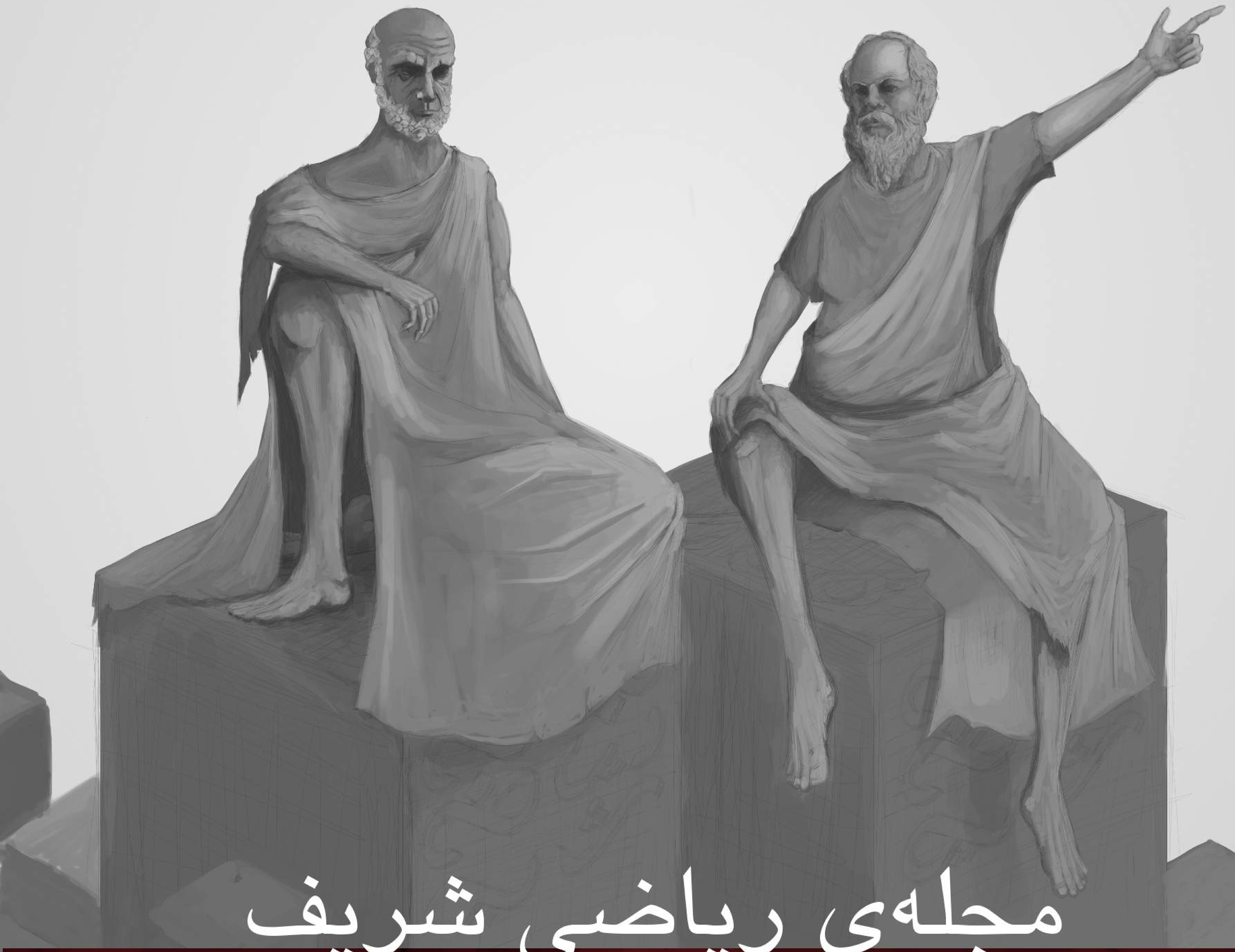


مجله‌ی ریاضی شریف

سال دوم شماره‌ی ششم

مجله‌ی ریاضی شریف
سال دوم شماره‌ی ششم

صاحب امتیاز: انجمن علمی و فوق برنامه‌ی دانشکده‌ی علوم ریاضی؛ مدیر مسوول: دکتر امیر جعفری؛ سردبیر: خشایار فیلُم؛ همکاران این شماره: علی قصاب،مصطفی عین‌اله زاده،محمد صادق زمانی، علیرضا کرمی، حمید ملک، لعیا قدرتی، ابوالفضل طاهری؛ دبیر تحریریه: ابوالفضل طاهری؛ هیئت تحریریه: دکتر امیر جعفری، علی کمالی‌نژاد، خشایار فیلم، علی قصاب، روزبه فرهودی، عرفان صلواتی، نوید هاشمی، اوژن غنی‌زاده‌ی خوب، احمدرضا حاج‌سعیدی؛ طراحی: اوژن غنی‌زاده‌ی خوب؛ طراحی سایت: محسن منصوریار؛ ویراستاری: خشایار فیلُم، ابوالفضل طاهری؛ با تشکر از دکتر مرتضی فتوحی، دکتر محسن شریفی‌تبار، دکتر سعید شعبانی، دکتر فریدون رضاخانلو، دکتر عباس مومنی، دکتر سید امین اصفهانی، دکتر محمد مهدیان، دکتر پوران معماری، دکتر میرامید حاج میرصادقی، دکتر علی کمالی نژاد، روزبه فرهودی، حسین بومری، سینا حسن‌زاده، یاسمن بقایی، امین محمدی

فهرست مطالب

گفتگویی سقراطی درباره‌ی ریاضیات ۱
هزینه‌ی ثابت ناسامانی در بازی‌های تشکیل شبکه به وسیله‌ی تبلیغ سرویس عمومی ۱۰
از دجله‌ی توپولوژی تا بیابان ترکیبیات ۱۷
قضیه‌ای در مورد جایگشت‌ها ۲۲
مثال نقضی در نظریه‌ی گروه‌ها ۲۷
مقدار ویژه‌های ماتریس‌های تصادفی ۲۹
انتقال بهینه ۳۴
پیرامون مرزهای علوم ریاضی ۴۷
مصاحبه با دکتر محمد مهدیان ۴۹
مصاحبه با دکتر پوران معماری ۵۴
مصاحبه با دکتر فریدون رضاخانلو ۵۸
مصاحبه با دکتر سید امین اصفهانی ۶۱
مصاحبه با دکتر عباس مؤمنی ۶۵
مسأله‌ها ۷۱
پاسخ مسأله‌ها ۷۳
فعالیت های درون دانشکده ۸۷

در شماره‌ی قبل نویسنده‌ی مقاله‌ی «مکمل‌پذیری و متمم‌پذیری در گروه‌ها و کاربردهای آن در نظریه‌ی گراف» آقای بابک میرآفتاب بودند که متأسفانه اسم ایشان چاپ نشده بود. بدین وسیله از ایشان عذرخواهی می‌کنیم

بسمه تعالی

زندگی صحنه‌ی یکتای هنرمندی ماست
هرکسی نغمه‌ی خود خواند و از صحنه رود
صحنه پیوسته بجاست
خرّم آن نغمه که مردم بسپارند به یاد[1]

شش‌امین شماره‌ی دوره‌ی جدید مجله ریاضی نیز با همکاری جمعی از خانواده‌ی دانشکده ریاضی، با همه‌ی کم و کاستی‌های خود به چاپ رسید. در این مدت کوتاه که از دوره‌ی جدید می‌گذرد شاید این مجله توانسته باشد خواسته‌ی عده‌ای را برآورده کند و افرادی دیگر انتظاراتی داشته باشند که هم‌چنان بی‌پاسخ مانده است. شاید عده‌ای به دنبال پاسخ به این سوال بوده‌اند که "ریاضیات به چه درد می‌خورد؟"، عده‌ای به دنبال تازه‌های ریاضیات، برخی پیگیر اتفاقات دانشکده و از این دست انتظارات. ورای تمام کم و کاست‌ها و انتظارات، به عنوان یکی از همکاران مجله در این مدت، نکته‌ی قابل توجه برای من نحوه‌ی همکاری افراد با یکدیگر بود و تجربیاتی که در این میان آموختم. پذیرفتن مسئولیت در کارهای داوطلبانه تنها یک تعهد اخلاقی است و همکاری در چنین زمینه‌هایی است که به ما می‌آموزد چگونه بهتر عمل کنیم.

در این مدت سعی بر این بوده است تا کارهای مجله به گونه‌ای سامان‌دهی شود که وابسته به اشخاص نباشد و این روند تا حد خوبی پیش رفته است. واگذاری کارهای اجرایی به انجمن علمی و فوق برنامه و تشکیل هیئت تحریریه از نمونه‌ی این کارهاست. با این حال هم‌چنان نیاز است تمامی اعضای دانشکده به نحوی با مجله همکاری داشته باشند تا این‌بار شاهد توقف دوره‌ای مجله نباشیم.

با توجه به اینکه تعدادی از همکاران نشریه در حال حاضر سال‌های پایانی خود را در دانشکده سپری می‌کنند، نیاز است تا مدیریت مجله به دیگر دوستان انتقال یابد. به همین جهت از تمامی علاقمندان در تمامی بخش‌ها، دعوت به همکاری می‌شود. امید که بتوانیم این سنت را حفظ کنیم.

خوب یا بد، زشت یا زیبا، آن‌چه هست انتخاب خودمان است که چگونه باشیم و چگونه رفتار کنیم.

---
[1] ژاله اصفهانی

هیچ‌کس جز تو نخواهد آمد
هیچ‌کس بر در این خانه نخواهد کوبید
شعله‌ی روشن این خانه تو باید باشی
هیچ‌کس چون تو نخواهد تابید
سرو آزاده‌ی این باغ تو باید باشی
هیچ‌کس چون تو نخواهد رویید
چشمه‌ی جاری این دشت تو باید باشی
هیچ‌کس چون تو نخواهد جوشید
باز کن پنجره صبح آمده است
در این خانه‌ی رخوت بگشای
باز هم منتظری؟
هیچ‌کس بر در این خانه نخواهد کوبید
و نمی‌گوید برخیز
که صبح است
بهار آمده است
خانه خلوت‌تر از آن است که می‌پنداری
سایه سنگین‌تر از آن است که می‌پنداری
داغ، دیرین‌تر از آن است که می‌پنداری
باغ، غمگین‌تر از آن است که می‌پنداری
ریشه‌ها می‌گویند
ما تواناتر از آنیم که می‌پنداری
هیچ‌کس جز تو نخواهد آمد
هیچ بذری بی‌تو
روی این خاک نخواهد پاشید
خرمنی کوت نخواهد گردید
هیچ‌کجا چرخی بی‌چرخش تو
هیچ‌کجا چرخی بی‌چالش و بی‌خواهش تو
بی‌توانایی اندیشه و عزم تو نخواهد چرخید
اسب اندیشه‌ی خود را زین کن
تک‌سوار سحر جاده تو باید باشی
و خدا می‌داند
و خدا می‌خواهد
تو خدایی باشی

بر پهنه‌ی خاک
نازنین
داس بی‌دسته‌ی ما
سالها خوشه‌ی نارسته‌ی بذری را بر می‌چیند
که به دست پدران ما بر خاک نریخت
کودکان فردا
خرمن کشته‌ی امروز تو را می‌جویند
خواب و خاموشی امروز تو را
در حضور تاریخ
در نگاه فردا
هیچ‌کس بر تو نخواهد بخشید
باز هم منتظری؟
هیچ‌کس بر در این خانه نخواهد کوبید
و نمی‌گوید بر خیز
که صبح است بهار آمده است
تو بهاری، آری
خویش را باور کن[2]

ابوالفضل طاهری
دبیر هیئت تحریریه

---
[2] مجتبی کاشانی

گفتگویی سقراطی درباره‌ی ریاضیات[۱]

آلفرد رینی[۲]
مترجم: علیرضا کرمی

سقراط بقراط[۳] عزیز، آیا به دنبال کسی هستی؟

بقراط نه، سقراط، زیرا همین حالا او را، که شما باشی، پیدا کردم. همه جا به دنبالت گشتم. شخصی در محل اجتماعات شهر[۴] به من گفت که شما را این‌جا در حال قدم زدن در طول رودخانه‌ی الیسوس[۵] دیده‌است، به همین دلیل به دنبال شما آمدم.

سقراط بسیار خوب، به من بگو چرا آمدی، بعد از آن می‌خواهم از تو چیزی راجع‌به گفتگویمان با پروتاگوراس[۶] بپرسم. آیا هنوز، آن را به یاد داری؟

بقراط چگونه فراموش کنم؟ از آن زمان حتی یک روز هم بدون فکر درباره‌ی آن گفتگو نگذشته است. امروز آمده‌ام تا درخواست مشاوره کنم زیرا آن گفتگو را در ذهن دارم.

سقراط بقراط عزیز به نظر می‌رسد که تو می‌خواهی با من درباره‌ی همان سوالی صحبت کنی که آرزو کردم با تو بحث کنم، بنابراین دو موضوع، یکی و مانند هم هستند. به نظر می‌رسد که ریاضی‌دانان در گفتن این‌که دو، هیچ وقت با یک برابر نیست اشتباه می‌کنند.

بقراط در واقع، سقراط، ریاضی همان مبحثی است که می‌خواهم درباره‌ی‌اش با تو گفتگو کنم.

سقراط بقراط، مطمئناً می‌دانی که من یک ریاضی‌دان نیستم. چرا سوالت را پیش تئودوروس[۷] مشهور نمی‌بری؟

بقراط شما شگفت‌آورید. سقراط، شما جواب سوالات من را حتی قبل از این‌که به شما بگویم چه هستند، می‌دهید. آمده‌ام نظر شما را درباره‌ی شاگرد تئودوروس شدن بپرسم. وقتی آخرین بار با قصد شاگردِ پروتاگوراس شدن، پیش شما آمدم، با هم نزد او رفتیم و شما گفتگو را طوری هدایت کردید که کاملاً واضح شد او موضوع آن‌چه را که آموزش می‌دهد، نمی‌دانست. بنابراین نظرم را عوض کردم و به دنبال او نرفتم. آن گفتگو به من کمک کرد که ببینم چه چیزی نباید انجام دهم، اما به من نشان نداد که چه باید انجام دهم. من هنوز درباره‌ی‌اش در فکرم. من به همراه جوان‌های همسن و سالم به ضیافت‌ها و مسابقات ورزشی رفته‌ام، به جرات می‌گویم اوقات خوشی داشتم، اما مرا راضی نکرد. این احساس غفلت، آرامش من را به هم می‌زند. به طور دقیق‌تر، احساس می‌کنم دانشی که دارم تقریباً بی‌ثبات است. در طول گفتگو با پروتاگوراس فهمیدم که دانش من درباره‌ی مفهوم‌های آشنایی مانند خوبی، عدالت و شجاعت خیلی از حد قابل قبول دور است. با این همه فکر می‌کنم پیشرفت بزرگی باشد که هم‌اکنون غفلتم را به طور واضح درک می‌کنم.

سقراط بقراط عزیز، خوش‌حالم که مرا به خوبی درک می‌کنی. من همیشه کاملاً صادقانه به خودم می‌گویم که چیزی نمی‌دانم. تفاوتِ بین من و بیش‌تر مردم دیگر این است که تصور نمی‌کنم آن‌چه را که در حقیقت نمی‌دانم، می‌دانم.

بقراط این به وضوح خردمندی شما را می‌رساند، سقراط. اما چنین دانشی برای من کافی نیست. من خواست شدیدی دارم که دانشی قطعی و استوار به دست آورم و تا زمانی که به دست نیاورم راضی نمی‌شوم. من دائماً درباره‌ی این‌که باید تلاش کنم تا چه دانشی به دست آورم، به فکر فرو می‌روم. اخیرا، ثئای‌تتوس[۸] به من گفت که قطعیت، تنها در ریاضیات است و پیش‌نهاد کرد ریاضیات را از استادش تئودوروس، که متخصص پیش‌رو در اعداد و هندسه در آتن[۹] است، یاد بگیرم. حالا، نمی‌خواهم همان اشتباهی را مرتکب شوم که وقتی می‌خواستم شاگرد پروتاگوراس شوم، مرتکب شدم. بنابراین، سقراط، به من بگو اگر ریاضیات را از تئودوروس بیاموزم، دانشی بی‌عیب را که به دنبالش هستم، خواهم یافت؟

سقراط اگر می‌خواهی ریاضیات مطالعه کنی، ای پسر آپولودوروس[۱۰] ، هیچ کاری بهتر از رفتن نزد دوست بسیار محترم من تئودوروس نیست. اما باید برای خودت تصمیم بگیری که آیا می‌خواهی ریاضیات بخوانی یا نه. هیچ‌کس نمی‌تواند نیازهای تو را بهتر از خودت بداند.

بقراط چرا از کمک به من خودداری می‌کنی، سقراط؟ شاید بدون این‌که متوجه شوم شما را آزردم؟

سقراط تو منظور من را غلط تعبیر کردی، دوست جوان من. من عصبانی نیستم، اما تو غیر ممکن از من می‌خواهی. هرکس باید برای خودش تصمیم بگیرد که چه می‌خواهد انجام دهد. من کاری جز کمک کردن به مانند یک قابله، در به دنیا آمدن تصمیمت نمی‌توانم

[۱] این گفتگو، اولین مقاله از کتاب 18 Unconventional Essays on the Nature of Mathematics که توسط Reuben Hersh جمع‌آوری شده‌است. این مقاله، همچنین در کتاب Dialogues on Mathematics نوشته Alfred Renyi آمده‌است.

[۲] Alfred Renyi
[۳] Hippocrates
[۴] Agora
[۵] Ilissos
[۶] Protagoras
[۷] Theodoros
[۸] Theaitetos
[۹] Athens
[۱۰] Apollodoros

انجام دهم.

بقراط لطفاً، سقراط عزیز، از کمک به من خودداری نکن، و اگر هم اکنون مشغله‌ای نداری، بیا فوراً شروع کنیم.

