

$$\text{اگر } u(X) \text{ جوابی از معادله‌ی زیر باشد،} \\ \Delta u(X) + \lambda u(X) = 0 \quad (1)$$

$$u(X) = 0 \quad X \in \partial\Omega$$

آنگاه برای $\lambda = \sqrt{\omega}$, $\omega = \cos(\omega t)u(X)$ و $\sin(\omega t)u(X)$ جواب‌هایی از معادله‌ی موج خواهند بود. این جواب‌ها را به اصطلاح موج‌های ایستا و ω ‌های متناظر آن‌ها را فرکانس‌های اصلی گویند. این حقیقت شناخته شده‌ایست که هر جوابی از معادله‌ی موج ترکیب خطی (بینهایت تا از) موج‌های ایستا است. با توجه به این حقیقت می‌توان با شنیدن صدایی که از ارتعاش یک سطح به گوش می‌رسد به فرکانس‌های اصلی آن دست یافت.

های ناصرفی که در معادله‌ی بالا صدق می‌کنند را توابع ویژه و λ ‌های متناظر آن‌ها را مقادیر ویژه و مجموعه‌ی آن‌ها را طیف عملگر لابلاس گویند. ثابت می‌شود که طیف، یک دنباله‌ی

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$$

تشکیل می‌دهد و توابع ویژه‌ی متناظر آن‌ها که با $\phi_n(X)$ نشان داده می‌شوند توابعی هموار هستند و یک پایه‌ی متعامد یکه برای $L^2(\Omega)$ (فضای توابع مربع انگرال‌پذیر با ضرب داخلی

بنابراین هدف اصلی مقاله را می‌توان به این صورت بیان کرد که چگونه می‌توان شکل‌یک ناحیه را از روی طیف آن بازسازی کرد. پیش از آن باید به این سؤال پاسخ داد که آیا اساساً شکل‌یک ناحیه از روی طیف آن قابل بازسازی هست؟ یعنی به زبان ریاضی، اگر طیف Ω , $\Omega' \subset \Omega$ و طیف Ω' , $\Omega' \subset \Omega$ باشد و $\lambda'_n = \lambda_n$ باشند آیا لزوماً Ω و Ω' همنهشت (به معنای اقلیدسی) هستند؟

در بخش ۳، خواهیم دید که جواب این سؤال منفی است. بنابراین، این سؤال مطرح می‌شود که چه ویژگی‌های هندسی یک شکل را می‌توان از روی طیف آن به دست آورد. این موضوع بخش بعد است.

۲ ویژگی‌های هندسی نهفته در طیف

یکی از اولین نتایج اساسی در مطالعه‌ی طیف عملگر لابلاس، قضیه‌ی زیر منسوب به هرمان وایل^۱ است.

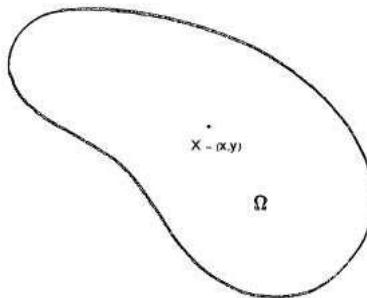
قضیه ۱ (وایل ۱۹۱۱). اگر $N(\lambda)$ تعداد مقادیر ویژه‌ی عملگر لابلاس باشد که از λ کوچک‌تراند، آن‌گاه وقتی $\lambda \rightarrow \infty$:

$$N(\lambda) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi} \lambda$$

بازسازی شکل اجسام از روی صدایی که تولید می‌کند
عرفان صلواتی

۱ مدل‌سازی ارتعاش یک سطح

سطوحی را در نظر بگیرید که از یک جنس کاملاً انعطاف‌پذیر و الاستیک ساخته شده باشد و لبه‌ی آن بسته شده باشد. (مثل یک طبل) اگر این سطح با وسیله‌ای به ارتعاش درآید، این ارتعاش را چگونه



می‌توان توصیف کرد؟

بیایید قاعده‌ی سطح را یک شکل دو بعدی و کران‌دار Ω در نظر بگیریم و ارتفاع سطح را با تابع u نشان دهیم. طبیعتاً u باید تابعی از نقطه‌ی $X = (x, y)$ و زمان t باشد. یعنی $u = u(t, x, y)$. اگر نیروهای وارد بر یک عنصر سطح کوچک را در نظر بگیریم و قوانین مکانیک نیوتونی را بنویسیم، معادله‌ی زیر موسوم به معادله‌ی موج استخراج می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$$

که در آن c ثابتی است که از روی چگالی و کشش سطح محاسبه می‌شود و $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ عملگر لابلاس در دو بعد است. ثابت بودن لبه‌ی سطح با این شرط مرزی توصیف می‌شود،

$$u(t, X) = 0 \quad X \in \partial\Omega$$

معادله‌ی موج بسیاری از پدیده‌های طبیعی از جمله امواج صوتی و امواج الکترومغناطیسی و تلاطم سیالات را مدل می‌کند و مطالعه‌ی آن به چند قرن پیش باز می‌گردد و ریاضی‌دانان معروفی چون اویلر، لاگرانژ و دیگران روی آن کار کرده‌اند. در ادامه برای سادگی فرض می‌کنیم $c = 1$.

