# مجله‌ی ریاضی شریف

سال سوم شماره‌ی هشتم

## مجله‌ی ریاضی شریف
### سال سوم شماره‌ی هشتم

صاحب امتیاز: انجمن علمی و فوق‌برنامه‌ی دانشکده‌ی علوم ریاضی؛ مدیر مسوول: دکتر امیر جعفری؛ شورای سردبیری: دکتر عرفان صلواتی، محمدمهدی کارخانه‌ای، مرتضی ثقفیان؛ همکاران این شماره: دکتر امیر جعفری، عباس محرابیان، دکتر عرفان صلواتی، سامان حبیبی اصفهانی، یاسمن بقایی، خشایار فیلُم، هورمزد زمانی، مصطفی عین‌اله‌زاده، محمدمهدی کارخانه‌ای، شراره شهرابی، ساینا غفرانی، احمدرضا حاج‌سعیدی صادق؛ هیات تحریریه: دکتر امیر جعفری، خشایار فیلُم، روزبه فرهودی، دکتر عرفان صلواتی، اوژن غنی‌زاده‌ی خوب، احمدرضا حاج‌سعیدی صادق، یاسمن بقایی، مهتاب کریمی، محمدامین شعبانی، محسن یاورتنو، حمید ملک؛ طراحی: اوژن غنی‌زاده‌ی خوب؛ طراحی سایت: محسن منصوریار؛ ویراستاری: خشایار فیلُم، مرتضی ثقفیان، مصطفی عین‌اله‌زاده، ابوالفضل طاهری، یاسمن بقایی، حمید ملک، محمدهادی مستفید، کوهیار حاجی‌سلیمی؛ با تشکر از: دکتر کسری علیشاهی، دکتر هادی فروغمند اعرابی، سامان جهانگیری، حسام‌الدین رجب‌زاده، امین‌السادات طالبی، سینا حسن‌زاده

## فهرست مطالب

# تصادفی بودن در موسیقی

دونالد کنوث
ترجمه: یاسمن بقایی[*]

الگوهای کاملاً نابی‌که دقت ریاضی دارند در نگاه زیباشناختی بسیار جذاب‌اند؛ همان‌طور که فیثاغورس، افلاطون و اجداد روشنفکرشان حامی این نظر بوده‌اند. با این حال کمی بی‌نظمی و غیرقابل‌پیش‌بینی بودن الگوها می‌تواند آنها را زیباتر کند. یادم می‌آید وقتی پیاده از خانه به دفترم می‌رفتم از کنار دو دیوار رد شدم، روی یکی از دیوارها که به تازگی ساخته شده بود از الگوی منظم مستطیل‌شکل یک شبکه‌ی توری مانند تقلید شده بود که از نظر من خیلی جذاب نبود. اما دیوار دیگر از سنگ‌های طبیعی ساخته شده بود که با دقت کنار یک‌دیگر قرار نگرفته بودند، ولی هم‌چنان یک موجود واحد را تداعی می‌کردند و به چشم من هارمونی جذاب‌تری داشت.

چند سال پیش وقتی طراحی فونت برای چاپ یک کتاب را انجام می‌دادم، متوجه اثرات مشابهی شدم. طراحی‌هایی که لزوماً از یک سازگاری سفت و سخت پیروی نمی‌کردند، به نظر زنده‌تر و چشم‌نوازتر می‌رسیدند. مثال‌های مشابه در حوزه‌ی موسیقی و دنیای تصاویر به وفور وجود دارد.

به طور مثال، ظاهراً کسانی که موسیقی الکترونیک تولید می‌کنند به این نتیجه رسیده‌اند ریتمی هیجان‌انگیزتر است که دقیقاً طبق ضرب "$1, 2, 3, 4$" نباشد بلکه به اندازه خیلی کم از ضرب خارج باشد؛ یعنی به جای اینکه دقیقاً روی ضرب ۱ آغاز شود از $1 + \delta$ شروع می‌کنند. به این‌ترتیب داریم:

$$1+\delta,\ 2+\delta,\ 3+\delta,\ 4+\delta$$

اگرچه $\delta$ به اندازه میلی‌ثانیه مثبت یا منفی در ضرب اختلاف ایجاد می‌کند، اما آهنگ‌ساز با استفاده از این $\delta$ به طور هوشمندانه و جذابی به قطعه روح و جنب و جوش می‌بخشد. شنونده وقتی این حالت را با ضرب یکنواختی که $\delta$ آن برابر صفر است مقایسه کند؛ تاثیرش را حس خواهد کرد.

خواننده‌ها و نوازنده‌های ساکسیفون نیز نت‌های ملودی را کامل و دقیق روی نت اجرا نمی‌کنند.

علاوه بر همه این‌ها می‌توانیم تا ذات خود نت‌ها فراتر برویم. در مقاله ای با عنوان "شانس در خلاقیت هنرمندانه" [۱] که در ۱۸۹۴ منتشر شد استریندبرگ [۲] به شرح یک تجربه می‌پردازد:

نوازنده‌ای را می‌شناختم که پیانو را اتفاقی و بدون هیچ ریتم و دلیلی به صدا درمی‌آورد. بعد از آن سونات پتتیک [۳] بتهوون را از حفظ نواخت. غیرقابل‌باور بود که چنین سونات قدیمی با این حس و حال نواخته می‌شود، همیشه این سونات را به یک شکل می‌شنیدیم و به خواب هم نمی‌دیدم که می‌تواند بهتر هم باشد!

ایده‌ی عیب و نقص عامدانه از یک اثر محدود به اجراهای متفاوت از یک قطعه نمی‌شود بلکه به نت‌هایی که آهنگ‌ساز انتخاب می‌کند هم مربوط است. هدف اصلی این مقاله است که روشی را توضیح بدهم که بتوان با ساخت یک ماشین ساده، از هر ملودی که به آن بدهید یک هارمونی اتفاقی تولید کند.

به بیان دقیق‌تر به ازای هر $n$ نت انتخاب شده می‌توان $2^n + 2^{n-1}$ هارمونی متفاوت داشت که همه‌ی آنها خوب و گوش‌نواز هستند.

[*] برگرفته از کتاب: Mircea Pitici, *The Best Writing on Mathematics 2013*, 2014, Princeton University Press, pp. 56-61

[۱] Chance in artistic creation

[۲] Strindberg

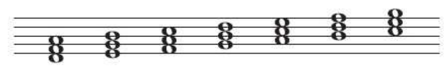
[۳] Sonate Pathétique

وقتی که نوازنده با یک دست پیانو یا کیبورد می‌نوازد؛ ماشین هرکدام از آن هارمونی‌ها را به راحتی تولید می‌کند و به تصادف یکی را انتخاب می‌کند.

روشی را که برایتان توضیح خواهم داد در سال ۱۹۶۹ وقتی به عنوان مستمع آزاد سر کلاس‌های هارمونی دیوید کراهنبویل(۱۹۹۷-۱۹۲۳) [۴] در کالج کر وست‌مینستر می‌رفتم یاد گرفتم. این روش بسیار ساده است و فقط لازم است در حد ابتدایی تئوری موسیقی بلد باشید و من فرض می‌کنم با مفاهیم ساده‌ی موسیقی آشنایی دارید.

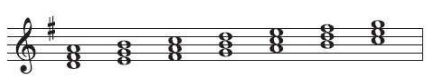
الگوریتم کراهنبویل از ملودی داده شده به ما هارمونی چهارقسمتی درست می‌کند که سه قسمت بالایی آن "آکورد تریاد" است و قسمت زیرین آن نت باس.

یک آکورد تریاد [۵]، آکوردی است که از سه نت به فاصله سوم از یکدیگر ساخته شده است. به عبارت دیگر بین هر دو نت به اندازه یک نت فاصله وجود دارد. شکل زیر آکوردهای تریاد مختلف را نشان می‌دهد.



و آکوردهای دیگری که با بالاتر یا پایین‌تر بردن هر یک از نت‌های تریاد به اندازه‌ی یک یا چند اکتاو به دست می‌آیند. پایین‌ترین نت یک آکورد تریاد، "پایه" [۶] آکورد نام دارد به دو نت دیگر به‌ترتیب «سوم» [۷] و «پنجم» [۸] گفته می‌شود زیرا در فاصله سوم و پنجم از پایه قرار دارند.

این مفاهیم در تمام سرکلیدها و تونالیته مشترک هستند. به طور مثال در سرکلیدی با تونالیته سل ماژور اگر سه نت به عقب برگردیم همان تریادها را در ر ماژور می‌بینیم.



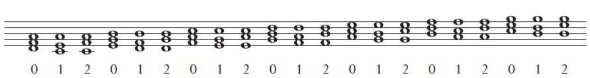
خیلی لازم نیست نگران ریزه‌کاری‌های موسیقی باشیم، چیزی که اینجا برایمان مهم است این است که ببینیم چه اتفاقی می‌افتد وقتی نت‌های تریاد هر کدام به تنهایی یک اکتاو کم و زیاد می‌شوند.

اگر این آکوردها به اندازه‌ی یک اکتاو جهش داشته باشند (انتقال داده شوند) می‌بینیم که آکورد فقط شکل جدیدی به خودش می‌گیرد و تغییری در اصل نت‌ها ایجاد نمی‌شود. مثلاً نت سل با پرش به یک اکتاو بالاتر یا پایین‌تر باز هم سل باقی مانده است فقط با صدایی زیرتر یا بم‌تر.

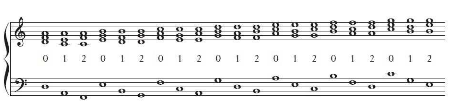
اگر نت پایه را به اندازه یک اکتاو بالا ببریم نت سوم بم‌ترین نت می‌شود، به این انتقال «وارونه یکم» [۹] می گوییم. اگر که پایه و نت سوم هر دو یک اکتاو به بالا منتقل شوند نت پنجم بم‌ترین نت خواهد بود و به این تریاد «وارونه دوم » [۱۰] می گوییم:


با وجود این که حتی اگر بین دو نت همسایه در وارونگی اول و دوم به اندازه‌ی دو نت فاصله رخ دهد باز هم آکورد حاصل یک تریاد است و هنوز هیچ دو نت همسایه‌ای در تریاد هم‌نام نیستند. تئوریسین‌های موسیقی در گذشته تمرکزخودشان را ابتدا روی پایه‌ی تریاد و سپس روی پایین‌ترین نت قرار می‌دادند که باعث تمیز دادن معکوس‌ها می‌شد.

نوآوری کراهنبویل این بود که به جای نت پایه روی نت بالایی که نت ملودی است تمرکز کنیم. او مشاهده کرد که نت ملودی، بالاترین نت آکوردهای تریاد است: در آکورد پایه (۰)، در معکوس اول (۱) و در معکوس دوم (۲).



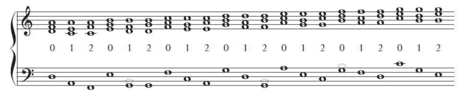

علاوه بر این او پیشنهاد داد راه طبیعی برای اضافه کردن قسمت چهارم به این هارمونی سه بخشی تکرار نت پایه یک اوکتاو یا دو اکتاو پایین‌تر است. به عنوان مثال در کلید دو داریم:



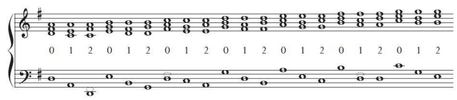

نت‌های ملودی آنها عبارتند از: لا،لا،لا،سی،سی،سی...سل،سل،سل. این قانون مانند قانون‌های خوب دیگر استثناهایی هم دارد. وقتی

[۴] David Kraehenbuehl
[۵] triadic
[۶] root
[۷] third
[۸] fifth
[۹] first inversion
[۱۰] second inversion

نت باس، نت محسوس باشد (یک نت قبل از نت تونیک) بهتر است آن را به نت نمایان که دو نت پایین‌تر از محسوس است تغییر دهیم. تصحیح کراهنبویل ۲۱ آکورد چهارقسمتی زیر را در کلید دو با نت محسوس سی حاصل می‌کند.




و این ۲۱ آکورد در کلید سل با نت محسوس فادیز $F^\sharp$ به شکل زیر خواهد بود.




توجه کنید که در این حالت، پس از انتقال نت باس به دو نت پایین‌تر از نت محسوس، آکورد از چهار نت غیر هم‌نام تشکیل شده و در نتیجه دیگر یک آکورد تریاد محسوب نمی‌شود.

حالا ما سه راه خوب برای هارمونیزه کردن هر ملودی با هر سرکلید و تونالیته‌ای بلدیم. کراهنبویل با این نکته روش خود را کامل می‌کند: برای هر ملودی با هر تعداد نت اصول مشابهی به کار گرفته می‌شود و با این شرط که یک آکورد وارون نباید دوبار پشت هم تکرار شود. اگر نتی با وارون اول هارمونیزه شده باشد، نت بعدی با پایه یا معکوس دوم هارمونیزه می‌شود و همین‌طور به‌ترتیب. با این روش سه انتخاب برای آکورد اول و دو انتخاب برای هر آکورد بعدی. ابتدا بیاییم این الگوریتم را برای یک ملودی که برایمان آشناست پیاده‌سازی کنیم.

"London bridge is falling down my fairy lady"

۱۱ نت دارد پس از این الگوریتم

$$۳ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ \times ۲ = ۳۰۷۲$$

راه برای هارمونیزه کردن داریم.

به منظور این که برای تولید اعداد تصادفی به خود ریاضیات تکیه کرده باشیم و نه پرتاب کردن سکه، از نمایش دودویی سه ثابت بنیادی معروف استفاده می‌کنیم:

$$\pi = ۳ + (۰٫۰۰۱۰۰۱۰۰۰۰۱۱۱۱۱۱۰۱۱۰۱۰۱۰۱۰۰۰۱...)_۲$$

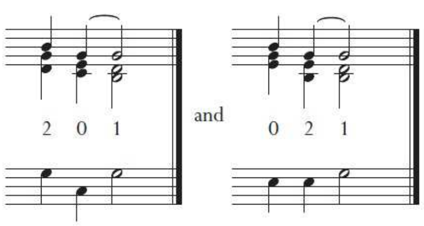
$$e = ۲ + (۰٫۱۰۱۱۰۱۱۱۱۱۱۰۰۰۰۱۰۱۰۱۰۰۰۱۰۱۱۰۰...)_۲$$

$$\phi = ۱ + (۰٫۱۰۰۱۱۱۱۰۰۰۱۱۰۱۱۱۰۱۱۱۱۰۰۱۱۰۱۱۱...)_۲$$

مثلاً می‌توانیم از قسمت صحیح این ثابت‌ها برای تعیین آکورد اول استفاده کنیم؛ با اضافه کردن و یا کم کردن یک واحد (به هنگ ۳) به صفر و یک‌های متوالی هر عدد، آکوردهای وارون متناسب در نظر بگیریم این روش به ما سه هارمونی جدید از تم کلاسیک انگلیسی مورد نظر را می‌دهد:


خیلی جالب است که الگوریتم کراهنبویل ساده‌تر از چیزی است که بخواهد درست به نظر بیاید؛ ولی واقعاً کار می‌کند!

البته در انتها یک گیر کوچک وجود دارد چرا که فقط یک انتخاب از سه آکورد برای پایان وجود دارد که حل‌پذیر و پایدار باشد. مشکلی نیست در چنین مواردی آخرین نت ملودی را تکرار می‌کنیم و آکورد وارون یکم را برای آن به کار می‌بریم تا احساس پایان یافتن آهنگ القا شود. با این تبصره هارمونی‌های به دست آمده از واریاسیون‌های اول و دوم به زیبایی تمام می‌شوند.




من بی‌صبرانه منتظر کسی هستم که چنین کیبوردی را که به طور خودکار این روش هارمونیزه کردن را انجام می‌دهد بسازد . به هر حال این مسأله به سادگی با برنامه‌نویسی قابل‌حل است.

# ماشین دستیار آموزش

شراره شهرابی

## ۱ مقدمه

خود را تصور کنید که می‌خواهید یک مبحث جدید را یاد بگیرید، مثلاً یک قضیه‌ی ریاضی. پس از خواندن صورت این قضیه، اگر به نسبت توانایی ذهنتان قضیه‌ای ساده باشد آن را فرا خواهید گرفت و قاعدتاً می‌توانید مسائلی را که شامل و یا مربوط به این قضیه هستند حل کنید. اما اگر این قضیه به نسبت دشوار باشد چطور؟

حتماً برایتان پیش آمده است که برای درست متوجه شدن یک قضیه‌ی ریاضی، آگاهانه و یا ناخودآگاه، مثالی طراحی کرده‌اید تا کاربرد قضیه را متوجه شوید، یا حتی برای این‌که صحت این قضیه را محک بزنید.

حال فردی را تصور کنید که می‌خواهد مباحثی را یاد بگیرد و توانایی حل مسائل آن‌ها را به دست آورد. این فرد همانند کامپیوتری است که قرار است برنامه‌ای به آن داده شود تا با دادن ورودی‌های مناسب خروجی مربوط را ارائه دهد. مرحله‌ی اول نوشتن کد، یا به طور معادل آموزش مبحث و فرایند حل مسأله به شخص است. سپس همان‌طور که برای کامپیوتر تعدادی ارزیاب برای پوشش دادن تمام حالت‌های ممکن داده می‌شد، در مورد این فرد نیز همین کار انجام می‌شود؛ تعدادی مثال که همه‌ی حالت‌های مختلف را پوشش می‌دهد به فرد داده می‌شود تا فرد با تمرین روی آنها بتواند توانایی‌های خود را در حل این مسائل بالا ببرد.

برای مثال، فرایند به دست آوردن ب.م.م دو عدد طبیعی را در نظر بگیرید. بعد از توضیح دادن فرایند و نحوه‌ی محاسبه‌ی ب.م.م، مثال‌هایی که همه‌ی حالت‌های ممکن را پوشش دهند به فرد داده می‌شوند، به طور مثال:

۱. محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد اول.

۲. محاسبه‌ی ب.م.م یک عدد اول و یک عدد مرکب.

۳. محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد مرکب.

۴. محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد که یکی از آنها برابر با یک است.

۵. محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد که با هم برابر هستند.

۶. محاسبه‌ی ب.م.م دو عدد که یکی مضربی از دیگری باشد.

اگر فرد بتواند از تک‌تک این زیرشاخه‌ها مثال‌ها را بدون مشکل حل کند، مشخص می‌شود که مبحث را به خوبی یاد گرفته است. اما اگر در یکی از شاخه‌ها جواب اشتباه بدهد، زیرشاخه‌های مربوطه مشخص می‌شود و بسته به این که کدام یک از زیرشاخه‌ها است، می‌توان ریشه‌ی این اشتباه را پیدا کرد و با تمرکز بر آن مشکل را ریشه‌کن کرد.

باید الگوریتم و فرایندی که معلم هنگام طراحی مثال‌ها انجام می‌دهد را بررسی کنیم تا بتوانیم آن را به صورت خودکار طراحی کنیم. معلم این فرایند را به ترتیب زیر انجام می‌دهد:

۱. قالب مسأله را طراحی می‌کند: بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $x$ و $y$ را پیدا کنید.

۲. مسأله‌ی بالا را برای مقادیر مختلف و از لحاظ ساختاری متفاوتی از $x$ و $y$ مطرح کنید.

۳. جواب را با جواب درست مقایسه کنید.

۴. تا وقتی که جواب درست دریافت نشده است مرحله ۲ و ۳ را برای $x$ و $y$ های مشابه تکرار کنید.

۵. به مرور مقادیر و ویژگی‌های ساختاری $x$ و $y$ را پیچیده کنید و مراحل ۲ تا ۴ را تکرار کنید.

حال به طور مثال در زمینه‌ی تعیین ب.م.م دو عدد، کافی است قالب مسأله را به ماشین بدهیم و برای $x$ و $y$ محدوده و درجه‌ی پیچیدگی تعیین کنیم. همچنین می‌توانیم جواب و راه‌حل درست را باز به صورت قالبی به ماشین بدهیم تا در صورتی که دانش‌آموز جواب اشتباه به ماشین داد، ماشین بتواند جواب درست و راه‌حل را به دانش‌آموز نشان دهد.

## ۲ ماهیت مسائل

در بخش قبل با یک مثال، کاربرد، اهمیت و توانایی استفاده از ماشین و فرایند اتوماتیک شده‌ی طراحی مثال را دیدیم. در این بخش یک گام به عقب بر می‌داریم و به مسائل با دیدگاهی کلی نگاه می‌کنیم. ابتدا مسائل را طبقه‌بندی می‌کنیم و سپس به توانایی‌ها و ضعف‌های این فرایند طراحیِ مثال ماشینی می‌پردازیم.

مسائل را می‌توان به طور عمده به دو دسته‌ی کلی تقسیم‌بندی کرد:

۱. مسائل روندی[۱]

۲. مسائل مفهومی[۲]

مسائل روندی مسائلی هستند که برای حل آنها یک روند مشخص وجود دارد؛ مثل عمل تقسیم. مسائل پیشرفته‌تری نیز در این مجموعه قرار می‌گیرند. برای مثال، مسائلی در علوم کامپیوتر که راه‌حل آن‌ها از یک روند خاص پیروی می‌کند، همانند الگوریتم‌های DFS و BFS در نظریه‌ی گراف.

در این موارد روند حل مسأله مشخص است. همانند مثال ب.م.م که پیش‌تر دیدیم، یک راه‌کار مشخص برای حل این قبیل مسائل وجود دارد که با دانستن آن‌ها می‌توان مسأله را حل کرد و تنها کافی است آن مراحل را پله‌به‌پله و به ترتیب طی کنیم تا به جواب برسیم.

مسائل مفهومی مسائلی هستند که برای حل آن‌ها یک روند مشخص وجود ندارد و اکثراً نیازمند خلاقیت می‌باشند. این خلاقیت ممکن است در شکل یک حدس علمی و یا تبدیل کردن مسأله به یک مسأله‌ی آشنا باشد. از جمله‌ی این مسائل می‌توان به مسائل اثباتی و یا مسائل ساختنی اشاره کرد (مثل بسیاری از مسائل نظریه‌ی اتوماتا).

حال که با این دسته‌بندی ماهیت مسائل آشنا شدیم، می‌توانیم کاربرد ماشین و فرآیند ماشینی شدن طراحی مثال و یادگیری به کمک این روش را دقیق‌تر و کامل‌تر بررسی کنیم. کاربرد کلی این فرایند ماشینی در سیستم یادگیری را می‌توان به سه موضع تقسیم بندی کرد:

۱. طراحی سؤال

۲. پیدا کردن جواب و راه‌حل

۳. ایجاد بازخورد

## ۳ کاربرد ماشین

### ۱.۳ طراحی سؤال

طراحی سؤال‌های متعدد از یک مبحث ثابت برای یک معلم، می‌تواند کاری بس خسته‌کننده و کسالت‌آور باشد، مخصوصاً اگر وی بخواهد این کار را هر سال انجام دهد. این است که با پیشرفت تکنولوژی و قدرت محاسبات ارزان قیمت کامپیوترهای امروزی، به نظر می‌رسد که واگذار کردن این فرایند تکراری به یک کامپیوتر، می‌تواند هزاران برابر سریع‌تر و آسان‌تر انجام شود. می‌توان این ماشین و فرایند را طوری طراحی کرد که توانایی طرح مسائل از سطح دشواری‌های متفاوت را هم داشته باشد.

این ماشین همواره می‌تواند سؤال‌های جدیدی تولید کند. می‌تواند در عرض چند لحظه به تعداد دل‌خواه از یک مسأله را طراحی کند. همچنین متفاوت بودن این مسأله‌ها باعث می‌شود امکان تقلب را از میان ببرد. برای مثال فرض کنید دانش‌آموز سؤالی را اشتباه حل می‌کند. ماشین بعد از تصحیح جواب آن را با جواب درست مسأله مقایسه کرده و در صورت اشتباه بودن آن، جواب و راه‌حل درست را به دانش‌آموز نشان می‌دهد و در صورت نیاز می‌تواند مثالی دیگر از همان مبحث و با همان سطح دشواری را به دانش‌آموز ارائه کند تا مطمئن شود که دانش‌آموز مبحث و مسأله مربوطه را کاملاً فرا گرفته است.

جا دارد که بر قدرت ماشین در طراحی سؤال‌هایی با سطح سختی متفاوت تأکید بیش‌تری کنیم. با وجود چنین قابلیتی، می‌توان یک مسیر یادگیری تعیین کرد، سپس با شروع از مسائل ساده و مرحله به مرحله سخت کردن آن‌ها و استفاده از قابلیت تصحیح جواب ماشین، اطمینان حاصل کرد که دانش‌آموز قبل از رفتن به مرحله‌ی بعدیِ این فرایند یادگیری، حتماً مرحله‌ی کنونی را به خوبی فرا گرفته است.

در صورتی که دانش‌آموز مسأله‌ای را درست حل کند، ماشین مسأله‌ی بعدی را کمی سخت‌تر یا کمی پیچیده‌تر می‌کند، و در

[۱] Procedural Problems
[۲] Conceptual Problems

صورتی که مسأله را اشتباه حل کند، پس از نمایش راه‌حل درست (با استفاده از قابلیت پیدا کردن جواب و راه‌حل) مثالی ساده‌تر را در اختیار دانش‌آموز قرار داده و به این طریق مسائل و مباحث پیچیده را به مسائل ساده‌تر و مباحث بنیادی‌تر تجزیه کرده و عامل جواب اشتباه دانش‌آموز را پیدا می‌کند و با طرح مسائلی که تمرکز بیش‌تری روی این مباحث دارند، مشکل دانش‌آموز را رفع کرده و از تسلط دانش‌آموز بر مباحث اطمینان حاصل می‌کند. پس حضور چنین ماشینی هم به نفع دانش‌آموزان است و هم باعث می‌شود معلم‌ها با فشار و انرژی کمتری به خواسته‌ی درونی خود به عنوان یک معلم برساند.

### ۱.۱.۳ مسائل روندی

همان‌طور که پیش‌تر دیدیم، مسائل روندی مسائلی هستند که برای حل آن‌ها یک روند مشخص وجود دارد، تعدادی پله که باید طی شوند تا به جواب رسید. پس غالباً دشواری و پیچیدگی این مسائل به تعداد این پله‌ها و ماهیت و پیچیدگی هر پله بستگی خواهد داشت. پس در مورد یک مبحث خاص، ساده‌ترین مسأله مثالی خواهد بود که کمترین تعداد پله و ساده‌ترین پله‌ها را داشته باشد. همچنین به تدریج با اضافه کردن پله‌ها و کم کم پیچیده کردن هر پله می‌توان به مسائل سخت‌تر و پیچیده‌تر رسید.

از این روش به کرات در صنعت‌های مختلف برای آموزش استفاده می‌شود؛ از جمله آموزش مباحث علمی، کار با نرم‌افزار و صنعت بازی‌های کامپیوتری. تحقیقات نشان داده‌اند که با به کارگیری چنین شیوه‌هایی، کاربر خیلی سریع‌تر می‌تواند کار با نرم‌افزار (حرفه‌ای یا تفریحی) را فرا گیرد.

برای نمونه می‌توان به پروژه‌ای که دانگ[۳] و همکارانش در راستای آموزش فتوشاپ، اشاره کرد [۳]. وی با طراحی تعدادی بازی کوچک، استفاده از ابزار فتوشاپ را به کاربر یاد می‌دهد. در این روش بازی‌ها از مراحل ساده با تعداد پله‌های کم شروع می‌شوند و در هر مرحله پیچیده‌تر می‌شوند تا از تسلط کاربر اطمینان حاصل شود. وی از این رویکرد که انسان هنگامی که روحیه‌ی خوب داشته باشد، کارایی مغزش بیش‌تر می‌شود و راحت‌تر تمرکز می‌کند استفاده کرده و آموزش نرم‌افزار نه چندان ساده فتوشاپ را در قالب محیط بازی‌های کامپیوتری درآورده تا با اضافه کردن عنصر تفریح به این تجربه، کاربر را به ادامه‌ی آموزش ترغیب کند.

### ۲.۱.۳ مسائل مفهومی

در مورد مسائل مفهومی کمی کار پیچیده‌تر می‌شود. همان‌طور که پیدا کردن یک قضیه جدید در یک علم محتاج تحقیق و جست‌وجو می‌باشد و به خصیصه و تاکتیک‌های مبحث مربوط می‌شود، گاهی حل مسائل مفهومی هم چنین هستند و به راحتی نمی‌توان راه‌کاری برای طراحی ماشینی ارائه داد که بتواند مسائل مفهومی را طراحی و پیاده‌سازی کند و بعضاً امکان‌پذیر بودن آن به خصیصه‌های آن مبحث بر می‌گردد.

اما در دو مورد می‌توان ساختاری برای طراحی ماشین ارائه کرد که بتواند مسائل متنوع را طراحی کند و همچنین برای اغلب مباحث می‌توان چنین مسائلی را طراحی و بررسی نمود [۴]:

۱. **تعمیم دادن یک مثال:** این مسائل، مواردی هستند که می‌توان از یک مسأله موجود، قالبی کلی طراحی کرد. فرض کنید مثالی از یک مبحث داریم. حال اگر بتوانیم قالب کلی چنین مسائلی را تولید کنیم، و تنها مجهول، متغیرهای مسأله باشند، می‌توان با چک کردن دامنه‌ی این متغیرها، سؤال‌هایی را طراحی کرد که در ذات شبیه سؤال حاضر باشند ولی در ظاهر متفاوت. تنها مسأله این است که دامنه متغیرها ممکن است بسیار بزرگ باشد، پس استفاده از این روش تعمیم مسأله، تنها زمانی امکان‌پذیر خواهد بود که پیدا کردن مقادیر مجاز برای متغیرها کار ساده‌ای باشد. به بیانی دیگر، باید مجاز بودن مقادیرمتغیرها به صورت خوش‌تعریف و به سادگی قابل بررسی باشد. تنها مشکلی که این حالت دارد این است که پیچیدگی راه‌حل دیگر قابل تضمین نخواهد بود. ممکن است یک مسأله برای یک سری مقادیر ساده باشد، ولی حل کردن آن برای دانش‌آموزان برای متغیرهای دیگر کار آسانی نباشد. در ادامه با مثالی این موضوع را بیش‌تر روشن خواهیم کرد.

۲. **استفاده از مهندسی معکوس:** از این روش می‌توان برای اثبات قضایا و یا مسائل اثباتی استفاده کرد. در این روش از حل یا اثبات یک مسأله شروع می‌کنیم و به عقب برمی‌گردیم، به بیانی دیگر، در دامنه جواب حرکت می‌کنیم تا به مسائل دیگری برسیم. حسن این روش این است که مشخصات راه‌حل مسأله‌ی تولید شده مشابه اثبات اولیه خواهد بود.

حال به بررسی چند مثال و کاربرد این دو روش طراحی مسأله در مباحث مختلف می‌پردازیم تا کمی بیش‌تر با این روش‌ها آشنا شویم.

مثال اول در مورد اتحادهای جبریست. در چنین مسائلی، بر

[۳] Dong

خلاف مسائل روندی که پیشتر دیدیم، معلم نمی‌تواند به دل‌خواه ضرایب و اعداد را تغییر دهد و مثال جدیدی تولید کند. به همین سبب تولید چنین مسائلی برای وی کمی پیچیده‌تر از مسائل روندی خواهد بود و به انرژی و وقت بیش‌تری نیاز خواهد داشت.

ماشینی که ما طراحی خواهیم کرد، یک مثال و یک فضای متغیرهای مجاز (که اغلب به شکل یک شرط می‌باشد) را می‌گیرد و یک مثالِ در ذات مشابه ولی در ظاهر متفاوت را تولید می‌کند. با استفاده از چنین روشی می‌توان به صحت مثال تولید شده‌ی جدید اطمینان داشت.

نحوه‌ی کار این ماشین به این شکل است که ابتدا یک مثال را می‌گیرد (مثلاً یک اتحاد جبری را)، سپس از روی این مثال یک قالب کلی طراحی می‌کند که شامل یک دامنه (شرط) برای متغیرها نیز هست. پس مثال داده شده یک حالت خاص از این قالب کلی خواهد بود. به عنوان مثال فرض کنید اتحاد زیر داده شده است [۶]:

$$\frac{\sin A}{1+\cos A}+\frac{1+\cos A}{\sin A}=2\csc A$$

از روی این مثال، ابتدا قالب کلی زیر طراحی می‌شود:

$$\frac{T_1(A)}{1\pm T_2(A)}+\frac{1\pm T_3(A)}{T_4(A)}=2T_5(A)$$

حال با گذاشتن شرط $T_i \in \{\cos,\sin,\tan,\cot,\sec,\csc\}$ روی متغیرها (که در این‌جا توابع مثلثاتی هستند)، می‌توان اتحادهای زیر را تولید کرد:

$$\frac{\cos A}{1-\sin A}+\frac{1-\sin A}{\cos A}=2\tan A$$
$$\frac{\cos A}{1+\sin A}+\frac{1+\sin A}{\cos A}=2\sec A$$
$$\frac{\cot A}{1+\csc A}+\frac{1+\csc A}{\cot A}=2\sec A$$
$$\frac{\tan A}{1+\sec A}+\frac{1+\sec A}{\tan A}=2\csc A$$
$$\frac{\sin A}{1-\cos A}+\frac{1-\cos A}{\sin A}=2\cot A$$

که هر کدام اتحادی به ظاهر جدید است. برای آزمودن برقراری هرکدام از این اتحادها از ورودی‌های تصادفی استفاده می‌کنیم.

به عنوان مثالی دیگر اتحاد زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{vmatrix}(x+y)^2 & zx & zy\\ zx & (y+z)^2 & xy\\ yz & xy & (z+x)^2\end{vmatrix}=2xyz(x+y+z)^3$$

حال تعمیم زیر از این مثال را در نظر بگیرید:

$$\begin{vmatrix}F_0(x,y,z) & F_1(x,y,z) & F_2(x,y,z)\\ F_3(x,y,z) & F_4(x,y,z) & F_5(x,y,z)\\ F_6(x,y,z) & F_7(x,y,z) & F_8(x,y,z)\end{vmatrix}=cF_9(x,y,z)$$

با این شرط که $F_i$ ها برای $i=0,1,\dots,8$ چندجمله‌ای‌هایی همگن و از درجه‌ی ۲ از $(x,y,z)$ باشند و $F_9$ چندجمله‌ای همگنی از درجه‌ی ۶ باشد و به ازای هر $i \geq 4$ ، $F_i = F_j[x\to y; y\to z; z\to x]$ و $c\in\{\pm1,\pm2,\dots,\pm10\}$ . در این صورت با این تعمیم و شرط برای ۹ تابع $F_i$ می‌توان مثال‌های زیر را تولید کرد:

$$\begin{vmatrix}y^2 & x^2 & (y+x)^2\\ (z+y)^2 & z^2 & y^2\\ z^2 & (x+z)^2 & x^2\end{vmatrix}=2(xy+yz+zx)^3$$

$$\begin{vmatrix}-xy & yz+y^2 & yz+y^2\\ zx+z^2 & -yz & zx+z^2\\ xy+x^2 & xy+x^2 & -zx\end{vmatrix}=xyz(x+y+z)^3$$

$$\begin{vmatrix}yz+y^2 & xy & xy\\ yz & zx+z^2 & yz\\ zx & zx & xy+x^2\end{vmatrix}=4x^2y^2z^2$$

همان‌طور که در این مثال می‌بینید، حل کردن مسائل بدست آمده ممکن است به آسانی مسأله‌ی اولیه نباشد و تنها با بهره‌وری از تکنولوژی به دست آوردن جواب می‌توان از سطح دشواری مثال‌های ساخته شده اطمینان حاصل کرد.

در دو مثال فوق شیوه‌ی کار به این شکل بود که مثال در دست را ابتدا تعمیم داده، سپس شرطی برای مقادیر متغیرها پیدا می‌کردیم تا مثال‌های متنوعی تولید شود. دقت کنید که نحوه‌ی کار ماشین به این شکل است که ابتدا متغیرها را برداشته و غالب کلی را می‌سازد و سپس شرط متغیرها را تعیین می‌کند. می‌توان این شرط را توسط خود معلم تعریف کرد یا از قدرت بالای ماشین برای محاسبه استفاده کرد. ماشین می‌تواند مقادیر تصادفی مختلفی را در قالب کلی به دست آمده جای‌گذاری کند تا بتواند مقادیر درست را پیدا کند.

روش پیدا کردن شرط مسأله با استفاده از مقادیر تصادفی است که این کار را امکان‌پذیر می‌کند و آزمودن تمامی مقادیر فضا مسلماً بسیار زمان‌بر و پرهزینه خواهد بود. دلیل اینکه چرا می‌توان از لحاظ احتمالی به چنین چک کردن تصادفی اعتماد کرد، در قضیه زیر مشاهده میشود:

**قضیه ۱. آزمون احتمالاتی توابع تحلیلی** *فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع غیر یکسان تحلیلی با مقادیر حقیقی روی $\mathbb{R}^n$ باشند. فرض کنید $Y\in\mathbb{R}^n$ به صورت تصادفی با توزیع یکنواخت انتخاب شده باشد. در این صورت با احتمال بالایی، $f(Y)\neq g(Y)$ .*

دقت کنید که صحت قضیه‌ی فوق از تحلیلی بودن توابع $f$ و $g$ نتیجه می‌شود، چرا که وقتی $f$ و $g$ تحلیلی باشند، $f-g$ نیز تحلیلی خواهد بود، همچنین طبق فرض، تابع $f-g$ متّحد با صفر نیست.

همچنین طبق قضیه‌ای از آنالیز توابع تحلیلی، می‌دانیم که ریشه‌های یک تابع تحلیلی ناصفر، به صورت ایزوله هستند، یعنی حول هر ریشه‌ی این تابع، می‌توان یک همسایگی باز پیدا کرد که مقدار تابع در این همسایگی ناصفر باشد. پس با استفاده از این قضیه برای تابع ناصفر $f-g$ ، می‌توان نتیجه گرفت که تعداد ریشه‌های این تابع در مقایسه با نقاطی که مقدار این تابع در آن نقاط ناصفر باشد ناچیز بوده و قضیه فوق نتیجه می‌شود.

پس، از این روش می‌توان برای پیدا کردن شرط‌های اتحادهایی که از توابع تحلیلی استفاده می‌کنند، بهره برد. شایان ذکر است که اکثر توابع مقدماتی ریاضی که دانش‌آموزان با آنها سروکار دارند (مانند توابع مثلثاتی، انتگرال، مشتق، لگاریتم، تابع نمائی و غیره) توابعی تحلیلی هستند.

## ۲.۳ پیدا کردن جواب و راه‌حل

حال در این بخش کاربرد ماشین را به مرحله‌ای فراتر برده و با معرفی کارایی ماشین در زمینه‌ی پیدا کردن جواب و راه حل به کامل بودن ماشین می‌افزاییم. این کاربرد از چند لحاظ برای معلم‌ها مورد اهمیت است. کاربرد اول این است که برای هر یک از مسائل می‌توان یک راه‌حل نمونه تولید کرد تا دانش‌آموزان با آن آشنا شوند. کاربرد دیگر و به نسبت هیجان‌انگیز پیدا کردن راه‌حل توسط ماشین، در مواقعیست که دانش‌آموز راه‌حلی را پیش گرفته است ولی نتوانسته آن را کامل کند. حال دو راه وجود دارد:

۱. راه‌حل درست مسأله که ممکن است راه‌حلی کاملاً متفاوت باشد را به دانش‌آموز نشان دهیم. در این صورت دانش‌آموز با راه‌حل درست آشنا می‌شود، ولی کماکان جواب سؤالش که چرا راهش به نتیجه نرسیده است را نمی‌گیرد.

۲. ماشین راه‌حل دانش‌آموز را ادامه دهد تا به جواب درست مسأله برسد و سپس راه‌حل کامل را (که تا قسمتی از آن را خود دانش‌آموز پیش رفته بود) به دانش‌آموز نشان دهد تا وی راه‌حل کامل را ببیند و بفهمد که چگونه می‌توانسته راه‌حل خود را به اتمام برساند.

با استفاده از روش دوم، دانش‌آموز هم با راه‌حل درست مسأله آشنا می‌شود، و هم به نوعی اعتماد به نفس به دست می‌آورد که راهی که پیش گرفته بود راه درستی بوده و با کمی تلاش بیش‌تر می‌توانسته خودش به جواب مسأله دست پیدا کند.

در این میان راه سومی هم برای استفاده از ماشین وجود دارد که شبیه راه‌حل دوم است، ولی بهتر. فرض کنید دانش‌آموز سعی می‌کند مثالی را حل کند ولی در این بین ناکام می‌ماند و بعد از ۴ گام دست از ادامه می‌کشد و می‌خواهد جواب مسأله را ببیند. حال ماشین راه دانش‌آموز را ادامه می‌دهد و متوجه می‌شود که با برداشتن ۶ گام دیگر به جواب می‌رسد. ماشین می‌تواند به جای اینکه راه کامل شده‌ی دانش‌آموز را به وی نمایش دهد، یک راهنمایی برای قدم ۵اُم به او بدهد، در صورتی که دانش‌آموز توانست این مرحله را خود طی کند که چه بهتر، اگه نه ماشین صورت کامل قدم ۵اُم را به دانش‌آموز نشان می‌دهد و دوباره به دانش‌آموز این شانس را می‌دهد که ۵ گام باقی مانده را خود طی کند و این کار آن‌قدر ادامه پیدا کند که راه‌حل مسأله کامل شود و جواب صحیح مسأله به دست آید.

با استفاده از چنین روشی، هم دانش‌آموز متوجه اشتباهش می‌شود، هم در چالشی که یک‌بار شکست خورده بود شانس دوباره پیدا می‌کند و هم در نهایت به راه‌حل درست و کامل مسأله می‌رسد. با این روش، راه‌حل مسأله که به صورت پله‌به‌پله، خود دانش‌آموز به آن رسیده، به صورت محکم‌تر و بهتری در ذهن او حکاکی می‌شود و نه تنها خودش توانسته این مثال را حل کند، بلکه یاد گرفته است که در چنین مواردی چگونه یک راه ناتمام را باید به اتمام برساند.

حال همانند بخش قبل، نگاه خود را به دو دسته‌ی مسائل روندی و مسائل مفهومی محدود می‌کنیم تا با میزان و نحوه‌ی کاربرد ماشین در هر یک از این دسته‌ها بیش‌تر آشنا شویم و مثال‌هایی از هر کدام مشاهده کنیم.

### ۱.۲.۳ مسائل روندی

پیدا کردن راه‌حل و جواب برای مسائل روندی همانند بخش قبل، از روی یک مثال انجام می‌شود. کافی است یک راه‌حل نمونه به ماشین داده شود تا ماشین بتواند همانند آن را برای مثال‌های مشابه اجرا کند.

پس برای اینکه به ماشین قابلیت به دست آوردن جواب و راه‌حل مناسب مراحل روندی را بدهیم، کافی است پله‌های حل مسأله را به ترتیب برای ماشین تعریف کنیم.

واضح‌ترین راه این است که مسأله‌ای با پارامترهای مشخص به ماشین بدهیم و سپس راه‌حل پله‌ای مورد نظر را در ماشین برنامه‌ریزی کنیم. از آن پس وقتی مسأله مشابه‌ای به ماشین داده شود، ماشین با جای‌گذاری مقادیر متغیرها و پیاده‌سازی پله‌هایی که پیشتر برایش تعریف کرده بودیم، می‌تواند جواب و راه‌حل مورد نظر را برای مقادیر متغیرهای مثال حاضر، محاسبه کند. مشکلی که این راه دارد این است که هر معلمی ممکن است توانایی تعریف پله‌به‌پله‌ی راه‌حل را برای ماشین نداشته باشد، در این صورت برنامه‌ریزی راه‌حل این

مسائل برای این معلم کار سختی خواهد بود.

این مشکل را می‌توان به راحتی با استفاده از قابلیت ماشین حل کرد. ماشین این قابلیت را دارد که از روی یک راه‌حل نمونه، خودش این فرایند پله‌ای حل مسأله را برای خود تعریف کرده تا در جای مناسب از آن استفاده کند. این قابلیت ماشین این امکان را فراهم می‌کند که معلم‌هایی که دانش برنامه‌نویسی ندارند، بتوانند راه‌حل‌های دلخواه خودشان را برای ماشین تعریف کنند.

تکنولوژی نام برده شده در فوق که ماشین می‌تواند با استفاده از آن، از روی یک راه‌حل نمونه، خودش راه‌حل کلی را پیدا کند و در جای مناسب از آن استفاده کند، PBE[۴] نام دارد. تکنولوژی PBE ابتدا در زمینه‌ی کارهای اداری کاربرد داشت. برای مثال وقتی قرار بود کارمندی یک کار ثابت را بر روی یک فایل اکسل چندین بار انجام بدهد، تکنولوژی PBE با یک بار مشاهده‌ی انجام شدن چنین فرایندی توسط کاربر، چگونگی انجام آن فرایند را در شرایط مشابه یاد می‌گرفت و قادر بود بارها و بارها همان فرایند را روی فایل‌های متفاوت انجام بدهد. حل یک مسأله روندی ریاضی را تصور کنید. می‌توان راه‌حل پله‌به‌پله‌ی این مسأله را در یک فایل اکسل پیاده‌سازی کرد:

- مقادیر متغیرها را در یک سری خانه‌ی مشخص قرار می‌دهیم.
- با انجام عملیات مشخص روی آن خانه‌ها جواب را در خانه‌ای دیگر ثبت می‌کنیم.

پس می‌توان از تکنولوژی PBE برای پیدا کردن راه‌حل کلیه مسائل روندی توسط یک راه‌حل نمونه، استفاده کرد. این تکنولوژی سبب می‌شود که این کاربرد ماشین، برای قشر بیش‌تری از معلم‌ها قابل استفاده باشد.

### ۲.۲.۳ مسائل مفهومی

همان‌طور که در بخش قبل هم مشاهده کردیم، کار ماشین در برخورد با مسائل مفهومی کمی پیچیده‌تر از مسائل روندی است. اما همان‌طور که طراحی مسائل مفهومی برای معلم‌ها سخت‌تر از طراحی مسائل روندی است، می‌توان انتظار داشت که انجام چنین کاری برای ماشین با هزینه‌ی بیش‌تری همراه باشد، که این هزینه هم می‌تواند زمان لازم برای محاسبه و هم پیچیدگی بیش‌تر محاسبات باشد.

پیدا کردن جواب و راه‌حل مسائل مفهومی، اغلب مستلزم جست‌وجو در فضای راه‌حل‌های موجود می‌باشد. خود را تصور کنید که می‌خواهید یک مسأله مفهومی را حل کنید. اگر مشابه این مسأله را قبلاً ندیده باشید، نحوه‌ی عملکرد مغز شما این‌طور است که در میان راه‌حل‌هایی که در ذهن خود دارید جست‌وجو می‌کنید تا راه‌حلی که مناسب مسأله است را پیدا کنید، درست همانند عملکرد ماشین.

حال همان‌طور که در بخش قبل دو مورد کلی برای تولید سؤال را در زمینه‌ی مسائل مفهومی ارائه دادیم، در اینجا هم دو قاعده‌ی کلی را ارائه می‌دهیم که در مباحث مختلف، قاعده‌ی پیاده‌سازی هستند: [۴]

۱. **بررسی مسأله برای اعداد خاص:** یک راه‌کار حل مسائل اثباتی برای انسان‌ها هم همین است. وقتی با مثالی جدید مواجه می‌شوند که باید در حالت کلی آن را حل یا ثابت کنند، ابتدا چند مثال از این مسأله را برای حالت‌های خاص بررسی می‌کنند تا ایده‌ای برای حل آن در حالت کلی پیدا کنند. کار ماشین در این حالت هم مشابه انسان است. ابتدا به دنبال جواب در موردهای خاص می‌گردد. این روش هم می‌تواند کار ماشین را راحت‌تر کند، هم می‌تواند زمان لازم و محدوده‌ی لازم برای جست‌وجو را به مراتب کاهش دهد.

۲. **روش تقسیم و حل:** همان‌طور که ناپلئون در جنگ‌های خود از این روش استفاده می‌کرد، و انسان‌ها هم در بسیاری از موارد، مسأله را به مسائل کوچک‌تر و قابل حل شدن می‌شکنند، ماشین هم تقریباً به همین طریق عمل می‌کند، با این تفاوت که ماشین از مسائل قابل حلی که دارد شروع می‌کند و با اضافه کردن قسمت‌های منطقی و کوچک، فضای مسائل حل شدنی‌اش را بزرگ‌تر می‌کند تا به حل مسأله‌ی حاضر برسد.

حال به مثال‌هایی از این دو مورد در مباحث مختلف می‌پردازیم تا چگونگی کارکرد ماشین بیش‌تر مشخص شود:

### ۳.۲.۳ ترسیم‌های هندسی

یک ترسیم هندسی روشی است برای ساخت یک شکل هندسی که با استفاده از اجرای یک سلسله مراحل و با کمک پرگار و خط‌کش صورت می‌گیرد. این نوع مسائل بخش مهمی از آموزش مقطع دبیرستان هستند. جامعه‌ی آکادمیک اثبات خودکار قضایای هندسی که یکی از موفق‌ترین جریان‌های حوزه‌ی استدلال خودکار است، ابزارهایی ساخته و تولید کرده است که به دانش‌آموزان اجازه می‌دهد

[۴] Programming by Example

انواع ترسیم‌های هندسی را تولید کرده و با استفاده از ابزارهای اثبات‌کننده‌ی تعاملی، صحت خواص مختلف ترسیم خود را چک کنند. در ادامه به این که در وهله‌ی اول چگونه می‌توان چنین ترسیم‌هایی را هم‌گذاری[۵] و به طور خودکار تولید کرد می‌پردازیم.

هر ترسیم هندسی را می‌توان به صورت یک برنامه‌ی سر راست در نظر گرفت که در چارچوب عمل‌گرهای مجاز خط‌کش و پرگار، اشیای هندسی مانند نقطه، خط و دایره را دست‌خوش تغییرات هندسی می‌کنند؛ بنابراین، می‌توان به ترکیب و هم‌گذاری این عمل‌گرها به صورت یک مسأله‌ی برنامه‌سازی با هم‌گذاری[۶] نگاه کرد که هدف در آن، هم‌گذاری برنامه‌ای است که رابطه‌ی بین ورودی و خروجی را بر اساس مشخصه‌های از پیش تعیین شده تشخیص می‌دهد.

مفاهیم حاکم بر ترسیم‌های هندسی پیچیده‌تر از آنی هستند که بتوان از نمادهای صرف برای ارائه‌ی آن‌ها و استفاده در فرایند هم‌گذاری و حتی تایید جواب استفاده کرد. در مقابل، توجه می‌کنیم که عمل‌گرهای خط‌کش و نقاله در واقع تابع‌های تحلیلی بوده و در نتیجه می‌توان برای تائید و چک کردن آن‌ها از نمونه‌های تصادفی استفاده کنیم. این ادعا، از گسترش قضیه‌ی ۱ در مورد آزمون تحلیلی توابع احتمالی که پیش‌تر به آن اشاره شد نتیجه می‌شود.

قضیه‌ی ۱ از این حقیقت منتج می‌شود که تابع‌های تحلیلی ناصفر، دارای صفرهای منزوی[۷] هستند؛ به این معنی که برای هر جواب صفر تابع، یک همسایگی ناصفر موجود است. بنابراین در مورد تابع تحلیلی $f(x) - g(x)$ می‌توان گفت تعداد نقاط ناصفر بیش‌تر از تعداد صفرهای تابع است.

در نتیجه مسأله‌ی هم‌گذاری تابع‌های ترسیم هندسی که در آن‌ها ورودی و خروجی در یک رابطه‌ی نمادین صدق می‌کنند، به سازگاری این رابطه برای تعداد محدودی نمونه‌ی تصادفی تحلیل پیدا می‌کند. این امر پایه‌ی الگوریتم ما برای هم‌گذاری ترسیم‌های هندسی را تشکیل می‌دهد که شامل دو گام اساسی متناظر با دو قاعده‌ای که پیش‌تر اشاره شد استوار است:

۱. تولید ورودی/خروجی‌های تصادفی مبتنی بر ترجمه‌ی صورت مسأله به گزاره‌های منطقی. (استخراج گزاره‌ی منطقی از روی توصیف مسأله می‌تواند با ابزارهای پردازش زبان طبیعی[۸] صورت گیرد.)

۲. استفاده از جستجوی غیرهوشمندانه [۹] برای یافتن تابعی معادل یک ترسیم هندسی که ورودی‌های تصادفی را به خروجی‌های متناظرشان تبدیل می‌کند؛ به منظور کوچک‌تر کردن فضای جست‌وجو، سطح واحد عمل‌گرهای هندسی را پیچیده‌تر در نظر گرفته و عملیاتی مانند عمود کردن و یا پیدا کردن تقاطع دو خط را نیز به عمل‌گرهای مجاز با خط‌کش و پرگار اضافه می‌کنیم. این امر علاوه بر تسریع الگوریتم جست‌وجو، برای دانش‌آموز نیز محتوای خواناتر و قابل‌فهم‌تری تولید می‌کند. این کار در آزمایش‌های عملی موجب کاهش تعداد گام‌های هر ترسیم از ۳ تا ۴۵ گام به ۲ تا ۱۳ گام شده و نرخ موفقیت را نیز از ۷۵٪ به ۱۰۰٪ افزایش داد.

### ۴.۲.۳ اثبات‌های استنتاج طبیعی

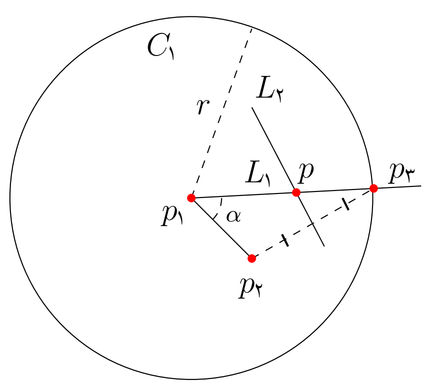
استنتاج طبیعی که در منطق مقدماتی تدریس می‌شود، روشی در منطق گزاره‌ای است برای ایجاد اعتبار در استدلال‌ها، طوری که نتیجه‌ی یک استدلال از فرض‌های قبلی و در یک سری مرحله‌ی گسسته به دست می‌آید. هر مرحله منتج به یک گزاره می‌شود که خود یا یکی از فرایض بوده و یا نتیجه‌ای از گزاره‌ای پیشین است که با اعمال قوانین استنتاجی یا جابه‌جایی به دست آمده و در نهایت نتیجه استدلال را خواهیم داشت. دیتمارش [۲] مطالعاتش را در زمینه‌ی دستیارهای اثبات برای آموزش استنتاج طبیعی (مانند Pandora [۵] ) ارائه می‌دهد، که برخی قادر به حل مسائل نیز هستند. اکنون روشی متفاوت و مقیاس‌پذیر برای حل چنین مسائلی ارائه می‌دهیم که خود راه را برای طرح مسأله هموار می‌کند.

رویکرد صورت‌گرفته شامل دو منظر است که نمایان‌گر دو قاعده‌ی کلی است که در بالا به آن‌ها اشاره شده:

۱. یک گزاره را با کمک جدول درستی‌اش به صورت تجریدی[۱۰] استخراج می‌کنیم. می‌توان از نمایش ۳۲ بیتی برای سادگی و جلوگیری از به کارگیری بیش از حد لزوم قواعد استنتاجی استفاده کرد. این قسمت در واقع به کارگیری قاعده‌ی اول، یعنی بررسی مسأله برای اعداد خاص است.

۲. جست‌وجو برای روند اثبات را به چند بخش کوچک‌تر و همچنین کاراتر تقسیم می‌کنیم که این خود به وضوح به

[۵] synthesize
[۶] program synthesis
[۷] isolated zeros
[۸] natural language processing
[۹] brute-force search
[۱۰] abstract

| | |
|---|---|
| صورت مسأله | مثلثی رسم کنید که قاعده‌ی آن $L$ (با دو رأس $p_۱$ و $p_۲$)، یکی از زوایای قاعده $a$ و جمع دو ضلع دیگر آن $r$ باشد. |
| پیش‌شرط | $r > \mathrm{Length}(p_۱, p_۲)$ |
| پس‌شرط | $\mathrm{Angle}(p, p_۱, p_۲) = a$<br>$\mathrm{Length}(p, p_۱) + \mathrm{Length}(p, p_۲) = r$ |
| مثال تصادفی | $L = \mathrm{Line}(p_۱ = [۸۱٫۶۲, ۹۹٫۶۲], p_۲ = [۹۹٫۶۲, ۸۳٫۶۲])$<br>$a = ۴۶٫۴۱^\circ \quad p = [۱۳۱٫۷۲, ۱۰۳٫۵۹] \quad r = ۸۸٫۰۷$ |
| الگوریتم هندسی | ConstructTriangle($p_۱, p_۲, L, r, a$)<br>$L_۱$ := ConstructLineGivenAngleLinePoint($L, a, p_۱$);<br>$C_۱$ := ConstructCircleGivenPointLength($p_۱, r$);<br>($p_۳, p_۴$) := LineCircleIntersection($L_۱, C_۱$);<br>$L_۲$ := PerpendicularBisector2Points($p_۲, p_۳$);<br>$p$ := LineLineIntersection($L_۱, L_۲$);<br>**return** $p$; |
| ترسیم هندسی |  |

کارگیری قاعده‌ی دوم است.

## ۳.۳ ایجاد بازخورد

ایجاد بازخورد می‌تواند شامل چندین منظر باشد: تشخیص این‌که راه‌حل دانش‌آموز صحیح است یا خیر، چرا اشتباه است، و چگونه قابل تصحیح خواهد بود. همچنین ممکن است معلم بخواهد یک راهنمایی به دانش‌آموز کند تا وی ایراد راه‌حل خود را تشخیص دهد و یا خود آن را اصلاح کند. در مواردی که ماشین برای آزمون تنظیم می‌شود، حتی ممکن است معلم خواهان استفاده از سیستم نمره‌دهی باشد.

### ۱.۳.۳ مسائل روندی

ایجاد بازخورد برای مسائل روندی نسبت به مسائل مفهومی، از آن‌جایی که تقریباً یک راه‌حل یکتا دارند، ساده است؛ می‌توان راه‌حل دانش‌آموز را به آسانی و پله‌به‌پله با راه‌حل اصلی مقایسه کرد. در حالی که اشتباه‌های دانش‌آموز احتمالاً شامل بی‌دقتی و خطا در به یاد آوردن اصول است، یک کلاس متداول از خطاهای دانش‌آموزان در مسائل روندی، به کارگیری الگوریتم اشتباه است. وَن لِن ۱۰۰ خطا را که دانش‌آموزان تنها در حل مثال‌های تفریق دچارشان می‌شوند، تشخیص داده است [۸]. در زیر نیز چند نمونه از خطاهای محتمل که اَشلاک در مورد روند جمع معرفی کرده، می‌آوریم:

- فرد هر ستون را جمع زند و حاصل آن را زیر ستون بنویسد، حتی اگر دو رقمی باشد.
- فرد هر ستون را از چپ به راست جمع زند. اگر جمع بیشتر از ۹ باشد، دهگان را زیر ستون بنویسد و یکان را بالای ستون راستی‌اش [۱].

مشاهده می‌کنیم که تمام چنین اشتباهاتی یک ساختار روندی دارند و خود می‌توانند در چنین قالبی در نظر گرفته شوند. این روندهای خطادار را می‌توان با کمک تکنولوژی PBE که پیش‌تر به آن اشاره شد، با استفاده از نمونه‌هایی از راه‌حل‌های اشتباه دانش‌آموزان هم‌گذاری کرد.

تشخیص چنین خطاهایی در روند حل دانش‌آموزان مزایایی را به دنبال خواهد داشت. معلم را از تصورهای غلط دانش‌آموز آگاه می‌کند. همچنین همان‌طور که در بخش طراحی سؤال به آن اشاره شد، خود می‌تواند در طراحی سلسله‌ای از مسائل، با تأکید بر تفاوت‌های بین راه‌حل‌های صحیح و خطادار مفید واقع شود.

### ۲.۳.۳ مسائل مفهومی

بازخورد مسائل اثباتی می‌تواند با چک کردن هر مرحله، با این فرض که دانش‌آموز روش کلی صحیح را برگزیده، صورت گیرد و با استفاده از تکنولوژی پیدا کردن راه‌حل از جایی که پله‌ای اشتباه طی شده باشد، بقیه‌ی راه‌حل تکمیل شود. در این بخش تمرکز را روی ایجاد بازخورد برای مسائلی ساختی گذاشته‌ایم. دو قاعده‌ی کلی را به صورت زیر معرفی می‌کنیم:

۱. **میزان تدوین:** ایده‌ی این قاعده، ایجاد کم‌ترین تغییر در راه‌حل دانش‌آموز در راستای تصحیح آن است. چنین بازخوردی دانش‌آموز را آگاه می‌کند که کجای کار دچار خطا شده و چگونه می‌تواند آن را رفع کند. یک حقه‌ی جالب می‌تواند پیدا کردن کم‌ترین تغییر در صورت مسأله باشد که در صورت اعمال راه‌حل دانش‌آموز صحیح خواهد بود. این روش به درک اشتباهی متدوال، که عدم درک صحیح صورت سؤال است، کمک می‌کند. چنین بازخوردی دانش‌آموز را از چرایی نادرست بودن راه‌حل‌اش آگاه می‌کند. تعداد و نوع تدوین‌های لازم برای پاسخ دانش‌آموز می‌تواند به عنوان معیاری برای نمره‌دهی استفاده شود.

۲. **مثال نقض:** ایده‌ی این قاعده، پیدا کردن مثال‌هایی به عنوان ورودی است که راه‌حل دانش‌آموز با داشتن آن‌ها درست عمل نکند. این نوع بازخورد نیز دانش‌آموز را از چرایی نادرست بودن راه‌حلش آگاه می‌کند. فراوانی چنین مثال‌هایی می‌تواند معیار مناسبی برای ارزیابی راه‌حل باشد.

حال به مثال‌هایی از این دو مورد در مباحث مختلف می‌پردازیم:

### ۳.۳.۳ تمرین‌های برنامه‌نویسی مقدماتی

مسأله‌ی محاسبه‌ی مشتق یک چندجمله‌ای را در نظر بگیرید، که ضرایب آن به صورت لیستی از اعداد صحیح داده شده‌اند. این مسأله برقراری شرط‌ها و حلقه‌ها را روی یک لیست آموزش می‌دهد. دانش‌آموزان برای حل آن با دستورات ساده‌ی پایتون از جمله نمایه‌سازی لیست و ایجاد کران برای حلقه‌ها سر و کار دارند. همچنین نکات مفهومی مانند تشخیص موقعیتی که در آن لیستی که صرفاً شامل عضو است نگه ندارند نیز در حل چنین مسأله‌ای حائز اهمیت است. معلم با بهره‌بری از خطاهای متداولی که در چنین مسائلی صورت می‌گیرد، یک مدل میزان تدوین تعریف می‌کند که شامل مجموعه‌ای از قوانین وزن‌دار بازنویسی است. با استفاده از این قوانین می‌توان اصلاحاتی را که به صورت بالقوه می‌توان بر

روی خطاهایی که دانش‌آموز احتمالاً در راه‌حلش دارد، انجام داد و هزینه‌ی هرکدام را بدست آورد.

در خانه (۲) جدول صفحه‌ی بعد چند نمونه از این قوانین بازنویسی آورده شده‌اند. اولین قانون برای دسترسی به نمایه‌ای از یک لیست است. دومی برای مقداردهی به یک متغیر به کار رفته است. قانون سوم نیز ورودی‌های تابع range را تغییر داده است.

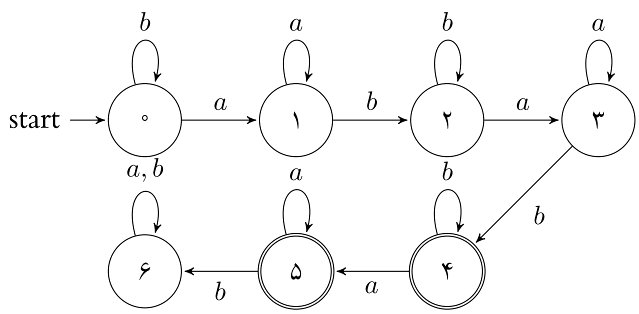
در قسمت بعدی جدول که در صفحه‌ی بعد آمده است، سه نمونه از برنامه‌های نوشته شده توسط دانش‌آموزان، به همراه بازخورد ارائه شده به کمک ماشین قابل مشاهده است. در واقع روشی که برای بدست آمدن این بازخورد به کار رفته، جست‌وجو در فضای برنامه‌هایی است که با اعمال کردن قوانین بازنویسی که توسط معلم ثبت شده‌اند روی برنامه‌ی دانش‌آموز به دست می‌آیند. در نتیجه‌ی این جست‌وجو برنامه‌ای انتخاب می‌شود که با جواب اصلی هم‌ارز باشد و با اعمال کم‌ترین تصحیح روی راه‌حل دانش‌آموز، به دست آمده باشد. برای رسیدن به این هدف از روشی در برنامه‌سازی با هم‌گذاری به نام SKETCH [۷] بهره می‌بریم، که خود از الگوریتم‌های صدق‌پذیری برای تکمیل حفره‌های یک برنامه استفاده می‌کند، تا برنامه‌ی مذکور هدف مطلوب را برآورده کند. این ماشین بر روی برنامه‌های هزاران دانشجوی درس برنامه‌نویسی مقدماتی دانشگاه MIT تست شده است و با میانگین ۱۰ ثانیه موفق به تولید بازخورد (حداکثر ۴ مورد اصلاحی) روی ۶۴٪ تمام راه‌حل‌ها شده است.

این روش برخلاف روش‌های دیگر که به مقایسه راه‌حل دانش‌آموز با یک سری راه‌حل پیش‌بینی شده می‌پردازند، با اعمال تغییر روی راه‌حل وی، ایجاد بازخورد می‌کند. با این حال، قادر به بررسی پاسخ‌های غلطی که ناشی از خطاهای بزرگ مفهومی‌اند نمی‌باشد، زیرا که چنین خطاهایی با کمک قوانین بازنویسی اصلاح نخواهند شد. علاوه بر این، این روش محدود به تشخیص معادل بودن تابعی و کارکردی است؛ نه معادل بودن از منظر کارایی و یا طرح الگوهای راه‌حل‌ها.