سقراط بسیار خوب، اگر این‌طور می‌خواهی. بیا زیر سایه‌ی آن درخت چنار دراز بکشیم و شروع کنیم. اما در ابتدا به من بگو، آیا حاضر هستی گفتگو را به روشی هدایت کنی که من ترجیح می‌دهم؟ من سوال می‌پرسم و تو جواب می‌دهی. با این روش آن‌چه را که می‌دانستی با وضوح بیش‌تری خواهی دید. این روش بذرهای دانش را در روح تو به شکوفه زدن در می‌آورد. امیدوارم که مانند پادشاه داریوش[11] نباشی که استادکارِ معادنش را به دلیل این‌که تنها مس از معدنی که پادشاه گمان می‌کرد طلا در آن است، در آورده بود، کشت. امیدوارم که فراموش نکنی که معدن‌کار تنها آن چیزی را که در معدن است می‌تواند پیدا کند.

بقراط قسم می‌خورم که هیچ سرزنشی نکنم، اما، به زئوس[12] قسم، بیا تا استخراج کردن را شروع کنیم.

سقراط بسیار خوب. به من بگو که آیا می‌دانی ریاضیات چیست؟ گمان می‌کنم چون می‌خواهی آن را مطالعه کنی، بتوانی تعریفش کنی.

بقراط فکر می‌کنم هر کودکی بتواند. ریاضیات یکی از علوم است، و یکی از دقیق‌ترینِ آن‌ها.

سقراط از تو نخواستم که ریاضیات را ستایش کنی، بلکه [خواستم] طبیعتش را توصیف کنی. برای مثال اگر از تو در مورد فنِ طبابت پرسیده بودم، جواب می‌دادی که این فن با سلامت و بیماری سر و کار دارد، و هدفش سالم کردن بیماران و حفاظت از سلامتی است. آیا حق با من نیست؟

بقراط بدون تردید.

سقراط بنابراین جواب این سوال را بده: فن طبابت با چیزهایی سر و کار دارد که وجود دارند یا با چیزهایی که وجود ندارند؟ اگر هیچ طبیبی نبود، بیماری هنوز وجود داشت؟

بقراط بی‌شک، و حتی بیش‌تر از الان.

سقراط بیا تا به فن دیگری نگاه بیندازیم، برای مثال نجوم. آیا با من موافقی که منجمان حرکت ستاره‌ها را مطالعه می‌کنند؟

بقراط مطمئن هستم.

سقراط و اگر از تو بپرسم، نجوم با چیزی که وجود دارد سر و کار دارد، جواب تو چیست؟

بقراط جواب من مثبت است.

سقراط آیا اگر منجمی در جهان نبود، ستاره‌ها وجود داشتند؟

بقراط البته. و اگر خشم زئوس منجر به نابود کردن تمام بشریت بشود، ستاره‌ها همچنان هنگام شب در آسمان می‌درخشند. اما چرا به‌جای ریاضی درباره‌ی نجوم گفتگو می‌کنیم؟

سقراط عجول نباش، دوست خوب من. بیا تا چند فن دیگر را در نظر بگیریم تا آن‌ها را با ریاضیات مقایسه کنیم. تو شخصی را که درباره‌ی تمام موجودات زنده‌ی در جنگل‌ها یا عمق دریا می‌داند، چگونه توصیف می‌کنی؟

بقراط او دانشمندی است که موجودات زنده را بررسی می‌کند.

سقراط و آیا موافقی که آن شخص چیزهایی را که وجود دارند مطالعه می‌کند؟

بقراط موافقم.

سقراط و اگر بگوییم هر فنی با چیزهایی که وجود دارند سر و کار دارد، موافقی؟

بقراط کاملاً.

سقراط حالا دوست جوان من، به من بگو که اشیاء ریاضی چیست؟ یک ریاضی‌دان چه چیز را مطالعه می‌کند؟

بقراط من از ثئای‌تتوس همین سوال را کردم. او جواب داد که یک ریاضی‌دان اعداد و شکل‌های هندسی را مطالعه می‌کند.

سقراط بسیار خوب، جواب درست است، اما می‌توانی بگویی که این اشیاء وجود دارند؟

بقراط البته. چگونه می‌توانیم راجع‌به آن‌ها صحبت کنیم اگر وجود نداشته باشند.

سقراط بنابراین به من بگو، اگر هیچ ریاضی‌دانی نبود، اعداد اولی خواهد بود؟ و اگر این‌گونه باشد، آن‌ها کجا خواهند بود؟

بقراط جداً نمی‌دانم که چه جوابی بدهم. به وضوح، اگر ریاضی‌دانان درباره‌ی اعداد اول فکر می‌کنند، بنابراین آن‌ها باید در ذهنشان وجود داشته باشند، اما اگر ریاضی‌دانی نبود، اعداد اول هیچ‌کجا نبود.

سقراط آیا منظورت این است که باید بگوییم ریاضی‌دانان اشیاء ناموجود را مطالعه می‌کنند؟

بقراط بله، فکر می‌کنم باید این را بپذیریم.

سقراط بیا به سوال از منظر دیگری نگاه کنیم. من این‌جا روی میز عدد ۳۷ را می‌نویسم. آیا آن را می‌بینی؟

بقراط بله، می‌بینم.

سقراط و می‌توانی با دستانت لمسش کنی؟

بقراط البته.

سقراط پس شاید اعداد وجود دارند؟

بقراط آه سقراط، شما من را دست انداخته‌اید. این‌جا را نگاه کن،

[11] Darius
[12] Zeus

من روی همان میز اژدهایی با هفت سر کشیده‌ام. آیا این بدان معناست که چنان اژدهایی وجود دارد؟ من هرگز شخصی را ندیده‌ام که اژدهایی دیده باشد، و من متقاعد شده‌ام که اژدها مگر در افسانه‌ها وجود ندارد. اما فرض کن که من اشتباه می‌کنم، فرض کن جایی ورای یادمانِ هرکول[۱۳] ، اژدها واقعاً وجود دارد، با این وجود، هنوز هیچ ربطی به نقاشی من ندارد.

سقراط تو درست می‌گویی، بقراط، و من با تو کاملاً موافقم. اما این بدین معناست با وجود این‌که می‌توانیم درباره‌ی آن‌ها صحبت کنیم و آن‌ها را بنویسیم، اعداد در واقعیت وجود ندارند؟

بقراط کاملاً

سقراط نتیجه‌ی عجولانه نگیر. بیا آزمون دیگری بکنیم. آیا حق با من است که می‌گویم ما می‌توانیم گوسفندانی که این‌جا در علفزار هستند یا کشتی‌هایی که در بندرگاه پیره[۱۴] هستند، بشماریم؟

بقراط بله، می‌توانیم.

سقراط و گوسفندان و کشتی‌ها وجود دارند؟

بقراط البته.

سقراط اما اگر گوسفندان وجود دارند، تعداد آن‌ها هم باید چیزی باشد که وجود دارد؟

بقراط شما مرا دست انداخته‌اید سقراط. ریاضی‌دانان گوسفندها را نمی‌شمارند، این کار چوپان‌ها است.

سقراط آیا منظورت این است که آن‌چه ریاضی‌دانان مطالعه می‌کنند تعداد گوسفندان و کشتی‌ها، یا دیگر چیزهای موجود نیست، بلکه خود اعداد است؟ و آن‌ها فقط به چیزهایی که در ذهنشان است توجه می‌کنند؟

بقراط بله منظور من همین است.

سقراط تو از جانب ثئای‌تتوس به من گفتی ریاضی‌دانان اعداد و اشکال هندسی را مطالعه می‌کنند. درباره‌ی اشکال چطور؟ اگر از تو بپرسم که آیا آن‌ها وجود دارند، جواب تو چیست؟

بقراط مطمئناً وجود دارند. برای مثال می‌توانیم شکل یک ظرف زیبا را ببینیم و با دستان خود آن را لمس کنیم.

سقراط من هنوز یک اشکال دارم. اگر به یک ظرف نگاه کنی چه می‌بینی، ظرف یا شکلش را؟

بقراط هر دو را می‌بینم

سقراط این مانند زمانی است که تو به یک بره نگاه می‌کنی؟ تو بره را می‌بینی یا پشمش را نیز می‌بینی؟

بقراط تشبیه بسیار خوبی است.

[۱۳]Heracles
[۱۴]Pireus

سقراط گمان می‌کنم این تشبیه مانند هفائستوس[15] می‌لنگد. تو می‌توانی پشم بره را بتراشی و بره را بدون پشمش، و پشم را بدون بره، ببینی. آیا به طریق مشابه می‌توانی شکل ظرف را از ظرفش جدا کنی؟

بقراط مطمئناً نه، و به جرات می‌گویم کسی نمی‌تواند.

سقراط و با این وجود هنوز بر این باوری که می‌توانی شکل هندسی را ببینی؟

بقراط دارم درباره‌اش شک می‌کنم.

سقراط در کنار این، اگر ریاضی‌دانان شکل ظرف‌ها را مطالعه می‌کردند، نباید آن‌ها را سفالگر می‌نامیدیم؟

بقراط دقیقاً.

سقراط بنابراین اگر تئودوروس بهترین ریاضی‌دان است در این‌صورت نباید بهترین سفالگر نیز باشد؟ من شنیده‌ام بسیاری از افراد او را تحسین می‌کنند، اما هیچ‌کس به من نگفته که او چیزی راجع‌به سفالگری می‌داند. من شک دارم که او حتی بتواند ظرفی ساده بسازد. یا شاید ریاضی‌دانان با شکلِ مجسمه‌ها و ساختمان‌ها سر و کار دارند؟

بقراط اگر داشتند باید مجسمه‌ساز یا معمار بودند.

سقراط بسیار خوب، دوست من، ما به این نتیجه رسیدیم که وقتی ریاضی‌دانان اشیاء هندسی را مطالعه می‌کنند به شکل اشیاء موجود مانند ظرف‌ها [توجه نمی‌کنند]، بلکه شکل‌هایی که تنها در فکرشان وجود دارد. آیا موافقی؟

بقراط موافقم.

سقراط حال که تثبیت شد ریاضی‌دانان به اشیاءئی که در واقعیت وجود ندارند، بلکه فقط در ذهنشان است، علاقه‌مند هستند، بیا گفته ثئای‌تتوس را که ریاضیات، دانشی قابل اطمینان‌تر از دانش شاخه‌هایِ دیگر علوم به ما می‌دهد و تو قبلاً به آن اشاره کردی، بررسی کنیم. به من بگو آیا ثئای‌تتوس مثالی هم برای تو زد؟

بقراط بله، برای مثال او گفت که شخصی دقیقاً نمی‌تواند بفهمد آتن در چه فاصله‌ای از اسپارت[۱۶] است. البته، افرادی که آن مسیر را طی می‌کنند در تعداد روزهایی که راه می‌روند اتفاق نظر دارند، اما فهمیدن این‌که فاصله، چند پا است، غیر ممکن است. از سوی دیگر، به کمک قضیه‌ی فیثاغورث[۱۷] می‌توان طول قطر مربع را گفت. ثئای‌تتوس همچنین گفت که پیدا کردن تعداد دقیق افرادی که در هلاس[۱۸] زندگی می‌کنند غیر ممکن است. اگر شخصی سعی کند که همه‌ی آن‌ها را بشمارد، هیچ وقت به رقم دقیقی نمی‌رسد، زیرا در

[15]Hephaestus
[۱۶]Sparta
[۱۷]Pythagoras
[۱۸]Hellas

حین شمردنْ بعضی از افرادِ پیر می‌میرند و بچه‌هایی به دنیا می‌آیند، بنابراین تعداد کل، تنها حدوداً می‌تواند درست باشد. اما اگر از یک ریاضی‌دان بپرسی یک دوازده‌وجهی منتظم چند لبه دارد، جواب شما را می‌دهد که دوازده‌وجهی، ۱۲ وجه دارد که هرکدام ۵ لبه دارند. در مجموع ۶۰ لبه، اما از آن‌جا که هر لبه به دو وجه تعلق دارد و بنابراین دو بار شمرده شده‌است، تعداد لبه‌های یک دوازده وجهی ۳۰ است و در این عدد شکی نیست.

سقراط آیا او به مثال‌های دیگری هم اشاره کرد؟

بقراط مختصری، اما من تمام آن‌ها را به یاد نمی‌آورم. او گفت که در واقعیت شما دو چیز را پیدا نمی‌کنید که دقیقاً مانند هم باشند. هیچ دو تخم‌مرغی دقیقاً مانند هم نیستند، حتی پایه‌های معبد پوزئیدون[۱۹] کمی با یک‌دیگر متفاوت‌اند، اما شخصی می‌تواند مطمئن باشد که دو قطر یک مربع دقیقاً برابراند. او از هراکلیتوس[۲۰] نقل قول کرد که گفته، هر چه که وجود دارد به طور دائم در حال تغییر است، و دانش یقینی تنها درباره‌ی چیزهایی که تغییر نمی‌کنند ممکن است، برای مثال، اعداد زوج و اعداد فرد، خط مستقیم و دایره.

سقراط کافی است. این مثال‌ها من را قانع کرد که در ریاضیات می‌توانیم دانشی که بدون شک است بدست آوریم، در حالی که در دانش‌های دیگر یا در زندگی روزانه غیرممکن است. بیا تا نتیجه جستجوی خود را درباره‌ی طبیعت ریاضیات خلاصه کنیم. آیا حق با من است که بگویم ما به این نتیجه رسیدیم که ریاضیات، اشیاء غیر موجود را مطالعه می‌کند و قادر است تا تمام حقیقت را درباره‌ی آن‌ها بیابد؟

بقراط بله، این چیزی است که به اثبات رساندیم.

سقراط اما به خاطر زئوس، بقراط عزیز، به من بگو این اسرارآمیز نیست که یک شخص می‌تواند درباره‌ی چیزهایی که وجود ندارند بیش‌تر از چیزهایی که وجود دارند، بداند؟

بقراط اگر این‌گونه بیانش کنی، مطمئناً اسرارآمیز است. من اطمینان دارم که در استدلال‌های ما خطایی رخ داده‌است.

سقراط نه، ما با حداکثر دقت پیش می‌رفتیم و هر مرحله استدلال را کنترل می‌کردیم. اشتباهی در استدلال ما نمی‌تواند باشد. اما توجه کن، من چیزی به یاد می‌آورم که ممکن است در حل این معما به ما کمک کند.

بقراط سریعاً به من بگو، زیرا من کاملاً گیج شده‌ام.

سقراط امروز صبح من در سالن آرکنت[۲۱] دوم بودم، در آن‌جا زن نجار از روستای پیتوس[۲۲] متهم به خیانت شده بود که با کمک معشوقش، همسرش را کشته‌است. زن اعتراض می‌کرد و به آرتمیس[۲۳] و آفرودیته[۲۴] قسم می‌خورد که بی‌گناه است، که کسی را جز همسرش دوست نداشته‌است و همسرش به دست یک دزد دریایی کشته شده‌است. افراد بسیاری به عنوان شاهد احضار شدند. بعضی می‌گفتند که زن مجرم است، بقیه می‌گفتند او بی‌گناه است. فهمیدن این‌که واقعاً چه اتفاقی افتاده است غیرممکن بود.

بقراط دوباره من را دست انداخته‌اید؟ ابتدا من را کاملاً گیج می‌کنید و حالا به جای کمک به من در یافتن حقیقت، این ماجرا را تعریف می‌کنید.

سقراط عصبانی نشو دوست من، من دلیل جدی برای صحبت درباره‌ی این زن که جرمش غیر قابل اثبات بود، دارم. اما یک چیزْ قطعی بود. زن وجود داشت. من او را با چشم‌های خودم دیدم، و از هرکس که آن‌جا بود، بسیاری از آن‌ها حتی در زندگی خود دروغ نیز نگفته بودند، می‌توانی همین سوال را بپرسی و همین جواب را دریافت خواهی‌کرد.

بقراط شهادت تو، سقراط عزیز، برای من کافی است. بیا بپذیریم که زن وجود دارد. اما این حقیقت با ریاضیات چه ارتباطی دارد؟

سقراط بیش‌تر از آن‌چه که تصورش را بکنی. اما ابتدا به من بگو آیا داستان آگاممنون[۲۵] و کلوتایمنسترا[۲۶] را می‌دانی؟

بقراط همه، داستان را می‌دانند. من، سه‌گانه‌ی آشیل[۲۷] را سال گذشته در تئاتر دیدم.

سقراط بسیار خب. داستان را به صورت خلاصه برای من تعریف کن.

بقراط در حالی‌که آگاممنون، پادشاه موکنای[۲۸] ، زیر دیوارهای تروآ[۲۹] می‌جنگید، همسرش، کلوتایمنسترا، با آیگیستوس[۳۰] ، پسرعموی شوهرش، به صورت پنهانی رابطه‌ی نامشروع برقرار کرد. بعد از سقوط تروآ، وقتی آگاممنون به خانه بازگشت، همسر و معشوقه‌ی همسرش، او را به قتل رساندند.

سقراط به من بگو بقراط، به راستی کلوتایمنسترا مجرم بود؟

بقراط متوجه نمی‌شوم چرا از من چنین سوالی می‌پرسی. هیچ شکی راجع به داستان وجود ندارد. طبق گفته‌ی هومر[۳۱] ، وقتی

---

[۱۹] Poseidon
[۲۰] Heraclitus
[۲۱] آرکنت به معنای رئیس می‌باشد.

[۲۲] Pitthos
[۲۳] Artemis
[۲۴] Aphrodite
[۲۵] Agamemnon
[۲۶] Clytemnestra
[۲۷] Aeschylus
[۲۸] Mycenae
[۲۹] Troy
[۳۰] Aegisthus
[۳۱] Homer

ادیسئوس[۳۲] دنیای مردگان را ملاقات کرد، او آگاممنون را دید که سرنوشت غم‌انگیز خود را برای ادیسئوس تعریف کرد.