یک روش بسیار کارا در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از جمله معادله‌ی موج، روش جداسازی است. اساس این روش در نظر گرفتن جواب‌هایی است که به شکل حاصل ضرب تابعی از t و تابعی از X هستند.

¹Hermann Weyl

در نقطه‌ی p جمع شده است. در این صورت $u(t, X)$ نشان‌دهنده‌ی چگالی ماده در نقطه‌ی X در زمان t است. شرط مرزی هم به این معناست که ماده به محض رسیدن به مرز نابود می‌شود.

می‌توان دید که برای برقراری شرط اولیه باید $c_n = \phi_n(p)$, یعنی

$$u(t, X) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \phi_n(p) \phi_n(X) \quad (3)$$

عبارت سمت راست را با $K(t, p, X)$ نشان می‌دهیم و آن را هسته‌ی حرارت^۳ ناحیه‌ی Ω گوییم. با قرار دادن $p = X$ داریم:

$$K(t, p, p) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \phi_n(p)^2 \quad (4)$$

که با انتگرال گیری روی Ω و با توجه به یکه بودن ϕ_n ‌ها به رابطه‌ی ارزش‌مند زیر می‌رسیم:

$$\int_{\Omega} K(t, p, p) dp = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \quad (5)$$

عبارت سمت راست بالا را با نماد $tr(e^{t\Delta})$ نشان می‌دهیم و آن را تریس حرارت^۴ گوییم. این نمادگذاری از عملگرهای خطی روی فضاهای متناهی بعد از الهام گرفته شده است.

کلید اثبات قضیه‌ی وایل، در مطالعه‌ی رفتار مجانی رابطه‌ی (5) وقتی $t \rightarrow 0$ نهفته است.

از نظر فیزیکی انتظار داریم که وقتی هنوز زمان زیادی از شروع فرآیند پخش نگذشته، ماده‌ی موجود در سیال، به محیط Ω نرسیده باشد، به عبارت دیگر، وجود یا عدم وجود مرز Ω تأثیر چندانی روی جواب در زمان‌های کوچک ندارد. بنابراین اگر $K_*(t, p, X)$ هسته‌ی حرارت برای کل \mathbb{R}^3 باشد، انتظار داریم (و در واقع می‌توان به طور دقیق هم ثابت کرد که):

$$K(t, p, p) \sim K_*(t, p, p) \quad t \rightarrow 0$$

فایده‌ی این رابطه در این است که ما جواب معادله‌ی پخش در \mathbb{R}^3 را می‌دانیم، در واقع

$$K_*(t, p, X) = \frac{1}{2\pi t} e^{-\frac{\|X-p\|^2}{4t}}$$

بنابراین وقتی $t \rightarrow 0$, $K(t, p, p) \sim \frac{1}{2\pi t}$, که با جایگذاری در (5) به دست می‌آوریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t}$$

گام نهایی اثبات را قضیه‌ی زیر که یکی از دسته قضایای موسوم به Tauberian است برای ما انجام می‌دهد. این قضایای بسیار



شکل ۱: هرمان وایل

این قضیه نشان می‌دهد که می‌توان از روی طیف یک شکل، مساحت آن را به دست آورد. در ادامه روشی برای اثبات قضیه‌ی وایل ارائه می‌کنیم و سپس با استفاده از آن روش، اطلاعات هندسی دیگری را نیز از طیف استخراج می‌کنیم. برای رسیدن به این هدف، لازم است ابتدا معادله‌ی دیفرانسیل پاره‌ای دیگری را که آن هم منشأ فیزیکی دارد مطالعه کنیم.

معادله‌ی پخش^۵:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u \quad (2)$$

$$u(t, X) = 0 \quad X \in \partial\Omega$$

معادله‌ی پخش، پدیده‌های فیزیکی مختلفی از جمله پخش مواد و انتشار گرما را مدل می‌کند. روش جداسازی را در مورد معادله‌ی پخش نیز می‌توان به کار برد. در واقع اگر $u(X)$ جوابی از (1) باشد، آن‌گاه $e^{-\lambda t} u(X)$ جوابی از (2) خواهد بود و همه‌ی جواب‌های معادله‌ی پخش به صورت ترکیب خطی از (نامتناهی تا از) این جواب‌های ایستا خواهند بود. یعنی $u(t, X) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n t} \phi_n(X)$ که c_n ‌ها اعداد حقیقی دلخواه هستند. اگر یک شرط اولیه به معادله‌ی پخش اضافه کنیم آن‌گاه جواب آن به طور یکتا مشخص می‌شود. ما شرط اولیه‌ی $u(0, X) = \delta_p(X)$ را در نظر می‌گیریم که نقطه‌ای از Ω و $\delta_p(X)$ تابع دلتای دیراک در نقطه‌ی p است. این تصور فیزیکی را داشته باشید که ماده‌ای در یک سیال پخش می‌شود و در ابتدا همه‌ی ماده

