مشبکه‌ی مربعی $\mathbb{Z}^۲$، بزرگ‌ترین محاسبه مربوط می‌شود به قدم‌زدن‌ها به طول ۷۱ [۲]. انتظار نمی‌رود که هیچ فرمول دقیقی برای c_n وجود داشته‌باشد. با این حال، می‌توانیم رفتار مجانبی و یا حدی c_n را، برای n های خیلی بزرگ، مطالعه کنیم. جان همرسلی[۱] مشاهده کرد [۶]، که دنباله‌ی c_n دارای این ویژگی است که: عدد حقیقی مثبت مشخص $\mu_c(\mathbb{L})$ وجود دارد، به طوری که

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} c_n^{۱/n} = \mu_c(\mathbb{L}). \tag{۱.۱}$$

به $\mu_c(\mathbb{L})$ ثابت اتصال مشبکه‌ی $\mathbb{L}$ می‌گویند. در نتیجه، برای n های بزرگ، c_n تقریبا برابر با $\mu_c(\mathbb{L})^n$ است. برهان زیبای همرسلی در فیزیک آماری و احتمال به یک استدلال کلاسیک بدل شده‌است. این استدلال به صورت زیر است.

از آن‌جایی که یک SAW با $n+m$ قدم را می‌توان به یک SAW n-قدمی و یک انتقال موازی از یک m-قدمی تقسیم کرد، داریم

$$c_{n+m} \leq c_n c_m$$

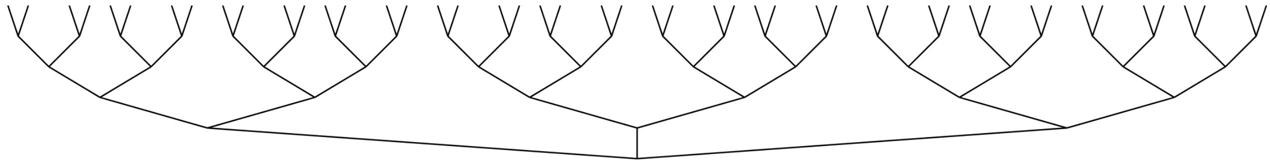
در نتیجه، $(c_n)_{c\in\mathbb{N}}$ یک دنباله‌ی (اصطلاحاً) زیرضربی است. به عنوان تمرین می‌توان نشان داد برای چنین دنباله‌هایی، ثابت $\mu_c(\mathbb{L})$ وجود دارد به طوری که رابطه‌ی ۱.۱ برقرار باشد. توجه کنید که $\mu_c(\mathbb{L})$ بزرگ‌تر مساوی ۱ و کم‌تر مساوی تعداد همسایه‌های یک نقطه منهای ۱ است.

به عنوان مثال، درخت از درجه‌ی $d+۱$ را در نظر بگیرید. مشبکه‌ی $\mathbb{T}_d$ به طور یکتا با این دو ویژگی تعریف می‌شود: درجه‌ی هر رأس $d+۱$ است، و برای هر دو رأس، دقیقا یک قدم‌زدن خودپرهیز، با شروع از یکی و پایان با دیگری، وجود دارد. بخشی از $\mathbb{T}_۲$ در شکل ۲ نشان داده‌شده‌است. به راحتی می‌توان بررسی کرد که $c_n(\mathbb{T}_d) = d^n$، و لذا $\mu_c(\mathbb{T}_d) = d$. متاسفانه، انتظار نمی‌رود به زودی فرمولی صریح برای $\mu_c(\mathbb{L})$ یافت شود، و ریاضی‌دانان و فیزیک‌دانان تنها پیش‌بینی‌هایی عددی برای رایج‌ترین مشبکه‌ها را در اختیار دارند. به عنوان مثال، مقاله‌های [۲، ۳] تخمین‌های زیر را برای ثابت اتصال $\mathbb{Z}^۲$ و $\mathbb{Z}^۳$ ارائه می‌دهند ـ پرانتزها شامل خطای احتمالی در این ارقام است:

$$\mu_c(\mathbb{Z}^۲) = ۲/۶۳۸۱۵۸۵۳۰۳۵(۲),$$

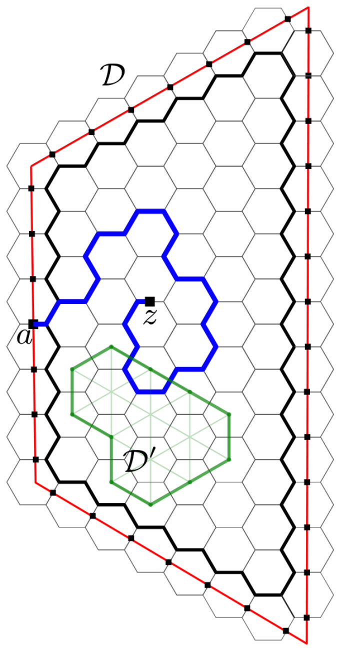
$$\mu_c(\mathbb{Z}^۳) = ۴/۶۸۴۰۳۹۹۳۱(۲۷).$$

[1] John Hammersley



شکل ۲. بخشی متناهی از $\mathbb{T}_۲$ که درخت با درجه‌ی ۳ است. برخلاف آن‌چه که تصویر ممکن است القا کند، همه‌ی یال‌ها، و در نتیجه همه‌ی قدم‌های یک قدم‌زدن طول یکسانی دارند.

۲. ثابت اتصال مشبکه‌ی شش ضلعی



شکل ۳. یک دامنه‌ی $\mathcal{D}$ در مشبکه‌ی شش‌ضلعی، به همراه کانتور مرزی‌اش (به رنگ قرمز) و جعبه‌های کوچک در نقاط میان-یالی مرزی. یک قدم‌زدن خودپرهیز در $\mathcal{D}$ از یک نقطه‌ی میال‌یالی مرزی به یک میان‌یالی درونی با رنگ آبی نمایش داده شده است. یک کانتور گسسته که زیردامنه‌ی $\mathcal{D}_۰$ از $\mathcal{D}$ را محدود می‌کند، به همراه تجزیه‌اش به کانتورهای مثلثی مقدماتی به رنگ سبز نمایش داده شده است.

در سال ۱۹۸۰، برنارد نینهویس [۱۰] پیشنهاد داد که مشبکه شش‌ضلعی H در میان مشبکه‌ها خاص است، از آن جهت که ثابت اتصال آن را می‌توان به طور دقیق بیان کرد. در واقع، نینهویس حدس زد که

$$\mu_c(H) = \sqrt{۲ + \sqrt{۲}}.$$

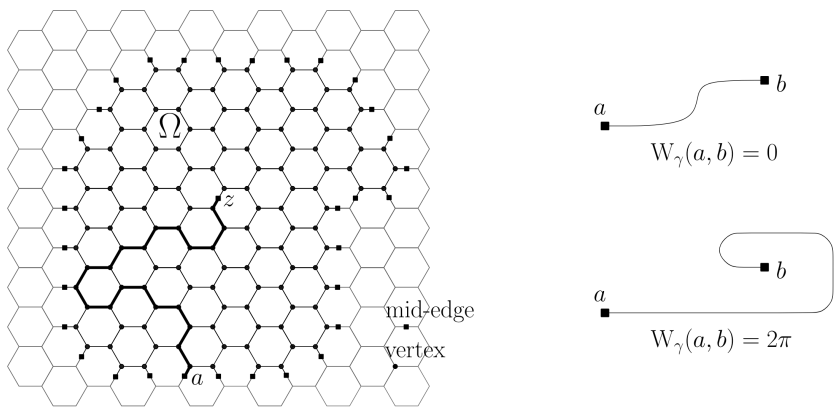
این پیش‌بینی زیبا بر پایه تطابق با مدل‌های مختلف فیزیک آماری بود و به لحاظ ریاضی نتیجه نشده بود. اخیراً، هوگو دومینیل-کوپن و استانیسلاس اسمیرنوف، شواهد دقیقی از این نتیجه ارائه دادند [۴]. روند اثبات بسیار آموزنده است. اگرچه نمی‌توانیم آن را در تعداد کمی صفحه شرح دهیم، با این حال یک جنبه مهم از اثبات را برجسته می‌کنیم و خواننده علاقه‌مند را به مقاله اصلی ارجاع می‌دهیم.