سقراط اما آیا تو مطمئنی که کلوتایمنسترا و آگاممنون و تمام شخصیت‌های دیگر داستان واقعاً وجود داشته‌اند؟

بقراط شاید اگر این را در جمع بگویم طرد شوم، اما نظر من این است که امروز، بعد از قرن‌ها، اثبات یا رد داستان‌های هومر غیرممکن است. اما این کاملاً نامربوط است. زمانی که گفتم کلوتایمنسترا مجرم بود، درباره‌ی کلوتایمنسترا واقعی، اگر چنین شخصی اصلاً وجود داشته‌است، صحبت نمی‌کردم بلکه درباره‌ی کلوتایمنسترا در سنت هومری خودمان، درباره‌ی کلوتایمنسترا در سه‌گانه‌ی آشیل صحبت می‌کردم.

سقراط می‌توانم بگویم که ما درباره‌ی کلوتایمنسترای واقعی چیزی نمی‌دانیم؟ حتی اگر وجودش غیرقابل اطمینان باشد، در خصوص کلوتایمنسترا که شخصیتی در سه‌گانه‌ی آشیل است، ما مطمئن هستیم که او مجرم بود و آگاممنون را کشته زیرا این چیزی است که آشیل به ما گفته‌است.

بقراط بله، البته. اما شما چرا روی تمام این‌ها تاکید دارید؟

سقراط به زودی خواهی دید. به من اجازه بده آن‌چه را که یافتیم خلاصه کنم. این غیر ممکن است که در مورد زنِ خاکی که امروز در آتن محاکمه می‌شد، اثبات کنیم مجرم است، در حالی‌که در مورد جرم کلوتایمنسترا که شخصیتی در نمایش است و احتمالا هرگز وجود نداشته، شکی نیست. آیا موافقی؟

بقراط حالا دارم متوجه می‌شوم که شما چه می‌خواهید بگویید. اما بهتر است خودتان نتیجه‌گیری کنید.

سقراط نتیجه این است: ما دانش قابل اطمینان‌تری درباره‌ی افرادی که تنها در تخیل ما وجود دارند، برای مثال درباره‌ی شخصیت‌های یک نمایش، داریم تا درباره‌ی افراد زنده. اگر بگوییم که کلوتایمنسترا مجرم بود، تنها بدین معناست که آشیل این‌گونه او را تصور کرده و در نمایشش به تصویر کشیده‌است. ما ممکن است مطمئن باشیم که قطرهای مربع با یک‌دیگر برابرند زیرا این از تعریف مربع به وسیله‌ی ریاضی‌دانان حاصل می‌شود.

بقراط آیا منظور تو این است، سقراط، که نتیجه‌ی تناقض برانگیز ما به راستی درست است و یک شخص می‌تواند دانش قابل اطمینان‌تری درباره‌ی اشیاء غیرموجود، برای مثال اشیاء ریاضی، داشته‌باشد تا درباره‌ی اشیاء طبیعت؟ فکر می‌کنم الان دلیلش را هم می‌دانم. مفهوم‌هایی که ما خودمان خلق کرده‌ایم به علتِ خودِ طبیعتشان کاملاً برای ما شناخته شده‌اند، و ما می‌توانیم تمام حقیقت را درباره‌ی آن‌ها بیابیم زیرا هیچ واقعیتی خارج از تصور ما ندارند. با این وجود، اشیاءئی که در دنیای خارج هستند با تصویر ما از آن‌ها، که همیشه ناقص و تقریبی است، یکی نیستند، بنابراین دانش ما درباره‌ی این اشیاء حقیقی هیچ‌گاه نمی‌تواند کامل و همراه با یقین باشد.

سقراط درست است دوست جوان من، و تو بهتر از آن‌گونه که من می‌توانستم، بیانش کردی.

بقراط این، به خاطر شما است، سقراط، زیرا شما مرا راهنمایی کردید تا این چیزها را بفهمم. حالا متوجه می‌شوم که ثئای‌تتوس در گفتن این‌که من اگر می‌خواهم دانش بدون ضعف کسب کنم، باید ریاضی بخوانم، کاملاً حق داشت. همچنین می‌دانم چرا حق داشت. با این وجود، اگر چه با صبر و حوصله تا اکنون مرا راهنمایی کرده‌ای، لطفاً هنوز مرا رها نکن زیرا یکی از سوالاتم، در حقیقت مهم‌ترینِ آن، هنوز بی‌پاسخ مانده‌است.

سقراط این سوال چیست؟

بقراط لطفاً به یاد بیاور، سقراط، که من آمده‌بودم تا نظر شما را در مورد این‌که آیا باید ریاضی بخوانم، سوال کنم. شما به من کمک کردی که بفهمم ریاضی و تنها ریاضی است که می‌تواند دانش باثباتی که می‌خواهم به من بدهد. اما کاربرد این دانش چیست؟ این واضح است که اگر شخصی درباره‌ی جهان موجود دانشی به دست آورد، حتی اگر این دانش ناقص بوده و کاملاً یقینی نباشد، این دانش بدون شک دارای ارزش برای شخص و کشور است. حتی اگر شخصی میزانی از دانش درباره‌ی چیزهایی مانند ستاره‌ها کسب کند، ممکن است سودمند باشد، برای مثال برای جهت‌یابی در شب. اما کاربرد دانشی که درباره‌ی اشیاء ناموجود، مانند آن‌چه که ریاضیات ارائه می‌کند، چیست؟ حتی اگر کامل و بدون تردید باشد، کاربرد دانشی درباره‌ی اشیاءئی که در واقعیت وجود ندارند چیست؟

سقراط دوست عزیز من، کاملاً مطمئن هستم که جواب را می‌دانی و تنها می‌خواهی مرا بیازمایی.

بقراط به هرکول، جواب را نمی‌دانم. لطفاً من را کمک کن.

سقراط بسیار خوب، بیا سعی کنیم جواب را بیابیم. ما به اثبات رساندیم که مفهوم‌های ریاضیات تنها توسط ریاضی‌دانان خلق شده‌است. به من بگو، آیا این بدین معناست که ریاضی‌دان مفاهیم خود را هرگونه که او را به صورت دلبخواه خوش‌حال کند، انتخاب می‌کند؟

بقراط همان‌طور که به شما گفتم، هنوز درباره‌ی ریاضیات زیاد نمی‌دانم. اما به نظرم می‌رسد که ریاضی‌دان در انتخاب اشیاء مورد مطالعه‌اش به اندازه‌ی شاعر در انتخاب شخصیت‌های نمایشش آزاد است، و همان‌طور که شاعر هر خصلتی که او را راضی کند به

[۳۲] Odysseus

شخصیت‌هایش می‌دهد، بنابراین ریاضی‌دان نیز هر خصوصیاتی که دوست دارد به مفهوم‌هایش اعطا می‌کند.

سقراط اگر این‌گونه بود، به اندازه‌ی ریاضی‌دانان حقایق ریاضی وجود داشت. تو چگونه توضیح می‌دهی که تمام ریاضی‌دانان مفهوم‌ها و مساله‌های یکسانی را مطالعه می‌کنند. تو چگونه توضیح می‌دهی، همان‌طور که گاهی اتفاق می‌افتد، ریاضی‌دانانی که بسیار دور از یک‌دیگر زندگی می‌کنند و هیچ ارتباطی نداشته‌اند، جداگانه حقیقت‌های یکسانی را کشف می‌کنند؟ من هیچ‌گاه درباره‌ی دو شاعر که شعر یکسان سروده باشند نشنیده‌ام.

بقراط من هم چنین چیزی نشنیده‌ام. اما به یاد می‌آورم که ثئای‌تتوس به من درباره‌ی قضیه‌ی جالبی که در فاصله‌های نامتوافق[۳۳] یافته‌بود، گفت. او این نتیجه را به استادش، تئودوروس، نشان داد. تئودوروس نامه‌ای از آرخوطس[۳۴] که در آن، همان قضیه دقیقاً کلمه به کلمه موجود بود، نشان داد.

سقراط در شعر این غیر ممکن است. الان می‌بینی که مشکلی وجود دارد. اما بگذار ادامه دهیم. چگونه توضیح می‌دهی که ریاضی‌دانانِ کشورهای مختلف اکثر اوقات درباره‌ی حقیقت موافق هستند، در حالی‌که درباره‌ی سوالاتی که به کشور مربوط می‌شود، برای مثال، پارس‌ها[۳۵] و اسپارت‌ها[۳۶] دیدگاه‌های کاملاً متفاوتی از ما در آتن دارند، و علاوه بر این، ما در این‌جا با یک‌دیگر موافق نیستیم؟

بقراط می‌توانم به سوال آخر پاسخ دهم. در مسائلی که مربوط به کشور می‌شود هر شخصی نفع دارد، و این منافع شخصی گاهی اوقات در مقابل یک‌دیگرند. به این علت است که رسیدن به یک توافق سخت است. با این همه، ریاضی‌دان به طور خالص به وسیله‌ی میلش برای کشف حقیقت راهنمایی می‌شود.

سقراط آیا منظورت این است که ریاضی‌دانان سعی در پیدا کردن حقیقتی دارند که کاملاً مستقل از خودشان است؟

بقراط بله، همین‌طور است.

سقراط بنابراین ما در اشتباه بودیم که فکر می‌کردیم ریاضی‌دانان اشیاء مورد مطالعه‌شان را طبق اراده‌ی خود انتخاب می‌کنند. به نظر می‌رسد که اشیاء مورد مطالعه‌شان به طریقی وجود دارند که از خودشان مستقل است. باید این معمای جدید را حل کنیم.

بقراط نمی‌دانم چگونه شروع کنم.

سقراط اگر هنوز صبر داری، بیا با هم سعی کنیم. به من بگو، تفاوت بین یک دریانورد که یک جزیره‌ی خالی از سکنه را پیدا می‌کند و یک نقاش که یک رنگ جدید را که هیچ نقاشی قبل از او استفاده نکرده، پیدا می‌کند چیست؟

بقراط فکر می‌کنم دریانورد، کاشف نامیده شود و نقاش، خلاق. دریانورد یک جزیره را که قبل از او وجود داشته، و تنها ناشناخته بوده، کشف می‌کند، درحالی‌که یک نقاش، رنگ جدید را که قبل از او اصلاً وجود نداشته خلق می‌کند.

سقراط هیچ‌کس بهتر از این نمی‌توانست پاسخ دهد. اما به من بگو، ریاضی‌دانی که حقیقت جدیدی پیدا می‌کند، او آن را کشف می‌کند یا خلق می‌کند؟ او مانند دریانورد، کاشف است یا مانند نقاش، خلاق؟

بقراط به نظر من ریاضی‌دان بیش‌تر شبیه کاشف است. او یک دریانورد بی‌باک است که در دریای ناشناخته‌ی تفکر دریانوردی می‌کند و سواحل، جزیره‌ها و گرداب‌ها را سیاحت می‌کند.

سقراط بسیار عالی گفتی، و من با تو کاملاً موافقم. فقط می‌خواهم اضافه کنم یک درجه کمتر، ریاضی‌دانْ خلاق نیز هست، به‌خصوص زمانی که مفهومی جدید خلق می‌کند. بلکه هر کاشفی باید در یک حدی خلاق هم باشد. برای مثال، اگر یک دریانورد می‌خواهد به جایی برود که دیگر دریانوردان قبل از او موفق به رسیدن به آنجا نشده‌بودند، او باید یک کشتی بسازد که از کشتی‌هایی که دیگر دریانوردان استفاده می‌کردند بهتر باشد. مفاهیم جدید که به وسیله‌ی ریاضی‌دانان خلق می‌شود مانند کشتی‌هایی هستند که کاشف را در دریای بزرگ تفکر دورتر می‌برد.

بقراط سقراط عزیز، به من کمک کردی که جواب سوالی را که به نظرم بسیار سخت بود پیدا کنم. مهم‌ترین هدف ریاضی‌دان سیاحت رازها و معماهای دریایِ تفکر انسان است. این‌ها از شخص ریاضی‌دان مستقل‌اند، گرچه در کل از انسان، نه. ریاضی‌دانان آزادی مسلم در خلق مفاهیم جدید به عنوان ابزار را دارند، و به نظر می‌رسد او می‌تواند این کار را بنابر صلاح‌دید خود انجام دهد. با این وجود، او در انجام این [کار] کاملاً آزاد نیست زیرا مفاهیم جدید باید برای کارش مفید باشند. دریانورد نیز می‌تواند هر نوع کشتی‌ای بنابر صلاح‌دید خود بسازد، اما بدون شک، او باید دیوانه باشد که کشتی‌ای بسازد که با اولین طوفان در هم بشکند. حالا فکر می‌کنم همه چیز واضح است.

سقراط اگر همه چیز را به وضوح دریافتی، سعی کن دوباره این سوال را جواب دهی؟ اشیاء ریاضی چیست؟

بقراط ما به این نتیجه رسیدیم که در کنار جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، جهان دیگری وجود دارد، جهان تفکر انسان، و ریاضی‌دان دریانورد بی‌باکی است که این جهان را سیاحت می‌کند، از مشکلات و کارهای پر مخاطره که منتظر او هستند شانه خالی نمی‌کند.

---

[۳۳] incommensurable distances
[۳۴] Archytas
[۳۵] Persians
[۳۶] Spartans

سقراط دوست من، شور جوانی تو من را فریفته‌ی خود کرده‌است، اما متاسفم که با این شور و حرارت بعضی سوال‌ها را نادیده می‌گیری.

بقراط این سوال‌ها چه هستند؟

سقراط نمی‌خواهم تو را ناامید کنم، اما احساس می‌کنم سوال اصلی تو هنوز جواب داده نشده‌است. ما هنوز این سوال را جواب نداده‌ایم: فایده‌ی سیاحت دریای شگفت‌انگیز تفکر انسان چیست؟

بقراط مانند همیشه حق با تو است، سقراط عزیز من. اما این‌بار روش خود را کنار می‌گذاری و جواب را مستقیماً به من می‌گویی؟

سقراط نه دوست من، حتی اگر می‌توانستم، این کار را انجام نمی‌دادم، و این به خاطر خود توست. دانشی که شخصی بدون کار به دست می‌آورد برای او بی‌ارزش است. ما چیزهایی را عمیقاً می‌فهمیم که خودمان، شاید با کمی کمک از خارج، بیابیم، مانند گیاه، که تنها از آبی می‌تواند استفاده کند که با ریشه‌های خودش از خاک به بالا بکشد.

بقراط بسیار خوب، بیا جستجوی خود را با همان روش ادامه دهیم، حداقل با یک سوال به من کمک کن.

سقراط بیا به جایی باز گردیم که اثبات کردیم ریاضی‌دانان با تعداد گوسفندان، کشتی‌ها و یا دیگر اشیاء موجود سر و کار ندارند، بلکه با خود اعداد سر و کار دارند. با این حال، فکر نمی‌کنی درستی آن‌چه که ریاضی‌دانان در اعدادِ محض کشف می‌کنند، برای تعداد چیزهای موجود نیز درست باشد؟ برای مثال، ریاضی‌دانان ۱۷ را عددی اول می‌یابند. بنابراین، این صحیح نیست که شما نمی‌توانید ۱۷ گوسفند زنده را بین گروهی از افراد تقسیم کنید، و به هر کس مقدار مساوی بدهید، مگر دقیقاً ۱۷ نفر باشند؟

بقراط البته، این درست است.

سقراط بسیار خوب، درباره‌ی هندسه چطور؟ آیا می‌تواند برای ساختن خانه، درست کردن ظرف و یا محاسبه‌ی مقدار غلاتی که یک کشتی می‌تواند در خود جای دهد، به‌کار رود؟

بقراط البته، می‌تواند به‌کار رود، گرچه به نظرم می‌رسد برای این اهدافِ کاربردیِ صنعتگر، ریاضیات زیادی نیاز نیست. قواعد ساده‌ای که هم‌اکنون منشی فراعنه[۳۷] در مصر می‌داند برای بیش‌ترِ چنین مقاصدی کافی هستند، و اکتشافات جدیدی که ثئای‌تتوس با چنان شور و اشتیاق طغیان کرده‌ای با من درباره‌ی‌اش صحبت می‌کرد نه استفاده‌ای دارند و نه در عمل به آن‌ها احتیاجی است.

سقراط شاید نه اکنون، اما در آینده ممکن است استفاده شوند.

بقراط من به حال علاقه‌مند هستم.

سقراط اگر می‌خواهی یک ریاضی‌دان باشی، باید بفهمی که بیش‌تر برای آینده کار خواهی‌کرد. حالا بیا به سوال اصلی باز گردیم. ما دیدیم که دانش درباره‌ی جهان تفکر، درباره‌ی چیزهایی که در جهانِ عادیِ محسوس وجود ندارند، می‌تواند برای جواب دادن به سوالاتی درباره‌ی جهان واقعی، برای زندگی روزانه به‌کار رود. این شگفت‌انگیز نیست؟

بقراط بیش‌تر از آن، غیر قابل فهم است. واقعاً یک معجزه است.

سقراط شاید تا این اندازه هم شگفت‌انگیز نباشد، و اگر پوسته‌ی سوال را بشکافیم، مروارید واقعی را پیدا کنیم.

بقراط لطفاً، سقراط عزیز، مانند پوثیا[۳۸] معماگونه صحبت نکن.

سقراط به من بگو، آیا شگفت‌زده می‌شوی اگر کسی که به کشورهای دور سفر کرده، و چیزهای بسیاری دیده و تجربه کرده، به شهر خود باز گردد و از تجربیاتش برای دادن توصیه‌های مفید به همشهریانش استفاده کند؟

بقراط اصلاً.

سقراط حتی اگر کشورهایی که مسافر بازدید کرده‌است، بسیار دور باشد و مردمی کاملاً متفاوت، که با زبان‌های دیگری صحبت می‌کنند و خدایان دیگری می‌پرستند، در آن‌جا سکونت گزیده باشند؟

بقراط در این مورد هم نه، زیرا بین انسان‌های مختلف، چیزهای مشترک زیادی وجود دارد.