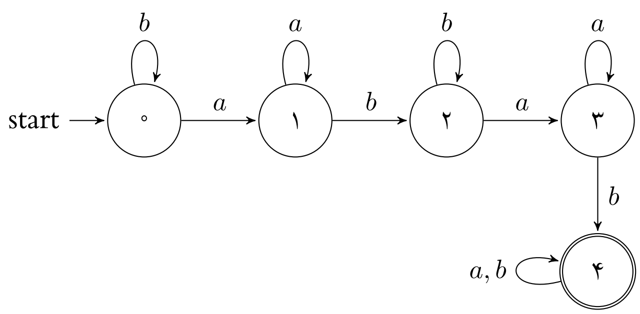
### ۴.۳.۳ سازه‌های اتوماتا

مسأله‌ی طراحی یک DFA روی مجموعه الفبای $\{a, b\}$ را برای تشخیص زبان L در نظر بگیرید که L شامل کلماتی است که زیررشته‌ی $ab$ دقیقاً دو بار در آن‌ها تکرار شده است. در شکل صفحه‌ی بعد چند نمونه جواب برای این مسأله و نمره‌ای که به طور خودکار برای هر یک به دست آمده است قابل مشاهده است.

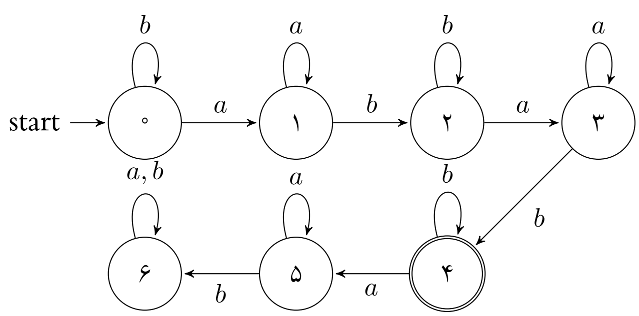
تشخیص زبان صحیح: نمره ۱۰/۱۰



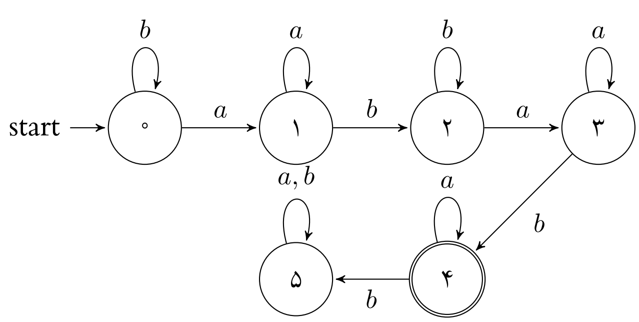
تشخیص زبانی که $ab$ **حداقل** دو بار تکرار شده: نمره ۵/۱۰



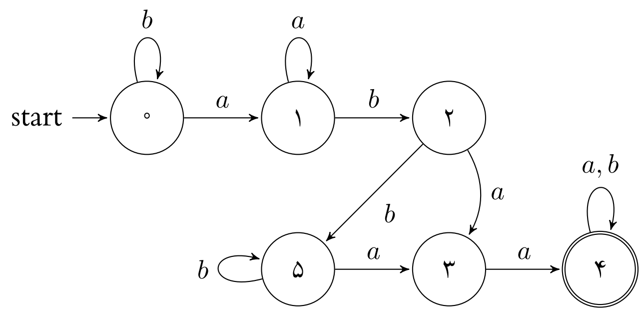
خطای پایانی نبودن وضعیت ۵: نمره ۹/۱۰



عمل‌کرد صحیح روی عمده‌ی ورودی‌ها: نمره ۶/۱۰



تشخیص زبانی که $ab$ حداقل دو بار تکرار شده: نمره ۵/۱۰




تکنیک حاکم بر این نمره‌دهی‌ها شامل تشخیص بازخوردهای مختلف از جمله میزان تدوین و مثال نقض است. متناظر با هر نوع بازخورد، نمره‌ای محاسبه شده و بازخورد متناظر با بالاترین نمره گزارش داده می‌شود. برای مثال نمره‌ی بالای نمونه‌جواب سوم به دلیل این حقیقت است که این جواب میزان تدوین بسیار کمی برای تبدیل شدن به جواب صحیح نیاز دارد؛ پس در این نمونه نمره‌ی گزارش‌شده تابعی از تعداد و نوع تدوین‌های لازم برای تبدیل جواب موجود به جواب صحیح است. نمونه‌جواب‌های دوم و پنجم به دلیل حل کردن صورت مسأله‌ای غیر از صورت مسأله‌ی داده شده نمره‌ی کمی گرفته‌اند؛ این امر می‌تواند ناشی از اشتباه‌های معمول در خواندن دقیق صورت سؤال باشد. تکرر چنین اشتباه‌هایی برای یک دانش‌آموز اطلاعات مفیدی درباره‌ی نقاط ضعف وی خواهد داد. در این دو نمونه نمره‌دهی تابعی از تعداد و نوع تدوین‌ها است. اما برای نمونه‌ی چهارم، نمره‌ی نهایی تابعی از تعداد مثال‌های نقض بوده و نه میزان تدوین لازم. در این‌جا وزن بیش‌تری برای مثال‌های نقض با طول کوتاه‌تر در نظر گرفته شده است؛ زیرا انتظار می‌رود دانش‌آموز مثال‌های کوچک و با طول کم را از پیش در مدل پیشنهادی خود امتحان کرده باشد.

برای تولید خودکار بازخوردهای بالا از منطقی به نام MOSEL[۱۱] که گسترشی بر منطق مرتبه‌ی دوم است استفاده شده است که با اضافه شدن تعدادی قواعد دستوری راه را برای تعریف دقیق‌تر و طبیعی‌تر زبان‌ها باز می‌کند. طبق این منطق، زبان L در مثال قبل به صورت زیر تعریف می‌شود

$$|\mathrm{indOf}(ab)| = ۲$$

که در آن تابع سازنده‌ی indOf مجموعه‌ی اندیس‌هایی را برمی‌گرداند که زیررشته‌ی ورودی تابع در آن‌ها وجود دارد. ابزار نمره‌دهی اتوماتای مورد نظر را، از طریق الگوریتم‌های هم‌گذاری گزاره‌های منطق MOSEL به اتوماتون تبدیل می‌کند و برعکس. برای حالت اول، یعنی تبدیل گزاره‌ای در منطق MOSEL به یک اتوماتون، ابتدا گزاره‌ی مورد نظر به گزاره‌ای در منطق کلاسیک مرتبه‌ی دوم بازنویسی شده و سپس با تکنیک‌های استاندارد اتوماتون نهایی از روی گزاره‌ی منطق مرتبه‌ی دوم ساخته می‌شود. در مورد حالت برعکس نیز دوباره از یک روش جست‌وجوی غیرهوشمندانه استفاده می‌شود که طی آن تمام گزاره‌های MOSEL به ترتیب افزایشی رو طول گزاره‌ها شماره‌گذاری می‌شوند و سپس از ابتدا و یک‌به‌یک با اتوماتون داده شده مقایسه می‌شوند تا گزاره‌ی مورد نظر یافت شود. سپس میزان تدوین از روی معیارهای استانداردی مانند فاصله‌ی اتوماتون [۱۲] و یا فاصله‌ی دو درخت محاسبه می‌شوند و برای مثال‌های نقض نیز از تفاضل اتوماتون‌ها استفاده می‌شود.

این ابزار نمره‌دهی خودکار اتوماتا بر روی بیش از ۸۰۰ جواب‌نمونه از دانشجویان علوم کامپیوتر دانشگاه UIUC[۱۳] آزمایش شده است. هر صورت مسأله توسط دو آموزش‌یار و ابزار نمره‌دهی خودکار به طور مستقل نمره‌دهی شدند. نمونه‌های آماری نشان می‌دهد که این ابزار از لحاظ دقت و سرعت نسبت به تصحیح انسانی کاملاً بهتر عمل می‌کند.

ابزار نمره‌دهی خودکار اتوماتا به طور آن‌لاین پیاده‌سازی شده[۱۴] و بازخوردها و نکات مفیدی را در اختیار کاربرها قرار می‌دهد. در یک مطالعه‌ی کاربرمحور مشخص شد بازخوردهای این ابزار علاوه بر افزایش توانایی، سرعت حل مسائل را نیز بهبود بخشیده است.

## ۴ نتیجه‌گیری

گرچه تلاش‌هایی که در راستای طراحی یک ماشین دست‌یار آموزش انجام شده کمک بسیاری به پیش‌رفت پدیده‌ی آموزشی جدید کلاس‌های آنلاین کلان و باز[۱۵] و فراهم شدن شرایط برای انتقال دانش به صورت یک‌جا به خیل عظیمی از دانش‌آموزان و دانشجویان می‌کند، آموزش تعاملی (مانند آموزش دیدن توسط یک معلم خصوصی) در جایگاه خود باقی است و بهره‌ای از دست‌آوردهایی که در این پایان‌نامه به آن‌ها اشاره شد نخواهد برد.

در مقاله‌هایی که در این نوشته مورد بررسی قرار گرفتند، موضوع

[۱۱] Monadic-Second Order Logic
[۱۲] automaton distance
[۱۳] University of Illinois at Urbana-Champaign
[۱۴] http://www.automatatutor.com/
[۱۵] Massive Open Online Courses (MOOCs)

استفاده از مثال‌ها به عنوان ورودی، خروجی و یا حتی بخشی از الگوریتم‌ها مطرح می‌کند. امید بر آن است که آشنایی با تکنیک‌های معرفی شده، فعالان حوزه‌ی آموزش را با آخرین پیشرفت‌ها و نگاهی جدید به این پدیده آشنا کرده و انگیزه‌ای برای ایجاد تحول در طرح‌های درسی و آموزشی آن‌ها باشد. برای مثال، این پیشرفت‌ها شرایط را برای ایجاد لایه‌هایی از جنس بازی و وارد کردن تفکر محاسباتی تا سطح ابتدایی فراهم می‌آورد.

در این نوشته بیش‌تر بر جنبه‌های فنی آموزش به کمک کامپیوتر تأکید شده است. هم‌چنین، بستر ایده‌های نوشته‌ی حاضر بیش‌تر سوار بر تفکر و استدلال منطقی است. در حالی که می‌توان این ایده‌ها را با روش‌های مبتنی بر حجم عظیمی از داده‌های آموزشی مانند پلت‌فرم‌هایی از جمله Khan Academy و یا Coursera توسعه داد و در بهبود آن‌ها کوشید. برای مثال می‌توان از داده‌های راه‌حل‌های مختلف و صحیح ارایه شده توسط دانشجویان و دانش‌آموزان، اثبات‌های متفاوتی برای یک صورت‌مسأله را استخراج کرده و از آن‌ها برای تولید بازخورد استفاده کرد. می‌توان از تعداد بالای دانشجویان یک درس به عنوان منبع جمعی[۱۶] برای مواردی که نیاز به نظارت انسان است استفاده کرد؛ اتفاقی که در حال حاضر در بسیاری از کلاس‌های آن‌لاین برای نمره‌دهی توسط هم‌کلاسی‌های ناشناس معمول است. هم‌افزایی حوزه‌های استدلال منطقی، یادگیری ماشین[۱۷] و منابع جمعی می‌تواند به سامانه‌های آموزشی هوشمند و پیشرفته‌ای منجر شود که به طور خودکار بهبود پیدا می‌کنند و می‌توانند انقلابی در حوزه‌ی آموزش پدید آورند.

## مراجع


[1] Ashlock, R. Error patterns in computation: A semi-programmed approach. 1986.

[2] Ditmarsch, H. Van. User interfaces in natural deduction programs. 1998.

[3] Dong, T., Dontcheva, M., Joseph, D., Karahalios, K., Newman, M., and Ackerman., M. Discovery-based games for learning software. *CHI*, 2012.

[4] Gulwani., S. Example-based learning in computer-aided stem education. 2013.

[5] K. Broda, J. Ma, Sinnadurai, G., and Summers, A. J. Pandora: A reasoning toolbox using natural deduction style. 2007.

[6] Singh, R., Gulwani, S., and Rajamani., S. Automatically generating algebra problems. *AAAI*, 2012.

[7] Solar-Lezama, A. Program synthesis by sketching. 2008.

[8] VanLehn, K. Mind bugs: The origins of procedural misconceptions. 1991.


[۱۶] crowdsource
[۱۷] machine learning

```
def computeDeriv(poly):
result = []
for i in range(len(poly)):
  result += [i * poly[i]]
if len(poly) == 1:
  return result
  # return [0]
else:
  return result[1:]
  # remove the leading 0
```

(a)

$$x[a] \;\rightarrow\; x[\{a+1, a-1, ?a\}]$$
$$x = n \;\rightarrow\; x = \{n+1, n-1, 0\}$$
$$\mathtt{range}(a_0, a_1) \rightarrow \mathtt{range}(\{0, 1, a_0-1, a_0+1\}, \{a_1+1, a_1-1\})$$

(b)

```
def computeDeriv(poly):
deriv, zero = [], 0
if (len(poly) == 1):
  return deriv
for e in range(0,len(poly)):
  if (poly[e] == 0):
    zero += 1
  else:
    deriv.append(poly[e]*e)
return deriv
```

The program requires **3** changes:

- In the return statement **return deriv** in **line 4**, replace **deriv** by **[0]**.
- In the comparison expression **(poly[e] == 0)** in **line 6**, change **(poly[e] == 0)** to **False**.
- In the expression **range(0, len(poly))** in **line 5**, increment **0** by **1**.

(c)

```
def computeDeriv(poly):
idx = 1
deriv = list([])
plen = len(poly)
while idx <= plen:
  coeff = poly.pop(1)
  deriv += [coeff*idx]
  idx = idx + 1
  if len(poly) < 2:
    return deriv
```

The program requires **1** change:

- In the function **computeDeriv**, add the base case to return [0] for **len(poly)=1**.

(d)

```
def computeDeriv(poly):
length=int(len(poly)-1)
i = length
deriv = range(1,length)
if len(poly) == 1:
  deriv = [0.0]
else:
  while i >= 0:
    new = poly[i] * i
    i -= 1
    deriv[i] = new
return deriv
```

The program requires **2** changes:

- In the expression **range(1, length)** in **line 4**, increment **length** by **1**.
- In the comparison expression **(i >= 0)** in **line 8**, change operator >= to !=.

(e)

# کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان

عرفان صلواتی

**چکیده**

یکی از وقایع مهم تابستان گذشته برگزاری کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان در کشور کره جنوبی بود که به ویژه با اعطای مدال فیلدز به خانم میرزاخانی برای ایرانیان اهمیتی دو چندان یافت. به همین دلیل بر آن شدیم در این زمینه مطلبی در مجله داشته باشیم. در زیر ابتدا گزارشی در باب این کنگره به قلم دکتر عرفان صلواتی که خود در آن حضور داشته‌اند می‌خوانید و سپس یکی از مقالاتی که خانم میرزاخانی در دوره کارشناسی‌شان در «مجله‌ی ریاضی شریف» نوشته بودند. [1]

کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان (International Congress of Mathematicians)، در حال حاضر بزرگ‌ترین گردهم‌آیی ریاضی‌دانان جهان است. این گردهم‌آیی هر چهار سال یک‌بار به میزبانی یکی از کشورها برگزار می‌شود و ریاضی‌دانانی از سراسر جهان، دست‌آوردهای خود را در آنجا ارائه می‌کنند. هر کنگره شامل برنامه‌های متنوعی از جمله سخنرانی‌ها، اعطای جوایز، میزگردها، نمایشگاه‌ها و ... است.

شکل ۱: از چپ به راست: هانری پوانکاره، فلیکس کلاین، گیوزپ پئانو، آدولف هورویتز

## تاریخچه

برای اولین بار در ۱۸۹۷ در شهر زوریخ سوئیس برگزار شد. رویدادهای خاص در تاریخ برگزاری کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان:

- فلیکس کلاین و جورج کانتور، ایده برگزاری این رویداد را در سال‌های ۱۸۹۰ مطرح کردند.
- ۱۸۹۷، اولین کنگره در زوریخ با حضور ۲۰۸ ریاضی‌دان از ۱۶ کشور برگزار شد. سخنرانی‌های عمومی توسط هنری پوانکاره، فلیکس کلاین، آدولف هورویتز و گیوزپ پئانو ایراد شد. بسیاری از ریاضی‌دانان معروف آن زمان در کنگره شرکت کردند، از جمله بندیکسون، برل، کانتور، فردهولم، هاوسدورف، لوی-چیویتا، لیندلوف و مینکوفسکی.
- ۱۹۰۰ پاریس: در دومین کنگره بین‌المللی ریاضیات، دیوید هیلبرت مجموعه ۲۳ مسأله حل‌نشده معروف خود را مطرح کرد.

شکل ۲: دیوید هیلبرت

[1] لازم به ذکر است که بخش اعظمی از شماره‌های گذشته‌ی مجله‌ی ریاضی شریف اسکن شده و به زودی بر سایت مجله (http://www.sharifmathjournal.ir) قرار خواهد گرفت.

- در خلال جنگ جهانی اول ریاضی‌دانان کشورهای متحد آلمان، به کنگره ۱۹۲۰ استراسبورگ و ۱۹۲۴ تورنتو، دعوت نشدند و به همین دلیل در سال‌های بعد از آن نسبت به صحت این دو کنگره ابراز تردید شد. از سال ۱۹۳۲ به بعد، کنگره‌های ریاضی‌دانان شماره‌گذاری نشد.

شکل ۳: کنگره ۱۹۲۴ تورنتو

- ۱۹۳۶ اسلو: اولین جوایز فیلدز به Lars Ahlfors و Jesse Douglas اعطا شد.

شکل ۴: کنگره ۱۹۳۶ اسلو، ردیف جلو نفر دوم و چهارم از چپ، کارتان و کاراتئودوری هستند که در آن سال عضو کمیته فیلدز بودند.

- در سالهای حکومت شوروی سابق، تنش‌های زیادی بین شوروی و کنگره جهانی وجود داشت که بعضاً منجر به عدم حضور ریاضی‌دانان شوروی سابق در کنگره جهانی می‌شد.
- از سال ۱۹۵۴، کنگره جهانی تحت نظر اتحادیه جهانی ریاضیات (IMU) که در سال ۱۹۵۰ تأسیس شد، برگزار می‌شود.

شکل ۵: کنگره ۱۹۵۰ کمبریج

## جوایز

در کنگره بین‌المللی ریاضیات، جوایز مختلفی اعطا می‌شود که در زیر معرفی شده‌اند. کمیته انتخاب برندگان این جوایز در هر دوره توسط IMU منصوب می‌شوند. این جوایز، هر چهار سال یکبار و در مراسمی رسمی در کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان به برندگانشان اعطا می‌شود. اهداف جوایز از سایت رسمی IMU نقل می‌شود:

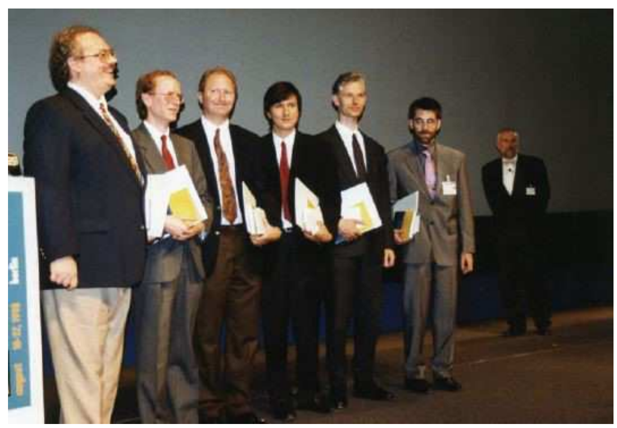
- جایزه فیلدز (از ۱۹۳۶): این جایزه به کسانی اعطا می‌شود که دست‌آوردهای برجسته‌ای در ریاضیات دارند و امید می‌رود در آینده نیز دست‌آوردهای آن‌ها ادامه پیدا کند. برندگان باید کم‌تر از ۴۰ سال سن داشته باشند. تعداد برندگان آن در هر سال تا کنون، بین ۲ تا ۴ نفر متغیر بوده است.

- جایزه گاوس (از سال ۲۰۰۶): به کارهای ریاضی‌ای که تأثیر عمیقی در خارج از ریاضیات داشته‌اند اعطا می‌شود.

- جایزه چِرن (از سال ۲۰۱۰): به شخصی که طول عمر خود را صرف دست‌آوردهای تأثیرگذاری در ریاضیات کرده باشد اعطا می‌شود.

- جایزه نِوانلینا (از سال ۱۹۸۲): در زمینه جنبه‌های ریاضیاتی علوم کامپیوتر اعطا می‌شود.

- جایزه لیلاواتی (از سال ۲۰۱۰): به برترین دست‌آوردها در ترویج ریاضی اعطا می‌شود. لیلاواتی نام یک اثر قدیمی از بهاسکارا ریاضی‌دان هندی قرن سیزدهم میلادی است که در آن یک سری مسائل مقدماتی در حساب و جبر مطرح می‌کند. حامی مالی این جایزه شرکت هندی فن‌آوری اطلاعات Infosys است.



شکل ۶: کنگره ۱۹۹۸ برلین، از چپ به راست: پیتر شور برنده جایزه نوانلینا، اندرو وایلز برنده نشان ویژه اتحادیه جهانی ریاضیات به دلیل اثبات قضیه آخر فرما، کرتیس مک‌مولن، ماکسیم کانتسویچ، تیموتی گاورز و ریچارد بُرچردز برندگان جایزه فیلدز

## سخنرانی‌ها

سخنرانی‌های ارائه شده در کنگره را می‌توان به این چند دسته تقسیم کرد.

- سخنرانی برندگان جوایز: هر یک از برندگان جوایز، دست‌آوردهای خود را در قالب یک سخنرانی ارائه می‌دهد.

- سخنرانی‌های عمومی (Plenary Lectures): این سخنرانی‌ها اغلب توسط برجسته‌ترین ریاضی‌دانان ارائه می‌شود. هیچ برنامه‌ای موازی این سخنرانی‌ها وجود ندارد و در نتیجه همه شرکت‌کنندگان در این سخنرانی حضور دارند. این سخنرانی‌ها معمولاً به نحوی ارائه می‌شوند که برای افراد غیر متخصص در آن رشته هم آموزنده باشند.

- سخنرانی‌های دعوتی (Invited Lectures): این سخنرانی‌ها تخصصی‌تر از سخنرانی‌های عمومی هستند و به طور موازی در رشته‌های مختلف ریاضی برگزار می‌شوند. شرکت‌کنندگان باید انتخاب کنند که در کدام سخنرانی حضور می‌یابند. این سخنرانان نیز اغلب از افراد سرشناس در رشته خود هستند.

- سخنرانی‌های درخواستی (Contributed Lectures): این سخنرانی‌ها معمولاً بیشترین تعداد سخنرانی‌های ICM را تشکیل می‌دهند و هر یک از شرکت‌کنندگان در ICM می‌توانند درخواست ارائه چنین سخنرانی‌هایی را بدهند.

- پوستر: هر یک از شرکت‌کنندگان در ICM می‌توانند درخواست ارائه کار ریاضی خود را در قالب پوستر بدهند. پوسترها در سالنی که به همین منظور در نظر گرفته شده‌اند نصب شده و شرکت‌کنندگان دیگر از آن‌ها بازدید کرده و ارائه دهنده پوستر، در صورت نیاز توضیحاتی به هر یک از مراجعان می‌دهد.

سخنرانی‌های ویژه:

- سخنرانی آبل: از سال ۲۰۰۳ و هر سال جایزه‌ای با نام جایزه آبل به تحقیقات برجسته در زمینه ریاضیات اعطا می‌شود. اگرچه انتخاب برندگان هیچ ارتباطی با IMU ندارد یکی از سخنرانی‌های ویژه در هر ICM برای یکی از برندگان جایزه آبل در نظر گرفته شده است.

- سخنرانی اِمی نوتر (از سال ۱۹۹۴): این سخنرانی توسط یک زن ریاضی‌دان به انتخاب کمیته‌ای که به همین منظور تشکیل شده انجام می‌شود.

## سایر برنامه‌ها

- میزگردهای موضوعی: در هر کنگره، میزگردهایی با موضوعات جانبی ریاضیات برگزار می‌شود. موضوعاتی از قبیل آموزش ریاضیات، ترویج ریاضیات، نشر ریاضیات و ... از موضوعات میزگردها هستند. در هر میزگرد تعدادی کارشناس مرتبط با موضوع حضور دارند که ابتدا هر یک،

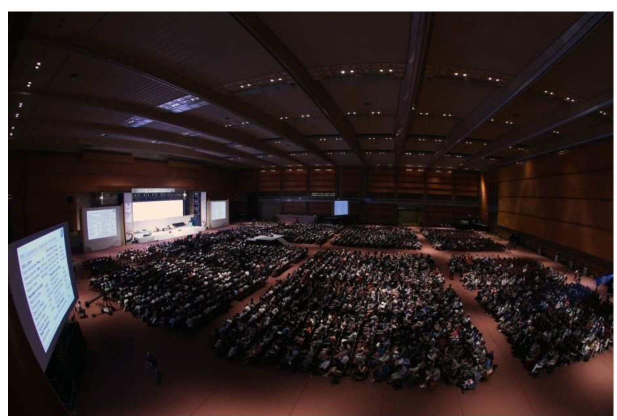
نظرات خود را در مورد موضوع میزگرد مطرح می‌کنند و سپس ادامه جلسه به پرسش و پاسخ حضار و اعضای میزگرد می‌گذرد.

- نمایشگاه: در کنار کنگره، نمایشگاه‌هایی از جمله نمایشگاه کتاب و نمایشگاه نرم‌افزارهای ریاضی با حضور انتشارات‌های معتبر ریاضی و شرکت‌های نرم‌افزاری فعال در زمینه ریاضی برگزار می‌شود.

- کنفرانس‌های اقماری (Satellite Conferences): در فاصله چند هفته قبل یا بعد از کنگره، کنفرانس‌های تخصصی، در شاخه‌های مختلف ریاضی در کشور میزبانِ کنگره (و بعضاً در کشورهای همسایه) برگزار می‌شود. با توجه به اهمیت کنگره و حضور بسیاری از ریاضی‌دانان در آن، این فرصت خوبی برای کنفرانس‌های تخصصی است تا با برگزاری در حاشیه کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان، از حضور ریاضی‌دانان سراسر جهان بهره‌مند شوند.

## کنگره بین‌المللی ریاضی‌دانان ۲۰۱۴

کنگره امسال با حضور ۵۲۱۷ شرکت‌کننده از ۱۲۲ کشور جهان در شهر سئول کره جنوبی و به مدت ۹ روز از ۱۳ تا ۲۱ آگوست ۲۰۱۴ (۲۲ تا ۳۰ مرداد ۱۳۹۳) برگزار شد. این کنگره بیشترین تعداد شرکت‌کننده را در تاریخ ICM داشته است. ۲۵۷۲ شرکت‌کننده خارجی و ۲۶۴۵ شرکت‌کننده داخلی بوده‌اند.



در مجموع ۱۲۶۲ سخنرانی علمی در کنگره برگزار شد که به تفکیک عبارتند از

| | |
|---|---|
| سخنرانی برندگان جوایز | ۷ |
| سخنرانی عمومی | ۲۱ |
| سخنرانی دعوتی | ۱۷۸ |
| میزگرد | ۶ |
| سخنرانی درخواستی | ۶۶۲ |
| ارائه پوستر | ۳۸۸ |

مدت‌زمان سخنرانی‌های عمومی ۱ ساعت، سخنرانی‌های دعوتی ۴۵ دقیقه و سخنرانی‌های درخواستی ۲۰ دقیقه بود. خوشبختانه در کنگره امسال همه‌ی سخنرانی‌های عمومی و دعوتی ضبط شده و فایل ویدیویی آن‌ها در آدرس اینترنتی http://www.icm2014.org/vod/ICM-VOD-List.asp قابل دریافت است.


سخنرانی‌های دعوتی در ۱۹ موضوع مختلف تقسیم شده بودند که عبارتند از

۱. منطق و مبانی ریاضیات

۲. جبر

۳. نظریه اعداد

۴. هندسه جبری و مختلط

۵. هندسه

۶. توپولوژی

۷. نظریه لی و تعمیم‌ها

۸. آنالیز و کاربردها

۹. سیستم‌های دینامیکی و معادلات دیفرانسیل عادی

۱۰. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای

۱۱. فیزیک ریاضی
۱۲. احتمال و آمار
۱۳. ترکیبیات
۱۴. جنبه‌های ریاضی علوم کامپیوتر
۱۵. آنالیز عددی و محاسبات علمی
۱۶. کنترل و بهینه‌سازی
۱۷. ریاضیات در علوم و تکنولوژی
۱۸. آموزش ریاضی و ترویج ریاضی
۱۹. تاریخ ریاضی

جوایز در مراسم افتتاحیه اعطا شد. خبری خوشحال‌کننده برای ما و همه ایرانی‌های دیگر، حضور خانم مریم میرزاخانی در بین دریافت‌کنندگان جایزه فیلدز بود. روز اول به مراسم افتتاحیه و نیز سخنرانی بعضی از برندگان جوایز گذشت.

از روز دوم تا روز آخر، برنامه سخنرانی‌ها هر روز از ساعت ۹ صبح تا ۶ بعد از ظهر ادامه داشت، به جز روز ۱۷ام که یکشنبه و تعطیل بود و نیز روز آخر که برنامه‌ها تا ساعت ۲ ادامه داشت. بعد از آن مراسم اختتامیه برگزار شد که مسئول اجرایی کنگره، گزارشی از برگزاری کنگره ارائه کرد و در پایان مراسم اختتامیه، آقای مارسلو ویانا، رئیس انجمن ریاضی برزیل و مسئول اجرایی کنگره ۲۰۱۸ که به میزبانی برزیل برگزار می‌شود توضیحاتی در مورد اقدامات و برنامه‌های پیش رو برای برگزاری کنگره بعدی در این کشور ارائه کرد.


شکل ۷: کنگره ۲۰۱۴ سئول، از چپ به راست: ؟، استنلی اوشر برنده جایزه گاوس، سابهش کُت برنده جایزه نوانلینا، مارتین هِیرر و منجول بهارگاوا برندگان جایزه فیلدز، رئیس جمهور کره جنوبی، مریم میرزاخانی برنده جایزه فیلدز، اینگرید دوبچی رئیس وقت IMU، آرتور آویلا برنده جایزه فیلدز، هیونگجو پارک مسئول کنگره امسال، فیلیپ گریفیتس برنده جایزه چرن،؟

## مراجع

[۱] Wikipedia

[۲] Curbera, G. (2009). Mathematicians of the world, unite!: the International Congress of Mathematicians: a human endeavor.

[۳] ICM 2014 Report

# از قضیهٔ مقدار میانی تا قضیهٔ شارکوفسکی

مریم میرزاخانی •

توابع پیوسته از یک متغیر حقیقی سالها مورد مطالعهٔ ریاضیدانان بزرگی مانند نیوتن (۱۷۲۷-۱۶۴۲)، لایب‌نیتس (۱۷۱۶-۱۶۴۶) و اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷) بوده‌اند که کارهای اینان سبب ایجاد «حساب دیفرانسیل و انتگرال» شده است که امروز مورد استفادهٔ بسیاری از افراد قرار گرفته است، یکی از اساسی‌ترین و ساده‌ترین قضایا در این زمینه قضیهٔ مقدار میانی است که همهٔ ما با آن آشنایی داریم.

قضیهٔ مقدار میانی: اگر $f$ تابعی پیوسته و حقیقی روی $[a,b]$ باشد و $r$ عددی حقیقی بین $f(a)$ و $f(b)$، آنگاه عدد $x_0$ بین $a$ و $b$ وجود دارد به نحوی که $f(x_0)=r$.

این قضیهٔ ساده کاربردهای فراوانی دارد که به‌عنوان مثال می‌توان از گزارهٔ زیر نام برد.

**گزاره ۱.** *اگر $f$ تابعی حقیقی و پیوسته روی $[a,b]$ باشد که برد آن شامل $[a,b]$ شود آنگاه $f$ دست‌کم یک نقطهٔ ثابت دارد (به عبارت دیگر $\exists x\in[a,b]\,,\ f(x)=x$).*

یک تعمیم طبیعی از مفهوم نقطهٔ ثابت که در گزاره ۱ مطرح شد مفهوم نقطهٔ تناوبی تابع است بدین ترتیب که اگر برد $f$ زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ $f$ باشد، تعریف می‌کنیم

$$f^0(x)=x$$
$$f^1(x)=f(x)$$
$$\vdots$$
$$f^{i+1}(x)=f(f^i(x))$$

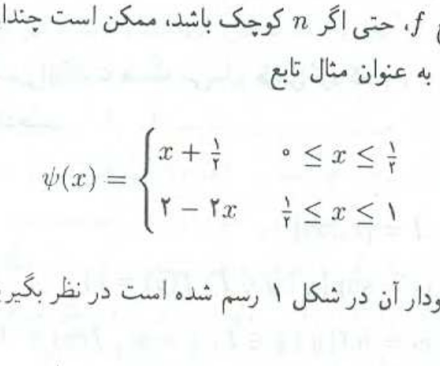
حال اگر $x_0$ چنان باشد که $f^n(x_0)=x_0$ ولی برای هر $k<n$ داشته باشیم $f^k(x_0)\neq x_0$ آنگاه $x_0$ را یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $n$ برای $f$ می‌نامیم. بنابراین یک نقطهٔ ثابت تابع $f$، چیزی نیست جز یک نقطهٔ تناوبی $f$ از مرتبهٔ ۱.

اگر $x_0$ یک نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ $n$ برای $f$ باشد آنگاه $x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$ متمایزند و $\{x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)\}$ را مدار تناوبی $x_0$ می‌نامیم.

مسألهٔ وجود نقطهٔ ثابت عموماً به‌سادگی با بررسی نمودار تابع قابل حل است ولی بررسی وجود یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $n$ برای تابع $f$، حتی اگر $n$ کوچک باشد، ممکن است چندان ساده نباشد. به عنوان مثال تابع

$$\psi(x)=\begin{cases} x+\frac{1}{2} & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 2-2x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

را که نمودار آن در شکل ۱ رسم شده است در نظر بگیرید:




شکل ۱

داریم:

$$\psi(0)=\frac{1}{2},\ \psi^2(0)=\psi(\frac{1}{2})=1,\ \psi^3(0)=\psi(1)=0$$

مجلهٔ ریاضی شمارهٔ ۷
(پاییز ۱۳۷۷) صص. ۱۸ـ۱۲

پس $\psi$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ دارد ولی آیا $\psi$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۵ هم دارد؟ از مرتبهٔ ۷ چطور؟

می‌بینید که جواب دادن به این سؤالها تنها با توجه به شکل نمودار چندان ساده نیست و برای پاسخ دادن به این سؤالها و سؤالهای مشابه دیگر به بررسی عمیق‌تری از توابع پیوسته نیاز داریم. در اینجا از تعمیمی از گزارهٔ ۱ استفاده می‌کنیم.

**گزاره ۲.** *اگر $f$ تابعی حقیقی و پیوسته روی $[a,b]$ باشد و $I_0, I_1, \dots, I_{n-1}$ زیربازه‌های بسته‌ای از $[a,b]$ باشند چنانکه $f(I_k) \supset I_{k+1}$، آنگاه معادلهٔ $f^n(x) = x$ جوابی دارد مثل $x_0$ که $x_0 \in I_0$ و $f^k(x_0) \in I_k$.* [از این پس همواره $I_n = I_0$.]

**اثبات.** قرارداد می‌کنیم که $I_i \to I_j$ یعنی $f(I_i) \supset I_j$. اگر $n = 1$ باشد حکم معادل گزارهٔ ۱ است. برای $n \geq 2$ توجه کنید که اگر $I_1 \to I_2$ آنگاه بازهٔ بستهٔ $I_1^*$ وجود دارد به گونه‌ای که $I_1^* \subset I_1$ و $f(I_1^*) = I_2$ زیرا اگر $I_2 = [c,d]$ بنابر قضیهٔ مقدار میانی داریم

$$\exists x_1, x_2 \in I_1 : f(x_1) = c,\ f(x_2) = d$$

بدون کاستن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد که $x_2 > x_1$. قرار دهید:

$$I = [x_1, x_2]$$
$$y_1 = \sup\{y \mid y \in I,\ f(y) = c\}$$
$$y_2 = \inf\{y \mid y \in I,\ y > y_1,\ f(y) = d\}$$

بنابر پیوستگی $f$ و قضیهٔ مقدار میانی داریم که اگر $I_1^* = [y_1, y_2]$ آنگاه $f(I_1^*) = I_2$.
شرط گزاره را می‌توان چنین نوشت:

$$I_0 \to I_1 \to I_2 \to \dots \to I_{n-1} \to I_0$$

بنابر آنچه که گفتیم و بنا بر صورت مسأله، بازه‌های $I_0^*, I_1^*, \dots, I_{n-1}^*$ وجود دارند که:

$$I_{n-1}^* \subset I_{n-1}, f(I_{n-1}^*) = I_0$$
$$I_{n-2}^* \subset I_{n-2}, f(I_{n-2}^*) = I_{n-1}^*,$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$\vdots$$
$$I_0^* \subset I_0, f(I_0^*) = I_1^*$$

به عبارتی دیگر وجود دارند $I_k^* \subset I_k$ که داشته باشیم: $f(I_k^*) = I_{k+1}^*$. پس بنابر گزارهٔ ۱ معادلهٔ $f^n(x) = x$ جوابی مثل $x_0$ دارد که $x_0 \in I_0^* \subset I_0$ که $f^k(x_0) \in I_k^* \subset I_k$.
گزارهٔ ۲ خود نکتهٔ قابل توجهی ندارد اما می‌تواند برای اثبات قضیهٔ جالب زیر به‌کار رود.

**قضیه ۱.** *اگر $f$ تابعی پیوسته روی $[a,b]$ باشد به نحوی که برد آن در $[a,b]$ باشد و یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ داشته باشد، آنگاه به ازای هر عدد طبیعی $n$، $f$ نقطه‌ای تناوبی از مرتبهٔ $n$ دارد.*

**اثبات.** اگر $x_0 < x_1 < x_2$ یک مدار تناوبی از مرتبهٔ ۳ باشد آنگاه یا $f(x_1) = x_0$ یا $f(x_1) = x_2$. بدون کاسته شدن از کلیت مسأله می‌توان فرض کرد $f(x_1) = x_0$. پس $f(x_0) = x_2,\ f(x_2) = x_1$. اگر قرار دهیم

$$\bar{I}_1 = [x_1, x_2], \qquad \bar{I}_0 = [x_0, x_1]$$

با توجه به قضیهٔ مقدار میانی داریم $\bar{I}_0 \rightleftarrows \bar{I}_1$ حال اگر قرار دهیم

$$I_{n-1} = \bar{I}_1,\ I_0 = I_1 = \dots = I_{n-2} = \bar{I}_0.$$

آنگاه با توجه به گزارهٔ ۲ داریم:

$$\exists x_0^* \in \bar{I}_0 : f^n(x_0^*) = x_0^*$$
$$\forall k : 0 \leq k \leq n-1 \quad f^k(x_0^*) \in \bar{I}_0 \quad \text{و}$$

و $f^{n-1}(x_0^*) \in \bar{I}_1$ پس $f^n(x_0^*) = x_0^*$ حال اگر $k < n$ وجود داشته باشد که

$$f^k(x_0^*) = x_0^*$$

آنگاه خواهیم داشت

$$\exists i: 0 \le i \le n-2,\ f^{n-1}(x_0^*) = f^i(x_0^*)$$

$$f^i(x_0^*) \in \bar I_0,\ f^{n-1}(x_0^*) \in \bar I_1 \quad \text{و}$$

پس

$$f^{n-1}(x_0^*) \in \bar I_0 \cap \bar I_1 = x_1 \Rightarrow x_0^* = f^n(x_0^*) = x_0$$

$$f(x_0^*) = f(x_0) = x_2 \notin \bar I_0 \quad \text{و}$$

که متناقض با $f(x_0^*) \in \bar I_0$ است.

پس با توجه به این قضیه، تابعی که نمودارش را در شکل ۱ رسم کرده‌ایم به ازای هر $n$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $n$ دارد. در صورتی که در نگاه اول تابعی بسیار ساده به نظر می‌آید.

حال طرح این سؤال به نظر منطقی می‌آید که اگر تابعی یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $n$ داشته باشد به ازای چه مقدارهایی از $m$ لزوماً نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $m$ هم دارد؟

ترتیب زیر را روی اعداد طبیعی در نظر بگیرید.

$$3 \lhd 5 \lhd 7 \ldots \lhd 2\cdot 3 \lhd 2\cdot 5 \lhd 2\cdot 7 \ldots$$

$$\lhd 2^2\cdot 3 \lhd 2^2\cdot 5 \lhd \ldots \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd 1$$

با استفاده از این ترتیب می‌توانیم به سؤال فوق پاسخ دهیم

**قضیه ۲ (شارکوفسکی، ۱۹۶۴): اگر $f: I \to I$ تابعی پیوسته باشد و $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $l$ داشته باشد و $l \lhd m$ آنگاه $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $m$ هم دارد.**

اثبات. *ابتدا فرض می‌کنیم $f$ یک نقطهٔ تناوبی اولیه از مرتبهٔ $n$ دارد مثل $x$ که $n$ عددی است فرد و بزرگتر از ۱ و هیچ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ فرد کمتر از $n$ و بزرگتر از ۱ ندارد و فرض کنید $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ نقاط مدار تناوبی $x$ باشند. معلوم است که $f$ روی $x_1, \ldots, x_n$ یک جایگشت اعمال می‌کند و به وضوح $f(x_1) > x_1$ و $f(x_n) < x_n$ حال اگر $i$ بزرگترین عددی باشد که $f(x_i) > x_i$ و $I_1 = [x_i, x_{i+1}]$ از آنجا که $f(x_{i+1}) < x_i$ پس $f(I_1) \supset I_1$ یا به عبارتی $I_1 \to I_1$ از آنجا که $n$ فرد است نمی‌توانیم داشته باشیم $f(x_{i+1}) = x_i$ و $f(x_i) = x_{i+1}$ پس $f(I_1)$ شامل دست‌کم یکی دیگر از بازه‌های $[x_j, x_{j+1}]$ هم هست (که بعد می‌بینیم تنها شامل یکی دیگر از بازه‌هاست) حال اگر $O_2$ را اجتماع بازه‌های $[x_j, x_{j+1}]$ بگیریم که $f(I_1) \supset [x_j, x_{j+1}]$ داریم $O_2 \supset I_1$ ولی $O_2 \neq I_1$ و اگر $I_2$ زیربازهٔ بسته‌ای در $O_2$ به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ باشد آنگاه $I_1 \to I_2$.*

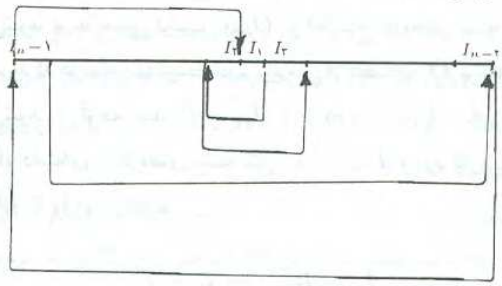
*حال $O_3$ را اجتماع بازه‌های بسته به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ بگیرید که توسط تصویر بعضی از بازه‌های درون $O_2$ پوشانده می‌شوند و به همین ترتیب $O_{l+1}$ را اجتماع بازه‌های بسته‌ای بگیرید که هرکدام آنها توسط تصویر برخی از اعضای $O_l$ پوشانده می‌شوند. توجه کنید اگر $I_{l+1}$ را بازه‌ای از $O_{l+1}$ بگیریم آنگاه دسته‌ای از بازه‌های بسته مثل $I_2, \ldots, I_l$ وجود دارند که $I_j \subset O_j$ و در شرط*

$$I_1 \to I_2 \ldots \to I_l \to I_{l+1}$$

*صدق می‌کنند. ولی از آنجا که $x_j$ها متناهی هستند ای وجود دارد که $O_{l+1} = O_l$ پس می‌بینیم که تمام بازه‌های به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ در $O_l$ هستند زیرا در غیر این صورت $x$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ کمتر از $n$ می‌داشت.*

*حال از آنجا که $n$ عددی فرد است دست کم یک بازهٔ $[x_j, x_{j+1}]$ متفاوت با $I_1$ وجود دارد که در یکی از $O_k$ها قرار دارد به نحوی که تصویرش تحت $f$، $I_1$ را می‌پوشاند زیرا به‌خاطر فرد بودن $n$، تعداد $x_i$ها در یک طرف $I_1$ از طرف دیگر اکیداً بیشتر است پس تعدادی از $x_i$ها باید تحت اثر $f$ از یک طرف $I_1$ به طرف دیگر بیایند و تعدادی دیگر نباید. حال دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \ldots I_k \to I_1$ را در نظر می‌گیریم که هر $I_l$ به شکل $[x_j, x_{j+1}]$ است و $I_2 \neq I_1$. بنابراین دست‌کم یک دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \ldots I_k \to I_1$ داریم. اگر دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \ldots I_k \to I_1$ کوتاهترین دنباله از این نوع جز $I_1 \to I_1$ باشد و $k < n-1$ در این صورت یکی از دو دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \to I_3 \to \ldots \to I_k \to I_1$ یا $I_1 \to I_2 \to \ldots I_k \to I_1 \to I_1$ یک نقطهٔ ثابت از $f^m$ دارد که $m$ فرد است و $m < k$. پس، از آنجا که $I_1 \cap I_2$ تنها از یک نقطه تشکیل شده است و این نقطه دورهٔ تناوبی بزرگتر از $m$ دارد، این حالت امکان‌پذیر نیست و $k = n-1$.*

از طرفی، از آنجا که $k$ کوچکترین عدد طبیعی است که برای آن دنبالهٔ $I_1 \to I_2 \to \ldots I_k \to I_1$ وجود دارد، اگر $j > l+1$، داریم $I_l \not\to I_j$ (زیرا $I_l \to I_j$ با مینیمم بودن $k$ متناقض است) بنابراین درمی‌یابیم که نحوهٔ قرارگرفتن بازه‌های $I_1, \ldots, I_{n-1}$ باید مثل شکل ۲ یا تصویر آینه‌ای آن باشد. به عبارتی اگر $y_0$ نقطهٔ وسطی بین $2m+1$ نقطه باشد و $f(y_0) = y_1$، نحوهٔ قرارگرفتن نقاط مثل شکل ۲ یا تصویر آینه‌ای آن است.



شکل ۲

حال برای اثبات قضیه حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول: اگر $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^m$ داشته باشد ثابت می‌کنیم $f$، نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^l$ هم دارد ($l < m$). اگر $m = 1$ در آن صورت $f$ یک نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ ۲ دارد. اگر $x_1$ و $x_2$ ($x_1 < x_2$) مدار نقطهٔ تناوبی باشد داریم: $f(x_1) = x_2$ و $f(x_2) = x_1$ یا $f([x_1, x_2]) \supset [x_1, x_2]$ پس $f$ بنابر گزارهٔ ۱ نقطهٔ ثابت دارد.

حالا این حالت را با استقرا روی $m$ ثابت می‌کنیم. برای $m = 1$ حکم درست بود. اگر حکم برای $m = k$ درست باشد باید ثابت کنیم برای $m = k+1$ هم درست است. قرار دهید $g = f^2$ پس اگر $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^{k+1}$ داشته باشد $g$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^k$ دارد. بنابر فرض استقرا $g$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^{k-1}$ دارد پس عنصری مثل $x_0$ داریم که $x_0 \in I$ و $g^{2^{k-1}}(x_0) = x_0$ و $g^t(x_0) \neq x_0$ ($1 \le t \le 2^{k-1}$) پس

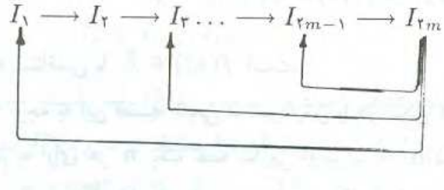
$$f^{2^k}(x_0) = x_0.$$
$$f^{2t}(x_0) \neq x_0, \quad 1 \le t \le 2^{k-1}$$

ولی، چون $f^{2^k}(x_0) = x_0$، به ازای هر عدد فرد $t$ داریم:

$$f^t(x_0) \neq x_0.$$

پس $x_0$ یک نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ $2^k$ است که حکم را ثابت می‌کند.

حالت دوم: اگر $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2m+1$ داشته باشد برای $k > 2m+1$، $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $k$ هم دارد. می‌توان فرض کرد که $f$ نقطهٔ تناوبی مرتبهٔ $2n+1$ که $1 \le n < m$ ندارد پس بنابر آنچه قبلاً گفتیم می‌توان گفت مثل شکل ۳ داریم:




شکل ۳

در این صورت برای هر $k > 2m+1$ دنبالهٔ

$$\underbrace{I_1 \to \ldots \to I_1}_{k-(2m-1)\ \text{بار}} \to I_2 \to \ldots \to I_{2m} \to I_1$$

موجود است که در شرط گزارهٔ ۲ صدق می‌کند پس بنابر همین گزاره $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $k$ دارد.

حالت سوم: اگر $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2m+1$ داشته باشد آنگاه $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2k$ دارد. بنابر حالت ۲ کافی است تنها حالت $2m \le 2k$ را در نظر بگیریم که بنابر شکل ۳ می‌توانیم دنبالهٔ

$$I_{2(m-k)+1} \to I_{2(m-k)+2} \to \ldots \to I_{2m} \to I_{2(m-k)+1}$$

را در نظر بگیریم. با بحث حالت ۲، $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2k$ خواهد داشت.

حالت چهارم: اگر $m \lhd n$ که $m = 2^k p$ و $n = 2^t q$ ($p$ و $q$ اعدادی فرد هستند که $p > 1$ و $k \ge 1$) می‌خواهیم ثابت کنیم اگر $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $m$ داشته باشد آنگاه نقطه‌ای تناوبی از مرتبهٔ $n$ هم دارد. می‌توان فرض کرد که برای $l \lhd m$ هیچ نقطهٔ تناوبی با مرتبهٔ $l$ نداریم. بنابر $m \lhd n$ دو حالت داریم:

الف) $t > k$ و $q \ge 1$

ب) $t = k$ و $q > p$

اگر $g(x) = f^{2^k}(x)$ آنگاه $f$ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^k p$ دارد پس $g$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $p$ دارد. با استفاده از حالت ۳، $g$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^{t-k}q$ دارد که $t > k$ و $q \geq 1$ پس $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^t q = m$ دارد. در حالت (ب) با استفاده از حالت ۲، $g$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $p$ دارد پس $g$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $q$ دارد که $q > p$ پس $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $2^t q$ دارد پس در حالت الف و ب، $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $m$ خواهد داشت.

اما قضیهٔ شارکوفسکی نکتهٔ جالب دیگری هم دارد: عکس آن هم درست است. یعنی اگر $l \lhd m$ آنگاه تابعی پیوسته مثل $f : I \to I$ وجود دارد که $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $m$ دارد ولی نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $l$ ندارد.

ما اینجا تابعی می‌سازیم که نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۵ دارد ولی نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ ندارد. (۵ ⊲ ۳) برای این کار $f$ را چنین تعریف می‌کنیم:

$$f :.[1,5] \to [1,5]$$

$$f(1) = 3\,,\ f(3) = 4\,,\ f(4) = 2$$

$$f(2) = 5\,,\ f(5) = 1$$

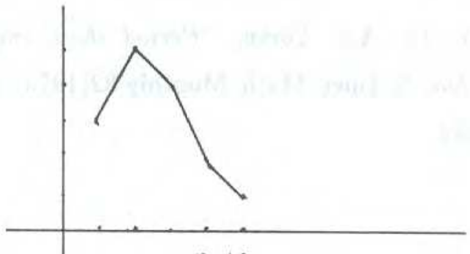
پس ۱ یک نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۵ برای تابع $f$ است و برای مقادیر بین $i$ و $i+1$ تابع را خطی تعریف می‌کنیم ۴ حال به راحتی می‌توانید ببینید که

$$f^3[1,2] = [2,5]$$

$$f^3[2,3] = [3,5]$$

$$f^3[4,5] = [1,4]$$

پس $f^3$ هیچ نقطهٔ ثابتی در $[1,2]$ و $[2,3]$ و $[4,5]$ ندارد ولی $f^3[3,4] = [1,5]$ پس $f^3$ در بازهٔ $[3,4]$ یک نقطهٔ ثابت دارد ولی توابع $f : [3,4] \to [2,4]$ و $f : [2,5] \to [1,5]$ و $f : [2,4] \to [2,5]$ توابعی اکیداً نزولی هستند پس $f^3[3,4] \to [1,5]$ تابعی اکیداً نزولی



شکل ۴

است پس تنها یک نقطهٔ ثابت دارد و این نقطهٔ ثابت همان نقطهٔ $f(x) = x$ است پس تابع $f$ نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ ندارد.

با همین روش برای $l \lhd m$ می‌توان تابعی ساخت که نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $m$ دارد ولی نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ $l$ ندارد ولی متأسفانه قضیهٔ شارکوفسکی تنها در حالت ۱ بعدی صادق است، این قضیه حتی برای دایره هم صادق نیست چون مثلاً در دوران ۱۲۰ درجه حول مرکز دایره، تمام نقاط دایره نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ ۳ هستند و نقطهٔ تناوبی از مرتبهٔ دیگر وجود ندارد.

در هر صورت قضیهٔ شارکوفسکی بحث دربارهٔ نقاط تناوبی توابع را به پایان نمی‌برد. در پاسخ این سؤال که چرا ریاضیدانان بزرگ پیشین که در آنالیز کلاسیک کار می‌کردند به چنین قضیهٔ مهمی دست نیافته‌اند می‌توان گفت دلیل شاید این باشد که در آنالیز کلاسیک خواص «موضعی» توابع بررسی می‌شدند؛ خواصی مثل پیوستگی و مشتق‌پذیری و انتگرال‌پذیری در آنالیز کلاسیک اهمیت بسیار دارند و خواص سرتاسری توابع مثل پیوستگی یکنواخت که در آنالیز کلاسیک مورد توجه بودند غالباً از خواص موضعی توابع نتیجه‌گیری می‌شدند ولی اکنون بررسی خواص «سرتاسری» توابع شاخهٔ جدیدی از ریاضی را به نام «آنالیز فراگیر» به وجود آورده است که شامل مباحث جالب و متنوعی می‌شود.

## مراجع

[1] R.L. Devaney, "*An Introduction to chaotic Dynamical systems*", 1986.

[2] Xun Cheng Huang, "*From intermediate value theorem to chaos*", Math. Magazine.

vol 65. No. 2. April 1992. pp. 91-103.

[3] T. Li, A.J. Yorke, *"Period three implies chaos"*, Amer. Math. Monthly 82(1975), 985-992.

• دانشجوی دورهٔ کارشناسی ریاضی
دانشگاه صنعتی شریف
این مقاله به‌طور عمده براساس مرجع [2] تدوین شده است.

## تجربهٔ کامپیوتری

در بررسی دینامیک توابع تجربهٔ کامپیوتری احساس «شهودی» مؤثری پدید می‌آورد. برنامهٔ ضمیمه که به زبان متمتیکا نوشته شده است به‌بررسی دینامیک نگاشت $۳/۵x(۱ - x)$ می‌پردازد.

```
Clear[h];
h[x_] := 3.5x (1-x)

StartingValue = .1;
FirstIt = 0;
LastIt = 20;

xmin =  0;
xmax =  1;

      (*  Finding the Points  *)

i = 0;
y = N[StartingValue];

While[i < FirstIt, y = h[y]; i = i + 1];

DataTable = {{y,y},{y,h[y]}};

While[i < LastIt,
      y = h[y];
      AppendTo[DataTable,{y,y}];
      AppendTo[DataTable,{y,h[y]}];
      i = i + 1];

AppendTo[DataTable,{h[y],h[y]}];

      (*  Drawing the Cobweb  *)

Cobweb = ListPlot[DataTable,PlotJoined -> True,
     PlotRange -> {{xmin,xmax},{xmin,xmax}},
     AspectRatio -> 1,PlotStyle->GrayLevel[.3],
     DisplayFunction -> Identity];

      (*  Drawing the graphs of h and y=x  *)

Graph = Plot[{h[t],t},{t,xmin,xmax},
      PlotRange -> {xmin,xmax},AspectRatio -> 1,
      DisplayFunction -> Identity];

      (*  Displaying the result  *)

Show[Cobweb,Graph,DisplayFunction -> $DisplayFunction]
```

# درباره‌ی کوهمولوژی طرح‌های متناقض

راجر پنروز
ترجمه: مصطفی عین‌اله‌زاده

**چکیده**

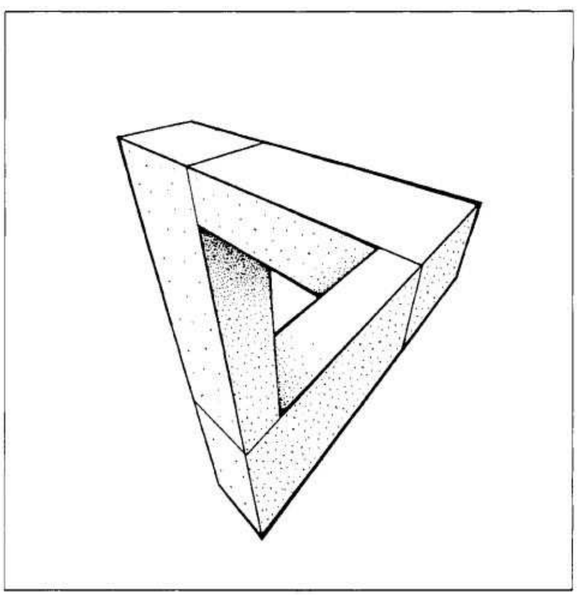
در این مقاله ارتباط نزدیک انواعی از طرح‌های متناقض و ایده‌ی ریاضی کوهمولوژی، در مورد دو مثال تریبار و طرحی متناقض مرتبط با مکعب نکر، شرح داده شده است.[۱]

اخیراً در مقاله‌ی [۳] که به افتخار اشر[۲] ارائه شده، به رابطه‌ای بین کوهمولوژی[۳] و بعضی طرح‌های مشخص متناقض اشاره کرده‌ام. در اینجا می‌خواهم تا این رابطه را به صورت کامل شرح دهم.

من در این مقاله با مفهوم گروه کوهمولوژی اول

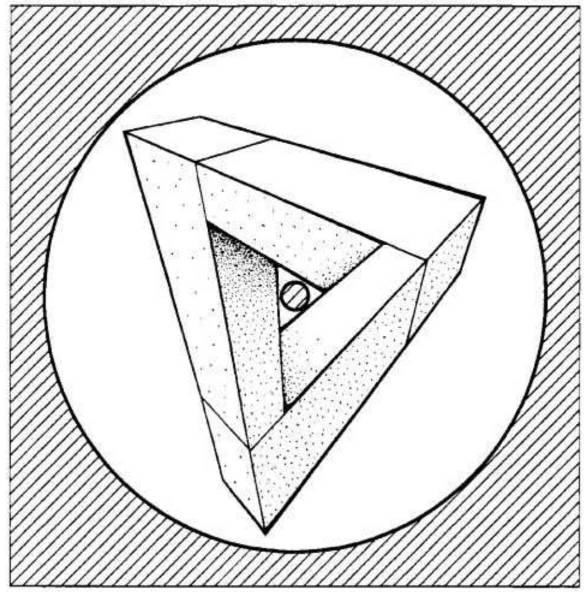
$$H^1(Q, G); \qquad (۱)$$

سروکار خواهم داشت که معنی دقیق آن در روند بحث روشن خواهد شد. در اینجا $Q$ یک ناحیه (غیر همبند ساده) از صفحه است – که قرار است شامل "محمل" (یعنی جایی که شکل در آن قرار دارد) یک طرح غیرممکن باشد – و $G$ یک گروه (معمولاً آبلی) است که به آن *گروه ابهام*[۴] طرح می‌گوییم. (خوانندگانی که با مفهوم ریاضی گروه آشنا نیستند، می‌توانند $G$ را یک مجموعه از اعداد که نسبت به اعمال ضرب و تقسیم بسته‌اند در نظر بگیرند. در نتیجه اگر $a$ و $b$ در $G$ باشند، $ab$ و $a/b$ هم در آن قرار دارند.) برای روشن شدن ایده‌ی ماجرا، دو مثال در نظر بگیرید. مثال اول تریبار[۵] است که در شکل ۱ نشان داده شده است. در اینجا $Q$ را می‌توان دقیقاً ناحیه‌ای از صفحه (کاغذ) در نظر گرفت که تریبار در آن رسم شده است و یا ناحیه‌ای اندکی بزرگتر، مانند حلقه‌ای که در شکل ۲ مشخص شده است. در مثال دوم در شکل ۳ نمونه‌ای دیگر از طرحی متناقض که در مقاله‌ای پیش از این معرفی کرده‌ام، رسم شده است.

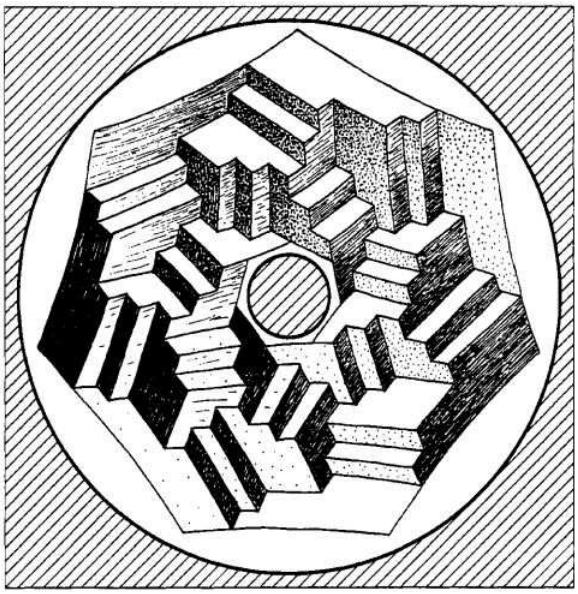


شکل ۱: ترسیمی پرسپکتیو از یک طرح متناقض – تریبار.

[۱] Roger Penrose, *On the cohomology of impossible figures.* Leonardo Vol. 25, No. 3/4, (1992), pp. 245-247.
[۲] M. C. Escher
[۳] Cohomology
[۴] Ambiguity group
[۵] Tribar



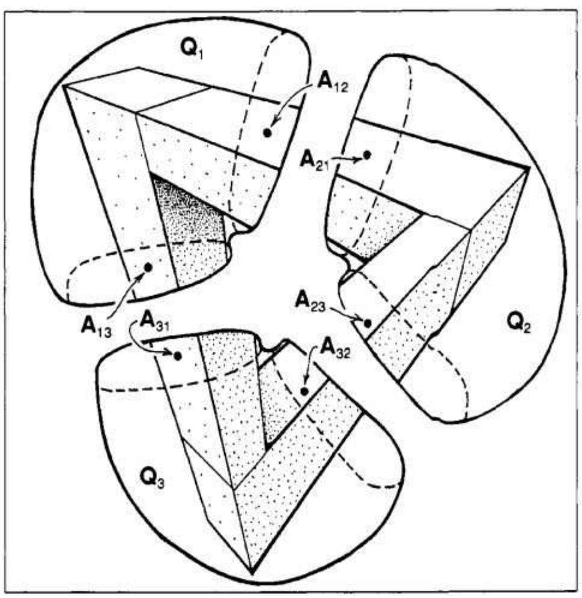
شکل ۲: تریبار را می‌توان در یک ناحیه‌ی حلقوی در صفحه با توپولوژی نابدیهی ترسیم کرد.



شکل ۳: یک طرح متناقض ظریف‌تر با گروه ابهام $\mathbb{Z}_2$ که باز در ناحیه‌ای حلقوی رسم شده است.

در ابتدا تریبار را در نظر بگیرید. همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده، ناحیه‌ی $Q$ را می‌توان از چسباندن ۳ ناحیه‌ی کوچکتر $Q_1$، $Q_2$ و $Q_3$ به دست آورد. این ناحیه‌های کوچکتر در قسمت‌هایی هم‌پوشانی دارند که برای به دست آوردن $Q$، باید روی آنها به یکدیگر چسبانده شوند.

هر کدام از ترسیم‌ها روی هر یک از ناحیه‌های $Q_1$، $Q_2$ و $Q_3$، ارائه‌ای کاملاً سازگار از یک ساختار سه بعدی هستند که ابهامی در توصیف طبیعی آنها وجود ندارد - مگر یک ابهام ذاتی که در همه‌ی تصاویر نهفته است: *فاصله‌ی* چشم ناظر و محل فرضی که جسم ترسیم‌شده در آن قرار دارد، نامعلوم است. مسلماً در بسیاری از موارد ابهام‌های دیگری نیز وجود دارد، مثلاً اینکه تصویر مورد نظر ممکن است به جای اینکه تصویری از یک شیء سه‌بعدی باشد، خودش *تصویری* از تصویری دیگر باشد. (اشر چندین بار از این مشخصه برای خلق اشکال متناقض بهره برده است، مانند 'دست‌های نقاش' و حکاکی روی چوب 'سه کره I') اما من در اینجا این ابهام و ابهام‌های ممکن دیگر را با استفاده از لفظ "تعبیر طبیعی" کنار می‌گذارم. فاصله‌ی ناظر از جسم رسم‌شده را می‌توان با یک عدد حقیقی مثبت $d$ توصیف کرد. (اعداد حقیقی مثبت را با $\mathbb{R}^+$ نشان می‌دهیم) من به $\mathbb{R}^+$ به عنوان یک گروه (آبلی) ضربی نگاه می‌کنم و در نتیجه در این حالت برای گروه ابهام داریم: $G = \mathbb{R}^+$. بیایید ببینیم این انتخاب به چه نتیجه‌ای منجر می‌شود.




شکل ۴: تریبار را می‌توان از چسباندن سه شکل کوچکتر که هر کدام سازگار هستند، به دست آورد.

قسمتی از شکل را که در $Q_1$ قرار گرفته، در نظر بگیرید و نقطه‌ی $A_{12}$ را در ناحیه‌ای که با قسمت $Q_2$ هم‌پوشانی دارد و همچنین نقطه‌ی $A_{13}$ را در قسمت مشترک با $Q_3$ انتخاب کنید. فرض کنید $A_{21}$ نقطه‌ای در $Q_2$ باشد که به $A_{12}$ چسبانده می‌شود و $A_{31}$ هم نقطه‌ای در $Q_3$ که به $A_{13}$ چسبانده می‌شود. به همین ترتیب و

همان‌طور که در شکل ۴ نشان داده شده، نقطه‌ای مانند $A_{۲۳}$ روی $Q_{۲}$ در قسمتی که به $Q_{۳}$ چسبانده می‌شود و نقطه‌ی متناظر $A_{۳۲}$ در $Q_{۳}$ را در نظر بگیرید.