از این پس، مشبکه شش‌ضلعی H را روی صفحه مختلط C در نظر می‌گیریم. یک دامنه متناهی D را در نظر بگیرید؛ یعنی یک زیرمجموعه متناهی از یال‌های H. یک نقطه‌ی میان-یالی مانند a را در مرز D انتخاب کنید (همانطور که در شکل ۳ آمده است). برای هر نقطه میان-یالی z در D، قدم‌زنی‌های خودپرهیز در D را که از a شروع شده و در z به پایان می‌رسند، در نظر بگیرید. برای یک قدم‌زنی مانند γ، فرض کنید $W_\gamma(a, z)$ برابر با مجموع زاویه‌ای (بر حسب رادیان) است که جهت γ در مسیر از a به z چرخیده است (شکل ۴ را ببینید.). به عبارت دیگر، $W_\gamma(a, z)$ برابر با تعداد چرخش‌های به چپ منهای تعداد

چرخش‌های به راستی است که γ در مسیر a به z انجام داده است، ضرب‌در $\frac{\pi}{۳}$. تابع مختلط F را برای هر نقطه میان-یالی z وابسته به پارامترهای σ و x، با فرمول زیر تعریف می‌کنیم.

$$F(z) := \sum_{\text{قدم‌زنی خودپرهیز } \gamma \text{ در } D \text{ از } a \text{ به } z} e^{-i\sigma W_\gamma(a,z)} x^{\text{تعداد رئوس در}\gamma} \qquad (۱.۲)$$

برای مثال در شکل ۳، قدم‌زنی آبی از a به z از ۲۴ راس عبور می‌کند. ۹ چرخش به چپ و ۱۵ چرخش به راست انجام



شکل ۴. چرخش قدم‌زنی γ.

می‌دهد و در نتیجه یک جمله $e^{۲\pi i\sigma}x^{۲۴}$ را به مجموع در فرمول ۱.۲ اضافه می‌کند.

مزیت تابع F، که به آن مشاهده‌پذیر پارافرمیونیک[۱] می‌گویند، این است که زمانی که $\sigma = \frac{۵}{۸}$ و $x = \frac{۱}{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}$ باشد، یک ویژگی بسیار خاص دارد: در اطراف هر راس v در D، برای میان-یال‌های مجاور p، q و r، با ترتیب خلاف عقربه‌های ساعت، رابطه زیر برقرار است:

$$F(p) + e^{\frac{۲\pi i}{۳}}F(q) + e^{\frac{۴\pi i}{۳}}F(r) = ۰. \qquad (۲.۲)$$

ضرایب در این رابطه به گونه‌ای است که می‌توان سمت چپ را به عنوان یک جمع در امتداد «یک کانتور مقدماتی[۲] بر روی مشبکه‌ی دوگان» دید، با صرف نظر از یک فاکتور ضربی. اگرچه این جمله ممکن است به نظر چیدن کلمات عجیب و غریب کنار هم باشد، اما تفسیرش بسیار ساده است:

یک کانتور در H، یک مسیر $c = (z_i)_{i\le n}$ از وجه‌های همسایه در H است، که z_i عدد مختلطی در مرکز وجه متناظر است. مسیر بسته است اگر که وجه اول همان وجه پایانی باشد، به عبارت دیگر، z_n و $z_۰$ برابر باشند. برای مثال، مسیرهای سبز در شکل ۳ و شکل ۵ را ببینید. انتگرال گسسته یک تابع F روی میان-یال‌ها در امتداد کانتور c را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

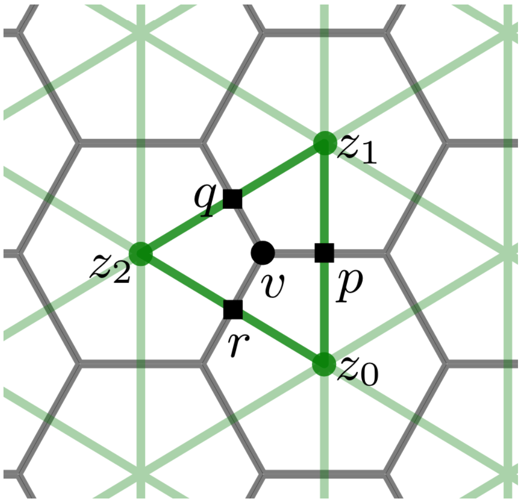
$$\oint_c F(z)dz := \sum_{i=۰}^{n-۱} F(p_i)(z_{i+۱} - z_i), \qquad (۳.۲)$$