سقراط حالا به من بگو، اگر مشخص شود که جهان ریاضیات، با وجود غرابت‌هایش، از بعضی جنبه‌ها به جهان واقعی خودمان شبیه است، باز هم کاربرد ریاضیات در مطالعه‌ی جهان واقعی معجزه به نظر می‌رسد؟

بقراط در این مورد نه، اما من شباهتی بین جهان واقعی و جهان خیالی ریاضیات نمی‌بینم.

سقراط آیا آن تخته سنگِ آن سوی رودخانه را می‌بینی، آن‌جا که رودخانه گسترش پیدا کرده و یک دریاچه تشکیل داده‌است؟

بقراط بله می‌بینم.

سقراط و عکس تخته سنگ که بر روی آب نقش بسته می‌بینی؟

بقراط البته که می‌بینم.

سقراط به من بگو تفاوت بین تخته سنگ و نقش آن چیست؟

بقراط تخته سنگ جسمِ جامدِ سختی است. به وسیله‌ی خورشید گرم شده‌است. اگر لمسش کنی، احساس می‌کنی که خشن است. عکسِ نقش بسته‌شده نمی‌تواند لمس شود، اگر دستم را روی آن بگذارم، تنها آب سرد را لمس می‌کنم. در واقع، عکس نقش بسته‌شده واقعاً وجود ندارد، توهم است، نه چیز دیگر.

سقراط هیچ چیز مشترکی بین تخته سنگ و نقشِ عکسش نیست؟

[۳۷] pharaohs

[۳۸] Pythia

بقراط تا حدی، عکسِ نقش بسته‌شده تصویری صادقانه از تخته سنگ است. شکل سنگ و حتی تکیه‌گاه‌های کوچکش، کاملاً در عکسِ نقش بسته‌شده قابل دیدن هستند. اما چه نتیجه‌ای می‌خواهی بگیری؟ می‌خواهی بگویی جهان ریاضیات عکسِ نقش بسته‌شده از جهان واقعی در آینه فکر ماست؟

سقراط بله و خیلی خوب بیانش کردی.

بقراط اما چگونه ممکن است؟

سقراط بیا به‌یاد بیاوریم که مفاهیم مجرد ریاضیات چگونه شکل می‌گرفت. گفتیم که ریاضیات با اعداد محض سر و کار دارد، نه با تعداد اشیاء واقعی. اما فکر می‌کنی کسی که هیچ‌گاه اشیاء واقعی را نشمرده‌است می‌تواند مفهوم مجرد اعداد را بفهمد؟ وقتی یک کودک شمردن را یاد می‌گیرد، ابتدا ریگ‌ها و چوب‌های کوچک را می‌شمارد. تنها اگر بداند که دو ریگ و سه ریگ می‌شود پنج ریگ، و عیناً درباره‌ی چوب‌ها و سکه‌ها، [آن‌گاه] قادر خواهد بود که بفهمد دو و سه می‌شود پنج. در مورد هندسه هم همین‌طور است. کودک به مفهوم کره از طریق تجربه‌ی اشیاء کروی مانند می‌رسد. نوع بشر تمام مفاهیم بنیادی ریاضیات را به روش مشابه آشکار می‌سازد. این مفاهیم از دانشی درباره‌ی جهان واقعی متبلور می‌شوند، و بنابراین عجیب نیست بلکه کاملاً طبیعی است که علامت‌های منشاء خود را دربر دارند، مانند بچه‌ها که نشانه‌های والدین خود را دارند. و همان‌طور که وقتی کودکان بزرگ می‌شوند حامیان والدین خود می‌شوند، هر شاخه‌ی ریاضی، اگر به اندازه‌ی کافی گسترش پیدا کند، در بررسی کردن جهان واقعی به کار می‌آید.

بقراط حالا کاملاً برای من واضح است که چگونه دانشی درباره‌ی اشیاء ناموجودِ جهان ریاضیات می‌تواند در زندگی روزمره مفید واقع شود. شما با کمک به من در فهمیدن این موضوع خدمت بزرگی به من کردید.

سقراط من به تو بقراط عزیز حسادت می‌کنم، زیرا من هنوز درباره‌ی یک چیز که امیدوار بودم حل و فصل شود، در فکر هستم. شاید تو بتوانی به من کمک کنی.

بقراط با خوش‌حالی کمک می‌کنم، اما نگران هستم که دوباره مرا دست‌انداخته باشید. با درخواست کمک از من، مرا شرمنده نکن، بلکه رک و راست سوالی را که از نظر انداختم به من بگو.

سقراط تو اگر سعی کنی نتیجه گفتگویمان را خلاصه کنی، خودت آن را خواهی دید.

بقراط وقتی واضح شد که چرا ریاضیات قادر است دانش قطعی درباره‌ی جهانی متفاوت از جهانی که در آن زندگی می‌کنیم، جهان تفکر انسان، بدهد، سوال باقی مانده، استفاده‌ی این دانش شد. حال فهمیدیم که جهان ریاضیات چیزی جز انعکاس جهان واقعی در ذهن ما نیست. این موضوع روشن کرد که هر کشف درباره‌ی جهان ریاضیات اطلاعات بیش‌تری درباره‌ی جهان واقعی به ما می‌دهد. من کاملاً با این جواب قانع شدم.

سقراط اگر به تو می‌گویم جواب کامل نیست، با این کار را نمی‌خواهم که تو را گیج کنم، بلکه مطمئن هستم دیر یا زود سوال برایت پیش می‌آید و از من برای این‌که توجه تو را به آن جلب نکردم انتقاد خواهی‌کرد. خواهی گفت: 'به من بگو سقراط، منطق مطالعه‌ی عکس‌های نقش بسته‌شده چیست وقتی می‌توانیم خود اشیاء را مطالعه کنیم؟'

بقراط کاملاً حق با توست، این سوالی واضح است. شما یک جادوگری، سقراط. شما می‌توانید با تعداد کمی کلمه مرا گیج کنی، شما می‌توانی با یک سوال به ظاهر غیرمغرضانه تمام عمارتی که با مشکلات زیاد بنا کرده‌بودیم، خراب کنید. البته باید پاسخ دهم که اگر قادر بودیم به شیء اصلی نگاه کنیم، دلیلی نداشت که به عکسِ نقش بسته‌شده نگاه کنیم. اما من مطمئن هستم که این نشان دهنده‌ی آن است که تشبیه ما در این مورد کارآمد نیست. مطمئناً جوابی وجود دارد، تنها نمی‌دانم چگونه آن را پیدا کنم.

سقراط حدس تو درست است که تناقض از آن‌جا ناشی می‌شود که ما از تشبیه عکسِ منعکس‌شده بسیار استفاده کردیم. یک تشبیه شبیه کمان است، اگر زیاد آن را بکشی، می‌شکند. بیا تا رهایش کنیم و یکی دیگر انتخاب کنیم. مطمئناً می‌دانی دریانوردان و مسافران از نقشه به خوبی استفاده می‌کنند.

بقراط من خودم این را تجربه کرده‌ام. آیا منظورت این است که ریاضی‌دانان نقشه‌ای از جهان واقعی تهیه می‌کنند؟

سقراط بله، می‌توانی این سوال را پاسخ دهی: نگاه کردن به نقشه به جای نگاه به یک منظره چه مزیتی دارد؟

بقراط واضح است: به وسیله‌ی نقشه می‌توانیم مسافت وسیعی را نگاه اجمالی بیاندازیم که تنها با هفته‌ها یا ماه‌ها مسافرت پیموده می‌شود. نقشه، جز مهم‌ترین چیزها، تمام جزئیات را نشان نمی‌دهد. بنابراین اگر می‌خواهیم برای یک سفر طولانی برنامه‌ریزی کنیم، مفید است.

سقراط بسیار خوب. اما چیز دیگری از خاطر من گذشت.

بقراط آن چیست؟

سقراط دلیل دیگری وجود دارد که چرا مطالعه‌ی تصاویرِ ریاضیِ دنیا ممکن است سودمند باشد. اگر ریاضی‌دانان خواصی از دایره را کشف کنند، این به یکباره به ما اطلاعاتی درباره‌ی هر شیء دایره شکل می‌دهد. بنابراین، روش ریاضیات ما را قادر می‌سازد که با اشیاء

متفاوت در یک زمان سر و کار داشته‌باشیم.

بقراط درباره‌ی این تشبیه چطور: اگر شخصی به یک شهر از بالای یک کوه نزدیک نگاه کند، دید وسیع‌تری پیدا می‌کند تا این‌که همان شخص در میان خیابان‌های کج و کوله راه برود، یا اگر یک فرمانده تحرکات لشکر دشمن را از یک تپه رصد کند، تصویر دقیق‌تری از موقعیتْ نسبت به سربازانِ خط مقدم که تنها کسانی را که مستقیماً مقابل آن‌ها هستند، می‌بینند، پیدا می‌کند.

سقراط بسیار خوب، تو در ساخت تشبیه‌های جدید از من پیشی گرفتی، اما از آن‌جا که من نمی‌خواهم عقب بیافتم، به من اجازه بده یک حکایت اضافه کنم. اخیراً به یک نقاشی از آریستوفون[۳۹] ، پسر آگالوفون[۴۰] ، نگاه کردم، و نقاش به من اخطار داد، 'اگر بسیار به نقاشی نزدیک شوی، سقراط، تنها نقطه‌های رنگی خواهی دید، و تمام تصویر را نخواهی دید.'

بقراط البته، حق با او بود، و همین‌طور شما، وقتی که اجازه ندادید گفتگویمان را قبل از این‌که به قلب سوال برسیم، تمام کنیم. اما فکر می‌کنم زمان آن رسیده که به شهر برگردیم زیرا شب در حال سایه افکندن است و من گشنه و تشنه هستم. اگر هنوز حوصله‌ای داری، می‌خواهم در حال راه رفتن چیزی بپرسم.

سقراط بسیار خوب، بیا شروع [به قدم زدن] کنیم و تو سوالت را بپرسی.

بقراط بحث ما کاملاً مرا متقاعد کرد که باید شروع به مطالعه ریاضیات کنم و من به این خاطر از تو بسیار سپاس‌گزارم. اما به من بگو، شما خودتان چرا ریاضیات انجام نمی‌دهید؟ با قضاوت از فهم عمیق شما از طبیعت حقیقی و اهمیت ریاضیات، حدس من این است که شما از تمام ریاضی‌دانان هِلاس، اگر بر روی [ریاضیات] تمرکز کنید، جلو خواهید زد. من خوش‌حال خواهم شد که به عنوان شاگردْ شما را دنبال کنم، اگر مرا قبول کنید.

سقراط نه، بقراط عزیز، این کار من نیست. تئودوروس بیش‌تر از من درباره‌ی ریاضیات می‌داند و تو استادی بهتر از او نمی‌توانی بیابی. و درباره‌ی سوالت که من چرا ریاضی‌دان نیستم، دلیلش را به تو می‌گویم. من حسن نظرم را درباره‌ی ریاضیات مخفی نمی‌کنم. من فکر می‌کنم ما هِلاسی‌ها در هیچ فنی جز ریاضیات چنین پیش‌رفت‌های مهمی نداشتیم، و این تنها شروع کار است. اگر یک‌دیگر را در جنگ‌های احمقانه از بین نبریم، نتیجه‌های فوق‌العاده به عنوان کاشف و همین‌طور خلاق بدست خواهیم آورد. تو پرسیدی که چرا به صف آن‌هایی که چنین دانش عظیمی را توسعه می‌دهند نمی‌پیوندم. در حقیقت، من به گونه‌ای ریاضی‌دانم، اما از نوعی دیگر. یک صدای درونی، که می‌توانی آن را یک الهام، که من همیشه با دقت گوش می‌کنم، بنامی، از من سال‌ها پیش پرسید 'منشا پیش‌رفت‌های عظیمی که ریاضی‌دانان در علم شکوهمندشان کسب کردند، چیست؟' من جواب دادم، 'من فکر می‌کنم منشا پیش‌رفت ریاضی‌دانان در روش‌های آنان، منطق عالی، تلاش بدون وقفه بدون کمترین سازش تا رسیدن به حقیقت کامل، عادتشان به شروع همیشگی از اصول اولیه، تعریف دقیق تمام مفهوم‌ها و خودداری از تناقض‌گویی باشد.' صدای درونی من جواب داد، 'بسیار خوب، اما چرا فکر می‌کنی، سقراط، این روش فکر و استدلال کردن تنها برای مطالعه‌ی اعداد و اشکال هندسی می‌تواند استفاده شود؟ چرا سعی نمی‌کنی که همشهریانت را متقاعد کنی که تا همین روش‌های منطقی عالی را در زمینه‌های دیگر، برای مثال در فلسفه و سیاست، در بحث درباره‌ی مشکلات خصوصی و همگانی زندگی هرروزه، به‌کار ببندند؟' از آن زمان به بعد، این هدف من بوده‌است. من نشان دادم (برای مثال تو گفتگوی ما را با پروتاگوراس به یاد می‌آوری) آن‌هایی که گمان می‌شود مردان باتدبیری هستند، اکثراً احمق‌های نادانی هستند. تمام استدلال‌های آن‌ها، برخلاف ریاضی‌دانان، به دلیل استفاده از مفهوم‌های تعریف نشده و نیمه‌فهمیده شده، فاقد اصول استوار است. با این عمل من موفق شدم تقریباً هر کسی را دشمن خود بکنم. این عجیب نیست، زیرا برای تمام کسانی که در فکر کردن کم تحرک‌اند و با تنبلی به استفاده از عبارت‌های مبهم قانع هستند، من یک مایه‌ی ننگِ زنده هستم. مردم، آن‌هایی را که دائماً متذکر خطاهایی که در اصلاحش ناتوان یا بی‌میل هستند، می‌شوند، دوست ندارند. یک روز خواهد آمد که این مردم به من حمله می‌کنند و مرا از صفحه‌ی روزگار محو می‌کنند. اما تا آن روز بیاید، من کار خود را ادامه می‌دهم. با این همه تو نزد تئودوروس برو.

[۳۹] Aristophon
[۴۰] Agalophon

هزینه‌ی ثابت ناسامانی در بازی‌های تشکیل شبکه به وسیله‌ی تبلیغ سرویس عمومی

اریک دیمین و مرتضی زادی‌مقدم

مترجم: حمید ملک

چکیده. اخیرا بازی‌های تشکیل شبکه با مفروضات بسیار متنوعی بررسی شده‌اند. انگیزه‌ی بررسی این‌گونه بازی‌ها، شبکه‌های اجتماعی است که در آن افراد به صورت خودخواهانه در پی تشکیل یک گراف بین خودشان هستند. در این گراف‌ها، هر گره به دنبال آن است که بیشینه یا میانگین فاصله‌ی خود تا بقیه‌ی گره‌ها را کمینه کند، بدون آن‌که هزینه‌ی زیادی را صرف ساخت گراف کرده باشد. این بازی‌ها با مفروضاتی تعمیم‌یافته هم‌چون محدودیت بودجه‌ی عامل‌ها(گره‌ها)، غیریکسان بودن گره‌ها برای یکدیگر و ... بررسی شده‌اند. در هیچ یک از این مفروضات کران ثابت شناخته‌شده‌ای برای هزینه‌ی ناسامانی وجود ندارد. در واقع در بسیاری از موارد، هزینه‌ی ناسامانی می‌تواند بسیار زیاد باشد، مثلا هزینه‌ی ناسامانی می‌تواند توانی ثابت از تعداد عامل‌ها شود. این بدان معنی است که کنترل هزینه‌ی ناسامانی زمانی که عامل‌ها خودخواهانه عمل می‌کنند، از دسترس ما خارج می‌شود. از طرف دیگر می‌دانیم که هزینه‌ی پایداری در تمامی این مدل‌ها ثابت است، که می‌توان نتیجه گرفت که در شرایطی که عامل‌ها خودخواهانه عمل می‌کنند هم می‌توان به هزینه‌ی کلی معقولی برای شبکه امید داشت.

در این مقاله نشان خواهیم داد که چگونه می‌توان با استفاده از یک کمپین تبلیغاتی (که در سال ۲۰۰۹ در مقاله‌ی [۲] معرفی شد) به یک تعادل بهینه برای شبکه رسید. یک استراتژی تبلیغی ارائه می‌دهیم که با فرض این که نسبت عامل‌هایی که موافق انجام این استراتژی هستند، به نسبت کل عامل‌ها برابر α باشد، هزینه عمومی شبکه حداکثر $O(1/\alpha)$ برابر هزینه‌ی بهینه شود. این نخستین کران ثابتی است که برای هزینه‌ی ناسامانی به دست‌آمده و به صورت جالبی می‌توان آن را برای بازی‌ها با شرایط مختلف مطابقت داد. هم‌چنین استراتژی تبلیغی خود را برای حالتی که α مشخص نشده است تغییر می‌دهیم. گذشته از این در این روش فرض نمی‌کنیم که عامل‌هایی که مایل به همکاری در این استراتژی هستند، باید کل بودجه‌ی خود را صرف همکاری در این استراتژی کنند. فرض این‌که عامل‌ها نسبت β از بودجه‌ی خود را صرف این استراتژی می‌کنند، بازی را به هزینه‌ی ناسامانی ثابت منتهی می‌کند.

۱ مقدمه

در بازی‌های تشکیل شبکه گره‌ها برای ایجاد مسیرهای کوتاه بین یکدیگر، گراف زمینه‌ای[۱] تشکیل می‌دهند. در این بازی هر گره متحمل دو نوع هزینه می‌شود. نوع اول مربوط به هزینه‌ای است که باید برای ساخت شبکه بپردازد[۲] ؛ که همان یال‌هایی است که به گره‌های دیگر ایجاد می‌کند. نوع دوم هزینه‌ی استفاده‌ی گره از شبکه است[۳] ؛ که مجموع فاصله‌ی گره از باقی گره‌های شبکه در نظر گرفته می‌شود. (البته درنظر گرفتن میانگین فاصله‌ی گره از باقی گره‌ها هم در بعضی مقالات استفاده شده است). فرض بر این است که در این بازی‌ها، هر گره خودخواهانه عمل می‌کند و تنها به دنبال کمینه کردن هزینه‌ی خود است. هزینه‌ی عمومی [۴] نیز مجموع هزینه‌ی تمامی گره‌ها درنظر گرفته می‌شود.