حال اجازه دهید جسمی سه‌بعدی مانند $O_{۱}$ انتخاب کنیم که $Q_{۱}$ ترسیمی از آن است. همین‌طور اجسام واقعی $O_{۲}$ و $O_{۳}$ را برای $Q_{۲}$ و $Q_{۳}$ انتخاب می‌کنیم (شکل ۵). فاصله‌ی نقطه‌ای در $O_{۱}$ که در $A_{۱۲}$ ترسیم شده از چشم ناظر ($E$) ممکن است با فاصله‌ی نقطه‌ی متناظر در $O_{۲}$ که در $A_{۲۱}$ ترسیم شده، متفاوت باشد. این نسبت را $d_{۱۲}$ می‌گیریم و نسبت‌های مشابه دیگر را هم تعریف می‌کنیم. پس داریم:

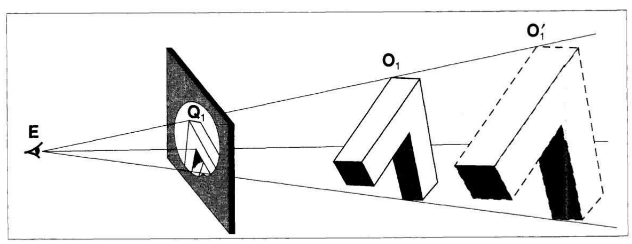
$$d_{ij} = \frac{\text{فاصله‌ی } E \text{ از نقطه‌ای در } O_i \text{ که بر } A_{ij} \text{ تصویر شده}}{\text{فاصله‌ی } E \text{ از نقطه‌ای در } O_j \text{ که بر } A_{ji} \text{ تصویر شده}} \quad (۲)$$

در ابتدا توجه می‌کنیم که نسبت‌های $d_{ij}$ به نقاط متناظر $A_{ij}$ و $A_{ji}$ که در اشتراک $Q_i$ و $Q_j$ انتخاب شده‌اند بستگی ندارند و هر انتخاب دیگر همین نسبت‌ها را می‌دهد. این نسبت $d_{ij}$ نشان‌دهنده‌ی ضریبی است که برای تبدیل $O_j$ به $O_i$ در قسمت هم‌پوشانی لازم است. علاوه بر این:

$$d_{ij} = ۱/d_{ji} \quad (۳)$$

و اگر جسم $O_i$ را با جسم دیگری که توسط $Q_i$ رسم شده عوض کنیم - یعنی اگر فاصله‌ای که برای آن با چشم ناظر در نظر گرفته‌ایم عوض کنیم- در این‌صورت برای یک عدد مثبت $\lambda$، $(d_{ij}, d_{ik})$ به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$(d_{ij}, d_{ik}) \to (\lambda d_{ij}, \lambda d_{ik}). \quad (۴)$$




شکل ۵: در هر ترسیم در صفحه، یک ابهام موضعی $\mathbb{R}^+$ در فاصله با جسم ترسیم شده وجود دارد.

حال اگر به جای تریبار، شکلی دیگر داشتیم که می‌توانست به صورت سازگار در فضای سه‌بعدی محقق شود، می‌توانستیم اشیاء $O_{۱}$، $O_{۲}$ و $O_{۳}$ را طوری نزدیکتر و یا دورتر کنیم که نهایتاً به یک ساختار واحد سازگار برسیم. این معادل است با اینکه می‌توان با تغییر مقیاس‌هایی از جنس بالا، هر سه نسبت $d_{۱۲}$، $d_{۲۳}$ و $d_{۳۱}$ را هم‌زمان به ۱ تبدیل کرد. و یا به عبارت دیگر، سه عدد مثبت $q_{۱}$، $q_{۲}$ و $q_{۳}$ وجود دارند که برای هر $i$ و $j$ متفاوت،

$$d_{ij} = q_i/q_j. \quad (۵)$$

در اصطلاح نظریه‌ی کوهمولوژی، به یک مجموعه‌ی $\{d_{ij}\}$ یک *کوسایکل*[۶] می‌گویند و اگر رابطه‌ی (۵) برقرار باشد، به این کوسایکل، *کوباندری*[۷] گفته می‌شود. جایگذاری‌های (۴) درجه‌ی *آزادی کوباندری‌ها* را نشان می‌دهد و دو کوسایکل را *هم‌ارز* می‌گیریم اگر با استفاده از این آزادی به یکدیگر تبدیل شوند. تحت این رابطه‌ی هم‌ارزی، *اعضای گروه کوهمولوژی* به دست می‌آیند، یعنی اعضای

$$H^{۱}(Q, \mathbb{R}^+). \quad (۶)$$

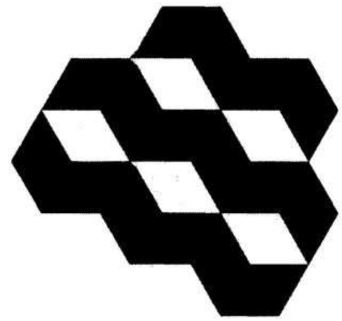
کوباندری‌ها عضو خنثای (یکه) (۶) را می‌سازند و همان‌طور که دیدیم محک "ناممکن" بودن و یا نبودن شکلی که در $Q$ رسم شده، یکه بودن و یا نبودن عضو به دست‌آمده در (۶) است.

من طرح‌های متناقض از این دست (یعنی آنهایی که تنها ابهام موضعی در شکل، فاصله‌ی ناظر از جسم رسم‌شده است) را قبلاً در [۳] به نام "خالص" نامیده‌ام. معمولاً ابهام‌های مرتبط دیگری نیز وجود دارد. برای نمونه در طرح متناقضی که در شکل ۳ نشان داده شده، ابهام مرتبط با "مکعب نکر"[۸] است. (شکل ۶ را ببینید) در اینجا فقط یک ابهام دو وجهی وجود دارد و ما می‌توانیم از اعداد ۱+ و ۱− به جای نسبت فاصله‌های $d_{ij}$ (که در (۲) تعریف شدند) استفاده کنیم، ۱+ یعنی جسم‌های ترسیم‌شده‌ی $O_i$ و $O_j$ در قسمت‌هایی که در تصویر هم‌پوشانی دارند، *مطابق* یکدیگرند و ۱− یعنی اینکه *مطابقت* ندارند. همه‌ی تحلیل‌های مشابه قسمت قبل در اینجا هم برقرار است، فقط در اینجا متغیرهای $d_{ij}$، $\lambda$ و $q_i$ به جای $\mathbb{R}^+$ در $\mathbb{Z}_{۲}$ (گروهی ضربی که فقط از ۱+ و ۱− تشکیل شده است) قرار دارند و عضوی که در گروه کوهمولوژی به دست می‌آید به

$$H^{۱}(Q, \mathbb{Z}_{۲}). \quad (۷)$$

متعلق است. اگر شکل ۳ را همانند کاری که در شکل ۴ انجام دادیم به سه تکه‌ی کوچکتر ببریم و روند مشابه را طی کنیم به عضوی از (۷) می‌رسیم که یکه نیست، در صورتی که اگر این شکل به صورت سازگار رسم می‌شد، چنین نبود. (اگر در مرکز شکل ۳ به جای هفت‌ضلعی، شش‌ضلعی و یا هشت‌ضلعی قرار داشت، عضو به دست‌آمده یکه بود.) من اثبات کامل این مطالب را به خواننده واگذار می‌کنم.

---
[۶] Cocycle
[۷] Coboundary
[۸] L. A. Necker



شکل ۶: مکعب نکر با ابهام $\mathbb{Z}_2$.

اشکال پیچیده‌تر با "تناقضات چندگانه" ([۲] را ببینید) را هم به این صورت می‌توان تحلیل کرد، اما برای این کار توصیفی پیچیده‌تر از معنی دقیق گروه کوهمولوژی (چک[۹]) لازم است. در حالت کلی شکل را باید به بیش از ۳ ناحیه افراز کرد، ولی ایده‌ی اصلی مشابه قبل است. (خواننده می‌تواند برای اطلاعات بیشتر به صفحه‌ی ۳۴ از [۱] مراجعه کند.) من معتقدم که تحلیل‌هایی از این دست می‌تواند زمینه‌ساز دست‌یابی به طرح‌های متناقض شگفت‌آور جدیدی باشد. امیدوارم که بتوانم در فرصتی دیگر به این گونه از مسائل بپردازم.

## مراجع


[۱] P. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*. John Wiley & Sons Inc., New York (1978).

[۲] L.S. Penrose and R. Penrose, *Impossible objects: a special type of visual illusion*. Br. t. J. Psych. 49 (1958), 31-33.

[۳] R. Penrose, *Escher and the visual representation of mathematical ideas*. In “M.C. Escher: Art and Science”, Eds. H.S.M. Coxeter, M. Emmer, R. Penrose and M.L. Teuber; North Holland, Amsterdam (1986), 143-167.


[۹] Čech

# کاشی‌کاری کانوی*

ویلیام پ. ترستن
ترجمه: هورمزد زمانی

افتخارات متعدد دکتر ترستن شامل جایزه اسوالد وبلن در هندسه، جایزه الن ت. واترمن بنیاد ملی علوم آمریکا (NSF) و مدال فیلدز می‌شوند. وی دکترای خود را در سال ۱۹۷۲ از دانشگاه برکلی دریافت نمود.

## ۱ مقدمه

جان کانوی[۱] با استفاده از گروه‌های نامتناهی متناهیاً تولید شده، روشی را پیدا کرد که مسأله‌ی فرش کردن یک ناحیه با کاشی‌های داده شده را در شماری از حالت‌های مورد علاقه حل می‌کند. ایده‌ی روش این است که کاشی‌ها را می‌توان به عنوان وصف کننده‌ی روابط بین مولدها در یک گروه تفسیر نمود به طوری که تنها زمانی یک ناحیه‌ی مسطح می‌تواند فرش شود که عضو توصیف کننده مرز ناحیه در گروه، عضو همانی باشد.

یک روش مناسب برای تشریح این ساختن با کمک گراف کیلی گروه می‌باشد. اگر $G$ یک گروه باشد، در این صورت گراف آن $\Gamma(G)$ نسبت به مولدهای $g_1, g_2, \dots, g_n$ گراف جهتداری است که رئوس آن اعضای گروه می‌باشند. برای هر رأس $v \in \Gamma(G)$، $n$ یال خروجی و $n$ یال ورودی که بر اساس نام مولدها برچسب دار شده‌اند خواهیم داشت. یالی که $g_i$ نام‌گذاری شده است، $v$ را به رأس $vg_i$ وصل می‌کند.

مناسب است تا اصلاح کوچکی را در این توصیف هنگامی که مولد $g_i$ از مرتبه‌ی ۲ است انجام دهیم. در این حالت، به جای آنکه پیکانی از رأس $v$ به رأس $vg_i$ و پیکان دیگری را که از رأس $vg_i$ به $v_i$ بر می‌گردد رسم نماییم، تنها یک یال بدون جهت بین دو رأس رسم می‌کنیم. اگر در ترسیم شکلی از گراف یک گروه یالی بدون جهت وجود داشته باشد، این بدان معناست که مولد مرتبط با آن‌یال از مرتبه ۲ می‌باشد.

گراف یک گروه خود به خود همگن می‌باشد: برای هر عضو $g \in G$ تبدیل $g \to gv$ یک خودریختی گراف می‌باشد. هر خودریختی گرافی که به این روش برچسب گذاری شده نیز به همین فرم می‌باشد. این ویژگی گراف‌های گروه‌ها را مشخص می‌نماید: گرافی که یال‌هایش توسط یک مجموعه‌ی متناهی $F$ به گونه‌ای برچسب گذاری شده باشد که تنها یک یال ورودی و یک یال خروجی برای هر برچسب و هر رأس وجود داشته باشد، گراف یک گروه است اگر و تنها اگر خودریختی‌ای موجود باشد که هر رأس را به هر رأس دیگری ببرد.

هر گاه $R$ یک رابطه در گروه باشد، یعنی واژه‌ای[۲] باشد نوشته شده با استفاده از مولدها که همانی را نمایش دهد، آن گاه اگر از رأس $v \in \Gamma$ شروع کنیم و مسیر $R$ را بپیماییم دوباره به $v$ باز خواهیم

*این مقاله ترجمه‌ای است از: W. P. Thurston, *Conway's Tiling Groups*, The American Mathematical Monthly, Vol. 97, No. 8, (1990), pp. 757-773

[۱] John Conway

[۲] Word

[۳] 2-complex

گشت. اگر $G$ دارای نمایش:

$$G = \langle g_1, g_2, \cdots, g_n \mid R_1 = 1, R_2 = 1, \cdots, R_k = 1 \rangle$$

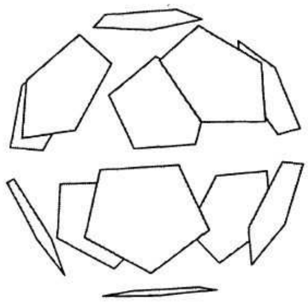
باشد، گراف $\Gamma(G)$ به یک ۲-مجتمع[۳] $\Gamma^2(G)$ گسترش می‌یابد: $k$ دیسک، هر یک به ازای هر کدام از روابط $R_i$ را در هر رأس $v \in \Gamma(G)$ بدوزید، به طوری که مرز دیسک واژه‌ی $R_i$ را بپیماید. در اینجا برای روابط به فرم $g_i^2 = 1$ استثنا قائل می‌شویم، چرا که روابط به این فرم با رسم $g_i$ به شکل بدون جهت قبلاً برابر یک گرفته شده‌اند. ۲-مجتمع $\Gamma^2(G)$ همبند ساده است: یعنی هر مسیربسته در $T^2(G)$ را می‌توان به یک نقطه منقبض نمود. در واقع، اگر مسیربسته یک مسیر یالی باشد، دنباله ای از یالهایی که می‌پیماید یک واژه‌ی نوشته شده با مولدها را می‌سازد. این حقیقت که این مسیر به نقطه‌ی آغازین خود باز می‌گردد یعنی این که این واژه عضو همانی را نمایش می‌دهد. برهان این مطلب که این واژه همانی را با استفاده از جایگذاری در روابط $R_i$ نمایش می‌دهد را از لحاظ هندسی می‌توان به صورت یک مانسته‌جایی (هوموتوپی[۴]) مسیر در $T^2(G)$ تعبیر نمود.

به عنوان یک مثال بسیار ساده، گروه متقارن $S_3$ توسط ترانهش‌های $a = (12)$ و $b = (23)$ تولید می‌شود که در رابطه‌ی $(ab)^3 = 1$ صدق می‌کنند. گراف آن یک شش‌ضلعی با یال‌های بدون جهت که متناوباً $a$ و $b$ نام‌گذاری شده‌اند می‌باشد.

یک مثال کمی پیچیده تر $S_4$ است که توسط سه عضو $a = (12)$، $b = (23)$ و $c = (34)$ تولید می‌شود. یک نمایش آن به صورت زیر است:

$$S_4 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = 1, (ab)^3 = (bc)^3 = (ac)^3 = 1 \rangle$$

برای ساختن گراف آن، ابتدا چند نسخه از شش‌ضلعی $ab$ برای زیر گروه همانند $S_3$ آن که توسط $a$ و $b$ تولید می‌شود و همچنین چند نسخه از شش‌ضلعی $bc$ بسازید. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ زیر گروه تولید شده توسط $a$ و $c$ است و گراف آن مربعی است که یالهای آن متناوباً $a$ و $c$ نام‌گذاری شده‌اند. مشابهاً از مربع $ac$ نیز چند نسخه بسازید. اکنون یک نسخه از هر چندضلعی را گرفته و آنها را دریک رأس کنار هم قرار دهید به شکلی که یک یال $a$ به‌یال $a$ دیگر به چسبد و به همین روند ادامه دهید.... در امتداد محیط شکل، به چسباندن چندضلعی‌های دیگری که تطابق دارند ادامه دهید. اگر این کار را روشمند و لایه لایه انجام دهید یک چندوجهی به دست خواهید آورد که در واقع یک هشت‌وجهی است که سر رئوسش بریده شده‌اند. تمامی یالهای هشت وجهی زمینه را $b$ نام‌گذاری کنید و مربعاتی که از بریدن رأس‌ها به دست می‌آیند را $acac$ نام‌گذاری کنید.



شکل ۱: توپ فوتبال. یک توپ فوتبال از ۱۲ پنج ضلعی که از دوران و کوچک کردن وجه‌های یک ده وجهی منتظم به دست می‌آیند به همراه ۲۰ شش‌ضلعی به مرکز رئوس ده وجهی ساخته می‌شود.

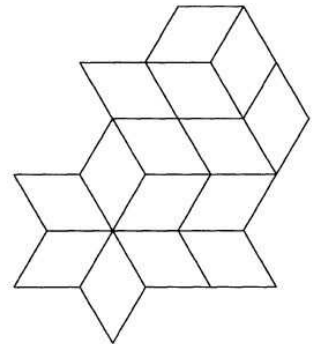
خواننده شاید از انجام این کار برای گراف گروه $A_5$ با استفاده از مولدهای $a = (12)(34)$ و $b = (12345)$ لذت ببرد. توجه کنید که روابط $b^5 = 1$ و $ab^3 = (135)^3 = 1$ برقرار هستند. تلاش کنید که ساختن را با کمک شش‌ضلعی‌های سفید $ababab$ و پنج ضلعی‌های سیاه $bbbbb$ انجام دهید.

البته گراف‌های گروه‌ها همواره به این سادگی و خوبی قابل انجام نیستند اما اغلب برای نمایش‌های ساده انجام پذیر هستند و معمولاً دارای چاشنی هندسه خوبی می‌باشند.

## ۲ لوزی‌ها

با یک مسأله‌ی نسبتاً ساده آغاز می‌کنیم. فرض کنید صفحه‌ای داریم که با مثلث‌های متساوی الاضلاع فرش شده است و ناحیه‌ی داده شده‌ی $R$، محدود به چندضلعی $\pi$ که یالهایش از یالهای مثلث‌های متساوی الاضلاع در شبکه هستند. چه زمان $R$ را می‌توان با اشکالی که متشکل از دو مثلث هم‌جوار هستند، اجازه دهید اسم آنها را لوزی[۵] بگذاریم، فرش کرد؟

[۴] Homotopy
[۵] Lozenge



شکل ۲: یک ناحیه که توسط لوزی‌ها فرش شده است. قسمتی از یک زیربخش مثلث متساوی الاضلاعی صفحه که توسط لوزی‌ها فرش شده است.

برای تحلیل مسأله، ابتدا قراردادی را برای نام‌گذاری وضع می‌کنیم. مثلث‌بندی صفحه را طوری تنظیم می‌کنیم تا یک یال از مثلث‌ها موازی محور $x$ قرار گیرند یعنی در زاویه $0^\circ$ باشند. این یالها را $a$ نام‌گذاری می‌کنیم، یالهایی که در جهت $120^\circ$ هستند را $b$ نام‌گذاری می‌کنیم و $c$ آن یالهایی می‌شوند که در جهت $240^\circ$ هستند. این نام‌گذاری همگن است، بنابراین گراف گروهی مانند $A$ می‌باشد. می‌توانیم روابط گروه $A$ را با پیمودن یالهای مثلث‌ها بخوانیم: $A$ در روابط $abc = 1$ و $cba = 1$ صدق می‌کند. اگر بخواهیم، رابطه‌ی اول را می‌توان برای حذف $c$ به کار بست؛ در آن صورت رابطه‌ی دوم خواهد گفت که $ab = ba$. گروه $A$ در واقع $\mathbb{Z}+\mathbb{Z}$ است، همانطور که از عمل آن بر روی صفحه نیز می‌توانستیم این مطلب را ببینیم.

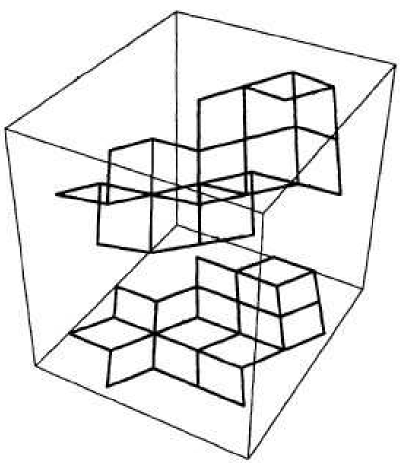
شکل چندضلعی $\pi$ توسط دنباله‌ای از یال‌هایی که می‌پیماید مشخص می‌شود؛ این در واقع یک واژه با حروف مولدهای $a, b, c$ در $A$ خواهد بود. به جای واژه در نظر گرفتن $\pi$، ترجیح می‌دهیم تا آن را به عنوان عضو $\alpha(\pi)$ در گروه آزاد $F$ با مولدهای $a, b, c$ در نظر بگیریم. این حقیقت که $\pi$ بسته است معادل با این شرط است که همریختی $F \to A$ عضو $\alpha(\pi)$ را به همانی می‌فرستد.

اگر یک لوزی را در شبکه‌ی مثلثی قرار دهیم، مرز آن بسته به جهتش توسط سه عضو پیموده می‌شود: آن عضو $L_1 = aba^{-1}b^{-1}$، $L_2 = bcb^{-1}c^{-1}$ یا $L_3 = cac^{-1}a^{-1}$ می‌باشد. واژه‌ی دقیق آن بستگی به نقطه‌ی شروع روی مرز لوزی دارد، اما شروع کردن از یک رأس دیگر تنها واژه را توسط یک جایگشت دوری تغییر می‌دهد؛ هر دو انتخاب در واقع عناصر مزدوج در $F$ هستند. گروه لوزی $L$ توسط این روابط تعریف می‌گردد:

$$L = \langle a, b, c \mid L_1 = L_2 = L_3 = 1 \rangle$$

در حقیقت سه رابطه‌ی بالا می‌گویند که سه مولد گروه با یکدیگر جابجا می‌شوند، پس $L = \mathbb{Z}^3$.

ادعا می‌کنیم که اگر ناحیه‌ی $R$ را بتوان با لوزی‌ها فرش کرد، آنگاه تصویر $\alpha(\pi)$ تحت $I$ که آن را با $I(\pi)$ نمایش می‌دهیم، در $L$ بایستی همانی باشد. در واقع، گمان کنید که چنین فرش کردنی را داشته باشیم. اگر $R$ تنها از یک کاشی تشکیل شده باشد، آنگاه ادعا بدیهی است. در غیر این صورت، کمان ساده ای در $R$ بیابید که $R$ را به دو زیرناحیه‌ی فرش شده‌ی $R_1$ و $R_2$ می‌بُرد. با استقرا، می‌توان گماشت که $I(\pi_1)$ و $I(\pi_2)$ هر دو همانی هستند، که در آن $\pi_i$ خم چندضلعی شکلی است که $\partial R_i$ را می‌پیماید. اما $I(\pi) = I(\pi_1) * I(\pi_2)$، پس $I(\pi)$ نیز همانی است.

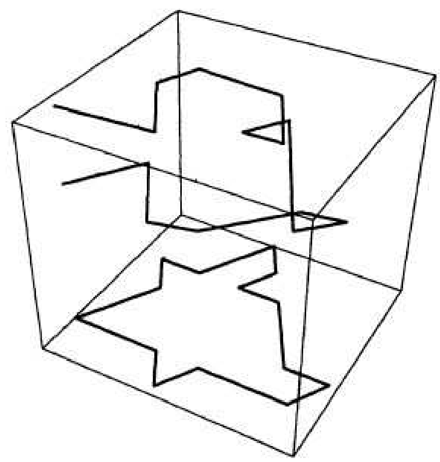


شکل ۳: تعبیر سه بعدی فرش کردن با لوزی‌ها. اگر ناحیه‌ی $R$ را بتوان با لوزی‌ها فرش کرد، آنگاه الگوی لوزیی را می‌توان به‌یک ۲-پیکره برای فرش کردن مکعبی شکل از $\mathbb{R}^3$ طوری بالا برد که به صورت قطری نسبت به صفحه لوزی‌ها جهت گیری کرده باشد.

تعبیر هندسی بسیار سرراستی وجود دارد: گراف $\Gamma(L)$ را به عنوان ۱-پیکره‌ی[6] فرش کردن فضا با آجرهای مکعبی شکل در نظر بگیرید به گونه ای که مکعب‌ها به سمت گوشه‌های خود کج قرار گرفته باشند: به بیان روشن‌تر، یعنی دو نقطه‌ی انتهایی هر مسیری با نام $abc$ روی خط عمودی یکسانی هستند. ۲-مجتمع $\Gamma^2(L)$ اجتماع وجه‌های مکعب‌ها است. یک لوزی در صفحه تصویر متعامد وجه مربعی یک مکعب است. فرض کنید مسیر $\pi$ در صفحه داده شده باشد، آن را طوری آرایش دهید (تنها برای هدف نمادگذاری) که نقطه‌ی پایه‌ی آن $*$ در زیر نقطه‌ی پایه‌ی ۱ در $\Gamma(L)$ جای بگیرد. سپس مسیر را نقطه به نقطه به یک مسیر در $\Gamma(L)$ بالا ببرید(ترفیع دهید). هنگامی که یک دور کامل در مسیر $\pi$ بزنید، ممکن است به

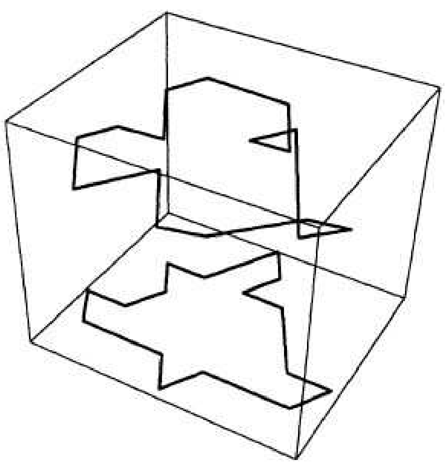
[6]1-skeleton

نقطه‌ی آغازین خود در $\Gamma(L)$ برسید یا نرسید. ناوردای $I(\pi) \in L$ رأس پایانی است. این ناوردا لزوماً در هسته‌ی نگاشت $L \to A$ قرار می‌گیرد، که با $\mathbb{Z}$ یکریخت است: می‌توان آن را با بیان ساده به عنوان ارتفاع خالص بالابرده شده توصیف کرد.
اگر $R$ را بتوان با لوزی‌ها فرش کرد، خود فرش کردن را می‌توان، کاشی به کاشی به توی $\Gamma^{۲}(L)$، یعنی به توی ۲-پیکره‌ی مکعبی شکل فرش کردن فضا بالا برد. این اثبات دیگری از اینکه $I(\pi)$ می‌بایست ۱ باشد تا $R$ فرش شدنی باشد را بدست می‌دهد. در واقع، اگر شما به یک نمونه فرش کردن با لوزی‌ها نگاه کنید، می‌توانید آن را به گونه ای تصور کنید که انگار دارد در فضای سه بعدی به سوی شما پله پله بالا می‌آید.



شکل ۴: ناحیه ای غیر فرش شدنی. ناحیه‌ی در صفحه که توسط خم چندضلعی شکل احاطه شده است قابل فرش کردن نیست،چرا که هنگامی که به شبکه‌ی مکعبی بالا برده شود بسته نمی‌گردد.

به طور جبری، با داشتن واژه‌ی نمایش دهنده‌ی $\pi$، ارتفاع خالص بالا برده شده همان مجموع نماها می‌باشد و شرط لازم مسأله این است که $\pi$ در راستای °۰، °۱۲۰یا °۲۴۰ به همان مقداری که در جهات °۱۸۰، °۳۰۰ یا °۶۰ جهت‌گیری کرده است جهت‌گیری کرده باشد.
این شرط را می‌توان با استدلال دیگری بر مبنای استفاده از رنگ آمیزی دید. مثلث‌های در صفحه متناوباً رنگ آمیزی شده‌اند، که در آن مثلث‌های $abc$ سفید و مثلث‌های $cba$ سیاه رنگ آمیزی شده‌اند. هر لوزی یک مثلث از هر دو رنگ را می‌پوشاند، بنابراین، اگر $R$ فرش شدنی باشد، تعداد مثلث‌های سفید بایست برابر تعداد مثلث‌های سیاه باشد. در واقع می‌توان نشان داد که اختلاف آنها همان ارتفاع خالص بالابرده‌شده‌ی $\alpha$ است که در راستای قطر اصلی مکعب‌ها اندازه‌گیری شده است. ملاحظات رنگ‌آمیزی کردن صفحه روش ساده تری را برای استنتاج اینکه $I(\pi)$ بایستی همانی گردد تا فرش کردن ممکن باشد در اختیار می‌گذارد. با این وجود، این روش و روش‌های رنگ آمیزی مشابه در حالت کلی به‌اندازه‌ی $I(\pi)$ اطلاعات به دست نمی‌دهند. یک راه برای نگاه کردن به این مطلب، این است که استدلال‌های بر مبنای رنگ آمیزی بخش آبلی نظریه گروه‌ها می‌باشند. اگر گروه آبلی باشد مانند مثال کنونی، یا در حالت کلی‌تر اگر زیر گروه متشکل از ناورداهای $I(\pi)$ برای مسیرهای بسته آبلی باشد، آن وقت همان‌اندازه اطلاعات کافی است.
شرط جبری$I(\pi) = ۱$ برای تضمین فرش شدنی بودن توسط لوزی‌ها کافی نیست. خم‌هایی وجود دارند که تقریباً یک دور کامل می‌زنند و ارتفاع بالابرده‌ی آن‌ها در $\Gamma(L)$ بطور قابل توجهی افزایش می‌یابد و سپس به جای این که بسته شوند به دور حلقه‌ی دیگری می‌چرخند که آن‌ها را به ارتفاع آغازین خود باز می‌گرداند. اگر $R$ را بتوان با لوزی‌ها فرش نمود، می‌توان آن را توسط یک مسیر نسبتاً کوتاه در طول یال‌های لوزی‌ها به دو ناحیه بخش کرد؛ اما افزایش ارتفاع برای یک سمت بایست که همچنان مثبت باشد که تناقض خواهد بود. ما بعداً به این مسأله برای ارائه کردن یک شرط لازم و کافی برای فرش کردن با لوزی‌ها همراه با یک فرمول برای آن در صورت وجود باز خواهیم گشت.

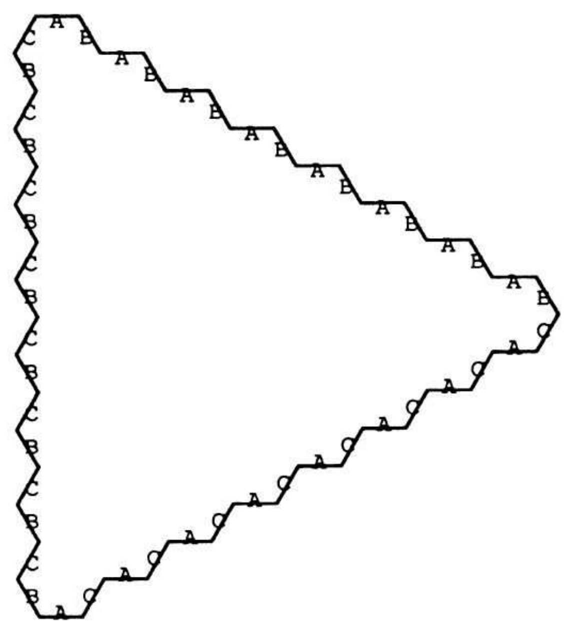


شکل ۵: ناحیه‌ای که ممکن است فرش شدنی باشد. خم مرزی این ناحیه به یک خم بسته بالابرده می‌شود، پس شرط نظریه‌ی گروهی فرش کردن را دارد. یک نمونه‌ی فرش کردن آن در آینده نشان داده می‌شود.

# ۳　کاشی‌کاری با تریبون‌ها

اکنون مسأله‌ی دیگری را بررسی می‌کنیم که روش‌های دیگر برای آن نامناسب به نظر می‌رسند. من این مسأله را بار نخست در ایمیلی از کارل و. لی در کنتاکی شنیدم.

> ترم گذشته عده‌ای از ما به مسأله‌ای ترکیبیاتی علاقه‌مند شدیم که دست به دست می‌گشت. مطمئن هستم که شما درباره‌ی آن شنیده‌اید و گفته می‌شود که جان کانوی مسأله را حل کرده است. مسأله مربوط به یک آرایه‌ی مثلثی شکل از نقاط و سؤال درباره‌ی بسته‌بندی بیشترین تعداد قطعات ممکن در این آرایه‌ی مثلثی است به طوری که هر قطعه سه نقطه‌ی مجاور را در یکی از سه جهت می‌پوشاند و هیچ دو قطعه‌ای نباید با دیگری تماس داشته باشد. آیا آرایه‌های مثلثی از اندازه‌هایی وجود دارند که بتوان آن‌ها را طوری بسته‌بندی کرد که تمامی نقاطشان را بپوشاند؟ آیا چیزی در مورد وضعیت این مسأله می‌دانید؟ پیشاپیش ممنون.



شکل ۶: مثلثی از شش ضلعی‌ها. آرایه ای مثلثی از شش‌ضلعی‌ها. آیا می‌توان آن را با تریبون‌ها فرش نمود؟

چیزی در مورد مسأله نشنیده بودم اما از کانوی در مورد آن پرسیدم. با هم‌دیگر نشستیم و او مسأله را حل کرد.

این پرسش را می‌توان معادلاً به صورت آرایه‌ای مثلثی از شش‌ضلعی‌ها فرمول بندی کرد. مسأله این است که نشان دهیم این ناحیه را نمی‌توان با کاشی‌هایی که از سه شش‌ضلعی که به طور خطی کنار هم چیده شده ساخته شده‌اند، فرش کرد. در حالت کلی‌تر، می‌توان پرسید که در صورت تلاش کردن برای فرش کردن ناحیه، حداقل سوراخ‌هایی که باقی می‌مانند چه تعداد است.

اگر ناحیه دارای ضلعی به طول $n$ باشد، آنگاه شمار شش‌ضلعی‌های درون ناحیه $\frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد. یک شرط ابتدائی آن است که $n$ یا $n+۱$ بر ۳ بخش‌پذیر باشد، یعنی $n$ به پیمانه‌ی ۳ هم‌نهشت با ۰ یا ۲ باشد. توجه کنید که اگر مسأله هنگامی که $n$ هم‌نهشت با ۲ به پیمانه‌ی ۳ است حل‌پذیر باشد، آنگاه می‌توان راه‌حل را با افزودن یک سطر از کاشی‌ها به یکی از اضلاع ناحیه به راه‌حلی برای $n+۱$ گسترش داد.

هر ضلع در شبکه‌ی شش‌ضلعی‌ها را با $a$، $b$ یا $c$ بسته به جهت یال شش‌ضلعی نام‌گذاری کنید: اگر یال موازی محور $x$ها بود $a$، اگر زاویه‌ی اندازه‌گیری‌شده از محور $x$ها تا یال $۶۰°$ درجه بود $b$ و اگر $۱۲۰°$ درجه بود آن را $c$ نام بگذارید. بنابراین، اضلاع هر شش‌ضلعی به صورت $abcabc$ برچسب گذاری می‌شوند.

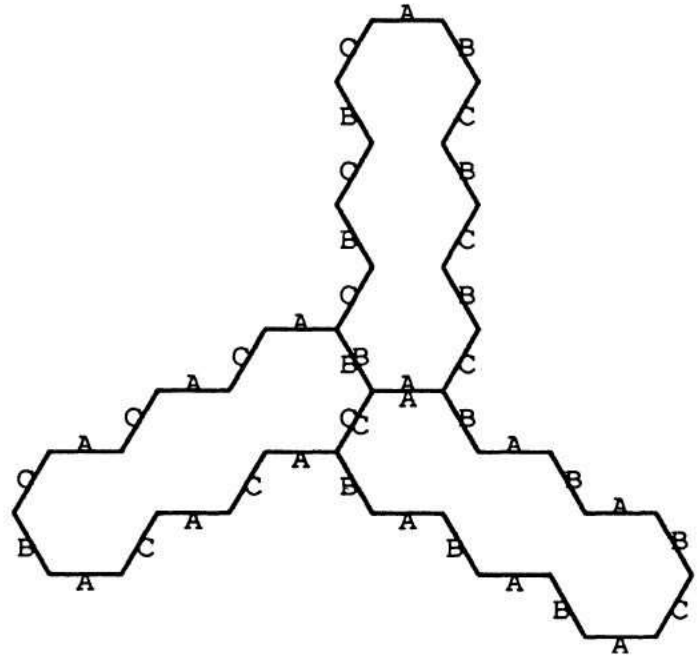
این نام‌گذاری، به ۱-پیکره‌ی شبکه ساختار یک گراف گروه می‌دهد که گروه آن

$$A = \langle a, b, c \mid a^۲ = b^۲ = c^۲ = (abc)^۲ = ۱\rangle$$

می‌باشد. این گروه، گروهی از ایزومتری‌های صفحه است که با دوران‌های $۱۸۰°$ به دور مرکز یال‌ها تولید می‌شود و هم‌چنین شامل دوران‌های $۱۸۰°$ به حول مرکزهای شش‌ضلعی‌ها می‌شود. گروه $A$ گاهی $(۲,۲,۲,۲)$-گروه نامیده می‌شود.

مسیر $\pi$ در ۱-پیکره‌ی شبکه شش‌ضلعی اکنون توسط یک واژه از مولدهای $A$ مشخص می‌شود. ترجیح می‌دهیم تا به این موضوع کمی‌متفاوت فکر کنیم: $\pi$ عضو $\alpha(\pi)$ را در حاصلضرب $F = \mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲ * \mathbb{Z}_۲$ مشخص می‌کند. ما به ویژه به مسیرهای بسته علاقه‌مند هستیم، یعنی عناصری در هسته‌ی $A \to F$.

متأسفانه، هسته‌ی این نگاشت نامتناهی‌مولد است: هسته‌ی آن گروه آزادی است که مولدهای آن توسط مسیرهای دلخواه $p_۱$ که برای ادامه‌ی راهشان به دور یکی از سه شش‌ضلعیِ واقع در نقطه‌ی پایانی مسیر $p_۱$ می‌چرخند و سپس مسیر $p_۱^{-۱}$ را برمی‌گردند داده می‌شوند.



شکل ۷: تریبون‌ها در سه جهت. سه جهت ممکن برای یک تریبون در یک آرایه‌ی شش‌ضلعی‌ها وجود دارد. با توجه به قرارداد نام‌گذاری ما، آن‌ها به سه شکل مختلف نام‌گذاری می‌شوند.

کاشی‌های استاندارد ما، که اجازه دهید آن‌ها را سه‌بند[۷] نام‌گذاری کنیم، را می‌توان در سه جهت در صفحه قرار داد. گردش به دور سه‌بندها در طول یال‌ها به سه روش انجام‌پذیر می‌باشد:

$$T_1 = (ab)^3c(ab)^3c$$

$$T_2 = (bc)^3a(bc)^3a$$

$$T_3 = (ca)^3b(ca)^3b$$

اگر $\pi$ یک دور بسته‌ی ساده در صفحه باشد و $R$ ناحیه‌ای کراندار با مرز $\pi$ باشد که بتوان آن را فرش نمود، آنگاه تصویر $\alpha(\pi)$ تحت $I$ در گروه سه‌بندها، یعنی:

$$T = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = T_1 = T_2 = T_3 = 1 \rangle$$

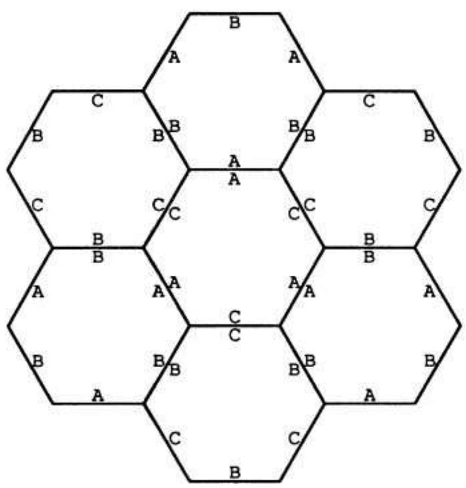
بایست بدیهی باشد.

رابطه‌ی $T_1$ می‌گوید که عمل تزویج نسبت به $c$، عضو $(ab)^3$ را به معکوس‌اش می‌برد. توجه کنید که اثر تزویج نسبت به $a$ و $b$ بر $(ab)^3$ نیز مشابهاً همین گونه است. در حقیقت، این مطلب در $F$ بر قرار است. به عبارت دیگر، $(ab)^3$ یک زیرگروه نرمال را تولید می‌کند و با هر واژه‌ی با طول زوجی جابه‌جا می‌شود. مشابهاً، $(bc)^3$ و $(ca)^3$ نیز مولد زیرگروه‌های نرمال می‌باشند. در کنار هم این سه عضو مولد زیرگروه نرمال $J$ از $T$ هستند.

برای شکل دادن تصویری از $T$، نخست اجازه دهید به گروه خارج‌قسمتی $T_0 = T/J$ با نمایش

$$T_0 = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^3 = (bc)^3 = (ca)^3 = 1 \rangle$$

نگاه کنیم. گراف $T_0$ را به آسانی می‌توان ساخت: گردایه‌ای نامتناهی از سه نوع شش‌ضلعی‌ها را که یال‌های آن‌ها توسط روابط $C_1$ ، $C_2$ و $C_3$ نام‌گذاری شده‌اند در نظر بگیرید. این شش‌ضلعی‌ها طوری به یکدیگر می‌چسبند که شبکه‌ای از طرح‌های شش‌ضلعی را در صفحه پدید می‌آورند که در آن هر رأس یک یال $a$، یک یال $b$ و یک یال $c$ دارد. گروه $T_0$ به طور وفادار به عنوان گروهی از ایزومتری‌های صفحه که توسط بازتاب‌ها نسبت به یال‌های کاشی‌کاری شش‌ضلعی تولید می‌شود عمل می‌کند: این گروه، یک گروه مثلثی است. جالب است که اگرچه گروه‌های $A$ و $T_0$ و گراف‌های برچسب زده شده‌ی $\Gamma(A)$ و $\Gamma(T_0)$ متفاوت هستند، وقتی برچسب‌ها برداشته می‌شوند آنها یکریخت می‌گردند.



شکل ۸: دومین گروه شش‌ضلعی. گروه $T_0$ هم‌چنین گرافی یک ریخت با یال‌های کاشی‌کاری صفحه توسط شش‌ضلعی‌ها دارد.

اگر ناحیه‌ی $R$ را بتوان توسط سه‌بندها کاشی‌کاری کرد، آن‌گاه $\alpha(\pi)$ بایست به همانی $T$ نگاشته شود، پس به همانی $T_0$ نگاشته می‌شود. در این مسأله، ناحیه‌ی ما آرایه‌ای از شش‌ضلعی‌ها است و مرز آن را می‌توان به صورت $\alpha(\pi) = (ab)^n(ca)^n(bc)^n$ در نظر گرفت.

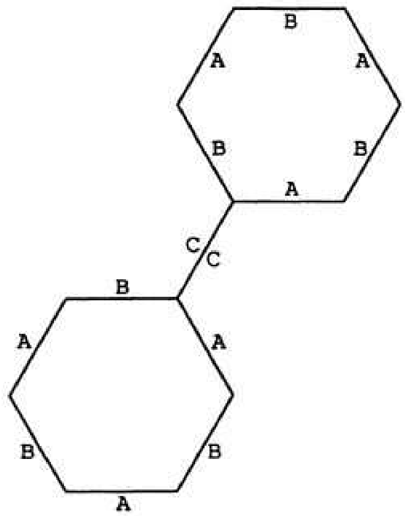
به روشنی اگر $n$ مضربی از ۳ باشد، آن‌گاه $I(\pi)/J$ در $T_0$ همانی

[۷] Tribone

خواهد بود. در حالت دیگر که $n$ دو واحد از مضربی از ۳ بزرگتر است نیز هم‌چنان همانی است. این مطلب را به راحتی می‌توان با پیمودن خم در آرایه‌ی شش‌ضلعی ما یا با توجه به این مطلب که می‌توان با قرار دادن سه‌بندهای اضافی به یک یال ناحیه‌ی جدیدی با طول $n+1$ به دست آورد که مضربی از ۳ باشد، دید. از آنجا که $\pi$ را تنها از میان سه‌بندها جلو بردیم، $I(\pi)$ می‌بایست برای هر دو حالت یکی باشد.

چون $T_0$ به تنهایی برای تعیین نابدیهی بودن $I(\pi)$ کافی نیست، لازم است تا کارمان را به پایان برسانیم و تصویری از $T$ بسازیم. نخست، به مسیری در گراف $T_0$ که توسط عضو $T_1$ مشخص می‌شود نگاه کنید. از رأس $*$ شروع کنید که در آن مدار $C_1 = ababab$ در خلاف جهت ساعت دور یک شش‌ضلعی می‌چرخد. $T_1$ در جهت خلاف ساعت به دور این شش‌ضلعی می‌چرخد، سپس در طول یال $c$ حرکت می‌کند، دور شش‌ضلعی $C_1$ در جهت ساعت باگذر از همان یال می‌چرخد و از یال $c$ باز می‌گردد تا بسته شود. به ویژه، مجموع علامت‌دار شش‌ضلعی‌های $C_1$ ای که احاطه گشته‌اند (که بنابر درجه‌ی چرخش محاسبه می‌شود که در آن مدارهای در جهت خلاف ساعت مثبت محاسبه می‌گردند)، صفر است.

اکنون توصیف گروه کامل $T$ که توسیعی از فرم $J = \mathbb{Z}^3 \to T \to T_0$ است سخت نیست. ما عضوی از $T$ را می‌توانیم به صورت رأس $v$ در گراف $T_0$ همراه با مسیر $p$ از $*$ به $v$ در نظر بگیریم، تحت این رابطه‌ی هم‌ارزی که اگر $q$ مسیر دیگری از $*$ به $v$ باشد، آن‌گاه $p \sim q$ اگر مجموع علامت‌دار شش‌ضلعی‌های $C_1$، $C_2$ و $C_3$ صفر باشد. (طبیعتاً، هنگامی‌که مسیری مانند $p$ را از $*$ به $v$ بر می‌گزینیم، آنگاه مسیرهای دیگر از $*$ به $v$ توسط سه عدد صحیح دیگر تعیین می‌شوند که این مجموع‌های علامت‌دار را مشخص می‌کنند.) با این تعریف روابط $T_i$ به روشنی ارضا می‌شوند، پس گروهی که به این نحو ساخته می‌شود حداقل گروهی خارج قسمتی از $T$ خواهد بود. اما پیش‌تر دیده‌ایم که $J$ هسته‌ی نگاشت $T \to T_0$ آبلی است و توسط $C_i$ تولید می‌گردد. در این ساختن، هسته، گروه آبلی آزاد بر روی $C_i$ است پس در حقیقت باید $T$ را به دست بدهد.




شکل ۹: تصویر دیگری از تریبون. به دلیل روش ساختن، روابط تریبونی در گروه $T$ و بنابراین در گروه $T_0 = T/J$ صادق هستند. این تصویری از یکی از روابط تریبونی درگراف گروه $T_0$ است. توجه کنید که چگونه شکل دو شش‌ضلعی-$AB$ را احاطه می‌کند. یکی در جهت ساعت و دیگری در خلاف جهت ساعت.

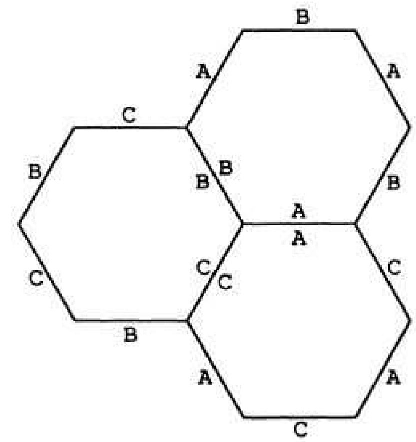
هنگامی‌که $T$ را بدانیم، $I(\pi)$ را با بررسی کردن میتوانیم پیدا کنیم. همان‌طور که دیدیم، کافی است حالتی که $n = 3k$ است را در نظر بگیریم؛ ناوردا در این حالت $C_1^k C_2^k C_3^k$ است که به روشنی ۱ نیست پس فرش کردن در این حالت شدنی نیست.

می‌توان پرسید که آیا این روش کران پایینی برای حداقل تعداد سوراخ‌هایی که پس از پوشاندن بخشی از ناحیه با سه‌بندها باقی گذاشته می‌شوند به دست می‌دهد یا خیر. برای مطالعه‌ی این سئوال، ما باید زیرگروه $K$ از $T$ را که توسط اعضای به فرم $I(\gamma)$ تولید می‌شود که $\gamma$ در آن مسیری در گراف $A$ که از $*$ به نقطه‌ای مانند $v$ می‌رود و پس از پیمودن پیرامون یک شش‌ضلعی بر می‌گردد را بررسی کنیم. به عبارت دیگر، $K$ هسته‌ی نگاشت $A \to T$ می‌باشد. توجه کنید که $\alpha(\gamma)$ فرم $gabcabcg^{-1}$ را دارد که $g$ دلخواه است. در گروه $T_0$ عضو $abcabc$ به عنوان یک انتقال عمل می‌کند. مزدوج‌های $abcabc$ در $T_0$ انتقال‌های در سه جهت مختلف با فاصله $120^\circ$ از هم هستند و زیرگروهی که تولید می‌کنند با $\mathbb{Z}^2$ یک ریخت است. در $K$ در واقع تعدادی نامتناهی از مزدوج‌ها برای $abcabc$ وجود دارند: اگر $g$ به عنوان یک انتقال در $T_0$ عمل کند، آنگاه جابه‌جاگر $gabcabcg^{-1}cbacba$ در $T_0$ همانی است اما می‌تواند در $T$ همانی نباشد چرا که این مسیر می‌تواند تعداد دلخواه $m$ شش‌ضلعی از نوع $C_1$ را احاطه کند و همین تعداد از نوع $C_2$ و $C_3$ را نیز احاطه کند.

زیرگروه $K$ بنابراین یک گروه پوچ‌توان می‌باشد که توسط

$s = abcabc$، $t = bcabca$ و $u = C_۱C_۲C_۳$ تولید می‌گردد و نمایش آن به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \langle s, t, u \mid [s,u] = [t,u] = ۱, [s,t] = u^۳ \rangle$$




شکل ۱۰: تصویر دیگری از یک مثلث. واژه‌ی مثلثی $(ab)^n(ca)^n(bc)^n$ ازاندازه $n = ۳m$ یا $n = ۳m + ۲$ به عضو همانی در $T_۰$ نگاشته می‌شود. در دیاگرام بالا، اگر $n = ۳m$ باشد واژه‌ای که از مرکز شروع می‌شود را بپیمایید. اگر $n = ۳m + ۲$ باشد، $b$ را از مرکز شروع کنید.

بررسی این که هر عضو $K$ را می‌توان به صورت $I(\pi)$ برای خم بسته‌ی ساده‌ای مانند $\pi$ در صفحه در نظر گرفت آسان است.

اگرچه ناورداهایی که به نواحی مثلثی شکل نسبت داده شده‌اند مقادیر بزرگ و بزرگتری را در $I$ می‌گیرند، این هیچ گونه اطلاعاتی که تعداد سوراخ‌ها را محدود کند نمی‌دهد: برای مثال، سه سوراخ $g_i abcabc g_i^{-۱}$ می‌توانند $u^k$ را برای مقادیر به دلخواه بزرگ $k$ به دست دهد. در حقیقت، می‌توان نواحی مثلثی ازاندازه $n$ را با سه‌بندها به استثنای یک سوراخ هنگامی که $n \equiv ۱ \pmod{۳}$ پوشاند، به این طریق که سوراخ را در وسط قرار داده و سپس سه‌بندهای هم مرکز را لایه به لایه دور آن بچینیم. با توجه به این مثال‌ها، کاشی‌کاری با سه‌بندها هنگامی‌که $n \equiv ۰ \pmod{۳}$ یا $n \equiv ۲ \pmod{۳}$ به آسانی انجام پذیر است. البته اطلاعاتی نیز به دست می‌آید: در حالتی که $n \equiv ۰ \pmod{۳}$ یا $n \equiv ۲ \pmod{۳}$، رده‌های تزویج با تغییر $n$ افزایش می‌یابند، که یعنی حداقل طول حلقه‌ی بسته‌ای که شامل تمامی سوراخ‌ها می‌شود بایست با $n$ به سمت بی‌نهایت برود. در حالتی که $n \equiv ۱ \pmod{۳}$ رده‌ی تزویج $I(\pi)$ ثابت است، چرا که ناحیه را همواره می‌توان با حذف یک شش‌ضلعی فرش نمود و $I(\pi)$ مزدوج $abcabc$ است. با این وجود خود واژه با تغییر $n$ تغییر می‌کند که نشان می‌دهد سوراخ حذف شده از شکل نمی‌تواند به مرز خیلی نزدیک باشد. احتمالاً یک بررسی موشکافانه نشان خواهد داد که اگر فقط یک سوراخ وجود داشته باشد باید دقیقاً در وسط شکل قرار گیرد.

## ۴ بازبینی لوزی‌ها و دومینوها

گروه‌های کاشی‌کاری کانوی بسیار انعطاف‌پذیر هستند به شرط آن که بتوانید با گروهی که توسط کاشی‌ها معین می‌شود کار کنید. حتی زمانی که (یا شاید بهتر است بگوییم به ویژه زمانی که) ناوردای $I(\pi)$ هیچ اطلاعات جدیدی که با روش‌های دیگر به سادگی به دست آوردنی است نمی‌دهد، از تصور هندسی گراف گروه می‌توان برای به دست آوردن نه تنها محک‌های جبری، بلکه برای به دست آوردن محک‌های دقیق هندسی برای وجود کاشی‌کاری‌ها بهره‌برداری نمود. هنگامی‌که $G$ یک گروه کاشی‌کاری است (که توسط مجموعه‌ای از کاشی‌ها نمایش داده شده)، ما روشی برای اندازه‌گیری مساحت در $\Gamma^۲(G)$ تعریف می‌کنیم که همان تصویر کردن به روی صفحه است: مساحت یک ۲-سلول[۸] در واقع همان مساحت کاشی مربوط به آن است. هنگامی‌که ناوردای جبری $I(\pi)$ برابر ۱ است، خم $\pi$ که ناحیه‌ی $R$ را محدود می‌کند به خم بسته $\tilde{\pi}$ در $\Gamma(G)$ بالا برده می‌شود. می‌توانیم بپرسم که حداقل مساحت سطحی مانند $S$ در $\Gamma^۲(G)$ با مرز $\tilde{\pi}$ چیست؟ این مساحت حداقل به بزرگی مساحت $R$ است. اگر برابر باشد، آنگاه تصویر ۲-سلول‌های $S$ بایست از هم جدا باشند پس تشکیل یک کاشی‌کاری برای ناحیه $R$ می‌دهند. روش‌های گوناگونی برای محاسبه کردن این مساحت کهین[۹] وجود دارند که گاهی موفق هستند، اما یک وضعیت خاص هست که برای آن جوابی قطعی وجود دارد: هنگامی‌که $\Gamma^۲(G)$ را بتوان با افزودن ۳-سلول‌ها تبدیل به یک ۳-منیفلد انقباض پذیر کرد. در این وضعیت، اصل "شار حداکثر، برش حداقل"[۱۰] وجود دارد که وجود یک الگوریتم برای پیدا کردن یک سطح کهین[۱۱] را تضمین می‌کند.

به جای گذر به نظریه‌ی کلی، ما این مطلب را با دو مثال روشن خواهیم ساخت. ابتدا به مسأله‌ی لوزی‌ها باز می‌گردیم. اگر $R$

[۸] 2-cell
[۹] minimal area
[۱۰] max flow min cut
[۱۱] minimal surface

اجتماعی از مثلث‌ها در صفحه باشد و اگر $v$ و $w$ رأس‌هایی در $R$ باشند که می‌توانند روی مرز نیز قرار بگیرند، $d(v,w)$ را به صورت کمترین طول از مسیرهای یال‌های با جهت مثبتی که $v$ را به $w$ وصل می‌کنند در نظر بگیرید. این تابع فاصله‌ی $d$ متقارن نیست، زیرا که نمی‌توان به سادگی جهت یک یال را عکس نمود. هر مسیر یالی از یال‌های با جهت مثبت که بسته باشد طولی از مضرب ۳ دارد، بنابراین $d(v,w)$ به پیمانه‌ی ۳ مستقل از مسیر تعریف می‌گردد. سه رأس یک مثلث سه مقدار گوناگون به پیمانه‌ی ۳ را می‌گیرند. اگر $R$ همبند باشد، همواره می‌توان حداقل یک مسیر از یال‌های با جهت مثبت را از $u$ به $v$ پیدا کرد، پس $d(v,w)$ خوش‌تعریف است.

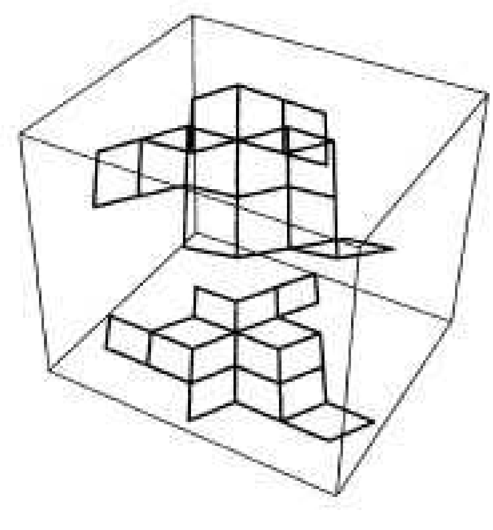
بالابری(ترفیع)[۱۲] کاشی‌کاری دلخواه $R$ به شبکه‌ی مکعبی در $\Gamma^{۳}(L)$ را در نظر بگیرید. این کار با استفاده از تابع ارتفاعی مانند $h(v)$ برای هر رأس $v$ انجام پذیر است. می‌توان مقیاس عمودی را به گونه ای انتخاب کرد که $h(v)$ صحیح-مقدار باشد و هر یال از یک لوزی بالابرده شده ارتفاعش به‌اندازه‌ی ۱ افزایش یابد. یال شبکه‌ی مثلثی پوشیده شده با لوزی به قطر یک مربع بالابرده می‌شود و ارتفاعش دو واحد کاهش می‌یابد. نتیجه آن است که $h(w)-h(v)\geq d(v,w)$.

مسیر مرزی $\pi$ تابع ارتفاع یکتایی را با تقریب یک عدد ثابت بر روی رأس‌هایش مشخص می‌کند. این مطلب شرط لازمی را برای این که ناحیه $R$ را بتوان فرش کرد به دست می‌دهد: برای هر دو رأس $v$ و $w$ روی $\pi$ باید داشته باشیم $h(w)-h(v)\geq d(v,w)$.

اگر $\pi$ این شرط لازم را بر آورده سازد، آنگاه یک کاشی‌کاری یکتا با لوزی‌ها با ارتفاع بیشینه وجود دارد. تعریف کنید:

$$h(w)=\min_{v\in\pi}\{d(v,w)\}.$$

برای ساختن این کاشی‌کاری، با یک لوزی یالی را به طریقی بپوشانید که ارتفاع دو واحد تغییر کند. از آنجایی که سه رأس یک مثلث مقادیر متفاوتی را به پیمانه‌ی ۳ می‌گیرند و چون $h$ حداکثر به‌اندازه ۱ در طول یک یال تغییر می‌کند، هر مثلث دقیقاً یک رأس دارد که ارتفاع در آن به‌اندازه‌ی دو واحد تغییر می‌کند. بنابراین مجموعه‌ی لوزی‌ها به این طریق یک کاشی‌کاری می‌شود.



شکل ۱۱: کاشی‌کاری مرتفع با لوزی‌ها. مرتفع‌ترین کاشی‌کاری سازگار با خم مرزی.

الگوریتم ساده‌ای برای محاسبه‌ی سریع $h$ و کاشی‌کاری وجود دارد. به جای پرداختن به این الگوریتم، الگوریتم مشابهی را برای دومینوها شرح می‌دهیم.

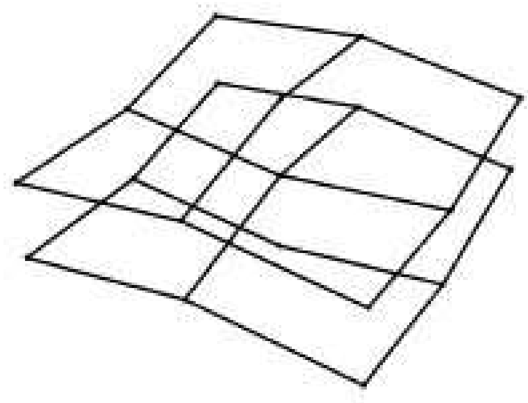
یک مسیر بسته‌ی $\pi$ در یک شبکه مربعی را می‌توان با عضو $\alpha(\pi)$ در گروه آزاد $F(x,y)$ که به عضو همانی در $A=\mathbb{Z}^{۲}$ نگاشته می‌شود تشریح کرد. اگر ناحیه‌ی $R$ محدود به $\pi$ را بتوان با دومینوها پر کرد، آنگاه تصویر $\alpha(\pi)$ تحت $I$ در گروه دومینوها $G=\langle x,y\mid xy^{۲}=y^{۲}x, yx^{۲}=x^{۲}y\rangle$ باید همانی باشد.

گراف $G$ چه شکلی است؟ می‌توانیم تصویری از آن در $\mathbb{R}^{۳}$ را این گونه بسازیم. صفحه $xy$ را با الگوی سیاه و سفید شطرنجی کنید. در بالای مربع سیاه $[۰,۱]\times[۰,۱]$ مارپیچی راستگرد را بسازید که $(۰,۰,۰)$ را با خطی به $(۰,۱,۱)$ سپس به $(۱,۱,۲)$،$(۱,۰,۳)$، $(۰,۰,۴)$ و به همین ترتیب به مابقی وصل می‌کند: مختصات $x,y$ به دور مربع در هر گام حرکت می‌کنند در حالی که مختصه‌ی $z$ هربار ۱ واحد افزایش می‌یابد. مشابهاً، $(۰,۰,۰)$ به $(۱,۰,-۱)$ و غیره وصل می‌گردد. مارپیچ مشابهی را بالای هر مربع سیاه بسازید. هر یال را با توجه به تصویرش در صفحه $x$ یا $y$ نام‌گذاری کنید. توجه کنید که با این کار مارپیچ‌های چپگردی بر روی مربع‌های سفید تولید می‌شود. مرز هر دومینو در صفحه به مسیری بسته در گرافی که ساختیم بالابرده می‌شود. چون این گراف دارای گروه ایزومتری ترایای ساده[۱۳] می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که گراف یک گروه است

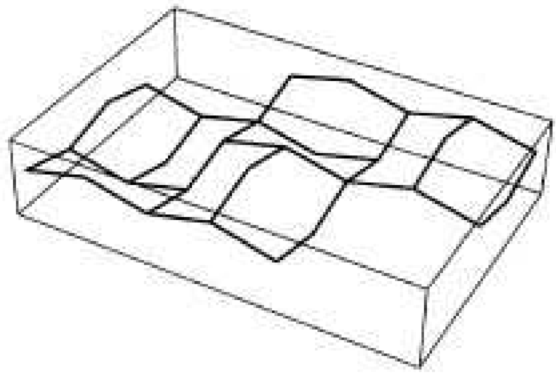
[۱۲] lifting
[۱۳] simply-transitive

و از آنجایی که در روابط دومینو صدق می‌کند، پس حداقل گروه خارج قسمتی گروه دومینویی $G$ می‌باشد. سخت نیست (و از لحاظ منطقی لازم هم نیست) که بررسی کنیم که این گراف همان گراف $G$ است.

خم $\pi$ به خم $\bar{\pi}$ در گراف $G$ بالابرده می‌شود. یک راه مناسب برای نشان دادن این مطلب، ثبت مقدار ارتفاع بالابرده شده در کنار هر رأس $\pi$ در صفحه است. قاعده این کار ساده است: می‌توان با نوشتن ۰ کنار یک رأس دلخواه شروع کرد. در طول هر یال $\pi$ که در سمت چپش مربع سیاه است، ارتفاع یک واحد افزایش می‌یابد. در طول هر یال دیگر که در سمت چپ آن مربع سفید است ارتفاع یک واحد کاهش می‌یابد. یک شرط لازم برای این که $R$ را بتوان با دومینوها پوشاند این است که ارتفاع پس از یکبار گذر به دور خم ۰ باشد.



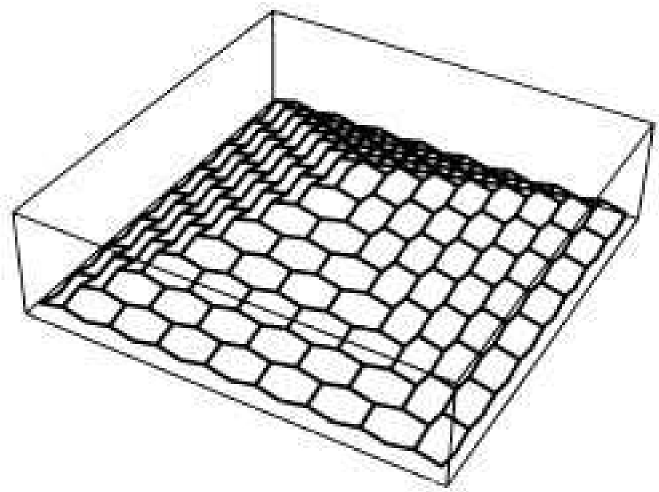
شکل ۱۲: گروه دومینو. گراف گروه دومینو اجتماعی از مارپیچ‌های مربعی بالای مربع‌های یک صفحه‌ی شطرنجی است که راستگرد یا چپگرد بودن آنها متناوباً تغییر می‌کند. یک دومینو در هر کجای صفحه به چنین گرافی بالا برده می‌شود. این تصویر دو پیچ از چهار مارپیچ همسایه را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۳: کاشی‌کاری با دومینوها. نمونه ای از کاشی‌کاری با ۹ دومینو که به گراف گروه دومینو بالابرده شده‌اند.