که p_i مرکز یال محاط توسط وجه‌های متناظر با z_i و $z_{i+۱}$ است. توجه کنید که برای هر $۰ \le i < n$ داریم:

$$-\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{۳}}(z_{i+۱} - z_i) \in \left\{۱, \mathrm{e}^{۲\mathrm{i}\pi/۳}, \mathrm{e}^{۴\mathrm{i}\pi/۳}\right\}.$$

معادله ۲.۲ در راس v بیان می‌کند که انتگرال گسسته تابع F در امتداد کانتور «مثلثی» گسسته‌ای که از سه وجه پیرامون v می‌گذرد، صفر است (شکل ۵ را ببینید). حال فرض کنید که دامنه D هیچ سوراخی ندارد. در این صورت، می‌توان هر کانتور گسسته بسته در D را به مجموعه‌ای از کانتورهای مثلثی مقدماتی تجزیه کرد. از آنجا که انتگرال گسسته تابع مشاهده‌پذیر F در امتداد هر یک از این کانتورهای مثلثی مقدماتی صفر است، می‌توانیم نتیجه بگیریم که انتگرال گسسته F برای هر مسیر کانتور گسسته در D صفر است.

[1] Parafermionic observable
[2] elementary contour



شکل ۵. با بزرگنمایی راس v در مشبکه‌ی شش‌ضلعی، نقاط میان‌ـیالی مجاور p، q و r را می‌بینیم که به همراه مرکزهای z_0، z_1 و z_2 کانتور مقدماتی متناظر را می‌سازند. همه‌ی کانتورهای مقدماتی باهم مشبکه‌ی مثلثی دوگان را تشکیل می‌دهند.

به نظر می‌رسد که این ویژگی، گسسته‌سازی‌شده‌ی یکی از ویژگی‌های مختص توابع هولومورفیک است. توابع هولومورفیک توابع مختلطی هستند که مشتق‌پذیرمختلط نیز باشند؛ و انتگرال‌کانتور تابع هولومورفیک تا زمانی که کانتور از دور یک «سوراخ» در دامنه نگذرد، صفر است. بنابراین، می‌توانیم رابطه ۲.۲ را به عنوان یک نسخه گسسته از هولومورفیک‌بودن تفسیر کنیم. در این بحث مفهوم گسستگی در مقابل پیوستگی، به این معناست است که متغیر به جای حرکت پیوسته در صفحه مختلط $\mathbb{C}$ روی میان‌ـیال‌های مشبکه H پرش می‌کند.

به هر حال، در یک مورد احتیاط لازم است. یکی از ویژگی‌های کلیدی نگاشت‌های هولومورفیک این است که مسائل مقدار مرزی، راه‌حل یکتا دارند —اگر دو تابع هولومورفیک مقادیر یکسانی را در مرز یک دامنه دارند، باید در داخل آن هم برابر باشند. بیایید این را در سطح گسسته را بررسی کنیم. تصور کنید که می‌خواهیم یک تابع گسسته F را فقط با استفاده از مقادیر مرزی آن و معادله ۲.۲ در اطراف هر راس تعیین کنیم. برای هر میان‌ـیال z یک متغیر مجهول، یعنی مقدار $F(z)$، و یک معادله برای هر راس وجود دارد. به عنوان مثال، یک مسئله مقدار مرزی گسسته برای دامنه سبز D_0 در شکل ۳، ۱۱ مقدار مرزی، ۲۰ مجهول و ۱۷ معادله دارد.توجه کنید که:

$$\text{تعداد میان‌ـیال‌های داخلی} \times ۲ + \text{تعداد میان‌ـیال‌های مرزی} = \text{تعداد رئوس داخلی} \times ۳$$

زیرا هر راس مجاور ۳ یال است، و هر میان‌ـیال مجاور ۱ یا ۲ راس داخلی است، وابسته به این که روی مرز یا در داخل دامنه قرار داشته باشد. بنابراین، به طور معمول تعداد مجهول‌ها بیشتر از تعداد معادله‌ها است، و لذا چندین جواب برای این دستگاه معادلات خطی وجود دارد.