^۳Heat Kernel

^۴Heat Trace

^۵Diffusion Equation

اگر Γ خطی گذرنده از q و مماس بر لبه Ω باشد، انتظار ما این است که در زمان‌های کوچک، مرز Ω و خط Γ تأثیر چندان متفاوتی روی جواب نگذارند یعنی اگر $K_l(t, p, x)$ هستهٔ حرارت مربوط به نیم‌صفحهٔ با مرز Γ باشد که شامل p است، آنگاه

$$K(t, p, p) \sim K_l(t, p, p) \quad t \rightarrow 0.$$

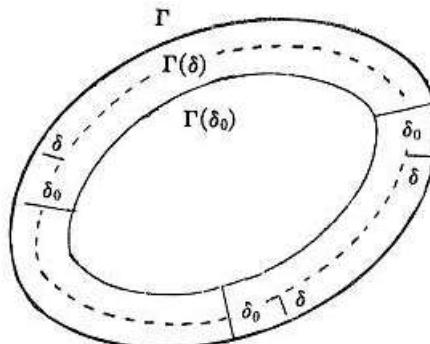
اما جواب معادلهٔ پخش روی نیم‌صفحهٔ شناخته شده است و در واقع

$$K_l(t, p, p) = \frac{1 - e^{-\frac{\delta^2}{t}}}{2\pi t}$$

که در آن $\|p - q\| = \delta$. با جایگذاری در (۵) به دست می‌آوریم

$$\text{tr}(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{1}{2\pi t} \int_{\Omega} e^{-\frac{\delta^2}{t}} dp$$

جمله‌ی اول همان تخمین وایل است. برای بررسی جمله‌ی دوم (δ) را مجموعه‌ی نقاطی از Ω بگیرید که فاصله‌ی آنها تا مرز برابر δ است. دقت کنید که وقتی $t \rightarrow 0$ ، تأثیر δ ‌های کوچک در انتگرال بالا بیشتر از سایر δ ‌های است. برای δ ‌های کوچک، (δ) Γ یک خم محدب تشکیل می‌دهد، (δ) L را طول این خم بگیرید.



انتگرال بالا را می‌توانیم ابتدا روی $\Gamma(\delta)$ بگیریم و سپس روی δ انتگرال بگیریم که نتیجه می‌دهد برای یک δ کوچک:

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{\delta^2}{t}} dp = \int_0^{\delta} e^{-\frac{\delta^2}{t}} L(\delta) d\delta + O(e^{-\frac{\delta^2}{t}})$$

با در ذهن داشتن این شهود که برای $\gamma < \delta$ وقتی $t \rightarrow 0$ ، در مقایسه با $e^{-\frac{\delta^2}{t}}$ به صفر میل می‌کند، می‌توان انتظار داشت (و در

واقع به طور دقیق هم اثبات می‌شود) که

$$\int_{\Omega} e^{-\frac{\delta^2}{t}} dp \sim L \int_0^{\delta} e^{-\frac{\delta^2}{t}} d\delta = \frac{L}{4} \sqrt{2\pi t}$$

که در آن $L = L(0)$ همان محیط Ω است. پس به دست آورديم:

$$\text{tr}(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \quad t \rightarrow 0. \quad (6)$$

پس توانستیم از روی طیف Ω ، محیط آن را نیز به دست آوریم.

رابطه‌ی (6) در واقع دقت تقریب فرمول وایل را که $(\frac{1}{t})^{1/2}$ بود به $(\frac{1}{\sqrt{t}})^{1/2}$ ارتقا داد. می‌توان پرسید که آیا می‌توان $\text{tr}(e^{t\Delta})$ را با جملات

کاربردی، رفتار مجانی یک دنباله $\{\lambda_n\}$ (یا یک تابع) را در بینهایت به رفتار مجانی سری‌های توانی (یا انتگرال‌های توانی) در $t = 0$ مربوط می‌سازند.