برای کاشی‌کاری با دومینوها محک و روش ساختنی مانند برای لوزی‌ها در دست است. چگونگی کارکرد این فرمول برای یک صفحه‌ی کاغذ شبکه‌بندی‌شده بدین صورت است که ابتدا همانند قبل ارتفاع هر رأس را با استفاده از ارتفاعش برچسب گذاری می‌کنیم. ارتفاع‌های رئوس اعدادی صحیح دربازه‌ای مانند $[n, m]$ هستند. تابع ارتفاعی را روی تمامی‌رئوس $R$ می‌سازیم و از $n+1$ شروع می‌کنیم و پیشروی می‌کنیم. فرض کنید به طور استقرائی که کارمان با تمامی‌رئوسی که ارتفاعشان کوچکتر یا مساوی $k$ است تمام شده است. برای هر رأس $v$ از ارتفاع $k$ و برای هر یال $e$ که از $v$ خارج می‌گردد و در سمت چپش مربعی سیاه قرار دارد رأس انتهایی دیگرش $w$ را در نظر بگیرید. اگر ارتفاع $w$ قبلاً تعریف گشته بود و اگر از $k+1$ بزرگتر نیست آن را همین‌گونه رها کنید. اگر ارتفاع آن قبلاً تعریف شده بوده و بیشتر از $k+1$ بود آن وقت کاشی‌کاری با دومینوها غیر ممکن است: منصرف شوید. و اگر نه، ارتفاع $w$ را $k+1$ تعریف کنید.

اگر این پروسه با موفقیت ختم گردید، اختلاف ارتفاع دو رأس انتهایی هر یال $R$ برابر ۱ یا ۳ خواهد بود. (توجه کنید که ارتفاع به پیمانه‌ی ۴ توسط نقاط در صفحه مشخص می‌شود). تمامی‌نقاط انتهایی را که اختلاف ارتفاعشان ۳ است را پاک کنید. چیزی که باقی می‌ماند شکلی نمونه از کاشی‌کاری با دومینوها است.



شکل ۱۴: سقف دومینویی. این شکل کاشی‌کاری به دست آمده از الگوریتم هنگام اجرای آن بر روی یک شبکه مربعی ۱۶ × ۱۶ است. این کاشی‌کاری بیشترین بالابری(ترفیع) در گروه دومینو را نسبت به هر کاشی‌کاری دیگری دارد.

## ۵ سه‌گوش‌ها

اکنون به یک سری از مسائل کاشی‌کاری که به تلاش‌های مستقیم برای حل کامل مقاوم هستند اما به زیبایی به قلمرو نظریه‌ی گروه‌ها ترجمه می‌شوند می‌پردازیم.

مجدداً آرایه‌ای مثلثی از نقاط را در نظر بگیرید که در هر طرف آن $N$ نقطه وجود دارد. آیا ممکن است که این آرایه را به نواحی مثلثی شکل مجزا که در هر طرف آن $M$ نقطه است بخش کنیم؟ به خواننده پیشنهاد می‌کنیم که پیش از خواندن ادامه خود را با آزمایش چند مورد این مسأله سرگرم کند. برای مثال، حالاتی که $M = ۲$ و $N$ از ۲ تا ۱۲ است جالب هستند.

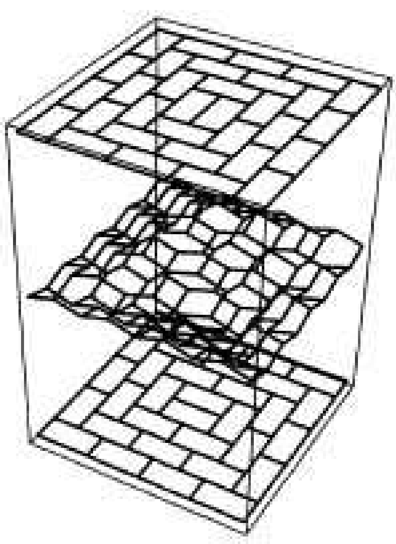
همانند سه‌بندها این مسأله به یک مسأله‌ی کاشی‌کاری بازگردان می‌شود: آرایه‌ی مثلثی شکل از شش‌ضلعی‌ها با $N$ شش‌ضلعی در هر لبه‌ی آن داده شده است، آیا می‌توان آن را با کاشی‌های $T_M$ که آرایه‌های مثلثی شکل از $M$ شش‌ضلعی در هر لبه هستند فرش کرد؟ می‌توانیم این مسأله را همانند سه‌بندها با نمادگذاری بیان کنیم: یال‌های شش‌ضلعی‌ها را با $a$، $b$ و $c$ برچسب‌گذاری کنید. مسیر $\pi$ داده شده را با $\alpha(\pi)$ در $F = \langle a, b, c \mid a^۲ = b^۲ = c^۲ = ۱ \rangle$ توصیف کنید. اگر ناحیه‌ی $R$ محدود به $\pi$ را بتوان با نسخه‌هایی از $T_M$ پوشاند، آنگاه تصویر $\alpha(\pi)$ تحت $I$ عضو همانی گروه

$$G_M = \langle a, b, c \mid a^۲ = b^۲ = c^۲ = ۱, t_M = ۱ \rangle$$

است که در آن $t_M$ خم مرزی کاشی $T_M$ را نمایش می‌دهد:

$$t_M = (ab)^M (ca)^M (bc)^M$$

متوازی الاضلاعی از شش‌ضلعی‌ها با $M$ شش‌ضلعی در یک سمت و $M + ۱$ شش‌ضلعی در سمت دیگر را می‌توان با دو نسخه از $T_M$ فرش کرد. این نتیجه می‌دهد که $(ab)^M$ با $(bc)^{M+۱}$ و $(ca)^{M+۱}$ جابه‌جا می‌شود (مشابه این مطلب را برای $(bc)^M$ و $(ca)^M$ داریم). این روابط نتیجه می‌دهند که $(ab)^M$ با $(bc)^{M(M+۱)}$ جابه‌جا می‌شود. همچنین نتیجه می‌دهند که $(ab)^{M+۱}$ با $(bc)^{M(M+۱)}$ جابه‌جا می‌شود. از ترکیب این دو حقیقت به دست می‌آید که $ab$ با $(bc)^{M(M+۱)}$ جابه‌جا می‌شود. از نقطه نظر هندسی، می‌توان متوازی الاضلاع $M \times M(M+۱)$ و متوازی الاضلاع $(M+۱) \times M(M+۱)$ را فرش کرد. اختلاف آنها متوازی الاضلاعی $۱ \times M(M+۱)$ است که می‌توان آن را با مفهوم مشخص جبری به عنوان اختلاف آن دو فرش نمود.



شکل ۱۵: حباب دومینویی. این تصویر بالاترین و پایین‌ترین کاشی‌کاری یک صفحه‌ی شطرنجی توسط دومینوها را نشان می‌دهد. این دو یک‌ریخت هستند و تنها فرقشان یک دوران $۹۰^\circ$ صفحه‌ی شطرنجی است که رنگ‌ها را جابه‌جا می‌کند. کاشی‌کاری بالاتر در صفحه‌ی بالایی و همینطور بر سطح بالایی حباب‌ها نشان داده شده است و کاشی‌کاری پایین‌تر در صفحه‌ی پایینی و بر سطح پایینی حباب‌ها نشان داده شده است. حباب‌هایی که به این صورت تشکیل می‌شوند، ترفیع هر کاشی‌کاری توسط دومینوها را احاطه می‌کنند. کاشی‌کاری‌های ممکن همانند توابع لیپشیتز در مربع، با ثابت ۱ نسبت به متر منهتن هستند. حد کاشی‌کاری‌های با دومینوها که به گراف گروه بالا برده شده‌اند، هنگامی‌که سایز شبکه به صفر میل کند، دقیقاً همان توابع لیپشیتز هستند.

اکنون در این نقطه اگر به زیرگروه‌های $F^e$ و $G_M^e$ که توسط واژگان با طول زوج تولید می‌گردند برویم می‌توانیم تصویری ساده‌تر بدست آوریم. از آنجایی که تمامی روابط طول زوج دارند، طول واژگان به پیمانه‌ی ۲ یک همریختی از $F$ و $G_M$ به $\mathbb{Z}_2$ را توصیف می‌کند و $F^e$ و $G_M^e$ زیرگروه‌هایی با نمایه(شاخص[14]) ۲ هستند. گروه $F^e$ گروه آزاد با دو مولد است، اما توصیف متقارن تری از آن این گونه است:

$$F^e = \langle x, y, z \mid xyz = 1 \rangle$$

که در آن $x = ab$، $y = bc$ و $z = ca$ است. با توجه به روابطی که از $t_M$ می‌آیند و الحاق آنها به $F^e$ نمایشی برای گروه $G_M^e$ به دست می‌آید: در واقع دو رابطه نیاز داریم، یکی از رونوشت کردن $t_M$ به طور مستقیم به دست می‌آید و دیگری از رونوشت کردن مزدوج $t_M$ توسط یک عضو با طول فرد. با استفاده از $t_M = 1$ و $bt_mb = 1$ به دست می‌آوریم:

$$G_M^e = \langle x, y, z \mid xyz = 1, x^M y^M z^M = 1, x^{-(M+1)} y^{-(M+1)} z^{-(M+1)} = 1 \rangle$$

گروه $G_M^e$ دارای یک مجموعه‌ی مولد جالب دیگر نیز می‌باشد: $X = x^M$، $X' = x^{-(M+1)}$ به همراه $Y$، $Y'$، $Z$ و $Z'$ که مشابهاً تعریف می‌شوند به روشنی مولد هستند. پیشتر دیده ایم که $X$، $Y$ و $Z$ با $X'$؛ $Y'$ و $Z'$ جابه‌جا می‌شوند.

اعضای $s = X^{M+1}$، $t = Y^{M+1}$ و $u = Z^{M+1}$ با هرچیزی در $G_M^e$ جابه‌جا می‌شوند، بنابراین زیرگروهی مرکزی $J$ را می‌سازند که همان $\mathbb{Z}^3$ یا خارج قسمتی از آن است. قرار دهید $G_M^\circ = G_M^e/J$. ما ساختار $G_M^\circ$ را بررسی کرده و از روی آن $G_M^e$ را خواهیم ساخت.

در $G_M^\circ$ روابط زیر برای $X$، $Y$ و $Z$ برقرار هستند:

$$XYZ = 1, \quad X^{M+1} = Y^{M+1} = Z^{M+1} = 1.$$

این روابط گروه مثلثی جهت نگهدار $(M+1, M+1, M+1)$ را توصیف می‌کنند که هنگامی‌که $M = 2$ به عنوان گروهی گسسته از ایزومتری‌ها بر صفحه‌ی اقلیدسی عمل می‌کند و هنگامی که $M > 2$ بر صفحه‌ی هذلولی عمل می‌کند. ما این مطلب را که این روابط تمامی روابط بر روی $X$، $Y$ و $Z$ را می‌دهند چک نکرده‌ایم اما فوراً نتیجه می‌گیریم که زیرگروه $H$ از $G_M^\circ$ تولیدشده توسط $X$، $Y$ و $Z$ گروه خارج قسمتی این گروه مثلثی است. اما همریختی $f$ از گروه اصلی $G_M$ به گروه کامل مثلثی (شامل بازتاب‌ها) وجود دارد که با فرستادن $a$، $b$ و $c$ به بازتاب‌های نسبت به اضلاع یک مثلث با زوایای $\pi/(M+1)$، $\pi/(M+1)$، $\pi/(M+1)$ تعریف می‌شود.
رابطه‌ی $t_M = 1$ برقرار است چرا که در این گروه $(ab)^M = ba$ پس $(ab)^M(ca)^M(bc)^M = (ba)(ac)(cb) = 1$. توجه کنید که $f$ عضو $X$ را به $ba$، $Y$ را به $ac$ و $Z$ را به $cb$ می‌فرستد، یعنی به عبارتی آن‌ها را به مولدهای استاندارد گروه مثلثی $(M+1, M+1, M+1)$ می‌فرستد و $s$، $t$ و $u$ را به ۰ می‌فرستد. بنابراین، $H$ با گروه مثلثی جهت پذیر $(M+1, M+1, M+1)$ یک ریخت است.

آنالیز مشابهی نشان می‌دهد که زیرگروه $H'$ تولید شده توسط $X'$، $Y'$ و $Z'$ گروه جهت پذیر مثلثی $(M, M, M)$ است. این گروه بر روی کره، صفحه‌ی اقلیدسی یا صفحه‌ی هذلولی هنگامی‌که $M = 2$، $M = 3$ یا $M \geq 4$ عمل می‌کند. همریختی مشابه $f'$ گروه $G_M$ را به گروه مثلثی $(M, M, M)$ می‌فرستد که $a$، $b$ و $c$ را به مولدهای استانداردش می‌نگارد.

دو زیرگروه $H$ و $H'$ اشتراک ندارند (همانطور که از اثر $f$ و $f'$ دیده می‌شود)، آنها $G_M^\circ$ را تولید می‌کنند و با یکدیگر جابه‌جا می‌شوند. بنابراین، $G_M^\circ$ همان حاصلضرب $H \times H'$ دو گروه مثلثی است.

اکنون لازم داریم تا هسته‌ی $J$ از خارج قسمت $G_M^e \to G_M^\circ$ و ساختار توسیع مرکزی را تعیین کنیم. همانند مورد سه‌بندها، این کار را می‌توان به طور هندسی از منظر بررسی نواحی احاطه شده با خم‌ها انجام داد. گراف $\Gamma$ گروه کامل مثلثی $(M+1, M+1, M+1)$ از سه نسخه از سه نوع $2(M+1)$ ضلعی تشکیل می‌شود که با محیط‌های نام‌گذاری شده‌ی $(ab)^M$، $(ca)^M$ و $(bc)^M$ در هر رأسی هر کدام از هر نوع به همدیگر می‌رسند. جهت‌ها را طوری بیارایید که ۱ یک رأس زوج باشد، یعنی یال‌های $a$، $b$ و $c$ که از ۱ خارج می‌شوند در جهت خلاف ساعت مرتب شوند. آنگاه رابطه‌ی $t_M = 1$ یک نسخه از هر چندضلعی را با جهت مثبت احاطه می‌کند درحالیکه مزدوج آن $bt_Mb$ یک نسخه از هر چند ضلعی را با جهت منفی احاطه می‌کند.

مشابهاً، گراف $\Gamma'$ گروه کامل مثلثی $(M, M, M)$ از سه نوع $2M$ ضلعی تشکیل می‌شود. با شروع از رأس ۱ که فرض می‌کنیم رأسی زوج است، رابطه‌ی $t_M = 1$ یک نسخه از هر نوع از چندضلعی‌ها را با جهت مثبت احاطه می‌کند در حالی که $bt_Mb$ با جهت منفی هر نسخه از هرکدام را احاطه می‌کند. البته در حالت $M = 2$ کل گراف متناهی است: در واقع، گراف آن ۱-پیکره‌ی یک مکعب است و تعداد چندضلعی‌های احاطه شده توسط یک خم تنها به پیمانه‌ی ۲ خوش تعریف است.

بگذارید ابتدا به حالت $M > 2$ بپردازیم. می‌توانیم توسیع $K$ از $G_M^\circ$ را به عنوان یک رابطه‌ی هم‌ارزی بر روی اعضای $F^e$ در نظر بگیریم: عضو $g$ در $F^e$ مسیرهای $p(g)$ در $\Gamma$ و $p'(g)$ در $\Gamma'$ را مشخص

[14] index

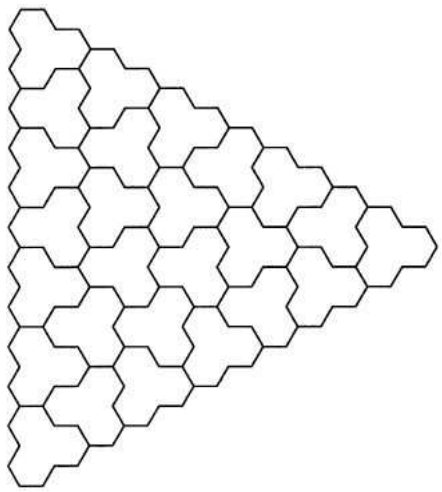
می‌کند. $g$ را هم ارز $h$ تعریف می‌کنیم هرگاه $p(g)$ به همان نقطه‌ای ختم شود که $p(h)$ ختم می‌شود، $p'(g)$ به همان نقطه‌ای ختم شود که $p'(h)$ می‌شود و اگر خم بسته‌ی $p(g)p^{-1}(h)$ همان تعداد $ab$-چندضلعی‌ها، $bc$-چندضلعی‌ها و $ca$-چندضلعی‌هایی را احاطه کند که $p'(g)p'^{-1}(h)$ می‌کند.

به ویژه، یک عضو هسته‌ی نگاشتی از $K$ به $H \times H'$ به خم‌های بسته در هر دو تصویر نگاشته می‌شود و توسط سه‌تایی اختلافات تعداد چندضلعی‌های احاطه شده معین می‌گردد. عناصر $s$، $t$ و $u$ به $(1,0,0)$، $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$ نگاشته می‌شوند. از این به دست می‌آید که $K = G^e_M$ و $J = \mathbb{Z}^3$ (با شرط $M > 2$).

مرز مثلث $T_N$ با اندازه‌ی $N$ را می‌توان توسط عنصر $t_N = (ab)^N(ca)^N(bc)^N$ توصیف نمود. مسیر $p(t_N)$ در $\Gamma$ بسته می‌شود هرگاه $N$ برابر ۰ یا ۱− به پیمانه‌ی $M+1$ باشد، در حالی که مسیر $p'(t_N)$ بسته می‌شود هرگاه که $N$ برابر ۰ یا ۱− به پیمانه $M$ باشد. چون $M$ و $M+1$ نسبت به هم اول هستند، چهار جواب به پیمانه $M(M+1)$ وجود دارند: ۰، $M$ و $M^2-1$ و ۱−. برای مقادیر $N$ که یکی از شرایط هم نهشتی را برآورده سازند، ناوردای در $G^e_M$ برابر ۰ است، پس ناوردا در $J$ قرار می‌گیرد؛ که مضرب مثبتی از (۱،۱،۱) در تمامی‌حالات به جز حالت بدیهی $N = M$ است.

**قضیه**: هرگاه $N > M > 2$، آرایه‌ی مثلثی $T_N$ از شش‌ضلعی‌ها را نمی‌توان با $T_M$ها فرش کرد.

این آنالیز هنگامی‌که $M = 2$ تغییر جالبی دارد. اگر دو عضو $g$ و $h$ در $F^e$ داده شده باشند، می‌توان آن دو را هم ارز گرفت هرگاه $p(g)$ و $p(h)$ نقاط انتهایی یکسانی داشته باشند، $p'(g)$ و $p'(h)$ نقاط انتهایی یکسانی داشته باشند و اگر تعداد چندضلعی‌هایی که از هر سه نوع با مسیر $p(g)p(h)^{-1}$ احاطه شده $k$ برابر $(1,1,1)$ باشد که زوجیت یکسانی با تعداد چندضلعی‌هایی که $p'(g)p'^{-1}(h)$ احاطه کرده داشته باشد. این توسیعی مرکزی از $H \times H'$ توسط خارج قسمت $\mathbb{Z}^3$ بر زیرگروه تولید شده توسط $s^2t^2u^2 = 1$ تعریف می‌کند. برای توجیه کردن اینکه چرا این گروه همان $G^e_2$ است، در واقع بایست نشان دهیم که $s^2t^2u^2 = (ab)^{12}(ca)^{12}(bc)^{12} = 1$ در این گروه برقرار هست یا حتی بهتر اینکه نشان دهیم $T_{12}$ را می‌توان فرش کرد. چنین فرش کردنی به راحتی به دست می‌آید - شکل را ببینید.



محاسبه‌ی ناوردای پیمانه‌ی ۲ برای کاشی‌کاری $T_2$ به طور مستقیم می‌تواند آزاردهنده باشد. با این وجود حقه‌ی جالبی وجود دارد که شخص را قادر می‌سازد که این ناوردا را به طور هندسی ببیند: بیشتر نواحی که مضربی از ۳ شش‌ضلعی دارند می‌توانند توسط $T_2$ در طول سه‌بندها فرش شوند. مرز $abababcabababc$ یک سه‌بند به خم‌های بسته‌ای در جفت $\Gamma$ و $\Gamma'$ نگاشته می‌شود. در $\Gamma$، توری از ۰ از هر نوع چندضلعی را احاطه می‌کند، همانطور که پیشتر دیدیم. در $\Gamma'$، این خم در خلاف ساعت ۱٫۵ مرتبه حول وجه $ab$ مکعب می‌چرخد، از وجه $c$ به وجه مقابل پایین می‌رود، ۱٫۵ مرتبه در جهت ساعت (با توجه به جهت مربع) می‌چرخد و مجدداً بالا می‌رود تا بسته شود. بنابراین از نظر این که کدام مربع‌ها را احاطه می‌کند با $abcabc$ معادل است که مضرب فردی از $(1,1,1)$ می‌باشد. بنابراین اگر ناحیه را با مجموعه ای از $T_2$ها همراه با تعداد فردی از سه‌بندها بتوان فرش کرد، آن را نمی‌توان با $T_2$ فرش نمود. برای $0 < N < 12$ تنها برای مقادیر $2, 3, 5, 6, 8, 9, 11$ تعداد کاشی‌ها مضربی از ۳ است. به راحتی می‌توان دید که در حالات $T_3$، $T_5$ و $T_6$ و $T_8$ کاشی‌کاری با کمک یک سه‌بند و مابقی با $T_2$ها وجود دارد در حالی که $T_2$، $T_9$ و $T_{11}$ را می‌توان فرش نمود.

با داشتن یک نمونه کاشی‌کاری ، یا حتی یک کاشی‌کاری جزئی و ناقص از $T_k$ برای $k > 1$ می‌توان آن را به یک کاشی‌کاری یا کاشی‌کاری ناقص برای $T_{k+12}$ با افزودن یک متوازی الاضلاع $k \times 12$ گسترش داد. متوازی الاضلاع $k \times 12$ را می‌توان با بخش کردن آن به متوازی الاضلاع‌های $6 \times 2$ و $6 \times 3$ فرش کرد.

**قضیه**: یک آرایه‌ی مثلثی $T_k$ از شش‌ضلعی‌ها را می‌توان با $T_2$ فرش کرد اگر و تنها اگر $k$ هم نهشت با ۰، ۲، ۹ یا ۱۱ به پیمانه‌ی ۱۲ باشد.

# دو مسأله در توپولوژی جبری

**چکیده**

مقاله‌ی زیر از دو بخش تشکیل شده است که هریک به حلِ مسأله‌ای جالب و نه چندان آسان از توپولوژی جبری می‌پردازند. ایده‌ی هردوی راه‌حل‌ها متعلق به دکتر بهمن خانه‌دانی است.

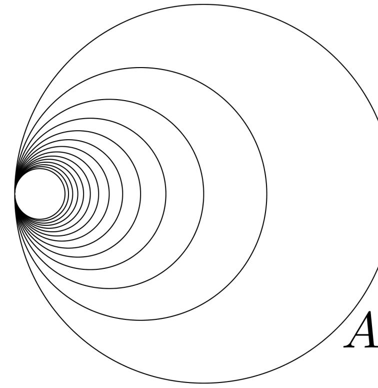
## الف. مثالی از یک فضای غیر همبند ساده که وج دو فضای انقباض‌پذیر است

در این نوشته، یک فضای توپولوژیک خاص را معرفی می‌کنیم و یک ویژگی توپولوژیک آن را اثبات می‌کنیم.

ابتدا فضای توپولوژیک معروف به گوشواره‌ی هاوایی[1] را معرفی می‌کنیم. زیرمجموعه‌ی $A$ از صفحه را به صورت اجتماع دوایر به مرکز $(\frac{1}{n},0)$ و شعاع $\frac{1}{n}$، برای $n=1,2,\ldots$، در نظر می‌گیریم. در واقع اگر $C_r(x,y)$، دایره‌ی به شعاع $r$ و مرکز $(x,y)$ باشد،

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\frac{1}{n}}(\frac{1}{n},0)$$

این فضای توپولوژیک به گوشواره هاوایی معروف است.

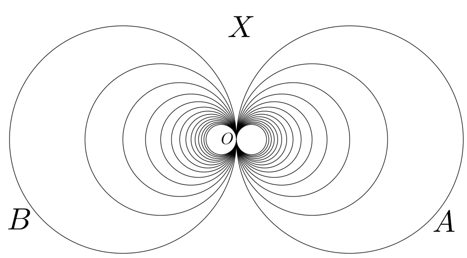



اکنون یک کپی از گوشواره‌ی هاوایی را در نقطه‌ی $O=(0,0)$ به طور قرینه به آن می‌چسبانیم. در واقع قرار می‌دهیم

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\frac{1}{n}}(-\frac{1}{n},0)$$

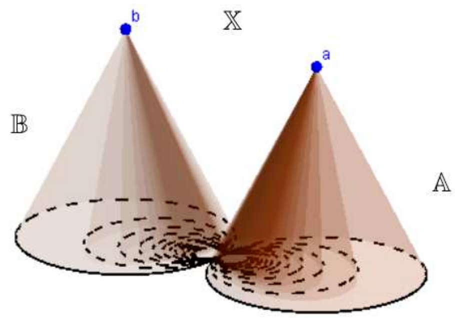
و فضای توپولوژیک حاصل از اجتماع $A$ و $B$ را $X$ می‌نامیم،

$$X=A\cup B$$




حال $A$ و $B$ را به عنوان زیرمجموعه‌هایی از صفحه‌ی $z=0$ در $\mathbb{R}^3$ در نظر می‌گیریم. اکنون دو نقطه‌ی $a=(1,0,1)$ و $b=(-1,0,1)$ را در نظر گرفته و مخروط به رأس $a$ و قاعده‌ی $A$ و مخروط به رأس $b$ و قاعده‌ی $B$ را می‌سازیم و آن‌ها را به ترتیب $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ می‌نامیم و قرار می‌دهیم $\mathbb{X}=\mathbb{A}\cup\mathbb{B}$. فضای $\mathbb{X}$، فضای اصلی مورد مطالعه در این مسأله است.

[1] Hawaiian earring




گزاره‌ی اصلی‌ای که در مورد $\mathbb{X}$ ثابت می‌کنیم این است که فضای $\mathbb{X}$ همبند ساده نیست. این گزاره از این جهت جالب است که با حکم قضیه‌ی ون‌کمپن تضاد دارد. زیرا فضاهای $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ هر کدام به تنهایی انقباض‌پذیر و در نتیجه همبند ساده هستند و فضای $\mathbb{X}$ نیز وج[2] این دو فضا است ولی همبند ساده نیست.

تعریف وج فضاهای توپولوژیک را یادآوری می‌کنیم. اگر $X_\alpha$ها فضاهای توپولوژیک و $x_\alpha$ نقطه‌ای از $X_\alpha$ باشد، آنگاه وج $X_\alpha$ها که با $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ نشان داده می‌شود، عبارت است از فضای حاصل از به هم چسباندن نقاط $x_\alpha$ در $\bigcup X_\alpha$.

**نکته‌ای درباره‌ی توپولوژی وج:** به طور دقیق‌تر، $X = \bigvee_\alpha X_\alpha$ عبارت است از فضای خارج قسمت $\bigcup X_\alpha$ با رابطه‌ی هم‌ارزی‌ای که $x_\alpha$ها را یکی می‌کند. توپولوژی‌ای که روی این فضا قرار دارد، توپولوژی خارج قسمت است. در این توپولوژی، مجموعه‌ی $U$ باز است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha$، $U \cap X_\alpha$ باز باشد. این در واقع ضعیف‌ترین توپولوژی‌ای است که نگاشت‌های شمول $i_\alpha : X_\alpha \to X$ را پیوسته می‌کند. به همین دلیل به این توپولوژی، توپولوژی ضعیف نیز می‌گویند. نکته‌ای که در اینجا باید به آن توجه کرد این است که توپولوژی روی گوشواره هاوایی، توپولوژی القایی از صفحه است و این با توپولوژی ضعیف روی اجتماع دوایر متفاوت است. به عنوان مثال، فضای وج نامتناهی دایره، فشرده نیست، ولی فضای گوشواره هاوایی فشرده است.

به راحتی می‌توان ثابت کرد که $\mathbb{X} \simeq \mathbb{A} \vee \mathbb{B}$. یکی از نتایج قضیه‌ی ون‌کمپن در مورد وج فضاهای توپولوژیک این است،

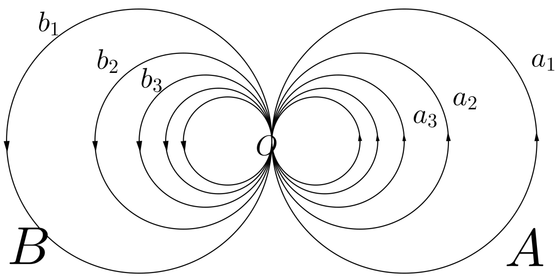
**گزاره** ([۱]، صفحه ۴۳). *اگر هر $x_\alpha$ دارای یک همسایگی باز $U_\alpha$ در $X_\alpha$ باشد که یک deformation retract به $x_\alpha$ داشته باشد، آن‌گاه $\pi_1(\vee_\alpha X_\alpha) \simeq *_\alpha \pi_1(X_\alpha)$.*

یعنی گروه بنیادی $X$ برابر است با حاصل‌ضرب آزاد گروه‌های بنیادی $X_\alpha$ها و در نتیجه اگر $X_\alpha$ها همبند ساده باشند، $X$ نیز همبند ساده است.

البته تناقضی در میان نیست، زیرا فضای $\mathbb{A}\vee\mathbb{B}$ شرط ابتدای قضیه‌ی ون‌کمپن را ندارد، یعنی $O$ دارای همسایگی $U$ در $\mathbb{A}$ و $\mathbb{B}$ نیست که داری deformation retract به $O$ باشد.

برای این‌که نشان دهیم $\mathbb{X}$ همبند ساده نیست، یک مسیر بسته $\gamma$ در $\mathbb{X}$ می‌سازیم و نشان می‌دهیم پوچ‌هموتوپ نیست.

مسیرهای بسته‌ی $a_n$ و $b_n$ را به این صورت تعریف می‌کنیم که $a_n : I \to A$، که $I$ بازه‌ی $[0,1]$ است، مسیری است که از $O$ شروع و دایره‌ی به شعاع $\frac{1}{n}$ در $A$ را در جهت پادساعت‌گرد طی کرده و به $O$ ختم می‌شود و $b_n$ نیز تعریفی مشابه در $B$ دارد.




اکنون مسیر بسته‌ی $\gamma$ را مسیری در نظر می‌گیریم که مسیرهای زیر را به ترتیب مشخص شده طی می‌کند،

$$\gamma : \qquad a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots$$

البته چون این ترکیب نامتناهی مسیر است، نیاز به تعریف دقیق‌تری دارد. ابتدا مسیر $\gamma_n = a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1}$ را به این صورت تعریف می‌کنیم،

$$\gamma_n : I \to \mathbb{X}$$

$$\gamma_n(t) = \begin{cases} a_n(4t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4} \\ b_n(4t-1) & \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{2}{4} \\ a_n(3-4t) & \frac{2}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4} \\ b_n(4-4t) & \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

در واقع $\gamma_n$ ابتدا مسیر $a_n$ و سپس مسیر $b_n$ و سپس مسیر $a_n$ را در جهت عکس و در نهایت مسیر $b_n$ را در جهت عکس طی می‌کند. حال تعریف می‌کنیم

$$\gamma : I \to \mathbb{X}$$

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(4t-2) & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{3}{4} \\ \gamma_3(8t-6) & \frac{3}{4} \leqslant t \leqslant \frac{7}{8} \\ \vdots & \vdots \end{cases} \qquad (1)$$

به راحتی می‌توان نشان داد که $\gamma$ مسیری پیوسته است.

**قضیه ۱.** *مسیر $\gamma$ معرفی شده در بالا، در $\mathbb{X}$ پوچ‌هموتوپ نیست.*

[2] wedge

*اثبات.* برای اثبات این حکم، از ابزار گروه همولوژی استفاده می‌کنیم. نگاشت طبیعی‌ای که از گروه بنیادی $X$ به گروه همولوژی اول $X$ وجود دارد را با $h$ نشان می‌دهیم.

$$h : \pi_1(X) \to H_1(X)$$

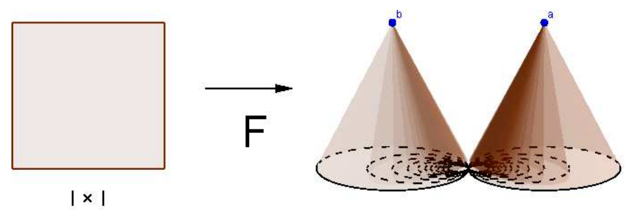
این نگاشت از در نظر گرفتن یک مسیر بسته به عنوان یک دور[۳] حاصل می‌شود. همچنین کلاس هموتوپی یک مسیر $\alpha$ در $X$ را با $[\alpha]$ نشان می‌دهیم. ابتدا گزاره زیر را ثابت می‌کنیم.

**گزاره ۲.** *اگر $\alpha$ مسیری در $X$ باشد که در $\mathbb{X}$ پوچ‌هموتوپ است، آن‌گاه*

$$h([\alpha]) \in H_1(A) + H_1(B)$$

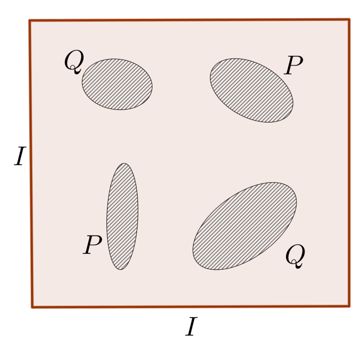
*اثبات گزاره ۲ .* دقت کنید که این واضح است که کلاس همولوژی $\alpha$ در $\mathbb{X}$ صفر است (چون در $\mathbb{X}$ پوچ‌هموتوپ است) اما حکم این گزاره درباره‌ی کلاس همولوژی $\alpha$ در $X$ است. همچنین منظور از $H_1(A)$ و $H_1(B)$ در گزاره، تصویر آن‌ها تحت نگاشت شمول در $X$ است.

فرض کنید $F : I \times I \to \mathbb{X}$ یک هموتوپی بین $\alpha$ و مسیر ثابت $O$ باشد.




$U$ و $V$ را همسایگی‌هایی از $a$ و $b$ می‌گیریم که $\bar{U} \subset \mathbb{A}^\circ$ و $\bar{V} \subset \mathbb{B}^\circ$. قرار می‌دهیم $P = F^{-1}(\bar{U})$ و $Q = F^{-1}(\bar{V})$. $P$ و $Q$ زیرمجموعه‌های فشرده از $I \times I$ هستند که $P$ از $F^{-1}(B)$ مجزا است و $Q$ از $F^{-1}(A)$ مجزا است. اکنون $\epsilon > 0$ را طوری بگیرید که

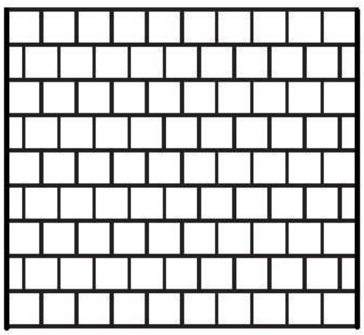
$$\epsilon < \frac{1}{2}\min(dist(P, F^{-1}(\mathbb{B})), dist(Q, F^{-1}(\mathbb{A})), dist(a, \partial U), dist(b, \partial V))$$




اکنون چون $I \times I$ فشرده و $F$ پیوسته است، پس $F$ پیوسته یکنواخت است، بنابراین وجود دارد $\delta > 0$ که

$$dist(x, y) < \delta \Rightarrow dist(F(x), F(y)) < \epsilon$$

اکنون مربع $I \times I$ را به شکل زیر توسط مربع‌های به قطر $\delta$ شبکه‌بندی می‌کنیم.



این شبکه‌بندی، برتری خاصی نسبت به شبکه‌بندی عادی دارد که در ادامه‌ی اثبات روشن می‌شود.

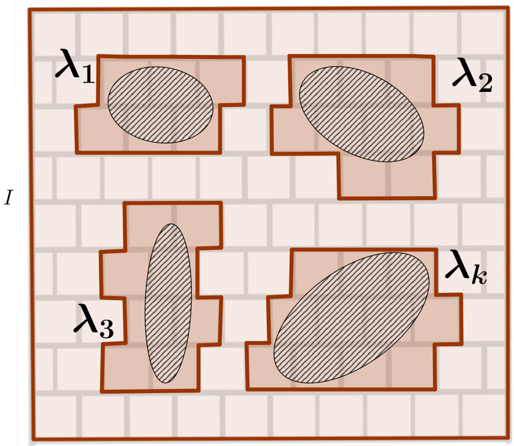
**لم ۳.** *هیچ مربعی از شبکه‌بندی، نمی‌تواند هم با $P$ و هم با $Q$ اشتراک داشته باشد، و اگر با $P$ اشتراک داشته باشد کاملاً درون $\mathbb{A}^\circ$ قرار می‌گیرد و اگر با $Q$ اشتراک داشته باشد کاملاً درون $\mathbb{B}^\circ$ قرار می‌گیرد.*

*اثبات لم.* با توجه به نحوه‌ی انتخاب $\delta$ واضح است. □

اکنون قرار می‌دهیم، $R = P \cup Q$ و فرض می‌کنیم $\{S_j\}_{j \in J}$، مجموعه‌ی همه‌ی مربع‌هایی از شبکه‌بندی باشد که با $R$ اشتراک دارند (شکل زیر را ببینید). حال مجموعه‌ی $E = \cup S_j$ را در نظر می‌گیریم. $\partial E$ اجتماعی از یال‌های شبکه‌بندی است و با اندکی دقت می‌توان دید که با توجه به نوع خاص شبکه‌بندی درجه‌ی هر رأس در $\partial E$، ۲ است. پس $\partial E$ اجتماعی از مسیرهای بسته و مجزاست. (دقت کنید که این مسیرهای بسته حتی در رأس هم مشترک نیستند.)

پس داریم $\partial E = \lambda_1 \cup \cdots \cup \lambda_n$ که هر $\lambda_i$، مسیری بسته و ساده از یال‌های شبکه‌بندی است و $\lambda_i$ها مجزا هستند.

[۳] Cycle




**لم ۴.** *تصویر هر $\lambda_i$ تحت $F$، یا کاملاً درون $\mathbb{A}^\circ - \{a\}$ قرار دارد و یا کاملاً درون $\mathbb{B}^\circ - \{b\}$ قرار دارد.*

*اثبات لم.* هر $\lambda_i$ متشکل از دنباله‌ای از یال‌های مجاور، مانند $e_1$، $e_2$، ... و $e_t$ است. از آن‌جا که هر $e_j$ یک یال مرزی از $E$ است، پس مرزی از یک مربع مانند $S_j$ است که با $R$ اشتراک دارد. بنابر لم (۳)، $S_j$ یا با $P$ اشتراک دارد و یا با $Q$. فرض کنید با $P$ اشتراک داشته باشد (حالت دیگر مشابه است). پس باز هم بنابر لم ۳، $F(S_j) \subset \mathbb{A}^\circ$ و در نتیجه

$$F(e_1) \subset \partial F(S_j) \subset \mathbb{A}^\circ$$

پس $F(e_1) \subset \mathbb{A}^\circ$. از طرفی چون $F(S_j)$ با $\partial U$ اشتراک دارد و چون $diam(S_j) = \delta < dist(a, \partial U)$، پس $F(e_1)$ نمی‌تواند شامل $a$ باشد، پس $F(e_1) \subset \mathbb{A}^\circ - \{a\}$.
اکنون $e_2$ را در نظر بگیرید. استدلالی مشابه $e_1$ نشان می‌دهد که $F(e_2)$ یا کاملاً درون $\mathbb{A}^\circ - \{a\}$ است یا کاملاً درون $\mathbb{B}^\circ - \{b\}$ است. ولی از آن‌جا که $e_2$ یک رأس مشترک با $e_1$ دارد، پس کاملاً درون $\mathbb{A}^\circ - \{a\}$ قرار می‌گیرد. و به طور مشابه، همین نتیجه برای $e_3$، ... و $e_t$ به دست می‌آید. پس $\lambda_i$ کاملاً درون $\mathbb{A}^\circ - \{a\}$ قرار می‌گیرد. □

اکنون از بین $\lambda_i$ها، آن‌هایی را در نظر می‌گیریم که درون هیچ $\lambda_i$ دیگری نیستند. آن‌ها را $\rho_1$، ...، $\rho_k$ می‌نامیم. ناحیه‌ی درون $\rho_i$ را $D_i$ می‌نامیم.
اکنون توجه کنید که

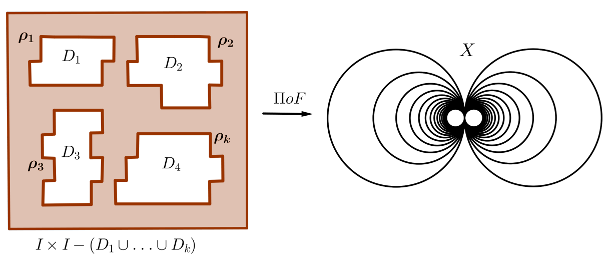
$$F^{-1}(a,b) \subset P \cup Q \subset D_1 \cup \ldots \cup D_k$$

پس تصویر $I \times I - (D_1 \cup \ldots \cup D_k)$، تحت $F$، شامل $a$ و $b$ نیست. اکنون نگاشت افکنش $\Pi : \mathbb{X} - \{a, b\} \to X$ را در نظر می‌گیریم که در $\mathbb{A}$ به صورت افکنش از رأس $a$ و در $\mathbb{B}$ به صورت افکنش از رأس $b$ عمل می‌کند. قرار دهید $g_i = \Pi o F o \rho_i$.
اکنون نگاشت

$$\Pi o F : I \times I - (D_1 \cup \ldots \cup D_k) \to X$$

نگاشتی پیوسته است که یک رویه‌ی لبه‌دار (یعنی $I \times I - (D_1 \cup \ldots \cup D_k)$) را به درون $X$ می‌نگارد به طوری که لبه‌های آن به مسیرهای $\alpha$ و $g_1$و ... و $g_k$ نگاشته می‌شوند (در واقع لبه‌ی مربع بزرگ به $\alpha$ نگاشته می‌شود و $\rho_i$ها به $g_i$ها نگاشته می‌شوند). بنابراین، اگر جهت مناسبی برای مسیرهای $g_i$ اختیار کنیم خواهیم داشت

$$h([\alpha]) = h([g_1]) + \cdots + h([g_k])$$




همچنین با توجه به لم ۴، چون تصویر هر $\rho_i$ تحت $F$ کاملا درون $\mathbb{A}$ یا کاملاً درون $\mathbb{B}$ قرار دارد پس هر $g_i$ کاملاً در $A$ یا $B$ قرار دارد. بنابراین عبارت سمت راست بالا، در $H_1(A) + H_1(B)$ قرار دارد و حکم ثابت می‌شود. □

اکنون به اثبات قضیه‌ی اصلی باز می‌گردیم. فرض می‌کنیم $\gamma$ (تعریف شده در (۱)) در $\mathbb{X}$ پوچ‌هموتوپ باشد و به تناقض می‌رسیم. ادعا می‌کنیم که باید

$$h([\gamma]) = 0$$

دقت کنید که این ادعا از تعریف $\gamma$ واضح نیست. در واقع اگرچه به نوعی $\gamma = a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \cdots$، ولی چون این ترکیبی از نامتناهی مسیر است نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که

$$h([\gamma]) = h([a_1]) + h([b_1]) - h([a_1]) - h([b_1]) + \cdots = 0$$

برای اثبات از گزاره‌ی ۲ استفاده می‌کنیم. بنابر گزاره‌ی ۲، اگر $\gamma$ در $\mathbb{X}$ پوچ‌هموتوپ باشد، آن‌گاه داریم

$$h([\gamma]) \in H_1(A) + H_1(B)$$

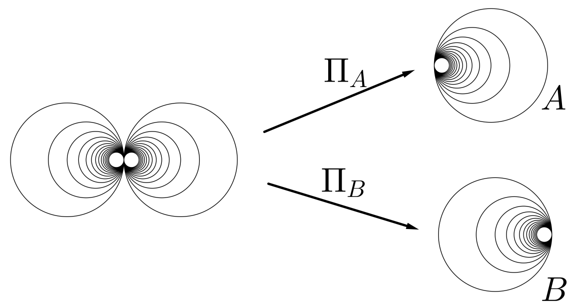
پس وجود دارند $\sigma_A \in H_1(A)$ و $\sigma_B \in H_1(B)$ که

$$h([\gamma]) = \sigma_A + \sigma_B$$

[۴] retract

اکنون نگاشت‌های $\Pi_A : X \to A$ و $\Pi_B : X \to B$ را نگاشت‌هایی در نظر بگیرید که به ترتیب $B$ و $A$ را به نقطه‌ی $O$ تصویر کنند و بقیه‌ی $X$ را ثابت نگه دارند. توجه کنید که $\Pi_A$ و $\Pi_B$ توکش[۴]هایی از $X$ به $A$ و $B$ هستند. بنابراین نگاشت‌هایی که روی گروه همولوژی القا می‌کنند روی $H_1(A)$ و $H_1(B)$ همانی هستند. بنابراین واضح است که

$$\sigma_A = \Pi_A^*(h([\gamma])), \qquad \sigma_B = \Pi_B^*(h([\gamma]))$$




اکنون توجه کنید که $\Pi_A^*(h([\gamma])) = h([\Pi_A o\gamma])$، اما $\Pi_A o\gamma$ در واقع با مسیر زیر هموتوپ است،

$$a_1a_1^{-1}a_2a_2^{-1}a_3a_3^{-1}\cdots$$

و در نتیجه پوچ‌هموتوپ است، بنابراین $h([\Pi_A o\gamma]) = 0$. مشابهاً داریم $h([\Pi_B o\gamma]) = 0$. بنابراین $\sigma_A = \sigma_B = 0$ و در نتیجه $h([\gamma]) = 0$. پس ادعا ثابت شد.

اکنون اثبات قضیه را کامل می‌کنیم. تا این‌جا ثابت کردیم $h([\gamma]) = 0$. یعنی $[\gamma]$ در گروه همولوژی صفر است. اما بنابر قضیه‌ی Hurewicz ([۱] قضیه‌ی 2A.1)،

$$\ker(h) = [\pi_1(X), \pi_1(X)]$$

بنابراین $[\gamma]$ باید در زیرگروه جابه‌جاگرهای $\pi_1(X)$ باشد. یعنی اعضای $u_1$، ...، $u_m$ و $v_1$، ...، $v_m$ از $\pi_1(X)$ وجود دارند که

$$[\gamma] = u_1v_1u_1^{-1}v_1^{-1}\cdots u_mv_mu_m^{-1}v_m^{-1} \tag{2}$$

اکنون برای هر عدد طبیعی $n$، $X_n$ را اجتماع $n$ دایره‌ی بزرگ‌تر $A$ و $B$ می‌گیریم. در واقع،

$$X_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n} a_i\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=1}^{n} b_i\right)$$

و نگاشت $\Pi_n : X \to X_n$ را نگاشتی می‌گیریم که روی $X_n$ همانی است و سایر دوایر را به $O$ می‌نگارد و نگاشت $\Pi_n^* : \pi_1(X) \to \pi_1(X_n)$ را نیز نگاشت القا شده بین گروه‌های بنیادی در نظر می‌گیریم.

اکنون $\Pi_n^*([\gamma]) = [\Pi_n o\gamma]$ و مسیر $\Pi_n o\gamma$ به وضوح با مسیر $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\cdots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ هموتوپ است.

پس بنابر رابطه‌ی (۲)،

$$\begin{aligned}[a_1][b_1][a_1]^{-1}[b_1]^{-1}\cdots[a_n][b_n][a_n]^{-1}[b_n]^{-1} &= \\ \Pi_n^*([\gamma]) = \Pi_n^*(u_1)\Pi_n^*(v_1)\Pi_n^*(u_1)^{-1}\Pi_n^*(v_1)^{-1}&\cdots \\ \Pi_n^*(u_m)\Pi_n^*(v_m)\Pi_n^*(u_m^{-1})\Pi_n^*(v_m^{-1})&\end{aligned}$$

حال می‌دانیم که $X_n$ وج $2n$ دایره است و در نتیجه گروه بنیادی آن، $\pi_1(X_n)$، گروه آزاد با مولدهای $[a_1]$، ...، $[a_n]$ و $[b_1]$، ...، $[b_n]$ است. اکنون اگر $n$ را عددی طبیعی بزرگتر از $m$ بگیریم، با گزاره‌ی زیر به تناقض می‌رسیم و حکم ثابت می‌شود.

**گزاره ۵** ([۱]، تمرین ۱۲، فصل ۳.۳). *اگر $F$ گروه آزاد تولید شده توسط $x_1$، ...، $x_{2k}$ باشد، حاصل‌ضرب*

$$x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}\cdots x_{2k-1}x_{2k}x_{2k-1}^{-1}x_{2k}^{-1}$$

*را نمی‌توان به صورت حاصل‌ضرب کمتر از $k$ جابه‌جاگر از اعضای $F$ نوشت.*

(خودِ این گزاره نیز با ابزارهای توپولوژی جبری اثبات می‌شود. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند راهنمایی لازم برای اثبات این گزاره را در [۱] ببینید.) □

فضای $\mathbb{X}$ جای مطالعه‌ی بیشتری دارد. در واقع ما تنها یک مسیر خاص معرفی کردیم و نشان دادیم که غیر پوچ‌هموتوپ است. البته گزاره‌ی ۲، که در بالا ثابت کردیم، از آن‌جا که برای هر مسیر پوچ‌هموتوپ $\alpha$ برقرار است، اطلاعات خوبی در مورد گروه بنیادی $\mathbb{X}$ نیز می‌دهد. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند به این سؤال فکر کند که گروه بنیادی $\mathbb{X}$ چیست؟

## مراجع

[1] A. Hatcher, Algebraic Topology, 2002.

# ب. گروه بنیادیِ مکملِ یک خم هموار در صفحه‌ی تصویری

## ۱ مقدمه

هدف اصلیِ این مقاله‌ی کوتاه، مطالعه‌ی گزاره‌ی زیر است که در صفحه‌ی ۴۹ از مرجع [۲] ظاهر شده است:

**اگر $C$ خمی هموار[۱] و درجه‌ی $d$ در فضای تصویریِ $\mathbb{CP}^2$ باشد، آنگاه گروه بنیادیِ $\mathbb{CP}^2 - C$ یکریخت است با $\mathbb{Z}_d$.**

مختصاتِ همگن بر صفحه‌ی تصویری را به صورتِ $[x : y : z]$ نشان می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که یک خم هموارِ درجه‌ی $d$ در صفحه‌ی تصویری با یک معادله‌ی $F(x, y, z) = 0$ داده می‌شود که در آن $F(X, Y, Z) \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ یک چندجمله‌ایِ همگن از درجه‌ی $d$ است به قسمی که خمِ $F = 0$ تعریف شده توسطِ آن تکینگی[۲] ندارد؛ یعنی، مشتقاتِ پاره‌ایِ $\frac{\partial F}{\partial X}$، $\frac{\partial F}{\partial Y}$ و $\frac{\partial F}{\partial Z}$ توأماً در هیچ نقطه‌ای جز مبدأ فضای $\mathbb{C}^3$ صفر نمی‌شوند. تلاش می‌کنیم به این مسأله از راه‌های مختلفی حمله کنیم. چند حالتِ خاص در تمرینِ زیر مطرح شده است.

**تمرین ۱.** الف) *فرض کنید $d = 1$؛ یعنی، $F(X, Y, Z)$ یک فرمِ همگنِ درجه‌ی یک باشد و $C$ خطی در فضای تصویری. نشان دهید $\mathbb{C}P^2 - C$ انقباض‌پذیر[۳] است و از آنجا درستیِ گزاره در حالتِ $d = 1$ را تحقیق کنید.*

ب) *وقتی $d = 2$، $C$ یک مقطع مخروطی[۴] هموار است. آیا می‌توان در چنین حالتی بدونِ هیچ ابزاری و صرفاً با به کار بردنِ قضیه‌ی ون‌کمپن $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - C) \cong \mathbb{Z}_2$ را اثبات نمود؟ مثلاً حالتِ خاصی را در نظر بگیرید که در آن $C = \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid xy = z^2\}$. راه‌حلی احتمالی برای محاسبه‌ی $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - C)$ به کمکِ قضیه‌ی ون‌کمپن در ادامه می‌آید: از آنجا که بُعدِ این مکمل بیش از دو (در واقع چهار) است، حذفِ یک نقطه از آن تأثیری در گروه بنیادی ندارد. پس می‌توان نقطه‌ی $[0 : 0 : 1]$ را از آن حذف کرد و گروه بنیادیِ آن‌چه که می‌ماند را حساب نمود. بازِ موصوف از $\mathbb{CP}^2$ اجتماعِ بازهای زیر است:*

$$\begin{cases} U := \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid \quad xy \neq z^2, x \neq 0\} \\ V := \{[x : y : z] \in \mathbb{CP}^2 \mid \quad xy \neq z^2, y \neq 0\} \end{cases}$$

*بر $U$ و $V$ مختصاتِ آفین به ترتیب $(\frac{y}{x}, \frac{z}{x})$ و $(\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$ را داریم. بنابراین $\mathbb{CP}^2 - (C \cup \{[0 : 0 : 1]\})$ از به هم چسباندنِ دو نسخه از*

$$D := \{(a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid \quad a \neq b^2\}$$

*از رویِ $D - \{0\} \times \mathbb{C}$ توسطِ همیورفیسمِ*

$$\begin{cases} D - \{0\} \times \mathbb{C} \to D - \{0\} \times \mathbb{C} \\ (a, b) \mapsto (\frac{1}{a}, \frac{b}{a}) \end{cases}$$

*حاصل می‌شود. ثابت کنید بازِ $D$ از $\mathbb{C}^2$ همیمورف است با $\mathbb{C} \times (\mathbb{C} - \{0\})$ و لذا $\pi_1(D) \cong \mathbb{Z}$. اکنون آیا می‌توانید به کمکِ توصیفی که از $\mathbb{CP}^2 - (C \cup \{[0 : 0 : 1]\})$ به عنوانِ فضای حاصل از به هم چسباندنِ دو نسخه از $D$ ارائه گردید؛ اثباتِ $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - C) \cong \mathbb{Z}_2$ را با استفاده از قضیه‌ی ون‌کمپن تکمیل کنید؟*

پ) *در این قسمت می‌بینیم که هموار بودنِ $C$ ضروری است. فرض کنید خمِ $C$ -که از درجه‌ی $d \geq 2$ بود- اجتماعِ $d$ خط در $\mathbb{C}P^2$ که در یک نقطه متقاربند باشد. بنابراین $C$ حتی تحویل‌ناپذیر هم نیست. نشان دهید $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - C)$ گروه آزاد با $d - 1$ مولد است. (راهنمایی: با حذفِ یکی از این خطوط نسخه‌ای از $\mathbb{C}^2$ باقی می‌ماند که $d - 1$ خط موازی از آن حذف شده است.)*

پ) *فرض کنید $C$ یک مقطع مخروطیِ نه لزوماً هموار در صفحه‌ی تصویری باشد. ثابت کنید $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - C)$ تنها سه حالت دارد و آنها را تعیین کنید. (راهنمایی: عملِ $\mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ بر چندجمله‌ای‌های همگنِ سه متغیره و درجه‌ی ۲ سه مدار دارد که عبارتند از چندجمله‌ای‌هایی که مربعِ یک فرمِ همگنِ درجه‌ی یک هستند، آنهایی که با ضربِ دو فرمِ همگنِ درجه‌ی یک که مضربی از هم نباشند داده می‌شوند و چندجمله‌ای‌های تحویل‌ناپذیر. به کمکِ قسمت‌های پیشین در هریک از این حالت‌های چندجمله‌ایِ درجه‌ی دومِ $F(X, Y, Z)$، گروه بنیادی برای مکملِ $F = 0$ در صفحه‌ی تصویری را در یک مثال از $F$ حساب کنید.)*

با توجه به آن‌که همیشه محاسبه‌ی گروه‌های همولوژی از محاسبه‌ی گروه‌های هموتوپی آسان‌تر است؛ اولین قدم بررسیِ همولوژی‌های $\mathbb{CP}^2 - C$ است که در جریانِ آن چند قضیه‌ی مهم مرور می‌شود.

---
[۱] smooth
[۲] singularity
[۳] contractible
[۴] conic

## ۲ محاسبه‌ی گروه‌های همولوژی

به منظورِ محاسبه‌ی گروه‌های همولوژیِ $\mathbb{CP}^2-C$ از قضیه‌ی زیر استفاده می‌کنیم که در مرجع [۱] صفحه‌ی ۳۵۲ ظاهر شده است و تعمیمی است از دوگانیِ پوآنکاره[۵].

**قضیه‌ی ۲. دوگانیِ لفشتز-پوانکاره[۶].** *فرض کنید $M$ خمینه‌ای توپولوژیک، فشرده و جهت‌پذیر از بُعدِ $n$ و $L$ زیرخمینه‌ای بسته از آن باشد. آنگاه در هر گروهی از ضرایب[۷]:*

$$H^p(M,L)\cong H_{n-p}(M-L)$$

از این قضیه

$$\forall i: H^i(\mathbb{CP}^2,C)\cong H_{4-i}(\mathbb{CP}^2-C)$$

دنباله‌ی بلند دقیق[۸] در کوهمولوژی با ضرایب در $\mathbb{Z}$ را برای زوجِ $(\mathbb{CP}^2,C)$ می‌نویسیم.

$$\cdots\to H^i(\mathbb{CP}^2,C)\to H^i(\mathbb{CP}^2)$$
$$\to H^i(C)\to H^{i+1}(\mathbb{CP}^2,C)\to\cdots$$

چون $C$ دوبعدی است، کوهمولوژی‌اش در مرتبه‌های بیشتر از ۲ صفر است و از طرفِ دیگر کوهمولوژیِ $\mathbb{CP}^2$ را می‌دانیم[۹]: $H^i(\mathbb{CP}^2)$ به ازای $i=0,2,4$ یکریخت است با $\mathbb{Z}$ و در سایرِ مرتبه‌ها صفر است. لذا:

$$H^4(\mathbb{CP}^2,C)\cong H^4(\mathbb{CP}^2)\cong\mathbb{Z}$$

و دنباله‌ی زیر دقیق است:

$$0=H^1(\mathbb{CP}^2)\to H^1(C)\to H^2(\mathbb{CP}^2,C)\to H^2(\mathbb{CP}^2)\cong\mathbb{Z}$$
$$\to H^2(C)\to H^3(\mathbb{CP}^2,C)\to H^3(\mathbb{CP}^2)=0$$

اما چون $C$ خمی از درجه‌ی $d$ بود، در دنباله‌ی دقیقِ فوق

$$H^2(\mathbb{CP}^2)\cong\mathbb{Z}\to H^2(C)\cong\mathbb{Z}$$

با $d$ برابر کردن داده می‌شود و از آنجا:

$$H^3(\mathbb{CP}^2,C)\cong\mathbb{Z}_d\quad H^2(\mathbb{CP}^2,C)\cong H^1(C)\cong\mathbb{Z}^{(d-1)(d-2)}$$ [۱۰]

گروه‌های کوهمولوژیِ نسبی به شرحی که در بالا محاسبه گردید را با قضیه‌ی ۲ به گروه‌های همولوژی مرتبط می‌سازیم و از آنجا همولوژی‌های $\mathbb{CP}^2-C$ حساب می‌شود:

$$H_0(\mathbb{CP}^2-C)\cong\mathbb{Z}, H_1(\mathbb{CP}^2-C)\cong\mathbb{Z}_d,$$
$$H_2(\mathbb{CP}^2-C)\cong\mathbb{Z}^{(d-1)(d-2)}$$
$$H_3(\mathbb{CP}^2-C)=0, H_4(\mathbb{CP}^2-C)=0$$

که برای دو موردِ آخر از این استفاده شد که با توجه به یکریختی بودنِ $H^0(\mathbb{CP}^2)\to H^0(C)$ [۱۱] و $H^1(\mathbb{CP}^2)=0$، هر دوی $H^0(\mathbb{CP}^2,C)$ و $H^1(\mathbb{CP}^2,C)$ صفرند. به علاوه دیدیم که $H_i(\mathbb{CP}^2-C)$ یکریخت است با $H^{4-i}(\mathbb{CP}^2,C)$ و بنابراین هرگاه $i>4$ صفر است. در جمع‌بندی، همولوژی‌های $\mathbb{CP}^2-C$ تنها در مرتبه‌های ۰، ۱ و ۲ ناصفرند که در آن مرتبه‌ها به ترتیب یکریختند با $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Z}_d$ و $\mathbb{Z}^{(d-1)(d-2)}$.

## ۳ حلِ مسأله به کمکِ قضیه‌ای از میلنُر

ابزاری که در جهتِ حلِ این مسأله به کار می‌بریم مبتنی است بر تئوریِ «نقاطِ تکینِ ابررویه‌های مختلط» که در مرجع [۴] نوشته‌ی میلنُر بیان شده است. به منظورِ دیدنِ صورتِ قضایای این کتاب مراجعه کنید به فصلِ اولش. ابتدا چند مقدمه: $g(z_1,\cdots,z_{n+1})$ را یک چندجمله‌ایِ غیر ثابت با ضرایبِ مختلط بگیرید. حال $V$ را ابررویه‌ای در فضای $\mathbb{C}^{n+1}$ بگیرید که با معادله‌ی $g(\mathbf{z})=0$ داده می‌شود که اینجا مختصات در $\mathbb{C}^{n+1}$ را با $\mathbf{z}=(z_1,\cdots,z_{n+1})$ نشان داده‌ایم. $\mathbf{z^0}$ را نقطه‌ای از $V$ بگیرید. یادآوری می‌کنیم که $\mathbf{z^0}$ یک نقطه‌ی منظم [۱۲] نامیده می‌شود هرگاه حداقل یکی از مشتقات پاره‌ایِ $\frac{\partial g}{\partial z_i}$ در $\mathbf{z^0}$ ناصفر باشد. کره‌ی به مرکزِ $\mathbf{z^0}$ و شعاعِ $\epsilon>0$ را به $S_\epsilon(\mathbf{z^0})$ نشان می‌دهیم که کره‌ای است $2n+1$بعدی. در کتابِ میلنُر توپولوژیِ اشتراکِ $S_\epsilon(\mathbf{z^0})\cap V$ به ازای $\epsilon$های به اندازه‌ی کافی کوچک مطالعه شده است.

[۵] Poincaré Duality

[۶] Poincaré-Lefschetz Duality

[۷] لازم به ذکر است صورتی از دوگانیِ لفشتز- پوآنکاره که در [۱] آمده در واقع یکریختی‌ای بینِ گروه‌های همولوژی و گروه‌های کوهمولوژیِ چک (Čech cohomology) بدست می‌دهد که به فرمِ $\check{H}^p(M,L)\cong H_{n-p}(M-L)$ است که در آن تنها $M$ باید یک خمینه‌ی فشرده و جهت‌پذیرِ $n$بعدی باشد و $L$ زیرفضایی بسته. شرط‌های اضافه‌ای که ما قرار داده‌ایم باعث می‌شود گروه‌های کوهمولوژیِ چک و کوهمولوژیِ تکین (singular cohomology) یکسان گردند. رجوع کنید به صفحه‌ی ۳۴۹ از [۱] .

[۸] long exact sequence

[۹] [۳]، صفحه‌ی ۲۱۲.

[۱۰] از این نتیجه‌ی استاندارد استفاده کردیم که خمِ مسطحِ هموارِ درجه‌ی $d$ از گونای $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ است.

[۱۱] حکمی استاندارد بیان می‌کند که هر خم جبری همبند است.

[۱۲] regular point

[۱۳] Fibration Theorem

[۱۴] fiber bundle

[۱۵] fiber

[۱۶] isolated singular point

**قضیه‌ی ۳. قضیه‌ی تاری‌سازی**[13]. *به ازای $\epsilon > 0$های به اندازه‌ی کافی کوچک نگاشت زیر*
$$\begin{cases}\phi: S_\epsilon(\mathbf{z^0}) - V \to S^1\\ \mathbf{z}\mapsto \frac{g(\mathbf{z})}{|g(\mathbf{z})|}\end{cases}$$
*یک کلاف تاری*[14] *است و هر تار*[15] *یک خمینه‌ی هموار و $2n$ بعدی است. به علاوه زمانی که $\mathbf{z^0}$ یک نقطه‌ی تکین منفرد*[16] *باشد، می‌توان توصیفِ بسیار دقیق‌تری از تارها ارائه نمود: هر تار از $\phi$ هم‌ارزِ هموتوپ با وجِ*[17] *تعدادی مثبت $S^n$ است.*

به کمکِ این قضیه می‌توان مسأله‌ای بسیار کلی‌تر را حل نمود و گروه بنیادی را نه برای مکملِ یک خم هموار در صفحه‌ی تصویری بلکه برای مکملِ یک ابررویه‌ی هموار در فضای تصویری از بعدِ دلخواه محاسبه نمود. فضای تصویریِ $\mathbb{CP}^n$ با $n \geq 2$ و ابررویه‌ی هموارِ $W$ از درجه‌ی $d$ در آن در نظر بگیرید که با صفرهای یک چندجمله‌ای همگنِ $F(Z_1,\dots,Z_{n+1}) \in \mathbb{C}[Z_1,\dots,Z_{n+1}]$ داده می‌شود. اینجا مختصاتِ همگن بر $\mathbb{CP}^n$ را به $[z_1:\cdots:z_{n+1}]$ نمایش می‌دهیم. نگاشتِ خارج‌قسمتی‌ای از $\mathbb{C}^{n+1}-\{\mathbf{0}\}$ به فضای تصویری داریم که هر نقطه را به کلاسِ متناظرش در فضای تصویری می‌برد. با تحدیدِ آن به کره‌ی واحد در فضای $\mathbb{C}^{n+1}$
$$S^{2n+1} = \{(z_1,\dots,z_{n+1}) \mid \ |z_1|^2+\cdots+|z_{n+1}|^2=1\}$$
به یک نگاشتِ
$$(*)\begin{cases} S^{2n+1}\to\mathbb{CP}^n\\ (z_1,\dots,z_{n+1})\mapsto[z_1:\cdots:z_{n+1}]\end{cases}$$
می‌رسیم که $S^{2n+1}$ را به یک کلاف تاری با تارِ $S^1$ تبدیل می‌کند. بدیهی است که می‌توان در بالا کره‌ی واحدِ $S^{2n+1}$ را با کره‌ای به شعاع دلخواه حولِ مبدأ تعویض نمود.