به نظر می‌رسد به بن‌بست رسیده باشیم: در مورد حالت گسسته، واقعیت این است که صفر شدن جمع کانتور اطلاعات کمی درباره تابع F به ما می‌دهد. به عبارت دیگر، یک تابع که رابطه ۲.۲ را در اطراف هر راس ارضا می‌کند، می‌تواند به عنوان نوعی تابع «هولومورفیک گسسته ضعیف» دیده شود، اما این معادلات به اندازه‌ی مفهوم استاندارد هولومورفیک به ما کمک نمی‌کنند.

خوشبختانه، ویژگی صفرشدن جمع‌های کانتور، بی‌معنی نیست. یک تحلیل دقیق از جمع‌های‌کانتور در امتداد مرز دامنه‌هایی که به خوبی انتخاب شده‌اند، نشان می‌دهد که مقدار $\sqrt{۲+\sqrt{۲}}$ که در بالا ذکر شد، باید ثابت اتصال مشبکه شش‌ضلعی باشد. این قسمت سرراست نیست، و با توجه به پاراگراف قبل، ممکن است شبیه یک معجزه به نظر رسد. دوباره، برای جزئیات بیشتر در مورد این استراتژی به مقاله اصلی [۴] ارجاع می‌دهیم.

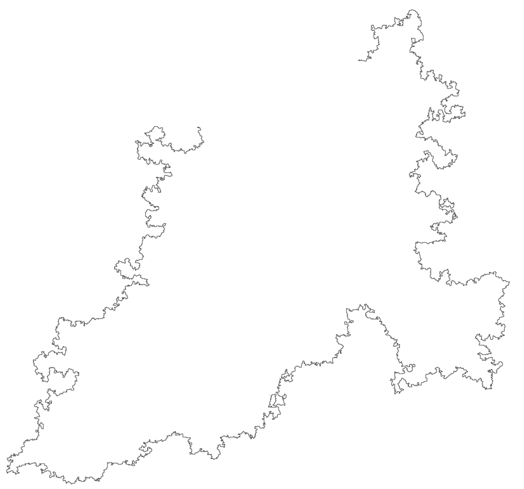
۳. هندسه‌ی SAW روی مشبکه‌ی شش ضلعی

محاسبه‌ی ثابت اتصال باید به عنوان یک پله به سمت هدفی بزرگ‌تر در نظر گرفته‌شود: فیزیک‌دانان و ریاضی‌دانان علاقه‌ی زیادی به هندسه‌ی SAWهای تصادفی بزرگ دارند. لذا بیایید از سوال ترکیبیاتی شمارش SAWها فاصله بگیریم، و روی یک سوال هندسی تمرکز کنیم: یک SAW بزرگ معمولاً چه شکلی است؟

بگذارید با اشاره به یک مدل تصادفی مرتبط شروع کنیم، که به آن قدم‌زدن تصادفی ساده[1] (SRW) می‌گویند. یک قدم‌زدن تصادفی ساده به این صورت به دست می‌آید: همه‌ی قدم‌زدن‌های ممکن (و احتمالا خودمتقاطع) روی مشبکه‌ی شش ضلعی را در نظر بگیرید که از مبدا شروع می‌شوند و n-قدمی هستند. از ترکیبیات بدست می‌آید، دقیقاً ۳^n تا از این قدم‌زدن‌ها داریم. یک قدم‌زدن تصادفی ساده n-قدمی، انتخاب تصادفی یکنواخت یک نمونه از مجموعه‌ی همه‌ی قدم‌زدن‌های تصادفی n-قدمی است که از مبدأ شروع می‌شوند. احتمال انتخاب هرکدام از قدم‌زدن‌های تصادفی ساده برابر ۳^{-n} است. به علاوه، برای مشبکه، اندازه‌ی مش δ را در نظر می‌گیریم که طول یک یال —و در نتیجه هر قدم از قدم‌زنی— با افزایش n تغییر کند. بنابراین، فرض کنید Φ_n یک قدم‌زدن تصادفی ساده‌ی n-قدمی روی یک مشبکه‌ی شش ضلعی $\delta_n\mathbb{H}$، با ابعاد تغییریافته باشد. ما به رفتار حدی Φ_n وقتی که n زیاد می‌شود، علاقه‌مندیم.