قضیه ۲ (Tauberian). فرض کنید دنباله‌ی صعودی λ_n به بینهایت میل کند. $N(\lambda)$ را تعداد n هایی بگیرید که کوچکتر از λ هستند. در این صورت احکام زیر معادل‌اند:

$$(الف) N(\lambda) \sim c\lambda \quad \lambda \rightarrow \infty$$

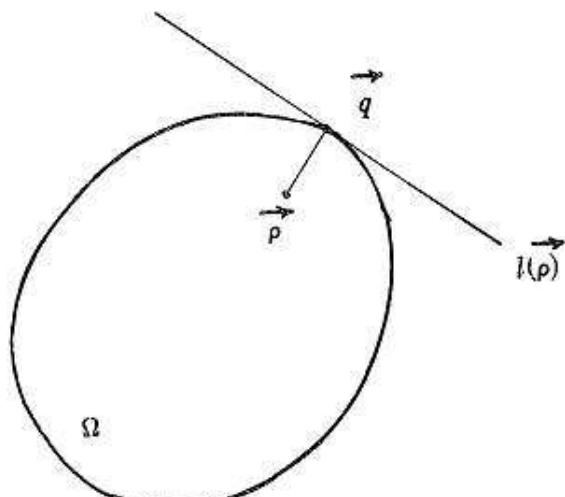
$$(ب) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim \frac{c}{t} \quad t \rightarrow 0.$$

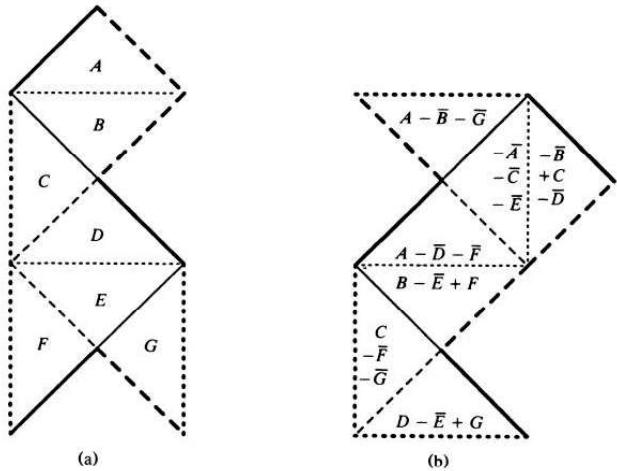
همان‌طور که خواننده متوجه شده، اثبات بالا فاصله‌ی زیادی با یک اثبات دقیق ریاضی دارد. اما در واقع همین اثبات را می‌توان دقیق کرد. خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند به مرجع [۱] پخش ۸ مراجعه کند.

همچنین به عنوان یک تمرین آموزنده، خواننده سعی کند طیف یک مستطیل در صفحه را به دست آورده و قضیه‌ی وایل را مستقیماً تحقیق نماید.

شاید تا این‌جا اندکی از هدف اصلی مقاله نامید شده باشید، چرا که با زحمت زیاد، تنها توانستیم مساحت یک شکل را از روی طیف آن محاسبه کنیم. اما نامید نباشید، با استفاده از همین ایده می‌توانیم محیط شکل را نیز به دست آوریم. برای سادگی، خود را به Ω های محدود محدود می‌کنیم.

ایده‌ی اصلی اثبات قضیه‌ی وایل این بود که برای t ‌های کوچک، مرز Ω تأثیر چندانی روی جواب معادلهٔ پخش ندارد. اگر بخواهیم تأثیر مرز Ω را در جواب خود دخیل کنیم انتظار داریم نزدیکترین نقطه به p روی مرز، که آن را q می‌نامیم، بیشترین تأثیر را روی جواب داشته باشد.





در واقع روشی ارائه می‌دهیم که با استفاده از آن می‌توان هر تابع ویژه از ناحیه‌ی اول را به یک تابع ویژه از ناحیه‌ی دوم تبدیل کرد و بر عکس. فرض کنید ϕ تابع ویژه‌ای روی ناحیه‌ی (a) با مقدار ویژه‌ی λ باشد. در شکل (b) هر جا که حروف A, B, \dots, G را دیدیم، به جای آن مقدار تابع ϕ را در نقطه‌ی متناظر روی مثلث مربوطه از شکل (a) (در صورت لزوم با یک دوران در صفحه) جایگزین کنید و هر جا حروف $\bar{A}, \bar{B}, \dots, \bar{G}$ را دیدیم ابتدا مثلث مربوطه را نسبت به محور تقارنش انعکاس بدهید و سپس آن را جایگزین کنید.

با چک کردن ضلع‌های مثلث‌ها، می‌توان دید که تابع ψ که به این صورت روی ناحیه‌ی (b) ساخته می‌شود روی مرز صفر است و در داخل پیوسته است. همچنین روشن است که ψ در داخل هر یک از مثلث‌ها هموار است و در معادله‌ی $\lambda\psi = \Delta\psi$ صدق می‌کند. قضیه‌ای از آنالیز تضمین می‌کند چنین تابعی حتماً روی مرز مشترک مثلث‌ها نیز هموار است و در واقع روی کل ناحیه‌ی (b)، تابع ویژه‌ای از عملگر لاپلاس با مقدار ویژه‌ی λ است.

