مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی دوم (بهار ۱۴۰۳)

مسائل

علی دایی نبی* و علی الماسی†

(۱) مجموعه‌ی S از نقاط با مختصات صحیح در صفحه‌ی مختصات دو بعدی مفروض است. تابع $f : S \to S$ به گونه‌ای است که فاصله‌ی هر دو نقطه از S را کاهش می‌دهد. به بیانی دیگر برای هر $x, y \in S$، $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$، که d فاصله‌ی معمولی اقلیدسی است. اگر S مجموعه‌ای فرد عضوی باشد، نشان دهید عضو p در S وجود دارد که $f(p) = p$. دقت کنید که تصویر نقاط تحت f داخل مجموعه قرار دارد و نقاط S مختصات صحیح دارند. علاوه بر این، برای حالتی که S زوج عضو داشته باشد، مثالی ارائه دهید که f نقطه‌ی ثابت نداشته باشد، یعنی برای هر $p \in S$، $f(p) \neq p$.

(۲) در ریاضیات دبیرستانی معمولاً چندضلعی محدب را خمی بسته و شکسته تعریف می‌کنند که زاویه‌ی بیشتر از ۱۸۰ درجه نداشته باشد. از طرفی، تعریف دقیق یک شکل محدب یعنی شکلی که پاره‌خط واصل هر دو نقطه از آن کاملاً درون شکل قرار بگیرد. آیا این دو تعریف معادل هستند؟ به بیانی دیگر، در صفحه‌ی مختصات دو بعدی، به این سوال پاسخ دهید که هر خم بسته و شکسته‌ای که زاویه‌ی بیشتر از ۱۸۰ درجه نداشته باشد، یک ناحیه‌ی محدب در درون خود ایجاد می‌کند یا خیر. به جهت دیگر این سوال نیز پاسخ دهید.

(۳) آیا یک nـضلعی محدب وجود دارد که بتوان آن را با چهارضلعی‌های مقعر پوشاند؟ پوشاندن یعنی تمام چهارضلعی‌ها داخل شکل قرار بگیرند، هم‌پوشانی نداشته باشند، و تمام درون nـضلعی را شامل شوند.

(۴) روی دایره‌ی واحد در صفحه‌ی مختصات دو بعدی، تعداد n نقطه با رنگ قرمز علامت زده شده‌اند. این نقاط را به اندازه‌ی $\frac{2\pi k}{n}$ دوران می‌دهیم، برای یک k صحیح، و نقاط جدید را با رنگ آبی علامت می‌زنیم. نشان دهید همواره دو علامت آبی وجود دارند که بین دو علامت قرمز متوالی قرار گرفته باشند.

(۵) دو معدن طلا داریم که در هر کدام مقدار G_1 و G_2 طلا وجود دارد. یک ماشین حفاری در اختیار داریم که می‌توانیم از آن برای استخراج طلا استفاده کنیم. اگر از معدن iام استخراج کنیم، $i = 1, 2$، با احتمال p_i ماشین کار کرده و کسر r_i از مقدار طلای موجود در آن لحظه را استخراج می‌کنیم. در غیر این صورت، با احتمال $1 - p_i$ ماشین را به طور کامل از دست می‌دهیم. استراتژی بهینه‌ای ارائه دهید که امید مقدار طلای استخراجی تا قبل از خرابی ماشین را بیشینه کند.

(۶) تعداد N زیرمجموعه‌ی متمایز از یک مجموعه‌ی S مفروض است. اگر این زیرمجموعه‌ها تشکیل یک جبر روی S دهند، یعنی نسبت به اجتماع، اشتراک، و مکمل‌گیری بسته باشند، نشان دهید K وجود دارد که $N = 2^K$. برای شروع، می‌توانید فرض کنید S متناهی عضو دارد. برای حالت نامتناهی نیز حکم را ثابت کنید.

(۷) **(پایه‌های ضربی غیرقابل گسترش)** ضرب تنسوری دو ماتریس $A_{m\times n}$ و $B_{p\times q}$، که آن را با $A \otimes B$ نمایش می‌دهیم، ماتریسی با ابعاد $(mp) \times (nq)$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix}.$$

با استفاده از تعریف بالا، می‌توان ضرب تنسوری دو فضای برداری ماتریسی V و W را به صورت زیر تعریف کرد:

$$V \otimes W = \{v \otimes w \mid v \in V, w \in W\}.$$

۱.۷ نشان دهید ضرب تنسوری دو فضای برداری، یک فضای برداری است.

۲.۷ نشان دهید بردارهایی در $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ وجود دارند که به صورت $v \otimes w$، که $v, w \in \mathbb{R}^2$، نیستند.