برای مطالعه‌ی رفتار شبکه‌های اجتماعی، به دنبال درک بهتری نسبت به بزرگی هزینه‌ی عمومی شبکه با فرض خودخواه بودن گره‌ها هستیم. تعادل نش، شبکه‌های پایداری است که گره‌های خودخواه تشکیل داده‌اند. به صورت دقیق‌تر می‌توان گفت در تعادل نش، هیچ گره‌ای وجود ندارد که با فرض تغییر نکردن استراتژی باقی گره‌ها، مایل به تخطی از استراتژی خود باشد. با این مفروضات، هزینه‌ی ناسامانی برابر است با نسبت پرهزینه‌ترین تعادل نش به هزینه‌ی عمومی شبکه‌ای که توسط یک دانای کل ساخته شده باشد. هزینه‌ی ناسامانی توسط کوتسوپیاس[۵] و پاپادیمیتریو[۶] در [۹،۱۱] معرفی شده است، و برای سنجش رفتار شبکه‌های اجتماعی بین گره‌هایی که خودخواهانه رفتار می‌کنند، استفاده می‌شود. در مقادیر کم هزینه‌ی ناسامانی ، رها کردن شبکه به حال خود منجر به هزینه‌ی عمومی بالایی نمی‌شود. از طرف دیگر، در مقادیر زیاد هزینه‌ی ناسامانی رفتار خودخواهانه گره‌ها می‌تواند هزینه‌ی عمومی بالایی را در مقایسه با حالت بهینه شبکه رقم بزند.

گونه‌ای دیگر از بازی‌های تشکیل شبکه ، بازی (n,k)**-یکنواخت با بودجه‌ی محدود**[۷] نامیده می‌شود. در این بازی گرافی با n گره داریم که هر گره می‌تواند k یال با دیگر گره‌ها ایجاد کند. هزینه‌ی هر گره تنها شامل هزینه‌ی استفاده از شبکه‌ی آن است، ولی هر گره به داشتن

---

[۱] underlying graph
[۲] consruction cost
[۳] usage cost
[۴] social cost
[۵] Koutsoupias
[۶] Papadimitriou
[۷] (n,k)-uniform bounded budget

تعداد مشخصی یال محدود شده است.

ایده کمپین تبلیغاتی را می‌توان برای بازی‌های مختلفی به کار بست. ایده این‌گونه است که، مردم را به وسیله‌ی تبلیغ یک سرویس عمومی به پیروی از یک استراتژی مشخص که درنظر داریم، ترغیب کنیم. می‌توانیم استراتژی گفته شده را طوری تعیین کنیم تا هزینه‌ی عمومی شبکه را بهبود ببخشیم.

ما در مدل خود به دنبال پیدا کردن یک استراتژی تبلیغاتی برای کاهش هزینه‌ی ناسامانی و کنترل عمل‌کرد خودخواهانه گره‌ها هستیم.در این استراتژی به تمامی گره‌ها برای کاهش هزینه‌ی ناسامانی نیاز نداریم. فرض می‌کنیم که نسبت α از گره‌ها از استراتژی پیروی می‌کنند و هر کدام از آن‌ها نسبت β از بودجه‌ی خود را برای کمپین تبلیغاتی هزینه خواهند کرد. این گره‌ها را اصطلاحا **پذیرنده**[۸] می‌نامیم. هر گره پذیرنده، βk از یال‌های خود را برای کمپین تبلیغاتی هزینه می‌کند. ابتدا فرض می‌کنیم که α و β پارامترهای از پیش تعیین‌شده اند و بر اساس آن‌ها یک استراتژی که منجر به هزینه‌ی ناسامانی کمی برای شبکه می‌شود، ارائه می‌کنیم. سپس استراتژی خود را با شرایطی که α و β از پیش تعیین شده نیستند، وفق می‌دهیم. برای رسیدن به مقداری ثابت برای هزینه‌ی ناسامانی ، فرض کرده‌ایم که $\frac{c\log n}{\alpha\beta}$ به ازای مقادیر به اندازه کافی بزرگ c، از kبزرگ‌تر است.

کارهای پیشین: از جمله کارهایی که در گذشته در این زمینه شده می‌توان به کار فبریکنت[۹] اشاره کرده که در آن بازی‌های تشکیل شبکه را معرفی می‌کند[۶]. آن‌ها هزینه‌ی ناسامانی را در این بازی‌ها بررسی کرده و نخستین کران‌های نابدیهی را برای آن به دست آورده‌اند. هم‌چنین با مطالعه‌ی ساختار تعادل نش در این بازی‌ها، حدس زده‌اند که تنها درخت‌ها می‌توانند در این مدل گراف‌های پایداری باشند. پس از آن می‌توان به کار ایبرز[۱۰] اشاره کرده که دسته‌ای جالب از گراف‌های پایدار را برای این بازی‌ها معرفی می‌کنند و حدس درخت بودن این گراف‌ها را نیز رد می‌کنند[۱]. آن‌ها ثابت می‌کنند که هزینه‌ی ناسامانی نمی‌تواند بیش‌تر از $O(n^{1/3})$ باشد که کران بالای بهتری نسبت به کارهای قبلی است و هم‌چنین برای بعضی از شرایط کران بالای ثابتی معرفی می‌کنند. کوربو[۱۱] و پارکز[۱۲] در مرجع [۳] هزینه‌ی ناسامانی را در مدلی دیگر از این بازی‌ها را با عنوان بازی‌های شکل‌گیری شبکه دوطرفه [۱۳] بررسی کرده‌اند. آن‌ها توانسته‌اند کران بالایی از مرتبه‌ی $O(\sqrt{c})$برای هزینه‌ی ناسامانی در این بازی‌ها بیابند که c هزینه‌ی ساخت یک یال در شبکه‌ی مدل مورد بررسی آن‌هاست. به این خاطر که c می‌تواند با n هم‌مرتبه باشد، این کران بالا برابر با توانی از عدد n است.

دیمین[۱۴] و همکاران در کاری دیگر اندازه‌ی مجموعه‌های همسایگی را در گراف‌های پایدار مورد مطالعه قرار داده‌اند، و با استفاده از متدی بازگشتی، اولین کران بالای زیرچندجمله‌ای را برای هزینه‌ی ناسامانی به دست آوردند[۵]. هم‌چنین آن‌ها با مطالعه‌ی گونه‌ای دیگر از این بازی‌ها با نام بازی‌های تشکیل شبکه همکارانه، کران بالایی پلی‌لگاریتمیک [۱۵] برای هزینه‌ی ناسامانی یافتند[۴]. نتایج کار آن‌ها نشان می‌دهد که قطر گراف‌های این بازی‌ها حداکثر از مرتبه‌ی پلی‌لگاریتمیک است که این خود حاکی از آن است که پدیده‌ی جهان کوچک[۱۶] در این بازی‌ها قابل مشاهده است. برای اطلاعات بیش‌تر در رابطه با پدیده‌ی جهان کوچک می‌توان به کارهای کلینبرگ[۱۷] مراجعه کرد[۷،۸].

لاوتاریس[۱۸] و همکاران بر روی بازی‌های تشکیل شبکه ها در مدل بودجه‌ی محدود کارهایی انجام داده‌اند. آن‌ها مدعی شده‌اند در بسیاری از شرایط واقعی، گره‌هایی که خودخواهانه عمل می‌کنند، قادر نیستند تعداد دلخواهی یال با باقی گره‌ها ایجاد کنند، حتی زمانی که انگیزه برای ایجاد یال وجود داشته باشد. در این مدل هر گره تنها می‌تواند تعداد محدودی یال ایجاد کند. آن‌ها این گونه بازی‌ها را بازی‌های تشکیل شبکه با بودجه محدود یکسان نام‌گذاری کرده و کران بالا و پایینی زیرخطی[۱۹] برای هزینه‌ی ناسامانی در این بازی‌ها به دست آورده‌اند. آن‌ها ثابت کرده اند که هزینه‌ی ناسامانی بین $\Omega(\sqrt{\frac{n/k}{\log_k(n)}})$ و $O(\sqrt{\frac{n}{\log_k(n)}})$ است که n و k به ترتیب تعداد گره‌ها و بیشینه‌ی تعداد یال‌هایی است که یک گره می‌تواند ایجاد کند. نکته‌ی جالب موجود در این مدل آن است که حتی با وجود محدود کردن گره‌ها به داشتن تعداد محدودی یال می‌توان به حالتی پایدار در بازی رسید که هزینه‌ی ناسامانی بسیار زیاد است.

در مجموع در بسیاری از بازی‌ها از جمله بازی‌های تشکیل شبکه ، مسیریابی خودخواهانه[۲۰]، تقسیم عادلانه‌ی هزینه[۲۱] و غیره، هزینه‌ی عمومی در یک گراف پایدار می‌تواند در محدوده‌ی بزرگی تغییر کند. به بیان دیگر، در این بازی‌ها تعادل‌هایی با هزینه‌ی عمومی زیاد و

[۸] receptive
[۹] Fabrikant
[۱۰] Abers
[۱۱] Corbo
[۱۲] Parkes
[۱۳] bilatral network formation games

[۱۴] Demain
[۱۵] poly-logarithmic یک چندجمله‌ای که متغیر آن لگاریتم n است.
[۱۶] small world phenomenon
[۱۷] Kleinberg
[۱۸] Laoutaris
[۱۹] sublinear
[۲۰] selfish routing
[۲۱] fair cost sharing

کم موجود است. بالکان[22] و همکاران ادعا می‌کنند که می‌توان با استفاده از تبلیغ سرویس عمومی امیدوار بود که بازی به یک تعادل نش با هزینه‌ی عمومی پایین منتهی شود[۲]. آن‌ها هزینه‌ی ناسامانی را تحت استراتژی‌های مختلف تبلیغاتی مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها در برخی از موارد مانند بازی تقسیم عادلانه‌ی هزینه، استراتژی‌های تبلیغاتی ارائه کرده‌اند که منجر به کاهش هزینه‌ی ناسامانی می‌شود. هم‌چنین آن‌ها ثابت کرده‌اند که در برخی از بازی ها مانند بازی زمان‌بندی[23]، استراتژی تبلیغاتی مؤثری وجود ندارد.

نتایج مقاله نخست کران بالای مجانبی برای هزینه‌ی ناسامانی در بازی‌های بودجه محدود یکنواخت ارائه می‌کنیم. در واقع ثابت می‌کنیم که هزینه‌ی ناسامانی از مرتبه‌ی $O(\sqrt{\frac{n/k}{\log_k(n)}})$ است، که با استفاده از کران پایین به دست آمده در [۱۰] می‌توان نتیجه گرفت که هزینه‌ی ناسامانی از $\theta(\sqrt{\frac{n/k}{\log_k(n)}})$ است.

با توجه به این که این بازی‌ها دارای هزینه‌ی ناسامانی زیادی هستند، به دنبال یافتن یک استراتژی تبلیغاتی هستیم که هزینه‌ی ناسامانی را در بازی‌های با بودجه‌ی محدود یکنواخت، به عددی ثابت کاهش دهد. بدین وسیله با محدود کردن تعداد یال هر گره می‌توانیم مطمئن شویم که هیچ گره‌ای بیش از اندازه بودجه مصرف نمی‌کند. به بیانی دیگر، ما با این کار می‌توانیم هزینه‌ی ناسامانی کم داشته باشیم و رفتار بازی را تحت کنترل خود در آوریم.

به بیان دقیق‌تر، یک استراتژی تبلیغاتی ارائه می‌کنیم که بازی را به تعادلی سوق دهد که هزینه‌ی ناسامانی آن حداکثر از $O(1/\alpha)$ باشد که α نسبتی از بازیکنان(گره‌ها) است که از استراتژی ما پیروی می‌کنند. فرض ما بر این نیست که تمامی گره‌ها از استراتژی ما پیروی می‌کنند، حتی زمانی که α بسیار کوچک باشد نیز به بازی هزینه‌ی ناسامانی کمی خواهد داشت. همچنین فرض نمی‌کنیم که گره‌ای که از استراتژی ما پیروی می‌کند، تمامی یال‌ها(بودجه) خود را در استراتژی ما هزینه می‌کند. تنها از βk تا از یال‌های گره‌هایی که در استراتژی ما شرکت می‌کنند استفاده می‌کنیم که $1 > \beta > 0$ است.

در بخش ۳ استراتژی خود را با استفاده از مقادیر از پیش تعیین شده α و β ارائه می‌کنیم. سپس در بخش ۴ استراتژی خود را برای شرایطی که این مقادیر برای ما نامشخص است، تغییر می‌دهیم.

۲ یک کران بالای مجانبی برای هزینه‌ی ناسامانی در بازی‌های یکنواخت

در این قسمت نشان خواهیم داد که هزینه‌ی ناسامانی در بازی‌های بودجه محدود یکنواخت حداکثر از $O(\sqrt{\frac{n/k}{\log_k(n)}})$ است . با توجه به کران پایین $\Omega(\sqrt{\frac{n/k}{\log_k(n)}})$ به دست آمده در [۱۰]، این بهترین کران بالایی است که می‌توان برای این بازی‌ها به دست آورد. این خود بدان معنی است که در هر موقعیتی که در بودجه‌ی گره‌ها محدودیت ایجاد کنیم، هزینه‌ی ناسامانی می‌تواند مقدار زیادی داشته باشد.

نشان خواهیم داد که قطر هر گراف پایدار از این گونه بازی‌ها کران بالایی به اندازه $O(\sqrt{n\log_k(n)/k})$ دارد.

لم ۱. *قطر هر گراف پایدار در بازی‌های (n,k)-یکنواخت حداکثر از $O(\sqrt{n\log_k(n)/k})$ است.*

اثبات. تنها کافی است نشان دهیم در این گراف گره‌ای مانند v وجود دارد که فاصله‌ی این گره تا باقی گره‌های گراف حداکثر از $O(\sqrt{n\log_k(n)/k})$ است. گراف پایدار [24] را G بنامید و g را برابر با $c\log_k(n)$ قرار دهید که ثابت $c \leq 1$ و به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد. تمامی یال‌هایی که در دوری حداکثر به طول g است را حذف کنید. گراف باقی‌مانده را G' بنامید. به وضوح G' دارای هیچ دوری به طول حداکثر g نیست. ادعا می‌کنیم که G' دارای گره‌ای است که درجه‌ی آن حداکثر برابر $k/2$ است. اگر درجه‌ی هر گره در گراف حداقل $k/2$ باشد، از گره‌ای دلخواه مانند u حداقل $(k/2)^{g/2}$ پیمایش[25] به طول $g/2$ وجود دارد. گره پایانی این پیمایش‌ها با یکدیگر متفاوت است. در غیر این صورت دو پیمایش موجود است که طول هر کدام برابر $g/2$ است و از u آغاز شده و در گره‌ای یکسان خاتمه می‌یابد. در صورت وجود چنین پیمایش‌هایی، گراف دارای دوری به طول $g = 2(g/2)$ است که با فرض ما در تناقض است. پس حداقل $(k/2)^{g/2}$ گره پایانی برای این پیمایش‌ها موجود است. به این خاطر که c دلخواه بود، می‌توان آن را به اندازه‌ی کافی بزرگ در نظر گرفت که به این ترتیب تعداد گره‌های با این خاصیت از تعداد کل گره‌های گراف بیشتر می‌شود که با فرض اولیه در تناقض است.

بنابراین گره‌ای مانند v در G' موجود است که درجه‌ی آن حداکثر برابر $k/2$ است. پس v دارای حداقل $k/2$ یال مانند e_1، e_2، ...، $e_{k/2}$ است که هر کدام در دوری به طول حداکثر g هستند. به ازای هر گره مانند $u \neq v$ در G کوتاه‌ترین مسیر آن گره به v را در نظر

[24] منظور از گراف پایدار، گرافی است که گره‌ها در آن یال‌های خود را تشکیل داده و مایل به تغییر وضعیت خود نیستند. در واقع منظور همان وضعیتی از بازی است که به تعادل رسیده‌ایم.

[25] walk

[22] Balcan

[23] scheduling games

بگیرید. تعداد این کوتاه‌ترین مسیرها برابر $n-۱$ است و هر کدام از آن‌ها حداکثر یکی از این یال‌های گفته شده را در خود دارند. پس یالی مانند e_i موجود است که حداکثر در $\frac{n}{k/۲} = ۲n/k$ از این کوتاه‌ترین مسیرها را قرار دارد. گره v با حذف e_i فاصله‌ی خود را تا حداکثر $۲n/k$ از گره‌های دیگر، حداکثر به اندازه‌ی $g-۱$ افزایش می‌دهد، زیرا این یال در دوری حداکثر به طول g قرار داشته است. پس هزینه‌ی گره v حداکثر به اندازه‌ی $۲ng/k$ افزایش می‌یابد.