خواننده‌ی علاقه‌مند می‌تواند در مرجع [۲] روشی بر مبنای کاغذ و تا برای به دست آوردن این مثال و همچنین مثال‌های دیگری از شکل‌های هم‌طیف را ببیند.

۴ ابعاد بالاتر و خمینه‌ها

اکنون که به اهمیت عملگر لاپلاس و طیف آن در مطالعه‌ی ناورداهای هندسی اشکال دوبعدی در صفحه پی بردیم، می‌توان پرسید که آیا این مفاهیم قابل تعمیم به ابعاد بالاتر و نیز به خمینه‌ها هستند؟ تعمیم طبیعی عملگر لاپلاس به خمینه‌های ریمانی (یعنی خمینه‌هایی که مجهز به یک متريک ریمانی شده‌اند)، عملگر لاپلاس-بلترامی است:

$$\Delta_M f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f))$$

بیشتری تقریب زد تا دقیق تقریب بالاتر رود. جواب مثبت است. در واقع می‌توان نشان داد که حتی اگر Ω لزوماً همیند ساده هم نباشد (یعنی می‌تواند سوراخ داشته باشد)، آن‌گاه

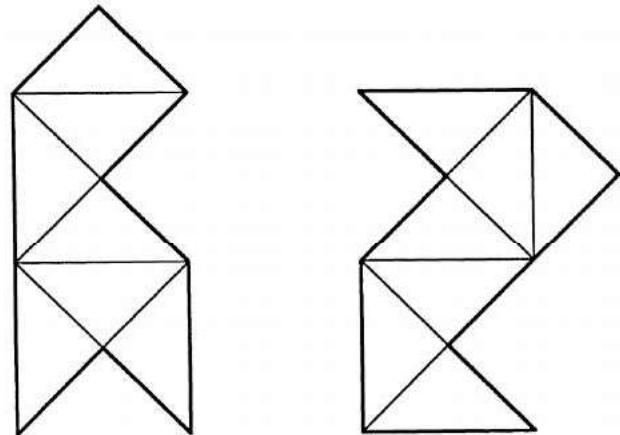
$$tr(e^{t\Delta}) \sim \frac{|\Omega|}{2\pi t} - \frac{L}{4} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} + \frac{1-r}{r} \quad t \rightarrow 0.$$

که در آن r تعداد سوراخ‌های است. پس تعداد سوراخ‌های یک شکل را نیز می‌توان از روی طیف آن به دست آورد.

در بخش بعد خواهیم دید که می‌توان شکل‌های ساخت که طیف آن‌ها کاملاً یکی باشد ولی قابل انتطباق نباشند. اما در بعضی حالات خاص می‌توان ثابت کرد که طیف، شکل را به طور یکتا مشخص می‌کند. مثلاً اگر یکی از ناحیه‌ها دایره باشد، ناحیه‌ی دیگر نیز باید بر آن قابل انتطباق باشد، چون همانطور که گفتیم دو ناحیه باید مساحت و محیط یکسان داشته باشند و از طرفی بنابر نامساوی برابر محیطی^۵ در بین اشکال با محیط ثابت، دایره تنها شکلی است که بیشترین مساحت را دارد. یعنی از روی صدایی که یک شکل دوبعدی تولید می‌کند، می‌توان تشخیص داد که شکل آن دایره هست یا نه.

۳ شکل‌های هم‌طیف

آیا شکل یک ناحیه از روی طیف آن به طور یکتا مشخص می‌شود؟ اولین بار در سال ۱۹۶۶ در مقاله‌ای از مارک کتز^۶ این سؤال مطرح شد. حدود ۲۶ سال بعد گردن و دیگران^[۳] جواب منفی به این سؤال دادند. مثال ساده‌ای که آن‌ها ارائه کردند را در زیر می‌بینید:



دو ناحیه‌ای که در شکل بالا می‌بینید نمونه‌ای از شکل‌های هم‌طیف^۷ هستند، یعنی اشکالی که طیف یکسانی دارند ولی قابل انتطباق نیستند. دلیل این موضوع را با شکل زیر توضیح می‌دهیم.

Isoperimetric^۵
Mark Kac^۶
Isospectral^۷

به سؤال اصلی مقاله باز می‌گردیم. آیا طیف یک خمینه‌ی ریمانی، هندسه‌ی آن را به طور کامل مشخص می‌کند؟ با توجه به مثالی که در بخش ۳ دیدیم، می‌دانیم جواب در حالت کلی منفی است. اما در بعضی حالات خاص جواب مثبت است. مثلاً ثابت شده است ([۶]) که کره‌ها و فضاهای افکتشی با بعد کمتر از ۷ توسط طیف‌شان به طور یکتا مشخص می‌شوند.