۳.۷ فرض کنید V و W به ترتیب مجهز به ضرب‌های داخلی $\langle .,. \rangle_V$ و $\langle .,. \rangle_W$ هستند. نشان دهید نگاشت $\langle .,. \rangle : V \otimes W \times V \otimes W \to \mathbb{R}$ که به صورت زیر تعریف شده است، یک ضرب داخلی روی $V \otimes W$ است.

$$\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle = \langle v, v' \rangle_V \langle w, w' \rangle_W \ , \ \forall v, v' \in V \ \forall w, w' \in W.$$

۴.۷ نشان دهید مجموعه‌ی متناهی S از بردارهای $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ وجود دارد که دارای شرایط زیر است:

- همه‌ی اعضای S به فرم $v \otimes w$ هستند، که $v, w \in \mathbb{R}^3$.
- اعضای S دوبه‌دو بر هم عمودند.
- $\mathrm{Span}(S) \subsetneq \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$.
- $\mathrm{Span}(S)^\perp$ هیچ عضوی ندارد که به فرم $v \otimes w$، برای $v, w \in \mathbb{R}^3$، باشد.

(۸) **(اثباتی برای نامتناهی‌بودن اعداد اول با نظریه‌ی اتوماتا)** الفبای $\Sigma = \{0, 1\}$ را در نظر بگیرید. برای هر رشته‌ی $w \in \Sigma^*$، $e(w)$ را برابر با تعداد صفرهای w منهای تعداد یک‌های آن تعریف کنید. برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف کنید

$$\mathcal{L}_n = \{w \in \Sigma^* \ : \ n | e(w)\}.$$

به علاوه، تعریف کنید

$$\mathcal{L} = \bigcup_{\text{عدد اول } p} \mathcal{L}_p.$$

۱.۸ نشان دهید برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathcal{L}_n$ زبانی منظم است.

۲.۸ نشان دهید $\mathcal{L}$ منظم نیست.

۳.۸ نتیجه بگیرید تعداد اعداد اول نامتناهی است.

(۹) **(یک قضیه در کاشی‌کاری)** می‌خواهیم مربعی را به مثلث‌های هم‌مساحت تقسیم کنیم.

۱.۹ نشان دهید برای هر عدد زوج n، می‌توان مربع را به n مثلث هم‌مساحت تقسیم کرد.

۲.۹ در ادامه می‌خواهیم نشان دهیم که اگر بتوان مربع را به n مثلث هم‌مساحت تقسیم کرد، n عددی زوج است.

۱.۲.۹ یک تابع قدر روی یک میدان K، تابعی مانند $v : K \to \mathbb{R}$ است که ویژگی‌های زیر را داشته باشد:

- $v(x) \geq 0, \forall x \in K$ و $v(x) = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.
- $v(xy) = v(x)v(y), \forall x, y \in K$.
- $v(x+y) \leq v(x) + v(y), \forall x, y \in K$.

نشان دهید برای هر $x \in K$، $v(x) = v(-x)$.

۲.۲.۹ تابع $|\cdot|_2 : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنید:

- $|0|_2 = 0$.
- برای هر $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$، می‌دانیم r را می‌توان به‌طور یکتا به صورت $r = 2^m \frac{a}{b}$ نوشت که a, b, m اعدادی صحیح و a و b اعدادی فرد هستند. تعریف کنید $|r|_2 = 2^{-m}$.

نشان دهید تابع فوق، یک تابع قدر روی میدان $\mathbb{Q}$ است.

۳.۲.۹ نشان دهید $|\cdot|_2$ این ویژگی را دارد که $|x+y|_2 \leq \max\{|x|_2, |y|_2\}$ و تساوی زمانی رخ می‌دهد که $|x|_2 \neq |y|_2$.

۴.۲.۹ نشان دهید برای عدد طبیعی n، $|n|_2 < 1$ اگر و تنها اگر n زوج باشد.

۵.۲.۹ فرض کنید که مربع را به n مثلث هم‌مساحت تقسیم کرده‌ایم. برای سادگی فرض کنید که مختصات رئوس مربع مزبور نقاط $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$ است. به علاوه فرض کنید رئوس مثلث‌ها نیز در نقاطی با

مختصات گویا قرار گرفته‌اند.

رئوس مثلث‌ها را با روشی که در ادامه بیان می‌شود رنگ‌آمیزی می‌کنیم. برای هر رأس با مختصات (x, y)،

- (x, y) آبی است اگر $|x|_۲ \geq |y|_۲$ و $|x|_۲ \geq ۱$.
- (x, y) سبز است اگر $|y|_۲ > |x|_۲$ و $|y|_۲ \geq ۱$.
- (x, y) قرمز است اگر $|x|_۲ < ۱$ و $|y|_۲ < ۱$.