فرض کنید گره v' بیش‌ترین فاصله را از v دارد و فاصله‌ی این دو برابر با d باشد. در صورتی که یالی بین v و v' ایجاد شود و یال e_i از گراف حذف شود، همان‌طور که گفته شد، هزینه‌ی گره v حداکثر به اندازه‌ی $۲ng/k$ افزایش می‌یابد؛ ولی هزینه‌ی آن به اندازه‌ی $d^۲/۹$ کاهش می‌یابد. برای دانستن علت این امر دقت کنید که $d/۳$ از گره‌های مسیر بین v و v'، فاصله‌ای به اندازه‌ی حداقل $۲d/۳$ تا v دارند. در صورت ایجاد یالی بین v و v' از فاصله‌ی بین این گره‌ها تا v حداقل به اندازه‌ی $d/۳$ کاهش می‌یابد. پس هزینه‌ی گره v به اندازه‌ی $d^۲/۹$ کاهش می‌یابد. از آن‌جایی که فرض بر این بوده است که گراف G گرافی پایدار است، پس کاهش هزینه‌ی گره v نباید از افزایش هزینه‌اش بیش‌تر باشد. یعنی d باید از $O(\sqrt{۲ng/k})$ کم‌تر باشد که با توجه به این که g برابر $c\log_k(n)$ است، اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۲. *هزینه‌ی ناسامانی در بازی‌های (n,k)-بودجه محدود یکنواخت، حداکثر از $O(\sqrt{\frac{n/k}{\log_k(n)}})$ است.*

اثبات. طبق لم ۱ می‌دانیم که قطر گراف این بازی‌ها حداکثر از $O(\sqrt{n\log_k(n)/k})$ است. با توجه به قضیه‌ی ۳ در [۱۰]، می‌دانیم که میانگین فاصله در این گراف‌ها در حالتی که نتیجه‌ی بازی بهینه باشد، حداقل از $\Omega(\log_k(n))$ است. این نشان می‌دهد که هزینه‌ی ناسامانی در این گونه بازی‌ها حداکثر از $\frac{O(\sqrt{n\log_k(n)/k})}{\Omega(\log_k(n))}$ است که این خود کم‌تر از $O(\sqrt{\frac{n/k}{\log_k(n)}})$ است. □

۳ تأثیر تبلیغ سرویس عمومی بر هزینه‌ی ناسامانی

در این قسمت به معرفی یک استراتژی تبلیغاتی می‌پردازیم که شبکه را به سوی گرافی پایدار سوق می‌دهد که دارای هزینه ی عمومی پایینی باشد. فرض ما بر این است که هر گره با احتمال α از استراتژی ما پیروی می‌کند [۲۶] . نخست فرض می‌کنیم α و β پارامترهایی از پیش تعیین شده اند. در بخش ۴، استراتژی خود را به گونه‌ای ارائه می‌کنیم که اگر این دو پارامتر از پیش مشخص نباشند نیز کارا باشد.

استراتژی تبلیغاتی به صورت زیر است. k' را برابر با $\frac{\alpha\beta k}{c\log(n)}$ قرار دهید که c به اندازه کافی بزرگ باشد ($c > ۵$ کافی است). فرض کرده‌ایم $k' > ۱$ است. مجموعه‌ی گره‌های گراف را به $\log_{k'}(n) \geq l$ مجموعه‌ی $S_۱$، $S_۲$، ...، S_l تقسیم می‌کنیم. این کار را به این صورت انجام می‌دهیم که $|S_۱| = \beta k/۲$ و به ازای هر $۱ < i \leq l$ داشته باشیم $\frac{S_{i+۱}}{S_i} = k'$. توجه داشته باشید که تنها مشخصه مهم این مجموعه‌ها اندازه‌ی آن‌هاست و اعضای آن‌ها برای ما اهمیت ندارد. از گره‌های موجود در مجموعه‌ی $S_۱$ می‌خواهیم تا با تمام دیگر اعضای این مجموعه یال تشکیل دهند. در این مرحله هر گره پذیرنده، $\beta k/۲ - ۱$ از یال‌های خود را برای داشتن ارتباط مستقیم با دیگر اعضای مجموعه $S_۱$ هزینه کرده است. به ازای هر $i > ۱$، از هر گره در مجموعه‌ی S_i می‌خواهیم که تعداد $c\log(n)/۲\alpha$ از گره‌های مجموعه‌ی $S_{i-۱}$ را به صورت تصادفی انتخاب نموده و با آن‌ها یال تشکیل دهد. توجه کنید به این خاطر که $k' > ۱$ فرض شده است، پس $c\log(n)/۲\alpha$ از $\beta k/۲$ کوچک‌تر است. از طرفی، به گره‌های موجود در مجموعه‌ی $S_{i-۱}$ تعدادی درخواست ایجاد یال داده می‌شود. فرض ما بر این نیست که تمامی یال‌های وارد شده به این مجموعه تشکیل خواهند شد. برای مثال اگر گره‌ای که درخواست تشکیل یال با آن داده شده است، جزو گره‌های پذیرنده نباشد، ممکن است یال دریافتی را حذف کند. این فرض تنها کار ما را برای اثبات کارکرد استراتژی سخت‌تر می‌کند، زیرا باید در اثبات خود به یال‌هایی که ممکن است حذف شوند نیز دقت کنیم.

حتی امکان دارد اگر یالی با گره‌ای پذیرنده نیز ایجاد شود نیز حذف شود. مثلا فرض کنید تعداد یال‌هایی که با یک گره پذیرنده در $S_{i-۱}$ از طرف مجموعه S_i بیشتر از $\beta k/۲$ باشد آن‌گاه این گره می‌تواند تعداد از این یال‌های دریافتی را حذف کند، زیرا طبق فرض ما ممکن است یک گره پذیرنده بیش از βk تعداد از یال‌هایش را برای استراتژی ما هزینه نکند. البته برای رفع این مشکل در نظر می‌گیریم که یک گره پذیرنده، تمامی یال‌های که از مجموعه‌ی بعدی می‌آید را تشکیل می‌دهد. این فرض به این خاطر درست است که تعداد یال‌هایی که از طرف مجموعه‌ی بعدی به سمت یک گره پذیرنده تشکیل می‌شود، حداکثر $\beta k/۲$ است. هم‌چنین ما از هر گره خواسته‌ایم که تعداد $\beta k/۲ > c\log(n)/۲\alpha$ یال با مجموعه‌ی قبلی ایجاد کند که در

[۲۶] فرض کرده بودیم که نسبت α از گره‌ها از استراتژی ما پیروی می‌کنند که این دو فرض در میانگین با یکدیگر برابرند. راجع به این که خود این فرض که نسبت α از گره‌ها از استراتژی ما پیروی می‌کنند، در مقاله بحث نشده بود، ولی همچنان می‌توان این فرض را معقول دانست، زیرا بالاخره نسبتی از افراد هر جامعه از تبلیغاتی که راجعه به چیزی می‌شود پیروی می‌کنند. هرچند در بخش بعدی راجع به این که اگر این نسبت بسیار کوچک در نظر گرفته شده باشد نیز بحث شده است.

مجموع βk یال می‌شود و ما فرض کرده‌ایم که این گره همین تعداد از یال‌هایش را برای استراتژی ما هزینه می‌کند.

لم ۳. *یال‌های تشکیل شده توسط استراتژی گفته شده در بالا، تشکیل زیرگرافی درخت‌گونه با $\log_{k'}(n)$ سطح می‌دهد. قطر این گراف حداکثر برابر $۲\log_{k'}(n)$ است و گره‌های پذیرنده با احتمال بالایی [۲۷] در این زیرگراف وجود دارند.*

اثبات. تنها کافی است ثابت کنیم هر گره پذیرنده v در مجموعه‌ی S_i با گره‌ای پذیرنده مانند v' در $S_{i-۱}$ یالی تشکیل می‌دهد و گره v' آن یال را حذف نمی‌کند یا به عبارت دیگر با v' بیش از اندازه از طرف مجموعه ی S_i یال تشکیل نمی شود. گره v به تعداد $c\log(n)/۲\alpha$ از گره‌های مجموعه‌ی $S_{i-۱}$ را به طور تصادفی انتخاب می کند. به این خاطر که هر گره به احتمال α پذیرنده است، به صورت میانگین تعداد $c\log(n)/۲$ از این گره‌ها پذیرنده هستند. با استفاده از قضیه‌ی چرنوف [۲۸] می‌دانیم که به احتمال بالایی، تعداد $\log(n)$ گره پذیرنده در بین این گره‌ها وجود دارد(c به اندازه‌ی کافی بزرگ است).

بنابراین هر گره پذیرنده‌ی v در سطح i به $\log(n)$ گره پذیرنده در سطح $i-۱$ وصل است تا زمانی که با این گره‌ها بیش از اندازه یال تشکیل نشده باشد. حال ثابت می‌کنیم که در این ساختار با هر گره به احتمال حداکثر ۱/۲، بیش از اندازه یال تشکیل می‌شود.

هر گره در مجموعه‌ی S_i به احتمال α پذیرنده است. هر گره پذیرنده به صورت تصادفی تعداد $c\log(n)/۲\alpha$ یال با گره‌های مجموعه‌ی $S_{i-۱}$ تشکیل می‌دهد. بنابراین به صورت میانگین تعداد $\frac{\alpha|S_i|(c\log(n)/۲\alpha)}{|S_{i-۱}|}$ یال با هر گره در $S_{i-۱}$ تشکیل می‌شود. از طرفی می‌دانیم $\frac{|S_i|}{|S_{i-۱}|}$ برابر $k' = \frac{\alpha\beta k}{c\log(n)}$ است. می‌توان نتیجه گرفت که با هر گره u در $S_{i-۱}$ به صورت میانگین تعداد $\alpha\beta k/۲$ یال تشکیل می‌شود. با استفاده از قضیه‌ی نامساوی مارکوف می‌توان نشان داد که احتمال این که با این گره بیش از اندازه یال تشکیل شود، حداکثر برابر $\alpha/۲$ است که می‌دانیم $\alpha/۲ < ۱/۲$ است.

پس هر گره $v \in S_i$ حداقل به $\log(n)$ گره در مجموعه‌ی $S_{i-۱}$ وصل است. با هر کدام از این گره‌ها به احتمال حداکثر ۱/۲، بیش از اندازه یال تشکیل می‌شود. به این خاطر که رخداد این که به گره‌ای بیش از اندازه یال وارد شود، برای گره‌های مختلف همبستگی معکوس دارد، می‌توان گفت که به احتمال بالایی گره‌های پذیرنده در S_i حداقل با یک گره پذیرنده در $S_{i-۱}$ وصل هستند. پس به احتمال بالایی هر گره پذیرنده با گره‌ای پذیرنده در $S_۱$ مسیری حداکثر به طول l دارد؛ که l تعداد سطوح این زیرگراف است. به این خاطر که هر گره پذیرنده در مجموعه‌ی $S_۱$ با گره‌های پذیرنده دیگر، گرافی کامل تشکیل می‌دهد، می توان نتیجه گرفت که قطر گره‌های پذیرنده در این زیرگراف به احتمال بالایی حداکثر برابر $۲l = ۲\log_{k'}(n)$ است.

□

حال می توان برای قطر گراف کلی (نه فقط زیرگراف گره‌های پذیرنده) نیز کرانی به دست آورد.

لم ۴. *قطر گراف پایداری که پس از اجرای استراتژی تبلیغاتی گفته شده تشکیل می‌شود حداکثر از $O(\log_{k'}(n))$ است.*

اثبات. با استفاده از لم ۲ می‌دانیم که با احتمال بالایی قطر گره‌های پذیرنده برابر $۲l$ است. میانگین تعداد گره‌های پذیرنده برابر αn است و به احتمال بالایی تعداد آن‌ها از $\alpha n/۲$ بیش‌تر است. فرض کنید v گره‌ای پذیرنده باشد و بیش‌ترین فاصله‌ی گره‌های دیگر با v برابر d باشد. نشان می‌دهیم که d حداکثر از $O(l + \log(n)/\alpha)$ است.

تمامی یال‌های G که حداقل در دوری به طول حداکثر به اندازه‌ی $l' = l + ۲\log_k(n) + ۱$ است را حذف کنید. گره غیرپذیرنده u را در نظر بگیرید. نشان خواهیم داد که اگر یکی از k یال u در دوری به طول حداکثر l' باشد، فاصله‌ی u از v حداکثر برابر l'/α است. e را یالی از u در نظر بگیرید که در دوری به طول حداکثر l' است. فرض کنید فاصله‌ی u تا v برابر x باشد. اگر گره u یال e را حذف کند، فاصله‌اش تا باقی گره‌ها حداکثر به اندازه‌ی $n \times l'$ افزایش می‌یابد. از سویی دیگر، اگر u با v یالی تشکیل دهد، فاصله‌اش تا گره‌های پذیرنده حداقل به اندازه‌ی $x - ۴l - ۱$ کاسته می‌شود(قبل از اضافه کردن یال فاصله‌ی آن تا گره‌های پذیرنده حداقل برابر $x - ۲l$ و پس از اضافه کردن یال فاصله‌اش تا آن‌ها حداکثر برابر $۲l+۱$ است). بنابراین هزینه‌ی گره u حداقل به اندازه‌ی $\frac{\alpha n}{۲}(x - ۴l' - ۱)$ کاهش می‌یابد، زیرا به احتمال بالایی αn گره پذیرنده وجود دارد. به این خاطر که Gرا گرافی پایدار فرض کرده بودیم، $\frac{\alpha n}{۲}(x - ۴l' - ۱)$ نباید از $l' \times n$ بیش‌تر باشد. بنابراین x از $O(l'/\alpha + l) = O(l'/\alpha)$ است.

یک گره را ناکامل[۲۹] می‌نامیم اگر حداقل یکی از یال‌هایش حذف شده باشد. همان‌طور که در بالا ثابت کردیم، فاصله‌ی یک گره ناکامل تا گره v حداکثر از $O(l'/\alpha)$ است. توجه کنید که گراف باقی‌مانده، دوری به طول حداکثر l' ندارد. ادعا می‌کنیم که هر گره یا ناکامل است، یا فاصله‌اش با گره‌ای ناکامل حداکثر برابر l' است که نتیجه می‌دهد فاصله‌ی هر گره تا v حداکثر برابر $l' + O(l'/\alpha) = O(l'/\alpha)$ است. گره ناکامل u و تمامی پیمایش‌های با طول $l'/۲$ در گراف باقی‌مانده که از u آغاز می‌شوند را در نظر بگیرید. اگر یکی از این

[۲۷] به احتمال $۱ - ۱/n^c$ برای c به اندازه کافی بزرگ

[۲۸] Chernoff bound

[۲۹] incomplete

پیمایش‌ها از گره‌ای ناکامل عبور کند، ادعا ثابت می‌شود. اگر این گونه نباشد، $k^{l'/۲}$ پیمایش که از گره u آغاز می‌شوند وجود دارد. گره پایانی این پیمایش‌ها متمایز است، وگرنه دوری به طول l' در گراف مشاهده می‌شود که متناقض است. بنابراین $k^{l'/۲}$ گره در گراف موجود است، که این خود تناقض است زیرا $l' > ۲\log_k(n)$ است که نتیجه می‌دهد $k^{l'/۲} > n$ است.

بنابراین فاصله‌ی هر گره در گراف تا گره v حداکثر برابر $O((l+\log_k(n))/\alpha) = O(l'/\alpha)$ است. توجه کنید که l' برابر $\log_k(n)$ است و k' حداکثر برابر kاست. بنابراین به سادگی مشاهده می‌شود که قطر گراف کلی حداکثر از $O(\log_{k'}(n)/\alpha)$ است. □

قضیه ۵. *با استفاده از استراتژی تبلیغاتی ارائه شده هزینه‌ی ناسامانی حداکثر از $O(\frac{\log k'(k)}{\alpha}) = O(\frac{\log_{k'}(n)}{\alpha\log_k(n)})$ که k' برابر $\frac{\alpha\beta}{c\log(n)}k$ به ازای مقدار c ثابت است.*

اثبات. با استفاده از لم ۳ می‌دانیم که قطر گراف پایدار تشکیل شده حداکثر از $O(\log_{k'}(n)/\alpha)$ است. با توجه به قضیه‌ی ۴ در [۱۰] می‌دانیم که میانگین فاصله در گراف بهینه حداقل از $\Omega(\log_k(n))$ است. با ترکیب این دو واقعیت همانند اثبات قضیه‌ی ۱، این قضیه نیز به سادگی اثبات می‌شود. □

نتیجه ۶. *به ازای $k > \Omega(\log^{۱+\epsilon}(n))$ ، هزینه‌ی ناسامانی برابر است با $O(۱/\alpha\epsilon)$.*

اثبات. توجه داشته باشید که α و β پارامترهایی ثابت هستند، بنابراین k/k' از $O(\log(n))$ است. به این خاطر که k حداقل $\Omega(\log^{۱+\epsilon}(n))$ است، می‌توان گفت که kحداکثر از $O(k'^{۱/\epsilon})$ است. این نشان می‌دهد که $\log_{k'}(k)$ حداکثر از $O(۱/\epsilon)$ است که اثبات را کامل می‌کند. □

نتیجه ۷. *به ازای $k > \Omega(\log(n))$ ، هزینه‌ی ناسامانی برابر است با $O(\log\log k/\alpha)$.*

اثبات. تنها کافی است که ثابت c را در k' مقداری مناسب انتخاب کنیم. ادامه مانند اثبات قبلی است. □

۴ چگونه با α و β از پیش تعیین نشده استراتژی را مشخص کنیم

در بخش ۳ با پارامترهای مشخص α و β یک استراتژی ارائه کردیم که شبکه را به تعادلی با مقدار کم هزینه‌ی ناسامانی سوق می‌داد. در این بخش می‌خواهیم استراتژی خود را با شرایطی که α و β نامعلوم هستند وفق دهیم، زیرا در بعضی مواقع میزان گره‌هایی که از استراتژی ما پیروی می‌کنند، کم و در بعضی مواقع زیاد است. در این شرایط می‌دانیم که نسبت $\alpha > \epsilon$ از گره‌ها، نسبت $\beta > \epsilon'$ از بودجه‌ی خود را برای استراتژی ما هزینه می‌کنندکه ϵ و ϵ' کران‌های پایینی از پیش دانسته برای این پارامترها هستند. توجه کنید که این کران‌ها می‌توانند مقادیری بسیار کوچک باشند.

m و m' را کوچک‌ترین اعداد صحیحی در نظر بگیرید که در نامساوی‌های $۱/۲^m < \epsilon$ و $۱/۲^{m'} < \epsilon$ صدق می‌کنند.پس اعداد صحیح i و j وجود دارند به طوری که $۱/۲^i \leq \alpha \leq ۱/۲^{i-۱}$ و $۱/۲^j \leq \beta \leq ۱/۲^{j-۱}$ و $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq m'$ باشد. توجه کنید که در استراتژی گفته شده داشتن مقدار دقیق α و β اهمیتی ندارد، تنها داشتن تقریبی از آن‌ها برای ما کافی است. برای مثال اگر بدانیم اعداد صحیح i و jوجود دارند که در $۱/۲^i \leq \alpha \leq ۱/۲^{i-۱}$ و $۱/۲^j \leq \beta \leq ۱/۲^{j-۱}$ صدق می‌کنند، می‌توانیم استراتژی گفته شده را با پارامترهای $۱/۲^i$ و $۱/۲^j$ به جای α و β اجرا کنیم. به طور مشابه کران‌هایی احتمالی برای پارامترهای جدید وجود دارد که در اثبات ارائه شده در قسمت ۳ کار می‌کنند. در این روش حتی تقریبی خوبی از این پارامترها نداریم. تنها چیزی که در مورد آن‌ها می‌دانیم این است که در بازه‌های $[\epsilon, ۱]$ و $[\epsilon', ۱]$ هستند.