ابزاری مفید جهتِ محاسبه‌ی گروه‌های هموتوپیِ کلاف‌های تاری، حکمِ استانداردِ زیر است که می‌توانید آن را در فصل ۴ از مرجعِ [۳] ببینید:

**قضیه‌ی ۴.** *فرض کنید $p: E\to B$ یک کلاف تاری با تارِ $F$*[18] *باشد. آنگاه یک دنباله‌ی بلند دقیق از گروه‌های هموتوپی به صورت زیر وجود دارد:*
$$\cdots\to\pi_i(F)\to\pi_i(E)\to\pi_i(B)\to\pi_{i-1}(F)\to\cdots$$
$$\to\pi_1(B)\to\pi_0(F)\to\pi_0(E)\to 0$$

در دنباله‌ی فوق همریختی‌های $\pi_i(E)\to\pi_i(B)$ توسطِ $p$ و همریختی‌های $\pi_i(F)\to\pi_i(E)$ توسطِ شمولِ تار در $E$ القا می‌شوند. تنها شیوه‌ی ساختنِ همریختیِ اتصالیِ $\pi_i(B)\to\pi_{i-1}(F)$ نیاز به توضیح دارد که خواننده می‌تواند آن را در [۳] مشاهده کند.

**تمرین ۵.** *یک کاربردِ جالب از دنباله‌ی دقیقِ فوق محاسبه‌ی گروه‌های هموتوپیِ گروه‌های لی است. به عنوان مثال اگر $n\geq 2$، عملِ تراگذرِ $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ را بر $S^n$ را -که به عنوانِ کره‌ی واحد در $\mathbb{R}^{n+1}$ در نظر گرفته شده- داریم و به سادگی مشاهده می‌شود که پایدارسازِ هر نقطه یکریخت است با $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$. لذا $\mathrm{SO}_{n+1}(\mathbb{R})$ را می‌توان یک کلاف تاری بر کره‌ی $S^n$ با تارِ $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ در نظر گرفت. به کمکِ این مطلب و با نوشتنِ دنباله‌ی فوق نشان دهید $\pi_1(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))\cong\mathbb{Z}_2$ برای هر $n\geq 3$ و $\pi_2(\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}))=0$ برای هر $n\geq 2$. (راهنمایی: از استقرا استفاده کنید. در حالتِ پایه‌ی استقرا می‌دانیم که $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ همان دایره و $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ همان $\mathbb{RP}^3$ هستند.)*

بستارِ پیش‌تصویرِ ابررویه‌ی تصویریِ
$$W=\{[z_1:\cdots:z_{n+1}]\in\mathbb{CP}^n\mid F(z_1,\dots,z_{n+1})=0\}$$
تحتِ $\mathbb{C}^{n+1}-\{\mathbf{0}\}\to\mathbb{CP}^n$ عبارت است از ابررویه‌ی آفینِ
$$V:=\{(z_1,\dots,z_{n+1})\in\ \mathbb{C}^{n+1}\mid F(z_1,\dots,z_{n+1})=0\}$$
از آنجا که $F$ همگن از درجه‌ای مثبت بود، $V$ مبدأ در $\mathbb{C}^{n+1}$ را دربردارد. همچنین چون ابررویه‌ی تصویریِ $W: F=0$ در هیچ نقطه‌ای تکینگی نداشت، ابررویه‌ی آفینِ $V$ فقط در $\mathbf{0}\in\mathbb{C}^{n+1}$ می‌تواند تکینگی داشته باشد که چنین هم هست زیرا مشتقاتِ پاره‌ایِ $F$ به دلیلِ همگن از درجه‌ی مثبت بودنِ آن، همگی در مبدأ صفرند. اکنون با تحدیدِ کلاف تاریِ $(*)$، برای هر $\epsilon>0$ به کلاف تاریِ زیر با تارِ $S^1$ بر $\mathbb{CP}^n - W$ - همان فضایی که می‌خواهیم گروه بنیادی‌اش را محاسبه کنیم- می‌رسیم:
$$S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0})-V\to\mathbb{CP}^n-W$$
پس با به کار بردنِ قضیه‌ی ۴، دنباله‌ی دقیقِ زیر از گروه‌های هموتوپی را داریم:
$$\cdots\to\pi_i(S^1)\to\pi_i(S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0})-V)$$
$$\to\pi_i(\mathbb{CP}^n-W)\to\pi_{i-1}(S^1)\to\cdots$$
ولی گروه‌های هموتوپیِ $S^1$ جز در مرتبه‌های صفر و یک صفرند. به علاوه در مرتبه‌ی صفر، $\pi_0$ به مؤلفه‌های همبندی مرتبط است و لذا در دنباله‌ی فوق $\pi_0(S^1)\to\pi_0(S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0})-V)$ (تک‌عضوی) نشاندن است. بنابراین دنباله‌ی دقیقِ زیر از گروه‌های بنیادی را داریم:
$$(**)\pi_1(S^1)\to\pi_1(S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0})-V)\to\pi_1(\mathbb{CP}^n-W)\to 0$$
حال می‌توانیم قضیه‌ی ۳ را به کار بریم: گفتیم که $\mathbf{0}\in\mathbb{C}^{n+1}$ تنها نقطه‌ی تکینِ $V$ است. لذا با تثبیتِ یک $\epsilon>0$ به دلخواه کوچک،

[17]wedge

[18]البته باید نقطه‌ی پایه‌ای به طور مناسب در نظر گرفته شود. ولی در مثال‌هایی که ما این قضیه را به کار خواهیم برد، $F$ و $B$ همبند هستند و بنابراین هیچ‌جا در گروه‌های هموتوپی نقطه‌ی پایه‌ای را ننوشته‌ایم.

[19]می‌دانیم که $\pi_1(S^n)=0$ هرگاه $1\leq i<n$. اثبات را می‌توانید در فصل ۴ از [۳] ببینید.

$S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0}) - V \to S^1$ با ضابطه‌ی $\phi : \mathbf{z} \mapsto \frac{F(\mathbf{z})}{|F(\mathbf{z})|}$، یک کلافِ تاری با تارهایی از نوع هموتوپیِ $S^n\vee\cdots\vee S^n$ می‌شود. علی‌الخصوص گروه بنیادیِ تار صفر است [19]. و در نتیجه نوشتنِ دنباله‌ی ظاهر شده در قضیه‌ی ۴ ما را یکریختیِ زیر می‌رساند که توسطِ $\phi$ القا می‌شود:

$$(***)\quad \phi_* : \pi_1(S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0}) - V) \to \pi_1(S^1)$$

در ادامه (**) و (***) را مقایسه می‌کنیم: یک تار از کلاف تاریِ

$$S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0}) - V \to \mathbb{CP}^n - W$$

به صورتِ $\{(\lambda a_1,\dots,\lambda a_{n+1}) \mid \; |\lambda| = \epsilon\}$ است که در آن $[a_1:\cdots:a_{n+1}] \in \mathbb{CP}^n - W$ و $\sum_{i=1}^{n+1}|a_i|^2 = 1$. در (**) همریختیِ دوم با شمولِ چنین تاری القا شده است که اینجا تارِ مذکور به شیوه‌ی واضح با $S^1 = \{\lambda\in\mathbb{C} \mid \; |\lambda| = 1\}$ یکی گرفته شده است. پس ترکیبِ این همریختی با یکریختیِ ظاهر شده در (***) با توجه به ضابطه‌ی $\phi$ عبارت خواهد بود از همریختی‌ای که

$$\lambda\in S^1 \mapsto \frac{F(\lambda a_1,\dots,\lambda a_{n+1})}{|F(\lambda a_1,\dots,\lambda a_{n+1})|}\in S^1$$

بر گروه بنیادی القا می‌کند. ولی $F$ همگن از درجه‌ی $d$ بود و لذا نگاشتِ فوق در واقع به شکلِ

$$\lambda \in S^1 \mapsto \frac{F(a_1,\dots,a_{n+1})}{|F(a_1,\dots,a_{n+1})|}\lambda^d$$

خواهد بود که مضربی است ناصفر (توجه کنید که $F(a_1,\dots,a_{n+1})\neq 0$ بود.) از $\begin{cases} S^1\to S^1\\ \lambda\mapsto\lambda^d\end{cases}$؛ نگاشتی که می‌دانیم بر $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$ در واقع همریختیِ $d$برابر کردن را القا می‌کند. بنابراین اگر در دنباله‌ی دقیقِ (**)، دومین گروهِ ظاهر شده را به وسیله‌ی (***) با $\pi_1(S^1)\cong\mathbb{Z}$ یکی بگیریم، $\pi_1(S^1)\to\pi_1(S^{2n+1}_\epsilon(\mathbf{0})-V)$ در (**) به نگاشتِ $\begin{cases}\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}\\ x\mapsto dx\end{cases}$ تبدیل خواهد شد. لذا در آن دنباله‌ی دقیق می‌بینیم که:

$$\pi_1(\mathbb{CP}^n - W)\cong\frac{\mathbb{Z}}{d\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_d$$

و این همان حکمِ مطلوب است.

**تمرین ۶.** *توضیح دهید چرا این استدلال اگر ابررویه‌ی تصویریِ $W$ هموار نباشد به مشکل می‌خورد.*

## ۴ تلاش برای حلِ مسأله از راهی دیگر

در انتها خطوطِ یک راه‌حلِ احتمالیِ دیگر را -که ظاهراً از ابزارِ معرفی شده در بخش قبلی استفاده نمی‌کند- رسم می‌کنیم[20]. با توجه به آن‌که می‌خواهیم نشان دهیم گروه بنیادیِ $\mathbb{C}P^2 - C$ ($C$ مثل قبل خمی است هموار و درجه‌ی $d$ در صفحه‌ی تصویری که با معادله‌ی همگنِ $F(x,y,z)=0$ داده می‌شود.) گروهِ دوری از مرتبه‌ی $d$ است؛ این ایده به ذهن می‌رسد که شاید بتوان مسأله را با معرفیِ یک پوششِ جهانیِ $d$-لایه از $\mathbb{CP}^2 - C$ حل کرد. در فضای تصویریِ $\mathbb{CP}^3$ مختصاتِ همگن را با $[x:y:z:w]$ نشان می‌دهیم. هموار بودنِ خمِ $F(x,y,z)=0$ در $\mathbb{CP}^2$، هموار بودنِ رویه‌ی $S: F(x,y,z)=w^d$ در $\mathbb{CP}^3$ را بدست می‌دهد. اکنون $S$ به شکلِ $\begin{cases}S\to\mathbb{CP}^2\\ [x:y:z:w]\mapsto[x:y:z]\end{cases}$ تصویر می‌شود به $\mathbb{CP}^2$. این نگاشت تنها بالای خمِ $C: F(x,y,z)=0$ در $\mathbb{CP}^2$ شاخه‌ای[21] است و بالای $\mathbb{CP}^2 - C$ تحدید می‌شود به یک پوششِ $d$-لایه. پس فضای اخیر پوششی $d$-لایه دارد که عبارت است از بازِ زیر از $S$:

$$\{[x:y:z:w:]\in\mathbb{CP}^3 \mid \quad F(x,y,z)=w^d, w\neq 0\}$$

چون $F$ همگن از درجه‌ی $d$ بود، بازِ فوق را با اتخاذِ مختصاتِ آفینِ $a=\frac{x}{w}, b=\frac{y}{w}, c=\frac{z}{w}$ می‌توان با ابررویه‌ی $F(a,b,c)=1$ در فضای آفینِ $\mathbb{C}^3$ یکسان انگاشت. لذا این پوششِ $d$-لایه، پوششِ جهانیِ $\mathbb{CP}^2 - C$ است منوط به این‌که بتوانیم نشان دهیم ابررویه‌ی $F(a,b,c)=1$ در $\mathbb{C}^3$ همبند ساده است. با پذیرفتنِ این حکم، $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - C)$، $d$عضوی خواهد بود. ولی با توجه به آن‌که از محاسبه‌ی همولوژیِ در بالا، $H_1(\mathbb{CP}^2 - C)$ که خارج‌قسمتی است از گروه بنیادی[22] یکریخت شده با $\mathbb{Z}_d$؛ می‌بینیم که $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - C)$ نیز باید چنین باشد.

## مراجع

[1] G. E. Bredon, Topology and Geometry, 1997.

[2] J. Carlson, S. Müller-Stach, C. Peters, Period Mappings and Period Domains, 2003.

[3] A. Hatcher, Algebraic Topology, 2002.

[4] J. W. Milnor, Singular Points on Complex Hypersurfaces, 1969.

[20] ایده از آقای مصطفی عین‌الله‌زاده.

[21] branched

[22] این همان قضیه‌ی Hurewicz است: [۳]، ضمیمه‌ی 2A.

# آنالیز روی خمینه‌ها (قسمت سوم)

احمدرضا حاج سعیدی صادق

## ۱ مقدمه

در این مقاله، قصد دارم دو صورت K-تئوریک و کوهومولوژیک قضیه عطیه و سینگر را بیان کنم. لذا با مقدماتی نسبتاً طولانی بحث آغاز می‌شود. این مقدمات شامل عملگرهای فردهلم، فضاهای سوبولف، عملگرهای دیفرانسیل و شبه‌دیفرانسیل و کلاس‌های مشخصه است. اگرچه بسیاری از این مقدمات آموزنده‌اند، ولی خواننده‌ای که با این مباحث آشناست یا مشتاق به خواندن این مقدمات نیست می‌تواند به بخش های ۸ و ۱۱، که دو صورت قضیه اندیس در آن بیان شده است، مراجعه کند و در صورت ابهام به مطالب بخش‌های قبل بازگردد. این مقاله تنها به بیان بسیاری از احکام پرداخته است و برای دوری از پیچیدگی از بیان اثبات‌ها چشم‌پوشی شده است. دو بخش ابتدایی، مروری بر مفاهیم و نتایج اصلی دو قسمت اول این مقاله است که در شماره‌های ۴ و ۵ از مجله‌ی ریاضی شریف به چاپ رسید.

## ۲ آنالیز عملگرهای فردهلم

یک عملگر کراندار $T$ روی فضای هیلبرت مختلط و جدایی‌پذیر $H$ را فردهلم می‌نامیم اگر $\dim Ker\ T < \infty$ و $\dim Coker\ T < \infty$. در این صورت، اندیس این عملگر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Index\ T \equiv \dim Ker\ T - \dim Coker\ T$$

البته می‌توان عملگر فردهلم را میان دو فضای هیلبرت جدایی‌پذیر متمایز نیز تعریف کرد، زیرا می‌توان با در نظر گرفتن پایه شادر[۱] یک ایزومورفیسم میان هر دو فضای هیلبرت جدایی‌پذیر ساخت؛ بنابراین، بدون کاستن از کلیت، می‌توان این دو فضا را یکسان گرفت. برای دو عملگر فردهلم $T$ و $S$ می‌توان نشان داد

$$Index\ T \circ S = Index\ T + Index\ S$$
$$Index\ T^* = -Index\ T$$

دبرواقع $Ker\ T \simeq Coker\ T^*$. برای هر عملگر فشرده $K$ و عملگر فردهلم $T$، $T+K$ نیز فردهلم است و داریم:

$$Index\ (T+K) = Index\ T$$

به عبارت دیگر، عملگرهای فردهلم و اندیسشان تحت "اختلال‌های فشرده" ناوردا هستند.

این بخش را با قضیه‌ای از آتکینسون [۲] به پایان می‌بریم:

**قضیه ۱.** *عملگر $T : H \to H$ فردهلم است اگر و فقط اگر تصویر آن در $\mathcal{B}/\mathcal{K}$ وارون‌پذیر باشد، که در آن $\mathcal{B}$ و $\mathcal{K}$، به ترتیب، فضای عملگرهای کراندار و فشرده روی $H$ هستند.*

## ۳ توپولوژی عملگرهای فردهلم

با در نظر گرفتن نرم عملگری، می‌توان توپولوژی زیرفضایی روی $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ گذاشت.

فرض کنیم $F$ عملگری فردهلم باشد. بنابر قضیه ۱ عملگر فردهلم $G$ موجود است که $FG - I$ و $GF - I$ هردو فشرده باشند؛ به $G$ یک پارامتریکس یا شبه‌وارون برای $F$ می‌گوییم. اکنون به سادگی می‌توان دید برای هر عملگر کراندار $T$ به‌طوری‌که $\|T\| < \|G\|^{-1}$، $F+T$ فردهلم است و اندیس آن با اندیس $F$ یکسان است. پس $\mathcal{F}$ در $\mathcal{B}$ باز است و $Index : \mathcal{F} \to \mathbb{Z}$ تابعی موضعا ثابت است. همچنین، این تابع پوشاست.

بیش از این، می‌توان نشان‌داد که برای هر $n \in \mathbb{Z}$، $\mathcal{F}_n \equiv Index^{-1}(n)$ همبند مسیری است، یعنی، به عبارت دیگر، تابع اندیس یک تناظر یک به یک بین مؤلفه‌های همبندی $\mathcal{F}$ و $\mathbb{Z}$ برقرار می‌سازد.

## ۴ فضای سوبولف

یک $s$ نرم را روی فضای توابع هموار با محمل فشرده $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{C}^n$ را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

[۱] Schauder basis
[۲] Frederick V. Atkinson

$$\|f\|_s^2 = \int_{\mathbb{R}^m} |\hat{f}(y)|^2 (1+|y|^2)^s dy$$

که در آن تبدیل فوریه به صورت زیر است:

$$\hat{f}(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle} f(x)dx$$

البته نرم‌های معادل دیگری نیز وجود دارند، که به آن‌ها اشاره نمی‌کنیم.

فرض کنید $E$ یک کلاف برداری از رتبه $n$ روی خمینه فشرده $m$ -بعدی $M$ باشد. می‌توان یک پوشش موضعاً متناهی $\{U_\alpha\}$ از $M$ یافت بطوری‌که $U_\alpha \simeq \mathbb{R}^m$. همچنین، می‌توان فرض کرد که این پوشش یک بدیهی‌سازی از کلاف برداری می‌دهد:

$$h_\alpha : E|_{U_\alpha} \xrightarrow{\simeq} U_\alpha \times \mathbb{C}^n$$

یک پارش یکای $\{\mu_\alpha\}$ نسبت به پوشش فوق در نظر می‌گیریم. اکنون $s$ -نرم را روی $\|.\|_s$ روی فضای مقاطع[3] هموار $E$، $C^\infty(M,E)$، به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\|\xi\|_s = \sum_\alpha \|\pi_2 h_\alpha \mu_\alpha \xi\|_s$$

که در آن $\pi_2 : U_\alpha \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ نگاشت تصویر است.

کامل‌سازی $C^\infty(M,E)$، نسبت به $s$ -نرم فوق، با $W^s(M,E)$ نمایش می‌دهیم و فضای سوبولف $s$ -ام می‌نامیم.

بدون اثبات، روابط زیر را بیان می‌کنیم:

- برای هر $s \geq 0$

$$(W^s(M,E))^* \simeq W^{-s}(M,E)$$

- $W^{-\infty}(M,E) \supset \cdots \supset L^2(M,E) = W^0(M,E) \supset \cdots \supset W^s(M,E) \supset W^{s+1}(M,E) \supset \cdots \supset W^\infty(M,E) \supset C_0^\infty(M,E)$

- قضیه نشاندن سوبولف[4]. برای هر $s > [\frac{n}{2}] + k + 1$

$$W^s(M,E) \subset C^k(M,E)$$

- قضیه رلیچ[5]. نگاشت شمول

$$W^r(M,E) \hookrightarrow W^s(M,E)$$

برای $r < s$ فشرده است.

فضای $OP_k(E,F)$ را فضای نگاشت‌های $\mathbb{C}$ -خطی

$$T : C^\infty(M,E) \to C^\infty(M,F)$$

در نظر می‌گیریم که برای هر $s$ گسترشی پیوسته به صورت

$$\bar{T}_s : W^s(M,E) \to W^{s-k}(M,F)$$

داشته باشند. این فضا را، فضای عملگرهای مرتبه $k$ از $E$ به $F$ می‌نامیم.

می‌توان نشان داد برای هر عملگر مرتبه $k$ مثل $T$، $T^*$ وجود دارد و عملگری از مرتبه $k$ است و

$$(\bar{T^*})_s = (\bar{T}_{k-s})^*$$

## ۵ عملگرهای دیفرانسیل

عملگرهای دیفرانسیل یکی از خاستگاه‌های عملگرهای فردهلم و در نتیجه اندیس، هستند. در بسیاری مواقع این اندیس‌ها مستقل از ساختارهایی‌اند(مثلاً ساختار هندسی) که روی فضا اعمال می‌شوند و درواقع به شرایط توپولوژیک وابسته‌اند. این چارچوب نظریه اندیس است که توسط عطیه[6] و سینگر[7] توسعه یافته است. در این جا به کلی‌ترین تعاریف و نتایج موجود می‌پردازیم و از بسیاری اثبات‌ها چشم‌پوشی می‌کنیم.

فرض کنیم $M$ خمینه هموار $m$ -بعدی به همراه دو کلاف برداری هموار $E$ و $F$ روی آن باشد. فرض کنیم که $D : C^\infty(E) \to C^\infty(F)$ یک مورفیسم $\mathbb{C}$ -خطی میان بافه[8] مقطع‌های هموار این دو کلاف برداری مختلط باشند. این نگاشت را یک عملگر دیفرانسیل از مرتبه $d$ می‌نامیم اگر حول هر نقطه، برای یک مختصات موضعی $(x_1, \cdots, x_m) \in U$ و بدیهی‌سازی موضعی این کلاف‌های برداری، داشته باشیم:

$$\begin{gathered} Du(x) = \\ \sum_{\alpha_1+\cdots+\alpha_m \leq d} A_{\alpha_1,\cdots,\alpha_m} i^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m} \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}} u|_x = \\ \sum_{|\alpha|\leq d} A_\alpha i^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u|_x \\ u \in C^\infty(E,U) \end{gathered}$$

[3] section
[4] Sobolev Embedding theorem
[5] Rellich lemma
[6] Michael Atiyah
[7] Isadore Singer
[8] sheaf

که در آن $A_\alpha$ یک ماتریس $rankF \times rankE$ بعدی است و به ازای یک $\alpha$ که از درجه $d$ باشد $A_\alpha \neq 0$.

کلاف دوگان-مماس $\pi : T^*M \to M$ را در نظر بگیرید و کلاف‌های برگردان[۹] $\pi^*E$ و $\pi^*F$ روی $T^*M$ را در نظر بگیرید. در مختصات موضعی فوق، یک مختصات موضعی $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m)$ برای کلاف دوگان-مماس در نظر بگیرید. اکنون، $\sigma_d(D) \in \Gamma(T^*M, Hom(\pi^*E, \pi^*F))$، یک مقطع از $Hom(\pi^*E, \pi^*F)$، را این گونه تعریف می‌کنیم که در تار بالای $(x, \xi)$ با ضرب در

$$\sum_{|\alpha|\leq d} A_\alpha \xi^\alpha$$

عمل می‌کند که در اینجا تعریف می‌کنیم $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_m^{\alpha_m}$. به این مقطع، $\sigma_d(D)$، نماد [۱۰] عملگر دیفرانسیل $D$ می‌گوییم. می‌توان نشان داد این تعریف مستقل از تمام موضعی‌سازی‌هاست.

عملگر دیفرانسیل $D$ را بیضوی [۱۱] می‌گوییم اگر برای هر $(x, \xi)$ که $\xi \neq 0$، $\sigma_d D_{(x,\xi)} : \pi^*E_{(x,\xi)} \to \pi^*F_{(x,\xi)}$ وارون‌پذیر باشد.

اگر روی $E$ و $F$ متریک هرمیتی قرار دهیم، می‌توان روی $C^\infty(E)$ و $C^\infty(F)$ تعریف کرد:

$$\langle s, t\rangle = \int_M (s,t)_E \quad s, t \in C^\infty(E)$$

و بطور مشابه برای مقاطع $F$. پس برای هر عملگر دیفرانسیل می‌توان دوگان، $D^*$ ، تعریف کرد:

$$\langle Ds, t\rangle_F = \langle s, D^*t\rangle_E$$

می‌توان نشان داد اگر $D$ عملگری دیفرانسیل از مرتبه $d$ باشد، $D^*$ نیز عملگری دیفرانسیل از مرتبه $d$ است.همچنین برای دو عملگر دیفرانسیل $D$ و $D'$ از مرتبه $d$ و $d'$ که قابل ترکیب کردن باشند، $D \circ D'$ عملگری دیفرانسیل از مرتبه $d + d'$ است و $\sigma_{d+d'}(D \circ D') = \sigma_d(D) \circ \sigma_{d'}(D')$.

**مثال ۲.** *برای یک خمینه ریمانی $M$ عملگر لاپلاسین، $d^*d$، روی بافه فرم‌های دیفرانسیل، یک عملگر دیفرانسیل است و نماد آن در هر تار روی $(x, \xi)$ باضرب کردن در $|\xi|^2_{T^*_x}$ به دست می‌آید. پس لاپلاسین یک عملگر بیضوی است.*

## ۶ عملگرهای شبه‌دیفرانسیل

در حالت $M = \mathbb{R}^m$، با در نظرگرفتن نگاشت

$$p(x, \xi) : U \times \mathbb{R}^m \to M_{r\times s}(\mathbb{C})$$

که نسبت به $\xi$ چندجمله‌ای درجه $n$ است، در واقع داریم $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha|\leq n} A_\alpha \xi^\alpha$. تعریف می‌کنیم

$$p(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x) i^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha}$$

پس می‌توان نوشت

$$p(x, D)u(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x) i^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} u(x) = \sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha(x) \int_{\mathbb{R}^m} \xi^\alpha \hat{u}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi = \int_{\mathbb{R}^m} p(x, \xi)\hat{u}(\xi) e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$$

این محاسبه، ایده تعریف عملگرهای شبه‌دیفرانسیل[۱۲] است که نقش مهمّی در نظریه عملگرها [۱۳] دارند.

**تعریف ۳.** *فضای $S^n(U)$ را فضای توابع هموار $p(x, \xi)$ روی $U \times \mathbb{R}^m$ با مقادیر درون $M_{r\times s}(\mathbb{C})$ تعریف می‌کنیم که خواص زیر را دارند*

*اولاً برای هر $\alpha$ و $\beta$ و فشرده $K \subset U$ ، ثابت $C_{\alpha,\beta,K}$ وجود داشته باشد بطوری‌که*

$$\left|\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^{|\beta|}}{\partial x^\beta} p(x, \xi)\right| < C_{\alpha,\beta,K}(1 + |\xi|)^{n-|\alpha|}$$

*ثانیاً $\sigma_n(p)(x, \xi) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{p(x,\lambda\xi)}{\lambda^n}$ برای $\xi \neq 0$ موجود باشد و علاوه بر آن برای هر نگاشت برش [۱۴] حول صفر مثل $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ داشته باشیم*

$$p(x, \xi) - \psi(\xi)\sigma_n(p)(x, \xi) \in S^{n-1}(U)$$

*ثالثاً نسبت به مؤلفه $x$ محمل فشرده دارند.*

برای $u \in C^\infty_{cpt}(U)$ (نگاشتی هموار با محمل فشرده) و $p \in S^n(U)$ عملگر شبه‌دیفرانسیل کانونی مرتبه $n$، $L(p)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$L(p)u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p(x.\xi)\hat{u} e^{i\langle x,\xi\rangle} d\xi$$

که به عنوان عملگری $C^\infty_{cpt}(U) \to C^\infty(U)$ کراندار از مرتبه $n$ است.

[۹] pull-back
[۱۰] symbol
[۱۱] elliptic
[۱۲] pseudo-differential operator
[۱۳] operator theory
[۱۴] cut-off function

برای یک خمینه هموار $M$ و کلاف‌های برداری $E$ و $F$ از مرتبه $s$ و $r$، یک عملگر $\mathbb{C}$ -خطی
$$L : C^{\infty}_{cpt}(M,E) \to C^{\infty}(M,F)$$
شبه‌دیفرانسیل مرتبه $n$ نامیده می‌شود اگر بطور موضعی، یک عملگر شبه‌دیفرانسیل کانونی مرتبه $n$ باشد. با توجه به تعریف، برای هر عملگر شبه‌دیفرانسیل مرتبه $n$ مثل $L$ می‌توان نمایش موضعی $L(p)$ برای $p \in S^n$ یافت و نماد موضعی این عملگر یعنی $\sigma_n(p)$ را در نظر می‌گیریم. می‌توان نشان داد چنین نمادهای موضعی‌ای با هم "سازگارند" و یک نماد سراسری $\sigma(L) \in Hom(\pi^*E, \pi^*F)$ ساخت بطوری که
$$\sigma(L)(x, \lambda\xi) = \lambda^n \sigma(L)(x,\xi)، \lambda > ۰$$
فضای چنین نمادهایی با $Smbl_n(E,F)$ نمایش داده می‌شود.

برای هر دو عملگر شبه‌دیفرانسیل مرتبه $p$ و $q$، $P : C^{\infty}_{cpt}(M,E) \to C^{\infty}(M,F)$ و $Q : C^{\infty}_{cpt}(M,F) \to C^{\infty}(M,G)$ روی یک خمینه فشرده $M$، $P \circ Q$ عملگر شبه‌دیفرانسیل از مرتبه $p+q$ است و داریم
$$\sigma_{p+q}(P \circ Q) = \sigma_p(P) \circ \sigma_q(Q)$$
همچنین دوگان $P$، $P^*$ وجود دارد و یک عملگر شبه‌دیفرانسیل مرتبه $p$ است و
$$\sigma_p(P^*) = \sigma_p(P)^*$$
عملگر $P$ بیضوی نامیده می‌شود اگر
$$\sigma_p(P)(x,\xi) : E_x \to F_x$$
وارون‌پذیر باشد. اکنون مهم‌ترین قضیه این بخش را بیان می‌کنیم:

**قضیه ۴.** *اگر عملگر شبه‌دیفرانسیل مرتبه $n$*
$$L : C^{\infty}_{cpt}(M,E) \to C^{\infty}(M,F)$$
*بیضوی باشد، آنگاه این عملگر شبه‌وارون دارد، یعنی عملگر شبه‌دیفرانسیل $\tilde{L}$ از مرتبه $-n$ وجود دارد که*
$$L \circ \tilde{L} - Id_F \in OP_{-۱}(F,F) \quad \tilde{L} \circ L - Id_E \in OP_{-۱}(E,E)$$
*و دقت کنیم که اعضای $OP_{-۱}$ فشرده‌اند.*

**نتیجه ۵.** *بنابر قضیه آتکینسون ۱، برای هر $s$ گسترش سوبولف $L_s : W^s(M,E) \to W^{s-n}(M,F)$ یک عملگر فردهلم است. اما می‌توان بیش از این نیز بیان کرد، $\dim\ Ker\ L_s$ مستقل از $s$ است و در واقع برابر است با $\dim\ Ker\ L$. این حکم به منظم‌سازی معروف است. علاوه بر آن، این بعد متناهی است.*

*بطور مشابه، داریم*
$$\dim\ Ker\ (L^*)_s = \dim\ Ker\ L^* < \infty$$
*پس می‌توان اندیس "تحلیلی"* [15] *$L$ را اندیس عملگر فردهلم یک گسترش سوبولف دلخواه تعریف کرد*
$$Index_a(L) \equiv \dim\ Ker\ L - \dim\ Ker\ L^*$$
*که مستقل از $s$ است. همچنین، این اندیس به گونه هوموتوپی*[16] *$\sigma_n(L) \in Iso_{S^*M}(E,F)$ در فضای نمادهای بیضوی وابسته است که در آن $S^*M = \{(x,\xi) : |\xi| = ۱\}$.*

## ۷ K -تئوری توپولوژیک

در این بخش درمورد فانکتوری به نام K -تئوری، از کتگوری فضاهای توپولوژیک موضعاً فشرده به کتگوری گروه‌های آبلی، صحبت می‌کنیم. این فانکتور اولین بار توسط الکساندر گروتندیک [17] به کار گرفته شد که به هر واریته جبری یک گروه آبلی نسبت داد که مولدهای آن کلاس یکریختی بافه‌های موضعاً آزاد [18] چسبنده [19] هستند. حرف K از کلمه آلمانی Klasse گرفته شده است.

فرض کنیم $X$ فضایی فشرده باشد. "گروه گروتندیک" نیم گروه آبلی(با استفاده از جمع مستقیم) $V(X)$ از کلاس یکریختی کلاف‌های برداری مختلط روی $X$ را با $K(X)$ نمایش می‌دهیم و آن را K -تئوری $X$ می‌نامیم. اعضای این گروه را می‌توان به صورت
$$[E] - \tau^n$$
نمایش داد، که $E$ یک کلاف برداری است و $\tau^n$ کلاف بدیهی $n$ -بعدی است. دقت کنیم که یک نگاشت جمعی طبیعی $\alpha : V(X) \to K(X)$ وجود دارد که تحت این نگاشت $[E] \mapsto [E] - ۰$. این نگاشت لزوماً یک به یک است. اگر
$$f : X \to Y$$
پیوسته باشد، یک تابع جمعی $f^* : V(Y) \to V(X)$ القا می‌شود که به یک همریختی یکتا
$$f^* : K(Y) \to K(X)$$

[15] analytic index
[16] homotopy type
[17] Alexander Grothendieck
[18] locally free
[19] coherent

منجر می‌شود. پس K ‑تئوری یک فانکتور پادورد است و به کمک آن می‌توان یک ضرب در این گروه تعریف کرد که یک ساختار حلقه‌ای روی این $K(X)$ به‌وجود می‌آید. فرض کنیم $E$ و $F$ دو کلاف برداری روی $X$ باشد. پس می‌توان کلاف برداری $E \otimes F$ را روی $X \times X$ تعریف کرد. با استفاده از نگاشت قطری $\Delta : X \to X \times X$ می‌توان کلاف برداری $\Delta^*(E \times F)$ روی $X$ تعریف می‌شود. این فرایند یک نگاشت ضرب روی $K(X)$ تعریف می‌کند.

مشابه ساختار فوق برای کلاف‌های حقیقی نیز قابل اجراست و گروه حاصل با $KO(X)$ نمایش داده می‌شود. تمام نتایج فوق به K ‑تئوری حقیقی نیز سرایت می‌یابد و از بازگویی نتایج مشابه اغماض می‌کنیم. می‌خواهیم یک نظریه کوهومولوژی توسط این K ‑حلقه‌ها تعریف کنیم. تمرکز را رو حالت مختلط می‌گذاریم و احکام متناظر با حالت حقیقی را نیز بیان خواهیم کرد. ابتدا K ‑حلقه کاهش یافته را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\tilde{K}(X) \equiv Ker(K(X) \to K(pt))$$

برای یک زیرمجموعه بسته $Y \subset X$ تعریف می‌کنیم:

$$K(X,Y) = \begin{cases} \tilde{K}(X/Y), & Y \neq \emptyset \\ K(X), & Y = \emptyset \end{cases}$$

که $Y/Y$ به عنوان نقطه پایه‌ای [20] درنظر گرفته شده است. اگر $Y = \emptyset$، $X/Y$ را تعریف می‌کنیم

$$X^+ = X \cup pt$$

در این صورت دو تعریف فوق به یک تعریف تبدیل می‌شوند.
اکنون بافرض وجود نقطه پایه‌ای، تعریف می‌کنیم

$$\tilde{K}^{-i}(X) \equiv \tilde{K}(S^i \wedge X)$$
$$K^{-i}(X,Y) \equiv \tilde{K}^{-i}(X/Y) = \tilde{K}(S^i \wedge (X/Y))$$

که در آن، $\wedge$ ضرب تصادمی [21] است. با توجه به تعاریف بالا قرار می‌دهیم

$$K^{-i}(X) \equiv K^{-i}(X,\emptyset) \equiv \tilde{K}(S^i \wedge X^+)$$

اکنون دنباله دقیق بلند بارات‑پاپه [22] را داریم:

$$\cdots \to \tilde{K}^{-i-1}(Y) \to K^{-i}(X,Y) \to \tilde{K}^{-i}(X) \to \tilde{K}^{-i}(Y) \to \cdots \to \tilde{K}^{0}(X) \to \tilde{K}^{0}(Y).$$

شاید اینکه از اندیس های "منفی" استفاده شده است کمی‌عجیب به نظر برسد، ولی دلیل این است که یک نظریه کوهومولوژی بسازیم، و لذا باید در دنباله دقیق فوق نگاشت مرز درجه را افزایش دهد.

ضرب تانسوری رو کلاف‌های برداری، یک ضرب خارجی روی K ‑تئوری های با مراتب مختلف القا می‌کند. به عبارت دیگر برای هر دو فضای فشرده با نقطه پایه‌ای $X$ ، $Y$ یک جفت سازی زیر وجود دارد:

$$\tilde{K}^{-i}(X) \otimes \tilde{K}^{-j}(Y) \to \tilde{K}^{-i-j}(X \wedge Y)$$

پس برای هر فضای فشرده نقطه گذاری شده $(X,pt)$، $K^{-*}(X)$ یک مدول مدرج روی حلقه مدرج $K^{-*}(pt)$ است.

**مثال ۶.** *با در نظر گرفتن بعد فضای برداری، داریم*

$$K(pt) \simeq KO(pt) \simeq \mathbb{Z}$$

*نوار موبیوس نماینده‌ای برای یکتا کلاس یکریختی نابدیهی روی $S^1$ است و جمع مستقیم این کلاف با خودش کلاف بدیهی ۲‑بعدی می‌دهد. اگر این کلاس را با $[M]$ نشان دهیم، $\mu = [M] - \tau^1_{\mathbb{R}}$ مولد $KO^{-1}(pt) = \tilde{KO}(S^1)$ ودر نتیجه این گروه $\mathbb{Z}_2$ است. هر کلاف برداری مختلط از $S^1$ بدیهی است؛ پس $K^{-1}(pt) = \tilde{K}(S^1) = 0$.*

*اگر $S^2$ را با $\mathbb{C}P^1$ یکی فرض کنیم یک کلاف برداری کانونی و غیر بدیهی بدست می‌آوریم و آن را با $H$ نمایش می‌دهیم. در این صورت $\xi = [H] - \tau^1$ مولد $K^{-2}(pt) = \tilde{K}(S^2)$ خواهد بود و لذا این گروه $\mathbb{Z}$ است.*

**قضیه ۷.** (قضیه تناوبی بوت [23]) *برای هر فضای همبند و فشرده $X$ ، با نقطه پایه‌ای داریم*

$$K^{-i}(X) \xrightarrow{\simeq} K^{-i-2}(X)$$

*که یکریختی توسط ضرب خارجی با $\xi$ بدست می‌آید که در مثال بالا معرفی شد. پس بطور خاص داریم*

$$K^{-*}(pt) = \mathbb{Z}[\beta]$$

در حالت حقیقی نیز این قضیه با صورت‌بندی‌ای پیچیده‌تر معتبر خواهد بود. ابتدا ساختار حلقه‌ای $KO^{-*}(pt)$ را معرفی می‌کنیم:

حلقه $KO^{-*}(pt)$ توسط

$$x \in KO^{-8}(pt), y \in KO^{-4}(pt), \mu \in KO^{-1}(pt)$$

تحت روابط زیر تولید می‌شود

$$2\mu = 0, \mu^3 = 0, \mu y = 0, y^2 = 4x$$

[20] basepoint
[21] smash product
[22] Barratt-Puppe sequence
[23] Bott Periodicity theorem

یعنی

$$KO^{-*} = \mathbb{Z}[\mu, y, x]/\langle ۲\mu, mu^۳, \mu y, y^۲ - ۴x\rangle$$

اکنون قضیه بوت در حالت حقیقی به فرم زیر است

**قضیه ۸.** *برای هر فضای فشرده و هاسدورف $X$ با نقطه پایه‌ای، داریم*

$$KO^{-i}(X) \xrightarrow{\times x} KO^{-i-۸}(X)$$

*یک یکریختی گروهی است.*

**نتیجه ۹.** *در حالت نسبی نیز، با در نظر گرفتن $X/Y$، قضیه تناوبی بوت برقرار است:*

$$K^{-i}(X, Y) \xrightarrow{\times\beta} K^{-i-۲}(X, Y)$$
$$KO^{-i}(X, Y) \xrightarrow{\times x} KO^{-i-۸}(X, Y)$$

برای فضای موضعاً فشرده $X$، $X^+$ را فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای می‌گیریم. حال با توجه به طبیعی بودن تابع بوت، دنباله دقیق بارات-پایه برای جفت $(X^+, Y^+)$ به یک دنباله دقیق با شش عضو خلاصه می‌شود:

$$\begin{tikzcd}
K^{۰}(X,Y) \arrow[r] & K^{۰}(X) \arrow[r] & K^{۰}(Y) \arrow[d] \\
K^{-۱}(Y) \arrow[u] & K^{-۱}(X) \arrow[l] & K^{-۱}(X,Y) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

بطور مشابه، برای حالت حقیقی می‌توان دنباله ۲۴ عضوی از K -تئوری‌های حقیقی بدست آورد.

برای کاربردهای هندسی که در بخش‌های بعد بیان می‌شوند، مناسب است که K -تئوری را برای فضاهای توپولوژیک نه لزوماً فشرده، بلکه موضعاً فشرده تعریف کنیم. این رویکرد بسیار به تعریف کوهومولوژی با محمل فشرده [۲۴] نزدیک است که در ادامه خواهیم دید.

برای فضای موضعاً فشرده $X$، K -تئوری با محمل فشرده $K_{cpt}(X)$ را برابر $\tilde{K}(X^+)$ تعریف می‌کنیم.

K -تئوری‌های مرتبه بالاتر را نیز تعریف می‌کنیم

$$K^{-i}_{cpt}(X) = K_{cpt}(X \times \mathbb{R}^i)$$

به وضوح برای $X$ فشرده رابطه $K^{-i}_{cpt}(X) \simeq K^{-i}(X)$ را داریم. هر عضو $K_{cpt}(X)$ را می‌توان به صورت تفاضل دو کلاف برداری نمایش‌داد که در بینهایت با هم یکریخت هستند. برای هر دو باز $U \subset V$ از $X$ یک نگاشت القایی $K_{cpt}(U) \to K_{cpt}(V)$ خواهیم داشت که از نگاشت‌های زیر القا می‌شود:

$$V^+ \to V^+/(V^+ - U) = U^+$$

که با ضرب کردن در $\mathbb{R}^i$ داریم:

$$K^{-i}_{cpt}(U) \to K^{-i}_{cpt}(V)$$

البته برای یک بسته های $i : K \subset L$ از $X$، خواص فانکتوری همانند قبل است:

$$i^* : K^{-i}_{cpt}(L) \to K^{-i}_{cpt}(K)$$

دقت کنیم که $K_{cpt}$ فانکتوری از کتگوری فضاهای موضعاً فشرده و نگاشت‌های سره است، نه هر نگاشت پیوسته. به خصوص، می‌دانیم، $\mathbb{R}$ با $pt$ هم‌ارز هوموتوپیک است ولی این فانکتور روی این دو فضا دو گروه متمایز می‌دهد، یعنی این فانکتور تحت هم‌ارزی هوموتوپی ناوردا نیست.

تعریف می‌کنیم $Ker\ i^* \equiv K^{-i}_{cpt}(X, Y)$ نمایش می‌دهیم. به سادگی دیده می‌شود،

$$K^{-i}_{cpt}(X, Y) = K^{-i}_{cpt}((X - Y) \times \mathbb{R}^i)$$

بطور مشابه، دنباله بارات-پایه را برای K -تئوری با محمل فشرده نیز می‌توان نوشت. بعلاوه ضرب خارجی در این‌جا موجود است. برای حالت حقیقی نیز، K -تئوری با محمل فشرده( $KO^{-i}_{cpt}$ ) قابل بیان است و متناظر نتایج فوق برای آن برقرار است

قضیه تناوبی بوت در اینجا نیز قابل بیان بوده و به صورت زیر است

$$K_{cpt}(X) \overset{\times\beta}{\simeq} K_{cpt}(X \times \mathbb{R}^۲)$$
$$KO_{cpt}(X) \overset{\times x}{\simeq} K_{cpt}(X \times \mathbb{R}^۸)$$

که در آن $\beta \in K_{cpt}(\mathbb{R}^۲)$ و $x \in K_{cpt}(\mathbb{R}^۸)$. به $\beta$ کلاس بوت می‌گوییم.

## ۸ قضیه عطیه و سینگر

برای خمینه هموار بسته ریمانی $M$، با بعد $m$ و $E \to M$ و $F \to M$ دو کلاف برداری هموار باشند. عملگر شبه‌دیفرانسیل بیضوی مرتبه $n$، $L : C^\infty_{cpt}(E) \to C^\infty(F)$ داده شده است. گوی-کلاف و کره-کلاف نظیر کلاف دوگان مماس را در نظر می‌گیریم:

$$B^*M = \{(x, \xi) \ :\ |\xi| \leq ۱\}$$
$$S^*M = \{(x, \xi) \ :\ |\xi| = ۱\}$$

[۲۴] cohomology with compact support

اکنون $n$ -گوی-کلاف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S_n^*M \equiv B_1^*M \cup_{S^*M} B_2^*M$$

که $B_i^*$ دو نسخه از گوی-کلاف هستند. این کلاف تاری همان فضای تُم [۲۵] نظیر کلاف دوگان-مماس است. به ترتیب روی $B_1^*M$ و $B_2^*M$ کلاف‌های $E$ و $F$ را ترفیع می‌دهیم و روی $S^*M$ توسط $\sigma_n(L) : \pi^*E|_{S^*M} \to \pi^*F|_{S^*M}$ به هم می‌چسبانیم و یک کلاف برداری به‌دست می‌آوریم. در نتیجه، عنصری داخل $K(S_n^*M)$ حاصل می‌گردد. با توجه به تعریف، این عنصر $K$ -تئوری تنها به کلاس هوموتوپی $\sigma_n(L) \in Iso_{S^*M}(E,F)$ وابسته است. از طرفی دنباله دقیق شکافنده زیر را داریم

$$\circ \to K(B_1^*M \cup_{S^*M} B_2^*M, B_2^*M) \to$$
$$K(B_1^*M \cup_{S^*M} B_2^*M) \to K(B^+M) \to \circ$$

پس با توجه به هم‌ارز هوموتوپیک بودن $M$ و $B_i^*M$ و قضیه برش [۲۶]، جمع مستقیم طبیعی زیر را داریم

$$K(B_1^*M \cup_{S^*M} B_2^*M) \simeq K(M) \oplus K(B^*M, S^*M)$$

از طرفی $K(B^*M, S^*M) \simeq K_{cpt}(B^*M \backslash S^*M) \simeq K_{cpt}(T^*M) \simeq K_{cpt}(TM)$ پس برای هر عملگر شبه‌دیفرانسیل $L$ کلاس $[\sigma(L)] \in K_{cpt}(TM)$ یافتیم.

فرض کنیم $\beta \in K_{cpt}(\mathbb{R}^۲)$ کلاس بوت باشد و : $\alpha^N$ $K_{cpt}(\mathbb{R}^{۲N}) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{Z}$، $N$ بار ترکیب یکریختی بوت باشد. در این صورت

**قضیه ۱۰.** *(قضیه عطیه و سینگر) فرض کنیم $M$ درون $\mathbb{R}^N$ نشانده شده باشد به‌طوری‌که کلاف نرمال آن بدیهی است. دراین صورت*

$$Index_a(L) = (-۱)^m \alpha^N \circ ext([\sigma(L)] \times b^{N-m})$$

*که درآن $ext : K_{cpt}(TM \times \mathbb{R}^{w(N-m)}) \to K(T\mathbb{R}^N)$ اینگونه بدست می‌آید:*

*فضای $TM \times \mathbb{R}^{N-m}$ یکریخت با یک همسایگی لوله‌ای [۲۷] از $M$ مثل $U$ است. اکنون نگاشت $(TU)^+ \to (T\mathbb{R}^N)^+$ که مکمل $TU$ در $(T\mathbb{R}^N)^+$ را به $+ \in (TU)^+$ می‌فرستد، $ext$ را القا می‌کند. به سمت راست فرمول عطیه-سینگر، اندیس توپولوژیک می‌گویند.*

برای حالت کلاف نرمال غیربدیهی نیز این قضیه قابل بیان است، که دربیان آن از یکریختی تُم [۲۸] استفاده می‌شود. برای جلوگیری از پیچیدگی از بیان این حالت خودداری می‌کنیم.

## ۹ کلاس‌های مشخصه

در این بخش به مرور سریع کلاس‌های مشخصه [۲۹] می‌پردازیم.

فرض‌کنیم $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ فضای تمام ماتریس‌های مربعی مرتبه $m$ باشد(جبر لی $GL_m(\mathbb{C})$ ). نگاشت چندجمله‌ای : $P$ $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ ناوردا[۳۰] می‌نامیم اگر $P(XY) = P(YX)$. یک سری ناوردا یک سری توانی $P : \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ است بطوری که مؤلفه‌های همگن‌اش ناوردا باشند.

می‌توان نشان داد حلقه چندجمله‌ای‌های ناوردا توسط

$$c_k(X) = (-۲\pi i)^{-k} tr(\bigwedge^k X)$$

تولید می‌شوند. دقت کنید که تعریف $c_k$ مستقل از $m$ است.

فرض کنیم که کلاف برداری $E \to M$ از مرتبه $m$ داده شده است. اگر $\bigtriangledown$ یک هموستار [۳۱] روی این کلاف باشد و انحنای آن را $\Omega$ ، که یک ۲-فرم با مقادیر داخل $End(E)$ است، در نظر بگیریم، برای یک چندجمله ای ناوردا $P$، $P(\Omega) \in \Omega^{۲*}(M)$ یک فرم دیفرانسیل بسته است در واقع عنصری داخل $H^{۲*}(M)$ معرفی می‌کند. نکته اساسی این است که این عنصر مستقل از انتخاب مشتق همورد است و لذا آن را با $P(E)$ نشان می‌دهیم.

کلاس‌های چرن[۳۲] کلاف برداری را برابر $c_k(E)$ تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۱۱.** *یک کلاس مشخصه $c$ از کلاف های برداری، یک نسبت دادن $c(E) \in H^*(M)$ به کلاف برداری $E \to M$ است بطوری که برای هر $f : N \to M$ داشته باشیم*

$$c(f^*E) = f^*c(E)$$

*به این خاصیت آخر طبیعی بودن نیز می‌گویند.*

*پس هر سری ناوردا $P$ یک کلاس مشخصه معرفی می‌کند. در واقع می‌توان نشان داد هر کلاس مشخصه این‌گونه بدست می‌آید.*

---

[۲۵] Thom space
[۲۶] excision
[۲۷] tubular neighborhood
[۲۸] Thom isomorphism
[۲۹] characteristic classes
[۳۰] invariant polynomial
[۳۱] connection
[۳۲] Chern class

## ۱۰ گونه‌ها

فرض کنیم $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ یک نگاشت هولومورفیک باشد. از این نگاشت می‌توان در ساخت سری ناوردا کمک گرفت:

$$\Pi_f(X) = det(f(\frac{-1}{2\pi i}X))$$

به کلاس مشخصه متناظر یک $f$ -گونه چرن [۳۳] می‌گوییم که خواص زیر را دارند

- برای یک کلاف خطی $L$، $\Pi_f(L) = f(c_1(L))$
- برای دو کلاف برداری $E_1$ و $E_2$ $\Pi_f(E_1 \oplus E_2) = \Pi_f(E_1) \smile \Pi_f(E_2)$

با استفاده از لم زیر می‌توان نشان داد که دوخاصیت فوق کلاس مشخصه نظیر $\Pi_f$ را بطور یکتا تعیین می‌کنند.

**لم ۱۲.** *(اصل شکافنده [۳۴]) برای هر کلاف برداری $E \to M$ از مرتبه $m$ فضای توپولوژیک $X$ به همراه نگاشت $f : X \to M$ وجود دارد بطوری که*

- $f^* : H^*(M) \to H^*(X)$ *یک به یک است.*
- *به ازای کلاف‌های خطی $L_1$، $\cdots$، $L_m$، $f^*(E) \simeq L_1 \oplus \cdots \oplus L_m$.*

می‌توان نوشت $\Pi_f(X) = \prod_i f(x_i)$ که $x_i$ ها مقادیر ویژه $X$ هستند. پس به کمک لم فوق می‌توان به صورت "صوری" نوشت $\Pi_f(E) = \prod_i f(x_i)$ بطوری که

$$\begin{gathered} c_1(E) = \sum_i x_i \\ c_2(E) = \sum_{i<j} x_i x_j \\ \vdots \\ c_m(E) = x_1 x_2 \cdots x_m \end{gathered}$$

**مثال ۱۳.** *چرن کلاس تام [۳۵] $c$ به کلاس مشخصه گونه نظیر $f(z) = 1 + z$ می‌گوییم. با استفاده از نمایش "صوری" فوق، به سادگی دیده می‌شود*

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) + \cdots$$

**مثال ۱۴.** *$\hat{A}$ -گونه، به کلاس مشخصه نظیر نگاشت هولومورفیک*

$$z \mapsto \frac{z/2}{\sinh(z/2)}$$

*می‌گوییم.*

**مثال ۱۵.** *$L$ -کلاس هرزبروک [۳۶] به کلاس مشخصه گونه نظیر*

$$f(z) = \frac{z/2}{\tanh(z/2)} = 1 + \frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{720}z^4 + \cdots$$

*می‌گوییم.*

**مثال ۱۶.** *کلاس تاد [۳۷]، $Td$، به کلاس مشخصه گونه نظیر $f(z) = \frac{z}{1-e^{-z}}$ می‌گوییم. این کلاس مشخصه در صورت کوهومولوژیک قضیه اندیس مشاهده می‌شود.*

**مثال ۱۷.** *مشخصه چرن [۳۸] $ch$ به کلاس مشخصه نظیر سری توانی*

$$X \to tr\exp(\frac{-1}{2\pi i X})$$

*می‌گوییم. دقت کنید که این مشخصه یک گونه نیست، در واقع بطور صوری داریم*

$$ch(E) = \sum_i e^{x_i}$$

*پس روابط زیر را خواهیم داشت*

$$\begin{gathered} ch(E_1 \oplus E_2) = ch(E_1) + ch(E_2) \\ ch(E_1 \otimes E_2) = ch(E_1)ch(E_2) \end{gathered}$$

*به ازای یک مشتق همورد روی $E$ که انحنای آن $\Omega$ است می‌توان نشان داد*

$$ch(E) = [\sum_i (\frac{-1}{2\pi i})^k \frac{tr(\Omega^k)}{k!}] \in H^{2*}(M; \mathbb{Q})$$

به سادگی دیده می‌شود که کلاس‌های مشخصه گونه‌ها و مشخصه چرن یک نگاشت $K^{-*}(X,A) \to H^{2*}(X,A)$ تعریف می‌کنند. البته کلاس‌های مشخصه ذکر شده در مثال‌های بالا اعضایی در کوهومولوژی با ضرایب گویا تعریف می‌کنند. مشخصه چرن، به علاوه، ساختار حلقه‌ای را نیز حفظ می‌کند و درنتیجه $ch : K^{-*}(X,A) \to H^{2*}(X,A)$ یک همریختی حلقه‌ای خواهد بود.

[۳۳] Chern $f$-genus
[۳۴] splitting principle
[۳۵] total Chern class
[۳۶] Hirzebruch $L$-class
[۳۷] Todd class
[۳۸] Chern character

## ۱۱ صورت کوهومولوژیک قضیه عطیه و سینگر

فرض کنیم $M$ یک خمینه $m$-بعدی باشد. یک همریختی

$$\pi_! : H^{k+m}(B^*M, S^*M;\mathbb{R}) \to H^k(M)$$

که انتگرال‌گیری رو تارها نامیده می‌شود، وجود دارد:
فرض کنیم $\omega \in \Omega^{k+m}(B^*M, S^*M)$ نماینده یک کلاس کوهومولوژی در $H^{k+m}(B^*M, S^*M;\mathbb{R})$ باشد که با تحدید به $S^*M$ صفر شود. بطور موضعی می‌توان نوشت $\omega = \sum_i \alpha_i \smile \beta_i$ که $\beta_i$ برگردان یک $k$-فرم دیفرانسیل از $M$ است توسط $\pi_! : B^*M \to M$.
در این صورت،

$$\pi_!\omega = \sum_i(\int_{B^*M_x} \alpha_i)\beta_i$$

همانند قبل، $D$ یک عملگر شبه‌دیفرانسیل بیضوی از $E \to M$ با $F \to M$ باشد. دیده بودیم که $\sigma(D)$ عنصری $[\sigma(D)]$ در $K(B^*M, S^*M)$ تعریف می‌کند.

**قضیه ۱۸.** *(فرمول کوهومولوژیک قضیه اندیس عطیه و سینگر) برای یک خمینه فشرده جهت‌پذیر $M$ با بعد $m$، و یک عملگر شبه‌دیفرانسیل بیضوی $D$ از $E \to M$ به $F \to M$، داریم:*

$$Index\ D = (-1)^{m(m+1)/2}[M] \frown \{\pi_! ch(\sigma(D)) \smile Td(M)\}$$

*که در آن $Td(M) \equiv Td(TM \otimes \mathbb{C})$.*
*اگر شرط جهت‌پذیری را کنار بگذاریم، فرمول کلی‌تر زیر را داریم*

$$Index_a\ D = (-1)^m[TM] \frown \{ch([\sigma(D)]) \smile \pi^*Td(M)\}$$

*که در آن $\pi : TM \to M$.*

**مثال ۱۹.** *فرض کنیم $M$ یک خمینه ریمانی باشد و $d + d^* : \Omega^{even}(M) \to \Omega^{odd}(M)$ عملگر دُرام [۳۹] باشد. می‌توان نشان داد*

$$\sigma(d + d^*)(x, \xi)\nu = i\xi \wedge \nu - i * (\xi \wedge *\nu)$$

*که در آن $*$ ستاره هاج [۴۰] است. پس این عملگر بیضوی است. با استفاده از قضیه اصلی نظریه هاج [۴۱] داریم*

$$Ker\ (d + d^*)|_{\Omega^j(M)} = Ker\ \triangle|_{\Omega^j(M)} \simeq H^j(M)$$

*که در آن $\triangle = (d + d^*)^2$ پس $Index_a\ d + d^* = \sum_{j\ even} H^j(M) - \sum_{j\ odd} H^j(M) = \chi(M)$ با استفاده از قضیه اندیس می‌توان نتیجه گرفت*

$$\chi(M) = \int_M Pf(\Omega)$$

*که در آن $Pf$ چندجمله‌ای ناوردای فافین [۴۲] است و $\Omega$ انحنای $M$ است. این رابطه به فرمول گاوس-بونه-چرن [۴۳] معروف است.*

**مثال ۲۰.** *فرض کنیم $M$ یک خمینه بسته جهت‌پذیر ریمانی $2l$-بعدی باشد. خود وارون [۴۴] زیر را در نظر بگیرید*

$$\tau : \Omega^p(M) \to \Omega^{2l-p}(M)$$
$$v \mapsto (i)^{p(p-1)+l} * v$$

*فضای بردارهای ویژه نظیر $\pm 1$ را با $\Omega^{\pm}$ نمایش می‌دهیم. عملگر $P \equiv d+d^* : \Omega^+(M) \to \Omega^- M$ یک عملگر بیضوی است و می‌توان دید $Index_a\ P = Sig(M)$ که $Sig(M)$ علامت [۴۵] $M$ است. با استفاده از قضیه عطیه و سینگر می‌توان دید*

$$Sig(M) = 2^l[M] \frown L(TM \otimes \mathbb{C})$$

*به این رابطه قضیه علامت هرزبروک می‌گویند.*

## مراجع

[1] Thomas Schick, Modern Index Theory-lectures held at CIRM recontre'"Theorie d'indice", 2006.

[2] David Bleecker, Bernhelm Booth-Bavnbek, Index Theory, 2012.

[3] John Roe, Elliptic Operators, Topology and Asymptotic Methods, 1998.

[4] Wells, Raymond O'Neil. Differential analysis on complex manifolds. Vol. 65. Springer, 2008.

[5] Lawson, H. Blaine, and Marie-Louise Michelsohn. Spin geometry. Vol. 38. Princeton: Princeton university press, 1989.

[۳۹] de Rham
[۴۰] Hodge star operator
[۴۱] Hodge theory
[۴۲] Pfaffian polynomial
[۴۳] Gauss-Bonnet-Chern formula
[۴۴] involution
[۴۵] signature

# سرعت پخش شایعات در شبکه‌های اجتماعی قسمت اول*

عبّاس محرابیان†

**چکیده**

یک شبکهٔ اجتماعی را می‌توان به صورت یک گراف مدل کرد که رئوس آن اشخاص هستند و یال‌های آن روابط دوستی را نشان می‌دهند. در این مقاله چند تا از مدل‌های پخش شایعات در شبکه‌های اجتماعی[۱] را معرفی می‌کنیم و مهم‌ترین نتایج مربوط به سرعت پخش شایعات را بیان می‌کنیم.

## ۱ پروتکل ردکن‌بره

در این مقاله، فقط با گراف‌های بدون جهت، ساده و همبند سروکار خواهیم داشت و نماد $n$ همواره تعداد رئوس را نشان می‌دهد. اولین پروتکلی که بررسی می‌کنیم، پروتکل *ردکن‌بره*[۲] نام دارد که در زیر تعریف می‌شود.

**تعریف.** *فرض کنید $G$ گرافی بدون جهت، ساده و همبند باشد. در ابتدا یکی از رئوس گراف مانند $v$ خبری را می‌داند. در هر یک از گام‌های بعدی $t = 1, 2, \ldots$، هر رأسی که خبر را می‌داند، یکی از همسایه‌های خود را به صورت تصادفی و با توزیع یکنواخت انتخاب می‌کند، و خبر را برای او ارسال می‌کند. اولین زمانی که همهٔ رئوس باخبر می‌شوند را زمان پخش[۳] می‌نامیم و آن را با $ST(G, v)$ نشان می‌دهیم، که یک متغیر تصادفی است.*

دقت کنید که بنابر تعریف بالا، یک رأس ممکن است دو بار متوالی خبر را برای یک همسایهٔ خاص ارسال کند. به علاوه، اگر رأسی درست در زمان $t$ از خبر آگاه شد، پخش کردن آن را از زمان $t+1$ شروع می‌کند.

دو مثال ساده ببینیم.

**مثال ۱** (گراف مسیر). *فرض کنید $P_n$ گراف مسیر با رئوس $0, 1, \ldots, n-1$ باشد و در ابتدا رأس ۰ خبر را بداند (شکل ۱ را ببینید). می‌خواهیم امیدریاضی زمان پخش را محاسبه کنیم. در زمان $t = 1$ رأس ۰ خبر را به تنها همسایهٔ خود یعنی رأس ۱ می‌فرستد. حال رأس ۱ خبر را دارد و دو همسایه دارد. می‌توان فرض کرد که این رأس یک سکه دارد، و در هر گام آن را می‌اندازد: اگر شیر آمد خبر را برای رأس ۰ می‌فرستد و اگر خط*

*این مقاله دو بخش دارد. بخش دوم در یکی از شماره‌های بعدی مجله منتشر خواهد شد.

†نگارنده در سال ۱۳۸۸ مدرک کارشناسی خود را در دو رشتهٔ مهندسی کامپیوتر و ریاضیات از دانشگاه صنعتی شریف اخذ نمود و در حال حاضر دانشجوی دکتری دانشگاه واترلوی کاناداست. اگر نظری دربارهٔ مقاله دارید به amehrabi@uwaterloo.ca ای‌میل بزنید.

[۱] rumor spreading in social networks

[۲] the push protocol

[۳] spread time

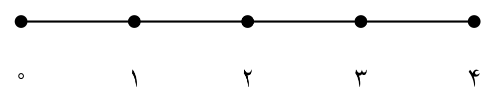
*آمد آن را برای رأس ۲ می‌فرستد. بنابراین اگر زمانی را که طول می‌کشد تا این رأس خبر را برای رأس ۲ بفرستد با $X_1$ نشان دهیم، برای هر $k = 1, 2, \ldots$ داریم*

$$\mathbb{P}\left[X_1 = k\right] = \left(\frac{1}{2}\right)^k .$$

*به عبارت دیگر، $X_1$ متغیری تصادفی با توزیع هندسی با پارامتر $\frac{1}{2}$ است. با همین استدلال می‌توان نشان داد که اگر رأس ۲ خبر را برای رأس ۳ پس از گذشت زمان $X_2$ بفرستد، $X_2$ متغیری تصادفی با توزیع هندسی با پارامتر $\frac{1}{2}$ است. به علاوه، دو متغیر $X_1$ و $X_2$ از هم مستقلند. با تکرار این استدلال و استفاده از استقرا، و با توجه به این که هنگامی که رأس $n-1$ آگاه شود همهٔ رئوس آگاه‌شده‌اند، داریم*

$$ST(P_n, 0) = 1 + X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-2} ,$$

*که $X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}$ متغیرهای مستقل هندسی با پارامتر $\frac{1}{2}$ هستند. چون امیدریاضی چنین متغیری ۲ است و به خاطر خطی بودن امید ریاضی، $\mathbb{E}\left[ST(P_n, 0)\right] = 2n - 3$. از طرف دیگر، طبق قانون اعداد بزرگ، برای $n$های بزرگ $ST(P_n, 0)$ بسیار به مقدار متوسط خود یعنی $2n - 3$ نزدیک است.*




شکل ۱: گراف $P_5$

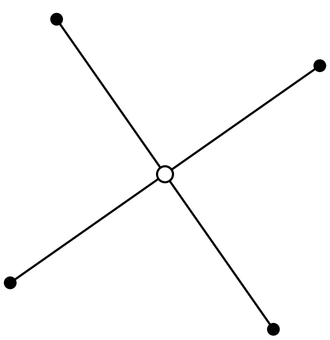
**مثال ۲** (گراف ستاره). *فرض کنید $S_n$ گراف ستاره با $n$ رأس $0, 1, \ldots, n-1$ باشد: در این گراف رأس ۰ به تمام رئوس دیگر متصل است، و هیچ یال دیگری وجود ندارد (شکل ۲ را ببینید). فرض کنید در ابتدا رأس ۰ خبر را بداند، و می‌خواهیم امید ریاضی زمان پخش را محاسبه کنیم. در گام اول رأس ۰ خبر را به یکی از رئوس دیگر می‌رساند. حال رأس ۰ یک همسایه دارد که خبر را می‌داند، و $n-2$ همسایه دارد که خبر را نمی‌دانند. تعداد گام‌هایی که طول می‌کشد رأس ۰ خبر را به یک رأس بی‌خبر برساند، یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $\frac{n-2}{n-1}$ است. به طور کلی، اگر $k$ تا از همسایه‌های رأس ۰ خبر را بدانند ($0 \le k \le n-2$) و $n-k-1$ تا بی‌خبر باشند، آن‌گاه تعداد گام‌هایی که طول می‌کشد که رأس تازه‌ای باخبر شود، متغیری هندسی با پارامتر $\frac{n-k-1}{n-1}$ است. به علاوه، این متغیرهای تصادفی از هم مستقلند. چون امید ریاضی چنین متغیری $\frac{n-1}{n-k-1}$ است، داریم*

$$\mathbb{E}\left[ST(S_n, 0)\right] = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-1}{n-k-1} = (n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \sim n \ln n .$$

*در این‌جا و در ادامهٔ مقاله، برای دو تابع $f(n), g(n)$، منظور از $f(n) \sim g(n)$ این است که*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)} = 1 .$$

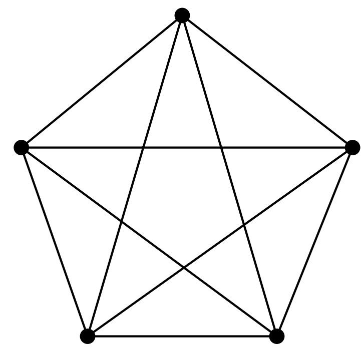
*از قانون اعداد بزرگ نتیجه می‌شود که برای $n$های بزرگ، $ST(S_n, 0)$ بسیار به مقدار متوسط خود نزدیک است.*



شکل ۲: گراف $S_5$

یک گراف کامل، گرافی است که در آن همهٔ رئوس به هم متصل باشند (شکل ۳ را ببینید). در سال ۱۹۸۷ رفتار این پروتکل در یک گراف کامل تحلیل شد و قضیهٔ زیر ثابت شد.