اگر به ازای هر n داشته باشیم $\delta_n = ۱$، آن‌گاه تغییری در ابعاد مشبکه نداده‌ایم، و لذا با افزایش n، قدم‌زدن‌هایی بزرگ‌تر و بزرگ‌تر به دست می‌آوریم. برعکس، اگر δ_n به سرعت کم شود، آن‌گاه وقتی n به سمت بی‌نهایت می‌رود، قدم‌زدن در مبدا جمع می‌شود. حال، اگر δ_n را برابر n^{-} در نظر بگیریم، آن‌گاه با رفتن n به سمت بی‌نهایت، قدم‌زدن Φ_n، به عنوان یک موجود تصادفی، به یک خم تصادفی پیوسته، به نام حرکت براونی، همگرا می‌شود. به عنوان نتیجه، به دست می‌آید که «اندازه»ی یک SRW به طول n معمولاً برابر $\sqrt{n}$ است[2].

فیزیک‌دانان مسئله‌ی متناظر با این مسئله را برای SAW ها مطالعه کرده‌اند. فرض کنید Γ_n یک انتخاب تصادفی SAW با احتمال یکنواخت $c_n{}^{-۱}$ از میان همه‌ی SAWهای n-قدمی روی $\delta_n\mathbb{H}$ با شروع از مبدأ باشد. مجدداً فرض کنید n بزرگ و بزرگ‌تر می‌شود. در مقاله‌ای که SAWها معرفی شده‌اند، فلوری پیش‌بینی کرده‌است که اگر قرار دهیم $\delta_n = n^{\frac{-۳}{۴}}$، آن‌گاه اندازه‌ی شئ تصادفی Γ_n، و در نتیجه به طور معمول، اندازه‌ی یک SAW n-قدمی، ثابت باقی می‌ماند. مجدداً این نتیجه می‌دهد که با افزایش n، یک انتخاب یکنواخت SAW روی $\mathbb{H}$ معمولاً در فاصله‌ی $n^{\frac{۳}{۴}}$ از مبدأ تمام می‌شود. بنابراین، برای $n = ۱۰۰۰۰$، انتظار داریم فاصله‌ی نقاط پایانی، عددی نزدیک به ۱۰۰۰δ باشد. یک مثال از یک قدم‌زدن خودپرهیز ۱۰۰۰۰-قدمی روی مشبکه‌ی مربعی، در شکل ۶ نشان داده‌شده‌است.



شکل ۶. یک مثال از یک قدم‌زدن خودپرهیز ۱۰۰۰۰-قدمی روی یک مشبکه‌ی مربعی $\delta\mathbb{Z}^۲$. فاصله‌ی بین نقطه‌ی شروع و پایان تقریباً برابر ۲۷۳δ است.

[1] simple random walk

[2] اندازه‌ی یک قدم‌زنی می‌تواند به عنوان فاصله‌ی بین نقطه‌ی شروع و نقطه‌ی پایان قدم‌زنی تعریف شود.

با وجود آن که امروزه می‌دانیم استدلال اولیه‌ی فلوری اشتباه بوده است، به طرز ناباورانه‌ای، پیش‌بینی او درست به نظر می‌رسد. در حال حاضر، استدلال‌های متقاعدکننده‌ی بیش‌تری موجود است که پیشنهاد می‌دهد δ_n باید برابر $n^{\frac{-3}{4}}$ در نظر گرفته‌شود.