می دانیم که α در یکی از m بازه‌ی $[۱/۲, ۱], [۱/۴, ۱/۲], \ldots, [۱/۲^m, ۱/۲^{m-۱}]$ است (مشابها برای β). باید استراتژی گفته شده را به صورت موازی برای تقریب‌های مختلف از α و β اجرا کنیم. می‌دانیم که یک گره پذیرنده تنها βk تا از یال‌های خود را برای استراتژی ما هزینه می‌کند. می‌توانیم از هر گره پذیرنده بخواهیم که تعداد $\frac{\beta k}{m \times m'}$ از یال‌هایش را برای هر کدام از اجراهایی که از استراتژی خود داریم، هزینه کند. توجه داشته باشید که برای اجرای یک استراتژی به دانستن چهار پارامتر α، β، k و n نیاز داریم. در این حالت نیاز داریم که استراتژی خود را $m \times m'$ دفعه اجرا کنیم. پس به ازای هر دوتایی (i, j) که $۱ \leq i \leq m$ و $۱ \leq j \leq m'$ است، استراتژی گفته شده را با پارامترهای جدید $۱/۲^i, ۱/۲^j, \frac{k}{m \times m'}, n$ به جای α, β, k, n اجرا می‌کنیم. تنها تغییر که بر روی کران بالایی که برای هزینه‌ی ناسامانی معرفی کردیم، تأثیرگذار است، تغییر مقدار k در هر مرحله از اجرای استراتژی است. در واقع تعداد $\frac{k}{m \times m'}$ یال را برای کاهش هزینه‌ی ناسامانی استفاده می‌کنیم. قضیه‌ای که در ادامه می آید برای حالتی است که پارامترهای گفته شده، از پیش تعیین شده نباشند.

قضیه ۸. *زمانی که پارامترهای $\alpha > \epsilon$ و $\beta > \epsilon$ نامعلوم باشند، با استفاده از استراتژی تغییریافته در بالا، هزینه‌ی ناسامانی حداکثر از $O(\frac{\log k'(k)}{\alpha}) = O(\frac{\log_{k'}(n)}{\alpha\log_k(n)})$ است که k' برابر $\frac{\alpha\beta}{c\log(n)} \times \frac{k}{m \times m'}$*

است و مقادیر m و m' برابر با $\lceil\log(1/\epsilon)\rceil$ و $\lceil\log(1/\epsilon')\rceil$ هستند.

اثبات. زمانی که استراتژی گفته شده را برای دوتاییهای مختلف (i,j) اجرا میکنیم، یکی از این دوتاییها تقریب خوبی برای α و β است. در این اجرای خاص با استفاده از یالهای تشکیل شده توسط گرههای پذیرنده و قضیهی ۲، کران بالای مورد نظر به دست میآید. تنها تفاوت آن است که در این اجراها از $\frac{k}{m\times m'}$ یال استفاده میکنیم که به همین خاطر k' بر $m \times m'$ تقسیم میشود.

به این خاطر که ϵ و ϵ' ثابت هستند(که احتمالا مقادیر بسیار کمی دارند)، میتوان گفت m و m' نیز مقادیر ثابتی دارند. پس می توان نتیجه گرفت که برای حالت جدید (مقادیر نامشخص α و β) نیز نتایج ۶ و ۷ درست هستند. $\square$

مراجع

[1] Albers, S., Eilts, S., Even-Dar, E., Mansour, Y., and Roditty, L. *On Nash Equilibria for a Network Creation Game* In Proceedings of the 17th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Miami, FL, 89-98, 2006.

[2] Maria-Florina Balcan, Avrim Blum, and Yishay Mansour. *Improved equilibria via public service advertising*. In Proceedings of the 20th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. New York, NY, 728-737, 2009.

[3] Corbo, J. and Parkes, D. *The price of selish behavior in bilateral network formation*. In Proceedings of the 24th Annual ACM Symposium on Principles of Distributed Computing. Las Vegas, Nevada, 99-107, 2005.

[4] Erik D. Demaine, MohammadTaghi Hajiaghayi, Hamid Mahini, and Morteza Zadimoghaddam. *The Price of Anarchy in Cooperative Network Creation Games*. Appeared in SIGecom Exchanges 8.2, December 2009.

[5] Erik D. Demaine, MohammadTaghi Hajiaghayi, Hamid Mahini, and Morteza Zadimoghaddam *The Price of Anarchy in Network Creation Games*. In Proceedings of the 26th Annual ACM SIGACT-SIGOPS Symposium on Principles of Distributed Computing. 292-298, 2007. To appear in ACM Transactions on Algorithms.

[6] Fabrikant, A., Luthra, A., Maneva, E., Papadimitriou, C. H., and Shenker, S. *On a network creation game*. In Proceedings of the 22nd Annual Symposium on Principles of Distributed Computing. Boston, Massachusetts, 347-351.

[7] Jon Kleinberg. *Small-World Phenomena and the Dynamics of Information*. Advances in Neural Information Processing Systems (NIPS) 14, 2001.

[8] Koutsoupias, E. and Papadimitriou, C. *Worst-case equilibria*. In Proceedings of the 16th Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1563. Trier, Germany, 404-413.

[9] Laoutaris, N., Poplawski, L. J., Rajaraman, R., Sundaram, R., and Teng, S.-H. *Bounded budget connection (BBC) games or how to make friends and influence people, on a budget*. In Proceedings of the 27th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing. 165-174, 2008.

[10] Papadimitriou, C. *Algorithms, games, and the internet*. In Proceedings of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, Hersonissos, Greece, 749-753.

از دجله‌ی توپولوژی تا بیابان ترکیبیات

علی قصاب

۱ پرده‌ی اول. تو نیکی می کن و در دجله انداز

مرد بیابان‌نشین با خود چنین می‌اندیشید که سال‌هاست هر روز کمی نان برای انفاق کنار می‌گذارده است تا اگر مستمندی پیدا شود از آن بهره ببرد. اما اکنون چه؟ امروز کسی به سراغ نان‌هایش نیامد. ازآنجا که صدقه را در هر صورت باید انفاق کرد، بنابراین باید تا پیش از بیات شدن نان‌ها چاره‌ای می‌اندیشید. به فکر فرو رفت و تصمیم گرفت اگر مستمندی نیامد، نان‌ها را به روی طبقی به دجله بیندازد.

۲ پرده‌ی دوم. دجله‌ی توپولوژی

توپولوژی ترکیبیاتی [۱] در واقع نام قدیمی‌تر توپولوژی جبری است. در واقع این نام اشاره می‌کند به زمانی که ناورداهای توپولوژیکی همچون شاخص اویلر [۲] و بعدها اعداد بتی [۳] را مطالعه می‌کردند. در آن دوران فضاهای توپولوژیک را با تجزیه‌های ترکیبیاتی همچون تجزیه به سادک‌ها موشکافی می‌کردند. در این دوره خدمات بی‌شماری از ترکیبیات را شاهد هستیم. برای مثال رده‌بندی رویه‌ها بر اساس گونا [۴] ماحصل این دوره است:

قضیه‌ی اساسی رده‌بندی رویه‌ها. هر رویه‌ی فشرده یا با یک رویه‌ی جهت‌پذیر با گونای $h \geq 0$ یا با یک رویه‌ی جهت‌ناپذیر با گونای $k \geq 1$ همسانریخت است.

بعدها با ظهور نبوغ اِمی نوتر [۵]، هوپف[۶] و به ویژه معرفی همولوژی[۷] توسط ویتوریس [۸] و مایر [۹]، سیر جریان مطالعه‌ی توپولوژی عوض شد. شاهد این ماجرا گروه نویسندگان زبردست بورباکی [۱۰] هستند که در سال ۱۹۴۴ [۱۱] نخستین کتاب توپولوژی با پیشوند «algebraic» را منتشر کردند، حال آنکه این شاخه تا سال ۱۹۴۲ هنوز با پیشوند «combinatorial» نامیده می‌شد. به تعبیری، سفر اکتشافی توپولوژی را که ترکیبیات آغاز کرده بود، جبر ادامه داد؛ و رفته‌رفته اثر نقش ترکیبیات در شکل گیری پژوهش‌های توپولوژی به فراموشی گرایید تا ... [۱۲].

۳ پرده‌ی سوم. غنی شدن توپولوژی جبری

در بستر توپولوژی جبری به مثابه‌ی یک شاخه‌ی مورد توجه ریاضیدانان بزرگ در سده‌ی اخیر، مفاهیم، قضایای و دست آوردهای شگفت‌آوری به دست آمده است. از این نمونه می‌توان به قضیه‌ی برسوک[۱۳]-اولام[۱۴] اشاره کرد.

قضیه‌ی برسوک-اولام. برای هر $n \geq 0$، اگر f نگاشتی پیوسته از کره‌ی nبعدی S^n به فضای $\mathbb{R}^n$ باشد، در این صورت $x \in S^n$ وجود دارد به طوری‌که $f(x) = f(-x)$.

به عنوان یک قضیه‌ی در مرکز توجه، نتایج و تعابیر جالبی از این واقعیت بیان شده است. کاربردهای این قضیه آنقدر متنوع و غنی است که در سال ۲۰۰۳ کتاب مستطابی را به قلم مَتُسِک [۱۵] تحت نام «Using Borsuk-Ulam theorem» به خود اختصاص داده است. از نمونه نتایج مبتنی بر این قضیه می‌توان به قضیه‌ی ساندویچ هم‌[۱۶] (برگر) اشاره کرد:

قضیه‌ی ساندویچ هم-(برگر). برای هر ساندویچ ساخته شده از هم-(برگر)، پنیر و نان، صفحه‌ی برشی وجود دارد که همزمان هر سه را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می کند.

در واقع بیان ریاضی دقیق این واقعیت به صورت زیر است که:

قضیه‌ی ساندویچ هم-(برگر). هر dتا توزیع جرم (متناهی) در فضای $\mathbb{R}^d$؛ همزمان و همگی با ابرصفحه‌ای به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌شوند.

به عنوان تمرینی ساده از هر دانشجوی ترم اولی انتظار می‌رود که این قضیه را در حالت یک و یا دو بعدی اثبات کند.

اثبات کلاسیک این قضیه بر اساس قضیه‌ی برسوک-اولام بیان می‌شود. نمونه‌ای از این اثبات منجر به این شده است که این قضیه و تعدادی از این گویش‌های معادلش در کتاب تحت نام «Using

---

[۱] combinatoria topology
[۲] Euler Characteristic
[۳] Betti Numbers
[۴] Genus
[۵] Emmy Noether
[۶] Hopf
[۷] Homology
[۸] Vietoris
[۹] Mayer
[۱۰] Bourbaki
[۱۱] در کوران جنگ دوم جهانی. زادگاه گروه بورباکی فرانسه است؛ فرانسه‌ای که تقریباً در کل جنگ دوم جهانی تحت اشغال بود!
[۱۲] به زودی به ادامه‌ی جمله باز می‌گردیم.
[۱۳] Borsuk
[۱۴] Ulam
[۱۵] Matoušek
[۱۶] اصل این قضیه با نام «ham» مطرح می‌شود. به دلیل ملاحظات ملی در این مقوله پسوند «برگر» را به آن افزوده‌ایم!

Borsuk-Ulam theorem» جایی برای نمایش پیدا کنند[17].
می‌توان مزه‌ی تناهی این قضیه را بیشتر کرد:

قضیه‌ی ساندویچ همـ(برگر). اگر $A_1, \dots, A_d$ مجموعه‌هایی متناهی باشند، ابرصفحه‌ی hای وجود دارد که همزمان برای هر $1 \leq i \geq d$، A_i را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند.

اگر به عنوان پرسشی رندانه بپرسیم که «در صورتی که یکی از A_iها فرد تا نقطه داشته باشد، چه؟»؛ پاسخ ساده خواهد بود! به سادگی تعبیرِ «دو نیمه‌ی مساوی» و اصلاح برداشتِ نادرست «هر نیمه، دقیقاً نیمی از آن A_i». به بیان دقیق‌تر، منظور از اینکه ابرصفحه‌ی h مجموعه‌ی mعضوی A_i را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند ، این است که اگر h شامل n نقطه از A_i باشد، در هر طرف h باید دقیقاً $\lfloor \frac{1}{2}(m-n) \rfloor$ نقطه از A_i قرار گیرند.

ایده‌ی برهان. ایده‌ی اثبات ناشی از این واقعیت است که به می‌توان به جای هریک از نقاط A_i گوی کوچکی به شعاع ϵ قرار داد. اکنون با در نظر گرفتن رفتار حدی $\epsilon \to 0$، از قضیه‌ی پیشین به به نتیجه‌ی مطلوب خواهیم رسید.

آزادی عملِ تعداد نقاط یک A_{i_0} روی یک ابرصفحه، در مواردی کار نصف کردن را کمی آسان می‌کند. برای مثال اگر همه‌ی نقاط A_{i_0} روی یک ابرصفحه باشند، اگر دست بر قضا این ابرصفحه همان h شود، هنگامی که برای دونیم‌سازی A_iها با افتخار از این ابرصفحه یاد می‌کنیم، حداقل در حالت A_{i_0} می‌توان سربلند بود. حتی می‌توان این قضیه را کمی کلی‌تر مطرح کرد:

قضیه‌ی ساندویچ همـ(برگر). اگر $A_1, A_2, \dots, A_d \subset \mathbb{R}^d$ مجموعه‌هایی متناهی و مجزا باشند که هیچ dنقطه‌ای از اجتماع آنها همزمان روی یک ابرصفحه قرار نداشته باشند [18]، در این صورت ابرصفحه‌ی hای وجود دارد که همزمان همه‌ی A_iها را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند، به طوری که برای هر i، در هر طرف h دقیقاً $\lfloor \frac{|A_i|}{2} \rfloor$ نقطه از A_i قرار می‌گیرند.

منتج شدن این قضیه از حالت پیشین قضیه‌ی مذکور می‌تواند تمرینی مبارزطلب تلقی شود. تمرینی که ممکن است روزی استادی را وسوسه کند تا در امتحان آن را امتحان کند.

[17] متواضعانه توصیه به تورق این کتاب - که بخش عمده‌ای از این مقاله بازگویش برگزیده‌ای از فصل دوم آن است - می‌شود.

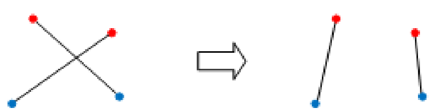
[18] وقتی تعدادی نقطه در فضای $\mathbb{R}^d$ داشته باشیم و هر زیرمجموعه‌ی dتایی آنها روی هیچ ابرصفحه‌ای واقع نشود، می‌گوییم این مجموعه‌ی نقاط «در حالت کلی» (in general position) واقع شده‌اند.

۴ پرده‌ی چهارم. قضیه‌ی ساندویچ همـ(برگر) به مثابه‌ی ابزاری قوی

از مساله‌ی زیر به عنوان یکی از معماهای بنام هندسی یاد می‌شود.

مسأله. در صفحه دو مجموعه‌ی nعضوی از نقاط A_1 و A_2 در «حالت کلی» in general position را در نظر می‌گیریم. فرض کنید نقاط مجموعه‌ی A_1 را آبی و نقاط مجموعه‌ی A_2 را قرمز، رنگ‌آمیزی کنیم. آیا می‌توان این نقاط ناهمرنگ را با تعدادی پاره‌خط نامتقاطع دوبه‌دو به هم وصل کرد؟

قویاً توصیه می‌کنیم که خودتان این مسأله را حل کنید؛ وگرنه راه‌حلی غیرمستقیم می‌تواند چنین باشد: نقاط ناهمرنگ را با پاره‌خط هایی دلخواه جفت-جفت به هم وصل می کنیم. اگر در شکل، دو پاره‌خط نامتقاطع داشته باشیم، با تغییر این دو پاره‌خط به صورت زیر کار را دنبال می‌کنیم. با هر بار تکرار این فرایند، به دلیل نامساوی مثلثی،



جمع کل طول پاره‌خط‌ها کاهش می‌یابد. بنابراین پس از متناهی گام، پاسخی برای این مسأله دست می‌یابیم.

با اندک زمانی تأمل، می‌توان تعمیم این قضیه را بازسازی کرد:

مسأله. در فضای سه‌بعدی، سه مجموعه‌ی nعضوی A_1، A_2 و A_3 از نقاط را که «درحالت کلی» هستند در نظر می‌گیریم. فرض کنید نقاط این سه مجموعه را به ترتیب آبی، قرمز و زرد رنگ‌آمیزی کنیم. آیا می‌توان این نقاط ناهمرنگ را با تعدادی مثلث نامتقاطع که رئوسشان همرنگ نباشند، سه‌به‌سه به هم وصل کرد؟

مجدداً و این بار حتی با شدت بیشتری، قویاً توصیه می‌کنیم این مسأله را حل کنید. چرا؟ زیرا تاکنون هیچ راه‌حل مستقیمی برای اثبات این مدعا ارائه نشده است! این، البته به معنای باز بودن مسأله نیست؛ زیرا به یمن قضیه‌ی ساندویچ همـ(برگر) اثبات بدیعی برای این گزاره حتی در فضای dبعدی در دست است!