**قضیهٔ ۳** ([۱۴]). *فرض کنید $K_n$ یک گراف کامل $n$ رأسی و $v$ یکی از رئوس آن باشد. در این صورت $\mathbb{E}\left[ST(K_n, v)\right] \sim \log_2 n + \ln n$ و برای $n$های بزرگ، متغیر تصادفی $ST(K_n, v)$ به مقدار متوسط خود نزدیک است.*



شکل ۳: یک گراف کامل با ۵ رأس

## ۱.۱ کران‌های عمومی

زمان پخش پروتکل ردکن‌بره را روی سه گراف پایه بیان کردیم. دیدیم که این زمان می‌تواند برحسب تعداد رئوس گراف لگاریتمی باشد، خطی باشد، یا از مرتبهٔ $n \ln n$ باشد. می‌توان پرسید که حداکثر و حداقل زمان پخش روی یک گراف $n$ رأسی چقدر است؟ قضیهٔ زیر بیان می‌کند که چنانچه ضرایب ثابت مستقل از $n$ برایمان مهم نباشد، گراف‌های پایه‌ای که بررسی کردیم گراف‌های حدی هستند. برای یک گراف داده شده، *فاصلهٔ* دو رأس را برابر تعداد یال‌های کوتاه‌ترین مسیری که آن دو رأس را به هم متصل می‌کند تعریف می‌کنیم، و بیشترین فاصلهٔ ممکن بین دو رأس $G$ را *قطر* $G$ می‌نامیم و با $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهیم.

**قضیهٔ ۴** ([۹]). *الف) برای هر گراف $n$ رأسی $G$ و هر رأس $v$ از آن، قطعاً داریم*

$$\max\left\{\log_2 n, \frac{1}{2}\,\mathrm{diam(G)}\right\} \leq ST(G,v)\,.$$

*ب) فرض کنید $G$ گرافی $n$ رأسی و $v$ رأسی دلخواه از آن باشد. در این صورت داریم*

$$\mathbb{P}\left[ST(G,v) \geq 12n\lceil \log_2 n\rceil\right] \leq \frac{1}{n}\,.$$

*اثبات قسمت الف)*. با انجام هر گام تعداد رئوسی که خبر را می‌دانند حداکثر دو برابر می‌شود، پس $\log_2 n \leq ST(G,v)$. فرض کنید $u$ رأسی از $G$ باشد که بیشترین فاصله را از $v$ دارد. این فاصله را با $D$ نشان می‌دهیم. در این صورت، لااقل $D$ گام برای انتقال خبر از $v$ به $u$ لازم است، در نتیجه $D \leq ST(G,v)$. از طرف دیگر برای هر دو رأس دلخواه $x$ و $y$ از گراف، مسیری از $x$ به $v$ به طول حداکثر $D$ و مسیری از $v$ به $y$ به طول حداکثر $D$ وجود دارد. در نتیجه فاصلهٔ بین $x$ و $y$ در گراف از $2D$ بیشتر نیست. با توجه به تعریف قطر، داریم $\mathrm{diam}(G) \leq 2D$. لذا، $\frac{1}{2}\,\mathrm{diam(G)} \leq D \leq ST(G,v)$. □

برای اثبات قسمت (ب) قضیهٔ بالا نیاز به دو گزارهٔ احتمالاتی زیر داریم.

**گزارهٔ ۵** (کران اجتماع[۴]). *فرض کنید $m$ عددی طبیعی و $A_1, A_2, \ldots, A_m$ چند پیشامد باشند. در این صورت داریم*

$$\mathbb{P}\left[A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m\right] \leq \mathbb{P}\left[A_1\right] + \mathbb{P}\left[A_2\right] + \cdots + \mathbb{P}\left[A_m\right].$$

**گزارهٔ ۶** (نامساوی مارکوف[۵]). *فرض کنید $X$ یک متغیر تصادفی نامنفی و $a$ عددی مثبت باشد. در این صورت داریم*

$$\mathbb{P}\left[X \geq a\right] \leq \mathbb{E}\left[X\right]/a\,.$$

*اثبات قضیهٔ ۴ قسمت ب)*. فرض کنید $u$ رأسی دلخواه از گراف باشد، و $X_u$ زمانی باشد که رأس $u$ خبر را می‌فهمد. فرض کنید $x_0, x_1, \ldots, x_k$ یک کوتاه‌ترین مسیر از $v$ به $u$ باشد، و $x_0 = v$ و $x_k = u$. دقت کنید که هر رأس $w$ از گراف، حداکثر سه تا از همسایه‌هایش در این مسیر قرار دارند. چرا که اگر مثلاً $w$ با چهار رأس $x_2, x_3, x_4, x_5$ در این مسیر مجاور باشد، می‌توان قسمت $x_2, x_3, x_4, x_5$ را با مسیر کوتاه‌تر $x_2, w, x_5$ جایگزین کرد و از طول مسیر کم کرد، که این متناقض با کوتاه‌ترین بودن $x_0, \ldots, x_k$ است. نتیجه می‌گیریم که اگر همهٔ همسایه‌های رئوس $x_0, \ldots, x_k$ را فهرست کنیم، هر رأس گراف را حداکثر سه بار آورده‌ایم، پس مجموع درجات رئوس $x_0, x_1, \ldots, x_k$ حداکثر $3n$ است:

$$\deg(x_0) + \deg(x_1) + \cdots + \deg(x_k) \leq 3n\,.$$

از طرف دیگر، برای هر $0 \leq i \leq k-1$، وقتی $x_i$ خبر را فهمید، مدت زمانی که طول می‌کشد خبر را برای رأس $x_{i+1}$ بفرستد، یک متغیر تصادفی هندسی با پارامتر $\deg(x_i)^{-1}$ است

[۴] the union bound

[۵] Markov's inequality

(مثال ۱ را به خاطر بیاورید). امید ریاضی این متغیر تصادفی $\deg(x_i)$ است، لذا به دلیل خطی بودن امید ریاضی، داریم
$$\mathbb{E}\left[X_u\right] \le \deg(x_0) + \deg(x_1) + \cdots + \deg(x_k)\,.$$

دقت کنید که در این‌جا نمی‌توان تساوی قرار داد، چون ممکن است مسیرهای دیگری هم از $v$ به $u$ وجود داشته باشند، و ما فقط مدتی که طول می‌کشد خبر از طریق یک مسیر خاص منتقل شود را تحلیل کردیم.

از ترکیب نامساوی‌های بالا نامساوی $\mathbb{E}\left[X_u\right] \le 3n$ به دست می‌آید. نامساوی مارکوف نتیجه می‌دهد
$$\mathbb{P}\left[X_u \ge 6n\right] \le \frac{1}{2}\,.$$

پس از گذشت زمان $6n$ به احتمال لااقل یک‌دوم رأس $u$ خبر را می‌داند. بنابراین پس از $12n$ گام، به احتمال لااقل سه‌چهارم رأس $u$ خبر را می‌داند، زیرا می‌توان این $12n$ گام را به صورت دو بخش $6n$ گامی تصور کرد، و احتمال این که نه در بخش اول رأس $u$ مطلع شود و نه در بخش دوم، حداکثر یک‌چهارم است. به همین ترتیب، داریم:
$$\mathbb{P}\left[X_u \ge (2\lceil\log_2 n\rceil)\times 6n\right] \le \left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_2 n} = n^{-2}\,.$$
به کمک کران اجتماع داریم
$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left[ST(G,v) \ge 12n\lceil\log_2 n\rceil\right]\\
&= \bigcup_{w\in V(G)} \mathbb{P}\left[X_w \ge 12n\lceil\log_2 n\rceil\right]\\
&\le \sum_{w\in V(G)} \mathbb{P}\left[X_w \ge 12n\lceil\log_2 n\rceil\right]\\
&\le \frac{1}{n}\,.
\end{aligned}$$
□

**تعریف.** *برای یک گراف $n$ رأسی $G$، زمان تضمینی پخش[۶] را کوچک‌ترین عددی مثل $\tau$ می‌گیریم به طوری که بعد از $\tau$ گام، احتمال این که همهٔ رئوس خبر را بدانند لااقل $1-\frac{1}{n}$ باشد، مستقل از این که رأس شروع‌کننده چه باشد. این عدد که یک پارامتر گراف $G$ است را با $gst(G)$ نشان می‌دهیم. به زبان ریاضی،*
$$gst(G) := \inf\left\{\tau:\ \max_{v\in V(G)}\{\mathbb{P}\left[ST(G,v)>\tau\right]\} \le \frac{1}{n}\right\}.$$

بنابراین قضیهٔ ۴ بیان می‌کند که برای هر گراف $G$ داریم
$$\max\left\{\log_2 n, \frac{1}{2}\,\mathrm{diam(G)}\right\} \le gst(G) \le 12n\lceil\log_2 n\rceil\,.$$
کران‌های بالا و پایین بهتری بعداً در مقالهٔ [۸] اثبات شدند.

قضیهٔ پیش رو برای بسیاری از گراف‌ها کران بالای بهتری می‌دهد. ایدهٔ اثبات آن شبیه قضیهٔ پیشین است، ولی در اثبات آن از قضیهٔ چرنوف[۷] استفاده می‌شود.

**قضیهٔ ۷ ([۹]).** *فرض کنید $G$ یک گراف باشد و $\Delta$ بزرگ‌ترین درجهٔ رئوسش باشد. در این صورت،*
$$gst(G) \le 6\Delta(\mathrm{diam}(G) + \log_2 n)\,.$$

## ۲.۱ کمی دربارهٔ تاریخچه و کاربردها.

پیش از ادامهٔ کار خوب است کمی دربارهٔ تاریخچه و کاربردهای این پروتکل بدانیم. اولین مقاله‌ای که این پروتکل را به صورت ریاضی تحلیل کرد در سال ۱۹۸۷ منتشر شد [۱۴].

در همان سال و به صورت مستقل، این پروتکل در یک کنفرانس علوم کامپیوتری معرفی شد [۴]. یک پایگاه داده را در نظر بگیرید که چند نسخهٔ همانند از آن وجود دارد که از طریق یک شبکه به هم وصلند[۸]. هنگامی که کاربری یکی از نسخه‌ها را تغییر می‌دهد، این تغییر باید در تمام نسخه‌ها اعمال شود. برای این کار می‌توان از این پروتکل یا پروتکل‌های مشابه استفاده کرد. برای جزئیات بیشتر [۴] را ببینید.

سه سال بعد، کاربرد دیگری از این پروتکل مطرح شد [۹]. یک عملیات پردازشی را در نظر بگیرید که انجام آن بین چند پردازنده پخش شده است[۹]. این پردازنده‌ها یک شبکه تشکیل می‌دهند که یال‌های آن، کانال‌های ارتباطی بین پردازنده‌ها را نشان می‌دهند. اگر پردازنده‌ای بخواهد اطلاعاتی را برای همهٔ پردازنده‌های دیگر بفرستد، می‌تواند از این پروتکل استفاده کند. این پروتکل سه خوبی دارد: (۱) ساده است (هر پردازنده کافی است فقط همسایه‌های خودش را بشناسد و لازم نیست اطلاعاتی در مورد ساختار شبکه داشته باشد)، (۲) با بزرگ شدن شبکه، الگوریتم تغییر نمی‌کند، و (۳) در برابر برخی از خطاها

[۶] guaranteed spread time
[۷] the Chernoff bound
[۸] a replicated database
[۹] a distributed computation

مانند خرابی پردازنده‌ها و لینک‌ها تا حدی مقاوم است. برای جزئیات بیشتر [۹] را ببینید.

طی ده سال اخیر از چنین پروتکل‌هایی برای مدل‌سازی پخش اخبار در شبکه‌های اجتماعی نیز استفاده شده است، مثلاً [۵] را ببینید. شایان ذکر است که سال‌ها پیش از آن که علوم کامپیوتردانان به این پروتکل علاقمند شوند، زیست‌شناسان پروتکل‌های مشابهی برای مدل‌سازی پخش بیماری‌ها[۱۰] در شبکه‌های انسانی تعریف کرده بودند؛ مثلاً [۶] را ببینید.

### ۳.۱ کران‌هایی برای گراف‌های خاص.

قضایای ۴ و ۷ برای کلیهٔ گراف‌ها درست هستند. در گراف‌های خاص کران‌های بالا و پایینی مختلفی برای زمان تضمینی پخش اثبات شده است که در ادامه برخی از آن‌ها را می‌آوریم.

فرض کنید $d$ یک عدد طبیعی باشد. گراف *ابرمکعب $d$-بُعدی*[۱۱] که به طریق زیر تعریف می‌شود را با $\mathcal{H}_d$ نشان می‌دهیم: مجموعه رئوس $\mathcal{H}_d$ همهٔ رشته‌های به طول $d$ از ۰ و ۱ هستند، و دو رأس آن به هم وصلند اگر تنها در یک مؤلفه با هم تفاوت داشته باشند. این گراف $n = 2^d$ رأس دارد و درجهٔ هر رأس آن $d$ است، و قطر آن هم $d$ است.

**قضیهٔ ۸** ([۹]). *اعداد ثابت $C$ و $C'$ وجود دارند به طوری که برای هر $d$،*

$$Cd \le gst(\mathcal{H}_d) \le C'd\,.$$

دقت کنید که $d = \log_2 n$، بنابراین قضیهٔ بالا بیان می‌کند که زمان پخش این گراف عملاً لگاریتمی است، با این که تعداد یال‌هایش خیلی زیاد نیست.

یک *متحرک تصادفی*[۱۲] ، در واقع یک زنجیر مارکوف[۱۳] است که مجموعهٔ حالت‌های[۱۴] آن همان مجموعهٔ رئوس گراف است. این متحرک از رأسی از گراف شروع به حرکت می‌کند و در هر گام به صورت تصادفی به یکی از رئوس مجاور می‌رود که با توزیع یکنواخت از بین همهٔ همسایه‌ها انتخاب شده است. در مقالهٔ [۷] ارتباطات جالبی بین زمان پخش خبر در یک گراف و زمانی که طول می‌کشد یک متحرک تصادفی همهٔ رئوس آن گراف را ببیند اثبات شده است. در زیر یکی از نتایج این مقاله را می‌آوریم.

**قضیهٔ ۹** ([۷]). *فرض کنید $G$ گرافی با $n$ رأس و $m$ یال باشد و $\delta$ و $\Delta$ به ترتیب کم‌ترین و بیش‌ترین درجات رئوسش باشند. فرض کنید $cov(G)$ امید ریاضی زمانی باشد که طول می‌کشد تا یک متحرک تصادفی کلیهٔ رئوس گراف را ببیند، با فرض این که رأس آغازین طوری انتخاب شده باشد که این امید ریاضی بیشینه شود. به علاوه، فرض کنید $ast(G)$ امیدریاضی زمان پخش پروتکل ردکن‌بره باشد، با فرض این که رأس آغازین طوری انتخاب شده باشد که این امید ریاضی بیشینه شود. در این صورت، اعداد ثابت $C$ و $C'$ وجود دارند که*

$$C\,\frac{\sqrt{n\ln n}}{\Delta} \le \frac{cov(G)}{ast(G)} \le C'\,\frac{m\ln n}{\delta}\,.$$

## ۲ پروتکل بده‌بستان

پروتکل بده‌بستان[۱۵] به صورت زیر تعریف می‌شود.

**تعریف.** *فرض کنید $G$ گرافی بدون جهت، ساده و همبند باشد. در ابتدا یکی از رئوس گراف مانند $v$ خبری را می‌داند. در هر یک از گام‌های بعدی $t = 1, 2, \ldots$ ، هر رأسی که خبر را می‌داند، یکی از همسایه‌های خود را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند، و خبر را برای او ارسال می‌کند؛ و هر رأسی که خبر را نمی‌داند، یکی از همسایه‌های خود را به صورت تصادفی انتخاب می‌کند و خبر را از او می‌پرسد (اگر همسایه خبر را بداند به او اطلاع می‌دهد وگرنه اتفاقی نمی‌افتد). اولین زمانی که همهٔ رئوس باخبر می‌شوند را با $ST_{\mathrm{pp}}(G, v)$ نشان می‌دهیم، که یک متغیر تصادفی است.*

[۱۰] epidemics

[۱۱] the $d$-dimensional hypercube

[۱۲] random walk

[۱۳] Markov chain

[۱۴] state space

[۱۵] the push&pull protocol

این پروتکل در مقالهٔ [۴] معرفی شد و نخستین بار در [۱۳] به صورت ریاضی تحلیل شد. دو مثال ساده ببینیم.

**مثال ۱۰** (گراف ستاره). *فرض کنید $S_n$ گراف ستاره باشد که رأس مرکزی آن $0$ و بقیهٔ رئوس آن $1, 2, \ldots, n-1$ نام‌گذاری شده‌اند. اگر در ابتدا رأس مرکزی خبر را بداند، در همان اولین گام همهٔ رئوس خبر را از او می‌پرسند و باخبر می‌شوند. اگر در ابتدا رأس دیگری خبر را بداند، در گام اول خبر را به رأس مرکزی می‌گوید، و در گام دوم سایر رئوس خبر را از رأس مرکزی می‌پرسند. در نتیجه برای هر $i$ بین ۱ و $n-1$ داریم $ST_{\mathsf{pp}}(S_n, 0) = 1$ و $ST_{\mathsf{pp}}(S_n, i) = 2$. پس زمان پخش برای پروتکل بده‌بستان در گراف ستاره یک متغیر قطعی[۱۶] است.*

**مثال ۱۱** (گراف مسیر). *فرض کنید $P_n$ گراف مسیر با رئوس $0, 1, \ldots, n-1$ باشد و در ابتدا رأس $0$ خبر را بداند. می‌خواهیم امیدریاضی زمان پخش را محاسبه کنیم. در گام نخست رأس $0$ خبر را به تنها همسایهٔ خود یعنی رأس ۱ می‌فرستد. فرض کنیم $X_2$ مدت زمانی باشد که طول می‌کشد تا رأس ۲ باخبر شود. در هر یک از گام‌های بعدی، رأس ۱ خبر را به احتمال یک‌دوم به رأس ۲ می‌فرستد، و رأس ۲ به احتمال یک‌دوم خبر را از رأس ۱ می‌پرسد. بنابراین در هر یک از این گام‌ها، احتمال این که رأس ۲ خبردار نشود یک‌چهارم است. چون این گام‌ها مستقلند، برای هر $k = 1, 2, \ldots$ داریم*

$$\mathbb{P}[X_2 = k] = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}.$$

*به عبارت دیگر، $X_2$ متغیری هندسی با پارامتر $\frac{3}{4}$ است. با همین استدلال می‌توان نشان داد که اگر مدت زمان $X_3$ طول بکشد تا رأس ۳ خبر را بفهمد، $X_3$ متغیری هندسی با پارامتر $\frac{3}{4}$ است. به علاوه، دو متغیر $X_2$ و $X_3$ از هم مستقلند. با تکرار این استدلال و استفاده از استقرا، و با توجه به این که هنگامی که رأس $n-1$ آگاه شود همهٔ رئوس آگاه‌شده‌اند، داریم*

$$ST(P_n, 0) = 1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{n-2} + 1,$$

*که $X_2, X_3, \ldots, X_{n-2}$ متغیرهای مستقل هندسی با پارامتر $\frac{3}{4}$ هستند. (دقت کنید که هر زمانی که رأس $n-2$ باخبر شود، رأس $n-1$ در گام بعدی خبر را از او می‌پرسد و باخبر می‌شود.) چون امیدریاضی چنین متغیری $\frac{4}{3}$ است و به خاطر خطی بودن امید ریاضی، $\mathbb{E}[ST_{\mathsf{pp}}(P_n, 0)] = \frac{4}{3}n - 2$. از طرف دیگر، طبق قانون اعداد بزرگ، برای $n$های بزرگ $ST_{\mathsf{pp}}(P_n, 0)$ بسیار به مقدار متوسط خود نزدیک است.*

یک گراف مهم دیگر گراف کامل است. در سال ۲۰۰۰ رفتار این پروتکل در یک گراف کامل تحلیل شد و قضیهٔ زیر ثابت شد.

**قضیهٔ ۱۲** ([۱۳]). *فرض کنید $K_n$ یک گراف کامل $n$ رأسی و $v$ یکی از رئوس آن باشد. در این صورت $\mathbb{E}[ST_{\mathsf{pp}}(K_n, v)] \sim \log_3 n$ و برای $n$های بزرگ، متغیر تصادفی $ST(K_n, v)$ به مقدار متوسط خود نزدیک است.*

## ۱.۲ کران‌های عمومی

در مثال ۲ دیدیم که در پروتکل ردکن‌بره ، امیدریاضی زمان پخش یک گراف $n$ رأسی، مثلاً گراف ستاره، می‌تواند از مرتبهٔ $n \ln n$ باشد. قضیهٔ زیر، که اثبات آن به کمک استقرا چندان پیچیده نیست، نشان می‌دهد که چنین وضعیتی در مورد پروتکل بده‌بستان رخ نمی‌دهد.

**قضیهٔ ۱۳** ([۱]). *برای هر گراف همبند $n$ رأسی مثل $G$ و هر رأس $v$ از آن، داریم*

$$\mathbb{E}[ST_{\mathsf{pp}}(G, v)] < 5n\,.$$

**تعریف.** *زمان متوسط پخش[۱۷] گراف $G$ را با $ast_{\mathrm{pp}}(G)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$ast_{\mathrm{pp}}(G) := \max\{\mathbb{E}[ST_{\mathsf{pp}}(G, v)] : v \in V(G)\}\,.$$

بنابراین قضیهٔ ۱۳ بیان می‌کند که $ast_{\mathrm{pp}}(G)$ حداکثر خطی است.

زمان تضمینی پخش را می‌توان مشابه قبل برای این پروتکل نیز تعریف کرد؛ این پارامتر را با $gst_{\mathrm{pp}}(G)$ نشان می‌دهیم. به عنوان تمرین، گرافی را بسازید که زمان تضمینی پخش آن لااقل از مرتبهٔ $\Omega(n \ln n)$ باشد.

**قضیهٔ ۱۴** ([۱]). *برای هر گراف $G$ داریم*

$$gst_{\mathrm{pp}}(G) \le e\lceil \ln n \rceil \times ast_{\mathrm{pp}}(G)\,.$$

[۱۶] deterministic

[۱۷] average spread time

*اثبات.* فرض کنید $t$ عددی حقیقی، $k$ عددی طبیعی، و $v$ رأسی دلخواه باشد. ابتدا نشان می‌دهیم

$$\mathbb{P}\left[ST_{\mathsf{pp}}(G,v) > kt\right] \le \mathbb{P}\left[ST_{\mathsf{pp}}(G,v) > t\right]^k \ . \qquad (۱)$$

بازهٔ زمانی $[۰, kt]$ را به $k$ بازهٔ مساوی به طول $t$ تقسیم کنید. الگوریتمی را در نظر بگیرید که مشابه بده‌بستان عمل می‌کند با این تفاوت که فقط به اندازهٔ زمان $t$ فرصت دارد تا همهٔ رئوس را باخبر کند، و اگر نتوانست در این زمان رئوس را باخبر کند، دوباره از اول شروع می‌کنیم. دقت کنید که اگر $k$ بار این الگوریتم را اجرا کنیم، احتمال این که هرگز موفق نشود که رئوس را باخبر کند $\mathbb{P}\left[ST_{\mathsf{pp}}(G,v) > t\right]^k$ است. در عین حال، اگر به پروتکل بده‌بستان به اندازهٔ $kt$ فرصت بدهیم، احتمال موفقیت آن از $k$ بار انجام این الگوریتم بیشتر است، در نتیجه (۱) درست است.

از طرف دیگر، از نامساوی مارکوف داریم

$$\mathbb{P}\left[ST_{\mathsf{pp}}(G,v) > e\mathbb{E}\left[ST_{\mathsf{pp}}(G,v)\right]\right] < ۱/e$$

از ترکیب این نامساوی و (۱) به دست می‌آوریم:

$$\mathbb{P}\left[ST_{\mathsf{pp}}(G,v) > e\lceil \ln n\rceil \times \mathbb{E}\left[ST_{\mathsf{pp}}(G,v)\right]\right] < ۱/n \ .$$

چون این نامساوی برای هر رأس ابتدایی $v$ درست است، قضیه ثابت می‌شود. $\square$

شهود ما می‌گوید هر چقدر ارتباطات بین بخش‌های مختلف یک گراف بیشتر باشد، خبر سریع‌تر بین بخش‌های مختلف پخش می‌شود. برعکس، اگر مثلاً دو بخش گراف باشند که هر یک درون خود ارتباطات زیادی داشته باشند ولی بین این دو بخش تعداد یال‌های کمی وجود داشته باشد، مدت بیشتری طول می‌کشد تا خبر از یک بخش به بخش دیگر منتقل شود. با دقیق کردن این شهود به کمک دو پارامتر مختلف گراف، دو قضیهٔ زیر اثبات شده‌اند.

**تعریف** (رسانایی گراف[۱۸]). *برای یک مجموعهٔ $S$ از رئوس گراف $G$، تعریف می‌کنیم $vol(S) = \sum_{v\in S}\deg(v)$، و تعداد یال‌هایی را که یک سرشان در $S$ است و سر دیگرشان در $V \setminus S$ است با $\partial(S)$ نشان می‌دهیم. رسانایی گراف $G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\phi(G) := \min\left\{\frac{\partial(S)}{vol(S)} : S\subseteq V, vol(S)\le vol(V)/۲\right\}.$$

دقت کنید که $vol(V)$ دقیقاً دو برابر تعداد یال‌های $G$ است. هم‌چنین رسانایی گراف همیشه عددی بین ۰ و ۱ است، و برابر ۰ است اگر و تنها اگر گراف ناهمبند باشد. به صورت شهودی، هر چه ارتباطات بین بخش‌های مختلف یک گراف بیشتر باشد، رسانایی آن هم بیشتر است. قضیهٔ زیر که ارتباط جالبی بین این پارامتر و سرعت پخش پروتکل بده‌بستان را بیان می‌کند در سال ۲۰۱۱ به اثبات رسید.

**قضیهٔ ۱۵** ([۱۰]). *برای هر گراف $n$ رأسی $G$ داریم $gst_{\mathrm{pp}}(G) \le O((\ln n)/\phi(G))$.*

همچنین ثابت شده که این کران قابل بهتر شدن نیست (به جز این که ثابت نهان در نماد $O$ امکان بهبود دارد)؛ در مقالهٔ [۲] گراف‌هایی ساخته شده‌اند که زمان تضمینی پخش آن‌ها لااقل از مرتبهٔ $\Omega((\ln n)/\phi(G))$ است.

**تعریف** (عدد برابرمحیطی رأسی[۱۹]). *برای مجموعهٔ $S$ از رئوس گراف $G$، مجموعه رئوسی از $V\setminus S$ که همسایه‌ای در $S$ دارند را با $N(S)$ نشان می‌دهیم. عدد برابر محیطی رأسی گراف $G$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:*

$$\alpha(G) := \min\left\{\frac{|N(S)|}{|S|} : S\subseteq V, ۰ < |S| \le |V|/۲\right\} .$$

دقت کنید که این پارامتر هم همیشه عددی بین ۰ و ۱ است، و برابر ۰ است اگر و تنها اگر گراف ناهمبند باشد. قضیهٔ زیر که ارتباط جالبی بین این پارامتر و سرعت پخش پروتکل بده‌بستان را بیان می‌کند در سال ۲۰۱۴ به اثبات رسید.

**قضیهٔ ۱۶** ([۱۱]). *اگر $G$ گرافی $n$ رأسی و $\Delta$ بزرگ‌ترین درجهٔ رئوس $G$ باشد، $gst_{\mathrm{pp}}(G) \le O(\ln\Delta \times (\ln n)/\alpha(G))$.*

همچنین ثابت شده که این کران قابل بهتر شدن نیست (به جز این که ثابت نهان در نماد $O$ امکان بهبود دارد)؛ در

[۱۸] graph conductance

[۱۹] vertex isoperimetric number

[۲۰] edge isoperimetric number

[۲۱] Cheeger constant

مقالهٔ [۱۲] گراف‌هایی ساخته شده‌اند که زمان تضمینی پخش آن‌ها لااقل از مرتبهٔ $\Omega(\ln \Delta \times (\ln n)/\alpha(G))$ است.

پارامتر مهم دیگری که میزان همبستگی یک گراف را نشان می‌دهد، عدد برابرمحیطی یالی[۲۰] یا ثابت چیگر[۲۱] گراف نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\iota(G) := \min\left\{\frac{\partial(S)}{|S|} : S \subseteq V, 0 < |S| \leq |V|/2\right\} .$$

قضیه‌های ۱۵ و ۱۶ بیان می‌کنند که اگر گرافی رسانایی‌اش از عدد ثابتی بیشتر باشد، یا عدد برابرمحیطی رأسی‌اش از عدد ثابتی بیشتر باشد، آن‌گاه زمان تضمینی پخش‌اش حداکثر یک چندجمله‌ای برحسب $\ln n$ است. این گزاره دربارهٔ ثابت چیگر درست نیست: در مقالهٔ [۳] خانواده‌ای از گراف‌ها معرفی شده است که ثابت چیگرشان از عدد ثابتی بیشتر است ولی زمان تضمینی پخش‌شان لااقل از مرتبهٔ $\Omega(n)$ است.

بخش اول مقاله در این‌جا به پایان می‌رسد. در بخش دوم، پروتکل دیگری را بررسی می‌کنیم که پروتکل بده‌بستان ناهمزمان[۲۲] نام دارد، و در نهایت عملکرد این سه پروتکل را روی گراف‌های تصادفی وارسی خواهیم کرد.

## مراجع


[1] Acan, H., Collevecchio, A., Mehrabian, A., and Wormald, N. On the push&pull protocol for rumour spreading. submitted, 2014.

[2] Chierichetti, F., Lattanzi, S., and Panconesi, A. Almost tight bounds for rumour spreading with conductance. In *Proc. 42nd Symp. Theory of Computing (STOC)*, pp. 399–408, 2010.

[3] Chierichetti, F., Lattanzi, S., and Panconesi, A. Rumor spreading in social networks. *Theoretical Computer Science*, 412(24):2602 – 2610, 2011. Selected Papers from 36th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP 2009).

[4] Demers, A., Greene, D., Hauser, C., Irish, W., Larson, J., Shenker, S., Sturgis, H., Swinehart, D., and Terry, D. Epidemic algorithms for replicated database maintenance. In *Proc. 6th Symp. Principles of Distributed Computing (PODC)*, pp. 1–12, 1987.

[5] Doerr, B., Fouz, M., and Friedrich, T. Why rumors spread so quickly in social networks. *Commun. ACM*, 55(6):70–75, 2012.

[6] Durrett, R. Stochastic growth models: recent results and open problems. In *Mathematical approaches to problems in resource management and epidemiology (Ithaca, NY, 1987)*, Vol. 81 of *Lecture Notes in Biomath.*, pp. 308–312. Springer, Berlin, 1989.

[7] Elsässer, R. and Sauerwald, T. Cover time and broadcast time. In *STACS 2009: 26th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science*, Vol. 3 of *LIPIcs. Leibniz Int. Proc. Inform.*, pp. 373–384. Schloss Dagstuhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2009.

[8] Elsässer, R. and Sauerwald, T. On the runtime and robustness of randomized broadcasting. *Theoret. Comput. Sci.*, 410(36):3414–3427, 2009.

[9] Feige, U., Peleg, D., Raghavan, P., and Upfal, E. Randomized broadcast in networks. *Random Struct. Algorithms*, 1(4):447–460, 1990.

[10] Giakkoupis, G. Tight bounds for rumor spreading in graphs of a given conductance. In *Proc. 28th Symp. Theoretical Aspects of Computer Science (STACS)*, pp. 57–68, 2011.


[۲۲] asynchronous push&pull protocol

[11] Giakkoupis, G. Tight bounds for rumor spreading with vertex expansion. In *Proc. 25th Symp. Discrete Algorithms (SODA)*, pp. 801–815, 2014.

[12] Giakkoupis, G. and Sauerwald, T. Rumor spreading and vertex expansion. In *Proc. 23th Symp. Discrete Algorithms (SODA)*, pp. 1623–1641, 2012.

[13] Karp, R., Schindelhauer, C., Shenker, S., and Vöcking, B. Randomized Rumor Spreading. In *41st Symp. Foundations of Computer Science (FOCS)*, pp. 565–574, 2000.

[14] Pittel, B. On spreading a rumor. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 47(1):213–223, 1987.

# مصاحبه با دکتر شهیدی

در حاشیه‌ی سومین همایش مرزهای علوم ریاضی، فرصتی پیش آمد تا با آقای دکتر فریدون شهیدی گفت‌وگویی داشته باشیم. این مصاحبه توسط دکتر کسری علیشاهی و دکتر عرفان صلواتی انجام شده است. در این گفت‌وگو، آقای دکتر مهدی عسگری، که دانشجوی دکتر شهیدی بوده‌اند هم حضور داشتند. متن این گفت‌وگو را در زیر می‌بینید.

**صلواتی: لطف کنید خودتان را معرفی کنید و بفرمائید که دوره‌های تحصیلی خود را در چه زمانی و کجا گذرانده‌اید و بعد پژوهش‌تان را در چه دانشگاه‌ها و موسساتی گذرانده‌اید و در چه زمینه‌های تحقیقاتی کار کرده‌اید؟**

شهیدی: من دوره‌ی دانشگاهی‌ام را در ایران در دانشکده‌ی فنی (دانشگاه تهران) بودم و در رشته‌ی مکانیک تحصیل می‌کردم در سال‌های ۱۹۶۹-۱۹۶۵ (۱۳۴۸-۱۳۴۴). بعد از خدمت سربازی به آمریکا رفتم به دانشگاه جانزهاپکینز [۱]. دبیرستان البرز بودم، در زمان دکتر مجتهدی بود، ۶ سال در دبیرستان البرز بودم. البرز مدرسه‌ی خاصی بود که علاقه‌ی من به ریاضیات از آنجا شروع می‌شود. سربازی هم در اداره‌ی مهندسی بودم. در سال ۱۹۷۵-۱۹۷۱ در جانزهاپکینز دکتری خودم را گرفتم با جوزف شالاکا [۲] که یک ریاضی‌دان لهستانی الاصل بود و در آمریکا به دنیا آمده بود. من خواهرم در بالتیمور بود و به همین دلیل یکی از گزینه‌های من دانشگاه جانزهاپکینز بود. بعد از ۴ سال دکترایم را گرفتم و بعد یک سال رفتم مؤسسه‌ی مطالعات عالی[۳] در پرینستون سال ۱۹۷۶-۱۹۷۵ و سال ۱۹۷۷-۱۹۷۶ یک سال در دانشگاه ایندیانا بودم در بلومینگتون[۴]، بعد از آن هم تاکنون در دانشگاه پردو[۵] بوده‌ام و در این مدت ۲ بار ۲ تا یک سال کامل ۱۹۸۴-۱۹۸۳ و سال ۱۹۹۱-۱۹۹۰ دوباره در مؤسسه‌ی مطالعات عالی بودم. جاهای زیادی هم به طور کوتاه مدت حضور داشته‌ام. در MSRI بوده‌ام، در فرانسه در اورسی بوده‌ام، در ژاپن در کیوتو بوده‌ام، در مؤسسه‌ی تاتا در هندوستان بوده‌ام، در روسیه در مؤسسه‌ی اویلر بودم به مدت ۱۰ روز برای یک کنفرانس که برای ۳۰۰ سالگی اویلر بود، در مؤسسه‌ی شرودینگر در وین بوده‌ام، در دانشگاه چینوا در چین در سال ۲۰۱۲ یک مدتی درس داده‌ام، در Morningside Academy of Science (چین) بوده‌ام، چندین ویزیت در کره بوده‌ام، در IPM هم چندین‌بار بوده‌ام و یک تابستان هم در دانشگاه شریف درس داده‌ام. خیلی قدیم‌ها، آن موقع قصد داشتم برگردم، دکترا را گرفته بودم و هنوز به جایی اپلای نکرده بودم و مطمئن نبودم که بمانم یا نمانم، و آن موقع برای اپلای همه جا دیر شده بود، فوریه بود. یک ریاضی‌دان هندی بود که من از جانزهاپکینز می‌شناختم، که با من تماس گرفت و گفت: do you want a job? من هم یک سال رفتم به آنجا و در همان یک سال اپلای کردم برای شغل در دانشگاه پردو و می‌خواستند. آنها نوودورسکی[۶] را گرفته بودند و یکی دو نفر را هم می‌خواستند بگیرند که یک مرکز درست شود در رشته‌ی ما؛ به همین دلیل من را هم گرفتند.

**علیشاهی: رشته‌ی شما مکانیک بوده است؛ چه شد که ریاضی خواندید؟**

شهیدی: بله من مکانیک بودم و علاقه داشتم ریاضی بخوانم. اما پدر و مادرم می‌گفتند که باید مهندسی بخوانید چون آن موقع پول و آینده در مهندسی بود و گفتند باید مهندسی بخوانید. من

[۱] Johns Hopkins University
[۲] Joseph Andrew Shalika
[۳] Institute for Advanced Study
[۴] Indiana University Bloomington
[۵] Purdu University
[۶] Novodvorski

هم دانشکده‌ی فنی قبول شدم و هم دانشکده‌ی علوم و آن موقع دانشگاه شریف نبود -سال بعد از آن تأسیس شد- رفتم مهندسی و تمام کردم و دیگر تصمیمم را گرفته بودم که بروم ریاضی بخوانم، همان موقع رفتم و به پدرم گفتم که مهندسی را خواندم و دیگر می‌خواهم ریاضی بخوانم و بعد ایشان کمک کردند.

**علیشاهی: با هم‌دوره‌ای‌های آن موقع در ارتباط هستید یا نه؟**

شهیدی: بله، خیلی زیاد، الان یکشنبه‌ی هفته‌ی آینده بچه‌های دانشکده‌ی فنی را قرار است ببینم و در آمریکا هم یک تعدادی از آنها هستند.

**عسگری: از استادهای ریاضی آن موقع کسانی هستند که الان بشناسیم؟**

شهیدی: خود دکتر مجتهدی سال دوم آنالیز به ما یاد می‌دادند در دانشکده‌ی فنی، دکتر عصار بودند، دکتر عقیلی به ما هندسه تحلیلی درس می‌دادند، دکتر سفری درس می‌دادند. آن موقع دانشکده‌ی ریاضی وجود داشت ولی در دانشکده‌ی فنی، خودشان دروس ریاضی خودشان را درس می‌دادند. البته من گاهی به کلاس‌های دانشکده‌ی ریاضی هم می‌رفتم. دوست داشتم تجرید موجود در درس‌های ریاضی را. در دانشکده‌ی فنی استادهای زیادی بودند که درس می‌دادند که الان یادم نمی‌آید. مهندس جلالی بود که اجزای ماشین درس می‌داد، دکتر ابتکار که الان دخترشان مسؤول هستند، استاد ترمودینامیک ما بودند، دکتر جهانشاهی استاد مکانیک ما بود، دکتر خجسته‌بخت بود که ارتعاشات درس می‌داد، خیلی استادهای خوبی بودند. من در مؤسسه‌ی مطالعات عالی که بودم با لنگلاندز[۷] آشنا شدم و آنجا بود که من را راهنمایی کرد به سمت این مسأله چون می‌دانست که من علاقه دارم به نظریه‌ی توابع L و گفت روی این موضوع کار کن.

**صلواتی: لطفاً یک توصیفی از زمینه‌ی تحقیقاتی خودتان بکنید.**

شهیدی: به رشته‌ی من به قول معروف برنامه‌ی لنگلاندز[۸] می‌گویند که گاهی آن را با برنامه‌ی کلاین در هندسه مقایسه می‌کنند. یک سری مسائل است در نظریه‌ی اعداد که خیلی ساده است بیان کردن آنها مثل همین حدس رامانوجان یا حدس Sato-Tate یا خیلی از معادلات سیاله یا سؤالاتی راجع به تعداد نقاط گویا روی خم‌های بیضوی، خیلی از این‌ها را می‌شود مربوط کرد به حاصل‌ضرب‌های نامتناهی مربوط به توابع زتا که تعمیم تابع زتای ریمان هستند. مثلاً پیدا کردن تعداد نقاط نقاط گویا روی خم بیضوی خیلی سخت است ولی می‌توانید مجموع این ضرایب را در یک سری نامتناهی به شکل $\sum_{n=1}^{\infty} A_n n^{-s}$ جمع کنید که این $A_n$ها می‌توانند چیزهای مختلفی باشند از جمله تعداد نقاط گویای خم بیضوی روی یک میدان متناهی. اگرچه راجع به خود آن ضرایب نمی‌توان خیلی حرف زد ولی راجع به حاصلضرب نامتناهی خیلی نتایج می‌توان به دست آورد. این حاصل‌ضرب یک سری خواص تحلیلی دارد. مثلاً تابع زتای Hasse-Weil که هنوز هم غیر از یک حالت‌های خاصی چیزی راجع به آنها حل نشده، توابعی هستند که از طریق مطالعه‌ی یک سری سؤال‌های هندسی به دست آمده‌اند. موجودات تحلیلی هستند ولی منشأ آنها مسائل هندسه‌ی حسابی است و این جور مسائل را نظریه‌ی توابع L می‌تواند جواب بدهد و لنگلاندز پیش‌بینی کرد که شما اگر این خواص را راجع به این‌ها ثابت کنید تمام این حدس‌های موجود اثبات می‌شوند. بعد یک حدس کلی‌تری که به اسم Functoriality هست که اگر شما دو تا گروه داشته باشید به این گروه‌ها، گروه‌های دوگان نسبت می‌دهید و هر همومورفیسم بین این گروه‌های دوگان تبدیل می‌شود به موجوداتی که ما به آنها می‌گوییم Automorphic Forms که در واقع نسخه‌ی تحلیلی واریته‌های هندسی هستند. مثلاً این قضیه‌ی معروف شیمورا-تانیاما که اندرو وایلز[۹] استفاده کرد یک مثال از این است؛ از یک طرف شما موجودات هندسی دارید شبیه خم‌های بیضوی و از یک طرف موجودات Automorphic دارید شبیه Modular Forms، وقتی که وزن ۲ است یک تناظر دوسویی بین این‌ها برقرار است و این چیز مهمی بود که بدون آن اندرو وایلز نمی توانست این مسأله را حل کند و خود همین یک مثالی از برنامه‌ی لنگلاندز است که همچین دیدی چگونه می‌تواند مسائل به آن پیچیدگی را حل کند. البته حل کردن خود این حدس خیلی سخت بود ولی اندرو وایلز آن را انجام داد. ایده‌های اندرو وایلز مانند Deformation Theory را می‌توانید با ایده‌های لنگلاندز ترکیب کنید و مسائل زیادی را حل کنید. مثلاً Sato-Tate را الآن این‌جوری حل کرده‌اند در حالت فرم‌های هلومورفیک. هریس[۱۰]، تیلور[۱۱]، کلوزل[۱۲] و یک نفر دیگر که اسمش یادم نیست که این‌ها این‌جوری این مسأله را حل کردند. در واقع یک فلسفه‌ی کلی برای حل کردن مسائلی است که واقعاً راه‌حل دیگری ندارد به جز این تکنولوژی. حالا این تکنولوژی هم رهیافت‌های مختلفی دارد برای حل این حدس‌ها. مثلاً برای حل Functoriality، یکی رهیافت‌های با استفاده از توابع L است که من و یکی از دانشجوهای پسا دکتری سابقم

[۷] Robert Langlands
[۸] Langlands Program
[۹] Andrew Wiles
[۱۰] Michael Harris
[۱۱] Richard Taylor
[۱۲] Laurent Clozel

هنری کیم[۱۳]، پیاتتسکی-شاپیرو [۱۴] و جیمزکاگدل[۱۵] ، یک سری متدهای توابع L را ترکیب کردیم و توانستیم یک سری مسائلی را که خیلی دور از دسترس بود حل کنیم. یک رهیافت دیگر هم هست که استفاده از فرمول Trace است. وقتی این روش‌ها را به کار ببرید مسائلی را می‌توانید حل کنید که در غیر این صورت نمی‌توانستید. مهدی [عسگری] هم روی این مسائل کار کرده.

**صلواتی: من یک سؤال شخصی دارم. می‌خواهم بدانم که یک ریاضی‌دان طراز اول سبک کارش چگونه است؟ اول می‌خواهم بدانم مسأله‌هایی که روی آنها کار می‌کنید چه‌طور انتخاب می‌کنید و معیارتان برای مسأله‌ی خوب چیست؟**

شهیدی: برای من معمولاً این‌گونه بوده است که یک برنامه‌ای وجود داشته که من شروع کردم کار کردن در آن را و ابتدا یک قسمت آن را حل کردم و از آن لذت بردم، سپس شروع کردم قسمت بعد را حل کردن و گام به گام محاسبات کردم و مرحله به مرحله جلو رفتم و از همه‌ی مسائلی که حل کردم لذت برده‌ام. البته در برنامه‌ی لنگلاندز شما باید همواره نگاهی به هدف دوردستی که می‌خواهید به آن برسید داشته باشید.

**عسگری: اگر در یک مرحله گیر می‌کردید چه کار می‌کردید؟**

شهیدی: گاهی گیر هم کردم. البته مسائل دیگری هم بود که گاهی به آنها سوئیچ می‌کردم. مثلاً مسأله‌ی تبدیل فوریه روی $\mathrm{GL_n}$، که من شش ماه روی آن کار کردم.

**عسگری: من وقتی امتحان جامع دکتری خودم را دادم؛ وقتی نتیجه را اعلام می‌کردند ما باید می‌رفتیم دفتر دانشکده که نامه می‌دادند و می‌گفتند که شما قبول شده‌اید. آن روز آقای دکتر شهیدی نیامده بودند و من زنگ زدم خانه‌ی آقای دکتر و گفتم که من امتحان جامع قبول شدم که آقای دکتر شهیدی گفتند که بسیار خوب، شما باید دیگر شروع کنید به مقاله خواندن، شما بروید آن مقاله‌ی American Journal من را شروع کنید به خواندن. من هم رفتم آن مقاله را برداشتم و کپی کردم و دیدم که هیچ چیزی از آن نمی‌فهمم. آن خاطره‌ای برای من شد چون اولین مقاله‌ای بود که به طور جدی آن را خواندم ولی هیچ‌چیز نفهمیدم.**

شهیدی: آن مقاله ایده‌ی یک چیزی خوبی را داشت و آن این بود که Intertwining Operator یک Convolution است واین Whittaker functionها را که شما می‌گیری، در واقع تبدیل فوریه Convolution ها را می‌گیری تبدیل فوریه‌ی Convolution همان حاصل‌ضرب تبدیل فوریه‌ها می‌شود که یکی از این‌ها همان Local Coefficient است. چون Intertwining Operator، Convolution یک تابع است با یک اندازه و Local Coefficient در واقع تبدیل فوریه‌ی آن اندازه است و بعدش از استدلال‌های موضعی-سرتاسری استفاده می‌کنید.

**صلواتی: آقای دکتر شما چه مقدار خودتان روی مسائل فکر می‌کنید و چه مقدار کار دیگران را مطالعه می‌کنید؟ می‌خواهم بدانم این نسبت برای شما چقدر است؟**

شهیدی: به عنوان مثال، آن دو حدسی که در سخنرانی‌ام ارائه کردم، حدس A و حدس B. در این تابستان Vogan و Adams من را دعوت کردند که بروم دانشگاه یوتا[۱۶] و آن‌جا که یک سری سخنرانی بدهم در مورد real groups. چون آرتور[۱۷] نمی‌توانست برود و خواهش کرد که تو بیا و من هم رفتم. به همین دلیل من یک سری کارهای آرتور را خواندم و یاد گرفتم و دیدم که چه‌قدر مهم است. نشستم آنها را خواندم چون کلی سخن‌رانی باید می‌کردم، البته قبلاً هم از این کارها اطلاع داشتم و می‌دانستم که مهم است. بعد از اینکه شروع کردم به فکر کردن دیدم که چه مقدار مسائل را می‌شود با این حل کرد، و فکر می‌کنم که Sakellaridis و Venkatesh روی آن کار کرده‌اند که مقاله‌ی آنها ۳۰۰ صفحه است و البته لازم نیست من خط به خط آن را بخوانم، بلکه مروری کلی بر آن می‌کنم ولی سپس با خود نویسنده ارتباط برقرار می‌کنم و صحبت می‌کنم و ایده‌های اصلی آن را می‌پرسم.

**عسگری: این هم یک ویژگی جالب دکتر شهیدی است که برای شما هم می‌تواند مفید باشد. ایشان خیلی از چیزهای که لازم دارند و در یک مقاله هست، آن مقاله را می‌خوانند ولی خیلی به مقاله نمی چسبند، بلکه زنگ می‌زنند به نویسنده‌ی مقاله و از خود آنها ایده می‌گیرند چون از خودِ نویسنده بهتر می‌توان ایده گرفت تا خود مقاله. خیلی چیز مهمی است که شما راحت‌تر از ما می‌توانید این کار را بکنید.**

شهیدی: بعضی وقت‌ها هم کار نمی‌کند و یک هفته‌ای صحبت می‌کنید ولی چیزی دستگیرتان نمی‌شود. به هر حال نهایتاً باید بنشینید در اتاقتان و در را ببندید و فکر کنید. من هر وقت که کارهای اجرایی‌ام که زیاد می‌شود به خودم می‌گویم که بهترین چیز این است که در مورد ریاضیات فکر کنم، خیلی روحیه می‌دهد

[۱۳] Henry Kim
[۱۴] Ilya Piatetski-Shapiro
[۱۵] James Cogdell
[۱۶] Utah State University
[۱۷] James Arthur

به آدم. سن و سال که برود بالا کارهای اجرایی زیاد می‌شود، مسئولیت‌های دانشکده، هیئت‌های تحریریه، میزگردها و ... و بهترین راه برای آرامش یافتن، خود ریاضیات است.

**صلواتی: آقای دکتر در ایران افراد زیادی در زمینه‌ی جبر کار می‌کنند شما به ریاضی‌دان‌هایی که در جبر فعالیت می‌کنند چه موضوعاتی را پیشنهاد می‌کنید؟**

شهیدی: ما انواع مختلفی جبر داریم. یکی جبر مجرد مثل جبر جابجایی است. می‌دانید که تقسیم‌بندی کلی در ریاضیات به صورت جبر، آنالیز و هندسه است. من نمی‌دانم که خودم در کدام هستم چون هم جبر استفاده می‌کنم و هم آنالیز. ولی برخی هستند که جبر محض هستند و اصلاً نمی خواهند راجع به انتگرال صحبت کنند! و حتی نمی‌توانند آن را تعریف کنند. در ایران خیلی جبرکار هستند به معنای جبر مجرد. ولی به هر حال باید ببینند که کشورهای غربی که جلوتر از ما هستند در این زمینه‌ها، آن‌جا چه چیزهایی مورد توجه است؛ آنها مسائل جدی‌تری هستند. البته رقابت کردن با آنها سخت است از اینجا. ولی یک مقدار دید می‌دهد که چه مسائلی مهم هستند. البته اگر حقوقتان را می‌دهند و مسأله ای نیست، خوب می‌توانید هر کاری می‌خواهید بکنید ولی اگر می‌خواهید یک نتیجه خوبی بگیرید باید این کار را بکنید. البته باید همه این‌ها طبیعی درست شود و من هیچ وقت نرفتم به خاطر اینکه موضوعی مد بوده است روی آن کار کنم چون یک روزی مد بوده است و از بین می‌رود. فقط آن چیزی را که دوست دارید باید کار کنید ولی در ضمن باید یک جهت درستی هم داشته باشید. در اروپا و آمریکا تعداد زیادی جبرکار وجود دارد. اما در بین ایرانی‌ها، در رشته‌ی ما فکر می‌کنم فقط مهدی [عسگری] و رامین [تکلوبیغش] و من هستیم.

**صلواتی: آقای دکتر شما دانشگاه‌های خیلی خوبی را تجربه کرده‌اید. دانشگاه‌های ایران از نظر آموزشی خصوصاً در دوره کارشناسی خوب هستند اما وقتی به تحصیلات تکمیلی و پژوهش می‌رسیم خیلی عقب هستند از دانشگاه‌های خوب دنیا. به نظر شما مشکل چیست و راه‌حل آن چیست؟**

شهیدی: چیزی که من خیلی شکایت شنیدم از آدم‌های مختلف در این چند روز این است که دروس سطح بالا و تخصصیِ خوب خیلی کم است. در پردو، من هر ترم درس‌های سطح بالای تخصصی درس می‌دهم. مثلاً مهدی [عسگری] می‌داند که ما در نظریه‌ی اعداد دروس استانداردی داریم، در ترم اول نظریه‌ی جبری اعداد مقدماتی و درترم دوم نظریه‌ی Class Field، بعد درس گروه‌های جبری درس می‌دهیم، درس نظریه‌ی نمایش داریم، درس‌های گروه‌های فشرده، گروه‌های لی، بعد Modular forms، Elliptic Curves، p-adic L-Functions. چیزهایی که لازم است را ما همه را درس می‌دهیم ولی این‌جا افراد می‌گویند دروس تخصصی ارائه نمی‌شود. البته ارائه‌ی این درس‌ها واقعاً زحمت دارد. مثلاً من می‌توانم یک درس ریاضی عمومی درس بدهم، خیلی هم برایم راحت است، دانشکده هم خیلی برایش مهم نیست که شما درس تخصصی بدهید، بلکه آنها ترجیح می‌دهند که شما یک درس ریاضی عمومی بدهید به ۱۰۰ شاگرد، ولی خوب من احساس می‌کنم وظیفه‌ی من است که آن چیزهایی را که بقیه درس نمی‌دهند را درس بدهم. تجربه‌ی خود من این است که چیزهایی که در دوره‌ی دکترا آدم یاد می‌گیرد هیچ وقت از یاد نمی‌برد و این بهترین فرصت یاد گرفتن است. دانشجوهایی که کوتاهی می‌کنند و به سر کلاس نمی‌آیند این‌ها به نظر من به خودشان خیانت می‌کنند وقتی یک درس خوب ارائه شده و یک استادی که زحمت کشیده و تجربه دارد و می‌داند که چه چیزهایی را بگوید و روی چه چیزهایی تمرکز بیشتری کند، ولی این‌ها نمی‌آیند سر کلاس، خیلی بد است. اینجا اگر این‌ها را به وجود بیاورید خیلی خوب است به این‌ها دید می‌دهد. البته سخت است، باید درس آماده کنید. من هر موقع که می‌خواهم درس تخصصی جدیدی بدهم از یک ماه قبل از شروع ترم می‌نشینم و نت می‌نویسم و مطالب را جدا می‌کنم و تا آخر ترم هم ادامه دارد. یک کار کامل است. با درس‌های عمومی فرق دارد. البته در درس‌های عمومی یک چیزهای سختی هست که باید بنشینید سؤال شاگردها را جواب بدهید و امتحاناتش بیشتر است ولی درس آماده کردنش خیلی ساده‌تر است. این یکی از چیزهایی بود که خیلی شکایت می‌کردند که اینجا درس‌های تخصصی کم ارائه می‌شود.

**صلواتی: یکی از چالش‌های فعلی جامعه ریاضی ایران، مسأله‌ی ارزشیابی کارهای پژوهشی است بعضی‌ها دیدگاه کمی دارند و بعضی‌ها دیدگاه کمی را قبول ندارند و جایگزین کیفی خوبی هم ندارند. می‌خواهم بدانم به نظر شما کارهای پژوهشی ریاضی را چگونه باید ارزشیابی کرد؟**

شهیدی: باید تأثیر کار را در بلند مدت در نظر گرفت. مثلاً در آمریکا یک معیاری وجود دارد به نام h-factor که این‌طوری محاسبه می‌شود که فرض کنید مثلاً شما ۲۰ تا مقاله دارید که ۲۰ بار یا بیشتر به آن ارجاع شده است و مقالات بعدی کم‌تر از ۲۰ بار به آن ارجاع شده است، در این صورت h-factor شما می‌شود ۲۰. مثلاً برای لنگلاندز و من حدود ۲۰ است ولی مثلاً سارنک[۱۸] حدود ۳۰ است.

**صلواتی: یعنی به نظر شما فاکتورهای کمی هم می‌تواند نشان‌دهنده باشد؟**

شهیدی: بله، یک چیزهایی را نشان می‌دهد. البته این‌ها در بلندمدت هستند بعضی مواقع شما مقاله‌ای می‌نویسید که ۱۰ سال طول می‌کشد تا به آن ارجاع جدی داده شود.

[۱۸] Peter Sarnak

**عسگری: سؤال ما بیشتر در مورد ارزیابی برای جذب یا ارتقاء افراد است.**

شهیدی: خب بهترین کسانی را که می‌توانید بگیرید، آدم‌های جدی را بگیرید. برای ارزیابی باید چاپ مقالات آنها را نگاه کنید. توصیه‌نامه‌ها خیلی مهم‌اند، که افراد در مورد کار آنها می‌نویسند. بدون توصیه‌نامه اصلاً در آمریکا اقدامی نمی‌کنند. در آمریکا برای ارتقا به دانشیار یا استاد تمام، ۱۵ تا توصیه‌نامه می‌گیریم. از استاد راهنمایش هم نمی‌گیریم، باید یک فاصله‌ای بین آنها باشد. نظر آدم‌ها خیلی مهم است. البته یکی ممکن است در نظر دادن خیلی سخت‌گیر باشد، ولی ما می‌شناسیم افراد را؛ مثلاً، می‌دانیم فلانی اگر فحش بدهد یعنی دارد تعریف می‌کند! توصیه‌نامه از چاپ مقاله خیلی موثق‌تر است، چون مقاله بالاخره یک ژورنالی را پیدا می‌کنید و هر طور شده مقاله‌تان را چاپ می‌کنید. البته به هر حال چاپ کردن نظم کاری را نشان می‌دهد، چاپ کردن تأثیرگذاری را نشان می‌دهد. افرادی هستند که می‌گویند من ایده‌های خوبی دارم ولی هیچ وقت مقاله نمی‌نویسند. این افراد معلوم است که نمی‌شود روی آنها حساب کرد مگر بعضی از آنها که افراد استثنائی هستند.

**عسگری: از نظر کمی چطور؟ مثلاً چند تا مقاله در سال؟**

شهیدی: این به رشته بستگی دارد. مثلاً در رشته‌ی ما یک مقاله در سال خیلی خوب است چون اغلب مقاله‌ها خیلی طولانی و سخت هستند. در رشته‌هایی می‌بینید که سالی ۵ تا مقاله دارند. مثلاً من می‌بینم که دانشجویی ۳۷ سالش است که برای جایزه‌ای اپلای کرده است و ۲۰۰ تا مقاله دارد. چه طور توانسته این کار را بکند؟ بنابراین شمارش مقاله این بدی را هم دارد. در ضمن اگر تعداد صفحات مقاله را نیز در نظر بگیرند ایده‌ی بدی نیست! البته باز هم استثنا وجود دارد. ممکن است یک مقاله‌ی دو صفحه‌ای خیلی درخشان باشد.

**علیشاهی: طبیعتاً استانداردها و فرهنگ رشته‌های مختلف ریاضی با هم فرق می‌کند. برای من سؤالی مطرح است که یک سیستم سالم، وقتی پای مقایسه و تخصیص منابع به طیف وسیعی از افراد می‌رسد چه‌طور می‌تواند عمل کند؟**

شهیدی: اولاً فقط یک نفر نیست که نظر می‌دهد، بلکه یک کمیته است که نظر می‌دهد. معمولاً حداقل یک نفر در آن کمیته هست که آن شخص را خوب می‌شناسد. ثانیاً کسانی که توصیه‌نامه می‌نویسند را شما می‌شناسید حتی اگر در رشته‌ی شما هم نباشند تصوری راجع بهشان دارید. در ضمن می‌دانید که رشته‌ها از نظر چاپ مقاله چه تفاوت‌هایی دارند، بعضی از رشته‌ها چاپ کردن مقاله آسان است و زیاد چاپ می‌کنند و برخی رشته‌ها سخت است، بعضی‌ها مقاله‌هایشان کوتاه است و بعضی بلند است. مثلاً اندرو وایلز ۷ سال مقاله چاپ نکرده بود که بعد قضیه‌ی آخر فرما را حل کرد می‌خواستند NSFاش را قطع کنند که خوشبختانه قطع نکردند، خیلی هم خوشحال بودند که نکردند! آنها البته استثنا هستند. بعضی از دپارتمان‌های خیلی خوب هستند که افرادی دارند که هیچ کار نمی کنند ولی اغلب افراد در دانشگاه‌های خوب، واقعاً خوب کار می‌کنند. همیشه از این مسائل هست که می‌گویند مثلاً این رشته زیاد از خودشان تعریف می‌کنند و کار خودشان را بزرگ جلوه می‌دهند و از همدیگر تعریف می‌کنند. یک مقداری هم سیاست‌های دانشکده‌هاست است که می‌خواهند یک رشته‌هایی را توسعه دهند و رشته‌هایی دیگر را نمی خواهند توسعه دهند، ممکن است آدم‌های خیلی خوبی هم در آن زمینه باشند ولی چون آن دانشکده نمی‌خواهد روی آن رشته تمرکز کند، آنها را جذب نمی‌کند. قضاوت درست خیلی مهم است.

**صلواتی: بعضی از افراد گاهی یک دیدگاه‌های رادیکالی دارند در مورد برخی از شاخه‌ها و ممکن است بگویند این شاخه بی‌ارزش است یا آن شاخه خیلی مهم است ولی بعضی مواقع هم واقعاً کارهایی عرضه می‌شود که از لحاظ ریاضی بی‌ارزش است. می‌خواهم بدانم دیدگاه شما چیست و اساساً می‌شود شاخه‌ها را مقایسه کرد یا نه؟**

شهیدی: من باید به این سؤال خیلی سیاست‌مدارانه جواب دهم. موضوعاتی هستند که به نظر می‌رسد ساده‌تر هستند. ولی ممکن است آدم اشتباه کند. نوع دشواری در رشته‌های مختلف فرق می‌کند. مثلاً یک رشته‌هایی هستند که پر از ایده‌های خوب هستند ولی یک رشته‌هایی نه. مثلاً در رشته‌ی خودِ ما یک ویژگی‌اش این است که به نظر بعضی‌ها کسل‌کننده است زیرا شما می‌دانید که چه چیزی درست است فقط باید آن را ثابت کنید. ولی برای اینکه ثابت کنید چندین سال طول می‌کشد تا این ماشین را آماده‌اش بکنید، روغن بزنید و راه بیندازید آن را ثابت کنید. این یک رشته‌ای است که نیاز به تلاش زیادی دارد. البته در رشته‌ی ما دلیل این که یک چیزهایی را می‌دانیم، این است که لنگلاندز شهود بسیار عمیقی داشته و این نتایج را پیش‌بینی کرده است که چه اتفاقی باید بیفتد؛ یک موضوعی است که شما می‌دانید این گزاره‌ها باید درست باشد. مثلاً همین لم اساسی (Fundamental Lemma) که خیلی مهم بود که انگو[۱۹] برای حل آن جایزه فیلدز را گرفت در احمدآباد در سال ۲۰۱۰. یک چیزی بود که سی سال طول کشید انگو که یک هندسه‌دان است و با استفاده از روش‌های هندسی توانست آن را حل کند و تا آن موقع هر چه قدر تلاش می‌کردند نمی توانستند با روش‌های ترکیبیاتی معمولی آن را حل کنند. در کار ما ترکیبیات خیلی هست، استقرا همیشه استفاده می‌شود. ترکیبیات موضوع بسیار مهمی است. هم ترکیبیات زیبا داریم و هم ترکیبیات نازیبا.

[۱۹] Ngô Bảo Châu

**صلواتی: من آخرین سؤالم هست. خیلی سعی کردم یک سؤال ریاضی بپرسم ولی چون رشته‌ی من به رشته‌ی شما اصلاً نزدیک نیست تنها چیزی که به ذهنم رسید این بود که از هیلبرت نقل شده است که اگر من ۵۰۰ سال بخوابم و بعد بیدار شوم اولین چیزی که می‌پرسم این است که آیا فرضیه‌ی ریمان[۲۰] حل شده است؟! پیش‌بینی شما در مورد فرضیه‌ی ریمان چیست؟**

شهیدی: فرضیه‌ی ریمان یکی از مسائلی است که هیچ راهکار روشنی برای رسیدن به آن موجود نیست. مسائل دیگر برایشان برنامه وجود دارد و نقشه‌ی گام‌به‌گام برای حل آنها وجود دارد. همین برنامه‌ی لنگلاندز برایش مراحل مشخصی وجود دارد. در مورد فرض ریمان، همه برنامه‌هایی که گذاشته‌اند شکست خورده است. بنابراین چیز خاصی در مورد آن وجود دارد و در برنامه‌ی لنگلاندز هم نمی‌گنجد. خیلی آدم‌های گردن‌کلفتی روی آن کار کرده‌اند؛ بمبیری [۲۱]، سارنک و ... و خیلی هم مهم است برای اینکه هر کاری که این‌ها می‌کنند اگر فرضیه‌ی ریمان را درست فرض کنند نتایجی ده برابر قوی‌تر به دست می‌آورند. همه معتقدند که این درست است ولی هیچ کسی نمی‌تواند آن را ثابت کند و وقتی این را قبول می‌کنند نتایج بسیار عجیب و غریب و قوی به دست می‌آید. من یادم است که سال ۹۱–۹۰ در پرینستون بودم یک کنفرانس در این موضوع بود و همه‌ی سخنرانی‌ها بدون استثنا این‌گونه بود که اگر فرض ریمان را قبول کنید نتایج این است و اگر قبول نکنید یک نتایج خیلی ضعیف‌تری می‌گیرید. یعنی یک چیز خیلی مهمی است. می‌دانید که نتایج عمیق، آنهایی هستند که خیلی کاربردهای زیادی دارند. می‌دانید که فرض ریمان درست شد برای نظریه‌ی اعداد اول.