برای این انتخاب δ_n، متغیر تصادفی Γ_n باید به خمی پیوسته مانند Γ همگرا شود، که نقشی مشابه حرکت براونی برای SRWها ایفا کند. این خم تصادفی یک فراکتال تصادفی است به نام تحول شرام-لونر[1]. این شئ در سال‌های اخیر، در مطالعات مدل‌های دو بعدی فیزیک آماری «در شرایط بحرانی» ظاهر شده‌است. برای جزئیات بیش‌تر حول این موضوع پیشرفته، شما را به [۷] ارجاع می‌دهم.

نتیجتاً برای مقادیر بزرگ n، یک قدم‌زدن تصادفی ساده به طول n به طور متوسط روی نقطه‌ای به فاصله‌ی $\sqrt{n}$ از مبدأ پایان می‌یابد. در حالی که یک قدم‌زدن خودپرهیز به طول n به طور میانگین در فاصله‌ی $n^{\frac{-3}{4}}$ از مبدأ تمام می‌شود. ادعای اول با دقت ریاضی درک شده‌است، اما ادعای دوم به عنوان یکی از حدس‌های اصلی فیزیک آماری شناخته می‌شود، و بسیار رازآلود باقی مانده‌است. با وجود آن که، مباحث این بخش بی‌ربط به مباحث بخش‌های قبلی به نظر می‌رسد، در واقع کاملاً به هم مرتبط‌اند: یک راه ممکن برای اثبات پیش‌بینی فلوری این است که نشان دهیم مشاهده‌پذیر پارافرمونیک دوباره نرمال‌شده، زمانی که روی گراف $D_\delta := \delta\mathbb{H} \cap D$ تعریف شود، با میل‌کردن δ به سمت صفر، همگرا می‌شود.

نهایتاً خوانندگانی که به دنبال مطالب بیش‌تر راجع به قدم‌زدن خودپرهیز هستند را به [۸، ۱] ارجاع می‌دهیم.

مراجع

[1] R. Bauerschmidt, H. Duminil-Copin, J. Goodman, and G. Slade, *Lectures on self-avoiding walks*, Probability and statistical physics in two and more dimensions, Clay Mathematics Proceedings, vol. 15, American Mathematical Society, 2012, pp. 395–467.

[2] N. Clisby, *Calculation of the connective constant for self-avoiding walks via the pivot algorithm*, Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical **46** (2013), no. 24, 245001.

[3] N. Clisby and I. Jensen, *A new transfer-matrix algorithm for exact enumerations: self-avoiding polygons on the square lattice*, Journal of Physics. A. Mathematical and Theoretical **45** (2012), no. 11, 115202.

[4] H. Duminil-Copin and S. Smirnov, *The connective constant of the honeycomb lattice equals* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, Annals of Mathematics. Second Series **175** (2012), no. 3, 1653–1665.

[5] P. Flory, *Principles of polymer chemistry*, Cornell University Press, 1953.

[6] J. M. Hammersley, *Percolation processes: II. The connective constant*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society **53** (1957), 642–645.

[7] G. F. Lawler, O. Schramm, and W. Werner, *On the Scaling Limit of Planar Self-Avoiding Walk*, Fractal Geometry and Applications: a Jubilee of Benoît Mandelbrot, Part 2, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 72, American Mathematical Society, 2004, pp. 339–364.

[8] N. Madras and G. Slade, *The Self-Avoiding Walk*, Probability and its Applications, Birkhäuser, 1993.

[9] P. Mörters and Y. Peres, *Brownian Motion*, vol. 30, Cambridge University Press, 2010.

[10] B. Nienhuis, *Exact Critical Point and Critical Exponents of O(n) Models in Two Dimensions*, Physical Review Letters **49** (1982), no. 15, 1062–1065.

[11] W. J. C. Orr, S*tatistical treatment of polymer solutions at infinite dilution*, Transactions of the Faraday Society **43** (1947), 12–27.

[12] R. D. Schram, G. T. Barkema, and R. H. Bisseling, *Exact enumeration of self-avoiding walks*, Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment **2011** (2011), P06019.

مترجم: مهلا امیری† و کیمیا تیغ‌بند*

†دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی، دانشگاه **UBC**

*دانشجوی دکتری ریاضیات فیزیک برلین

[1] Schramm–Loewner Evolution