در واقع سال‌ها پیش از کشف مثالی که در بخش ۳ بیان کردیم این دانسته شده بود که خمینه‌هایی (با بعد پیش از ۲) وجود دارند که طیف‌شان یکسان است ولی با یکدیگر ایزومنتر نیستند. چنین خمینه‌هایی را هم‌طیف گویند. اولین مثال از خمینه‌های هم‌طیف را جان میلر^۸ ارائه کرد. خمینه‌های او در کلاس خاصی از خمینه‌ها بودند که ارتباط با یک مسئله‌ی نظریه اعدادی شناخته شده داشتند. بعداً سونادا^۹ مثالی کلی‌تر ارائه کرد که روشنی سیستماتیک برای ساخت خمینه‌های هم‌طیف در اختیار می‌گذاشت.

این مقاله را با ارائه مثال سونادا به پایان می‌بریم. ایده‌ی اصلی سونادا این مشاهده بود که هسته‌ی حرارت یک خمینه‌ی ریمانی ارتباط نزدیکی با هسته‌ی حرارت فضای پوششی آن دارد. ابتدا مفاهیمی از فضای پوششی را مرور می‌کنیم.

فرض کنید $\tilde{M} \rightarrow M$: ϕ یک پوشش باشد، یعنی هر نقطه از M یک همسایگی U دارد که $(U)^{-1}\phi$ اجتماعی از بازهایی مجزا است که ϕ روی هر یک از آن‌ها یک همسانزیختی به U می‌دهد. در چنین صورتی یک متريک ریمانی روی M را می‌توان به \tilde{M} انتقال داد به طوری که ϕ موضع‌آیزومنتر باشد. گروه بنیادی \tilde{M} ، $\pi_1(\tilde{M})$ ، توسط ϕ به طور یک به یک به زیرگروهی از $\pi_1(M)$ نگاشته می‌شود که از این پس منظور مان از (\tilde{M}) همین زیرگروه خواهد بود. ثابت می‌شود که \tilde{M} به طور یکتا توسعه (\tilde{M}) مشخص می‌شود. اگر این فرض را نیز اضافه کنیم که (\tilde{M}) زیرگروهی نرمال از (M) باشد، آن‌گاه می‌توان دید که گروه $G = \frac{\pi_1(M)}{\pi_1(\tilde{M})}$ روی \tilde{M} به صورت ایزومنتر عمل می‌کند و M خارج قسمت \tilde{M} تحت عمل این گروه است. در این حالت ϕ را یک پوشش نرمال برای M و G را گروه پوششی گویند.

لم ۳. اگر \tilde{M} پوشش نرمال M باشد،

$$K_M(t, x, y) = \sum_{g \in G} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, g \cdot \tilde{y}) \quad (8)$$

که در آن \tilde{x} و \tilde{y} ، نقاطی از \tilde{M} هستند که x و y را می‌پوشانند.

اثبات. هسته‌ی حرارت M توسط دو شرط زیر به طور یکتا مشخص می‌شود،

اگر M یک خمینه‌ی d بعدی فشرده (که ممکن است دارای لبه نیز باشد) با یک متريک ریمانی باشد، همانند اشکال دو بعدی، $\Delta u + \lambda u = 0$ با شرط مرزی صفر را توابع ویژه و λ ‌های متناظر را مقادیر ویژه یا طیف Δ_M گوییم. ثابت می‌شود که طیف یک دنباله‌ی $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \rightarrow \infty$ تشکیل می‌دهد و توابع ویژه‌ی متناظر آن‌ها توابعی هموار هستند و یک پایه‌ی معتمد یکه برای (M) تشکیل می‌دهند.

سؤال بخش‌های قبل را می‌توان تکرار کرد. چه اطلاعات هندسی خمینه‌ی M را می‌توان با استفاده از طیف آن به دست آورد؟ خصوصاً این که رفتار مجانی طیف شامل چه اطلاعات هندسی است؟ روش هسته‌ی حرارت را می‌توان اینجا هم به کار برد و نتایجی درباره رفتار مجانی طیف به دست آورده. از جمله می‌توان تعمیمی از قضیه‌ی وایل را برای خمینه‌های بسته (یعنی فشرده و بدون لبه) ثابت کرد که بر اساس آن اگر $N(\lambda)$ تعداد مقادیر ویژه کوچکتر از λ باشد، آنگاه وقتی $\lambda \rightarrow \infty$ ،

$$N(\lambda) \sim (2\pi)^{-d} \omega_d Vol(\Omega) \lambda^{\frac{d}{r}}$$

که در آن ω_d حجم گوی واحد d بعدی است. اثبات مبتنی است بر تخمین مجانی زیر،

$$tr(e^{t\Delta}) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \sim (4\pi t)^{-\frac{d}{r}} Vol(M) \quad t \rightarrow 0$$