**علیشاهی: شما گفتید که با این برنامه‌ی لنگلاندز بعد از دکترا در مؤسسه‌ی مطالعات عالی آشنا شدید. قبل از آن در دوره‌ی دکترا چه‌کار می‌کردید؟**

شهیدی: من قبلش هم روی توابع L کار می‌کردم با شالاکا. ولی روشی که شالاکا و ژاکه[۲۲] و این‌ها کار می‌کنند به آن می‌گویند انتگرال رپرزنتیشن و این روشی است که حدس زدن در آن نقش مهمی دارد و به نظر من شبیه هنر است یعنی راه سیستماتیکی به آن صورت در آن وجود ندارد. شما شب می‌خوابید و صبح بیدار می‌شوید یک انتگرال می‌نویسید که ممکن است یک چیز جدیدی به شما بدهد. ولی خیلی مشکل بود که این انتگرال‌ها را بتوان رده‌بندی‌شان کرد و مشکل بود که بتوان نتیجه‌ای کلی از آنها به دست آورد. این چیزهایی که لنگلاندز گفت آن نقص را رفع می‌کرد، یعنی به طور سیستماتیک مشخص بود که این چیزها را می‌خواهید ثابت کنید و طبق این مراحل می‌توانید پیش بروید و از این نظر خیلی برای من مطلوب بود، چون من دوست دارم روی مسائل جنرال و مفهومی کار کنم. البته مثال‌های خاص بسیار زیبا وجود دارند؛ مثلاً، قضیه‌ی آخر فرما خودش یک مثال زیباست از یک معادله‌ی سیاله، ولی برنامه‌ی لنگلاندز بسیار کلی است؛ هر گروه بازگشتی را در نظر بگیرید و سپس این نتایج برقرار است. آن با مذاق من خیلی سازگارتر است. تا اینکه بگویید این تابع L را در مورد این گروه ثابت کن، بعد چهار سال ضرب و تقسیم کن و انتگرال بگیر و اغلب موارد هم هیچ نظریه‌ی کلی از آن به دست نمی‌آید. از این نظر یک تغییر خیلی مطلوبی برای من بود که روی این مسأله کار کنم که بعداً شد روش لنگلاندز–شهیدی.

**عسگری: ۲ تا سؤال دارم که بپرسم . شما شاگرد شالاکا بودید. خوشحال هستید از این موضوع و یا ترجیح می‌دادید شاگرد لنگلاندز باشید؟**

شهیدی: بله خوشحال هستم. شخصیت این‌ها با هم فرق دارند. هر دوی آنها عاشق کاری که می‌کردند بودند. شالاکا که همیشه هیجان‌زده بود. و این ویژگی‌اش گاهی خیلی خوب بود و گاهی خیلی بد. چون هر روز می‌آمد در اتاق و انتظار نتیجه جدید داشت. هر وقت از در می‌آمد آدم را عصبی می‌کرد. لنگلاندز این‌طور نبود و می‌رفتید و می‌گفتید و سؤال می‌کردید و همه را جواب می‌داد. شالاکا من را راه انداخت. من اولین شاگرد او بودم. شالاکا را ۳–۲ ماه اول اصلاً نمی‌فهمیدم که چه می‌گوید، می‌آمد خیلی هیجان‌زده روی تخته چیزهایی می‌نوشت. ولی وقتی که حرف‌هایش را فهمیدم، یک دنیای جدید به روی من باز شد. ریاضیات این‌گونه است، طول می‌کشد.

**عسگری: از شما می‌خواهم که بگویید چه ژورنال‌هایی ژورنال‌های خوب و مهمی هستند چون این‌که اسم این‌ها را مردم شنیده باشند خیلی مفید است.**

شهیدی: Annals of Mathematics، Journal of AMS، IHES، Duke، IMRN، AJM ... من جزء هیئت تحریریه‌ی بعضی از این‌ها هستم و می‌دانم که چقدر فرق است بین مجله‌ی ضعیف و مجله‌ی قوی و چه‌قدر چاپ کردن در این‌ها سخت‌تر است و می‌دانم چاپ کردن در یک ژورنال خوب خیلی سخت‌تر از چاپ کردن در ژورنال ضعیف است و یک مقاله‌ی ۱۰ صفحه‌ای در Annals خیلی با ارزش‌تر از یک مقاله‌ی ۶۰ صفحه‌ای در یک ژورنال ضعیف‌تر است.

**عسگری: شما از ایران هم سابمیشن در این ژورنال‌ها که بودید گرفته‌اید و چاپ شده‌اند؟**

شهیدی: بله. من طبق روال معمول می‌فرستم به داورها و

[۲۰] Riemann Hypothesis
[۲۱] Enrico Bombieri
[۲۲] Hervé Jacquet

هر کاری که داورها بگویند انجام می‌دهم. خیلی به ندرت ممکن است که برخلاف نظر داورها عمل شود. البته یک داور که نیست، ۴–۳ تا داور است و به دقت بررسی می‌شود، بعدش هم باید همه‌ی هیئت تحریریه رأی بدهد و اگر یکی از آنها بگوید نه، مقاله رد می‌شود، چهار سال تلاش شده و مقاله پروسس شده ولی یکی از آنها کافی است بگوید نه و نظرش را عوض نکند. این‌که گاهی دیده می‌شود که مقاله بعد از ۴ سال رد می‌شود، دلیلش این است. معمولاً هم بحث روی کیفیت است وگرنه اگر غلط باشد که همه ردش می‌کنند. معمولاً بحث بر سر کیفیت و عمق است. نظر داورها خیلی مهم است. البته من اسم همه‌ی ژورنال‌های خوب را نگفتم و تازه این اسامی که گفتم همه از ژورنال‌های ریاضی محض است و ریاضیات کاربردی ژورنال‌های خودش را دارد.

**صلواتی: خیلی ممنون از اینکه وقت خودتان را به ما دادید.**

# مصاحبه با دکتر تهذیبی

دکتر علی تهذیبی از فارغ‌التحصیلان دوره‌ی کارشناسی دانشگاه صنعتی شریف در رشته‌ی ریاضی هستند. ایشان تحصیلات تکمیلی خود را در کشور برزیل گذرانده‌اند و در حال حاضر استاد دانشگاه سائوپائولو هستند.
مصاحبه‌ای که در ادامه می‌آید در زمان برگزاری سومین سمینار مرزهای علوم ریاضی توسط امین‌السادات طالبی و حسام‌الدین رجب‌زاده انجام شده است.

**اگر امکان دارد کمی درباره‌ی بیوگرافی علمی خودتان برای ما بگویید؛ لیسانس را کجا بوده‌اید فوق‌لیسانس را کجا بوده‌اید و دکتری خود را از کجا گرفته‌اید؟**

ممنون از زحمت‌های شما. من لیسانس‌ام را از دانشگاه صنعتی شریف گرفته‌ام. ورودی سال ۷۲ هستم؛ دوره‌ای پر از دانشجوهایی که همواره در حال تلاش و درس خواندن با یکدیگر بودند. همین الان هم امیدوارم همین‌طور باشد. سال ۷۶ یک‌سره برای دکتری به ایمپا [۱] رفتم.

**می‌توانید نام چند نفر از هم‌دوره‌ای‌هایتان را بگویید؟**

از هم‌دوره‌ای‌های خودم در دوره‌ی ۷۲ای‌ها، دکتر رزوان، دکتر غلامزاده، سعید صالحی، جاوید ولیدشتی، پرهام صالحیان و ... هستند. همچنین حسین مواساتی است که هم‌اکنون در ایمپا است. درآن موقع ۷۱ایی‌ها سوپروایزرمان بودند. ۷۱ای‌ها همیشه بالای سر ما بودند و یک مطالبی را مشخص می‌کردند تا بخوانیم و سمینار بدهیم یا خودشان برای ما سمینار می‌دادند. امیدوارم که هنوز هم این‌طور باشد در شریف. بعد از این که دوره‌ی لیسانس‌ام تمام شد برای ایمپا اپلای کردم. در واقع مارسلو ویانا [۲] به ایران آمده بود تا در کنفرانسی در شیراز شرکت کند. او کاتالوگ ایمپا را در اختیار ما گذاشت و من هم علاقه‌مند شدم و اپلای کردم برای ایمپا و بعد از آمدن جواب قبولی به برزیل رفتم و در ایمپا دکتری‌ام را شروع کردم. بعد از اتمام دکتری به مدت یک سال برای پسادکتری به دانشگاه پورتو [۳] در پرتقال رفتم و از آن به بعد تا الان مشغول به کار در دانشگاه سائوپائولو [۴] هستم. دانشگاه سائوپائولو از لحاظ دانشجوها و سطح علمی مانند دانشگاه شریف در ایران است. ایمپا،یک مؤسسه‌ی تحقیقاتی ولی دانشگاه سائوپائولو یک دانشگاه سطح بالا مثل دانشگاه شریف است؛ چیزی شبیه زوج دانشگاه شریف و IPM درایران.

**یعنی ایمپا دانشجوی لیسانس نمی‌گیرد؟**

خیر؛ مدرک لیسانس نمی‌دهد ولی تعداد زیادی دانشجوی لیسانس تابستان‌ها در برنامه‌های تابستانی شرکت می‌کنند و درس برای آنها دارد. کلاً از یک سری جهت‌ها با IPM فرق می‌کند.

**مقداری هم درباره‌ی دوره‌ی دکتری خودتان توضیح دهید که چه شد به سمت حوزه‌ی سیستم‌های دینامیکی رفتید. درباره‌ی تز دکتری‌تان که چه‌طور شد انتخابش کردید؟**

وقتی که به ایمپا رفتم به آنالیز تابعی علاقه‌مند بودم. در لیسانس هم با کمک دکتر بهزاد روحانی مونوگرافی شامل تعداد زیادی قضیه‌های نظریه‌ی ارگودیک نوشتم. بعدش که با این دیدگاه وارد آنجا شدم، خودشان برای من یک سوپروایزر انتخاب کردند. روز اولی که پیش سوپروایزرم رفتم، گفتم که من دوست دارم دیدگاه هندسی آنالیز را کار کنم.ایشان گفتند من دوست دارم دیدگاه آنالیزی آنالیز را کار کنم. لذا از کار کردن با او منصرف

[۱] IMPA, InstitutoNacional de Matemática Pura e Aplicada
[۲] Marcelo Viana
[۳] University of Porto
[۴] University of São Paulo

شدم و بعدش تصمیم گرفتم که در حوزه‌ی سیستم‌های دینامیکی مشغول تحقیق و مطالعه شوم. آن زمانی که من آنجا رفته بودم از در و دیوار ایمپا سیستم‌های دینامیکی می‌بارید! همیشه در راهروها حرف مماس بودن هموکلینیک [5] و نعل اسب اسمیل[6] و این چیزها می‌شنیدید. این شد که به طور طبیعی سیستم‌های دینامیکی را انتخاب کردم؛ البته یک درس سیستم‌های دینامیکی با دکتر شهشهانی دقیقاً در آخرین ترمی که اینجا بودیم از روی کتاب کتوک [7] گذرانده بودم که این هم بی‌تأثیر نبود. بالاخره شروع کردم به مطالعه‌ی سیستم‌های دینامیکی. استاد راهنمایم هم جاکوب پالیس [8] شد؛ ایشان در آن موقع رئیس IMU[9]بودند و لذا به خاطر مشغله‌ی بسیار زیاد هیچ‌گاه نمی‌توانستیم در داخل مؤسسه او را بیابیم. البته این یک نکته‌ی جالب است. به خاطر این‌که خیلی‌ها فکر می‌کنند که استاد راهنما باید هم برنامه را به شما بدهد، هم پروژه را به شما بدهد هم قسمتی از راه‌حل‌هایش را به شما بدهد. اما این‌طور نیست. مهم این است که محیط شما خیلی فعال باشد. ما، همان‌طور گفتم در راهروها همیشه در مورد سیستم‌هایی دینامیکی حرف می‌زدیم، سمینارهای زیادی در مورد سیستم‌های دینامیکی در آنجا برگزار می‌شد. به مرور زمان من همچنین به سمت نظریه‌ی ارگودیک [10] متمایل شدم. و در دوره‌ای که من وارد شده بودم آنهایی که نظریه‌ی ارگودیک کار می‌کردند بسیار به اندازه‌های SRB علاقه‌مند بودند. مثلاً خود مارسلو ویانا و کرستین بوناتی[11] دو تا مقاله‌ی مهم دراین زمینه منتشر کردند که یکی در Invention of Mathematicae چاپ شده و دیگری در Israel Journal of Mathematics. من آنها را خواندم و علاقه‌مند شدم. در انتهای یکی از مقالات حدسی آورده شده بود که من موفق شدم آن را اثبات کنم. این قسمتی از پایان‌نامه‌ی من را تشکیل داد. ما نشان دادیم که برای این‌که یک سیستم دینامیکی بطور پایدار ارگودیک باشد، لازم نیست partially hyperbolic باشد، می‌تواند dominated splitting هم داشته باشد. می‌توان گفت پایان‌نامه‌ی من اولین مثالی بود که نشان داد سیستم‌های دینامیکی به طور پایدار ارگودیک لازم نیست partially hyperbolic باشند و این خیلی برای من خوشحال کننده بود که جواب آن حدس پیدا شد. یکی دیگر از کارهایی که در پایان‌نامه‌ام انجام دادم ارائه‌ی مفهومی‌جدید به نام تقریباً ارگودیک بودن بود که بعد از ۲ یا ۳ سال در قالب یک مقاله منتشر شد.

**رابطه‌ی شما با استاد راهنما در دوره‌ی PHDتان چه‌جوری بود چون گفتید ایشان اکثراً خارج مؤسسه بودند؟**

چون شما فارسی می‌نویسید من هر چی می‌توانم در مورد استاد راهنمایم بگویم! اولین هفته‌ای که وارد شدم، رفتم خودم را به استاد راهنما معرفی کردم. او به انگلیسی با من احوال‌پرسی کرد و از علایقم در ریاضی پرسید. سپس خداحافظی کرد تا ۴ سال بعد که دوباره به اتاقش رفتم و پایان‌نامه‌ام را به او نشان دادم! گفت خیلی خوب داری پرتقالی صحبت می‌کنی؛ در مورد ریاضی‌ات هم من از همان اول فهمیده بودم تو علاقه داری و می‌دانستم یک کاری در این حوزه می‌کنی! ولی نمی‌توانم ارتباطم در طول دوره‌ی PHD با مارسلو ویانا و خیلی فعال‌تر با فدریکورودریگز هرتز [12] را نادیده بگیریم. فدریکو هم‌دوره‌ای خودم بود که الان در دانشگاه پنسیلوانیا [13] است. ما هم‌اتاقی بودیم خیلی با یکدیگر حرف می‌زدیم و خلاصه احساسات ریاضی مشترک زیادی داشتیم و این‌ها در دوره‌ی دکتری خیلی مهم بود. اگر بخواهم به طور دقیق‌تر به سؤال شما پاسخ دهم، در دوره‌ی تحصیل من در آنجا، ارتباطی با استاد راهنما نداشتم اما از ارتباط با دیگر دانشجویان بسیار بهره بردم. یکی از مشخصه‌های بسیار مهم ایمپا که شاید بتوان سهم نابدیهی از موفقیت دانشجویان دکتری‌اش را به آن نسبت داد، همین محیط پویای دانشجویی آن است. سهم پالیس از ایجاد این محیط و دیدگاه بالای او را نباید نادیده گرفت.

**در چند سال اخیر مشاهده می‌کنیم در مجامع بین‌المللی خیلی جاها سیستم‌های دینامیکی به صورت خیلی مطرح حضور پیدا کرده است، مثلاً دو نفر از برنده‌های مدال فیلدز امسال کارشان مرتبط با سیستم‌های دینامیکی بود. همچنین اگر به مجله‌های تراز اول ریاضی مانند Annals of Mathematics و Duke Mathematical Journa نگاه کنیم؛ تعداد زیادی مقاله در حوزه‌ی سیستم‌های دینامیکی چاپ می‌شود. می‌خواستم بپرسم علت این امر چیست که اقبال عمومی به آن زیاد است و هم ریاضی‌دان‌های بزرگ عقیده دارند که این شاخه بسیار مهم است؟**

مطلب ساده‌ای که درباره‌ی سیستم‌های دینامیکی می‌توان گفت این است که سیستم‌های دینامیکی یک رشته‌ی جامع است. در سیستم‌های دینامیکی افرادی کار می‌کنند که دیدگاه جبری دارند و باید کلی نظریه‌ی اعداد بلد باشند؛ بعضی‌ها هستند که کاملاً دیدگاه هندسی دارند باید کلی هندسه‌ی دیفرانسیل بلد باشند و خیلی وقت‌ها قشنگ‌ترین نظریه‌ی ما یک تلفیقی از بین این رشته‌هاست.مثلاً همین کار خانم میرزاخانی را می‌توان

[5] Homoclinic Tangency
[6] Smale Horseshoe
[7] Katok: Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems
[8] Jacob Palis
[9] International Mathematical Union
[10] Ergodic Theory
[11] Christian Bonatti
[12] Federico Rodriguez Hertz
[13] Penn State University

نمونه‌ای عالی از این حالت دانست. به خاطر همین هم مدال فیلدز گرفتند. آرتور آویلا [۱۴] هم که بیشتر کارهای آنالیزی کرده است. آنالیز تابعی و فیزیک ریاضی. او توانسته است با استفاده از سیستم‌های دینامیکی به سؤال‌های بسیار خوبی در فیزیک، ریاضی، آنالیز طیفی و...پاسخ دهد که به معروف شدنش کمک کرده است. یکی دیگر از دلایل را می‌توان حضور فعال سیستم‌دینامیکی‌کارها در عرصه‌های سیاسی و اجتماعی ریاضیات دانست. آدم‌های قوی در بعضی حوزه‌ها ترجیح می‌دهند به صورت منزوی کار خود را ادامه دهند ولی خوشبختانه در سیستم‌های دینامیکی افرادی هستند که توانایی برقراری ارتباطات آکادمیک و سیاسی را دارند و در عین‌حال ریاضی‌دانان خوبی هم هستند. به عنوان مثال، می‌توانم استاد راهنمای خودم در دکتری، جاکوب پالیس را نام ببرم. در واقع امریکای لاتین پیشرفتش را در خیلی از رشته‌های ریاضی مدیون جاکوب پالیس می‌داند. تولید مدال فیلدز در ایمپا نیز باید خودش را مدیون تمام کارهایی که جاکوب پالیس کرده است بداند.

**شما گفتید که سیستم‌های دینامیکی به شاخه‌های مختلفی مرتبط است؛ نظریه‌ی اعداد، جبر، هندسه. لطفاً درباره‌ی شاخه‌هایی که در یک همسایگی خوبی از حوزه‌ی خودتان قرار دارد کمی توضیح دهید.**

من نظریه‌ی ارگودیک کار می‌کنم.این حوزه را می‌توان به دو بخش تقسیم کرد؛ یکی نظریه‌ی ارگودیک مجرد که در حیطه‌ی کاری من قرار نمی‌گیرد و دیگری نظریه‌ی ارگودیک هموار که من دراین حوزه بیشتر فعالیت می‌کنم. من سال‌های زیادی را بعد از دفاع تز دکتری‌ام همان به ثابت کردن پایداری ارگودیک بودن تخصیص دادم.این قسمت از کارهای من در حوزه‌ی دینامیک هندسی بود. در حال حاضر به نظریه‌ی هندسی اندازه [۱۵] علاقه‌مند شده‌ام واین موضوع در کارهای اخیرم وارد شده است. یعنی شما به نوعی می‌توانید با کمک گرفتن از سیستم‌های دینامیکی یک سری گزاره پیدا کنید در نظریه‌ی هندسی اندازه که نمونه‌اش سخنرانی خودم بود در همایش مرزهای علوم ریاضی. پس می‌توانم به طور خلاصه بگویم که در حال حاضر نظریه‌ی هندسی اندازه و سیستم‌های دینامیکی رشته‌ی کاری من است.

**این رابطه چگونه است؟ یعنی بیشتر از سمت سیستم‌های دینامیکی به طرف نظریه‌ی هندسی اندازه کمک می‌کند یا بالعکس؟**

مثل همیشه، ارتباط خوب دوطرفه است. گاهی اوقات می‌توان از گزاره‌های نظریه‌ی هندسی برای اثبات قضایایی در نظریه‌ی ارگودیک استفاده کرد. مثلاًدر حین اثبات یک قضیه خیلی وقت‌ها شما می‌خواهید بعد هاوسدورف [۱۶] یک مجموعه را پیدا کنید یا این‌که خیلی وقت‌ها می‌خواهید ارتباطی بین آنتروپی یک اندازه و محمل [۱۷] آن بدهید. دراین صورت راه شما از نظریه‌ی هندسی اندازه می‌گذرد. اما گاهی اوقات ارتباط برعکس می‌شود. مثلاً در حال حاضر من بیشتر به این علاقه‌مند شده‌ام که از گزاره‌های سیستم‌های دینامیکی استفاده کنیم و یک سری مثال‌ها و گزاره‌هایی را در نظریه‌ی هندسی اندازه تولید کنم.

**در کنار حوزه‌ی کاری شما چه حوزه‌های مطرح دیگری در سیستم‌های دینامیکی وجود دارد؟**

دوباره برمی‌گردیم به محوطه‌ی ایمپا که پیش‌زمینه‌ی علمی من در آنجا شکل گرفته است. تعداد زیادی از افراد در آنجا روی مسائل مربوط به انشعاب [۱۸] کار می‌کنند که تا حد زیادی به مفاهیمی مانند مماس بودن هموکلینیکی، سایکل‌های هتروکلینیکی و به طور دقیق‌تر حدس جاکوب پالیس ارتباط دارد.این حدس کمی‌شگفت انگیز است، توانسته برای تعداد زیادی آدم کار تولید کند و می‌توان آن را به عنوان شاخه‌ای از سیستم‌های دینامیکی محسوب کرد. شاید اگر خود پالیس برای موضوع پایان نامه‌ام تصمیم می‌گرفت آن را مرتبط با حدس خود انتخاب می‌کرد. عده‌ای دیگر از افراد در آمریکا بر روی نظریه‌ی جبری سیستم‌های دینامیکی کار می‌کنند. از بزرگان این گروه می‌توانم مارگولیس [۱۹] را نام ببرم.کارهای کتوک [۲۰] و لیندنشتراوس [۲۱] هم ازاین جنس است؛ عمل یک گروه را بر روی فضایی خاص را بررسی می‌کنند. البته کارهای گروه کتوک به کارهای ما بی‌ربط نیست . مثلاً ایده‌ای مانند تجزیه‌ی اندازه‌ها روی یک برگ‌بندی [۲۲] در کارهای هردوی ما ظاهر می‌شود. گروه‌هایی دیگر نیز در حوزه‌ی سیستم‌های دینامیکی فعالیت دارند که موضوع آنها از علاقه‌ی شخصی من کمی‌فاصله می‌گیرد. موضوعات کاربردی‌تر سیستم‌های دینامیکی بی‌نهایت بعدی که به معادلات معروفی مانند ناویر-استوکس [۲۳] ربط دارند. بعضی‌هایشان مجموعه‌های جاذب سیستم‌های بی نهایت‌بعدی برخواسته از معادلات دیفرانسیل و نحوه‌ی تغییرات این مجموعه‌ها با تغییر پارامترها را مورد مطالعه قرار می‌دهند.

[۱۴] Artur Avila
[۱۵] Geometric Measure Theory
[۱۶] Hausdorff Dimension
[۱۷] Support
[۱۸] Bifurcation
[۱۹] Grigory Margulis
[۲۰] Anatole Katok
[۲۱] ElonLindenstrauss
[۲۲] Foliation
[۲۳] Navier–Stokes Equations

**در قاره‌ی اروپا یا در قاره‌ی آسیا هم مکتب خاصی وجود دارد؟ مثلاً در روسیه؟**

فرانسوی‌ها، به خصوص آدم‌های پاریس و ارسی به ما خیلی نزدیک است . مثلاً گروهی از آنها بر روی همین حدس پالیس کار می‌کنند. یوکوز، کریکوریان، لکالوز و بوناتی هم از کسانی هستند که کارهایشان به کارهایی که اینجا انجام می‌شود خیلی شباهت دارد. گروه‌های دیگری در آلمان یا دیگر جاها هستند که سیستم‌های دینامیکی تصادفی کار می‌کنند. به عنوان یکی از شخصیت‌های این زمینه که کتاب‌های مرجع زیادی نوشته است می‌توانم آرنولد را نام ببرم. البته افرادی در برزیل نیز به این موضوعات علاقه‌مندند. گروه‌های دیگری نیز هستند که من الان حضور ذهن ندارم.

**اگر کسی وارد سیستم‌های دینامیکی شود به چه نوع ریاضیاتی سروکله خواهد زد؟**

سؤال سختی است. من خودم هنوز در حال تجربه کردنم. مثلاً من قبلا اصلاً علاقه‌ای به اندازه‌های شرطی نداشتم ولی بعداً به طور خیلی طبیعی وارداین جریان شدم. این است که اگر بخواهم برای کار در سیستم‌های دینامیکی یک لیست مشخص از دروس بدهم اشتباه کرده‌ام. به نظرم من برای کار در سیستم‌های دینامیکی باید همه‌ی رشته‌ها را دانشجو خوب‌یاد بگیرد، ولی این ممکن است امکان‌پذیر نباشد ولی حداقل در دوره‌ی لیسانس و ارشد آنالیز، هندسه و جبرش را خیلی خوب مطالعه کند و یاد بگیرد. دانشجویی که می‌خواهد سیستم‌های دینامیکی کار کند نمی‌تواند بگوید نمی‌خواهم توپولوژی جبری یاد بگیرم؛ او باید کمی توپولوژی جبری بداند. زیرا ممکن است به یک سخنرانی معمولی در سیستم‌های دینامیکی برود و ببیند که مردم مشغول صحبت در مورد گروه بنیادی یا همولوژی و کوهمولوژی هستند. و یا ممکن است سر یک سمینار چیزی در مورد قانون اعداد بزرگ در احتمالات بشنود.

**اجازه دهید بحث را به سمت ریاضیات برزیل ببریم. فکر می‌کنم در فیلدز اخیر ، هر چند که یک ایرانی هم فیلدز گرفت ولی بیشتر جامعه‌ی‌ایرانی از این بابت که سیستم آموزشی برزیل جواب داده و یک فیلدز مدالیست تولید کرده خوشحال و امیدوار شد. نظر شما دراین‌باره چیست؟**

باید بگویم من دوطرفه خوشحال شدم. به یاد دارم که به آرتور آویلا گفتم هر کدام از شما که فیلدز بگیرید من خیلی خوشحال می‌شوم و او به من گفت پس تو مرد خوشحالی خواهی بود! نکته‌ی مهم در باره‌ی جامعه ریاضی برزیل، همان‌طور که گفتید، این است که فیلدزشان تولید داخل بوده ولی اکثر خود ریاضی برزیل تولید خالص داخلی و بومی نیست. یعنی این‌گونه نیست که مرزهایشان را ببندند و بنشینند در داخل ریاضی تولید کنند. همیشه آدم‌هایی از بیرون برزیل، به برزیل می‌آیند یا بالعکس. در مواقع زیادی، کارهای ریاضی در برزیل به طور مشترک با دانشگاه‌های خارج از آن انجام می‌شود. از این‌که جامعه ریاضی برزیل یک برنده‌ی فیلدز تولید کرده است می‌توان برداشت‌هایی درباره‌ی سطح آن جامعه کرد. همیشه وقتی گل سرسبدی می‌روید، نشانگر این است که سبد گلی وجود داشته است. خود آرتور هم خیلی از اوقات به سؤالات و حدس‌های مطرح شده توسط اطرافیانش پاسخ داده. اما با این وجود برزیل یک مشکل در ریاضیات تا دوره‌ی متوسطه دارد. دقیقاً برعکس ایران. به نظر من، در مقایسه با برزیل سیستم آموزشی ایران تا انتهای دوره‌ی دبیرستان خیلی بهتر است. بارها شده در سمینارهایی که شرکت می‌کنم؛ آدم‌ها از دلیل زرنگی و با استعداد بودن دانشجویان ایرانی و این‌که در ایران چه می‌کنید که آنها آنقدر باهوش هستند، سؤال پرسیده‌اند و این همواره باعث خوشحالی من بوده است. در واقع این موضوع بی‌دلیل نیست. درایران اصولاً فرهنگ مردم طوری است که به آموزش و تحصیل احترام زیادی می‌گذارند. نمی‌خواهم بگویم در برزیل‌این کار را نمی‌کنند ولی به دلایلی تاریخی، اقتصادی، فرهنگی‌یا هر چیز دیگر، آموزش در برزیل تا دوره‌ی دبیرستان مشکل عمیقی دارد. اما به طور شگفت‌آوری از همین قشر، ناگهان محققین بزرگی بیرون می‌آید. این هم مانند خیلی از چیزهای متناقض دیگر در برزیل است!

**چه‌طور این اتفاق می‌افتد؟**

اگر بخواهم ساده بگویم، برای تحقیقات در برزیل هزینه‌ی زیادی می‌شود. در برزیل ایده‌های مختلفی اجرا می‌شود که دانشجوها را به سمت تحقیقات سوق دهند. یعنی بسترسازی‌های زیادی برای این کار انجام داده‌اند که نتیجه هم داده است.

**در زمینه‌ی ریاضی یا تمام علوم محض؟**

به تمام علوم محض با این دید نگاه می‌کنند. اما در حقیقت دراین میان ریاضی شانس بیشتری آورده است. دوباره می‌توان به حضور جاکوب پالیس اشاره کرد. او در حال حاضر رئیس آکادمی علوم برزیل است و و دراین مقام، یعنی در سطح سیاست‌های ملی وجود یک ریاضی‌دان به پیشرفت ریاضی در یک کشور کمک زیادی می‌تواند بکند؛ همان‌طور که کرده است.

**ریاضیات برزیل از چه دوره‌ای شروع به پیشرفت کرده است؟**

البته من خیلی عمیق با تاریخ ریاضی آشنا نیستم. ولی فکر کنم در ۲۰ سال اخیر در حدی بوده که حرف دادن جایزه‌ی فیلدز به ریاضی‌دانان برزیلی زده می‌شد. این به یک بسترسازی عمیق و یک سری پدیده‌ها نیاز دارد. مثلاً مقالات خوبی در مجلاتی مانند Annals of Mathematics چاپ شده باشد و آدم‌های مهمی در

سطح بین‌المللی رایزنی‌هایی انجام داده باشند. اما رشد برزیل خیلی قدیمی است. ریاضی‌دانان خیلی معتبری قبل از این ۲۰ سال در برزیل وجود داشته‌اند اما در این ۲۰ سال سرعت رشد بیشتر شده است.

**ایمپا کی تأسیس شد؟**

ایمپا هم‌زمان با مؤسسه‌ای به نام سن‌پی‌کیو [۲۴] که اسپانسر تمام تحقیقات در برزیل است ، بیش از ۶۰ سال قبل تأسیس شد. دقیقاً در سال ۱۹۵۱. در ابتدای تأسیس فقط یک اتاق کار بود!

**علاوه بر کمک‌های جاکوب پالیس، چه سیاست‌هایی را در رشد ریاضیات برزیل موثر می‌دانید؟ البته سؤال کلی است ولی شما چند مورد از گل‌های سرسبدش را توضیح دهید.**

در واقع گل سرسبد، تأسیس ایمپا بوده است. هنوز هم وجود ایمپا تأثیر زیادی دارد اما در حال حاضر به وجود آمدن دانشگاه‌ها و مؤسسات تحقیقاتی دیگر در کنار ایمپا- که در خود ایمپاریشه دارند- به رشد خود ایمپا نیز کمک کرده است. ایمپا در سال‌های زیادی بعد از تأسیسش، در رشته‌های کمی فعال بود و کم‌کم رشد کرد. خیلی ممکن به نظر نمی‌رسد که یک‌دفعه، با ۴۰ یا ۵۰ محقق در یک مؤسسه‌ی تازه تأسیس روی رشته‌های زیادی تحقیق شود. جاکوب پالیس همیشه می‌گفت هر چیز داغی را باید از کناره‌هایش بخورید و یک‌دفعه از وسط شروع نکنید! این یعنی آرام‌آرام شروع کنید و از اطراف جریان به آن بپیوندید. به نظرم برزیلی‌ها توانستند با آرامش خاصی پیشرفت کنند. خود ایمپا هم با ریاضی‌دانان معروفی شروع کرد که این خود بی تأثیر نبوده است. تأثیر نفوذ سیاسی را نیز نباید نادیده گرفت.

**اگر امکان دارد کمی از ساز و کار ایمپا برای ما بگویید. چه تعداد استاد، محقق و دانشجو درایمپا وجود دارد؟**

البته من تعداد دقیق‌شان را نمی‌دانم. ولی تعداد محققان در حد ۴۰تا است؛ در دانشگاه خودمان ما حدود ۱۰۰تا دانشجوی فوق‌لیسانس و دکتری داریم که این عدد برای ایمپا حدود ۱۵۰تاست. یکی از مهمترین خواص ایمپا آزاد و بدون بوروکراسی بودن است. تعداد دانشجویانی که بدون اتمام لیسانس وارد فوق می‌شوند کم نیست و خیلی از آنها موفق شده‌اند. نمونه: آرتور آویلا و کارلوس ماتئوس[۲۵].

**در دانشگاه خودتان چند استاد دارید؟**

حدود ۴۰ نفر محقق. این تعداد معقولی است. هر استادی هم ۳ یا ۲ دانشجوی دکتری، و گاهی اوقات بیشتر، می‌گیرد.

**چند درصدشان خارجی هستند چند درصدشان برزیلی‌اند؟**

اگر منظورتان دانشجوهاست، در دانشگاه خودمان تعداد دانشجوهای خارجی به ۴۰ درصد می‌رسد که اکثراً از آمریکای لاتین هستند و اگر در مورد ایمپا صحبت کنیم، در ایمپا تعداد دانشجوهای خارجی بیشتر است و حتی به بالای ۵۰ درصد هم می‌رسد و فقط از امریکای لاتین نیستند. دانشجوهایی ازایران و اروپا آنجا هستند و واقعاً بین‌المللی هست.

**من احساس می‌کنم بچه‌هایی که وارد دانشگاه می‌شوند، نسبت به دانش‌آموزهایی که اینجا داریم پیش‌زمینه‌ی ضعیف‌تری دارند. مثلاً در مورد همین جریان المپیاد بهترین رتبه‌ی برزیل در المپیاد جهانی در ۲۰ سال اخیر رتبه‌ی ۱۶ بوده است، در حالتی بدترین رتبه‌ی ایران دراین سال‌ها ۲۱-۲۰ بوده است. حال در آنجا چگونه این بچه‌ها را در سیستمی قرار می‌دهند که بعد از دوره‌ی لیسانس و بعد از فوق‌لیسانس، در دکتری به این شکوفایی می‌رسند؟ مثلاً برنامه‌شان برای بچه‌های لیسانس چی است؟ برای فوق‌لیسانس چطور؟ لیسانس‌ها باید چه کارهایی انجام دهند؟**

سؤال خیلی خوبی است اولین نکته‌ای که باید خوب دقت کنیم مقایسه‌ی رتبه‌ی المپیاد با آموزش ریاضی خوب نیست. یعنی واقعاً نباید مقایسه کرد چون که دقت کنید خیلی از کشورهای دیگر هم هستند که در ریاضی بالا هستند ولی از نظر المپیاد ریاضی قوی نیستند؛ مثلاً کشور فرانسه که یک کشور معروفی است این‌جوری نیست. یعنی‌این‌که المپیاد مقدار زیادش حرفه‌ای شده است. برگردیم به‌طور جدی‌تر در مورد سؤال شما که چه کارهایی می‌کنند؟ واقعاً پیش‌زمینه‌ی دانش‌آموزان زیاد قوی نیست و من به خودم اجازه نمی‌دهم بگویم دانشجوهای لیسانس ریاضی ما مثل دانشجوهای شریف هستند.

**ولی می‌گویید دانشجوهای دکترای شما بهتر هستند. چرا؟**

بله. اولاً که در دوره‌ی لیسانس با این‌که دانشجوها ممکن است فاصله داشته باشند، یک پروژه‌ای هست که‌یک چند سالی این‌ها می‌آیند و بایک استادی یک مطلبی را کار می‌کنند و با آن مطلب باید چیزهای مختلفی‌یاد بگیرند. یعنی ممکن است زیاد چیز بلد نباشند ولی خیلی چیزها یاد می‌گیرند. چیزهایی که در دوره لیسانس‌شان یاد می‌گیرند، ممکن است خیلی چیزهای مشکلی نباشد؛ ولی آن فاصله‌ای که در دوره دبیرستان وجود داشته سعی می‌شود تا زمان فوق‌لیسانس تا حدی حل شود.

**قبل از این‌که ادامه دهیم؛ یعنی، تا فوق‌لیسانس دانشجوها باید سعی کنند چیز بخوانند و چیز یاد بگیرند و کار تحقیق انجام نمی‌دهند؟**

[۲۴] CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

[۲۵] Carlos Matheus

تا فوق‌لیسانس باید چیز بخوانند وباد بگیرند. نه کار تحقیقی انجام نمی‌دهند.

**ولی این چیز خواندن‌شان در راستای یک جهت خاصی است؟**

همه چیزها بعضی وقت‌ها اگر از یک دیدگاه به آنها نگاه کنیم، به نظر می‌رسد خیلی قشنگ و خوب دارد پیش می‌رود ولی از یک دیدگاه دیگر معضل محسوب می‌شود. ما باید به این موضوع توجه داشته باشیم واین مسأله را حل کنیم که این معضل نشود که فرد مثل یک ساقه فقط در یک جهت رشد کند و چیز دیگری بلد نباشد. ما به این موضوع توجه می‌کنیم ولی به نظر می‌آید که این جواب داده است؛ یعنی، این‌که روی یک مطلبی متمرکز می‌شوند و بالاخره آن را یاد می‌گیرند. کار دکتری هم تا یک حدی این‌جوری است. شما باید روی یک موضوع متمرکز شوید و روی آن کار کنید. تعداد افراد خارجی که در برزیل عضو هیئت علمی‌دانشگاه‌ها شده‌اند و ریاضی‌دان‌های خوبی هستند، به نظر من زیاد است. یعنی شما وقتی وارد دکتری می‌شوید یک دفعه باید شروع کنید به‌طور جدی کار کنید و دانشجو فرصت‌های مطالعاتی زیادی هم دارد.یعنی دانشجوی دکتری خیلی وقت‌ها به کنفرانس‌های مختلفی در کشورهای دیگر می‌رود. مثلاً دانشجوی دکتری خودم سال گذشته در ۳تا کنفرانس بین‌المللی شرکت کرد و وقتی دانشجوهای جاهای دیگر را می‌بیند، یک شوکی به آن وارد می‌شود. من فکر می‌کنم دراین سیستم دانشجو مجبور می‌شود خودش رایک‌جوری تصحیح کند و به حد مطلوب برساند. نکته دیگر هم‌این که تعداد دانشجوهای بین‌المللی برزیل خیلی بیشتر ازایران هست. در نتیجه وقتی تعداد خیلی زیادی دانه داریم، احتمال این‌که تعداد گل‌های بیشتری دربیاید طبیعتاً بیشتر می‌شود. این موضوع هم وجود دارد.

**اگر اجازه بدهید با این سؤال تمامش کنیم. رابطه‌ی تدریس و پژوهش چیست بعضی‌ها شاید فکر کنند که اگر بخواهند کار پژوهشی خیلی سطح بالایی انجام دهند باید همه‌ی وقتشان را روی آن بگذارند و هیچ وقتی را روی تدریس نگذارند.**

باز هم سؤال جواب یکتای خلاصه‌ای ندارد. این بستگی به شخصیت آدم‌ها دارد. اگر یک شخصی بتواند هر دو تا را انجام بدهد، خوش به حالش که می‌تواند هر دو تا را انجام بدهد! به نظر من تدریس به طور طبیعی وقت‌گیر است و شما نمی‌توانید کار تحقیقاتی بکنید؛ یعنی، وقتی شما در طول هفته باید ۲ یا ۳ درس ارائه بدهید، وقت زیادی از شما گرفته می‌شود و معمولاً آدم سعی می‌کند یک دوره‌ی ۶ ماهه را فرصت مطالعاتی برود و به طور خالص کار تحقیقاتی بکند. به نظر من واقعاً تحقیق نیاز به این دارد شما خیلی متمرکز بشوید. ولی تدریس کردن مخالفت نمی‌کند؛ حداقل تجربه شخصی من این‌طوری است که من سعی می‌کنم هر وقت بخواهم تدریس کنم، یک چیز جدید خودم دنبالش بروم حتی مسأله پیدا کنم. بالاخره با آن کار از تدریس خودم هم استفاده می‌کنم.

**یعنی این‌که کمک می‌کند به پژوهش؟**

کمک می‌کند. حتی من مثال از مقالات خودم دارم که از همین راه‌ها درآمده است. ولی شاید خلق‌وخوی من با همه یکسان نباشد. من دوست دارم با دانشجوها در ارتباط باشم، در نتیجه برای من ارتباط برقرار کردن سخت نیست و آدم‌های این‌جوری خیلی زیاد هم هستند. مکملش هم وجود دارد که آدم‌ها دوست دارند حتماً به طور منزوی کار کنند. ولی به طور قطع تدریس زیاد وقت را می‌گیرد.

**این‌طور که من فهمیدم کاری که شما انجام می‌دهید این است که یک مدت را به تدریس می‌پردازید و یک مدت روی تحقیقات تمرکز می‌کنید؟**

من شانسم این است که آن قدر زیاد تدریس نمی‌کنم. معمولاً در یک ترم فقط یک درس فوق‌لیسانس و دکتری دارم و آن موقع می‌توانم کارهای خودم را بکنم ترم دیگر هم مثلاً دو تا درس هست؛ یکی از آنها درس لیسانس است. بعضی وقت‌ها هم که تدریس هم نمی‌کنم دچار خستگی می‌شوم. بعد از یک مدتی شما نیاز دارید به این‌که وقتی تحقیقی می‌کنید کار دیگری انجام دهید. مثلاً بعضی وقت‌ها در تحقیقتان به بن بست می‌خورید و باید یک کار دیگری انجام دهید. تدریس خیلی وقت‌ها می‌تواند کمک کند به شما که فکرتان باز شود. البته باز هم به نوع تدریس و نوع درسی که می‌دهیم ربط دارد.

# بهینه‌سازی در دانشگاه صنعتی شریف

محمدمهدی کارخانه‌ای

## ۱ مقدمه

یکی از امکانات دانشکدهٔ علوم ریاضی دانشگاه شریف، نزدیک بودن به سایر دانشکده‌های مهندسی و علوم است. دانشگاه‌های کمی در تهران چنین حسنی را دارند. یکی از فواید این موضوع امکان تعامل با دانشجویان و استادان و استفاده از دروس ارائه شده در سایر دانشکده‌ها است.

حوزهٔ فعالیت تعدادی از استادان دانشکده‌های مختلف، مرتبط با ریاضی به‌ویژه ریاضیات کاربردی (بهینه‌سازی، معادلات دیفرانسیل عددی، و غیره) است. آشنایی دقیق‌تر دانشجویان با این استادان و حوزهٔ تخصصی آنها در مطالعات آنها می‌تواند مفید باشد.

درس‌های متنوعی مرتبط با ریاضی در سایر دانشکده‌ها ارائه می‌شود که بسیاری از دانشجویان دانشکده از آنها بی‌خبرند و اگر هم با خبرند از محتوا و سبک و سیاق درس اطلاعی ندارند. در صورتی که دانشجویان دانشکده با درس‌های مرتبط با ریاضی که در سایر دانشکده‌های دانشگاه ارائه می‌شود آشنا باشند، بسیار مفید است و می‌تواند زمینه‌ساز ایجاد تعامل و ارتباط بیش‌تر با استادان سایر دانشکده‌ها باشد.

مجلهٔ ریاضی شریف بنا دارد در چند شمارهٔ خود برخی از درس‌های مرتبط با ریاضی که در دانشکده‌های مختلف دانشگاه صنعتی شریف ارائه می‌شود را معرفی کند. این نوشته شروعی بر اجرای این کار است.

### ۱.۱ هدف این نوشتار

هدف این نوشتار آشنایی دانشجویان دانشکدهٔ علوم ریاضی (به‌خصوص ورودی‌های جدید) با شاخه‌ها و درس‌های مرتبط با بهینه‌سازی است که در دانشگاه صنعتی شریف ارائه می‌شود.

## ۲ بهینه‌سازی

در این بخش به معرفی مختصر مفاهیم مربوط به شاخه‌های مختلف بهینه‌سازی می‌پردازیم.[۱]

در علوم و مهندسی، بهینه‌سازی ریاضی (یا برنامه‌ریزی ریاضی) انتخاب بهترین عضو (با توجه به یک معیار) از یک مجموعه از گزینه‌های در دسترس است.

### ۱.۲ مسألهٔ بهینه‌سازی

یک مسألهٔ بهینه‌سازی را معمولاً می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

**داده:** یک تابع $f : \Omega \to \mathbb{R}$ از مجموعهٔ $\Omega$ به اعداد حقیقی.

**هدف:** یافتن یک عضو $x_\circ$ در $\Omega$ به طوری که $f(x_\circ) \le f(x)$ برای هر $x$ در $\Omega$ (کمینه‌سازی) یا به طوری که $f(x_\circ) \ge f(x)$ برای هر $x$ در $\Omega$ (بیشینه‌سازی).

بسیاری از مسائل دنیای واقعی و مسائل تئوری را می‌توان در این چارچوب کلی مدل‌سازی کرد.

معمولاً، $\Omega$ زیر مجموعه‌ای از یک فضای برداری است و اغلب به صورت مجموعه‌ای از قیدها، معادله‌ها و نامعادله‌هایی که اعضای $\Omega$ در آن صدق می‌کنند، بیان می‌شود. به $\Omega$، فضای جستجو یا ناحیهٔ شدنی می‌گویند.

در حالت کلی معمولاً به تابع $f$، تابع هدف می‌گویند. اما در حالت کمینه‌سازی به تابع $f$، تابع زیان یا تابع هزینه و در حالت بیشینه‌سازی، تابع سود نیز می‌گویند. در برخی از شاخه‌ها به $f$ تابع

[۱] در تنظیم این بخش از ویکی‌پدیا بهره برده‌ام.

انرژی گفته می‌شود. به یک جواب شدنی که تابع هدف را بهینه می‌کند، جواب بهینه می‌گویند[۱].

## ۲.۲ شاخه‌های بهینه‌سازی

با توجه به خواصی که مجموعهٔ $\Omega$ و تابع $f$ دارد، مسأله‌های بهینه‌سازی را می‌توان به شاخه‌های مختلفی تقسیم کرد.

### بهینه‌سازی خطی و غیرخطی

در بهینه‌سازی خطی هدف یافتن مقدار بهینهٔ یک تابع خطی روی یک چندوجهی است. یعنی، $f$ یک تابع خطی روی $\mathbb{R}^n$ و $\Omega$ یک چند وجهی در فضای $\mathbb{R}^n$ است. استفاده از بهینه‌سازی خطی در زمان جنگ جهانی دوم برای برنامه‌ریزی عملیات جنگی متداول شد. ج. دانتزیگ در سال ۱۹۴۷ با ارائه الگوریتم سیمپلکس برای حل مسألهٔ بهینه‌سازی خطی ، باعث توسعه بهینه‌سازی خطی شد. پس از جنگ نیز مفاهیمی که در زمان جنگ توسعه پیدا کرده بود، به‌طور گسترده‌ای در صنعت مورد استفاده قرار گرفت و باعث پیدایش شاخهٔ تحقیق در عملیات شد. امروزه بهینه‌سازی خطی در مهندسی صنایع، اقتصاد و مدیریت بسیار کاربرد دارد.

در بهینه‌سازی غیرخطی $f$ یک تابع غیرخطی روی $\mathbb{R}^n$ و $\Omega$ یک خمینه در $\mathbb{R}^n$ است که معمولاً به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | g_i(x) \leq ۰, i = ۱, \dots, m\}$$

که در آن $g_i$ها توابعی از $\mathbb{R}^n$ به $\mathbb{R}$ هستند. عموماً، یک مسألهٔ بهینه‌سازی غیرخطی چندین جواب بهینهٔ موضعی دارد. یک جواب شدنی $x^*$ را جواب بهینهٔ موضعی $f$ گوییم هرگاه در یک همسایگی $x^*$ ، $x^*$ جواب بهینهٔ $f$ باشد. بیشتر الگوریتم‌هایی که برای حل مسأله‌های بهینه‌سازی غیرخطی ارائه می‌شود، جواب بهینهٔ موضعی مسأله را پیدا می‌کنند.

### بهینه‌سازی محدب

بهینه‌سازی محدب به مطالعهٔ حالتی می‌پردازند که ناحیهٔ شدنی محدب و تابع هدف محدب (در کمینه‌سازی) و تابع هدف مقعر (در بیشینه‌سازی) است. در یک مسألهٔ بهینه‌سازی محدب، هر جواب بهینهٔ موضعی یک جواب بهینهٔ سراسری است. مسائل بهینه‌سازی محدب خواص تئوری خوبی دارند. بهینه‌سازی معین مثبت و بهینه‌سازی مخروطی زیرمجموعهٔ بهینه‌سازی محدب هستند.

### بهینه‌سازی عدد صحیح و بهینه‌سازی ترکیبیاتی

یک مسألهٔ بهینه‌سازی عدد صحیح یک مسألهٔ بهینه‌سازی خطی است که برخی از یا همهٔ متغیرها عدد صحیح هستند.

در بهینه‌سازی ترکیبیاتی، $\Omega$ یک مجموعهٔ متناهی ولی با تعداد اعضای بسیار زیاد است. یافتن جواب بهینه در مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی معمولاً سخت است. مشخص کردن دستهٔ مسائلی که یافتن جواب بهینه در زمان معقول برایشان امکان‌پذیر است و یا محاسبهٔ جواب تقریبی در زمان معقول با اهمیت است.

### کنترل بهینه و حساب تغییرات

در این حالت $\Omega$ یک فضای تابعی و $f$ یک تابعی روی $\Omega$ است. مثلاً مسألهٔ تعیین مسیر حرکت یک موشک از یک ناحیه به ناحیه دیگر را در نظر بگیرید، به طوری که میزان سوخت موشک مینیمم گردد. در این حالت مجهول یک سری از پارامترها بر حسب زمان هستند که حرکت موشک را کنترل می‌کنند و حرکت موشک توسط یک سری از معادلات دیفرانسیل بر حسب پارامترهای کنترل توصیف می‌شود.

### بهینه‌سازی تصادفی

در بهینه‌سازی تصادفی، برخی از متغیرها در تابع هدف، متغیر تصادفی هستند و معمولا امید ریاضی تابع هدف بهینه می‌شود.

### بهینه‌سازی چندهدفه و بهینه‌سازی برداری

در بهینه‌سازی چندهدفه یا برداری، می‌خواهیم همزمان چند تابع هدف را بهینه کنیم. ممکن است بین توابع تعارض وجود داشته باشد. یعنی، بهینه کردن یک تابع موجب بدتر شدن تابع دیگر شود. لذا در بهینه‌سازی برداری نیاز به داشتن یک ترتیب در فضای برداری داریم. ترتیب پارتو یکی از ترتیب‌های متداول در بهینه‌سازی چندهدفه است.

## ۳ درس‌های مرتبط با بهینه‌سازی

در این بخش به معرفی برخی از درس‌های مرتب با بهینه‌سازی که در دانشکده‌های مختلف در دانشگاه صنعتی شریف ارائه می‌شود، می‌پردازیم. درس‌هایی که معرفی شده‌اند مربوط به مقطع تحصیلات تکمیلی هستند. در معرفی درس‌ها سرفصل‌ها و منابع مورد استفاده آورده شده است. این درس‌ها معمولاً دارای پروژه هستند و برخی از مطالبی که در سرفصل‌ها نیست در قالب پروژه پوشش داده می‌شوند.

در درس‌هایی که در دانشکده‌های مهندسی ارائه می‌شود اگر چه مقدار خوبی از مفاهیم ریاضی استفاده می‌شود، اما در ارزش‌یابی بیشتر استفاده از الگوریتم‌ها و روش‌های گفته شده مورد توجه است.

## ۱.۳ دانشکدهٔ علوم ریاضی

### ۱.۱.۳ بهینه‌سازی غیرخطی

سرفصل مطالب

- طرح، تحلیل، توسعه و پیاده‌سازی الگوریتم‌های متنوع عددی برای حل مسائل بهینه‌سازی مقید و غیرمقید، روش‌های نیوتن و شبه نیوتن، سکانت، جهت‌های مزدوج، الگوریتم‌های جستجوی خطی، روش‌های ناحیه اعتماد (قدم محدود)، برنامه‌ریزی درجه دوم، بهینه‌سازی غیرخطی با قیود خطی، روش‌های جریمه‌ای برای بهینه‌سازی غیرخطی با قیود غیرخطی، روش‌های لاگرانژ-نیوتن، همگرایی سراسری و همگرایی مجانبی (سرعت همگرایی).

منابع

۱. *برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی*، نوشتهٔ د.جی. لوئنبرگر، ترجمهٔ نظام‌الدین مهدوی‌امیری و محمدحسین پورکاظمی، انتشارات علمی دانشگاه صنعتی شریف، چاپ دوم، ۱۳۸۵.
2. *Numerical Optimization*, by J. Nocedal and S. J. Wright, Second Edition, Springer, 2006.
3. *Practical Methods of Optimization*, by R. Flecher, John Wiley and Sons, 1987, Reprinted 1991.

### ۲.۱.۳ بهینه‌سازی غیرخطی پیشرفته

منابع

- روش‌های نقطه داخلی

1. *Primal-Dual Interior-Point Methods*, by S. J. Wright, SIAM Publications, 1997.
2. *Theory and Algorithms for Linear Optimization: An Interior Point Apprach*, by C. Roos, T. Terlaky and J. Ph. Vial, John Wiley and Sons, 1997, Reprinted 2001.

- روش‌های بهینه‌سازی خطی و غیرخطی

1. *Practical Methods of Optimization*, by R. Flecher, Second Edition, John Wiley and Sons, 1987, Reprinted 1991.
2. *Numerical Optimization*, by J. Nocedal and S. J. Wright, Second Edition, Springer, 2006.
3. *Linear and Nonlinear Programming*, by D. G. Luenberger and Y. Ye, Third Edition, Springer, 2008.

### ۳.۱.۳ حساب تغییرات

سرفصل مطالب

- مقدمات، مسألهٔ خم کوتاهترین زمان، برخی از مسائل وردشی در هندسه، اصل همیلتون
- وردش اول، معادلهٔ اویلر-لاگرانژ
- مسألهٔ وارون
- مسائل هم‌محیطی
- کاربرد در مسائل مقدارویژه
- قیدهای هولونومیک و غیرهولونومیک
- مسائل با نقاط انتهایی متغیر
- وردش دوم، شرط لژاندر، شرط لازم ژاکوبی

منابع

- *The Calculus of Variations*, by B. Van Brunt, Springer, 2004.

## ۲.۳ دانشکدهٔ مهندسی برق

### ۱.۲.۳ بهینه‌سازی محدب

سرفصل مطالب

- تئوری
  - مجوعه‌های محدب
  - تابع‌های محدب
  - مسألهٔ بهینه‌سازی محدب
  - دوگانی

- کاربردها
  - تقریب و برازش
  - مسأله‌های هندسی
- الگوریتم‌ها
  - کمینه‌سازی نامقید
  - کمینه‌سازی با قیدهای تساوی
  - روش‌های نقطه داخلی

منابع


- *Convex optimization*, by S. Boyd and L. Vandenberghe, Cambridge university press, 2004.


#### ۳.۲.۲ روش‌های عددی بهینه‌سازی

سرفصل مطالب

- یادآوری مقدماتی: آنالیز توابع چندمتغیره، بهینه‌سازی توابع یک‌متغیره، جبرخطی
- بهینه‌سازی نامقید
  - تئوری (شرط های بهینگی مرتبهٔ اول و دوم)
  - اصول الگوریتم‌ها (جستجوی خطی، ناحیهٔ اعتماد)
  - الگوریتم‌ها (تندترین کاهش، نیوتن، شبه‌نیوتن، و گرادایان مزدوج)
- بهینه‌سازی مقید
  - تئوری (شرط‌های بهینهٔ مرتبهٔ اول و دوم)
  - الگوریتم‌ها (جریمه‌ای، مانعی، لاگرانژی افزوده)
- الگوریتم‌های تصادفی برای بهینه‌سازی

منابع


1. *Numerical Optimization*, by J. Nocedal and S. J. Wright, Second Edition, Springer, 2006.
2. *An Introduction to Optimization*, by E. K. P. Chong and S. H. Zak, Second Edition, John Wiley and Sons, 2001
3. *Practical Methods of Optimization*, by R. Flecher, Second Edition, John Wiley and Sons, 1987, Reprinted 1991.
4. *Nonlinear Programming*, by D. Bertsekas, Second Edition, Athena Scientific, 1999
5. *Linear and Nonlinear Programming*, by D. G. Luenberger, 1st Edition, Springer, 2008.


### ۳.۳ دانشکدهٔ مهندسی عمران

#### ۱.۳.۳ برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و شبکه‌ها

سرفصل مطالب

- مقدمه
  - تعریف مسألهٔ برنامه‌ریزی با اعداد صحیح
  - مدل‌های با متغیر عدد صحیح
  - کاربرد متغیرهای صحیح در مدل‌سازی
- مرور برنامه‌ریزی خطی
  - روش سیمپلکس
  - همزادی
  - روش اولیه-همزاد
- بهینه‌سازی شبکه
  - مسألهٔ جریان در شبکه
  - روش‌های حل مسألهٔ جریان در شبکه با هزینهٔ مینیمم
  - مسائل خاص جریان در شبکه
  - روش‌های حل اولیه و همزاد و OFK
- تئوری گراف
  - مسائل جور ماکزیمم
  - پوشش مینیمم
  - درخت گسترش مینیمم
- برنامه‌ریزی پویا
  - مسائل کوتاهترین مسیر و کوله‌پوشتی و نمایش آنها به فرم برنامه‌ریزی پویا
  - انواع روابط برگشتی و کاربرد آنها در حل مسائل کوله‌پشتی و کوله‌پشتی گروه

| شماره | واحد | نام درس | استاد درس | دانشکده |
|---|---|---|---|---|
| ۲۲۶۶۴ | ۴ | بهینه‌سازی غیرخطی | نظام‌الدین مهدوی‌امیری | علوم ریاضی |
| ۲۲۶۶۷ | ۴ | بهینه‌سازی غیرخطی پیشرفته | نظام‌الدین مهدوی‌امیری | علوم ریاضی |
| ۲۲۴۹۷ | ۴ | حساب تغییرات | محمود حصارکی | علوم ریاضی |
| ۲۵۰۸۸ | ۳ | بهینه‌سازی محدب | سیدجمال‌الدین گلستانی | مهندسی برق |
| ۲۵۰۸۹ | ۳ | روش‌های عددی بهینه‌سازی | مسعود بابایی‌زاده‌مالمیری | مهندسی برق |
| ۲۵۴۲۶ | ۳ | کنترل بهینه | ناصر ساداتی | مهندسی برق |
| ۲۰۵۷۹ | ۴ | برنامه‌ریزی با اعداد صحیح و شبکه‌ها | هدایت ذکائی آشتیانی | مهندسی عمران |
| ۲۸۰۲۵ | ۳ | طراحی بهینه | سعید خدایگان | مهندسی مکانیک |
| ۴۶۳۱۱ | ۳ | برنامه‌ریزی ریاضی پیشرفته | رامین روشن‌دل | مهندسی انرژی |
| ۲۱۷۱۸ | ۳ | برنامه‌ریزی عددصحیح | کورش عشقی | مهندسی صنایع |
| ۲۱۷۵۳ | ۳ | برنامه‌ریزی ترکیبی | کورش عشقی | مهندسی صنایع |
| ۲۱۷۴۹ | ۳ | برنامه‌ریزی تصادفی | مجید رفیعی | مهندسی صنایع |
| ۲۱۹۸۶ | ۳ | کنترل بهینه | فرهاد کیانفر | مهندسی صنایع |

جدول ۱: برخی از درس‌های مرتبط با بهینه‌سازی که در دانشکده‌های مختلف دانشگاه صنعتی شریف ارائه می‌شود.

- تئوری همزادی
  - رابطهٔ همزادی با محدب‌سازی
  - روش برنامه‌ریزی خطی عمومیت داده شده
- روش‌های عمومی حل برنامه‌های با اعداد صحیح
  - شمارش ضمنی
  - شاخه و کرانه
  - صفحات برش
  - بهینه‌سازی گروه
- روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی مختلط
  - روش تجزیه
  - روش بندرز
- مسائل خاص
  - فروشندهٔ سیار
  - مکان‌یابی

منابع

1. *Integer Programming*, by R. S. Garfinkel and G. L. Nemhauser, John Wiley and Sons, 1972.

2. *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*, by by J. F. Shapiro, John Wiley and Sons, 1979.

3. *Integer Programming: Theory, Applications, and Computations*, by H. A.Taha, Academic Press, 1975.

4. *Applied Mathematical Programming*, by S. P. Bradley, A. C. Hax and T. L. Magnanti, Addison Wesley, 1976.

5. *Combinatorial Optimization*, by N. Christofides, John Wiley and Sons, 1979.

6. *Graph Theory: An Algorithmic Approach*, by N. Christofides, Academic Press, 1975.

7. *Principles of Operations Research: With Applications to Managerial Decisions*, by H. M. Wagner, Prentice Hall, 1975.

8. *Optimization Theory for Large Systems*, by L. S. Lasdon, Courier Corporation, 1970.

9. *Fundamentals of Network Analysis*, by D. T. Phillips and A. Garcia-Diaz, Prentice Hall, 1981.

10. *Integer and Combinatorial Optimization*, by L. A. Wolsey and G. L. Nemhauser, John Wiley and Sons, 1988.

11. *Network Flows*, by R. K. Ahuja, T. L. Magnanti and J. B. Orlin, Prentice Hall, 1993.


## ۴.۳ دانشکدهٔ مهندسی مکانیک

### ۱.۴.۳ طراحی بهینه

سرفصل مطالب

- بخش اول
  - نقش بهینه‌سازی در طراحی مهندسی
  - نحوهٔ مدل‌سازی مسائل طراحی بهینه
- بخش دوم
  - مفاهیم اساسی در بهینه‌سازی
  - روش‌های حل مسائل طراحی بهینهٔ تک‌هدفه
- بخش سوم
  - روش‌های حل مسائل طراحی بهینهٔ چندهدفه
    * روش‌های کلاسیک
    * روش‌ـ های تکاملی
- بخش چهارم
  - طراحی و تحلیل آزمایش‌ها (DOE)
    * مفاهیم اساسی در تحلیل‌ـ های آماری
    * طراحی و تحلیل آزمایش‌ـ ـ های تک عاملی (تحلیل واریانس)
    * طراحی و تحلیل آزمایش‌های چند عاملی (طراحی فاکتوریل)
    * بهینه‌سازی به روش تاگوچی

منابع


1. *Introduction to Optimum Design*, by J. S. Arora, 3th Edition, Elsevier Academic Press, 2012.

2. *Multi-Objective Optimization using Evolutionary Algorithms*, by K. Deb, John Wiley and Sons, 2001.

3. *Design and Analysis of Experiments*, by D. C. Montgomery, 8th Edition, John Wiley and Sons, 2012.


## ۵.۳ دانشکدهٔ مهندسی صنایع

### ۱.۵.۳ برنامه‌ریزی عددصحیح

سرفصل مطالب

- مروری بر برنامه‌ریزی عددصحیح
- روش‌های شاخه و کران
- شمارش ضمنی ۱-۰
- روش‌های صفحه برشی
- حل مسائل بزرگ‌مقیاس ۱-۰
- روش آزادسازی لاگرانژی
- الگوریتم مجانبی صحیح
- مسألهٔ کوله‌پشتی
- مسألهٔ پوشش مجموعه
- روش تولید ستون
- تجزیهٔ بندرز برای مسألهٔ عددصحیح مختلط
- کاربردهای عملی برنامه‌ریزی عددصحیح در ادبیات موضوع

منابع


1. *Integer Programming*, by L. A. Wolsey, John Wiley and Sons, 1998.

2. *Integer and Combinatorial Optimization*, by L. A. Wolsey and G. L. Nemhauser, John Wiley and Sons, 1999.

### ۲.۵.۳ برنامه‌ریزی ترکیبی

سرفصل مطالب

- بخش اول: آنالیز الگوریتم‌ها
  - یک الگوریتم چیست؟
  - آنالیز مجانبی
  - آنالیز الگوریتم‌ها
  - ماشین متناهی حالت
  - ماشین تورینگ
  - نظریه کامل-NP بودن
  - مسائل کامل-NP مقدماتی
- بخش دوم: تکنیک‌های جستجو برای مسائل بهینه‌سازی ترکیبیاتی
  - تکنیک‌های جستجو
  - الگویتم‌های جستجو
  - الگوریتم بهینه‌سازی کلونی مورچگان
  - تکنیک جستجو ممنوع
  - شبیه‌سازی تبرید

منابع

- بخش اول

1. *An Introduction to Algorithm*, by T. H. Cormen et al., MIT Press, 2001.
2. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, by M. R. Garey and D. S. Johnson, W. H. Freeman Publications, 1979.

- بخش دوم

1. *Intelligent Optimisation Techniques: Genetic Algorithms, Tabu Search, Simulated Annealing and Neural Networks*, by D. Pham and D. Karaboga, Springer, 2011.
2. *Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity*, by C. H. Papadimitriou and K. Steiglitz, Prentice Hall, 1982.