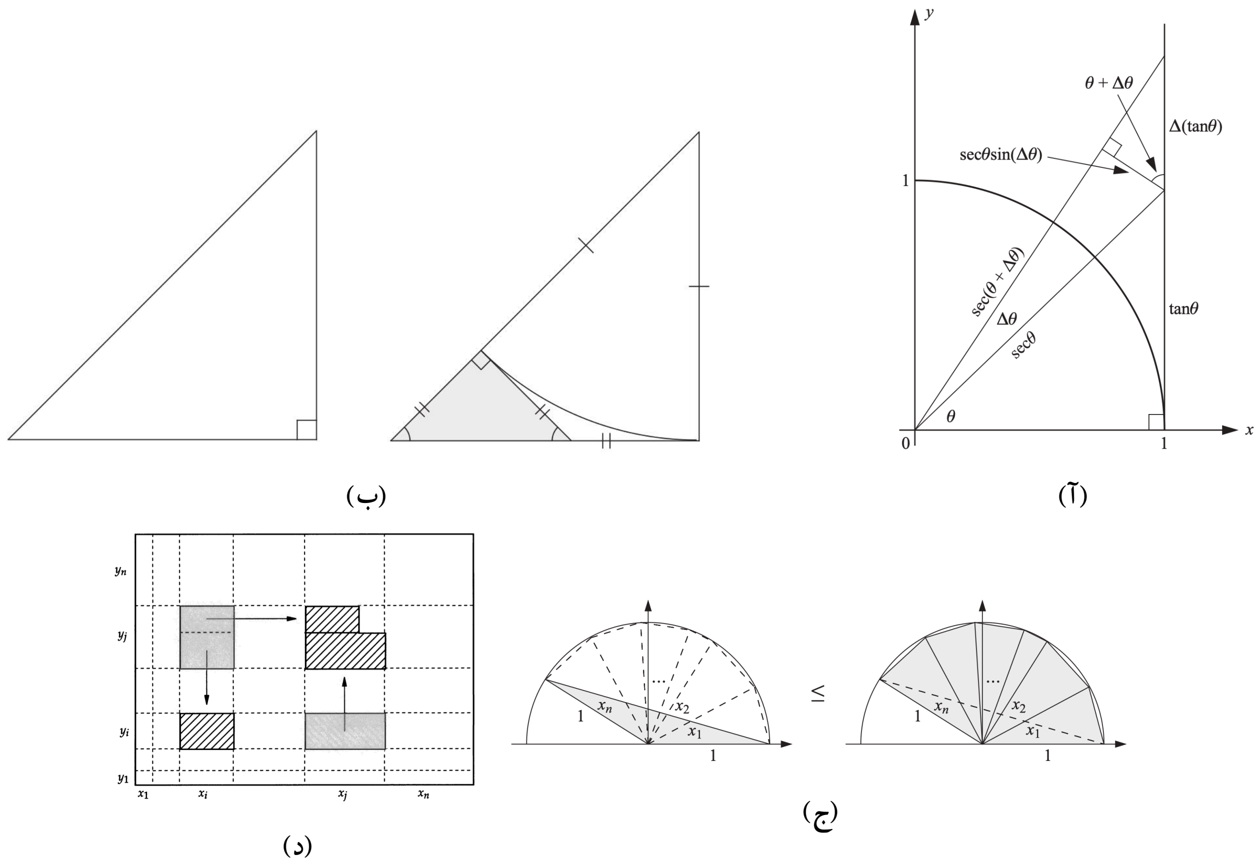
فرض کنید مساحت مثلثی که رئوسش با سه رنگ متفاوت رنگ‌آمیزی شده است، برابر با d است. نشان دهید $|d|_۲ > ۱$.

۶.۲.۹ نشان دهید چنان‌چه رئوس مثلث‌ها را با رنگ‌آمیزی فوق رنگ کنیم، حداقل یک مثلث با رئوسی با سه رنگ متفاوت خواهیم داشت.

۷.۲.۹ از قسمت‌های قبل نتیجه بگیرید که تعداد مثلث‌ها در تقسیم مربع به مثلث‌های هم‌مساحت با رئوس با مختصات گویا عددی زوج است.

۳.۹ آیا می‌توان تابع قدر تعریف‌شده در قسمت قبل را به اعداد حقیقی توسیع داد؟ چگونه؟

(۱۰) **(اثبات‌های تصویری)** هر یک از شکل‌های زیر برای کدام قضیه‌ی ریاضی اثباتی ارائه می‌دهد؟



شکل ۱. اثبات‌های تصویری.

* دانشجوی دکتری، دانشگاه تورنتو

رایانامه: alidaeinabi@gmail.com

† دانشجوی دکتری علوم کامپیوتر، انستیتو پلی‌تکنیک پاریس

تارنما: https://ali-almasi.github.io

رایانامه: ali.almasi@polytechnique.edu