به طور کلی نشان داده شده است که برای یک خمینه‌ی بسته M ، بسط مجانی زیر موجود است:

$$tr(e^{t\Delta}) \sim (4\pi t)^{-\frac{d}{r}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \quad t \rightarrow 0. \quad (7)$$

که ضرایب a_k ناوردهای هندسی از M هستند که به طور یکتا توسعه طیف M مشخص می‌شوند. a_k ها را اساساً می‌توان به صورت انتگرال‌هایی از انحنای خمینه و مشتقات آن نوشت ولی بازیاد شدن k ، فرمول‌ها فوق العاده پیچیده می‌شوند و تشخیص این که a_k چه ناوردهای هندسی‌ای را توصیف می‌کند دشوار می‌شود. اما برای k های کوچک این کار دشوار نیست. مثلاً ثابت می‌شود $a_0 = Vol(M)$ (این همان قضیه‌ی وایل است). پس حجم M از روی طیف قابل محاسبه است.

همچنین روش است که بعد M نیز از روی طیف با توجه به بسط (7) قابل محاسبه است. نیز $a_1 = \frac{1}{\ell} \int_M s(x) dx$ که احنای $s(x)$ اسکالر خمینه است. در حالتی که $d = 2$ ، یعنی M یک رویه‌ی بسته باشد، $s(x)$ همان انحنای گوسی است و بنابر قضیه‌ی گوس-بونه،

$$\int_M s(x) dx = 2\pi\chi$$

که χ مشخصه‌ی اویلر M است. پس مشخصه‌ی اویلر رویه‌ها از روی طیف آن‌ها قابل محاسبه است.

⁸John Milnor
⁹Sunada

$$\text{(الف)} \quad \frac{\partial}{\partial t} K_M(t, x, y) = \Delta_y K_M(t, x, y)$$

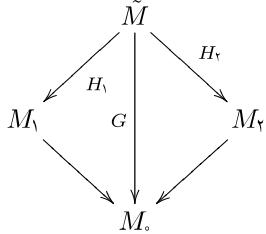
$$\text{(ب)} \quad K_M(\circ, x, y) = \delta_x(y)$$

بنابر این می‌توان (۱۰) را به این صورت نوشت:

$$tr(e^{t\Delta_{M_1}}) = \sum_{[g] \in G} \frac{\#([g] \cap H)}{\#H} \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, g.\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (11)$$

اهمیت (۱۱) در این است که انتگرال سمت راست آن به G و نه به H بستگی دارد.

اکنون نمودار زیر از فضاهای پوششی را در نظر بگیرید:



اگر (۱۱) را در مورد M_1 و M_2 به کار ببریم، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

نتیجه ۴. فرض کنید

$$\forall g \in G, \quad \#([g] \cap H_1) = \#([g] \cap H_2) \quad (12)$$

آن‌گاه M_1 و M_2 هم‌طیف هستند.

اکنون فرض کنید G گروهی متناهیاً تولید شده باشد. در این صورت بنابر قضیه‌ای در توپولوژی خمینه‌ها، G گروه بنیادی یک خمینه‌ی فشرده M است. \tilde{M} را فضای پوششی جهانی M ^{۱۰} بگیرید. حال فرض کنید H_1 و H_2 زیرگروه‌هایی از G باشند که در رابطه‌ی (۱۲) صدق می‌کنند. M_1 و M_2 را فضاهای پوششی M با گروه‌های بنیادی H_1 و H_2 بگیرید. سپس یک متريک ريماني روی M قرار دهید و آن را به طور طبیعی به M_1 و M_2 و \tilde{M} انتقال دهید. بنابر نتیجه‌ی بالا، M_1 و M_2 هم‌طیف هستند. فقط باقی می‌ماند که نشان دهیم با یک‌دیگر ايزومتر نیستند.

دقت کنید که اگر H_1 و H_2 در G با یک‌دیگر مزدوج باشند، آن‌گاه M_1 و M_2 ايزومتر خواهند بود و این ايزومتری از عمل یکی از عناصر G به دست می‌آید و بر عکس. بنابر این اگر H_1 و H_2 با یک‌دیگر مزدوج نباشند مطمئن هستیم که M_1 و M_2 تحت ايزومتری‌های G با یک‌دیگر ايزومتر نیستند. از طرفی با توجه به آزادی‌ای که در انتخاب متريک M داریم، می‌توانیم اين متريک را آنقدر کج و کوله انتخاب کنیم که M_1 و M_2 ايزومتری‌هایی خارج از G نداشته باشند. در نتیجه M_1 و M_2 کلاً ايزومتر نخواهند بود.