### ۳.۵.۳ برنامه‌ریزی تصادفی

سرفصل مطالب

- مقدمه. شامل: تاریخچهٔ نحوهٔ پیدایش مبحث برنامه‌ریزی تصادفی، دلیل گرایش برای بکارگیری این ابزار، جایگاه و ارتباط علم برنامه‌ریزی تصادفی در تحقیق در عملیات، ارائهٔ چند مثال کاربردی
- مبانی و تعاریف مقدماتی شامل تئوری احتمال و اندازه‌گیری، فضاهای اندازه، ضرب فضاهای اندازه‌گیری و ضرب اندازه‌ها، توابع تعریف شده بر روی فضاهای اندازه، انتظارات شرطی، فضاهای احتمال و متغیرهای تصادفی، استقلال متغیرهای تصادفی، همگرایی دنباله‌های تصادفی، تئوری حد مرکزی، محدودیت‌های احتمالاتی
- مدل‌سازی مسائل برنامه‌ریزی تصادفی شامل مسائل بازگشتی (resourse problems)، تصمیم و مرحله، برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای بازگشتی، برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌ای، روش سناریو، روش فرموله‌سازی split-variable ، سایر فرم‌های توسعه‌یافتهٔ برنامه‌ریزی تصادفی
- الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی تصادفی:
  - برنامه‌ریزی تصادفی دو مرحله‌ای بازگشتی شامل مسائل بازگشتی، تجزیهٔ بندرز، آزادسازی لاگرانژ، انواع روش‌های L-shaped، نامساوی‌ها
  - برنامه‌ریزی تصادفی چندمرحله‌ای شامل درخت سناریو و روش Nested L-shaped
- برنامه‌ریزی محدودیت احتمالی شامل مدل‌سازی و مدل‌سازی مجدد، مسائل قطعی معادل، روش تجزیهٔ دانتزگ-ولف، نامساوی‌ها

- تخمین‌ها، شامل: نمونه‌گیری مونته‌کارلو، روش SAA ، روش CVaR
- پایداری و نااریبی الگوریتم‌های حل مسائل برنامه‌ریزی تصادفی
- کاربردهای برنامه‌ریزی تصادفی، شامل: طراحی، برنامه‌ریزی و مدیریت زنجیرهٔ عرضه، برنامه‌ریزی انرژی، مسائل مالی، مسائل جایابی تجهیزات، برنامه‌ریزی و مدیریت تولید.

منابع


1. *Introduction to Stochastic Programming*, by J. R. Birge and F. Louveaux, Second edition, Springer, 2011.
2. *Lectures on Stochastic Programming: Modeling and Theory*, by A. Shapiro, D. Dentcheva, and A. Ruszczyński, Second edition, SIAM Publications, 2014.


## تشکر

از استادان و دانشجویانی که در تهیهٔ این نوشته همکاری کردند، تشکر می‌کنم.

# ریاضی عمومی ۱ در ترمی که گذشت . یک رویکرد شخصی ...

سامان حبیبی اصفهانی

درس ریاضی عمومی۱ نه تنها برای دانشجویان ورودی ۹۳ بلکه برای من نیز تجربه متفاوتی محسوب می‌شد. در ترمی‌که گذشت ارائه درس ریاضی یک بر اساس فعالیت خود دانشجویان (فعالیت محور) طرح ریزی شده بود تا ارائه یک‌طرفه از استاد. در واقع در شروع هر جلسه استاد درس مجموعه‌ای از سؤال‌ها که ترتیب و هدف مشخصی داشتند را در کلاس مطرح می‌کرد و به دانشجویان زمان کافی برای تفکر و درگیر شدن با سؤال‌ها را می‌داد. سؤال‌هایی که قرار بود در نهایت مفهوم مشخصی را به دانشجو منتقل کنند.

سؤال‌ها به نوعی طراحی شده بودند که دانشجو ابزار کافی برای حل کردن آن‌ها را داشته باشد. خود استاد نیز به میان دانشجویان رفته و بر روند حل سؤالات توسط دانشجویان نظارت نموده و با راهنمایی‌های فردبه‌فرد آن‌ها را در روند حل مسأله و نزدیک شدن به مفهوم نهایی کمک می‌کرد . اما بدیهی است که نظارت بر عملکرد و پاسخ دادن به سؤال‌های ۲۰۰ دانشجو از توان یک نفر خارج بود.

درست اینجاست که نقش من آغاز می‌شود. در قالب یک کمک به استاد سر کلاس. در واقع همواره روند آموزش و این‌که انسان‌ها چطور " می‌فهمند " برای من فرایندی جالب و اسرار آمیز بوده . برای مثال این‌که دانش‌آموزان ( انسان‌ها ) چطور مفهوم "بی‌نهایت" را درک می‌کنند ( آیا اصلا درک می‌کنند؟ ) یا چطور " شهود هندسی" بدست می‌آورند همواره من را مشغول خودش کرده . بارها به عنوان معلم مدرسه روش‌های مختلفی را برای انتقال مفاهیم امتحان کردم ( گاهی سعی کردم شهودی‌تر درس بدم و گاهی فرمال‌تر و ...) و هر بار سعی در برآورد نتیجه داشتم به هدف مطالعه این‌که هر فعالیت آموزشی چه تاثیری در روند یادگیری دارد و این‌که چه اتفاقی برای ذهن‌های یادگیرنده رخ می‌دهد . درست مثل انجام یک آزمایش !

از همین جهت بود که پیشنهاد دکتر علیشاهی و دکتر میرصادقی برای همراه شدن در این آزمایش آموزشی برای من بسیار جذاب بود.[۱] کلاس‌های۲۰۰ نفره و گفتگوهای رودررو و کمک کردن به تعداد زیادی دانشجو برای بهتر فهمیدن ریاضیات درست چیزی بود که می‌توانست آزمایشگاه مناسبی برای من هم باشد .

زمانی که استاد به دانشجویان وقت می‌داد تا مسائل را حل کنند؛ من به نوشته‌های دانشجوها سرک می‌کشیدم و با آن‌ها در مورد ایده‌هایشان بحث می‌کردم. سعی می‌کردم به آن‌ها خط فکری ندهم، فقط کمک کنم تا خودشان مسیر درست را پیدا کنند.

مهم‌تر از آن ، همگی سعی می‌کردیم که این را به دانشجوها نشان دهیم که چطور باید استدلال کنند نه این که سعی کنیم یک مسأله خاص را برایشان حل کنیم. در نهایت بعد از گذشت زمانی خود استاد سؤال‌ها را حل کرده و دسته جدیدی از مسائل را مطرح می‌کرد. در واقع در ترمی که گذشت این مسیر حرکت درس ریاضی۱ بود؛ از مفهوم عدد تا انتهای کتاب دکتر شهشهانی.

همان‌طور که گفتم، برای ما هم این زمان مناسبی بود تا بفهمیم هر کسی چطور داره "یاد می‌گیرد" واین حتی مؤثر بود در روند و استراتژی کلاس‌های آینده . شاید در طول ترم تا حدودی تاکید بر دقت آنالیزی اثبات‌ها کم شد آن هم به این دلیل که از روح کلاس فعالیت‌محور و مسأله‌گرا دور بود و دانشجوها را هم به زحمت می‌انداخت و شاید در نهایت کلاس هر چه که جلوتر رفت، به فعالیت‌های عددی و محاسباتی آلوده‌تر شد.

به طور کلی، به نظر می‌رسید دو مانع بزرگ بر سر راه آموزش اکثر دانشجوها وجود داشت . یکی تفکر انتزاعی که همان اول راه و در برخورد با اعداد مختلط شکل گرفت . دانشجوها به شدت به دنبال این بودند که مثل بقیه اعدادی که پیشتر با اون‌ها روبه‌رو شده بودند، در طبیعت مصداقی برایشان پیدا کنند (مثلاً به دنبال پاره‌خطی به طول $i$ ).

مشکل اساسی دیگر دقت ریاضی بود که اغلب در اثبات‌ها و

[۱] کلاس‌های دکتر رزوان و دکتر مقدسی نیز بر طبق همین الگوی فعالیت‌محور برگزار شد.

استدلال کردن‌ها خودش را نشان می‌داد. در واقع درک این‌که کِی یک ادعا به استدلال محکم‌تری احتیاج دارد و کِی گزاره گفته شده به لحاظ ریاضی واضح است یک گره جدی بود.

مشکل اول تقریبا حل نشد. جمع کثیری از دانشجوها از "عدد بودن $i$" سر باز زدند و از آنجایی که بعد از اعداد مختلط بخش دیگه‌ای از این جهت ( انتزاع ) چالش جدی‌ای نداشت زمان دیگری برای مواجه شدن با این مشکل پیش نیامد . اما مشکل دوم یعنی دقت ریاضی در طول ترم همراه ما بود . در این مورد معمولاً مطرح کردن مثال نقض برای گزاره‌های ادعا شده از طرف دانشجوها جوب‌های استدلال‌هایشان را به آن‌ها نشان می‌داد. حتی با کمی بحث می‌شد متقاعدشان کرد که شاید حرفت و شهودت درست باشه، ولی هنوز یک اثبات ریاضی کامل ارائه ندادی. شاید بتوان گفت در طول ترم این مشکل به مرور حل شد. به نظر می‌رسید در پایان‌ترم کم دانشجویی بپرسد :

'این رو هم باید ثابت کنیم یا بدیهیه؟'

سؤالی که در جلسات اول سؤال مُد محسوب می‌شد. البته شاید هنوز هم بعضی از دانشجوها شک داشته باشند که صفر حدی وجود دارد یا نه !

در نهایت گمان می‌کنم که این کلاس به یک هدف دیگر هم رسید و آن هم این‌که به اکثر دانشجوها یاد داد که برای حل مسائل ریاضی باید فکر کرد، زحمت کشید و با آن‌ها درگیر شد.

# مسأله

**مسأله ۱.** *اگر $G$ گروهی از مرتبه‌ی $n > 1$ باشد و $Aut(G)$ گروهِ خودریختی‌های $G$؛ ثابت کنید $| Aut(G) | \le \prod_{i=0}^{k}(n-2^i)$ که در آن $k = \lfloor \log_2(n-1) \rfloor$.*

**مسأله ۲.** *اگر $R$ حلقه‌ای جابجایی، یک‌دار و ناشمارا باشد به طوری که برای هر ایده‌آلِ $I \neq 0$ حلقه‌ی خارج‌قسمتیِ $\frac{R}{I}$ شماراست؛ نشان دهید $R$ باید حوزه‌ی صحیح باشد.*

**مسأله ۳.** *$R$ حلقه‌ای جابجایی، یک‌دار و نوتری است. ثابت کنید برای هر عدد طبیعیِ $n$ تعداد ایده‌آل‌های اولِ $\mathfrak{p}$ از $R$ با $|\frac{R}{\mathfrak{p}}| \le n$ متناهی است.*

**مسأله ۴.** *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را با ضابطه‌ی زیر تعریف کنید:*

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{اگر } x \le e \\ x f(\ln x) & \text{اگر } x > e \end{cases}$$

*آیا $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ همگراست؟*

**مسأله ۵.** *$K(x,y)$ تابعی پیوسته و مثبت بر ناحیه‌ی $0 \le x, y \le 1$ است و $f(x)$ و $g(x)$ توابعی پیوسته و مثبت بر $0 \le x \le 1$. فرض کنید برای هر $0 \le x \le 1$ داشته باشیم:*

$$\int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y = f(x) \qquad \int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y = g(x)$$

*ثابت کنید $f(x) = g(x)$ برای هر $0 \le x \le 1$.*

**مسأله ۶.** *فرض کنید $C$ دایره‌ی $| z | = 2$ در صفحه‌ی مختلط باشد که در جهت مثبت جهت‌دهی شده است. حاصلِ انتگرالِ $\int_C \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{dz}$ را بیابید که در آن شاخه‌ای از رادیکال در نظر گرفته شده که $\sqrt{2^2-1} > 0$.*

**مسأله ۷.** *$Y$ بازی است سره از فضای موضعاً همبند و همبندِ $X$ با این ویژگی که بستارِ هیچ مؤلفه‌ی همبندی‌ای از $X - Y$ فشرده نیست. ثابت کنید حکم مشابهی برای هر مؤلفه‌ی همبندیِ $Y$ هم معتبر است: مکملِ یک مؤلفه‌ی همبندی از $Y$ (مکمل در $X$) نمی‌تواند دارای مؤلفه‌ی همبندی‌ای با بستار فشرده باشد.*

**مسأله ۸.** *نگاشتِ $\mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی*

$$(z_1, z_2, w) \mapsto w^2 - z_1.z_2$$

*در نظر بگیرید. اگر $S$ مجموعه‌ی صفرهای آن باشد، نشان دهید $S - \{(0,0,0)\}$ همبند ساده نیست.*

**مسأله ۹.** *$A$ ماتریسی $n \times n$ با درایه‌های در میدانِ $F$ است. نشان دهید ماتریسِ $B$ از همان ابعاد و با درایه‌های در همان میدان موجود است به قسمی که $AB$ خودتوان است.*

**مسأله ۱۰.** *فرض کنید $\| . \|$ یک نرم بر $\mathbb{C}^n$ باشد و نرم عملگریِ اعضای $\mathrm{M_n}(\mathbb{C})$ را به صورتِ زیر تعریف کنید:*

$$||| A ||| = \sup_{||x|| \le 1} \| Ax \|$$

*فرض کنید $a < 2$ و $G$ زیرگروهی از $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ باشد به طوری که*

$$\forall A \in G : ||| A - I_n ||| \le a$$

*ثابت کنید $G$ متناهی است.*

## ثابت یا رد کنید

در سال‌های گذشته مجله‌ی ریاضی شریف قسمتی داشت تحت عنوانِ مسائلِ کوئیکی (quickie)؛ مسائلی جالب که راه‌حل‌هایی کوتاه با ایده‌هایی هوشمندانه داشتند. هدفِ ستونِ «ثابت یا رد کنید» احیای چنین قسمتی از مجله است. آیا تاکنون پیش آمده که در صحتِ گزاره‌ای تردید داشته باشید ولی بعداً موفق به یافتنِ اثباتش یا مثال نقضی برای آن شوید؟! این ستون جای چنین گزاره‌هایی است!

**۱.** *اگر $(X, \|\ .\ \|)$ یک فضای نرم‌دارِ حقیقی باشد و $Y$ زیرفضایی با نقص بعدِ متناهی از آن که با نرم القایی باناخ است؛ آنگاه $X$ نیز باید باناخ باشد.*

**۲.** *اگر $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تحلیلی باشد، شعاع همگرایی بسط تیلور آن در حداقل یک نقطه بی‌نهایت است.*

**۳.** *هر زیرمیدانِ $F$ از $\mathbb{C}$ با ۲ $= [\mathbb{C} : F]$ بر $\mathbb{R}$ منطبق است.*

**۴.** *هر گروهی که گروهِ خودریختی‌هایش پوچ‌توان باشد خود پوچ‌توان است.*

**۵.** *آیا می‌توان فضای اقلیدسی را با خط‌هایی که دوبه‌دو متنافرند پوشاند؟*

مسأله‌های پیشنهادی خود را به همراه راه‌حل برای ما بفرستید:

mathematicsjournal@gmail.com

# پاسخ مسأله‌ها

**پاسخ ۱.** دنباله‌ای از عناصرِ $G$ را به شیوه‌ای که در ادامه می‌آید انتخاب می‌کنیم: $g_1 \in G-\{e\}$ را دلخواه بگیرید. اگر $G=\langle g_1\rangle$ فرایند به اتمام می‌رسد. در غیر این صورت یک $g_2 \in G-\langle g_1\rangle$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. در حالت کلی وقتی $g_1,\dots,g_i$ انتخاب شده باشند؛ اگر این عناصر گروه را تولید کنند کار تمام می‌شود و در غیر این صورت $g_{i+1}$ را عنصری دلخواه از $G-\langle g_1,\dots,g_i\rangle$ می‌گیریم. با توجه به متناهی بودنِ گروه، این فرایند جایی به اتمام می‌رسد و دنباله‌ی $g_1,\dots,g_t$ از اعضای $G$ را خواهیم داشت با این خاصیت که:

$$(*)\quad G=\langle g_1,\dots,g_t\rangle \quad \forall 1\le i<t : g_{i+1}\notin \langle g_1,\dots,g_i\rangle$$

ویژگیِ دوم در بالا لازم می‌دارد که:

$$\forall 1\le i<t : g_{i+1}\langle g_1,\dots,g_i\rangle \cap \langle g_1,\dots,g_i\rangle=\emptyset$$
$$\Rightarrow |\langle g_1,\dots,g_i,g_{i+1}\rangle| \ge 2\,|\langle g_1,\dots,g_i\rangle|$$
$$\Rightarrow (**)\quad \forall 1\le i\le t : |\langle g_1,\dots,g_i\rangle| \ge 2^i$$

علی‌الخصوص وقتی در $(**)$ $i=t$ قرار داده شود، می‌بینیم که $t-1\le k \Leftarrow 2^t\le n$. اکنون یک خودریختیِ گروهیِ $f:G\to G$ اولاً با اثرش بر $g_i$ها مشخص می‌شود و ثانیاً $g_1,\dots,g_t$ با خواصِ توصیف شده در $(*)$ را به دنباله‌ی دیگری از همین دست در $G$ می‌برد. پس مقدارِ $f$ در $g_i$ها باید طوری انتخاب گردد که

$$\forall 1\le i<t : f(g_{i+1})\notin\langle f(g_1),\dots,f(g_i)\rangle$$

و درنتیجه لازم است ویژگی‌ای مشابهِ $(**)$ برقرار باشد:

$$\forall 1\le i\le t : |\langle f(g_1),\dots,f(g_i)\rangle| \ge 2^i$$

حال دو مشاهده‌ی اخیر نتیجه می‌دهند که با فرضِ معین بودنِ $f(g_1),\dots,f(g_i)$ به ازای یک $1\le i<t$، برای تعیینِ $f(g_{i+1})$ حداکثر $n-2^i$ روش داریم. وقتی $i=0$، باز هم این حرف معتبر است چرا که $g_1\neq e$ بود و لذا باید تحتِ $f$ به عضوی دیگر از همین دست در $G$ برود و برای تعیینِ عضوی غیرهمانی $n-1$ روش داریم. پس برای تعیینِ اثرِ $f$ بر $g_i$ها که به معین شدنِ $f$ می‌انجامد، حداکثر

$$\prod_{i=0}^{t-1}(n-2^i)\le\prod_{i=0}^{k}(n-2^i)$$

راه داریم که کرانِ مورد نظر برای تعداد اعضای $Aut(G)$ را بدست می‌دهد.

**پاسخ ۲.** کافی است نشان دهیم که به ازای هر $a\in R-\{0\}$ ایده‌آلِ $I:=\{x\in R \mid ax=0\}$ صفر است. اگر چنین نباشد، از فرضِ مسأله $\frac{R}{I}$ شماراست. از طرف دیگر قضیه‌ی اولِ یکریختی نشان می‌دهد که $\frac{R}{I}$ به عنوانِ $R$-مدول یکریخت است با $aR$. علی‌الخصوص کاردینالشان یکی است و $aR$ هم به ناچار باید شمارا باشد. ولی چون $a$ ناصفر بود، ایده‌آلِ $aR$ (با توجه به یک‌دار بودنِ حلقه) ناصفر است و با به کار بردنِ مجددِ فرض می‌بینیم که $\frac{R}{aR}$ هم شماراست. این به همراهِ شمارا بودنِ $aR$، شمارا بودنِ $R$ را نتیجه می‌دهد که تناقض است.

**پاسخ ۳.** کافی است نشان دهیم که تعداد ایده‌آل‌های اولِ $\mathfrak{p}$ با $|\frac{R}{\mathfrak{p}}|=n$ متناهی است. توجه کنید که تحتِ این شرایط $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ یک حوزه‌ی صحیحِ متناهی و لذا یک میدانِ متناهی می‌شود. پس در واقع کافی است مواردی را در نظر بگیریم که $n$ توانی از عددی اول و $\mathfrak{p}$ ایده‌آلی ماکسیمال باشند به قسمی که میدانِ $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ متناهی و $n$ عضوی گردد. با تثبیتِ $n$ -که توانی از یک عدد اول باشد- اثبات خواهیم نمود تعدادِ $\mathfrak{p}$های با این ویژگی متناهی است. توجه کنید که می‌دانیم در یک میدانِ $n$ عضوی، هر عنصر بر توانِ $n$اُم خود منطبق است. پس هر ایده‌آل ماکسیمالِ $\mathfrak{p}$ از $R$ که به ازای آن $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ یک میدان متناهیِ $n$ عضوی باشد، باید ایده‌آلِ تولید شده با عناصرِ $r^n-r$ را دربرداشته باشد. پس مسأله تقلیل می‌یابد به این‌که تعدادِ ایده‌آل‌های ماکسیمالِ

شاملِ $R$

$$I := \langle r^n - r \mid r \in R \rangle$$

متناهی است یا به بیان دیگر حلقه‌ی خارج‌قسمتیِ $S := \frac{R}{I}$ تنها متناهی ایده‌آل ماکسیمال دارد. روشی که برای نشان دادنِ این امر به کار می‌بریم، اثباتِ آن است که بعد کرولِ این حلقه صفر است یا به عبارت دیگر هر ایده‌آل اول ماکسیمال است. تحت چنین شرایطی ایده‌آل‌های ماکسیمالِ $S$ همان ایده‌آل‌های اولِ مینیمال می‌شوند و می‌دانیم در یک حلقه‌ی نوتری تعدادِ ایده‌آل‌های اولِ مینیمال متناهی است و لذا حل به اتمام خواهد رسید. اینجا $S$ خارج‌قسمتی از حلقه‌ی نوتریِ $R$ و در نتیجه خود نوتری است و به علاوه از شیوه‌ی تعریفش: $\forall x \in S : x^n = x$. اگر ادعای مطروحه در بالا صحیح نباشد دو ایده‌آل اولِ متمایز و تودرتو به شکلِ $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ از $S$ داریم. یک $x \in \mathfrak{q}_2 - \mathfrak{q}_1$ انتخاب کنید. چون $x^n = x$ داریم $0 = x^{n-1}(x-1) \in \mathfrak{q}_1$. لذا چون $\mathfrak{q}_1$ اول بود و $x \notin \mathfrak{q}_1$، باید $x - 1 \in \mathfrak{q}_1$ و به تبعِ آن $x - 1 \in \mathfrak{q}_2$. ولی $\mathfrak{q}_2$ عنصرِ $x$ را هم شامل می‌شد و در نتیجه نمی‌تواند سره باشد که با اول بودنِ آن در تناقض است [1].

**پاسخ ۴.** ابتدا به منظورِ راحتی در نمادگذاری قرار می‌دهیم:

$$a_k := (\underbrace{\exp \circ \cdots \circ \exp}_{k\text{بار}})(1)$$

به عنوان مثال $a_0 = 1, a_1 = e, a_2 = e^e, \cdots$. توجه کنید که $f$ اکیداً صعودی است زیرا با یک استقرای بسیار ساده:

$$\forall k \geq 0, x \in [a_k, a_{k+1}] : f(x) = x \prod_{i=1}^{k} (\underbrace{\ln \circ \cdots \circ \ln}_{i\text{بار}})(x)$$

لذا به کمکِ آزمون انتگرال مسأله تبدیل می‌گردد به مطالعه‌ی واگرایی یا همگراییِ $\int_1^\infty \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x$. ولی این انتگرال (با توجه $f \geq 0$) مساوی است با $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x$. از طرف دیگر اگر $a_1 = e \leq x$ با توجه به مفروضات $f(x) = xf(\ln x)$ و لذا با تغییر متغیرِ $y := \ln x$، به ازای هر $k \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت:

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x = \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{xf(\ln x)} \mathrm{d}x = \int_{\ln a_k}^{\ln a_{k+1}} \frac{1}{f(y)} \mathrm{d}y$$
$$= \int_{a_{k-1}}^{a_k} \frac{1}{f(y)} \mathrm{d}y$$

استفاده‌ی مکرر از این تساوی نتیجه می‌دهد:

$$\forall k \geq 0 : \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x = \int_{a_0}^{a_1} \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x = \int_1^e \frac{1}{x} \mathrm{d}x = 1$$

لذا $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x$ و به تبع آن $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n)}$ واگراست.

**پاسخ ۵.** $\frac{f}{g}$ تابعی پیوسته و مثبت بر بازه‌ی $[0,1]$ است. اعداد مثبتِ $M$ و $m$ را به ترتیب ماکسیمم و مینیمم مطلقِ آن بگیرید. پس:

$$(*) \quad \forall y \in [0,1] : mg(y) \leq f(y) \leq Mg(y)$$

با تثبیتِ یک $x \in [0,1]$، ضربِ نامساویِ فوق در $K(x,y) > 0$ و انتگرال‌گیری بر بازه‌ی $[0,1]$، مفروضات مسأله نتیجه می‌دهند:

$$mf(x) = \int_0^1 mg(y)K(x,y)\mathrm{d}y \leq \int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y = g(x)$$
$$\leq \int_0^1 Mg(y)K(x,y)\mathrm{d}y = Mf(x) \Rightarrow (**) \frac{1}{M} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \frac{1}{m}$$

ولی اگر نامساوی‌های ظاهر شده در $(*)$ در حداقل یک نقطه اکید باشند، نامساوی‌های نوشته شده در $(**)$ -که به ازای هر $x \in [0,1]$ دلخواه برقرارند- هم این‌چنین خواهند بود. اما تنها در شرایطی همواره در حداقل یکی از نامساوی‌های $(*)$ تساوی داریم که $\frac{f}{g}$ ثابت باشد. لذا با فرضِ ثابت نبودنِ تابعِ مذکور، $(**)$ در هر $x$ به طور اکید برقرار است:

$$\forall x \in [0,1] : \frac{1}{M} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{1}{m}$$

پس با توجه به اینکه تابع پیوسته‌ی $\frac{f}{g} : [0,1] \to [0,\infty)$ در نقاطی از دامنه، ماکسیمم مطلقِ $M$ و مینیمم مطلقِ $m$ را می‌پذیرد:

$$\frac{1}{M} < m \leq M < \frac{1}{m}$$

که منجر می‌شوند به توأماً $Mm > 1$ و $Mm < 1$ که تناقض است. پس $\frac{f}{g}$ باید ثابت باشد؛ یعنی، با توجه به مثبت بودنِ این توابع $c > 0$ را داریم با این ویژگی که همواره $f(y) = cg(y)$. قرار دادنِ این در فرمول‌های داده شده در مسأله نتیجه می‌دهد:

$$\frac{1}{c} = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\int_0^1 f(y)K(x,y)\mathrm{d}y}{\int_0^1 g(y)K(x,y)\mathrm{d}y} = c$$

پس $c = 1$ و $f$ منطبق است بر $g$.

**پاسخ ۶.** با توجه به اینکه شاخه‌ی $\sqrt{z^2 - 1}$ تنها بر $\mathbb{C} - [-1,1]$ تعریف شده، تکینگی‌هایش منفرد نیستند و نمی‌توان به منظور محاسبه‌ی انتگرال از قضیه‌ی مانده استفاده نمود. ایده‌ای که به کار می‌بریم آن است که انتگرال را بر کره‌ی ریمان $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ می‌گیریم به این شیوه که $\sqrt{z^2 - 1}\mathrm{d}z$ ۱-فرمی مرومورفیک بر کره‌ی ریمان در نظر گرفته می‌شود. سودِ این کار آن است که خمِ $|z| = 2$ بر کره‌ی ریمان علاوه بر مرزِ ناحیه‌ی $|z| \leq 2$، مرزِ ناحیه‌ی $\{|z| \geq 2\} \cup \{\infty\}$ هم هست و بر ناحیه‌ی اخیر $\sqrt{z^2 - 1}\mathrm{d}z$ تنها

[1] با همین استدلال می‌توان نشان داد یک حلقه‌ی جابجایی، یک‌دار و نوتری با این ویژگی که به ازای هر عنصرِ $x$ عدد طبیعیِ $n(x) \geq 2$ با $x^{n(x)} = x$ موجود باشد؛ از بعد کرولِ صفر است. قضیه‌ای استاندارد در جبر جابجایی بیان می‌کند هر حلقه‌ی نوتریِ صفربعدی آرتینی است. سپس در موردِ متناهی بودنِ تعداد ایده‌آل‌های ماکسیمال می‌توان این‌گونه هم استدلال کرد که یک حلقه‌ی آرتینی تنها متناهی ایده‌آل ماکسیمال دارد زیرا ضربِ تعدادی متناهی حلقه‌ی آرتینیِ موضعی است

یک تکینگیِ منفرد در نقطه‌ی $\infty$ دارد و لذا قضیه‌ی مانده قابل اعمال است. البته باید توجه کرد جهت‌دهیِ $|z|=2$ به عنوانِ مرزِ این نواحی متفاوت است. اکنون داریم:

$$\int_C \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}z = -2\pi i.\mathrm{Res}_{z=\infty}(\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}z)$$

بر ناحیه‌ی $\{|z|\geq 2\}\cup\{\infty\}$ مختصاتِ $w=\frac{1}{z}$ را داریم که این ناحیه را به گوی به شعاع $\frac{1}{2}$ حول مبدأ می‌برد. باید ۱-فرمِ مرومورفیکِ $(\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}z)$ را بر این ناحیه به شکلِ $f(w)\mathrm{d}w$ نوشت و سپس مانده‌ی $f(w)$ را در $w=0$ حساب کرد. با توجه به $w=\frac{1}{z}$:

$$\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}z = \sqrt{\frac{1}{w^2}-1}\left(\frac{-\mathrm{d}w}{w^2}\right) = -\frac{\sqrt{1-w^2}}{w^3}\mathrm{d}w$$

و در بالا شرطِ مثبت بودنِ $\sqrt{z^2-1}$ در $z=2$ در صورت مسأله تبدیل می‌شود به مثبت بودنِ $\sqrt{1-w^2}$ در $w=\frac{1}{2}$. برای این شاخه بسط تیلور حول مبدأ به شکل زیر است:

$$\sqrt{1-w^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n w^{2n} \qquad |w|<1$$

پس:

$$\mathrm{Res}_{w=0}\frac{\sqrt{1-w^2}}{w^3} = \binom{\frac{1}{2}}{1}(-1) = -\frac{1}{2}$$

و در نتیجه:

$$\int_C \sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}z = -2\pi i.\mathrm{Res}_{z=\infty}(\sqrt{z^2-1}\,\mathrm{d}z)$$
$$= -2\pi i.\mathrm{Res}_{w=0}\left(-\frac{\sqrt{1-w^2}}{w^3}\right) = -\pi i$$

**پاسخ ۷.** $\{C_j\}_{j\in J}$ و $\{Y_i\}_{i\in I}$ را مؤلفه‌های همبندی به ترتیب $Y$ و $X-Y$ بگیرید. پس هر $Y_i$ در $Y$ و هر $C_j$ در $X-Y$ بسته‌اند، $Y_i$ها دوبه‌دو مجزایند و همین‌طور $C_j$ها. به علاوه چون $X$ موضعاً همبند بود هر $Y_i$ در $X$ باز است. با تثبیت یک $i_0\in I$ نشان می‌دهیم $X-Y_{i_0}$ با زیرمجموعه‌هایی همبند که بستارِ هیچ‌یک فشرده نیست پوشانده می‌شود و این، حکمِ مطلوب را بدست خواهد داد: هر مؤلفه‌ی همبندی از $X-Y_{i_0}$ باید شاملِ یکی از زیرمجموعه‌های همبندِ مذکور باشد و لاجرم همچون آن زیرمجموعه‌ی همبند، بستارِ مؤلفه‌ی همبندی مورد نظر از $X-Y_{i_0}$ فشرده نیست. برای هر $i\in I-\{i_0\}$، $Y_i$ بازِ $Y_{i_0}$ را قطع نمی‌کند. لذا $\bar{Y}_i\subseteq X-Y_{i_0}$. سپس ادعا می‌کنیم $\bar{Y}_i$ باید یکی از $C_j$ها را قطع کند. در غیر این صورت با توجه به $X-Y=\cup_{j\in J}C_j$ باید $\bar{Y}_i\subseteq Y$. ولی چون $Y_i$ در $Y$ بسته بود این نشان می‌دهد $\bar{Y}_i=Y_i$؛ یعنی بازِ ناتهی و سره‌ی $Y_i$ از $X$، بسته هم هست که با همبند بودنِ $X$ در تناقض است. لذا نشان دادیم که برای هر $i\in I-\{i_0\}$، $f(i)\in J$ موجود است به قسمی که $\bar{Y}_i\cap C_{f(i)}\neq\emptyset$. حال چون $\bar{Y}_i$ (با استفاده از همبندیِ $Y_i$) و $C_{f(i)}$ همبند بودند، $\bar{Y}_i\cup C_{f(i)}$ هم همبند می‌شود. از طرف دیگر با توجه به این‌که $Y_i$ها $Y$ و $C_j$ها $X-Y$ را افراز می‌کردند و $\bar{Y}_i$ به ازای هر $i\in I-\{i_0\}$ مشمول در $X-Y_{i_0}$ بود؛ می‌توان نوشت:

$$X-Y_{i_0} = (Y-Y_{i_0})\cup(X-Y) = (\cup_{i\in I-\{i_0\}}Y_i)\cup(\cup_{j\in J}C_j)$$
$$= \big(\cup_{i\in I-\{i_0\}}\bar{Y}_i\cup C_{f(i)}\big)\cup(\cup_{j\in J}C_j)$$

از آنچه که بیان شد هریک از زیرمجموعه‌های ظاهر شده در سمت راستِ تساوی فوق همبندند. ولی هیچ‌کدام دارای بستارِ فشرده نیستند زیرا هریک یکی از $C_j$ها که مؤلفه‌ی همبندی‌ای از $X-Y$ بود را دربردارند و $\bar{C}_j$ طبق فرض فشرده نبود. این همان پوششی است که در پی‌اش بودیم.

**پاسخ ۸. راه‌حل اول.** از قضیه‌ی ون‌کمپن [2] استفاده می‌کنیم. پوشش باز زیر از $S-\{(0,0,0)\}$ را در نظر بگیرید:

$$U := S-\{(0,\lambda,0)\mid\lambda\in\mathbb{C}\}$$
$$= \{(z_1,z_2,w)\in\mathbb{C}^3 \mid z_1z_2=w^2, z_1\neq 0\}$$
$$V := S-\{(\lambda,0,0)\mid\lambda\in\mathbb{C}\}$$
$$= \{(z_1,z_2,w)\in\mathbb{C}^3 \mid z_1z_2=w^2, z_2\neq 0\}$$

هردوی از این بازها همیمورف هستند با $(\mathbb{C}-\{0\})\times\mathbb{C}$ تحت همیمورفیسم‌هایی که $(z_1,z_2,w)\in U$ را به $(z_1,\frac{w}{z_1})$ و $(z_1,z_2,w)\in V$ را به $(z_2,\frac{w}{z_2})$ می‌برند. لذا هردو همبند مسیری هستند و همچنین با تحدیدِ این نگاشت‌ها به اشتراکِ $U$ و $V$ به دو همیمورفیسمِ

$$(*)\quad U\cap V\to(\mathbb{C}-\{0\})^2$$

می‌رسیم. پس $U$، $V$ و $U\cap V$ همبند مسیری هستند (بنابراین می‌توان قضیه‌ی ون‌کمپن را به کار برد) و به علاوه

$$\pi_1(U\cap V)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \quad \pi_1(U),\pi_1(V)\cong\mathbb{Z}$$

می‌توان مولدهایی برای آنها ارائه نمود: دایره‌های $\{1\}\times\{|\lambda|=1\}$ و $\{|\lambda|=1\}\times\{1\}$ در $(\mathbb{C}-\{0\})^2$ را در نظر می‌گیریم که هرکدام یک بار در جهتِ مثلثاتی پیموده شده‌اند. خم اول مولدی از

$$\pi_1\big((\mathbb{C}-\{0\})\times\mathbb{C}\big)\cong\mathbb{Z}$$

معین می‌کند در حالی که دومی در آن پوچ‌هموتوپ است و این دو خم با هم پایه‌ای برای گروه آبلی آزادِ $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\cong\pi_1\big((\mathbb{C}-\{0\})^2\big)$ بدست می‌دهند. تحتِ همیمورفیسمِ $U\to(\mathbb{C}-\{0\})\times\mathbb{C}$ که قبلاً معرفی شد و همچنین همیمورفیسمِ $(*)$ حاصل از تحدیدِ آن، این دو به ترتیب متناظرند با خم‌های بسته‌ی زیر در $U\cap V$:

$$(**)\quad\begin{cases}\alpha(t)=(e^{2\pi it},e^{2\pi it},e^{2\pi it}) & 0\leq t\leq 1\\ \beta(t)=(1,e^{4\pi it},e^{2\pi it}) & 0\leq t\leq 1\end{cases}$$

[2] Van Kampen's Theorem

پس کلاس هموتوپیِ $\alpha$ مولدی است از $\pi_1(U)\cong\mathbb{Z}$ و کلاس‌های هموتوپیِ $\alpha,\beta$ پایه‌ای برای $\pi_1(U\cap V)\cong\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ تعیین می‌کنند. همچنین تحتِ $(U\cap V\hookrightarrow U)_*:\pi_1(U\cap V)\to\pi_1(U)$ داریم $[\beta]\mapsto 0$. در ادامه باید $(U\cap V\hookrightarrow V)_*:\pi_1(U\cap V)\to\pi_1(V)$ را بررسی نمود. خم‌های بسته‌ی $\alpha$ و $\beta$ در $U\cap V$ تحتِ همیمورفیسمِ $V\to(\mathbb{C}-\{0\})\times\mathbb{C}$ که داشتیم، به خم‌های به ترتیب $t\in[0,1]\mapsto(e^{2\pi it},1)$ و $t\in[0,1]\mapsto(e^{4\pi it},e^{-2\pi it})$ تصویر می‌شوند. اولی مولدی است از $\pi_1((\mathbb{C}-\{0\})\times\mathbb{C})\cong\mathbb{Z}$ و دومی دو برابرِ این مولد است. در جمع‌بندیِ این موارد، $\pi_1(U\cap V)$ گروه آبلی آزاد با پایه‌ی $\{[\alpha],[\beta]\}$ است؛ تحتِ $\pi_1(U\cap V)\to\pi_1(U)$ القایی با شمول، $[\alpha]$ به مولدی از $\pi_1(U)\cong\mathbb{Z}$ می‌رود- که آن را $x$ می‌نامیم- و $[\beta]$ به صفر؛ در حالی که $\pi_1(U\cap V)\to\pi_1(V)$ القایی با شمول $[\alpha]$ را به یک مولد از $\pi_1(V)\cong\mathbb{Z}$ می‌برد- که آن را $y$ می‌نامیم- و $[\beta]$ را به دو برابرِ آن مولد. حال قضیه‌ی ون‌کمپن نتیجه می‌دهد $\pi_1(S-\{(0,0,0)\})$ خارج‌قسمتِ گروه آزاد با پایه‌ی $\{x,y\}$ است به زیرگروه نرمالی که کلماتِ $xy^{-1}$ و $y^2$ می‌سازند. از آنجا

$$\pi_1(S-\{(0,0,0)\})\cong\mathbb{Z}_2$$

و تصویرِ $y$ در این گروه بنیادی که عبارت است از کلاسی که $\alpha$ مشخص می‌کند، مولدی برای $\pi_1(S-\{(0,0,0)\})$ است. پس از آنجا که گروه بنیادی بدیهی نشد؛ می‌بینیم که این فضا همبند ساده نیست.

**راه‌حل دوم.** محاسبه‌ی گروه بنیادیِ $\pi_1(S-\{(0,0,0)\})$ به عنوانِ $\mathbb{Z}_2$ در راه‌حل قبلی، این ایده را به ذهن می‌رساند که شاید بتوان مسأله را از طریقِ ارائه‌ی صریحِ یک پوشش جهانیِ دولایه برای این فضا حل کرد. این کار با کمی تلاش امکان‌پذیر است:

$$(***)\begin{cases}\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}\to S-\{(0,0,0)\}\\(s,t)\mapsto(s^2,t^2,st)\end{cases}$$

به وضوح دو نقطه‌ی $\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}$ در یک تار[3] واقعند اگر و تنها اگر قرینه باشند. همچنین چون گرادیانِ $(s,t)\mapsto(s^2,t^2,st)$ در هیچ نقطه‌ای جز مبدأ صفر نمی‌شود، از قضیه‌ی تابع وارون، این نگاشت یک همیمورفیسمِ موضعی است. به وضوح سره هم هست زیرا تحتِ آن پیش‌تصویرِ یک زیرمجموعه‌ی کراندار، کراندار است.پس یک نگاشت پوششیِ دولایه می‌شود. توجه کنید که $\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}$ همبند ساده است: یک deformation retract دارد به کره‌ی واحدِ $S^3$ در فضای $\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$ و لذا همچون $S^3$ همبند ساده است. پس $(***)$ پوشش جهانیِ $S-\{(0,0,0)\}$ است و با توجه به دولایه بودنِ آن، گروه بنیادی مجدداً برابر با $\mathbb{Z}_2$ محاسبه می‌شود. توجه کنید که به کمکِ $(***)$ حتی می‌توان تعیین نمود که این فضا چیست: با در نظر گرفتنِ $S^3$ به صورت فوق، $\mathbb{C}^2-\{(0,0)\}$ با $S^3\times(0,\infty)$ یکی می‌شود و اعضای یک تار از این پوشش دقیقاً عبارتند از نقاطی که مؤلفه‌ی اولِ آنها نقاطِ روبرو به قطر در $S^3$ باشد. پس در واقع $S-\{(0,0,0)\}$ همیمورف است با $\mathbb{RP}^3\times\mathbb{R}$. راه‌حل را با این مشاهده به پایان می‌بریم: از آنچه درباره‌ی نگاشت‌های پوششی می‌دانیم، تحتِ $(***)$ هر خمی که دو سرش دو نقطه‌ی قرینه در $\mathbb{C}^2-\{(0,0,0)\}$ باشد؛ باید تصویر شود به مولدی از گروه بنیادی. به سادگی می‌توان دید خمِ $\alpha$ در $(**)$ چنین ویژگی‌ای دارد زیرا تصویرِ

$$t\in[0,1]\mapsto(e^{\pi it},e^{\pi it},e^{\pi it})\in\mathbb{C}^2-\{(0,0,0)\}$$

است که از $(1,1,1)$ شروع و به قرینه‌ی آن $(-1,-1,-1)$ ختم می‌شود. مجدداً همانند راه‌حلِ قبل می‌بینیم که $\alpha$ مولدی از $\pi_1(S-\{(0,0,0)\})$ را بدست می‌دهد.

**پاسخ ۹.** $A$ متناظرِ عملگرِ $\begin{cases}T:F^n\to F^n\\x\mapsto Ax\end{cases}$ است. کافی است ثابت کنیم یک عملگرِ $S$ بر $F^n$ موجود است به قسمی که $T\circ S$ خودتوان باشد یا معادلاً یک عملگرِ تصویر بر یک زیرفضا از $F^n$. آنگاه ماتریسِ نمایشِ $S$ در پایه‌ی استاندارد $F^n$ حائز خواص مطلوب خواهد بود. یک پایه برای $\ker(T)$ در نظر بگیرید و آن را به پایه‌ای برای $F^n$ گسترش دهید: پایه‌ی مرتبِ $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ از $F^n$ موجود است به قسمی که به ازای یک $0\le k\le n$ $\{v_1,\dots,v_k\}$ پایه‌ای است برای $\ker(T)$. لذا عناصرِ $T(v_i)$ $k<i\le n$ از $F^n$ مستقل خطی هستند. پس یک پایه‌ی مرتبِ

$$\{T(v_{k+1}),\dots,T(v_n),w_1,\dots,w_k\}$$

از $F^n$ وجود دارد. لذا می‌توان یک تبدیل خطیِ $S:F^n\to F^n$ با $T(v_i)\mapsto v_i$ به ازای هر $k<i\le n$ و $w_i\mapsto 0$ هرگاه $1\le i\le k$ در نظر گرفت. اکنون $T\circ S$ هر $w_i$ را به صفر و هر $T(v_i)$ را به خودش می‌برد. پس عملگرِ تصویر بر مؤلفه‌ی اول در تجزیه‌ی زیر است:

$$F^n=\langle\{T(v_{k+1}),\dots,T(v_n)\}\rangle\oplus\langle\{w_1,\dots,w_k\}\rangle$$

و راه‌حل تمام است.

**پاسخ ۱۰.** به منظورِ حل، ابتدا اثبات می‌کنیم $N$ای موجود است به قسمی که به ازای هر $A\in G$: $A^N=I_n$. $\lambda$ را یک مقدار ویژه از ماتریسِ $A$ واقع در این گروه بگیرید. ابتدا نشان‌می‌دهیم $\lambda$ ریشه‌ی واحد است. با جایگزینیِ $A$ با $A^{-1}$ در صورت لزوم، می‌توان

[3]fiber

فرض کرد $|\lambda| \geq ۱$. بدیهی است که اگر $\mu$ مقدار ویژه‌ای از یک $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ باشد آنگاه $|\mu| \leq ||| B |||$. پس چون به ازای هر $k \in \mathbb{N}$، $\lambda^k - ۱$ مقدار ویژه‌ای از $A^k - I_n$ است و به دلیلِ $A^k \in G$ باید طبقِ فرض $a \geq ||| A^k - I_n |||$؛ داریم:

$$(*) \quad \forall k \in \mathbb{N} : |\lambda^k - ۱| \leq a < ۲$$

ولی چون $|\lambda| \geq ۱$ بود و $\lim_{k\to\infty} |\lambda^k - ۱| = +\infty$ هرگاه $|\lambda| > ۱$، نتیجه می‌شود که $|\lambda| = ۱$. $\lambda$ را به صورت $\lambda = \mathrm{e}^{i\pi\alpha}$ بنویسید. اگر $\alpha$ گویا نباشد آنگاه دنباله‌ی $\{\lambda^k = \mathrm{e}^{i\pi k\alpha}\}_{k=۱}^{\infty}$ از اعضای دایره‌ی واحد چگال است و این با $(*)$ در تناقض است. پس $\alpha$ گویاست و این نشان می‌دهد $\lambda$ ریشه‌ی واحد است. تا اینجا دیدیم مقدار ویژه‌های اعضای $G$ همگی ریشه‌های واحدند. در مرحله‌ی بعد اثبات خواهیم کرد که همگی به ازای $N$ای ریشه‌ی $N$اُم واحد هستند. $X$ را مجموعه‌ی آن دسته از ریشه‌های اولیه‌ی $s$اُم واحد بگیرید که مقدار ویژه‌ی عضوی از $G$ هستند. می‌دانیم که توانی از یک ریشه‌ی اولیه‌ی $s$اُم واحد منطبق است بر $e^{\frac{۲\pi i}{s}}$. لذا با توجه به این‌که تحتِ به توان رساندنِ ماتریس‌ها، مقادیر ویژه به توان می‌رسند و $G$ تحتِ این عمل بسته است؛ می‌بینیم که اگر $s \in X$، آنگاه عضوی از $G$ مقدار ویژه‌ای مساوی با $e^{\frac{۲\pi i}{s}}$ دارد. مجدداً با به توان رساندن، عضوِ دیگری از $G$ مقدار ویژه‌ای مساوی با $e^{\frac{۲\pi i\lfloor \frac{s}{۲}\rfloor}{s}}$ خواهد داشت. ولی نامساویِ $(*)$ برای مقادیر ویژه‌ی اعضای $G$ را داریم و از آنجا $|e^{\frac{۲\pi i\lfloor \frac{s}{۲}\rfloor}{s}} - ۱| \leq a < ۲$. در حالی که:

$$\lim_{s\to\infty} |e^{\frac{۲\pi i\lfloor \frac{s}{۲}\rfloor}{s}} - ۱| = ۲$$

بنابراین می‌بینیم که $X$ باید کراندار باشد. از شیوه‌ی تعریفش اگر $M$ کران بالایی از آن باشد و $N := M!$ قرار داده شود؛ هر مقدار ویژه از اعضای $G$ یک ریشه‌ی $N$اُم واحد خواهد بود. تا اینجا نشان دادیم مقادیر ویژه‌ی هر $A \in G$ ریشه‌ی $N$اُم واحد هستند. پس اگر نشان دهیم $A^N$ قطری‌پذیر است، حکمِ مطلوب مبنی بر $\forall A \in G : A^N = I_n$ حاصل می‌شود. یک $A \in G$ را به دلخواه انتخاب کنید. به ازای یک $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$، $PA^NP^{-۱}$ در فرمِ ژردان است و از آنچه بیان گردید تنها مقدار ویژه‌ی آن یک است. یعنی داریم:

$$(**) \quad PA^NP^{-۱} = \begin{bmatrix} J_۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & J_۲ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & \cdots & J_r \end{bmatrix}$$

که هر $J_i$ یک بلوکِ ژردانِ $m_i \times m_i$ متناظرِ مقدار ویژه‌ی ۱ است:

$$J_i = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}$$

و $\sum_{i=۱}^{r} m_i = n$. قطری‌پذیر بودن معادل است با این‌که تمامیِ $m_i$ها یک هستند. نشان می‌دهیم اگر چنین نباشد واندازه‌ی یکی از بلوک‌های ژردان بیشتر از یک باشد:

$$\lim_{k\to\infty} ||| A^{Nk} - I_n ||| = +\infty$$

امری که با فرضِ مسأله در تناقض خواهد بود. توجه کنید که:

$$||| A^{Nk} - I_n ||| \geq \frac{۱}{||| P |||\,.\,||| P^{-۱} |||} ||| PA^{Nk}P^{-۱} - I_n |||$$

و بنابراین کافی است برای ماتریسی در $(**)$ در فرمِ ژردان ظاهر شده، حکمِ مشابهی ثابت نماییم. توجه کنید که از $(**)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, ۱ \leq i \leq r : ||| PA^{Nk}P^{-۱} - I_n ||| \geq ||| {J_i}^k - I_{m_i} |||$$

لازم به ذکر است که اینجا، در سمتِ راستِ نرمِ $\|\,.\,\|$ بر $\mathbb{C}^n$ به زیرفضای

$$\{(x_۱, x_۲, \ldots, x_n) \mid \forall s \leq \sum_{j=۱}^{i} m_j, \forall s > \sum_{j=۱}^{i+۱} m_j : x_s = ۰\}$$

تحدید شده و نرم عملگریِ متناظر در نظر گرفته شده است. بنابراین اثباتِ این حقیقت که برای یک بلوکِ ژردانِ

$$J = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & \cdots & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۱ & \cdots & ۰ \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}_{t \times t}$$

متناظرِ مقدار ویژه‌ی یک و از بعدِ $t \geq ۲$، داریم

$$(***) \quad \lim_{k\to\infty} ||| J^k - I_t |||' = +\infty$$

به ازای نرم عملگریِ $|||\,.\,|||'$ متناظرِ یک نرمِ دلخواه بر $\mathbb{C}^t$؛ گزاره‌ی مطلوب مبنی بر همانی بودنِ توانِ $N$اُم هر عضو از $G$ را بدست خواهد داد. بنابراین توجه خود را به اثباتِ $(***)$ معطوف می‌کنیم. در این تساوی نرمِ عملگری متناظرِ نرمی دلخواه بر $\mathbb{C}^t$ در نظر گرفته شده و از آنجا که نرم‌ها بر فضاهای متناهی‌البعد معادلند؛ بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان با نرم عملگریِ حاصل از نرمِ $\mathrm{L}^۱$ بر $\mathbb{C}^t$ کار کرد که به صورتِ زیر داده می‌شود:

$$\| (a_۱, \cdots, a_t) \|_{\mathrm{L}^۱} = |a_۱| + \cdots + |a_t|$$

*با یک محاسبه‌ی ساده می‌بینیم که اگر $k \geq t$ درایه‌ی $1t$ در $J^k$ برابر است با $\binom{k}{t-1}$. پس درایه‌ی اولِ $J^k e_t$، $\binom{k}{t-1}$ است ( $\{e_1, \cdots, e_t\}$ پایه‌ی استاندارد از $\mathbb{C}^t$.) و لذا چون $t \geq 2$ درایه‌ی اولِ $J^k e_t - e_t$ هم چنین خواهد بود. پس داریم:*

$$\forall k \geq t : \| (J^k - I_t)(e_t) \|_{L^1} \geq \binom{k}{t-1} = \binom{k}{t-1} \| e_t \|_{L^1}$$

$$\Rightarrow \forall k \geq t : ||| J^k - I_t |||' \geq \binom{k}{t-1}$$

ولی چون $t \geq 2$: $\lim_{k \to \infty} \binom{k}{t-1} = \infty$ که ترکیبش با نامساویِ فوق، حکمِ مطلوب در $(***)$ را نتیجه می‌دهد. پس بالاخره ثابت شد که $A^N = I_n$ به ازای هر $A \in G$ و $N$ای که پیشتر معرفی شد. از آنجا که چندجمله‌ایِ $x^N - 1$ در $\mathbb{C}$ ریشه‌ی مضاعف ندارد، این در وهله‌ی اول نشان می‌دهد که هر عنصر از $G$ قطری‌پذیر است و ثانیاً مقادیرِ ویژه‌اش باید ریشه‌های $N$اُمِ واحد باشد. لذا $\mathrm{tr}(A)$ ($\mathrm{tr}$ بیان‌گرِ تابعکِ تریس) وقتی $A$ بینِ عناصرِ $G$ تغییر می‌کند متناهی حالت به خود می‌گیرد زیرا جمعِ $n$تا از ریشه‌های $N$اُم واحد است و به علاوه مساوی با $n$ می‌شود اگر و تنها اگر همه‌ی مقادیر ویژه یک باشند؛ امری که با توجه به قطری‌پذیر بودن به معنای همانی بودنِ عنصرِ موردنظر از $G$ است. یعنی:

$(****)$ مجموعه‌ی $Y := \{\mathrm{tr}(A) \mid A \in G\}$ متناهی است برای هر $A \in G : \mathrm{tr}(A) = n \Leftrightarrow A = I_n$.

در نهایت باید نشان دهیم گروهِ $G$ با این خواص متناهی است.[۴] $G$ زیرگروهی از فضای مختلط و متناهی‌البعدِ $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ است و لذا می‌توان زیرمجموعه‌ی $\{A_1, \cdots, A_l\}$ را از آن برگزید به قسمی که هر عنصرِ دیگر از $G$ ترکیب خطی‌ای از $A_i$ها با ضرایبِ مختلط باشد. به کمکِ $(****)$ می‌توان نگاشتی به شرحِ زیر از $G$ به مجموعه‌ای متناهی تعریف کرد:

$$\begin{cases} G \to Y^l \\ A \mapsto \big(\mathrm{tr}(AA_1), \cdots, \mathrm{tr}(AA_l)\big) \end{cases}$$

اگر اثبات شود که نگاشتِ فوق یک‌به‌یک است، $G$ نیز باید همچون $Y^l$ متناهی باشد و حکم مطلوب حاصل می‌شود. فرض کنید $A, B \in G$ چنان باشند که $\forall 1 \leq i \leq l : \mathrm{tr}(AA_i) = \mathrm{tr}(BA_i)$. هدف، اثباتِ $A = B$است. از آنجا که تریس خطی است و هر عنصرِ $G$ ترکیب خطی‌ای از $A_i$هاست؛ خواهیم داشت $\mathrm{tr}(AC) = \mathrm{tr}(BC)$ به ازای هر $C \in G$. اکنون با قرار دادنِ $C = B^{-1}$ نتیجه می‌شود $\mathrm{tr}(AB^{-1}) = \mathrm{tr}(I_n) = n$ و لذا طبقِ $(****)$ باید $A = B \Leftarrow AB^{-1} = I_n$. این اثباتِ متناهی بودنِ $G$ را تمام می‌کند.

## ثابت یا رد کنید

**۱.** *پاسخ مثبت است. اگر بخواهیم حکم را با استقرا بر نقص بعدِ $Y$ در $X$ ثابت کنیم، می‌بینیم که مسأله تقلیل می‌یابد به پایه‌ی استقرا یعنی وقتی که $Y$ زیرفضایی بسته و با نقص بعدِ یک از فضای نرم‌دارِ $X$ باشد. قضیه ای استاندارد از آنالیز تابعی بیان می‌کند که تحت چنین شرایطی $Y$ هسته‌ی یک تابعکِ کراندارِ $f : X \to \mathbb{R}$ است. چون $f$ ناصفر است یک بردارِ $v \in X$ با $f(v) = 1$ موجود است. اکنون اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در $X$ باشد، به دلیلِ کرانداریِ $f$ دنباله‌ی $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ از اعدادِ حقیقی کوشی و لذا همگرا به عددی همچون $c$ است. پس دنباله‌ی $\{x_n - f(x_n).v\}_{n=1}^{\infty}$ از اعضای $Y = \ker f$ هم باید کوشی باشد. پس به دلیلِ باناخ بودنِ $Y$ به عضوی همچون $y$ از آن همگراست. اکنون $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ به $y + c.v$ همگرا خواهد شد.*

**۲.** *پاسخ منفی است. یک تابعِ هولومورف بر صفحه در نظر بگیرید که تنها یک تکینگی بر نقطه‌ای غیر واقع بر محور افقی داشته باشد. جزء حقیقیِ آن به تابعی تحلیلی بر محور حقیقی تحدید می‌گردد که شعاعِ همگراییِ بسط تیلورش در هر نقطه از محور با فاصله از تکینگیِ در نظر گرفته شده داده می‌شود. اگر نقطه‌ی $i$ را به عنوانِ تکینگی در نظر بگیریم، یک مثال از $f$ به شرح زیر خواهد بود:*

$$f(x) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-i}\right) = \frac{x}{x^2+1}$$

**۳.** *پاسخ منفی است. $\mathbb{C}/\mathbb{Q}$ را به عنوانِ یک توسیعِ متعالی[5] در نظر بگیرید. فرض کنید $T$ یک پایه‌ی متعالی[6] برای آن باشد. لذا $\mathbb{C}/\mathbb{Q}(T)$ توسیعی جبری است و بنابراین $\mathbb{C}$ بستار جبریِ $\mathbb{Q}(T)$ است. از آنجا اولاً نتیجه می‌شود که هر خودریختیِ میدانی از $\mathbb{Q}(T)$ به خودریختی‌ای از میدانِ $\mathbb{C}$ گسترش می‌یابد و ثانیاً چون بستار جبریِ یک میدان شمارا، خود شمارا است؛ $T$ باید ناشمارا باشد. از طرف دیگر اعضای پایه‌ی $T$ بر $\mathbb{Q}$ مستقل جبری هستند. لذا هر جایگشتی از عناصرِ $T$ خودریختی‌ای از $\mathbb{Q}(T)$ و به تبع آن طبق بحث بالا از $\mathbb{C}$ القا می‌کند. پس گروه خودریختی‌های میدانیِ $\mathbb{C}$ ناشماراست. هر عضوی از آن، $\mathbb{R}$ را به زیرمیدانی با اندیسِ دو از $\mathbb{C}$ می‌برد. اگر به ازای*

[۴] باید نشان دهیم یگ گروهِ ماتریسی که اعضای آن قطری‌پذیر و مقادیرِ ویژه‌ی اعضایش به ازای $N$ای ثابت ریشه‌های $N$اُمِ واحد باشند؛ متناهی است. استدلالی که در ادامه برای این گزاره در می‌آید، پیشتر در شماره‌های گذشته‌ی مجله‌ی ریاضی شریف ظاهر شده است. رجوع کنید به شماره‌ی سوم، حلِ سؤالاتِ مسابقه‌ی ریاضی دانشجویی شریف در سال ۱۳۹۰.

[5] transcendence extension
[6] transcendence basis

دو $\sigma_1, \sigma_2 \in Aut(\mathbb{C})$، داشته باشیم $\sigma_1(\mathbb{R}) = \sigma_2(\mathbb{R})$، آنگاه چون هر خودریختی از میدانِ $\mathbb{R}$ همانی است؛ $\sigma_1 \circ \sigma_2^{-1}$ خودریختی‌ای از $\mathbb{C}$ خواهد بود که بر $\mathbb{R}$ همانی است. یک چنین خودریختی‌ای از میدانِ $\mathbb{C}$ یا همانی است یا نگاشتِ مزدوج کردن. اکنون چون $Aut(\mathbb{C})$ ناشمارا بود می‌توان تعدادی ناشمارا از اعضای دوبه‌دو متمایزِ آن را برگزید به قسمی که هیچ دوتایی از آنها مزدوج نباشند. با توجه به موارد فوق تصویرِ $\mathbb{R}$ تحت آنها تعدادی ناشمارا مثال از زیرمیدان‌های با اندیس دو در $\mathbb{C}$ معین می‌کنند.

**۴.** پاسخ مثبت است. $G$ را گروهی بگیرید که برای آن $Aut(G)$ پوچ‌توان باشد. می‌دانیم $\frac{G}{Z(G)}$ به عنوانِ گروهِ خودریختی‌های داخلیِ $G$ در $Aut(G)$ می‌نشینند. پس با توجه به این‌که هر زیرگروه از یک گروهِ پوچ‌توان خود پوچ‌توان است؛ $\frac{G}{Z(G)}$ هم پوچ‌توان می‌شود. از شیوه‌ی تعریفِ گروه‌های پوچ‌توان به کمکِ سری مرکزی بالایی، پوچ‌توان بودنِ $\frac{G}{Z(G)}$ حکم مشابهی را برای $G$ بدست می‌دهد.

**۵.** پاسخ مثبت است. چنین مثالی را خواهیم ساخت. در فضای $\mathbb{R}^3$ صفحه‌ی $xy$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم از هر نقطه‌ی $(x,y,0)$ بر صفحه خطی بگذرانیم به طوری که خطوط حاصل دوبه‌دو متنافر شوند. از آنجا که چنین خطوطی صفحه‌ی $xy$ را خواهند پوشاند، طبیعی است که خط را طوری بگیریم که مشمول در این صفحه نباشد. پس بردار هادیِ خطِ متناظرِ $(x,y)$ را می‌توان به فرمِ $(g(x,y),1)$ گرفت که در آن $g(x,y) \in \mathbb{R}^2$. باید تابعِ $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ طوری انتخاب شود که اگر $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$ متمایز باشند، آنگاه خطوطِ $(x,y,0)+\langle (g(x,y),1)\rangle$ و $(x',y',0)+\langle (g(x',y'),1)\rangle$ متنافر باشند. معادلاً $(x-x', y-y')$ در $\mathbb{R}^2$ مضربی از $g(x,y)-g(x',y') \neq 0$ نباشد. یک راه آن است که $g$ را نگاشتی خطی بگیریم و آنگاه می‌خواهیم $g(x-x', y-y')$ مضربی از $(x-x', y-y')$ نباشد و بنابراین تنها کافی است $g$ مقدار ویژه‌ی حقیقی نداشته باشد. یک روش آن است که $g$ را نگاشتِ دوران در صفحه به زاویه‌ی نود درجه بگیریم: $g(x,y) = (-y,x)$. لذا به خانواده‌ی زیر از خطوط می‌رسیم که به سادگی تحقیق می‌شود دوبه‌دو متنافرند و $\mathbb{R}^3$ را می‌پوشانند:

$$\big\{(x,y,0) + \big\langle(-y,x,1)\big\rangle\big\}_{(x,y)\in\mathbb{R}^2}$$

# گزارش مدرسه پاییزه موبایل

سایناغفرانی

## معرفی مدرسه

در پاییز ۹۳، برنامه‌ای با عنوان "مدرسه ریاضیات تکنولوژی" در روزهای ۱۷ام، ۱۸ام، ۲۴ام و ۲۵ام مهرماه در دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد. هدف این برنامه آشنایی دانش‌آموزان با بخش‌های کاربردی و عملی ریاضیات و به ویژه کاربرد آن در تکنولوژی بوده است. گروه برگزارکنندگان این برنامه را جمعی از دانشجویان، فارغ‌التحصیلان و اساتید دانشکده ریاضی، تنی چند از دانشجویان دانشکده‌های برق، کامپیوتر و فیزیک و همچنین گروهی از دانشجویان دانشگاه تهران تشکیل می‌دادند. این برنامه در قالب یک مدرسه چهار روزه و در دو هفته برای یک گروه ۴۰نفره از دانش‌آموزان مقاطع اول تا سوم دبیرستان برگزار شد و شرکت‌کنندگانی از مدارس تهران، کرج و کاشان در آن شرکت جستند. برنامه در دو بخش اصلی آموزش و ارزیابی برگزار شد که توضیح جزییات در ادامه ارائه می‌گردد.

## آموزش

این بخش شامل کارگاه‌های آموزشی، سخنرانی و نشست‌های علمی بود. در روز اول، سرآغاز برنامه یک سخنرانی علمی با موضوع عصب‌شناسی بود که توسط جناب آقای روزبه فرهودی دانشجوی مقطع دکترای دانشکده ریاضی ارائه گردید. در ادامه این روز با دو کارگاه آموزشی برای دو گروه ۲۰نفره با موضوعات "یادگیری ماشین‌ها" و "هندسه نااقلیدسی" پی گرفته شد.

آغازگر روز دوم برنامه، یک نشست علمی با موضوع "ریاضیات و هنر" بود که با همکاری خود دانش‌آموزان و هدایت خانم مهرانا اسحاقی به اجرا درآمد. در ادامه روز، دو کارگاه آموزشی دیگر با موضوعات "هندسه محاسباتی" و "هندسه کاغذ و تا (اریگامی)" نیز برگزار شد.

## ارزیابی

این بخش شامل فعالیت ساخت پوستر و مسابقه بود. در روز سوم برنامه، فعالیتی تحت عنوان پوسترسازی در نظر گرفته شده بود تا دانش‌آموزان در گروه‌های چندنفره و با انتخاب یکی از کارگاه‌های آموزشی به عنوان موضوع، آنچه را که در آن کارگاه فراگرفته بودند، در قالب روزنامه دیواری عرضه کنند. در پایان این روز هر گروه ضمن به نمایش گذاشتن روزنامه دیواری خود، ارائه‌ای کوتاه در تکمیل مطالب روزنامه دیواری‌شان نیز به سایر گروه‌ها ارائه دادند. هدف از این بخش تقویت مهارت‌های ارائه به صورت کلامی و در قالب یک پوستر و نیز سعی در بهتر فهمیدن و پیگیری مطالب آموزشی بوده است.

در روز آخر برنامه، برای ارزیابی اندوخته‌های دانش‌آموزان از کارگاه‌های آموزشی مسابقه‌ای برگزار شد که در پایان به گروه‌های برنده جوایزی اهدا شد.

مجله‌ی ریاضی شریف از هر گونه همکاری در تمامی زمینه‌ها از جمله تهیه یا معرفی مطالب علمی و توصیفی و هم‌چنین همکاری در زمینه‌ی کارهای اجرایی مجله از جانب دانشجویان و اساتید استقبال به عمل می‌آورد. لازم به ذکر است که اکثر همکاران فعلی این مجله به صورت کاملا داوطلبانه با مجله همکاری می‌کنند و اساس کار این نشریه بر مبنای همکاری داوطلبانه‌ی اهالی دانشکده‌ی ریاضی قرار گرفته است.

# تماس با ما:

**mathematicsjournal@gmail.com**

**www.sharifmathjournal.ir**

[redacted]

قیمت: ۲۰۰۰ تومان

[redacted]

[redacted]