بنابراین تنها چیزی که می‌ماند ارائه‌ی مثال‌هایی از چنین گروه‌هایی است. در مرجع [۴] مثال‌های مختلفی ارائه شده که یکی از آن‌ها را می‌آوریم.

اکنون با توجه به ايزومتری بودن عمل G ، روشن است که عبارت سمت راست (۸) هر دو شرط بالا را دارد. \square

با قرار دادن $x = y$ در (۸) و انتگرال‌گیری روی M داریم

$$\begin{aligned} tr(e^{t\Delta_M}) &= \int_M K_M(t, x, x) dx \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, g.\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (9) \end{aligned}$$

اکنون ادعا می‌کنیم عبارت سمت راست وقتی g را با مزدوجش hgh^{-1} عوض کنیم تغییر نمی‌کند زیرا

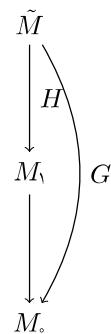
$$\begin{aligned} \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, hgh^{-1}.\tilde{x}) d\tilde{x} &= \int_{\tilde{N}} K_{\tilde{M}}(t, h^{-1}.\tilde{x}, gh^{-1}.\tilde{x}) d\tilde{x} \\ &\text{با تغییر متغیر } \tilde{x} \rightarrow \tilde{x} - h^{-1}.x \text{ به دست می‌آید} \\ &= \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, g.\tilde{x}) d\tilde{x} \end{aligned}$$

بنابراین می‌توانیم (۹) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\int_M K_M(t, x, x) dx = \sum_{[g]} \frac{\# [g]}{\# G} \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, g.\tilde{x}) d\tilde{x}$$

که در آن $[g]$ کلاس تزویجی g در G است.

اکنون نموداری از فضاهای پوششی به شکل زیر در نظر بگیرید:



بنابر آنچه گفته شد:

$$tr(e^{t\Delta_{M_1}}) = \sum_{[h]} \frac{\#[h]}{\#H} \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, h.\tilde{x}) d\tilde{x} \quad (10)$$

اکنون دقت کنید که اگر h و h' در G مزدوج باشند، به دلیل ايزومتری بودن عمل G :

$$\int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, h.\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_{\tilde{M}} K_{\tilde{M}}(t, \tilde{x}, h'.\tilde{x}) d\tilde{x}$$

- [5] Rosenberg, Steven. *The Laplacian on a Riemannian manifold: an introduction to analysis on manifolds*. Vol. 31. Cambridge University Press, 1997.
- [6] Spectral geometry. Mircea Craioveanu (originator), Encyclopedia of Mathematics. URL: http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Spectral_geometry&oldid=15528

مثال. گروه $\mathbb{Z}_8 \rtimes \mathbb{Z}_8^*$ که عبارت است از ضرب نیمه مستقیم \mathbb{Z}_8 و گروه ضریبی \mathbb{Z}_8^* و طبق تعریف، تشکیل شده است از زوج‌های (a, b) که $a = 1, 2, 5, 7$ و $b \in \mathbb{Z}_8$ با عمل ضرب

$$(a, b) \cdot (a', b') = (aa', a'b + b')$$

به راحتی می‌توان تحقیق کرد که زیرگروه‌های

$$H_1 = \{(1, 0), (3, 0), (5, 0), (7, 0)\}$$

و

$$H_2 = \{(1, 0), (3, 2), (5, 4), (7, 0)\}$$

در رابطه‌ی (۱۲) صدق می‌کنند و با یک دیگر مزدوج نیستند. پس با استفاده از آن‌ها می‌توان خمینه‌هایی ساخت که هم‌طیف هستند ولی ایزومنتر نیستند.

در مرجع [۴] با استفاده از ایده‌ی بالا، مثال‌هایی از رویه‌های بسته با گونه‌ی $g \leq 4$ آورده شده است که هم‌طیف هستند ولی ایزومنتر نیستند.

مراجع

- [1] Kac, Mark. "Can one hear the shape of a drum?." *The american mathematical monthly* 73.4 (1966): 1-23.
این مقاله با عنوان آیا می‌توان شکل طبل را شنید؟ در مجله‌ی نشر ریاضی، سال ۷ شماره ۲ به فارسی برگردانده شده است.
- [2] Chapman, S. J. "Drums that sound the same." *The American mathematical monthly* 102.2 (1995): 124-138.
این مقاله با عنوان طبل‌های هم‌صدا در مجله‌ی نشر ریاضی، سال ۷ شماره ۲ به فارسی برگردانده شده است.
- [3] Gordon, Carolyn, David L. Webb, and Scott Wolpert. "One cannot hear the shape of a drum." *Bulletin of the American Mathematical Society* 27.1 (1992): 134-138.
- [4] Brooks, Robert. "Constructing isospectral manifolds." *American Mathematical Monthly* 95.9 (1988): 823-839.