قضیه‌ی افراز چندرنگی[19]. در $\mathbb{R}^d$ مجموعه‌های nعضوی $A_1, A_2, \dots, A_d$ از نقاط را در حالت کلی در نظر می‌گیریم. فرض کنید نقاط این مجموعه‌ها را با رنگ‌های متفاوتی رنگ‌آمیزی کنیم. در این صورت مجموعه‌ی این نقاط را می‌توان به تعدادی زیرمجموعه‌ی nعضوی با رنگ‌های متفاوت[20] افراز کرد، به طوری که پوش

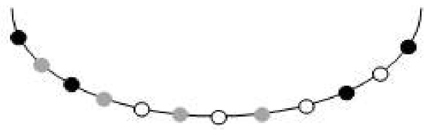
[19] این قضیه منسوب است به Akiyama و Alon.

[20] طبیعی است که این مجموعه (ها) را «رنگین کمان» بنامیم.

محدب[21] این زیرمجموعه‌ها مجزا باشند.
برهان. از استقرای روی n کمک می‌گیریم. اگر $n > 1$ فرد باشد، بنابر آخرین نسخه‌ای از قضیه‌ی ساندویچ همـ(برگر) که در بخش قبلی بیان شد، ابرصفحه‌ی hای وجود دارد که همه‌ی A_iها را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند و به علاوه از هرکدام از A_iها تنها یک نقطه دارد. nنقطه‌ی روی h را یک مجموعه‌ی افراز می‌گیریم. به وضوح، پوش محدب این نقاط در همین ابرصفحه قرار خواهد گرفت. اکنون در هر طرف این ابرصفحه با ارجاع به فرض استقرا به مابقی مجموعه‌های افراز دست می‌یابیم. در حالت nزوج، کار از این هم ساده‌تر است! در این حالت چون هیچ نقطه‌ای روی ابرصفحه نخواهد بود، حتی نیازی به مجموعه‌ی افراز منتسب به ابرصفحه هم نیست!

۵ پرده‌ی پنجم. یک مسأله‌ی باز ترکیبیاتی

ترکیبیات درباره‌ی چیست؟ این پرسشی است که مطابق معمول به سختی می‌توان پاسخ داد، اما می‌توان از توصیف کمرون [22] کمک گرفت: «ترکیبیات می‌تواند هنر چیدن اشیاء بر طبق قوانین خاص تلقی شود. در ترکیبیات، ما اولاً می‌خواهیم بدانیم که آیا یک آرایش خاص امکان‌پذیر است یا نه، و اگر بله، به چند طریق امکان‌پذیر است.»
اکنون به بیان یکی از مسایل در حوزه‌ی ترکیبیات که درباره‌ی اشیاء چیده شده است، می‌پردازیم. ماجرای این مسأله اینگونه است که در جایی به جز ایران که دزد وجود دارد(!)، دو دزد گردنبند بی‌اندازه گرانبهایی را به سرقت می‌برند. در منحصر به فردیِ این گردنبند (دوِ سر) باز همین بس که زنجیرش از پلاتینیوم تقریباً یکپارچه‌ای ساخته شده است که با هر برش از ارزشش کاسته می‌شود. برای تقسیم منصفانه (!)ی این مال غصبی، این دو دزد مشکلی نداشتند [23]، زیرا از هر نوع نگین و جواهری [24] زوج تا در این گردنبند وجود داشت. تنها مشکل این بود که دزدها ترجیح می‌دادند که به زنجیر پلاتینیومی تا جایی که ممکن است کمتر آسیب برسانند، تا در مجموع سود بیشتری ببرند.
بیایید برای مثال حالت زیر را در نظر بگیریم: معمولاً دست‌یابی به



تقسیمی منصفانه آسان است. با این همه، دست‌یابی به پاسخی با کمترین تعدادِ برش کمی کار می‌برد. اکنون بیایید با بیان مسأله به صورت نمادین بیشتر بیاندیشیم.
مسأله. اگر در این گردنبند dگونه جواهر و از هر نوع به تعداد به ترتیب $k_1, k_2, \ldots, k_d$ موجود باشد، به طوری‌که همه‌ی k_iها زوج باشند، حداقل چند برش نیاز است تا این گردنبند منصفانه تقسیم شود؟
با اندکی تأمل درمی‌یابیم که کمترین تعداد برش‌ها قطعاً کمتر است از $k_1 + k_2 + \cdots + k_d$ و همچنین حالتی وجود دارد که در آن به دست‌کم d برش نیاز داریم.
هنوز هیچ برهانِ صرفاً شمارشی یا ترکیبیاتی برای حل این مسأله یافت نشده است! بنابراین دوباره و این بار به شدیدترین صورت ممکن (!)، قویاً توصیه می‌کنیم این مسأله را حل کنید!

۶ پرده‌ی ششم. که ایزد در بیابانت دهد باز

در روزگار قدیم عراق، خلیفه‌ای بود که به یکی از غلامانش بیش از دیگران توجه داشت. به دستور خلیفه تمام فنون زمان را از سوارکاری و تیراندازی و شمشیربازی به او آموختند تا اینکه نوبت به شناگری رسید . از قضای روزگار روزی آن غلام در رود دجله شنا می‌کرد که تصادفاً موجی سهمگین او را در کام خود فرو برد. پس از حادثه، هر چه غواصان وشناگران کوشیدند و دجله را کاویدند، هیچ اثری از غلام نیافتند.
چون خبر به خلیفه رسید بسیار برآشفت و از شدت حزن گوشه‌نشین شد. سپس اعلام کرد که هر کس زنده یا مرده غلام را پیدا کند جایزه هنگفتی خواهد داشت. شناگران معروف بغداد همگی به تکاپو پرداختند. گشتند و جستند تا سرانجام خبر به دارالخلافه آمد که گمشده پیدا شده است.
خلیفه شادمان شد و مباشر را هدیه داد و دیر زمانی نگذشت که غلام را به حضورش آوردند و از او چگونگی حادثه را پرسیدند. غلام پاسخ داد :« هنگامی که به ناگاه موجی مرا با خود برداشت تا مدتی در آب غوطه خوران از سویی به سوی دیگر رانده می‌شدم. با مختصر آشنایی که از فنون شناوری آموخته بودم گاهی در رو و گاهی در زیر

[21] به کوچکترین مجموعه‌ی محدب دربرگیرنده‌ی چند نقطه‌ی خاص در $\mathbb{R}^d$ «پوش محدب» آن نقاط گفته می‌شود.
[22] Cameron
[23] هیچ تناقضی در کار نیست! دزدها هم ممکن است برای خودشان به نوعی انصاف داشته باشند.
[24] به اینجای مقاله که رسیدم، سعی کردم چند نمونه را یادآور شوم: طلا، نقره، پلاتین، الماس، زمرد، برلیان، یاقوت، فیروزه، زبرجد، زمرد، عقیق، در، مروارید... . خیالم راحت شد که تنوعش به قدری زیاد است که در ذهن خواننده کمیِ گونه‌ها باعث پیش پا افتاده به نظر رسیدن مسأله نخواهد شد!

آب دست و پا می‌زدم و آخرین رمق جان را صرف می‌کردم تا به ناگاه موج بزرگ دیگری آمد و مرا به ساحل پرتاب کرد . هنگامی که چشم گشودم خود را در حفره‌ای در دیواره‌ی دجله یافتم . شادمان از اینکه غرق نشده بودم و غمگین از اینکه در آنجا بر اثر گرسنگی از پای در خواهم آمد. ساعاتی گذشت تا طبقی نان را در مقابلم شناور روی آب یافتم. دست دراز کردم و نان را برداشتم و مختصری رمق یافتم. هفت روز گذشت و در هر روز قوت من از آن طبق نان بود. بالاخره در روز هفتم بود که مردی ماهیگیر مرا در آن حفره یافت و با تورش بالا کشید و نجات داد.

خلیفه چون داستان را شنید دستور داد تفحص کنند تا از ماجرای سبد نان پرده بگشایند. پس از مدتی بالاخره مردِ پس ماجرا را یافتند و او در حضور خلیفه داستان و نیت خود را بازگو کرد.

با بازگویی نیت مرد، خلیفه او را از مال و منال دنیا بی‌نیاز کرد. مرد گفت: «شنوده بودم که نیکویی کن و در آب انداز که روزی بردهد.» شاعر بزرگ ایران، سعدی، این ماجرا را چنین به نظم در آورده است.

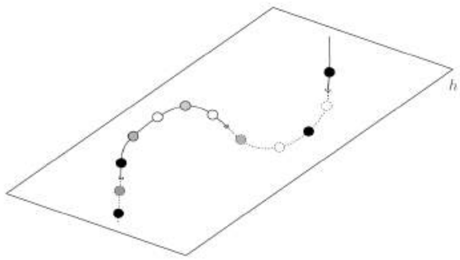
تو نیکویی کن[25] و در دجله انداز   که ایزد در بیابانت دهد باز

۷ پرده‌ی هفتم. بیابان ترکیبیات

نکته‌ی عجیب ماجرای تقسیم گردنبند این است که همان مقدار dتا برش اندکِ لازم، کافی هم است! ونکته‌ی عجیب‌تر اینکه با برهانی مبتنی بر قضیه‌ی ساندویچ همـ(برگر) پاسخی برای این مسأله یافت شده است! پاسخی که هیچ رهیافت ترکیبیاتی در آن مشاهده نمی‌شود!

قضیه‌ی گردنبند. هر گردنبند باز با dگونه‌ی زوج‌تایی جواهر، با حداکثر dبرش بین دو دزد قابل تقسیم است.

برهان. گردنبند را در فضای $\mathbb{R}^d$ روی خم پارامتری به ضابطه‌ی $\gamma(t) = (t, t^۲, \ldots, t^d)$ می‌نشانیم. اگر گردنبند nتا (نه لزوماً nگونه) جواهر داشته باشد، تصور می‌کنیم که این جواهرات روی نقاط $\gamma(۱), \gamma(۲), \ldots . \gamma(n)$ قرار گرفته باشند. در چنین حالتی نقاط جواهرات نوع iاُم را با A_i نشان می‌دهیم. نکته‌ی هندسی ماجرا این است که تمامی این nنقطه «در حالت کلی» قرار گرفته‌اند[26]. بنابراین به کمک قضیه‌ی ساندویچ همـ(برگر) - که اینجا به زیرمجموعه‌های زوج‌عضوی و مجزای A_i $۱ \leq i \leq d$ از $\mathbb{R}^d$ اعمال می‌شود- ابرصفحه‌ی hای وجود دارد که همزمان همه‌ی این زیرمجموعه‌ها را به دو نیمه‌ی مساوی تقسیم می‌کند؛ به علاوه می‌دانیم که این ابرصفحه حاوی هیچ‌یک از این nنقطه نیست. این ابرصفحه خم $\gamma(t)$ را در حداکثر d نقطه قطع می‌کند. این نقاط تقاطع، بیانگر محل برش زنجیر برای یک تقسیم منصفانه با حداکثر d برش خواهند بود. برای مثال شکل زیر را ببینید.



۸ پرده‌ی آخر

سفر اکتشافی توپولوژی را که ترکیبیات آغاز کرده بود، جبر ادامه داد؛ و رفته‌رفته اثر نقش ترکیبیات در شکل‌گیری پژوهش‌های توپولوژی به فراموشی گرایید تا سال ۱۹۷۸، زمانی که لواس[27] حدس کنزر[28] را بر مبنای برهانی از قضیه‌ی بُرسوک-اولام حل کرد. در این سال، به یک‌باره جریان تاریخی چرخید و رشته‌ی جدیدی به نام «توپولوژی ترکیبیاتی» ابداع شد. در این بستر فکری بود که در سال ۱۹۸۷ آلُن[29] مسأله‌ی گردنبند را حل کرد.

منظور از نوشتن این مقاله، نه نشان دادن نقش توپولوژی ترکیبیاتی(= جبری) بود و نه برجسته کردن اهمیت و یا حتی ضعف ترکیبیات. تنها شاهد تَطَوّر تاریخی مفاهیمی بودیم که در ذهن بشر جاری می‌شود. گاهی با تمرکز روی شاخه‌ای، از شاخه‌ی دیگر ابزار ساخته می‌شود؛ و گاهی زین و پشت جا عوض می‌کنند. در سیر تاریخی این تطور، اندک‌اندک جوانه‌های تکامل نیز ظاهر می‌شوند.

با هر بار وام دادن به سختی می‌توان فهمید که چه زمانی موعد بازپس‌گیری خواهد بود. تنها به جبر تاریخی می‌توان امید داشت که این داستان‌های «از هر دست بدهی، از همان دست می‌گیری»ِ دانش ادامه داشته باشد.

مراجع

[۱] ابوالمعالی کیکاووس بن وشمگیر، قابوس نامه

[25] در فرهنگ ایرانی، این بیت تبدیل به ضرب المثلی به همین سیاق با تغییر «نیکی می‌کن» به جای «نیکویی کن» شده است. گویا مردم عامه، به استمرار نیکی حتی بیش از آنچه در داستان آمده است، معتقدند.

[26] که با توجه به ضابطه‌ی γ، نتیجه‌ای است از فرمول دترمینان واندرموند.

[27] Lovász

[28] Kneser

[29] Alon

[2] J. Akiyama and N. Alon. Disjoint simplices and geometric hypergraphs. Combinatorial Mathematics; Proc. of the Third International Conference (New York), volume 555, pp. 1–3. 1985

[3] P.S. Alexandrov and Tr. Horace Komm , Combinatorial Topology Vols. I,II,III, Graylock Press, 1956

[4] K. Borsuk. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre.Fundamenta Mathematicae, 20: pp.177–190, 1933

[5] P. Cameron , Combinatorics: Topics,Techniques, Algorithms, Cambridge University Press, 1994

[6] M. de Longueville,(2004). 25 years proof of the Kneser conjecture - The advent of topological combinatorics. EMS Newsletter. Southampton, Hampshire: European Mathematical Society. pp. 16–19, 2004

[7] C. H. Goldberg and D. West. Bisection of circle colorings. SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 6(1): pp. 93–106, 1985

[8] P. Hilton, A Brief, Subjective History of Homology and Homotopy Theory in This Century, Mathematics Magazine (Mathematical Association of America) 60 (5): pp. 282–291, 1988

[9] J. Matoušek. Using Borsuk-Ulam Theorem. Springer Verlag, 2th edition, 2008

[10] E. A. Ramos. Equipartition of mass distributions by hyperplanes. Discrete Comput. Geom., 15: pp.147–167, 1996

[11] Wikipedia, the free encyclopedia; internet pages: Topological Combinatorics and Combinatorial topology

قضیه‌ای در مورد جایگشت‌ها

مصطفی عین‌اله زاده

Ree [۴] در مقاله‌ای در سال ۱۹۷۱، با استفاده از نظریه‌ی رویه‌های ریمانی، یک قضیه‌ی جالب ترکیبیاتی در رابطه با جایگشت‌ها بیان کرد. در این مقاله، Ree اشاره می‌کند که نتوانسته است، اثباتی ترکیبیاتی برای قضیه‌اش (حتی در بعضی حالت‌های خاص) پیدا کند. تا اینکه Feit ، Lyndon و Scott [۱] اثباتی ترکیبیاتی از قضیه‌ی Ree ارائه کردند. مدتی بعد Herzog و Lehrer [۲] این قضیه را به دیگر گروه‌های کاکستر[۱] تعمیم دادند و Scott [۶] نیز با ایده‌هایی مشابه، تعمیمی از آن به گروه‌های ماتریسی به دست آورد که در نتیجه اثباتی جبری هم برای قضیه‌ی Ree بود.

در این مقاله علاوه بر ارائه‌ی این سه اثبات، به کاربردهایی از اثبات توپولوژیک در نشاندن گراف‌ها در رویه‌ها، اشاره خواهیم کرد.

۱ قضیه‌ی اصلی

نمادگذاری.

۱. $\{۱,\dots,n\} =: [۱,n]$.

۲. $\langle g_۱,\dots,g_n\rangle =:$ گروه تولید شده توسط $g_۱,\dots,g_n$.

۳. فرض کنید σ جایگشتی در S_n باشد. عمل گروه تولید شده توسط σ روی $[۱,n]$، این مجموعه را به تعدادی مدار افراز می‌کند. اگر تعداد این مدارها برابر k باشد، $n-k$ را با $\nu(\sigma)$ نشان می‌دهیم. (در واقع k برابر با تعداد دورها در تجزیه‌ی دوری σ است، البته اگر دورهای به طول یک را هم در نظر بگیریم.[۲])

قضیه‌ی اصلی[۴]. *فرض کنید* $\sigma_۱,\dots,\sigma_k$، *تعدادی جایگشت در* S_n *باشند که گروه تولید شده توسط آنها به صورت تراگذر روی* $[۱,n]$ *عمل می‌کند و* $\sigma_۱\cdots\sigma_k=۱$. *دراین‌صورت:*

$$\nu(\sigma_۱)+\cdots+\nu(\sigma_k)\geq ۲(n-۱).$$

مثلاً در حالت $k=۳$، این قضیه به ما می‌گوید که اگر α و β دو جایگشت در S_n باشند که با ترکیب‌های آنها بتوان هر دو عضو دلخواه $[۱,n]$ را به یکدیگر تبدیل کرد، در این‌صورت جمع تعداد دورها در تجزیه‌ی دوری α، β و $\alpha\beta$ از $n+۲$ بیشتر نیست.

[۱] Coxeter Groups

[۲] در این مقاله همه جا منظور از تجزیه‌ی دوری، تجزیه‌ی دوری با در نظر گرفتن دورهای به طول ۱ است.

۲ اثبات ترکیبیاتی

لم. *فرض کنید* $\tau_۱,\dots,\tau_m$ *یک زیرمجموعه‌ی مینیمال از ترانهش‌های* S_n *باشند که گروه تولیدشده توسط آنها، به صورت تراگذر روی* $[۱,n]$ *عمل می‌کند. دراین‌صورت :*

الف) $m=n-۱$،

ب) $\tau_۱\dots\tau_m$ *یک دور به طول* n *است.*

اثبات [۱]. هر جایگشت τ_i به صورت ترانهشی بین دو عضو $[۱,n]$ است. اگر این دوتایی‌ها را به هم وصل کنیم، گرافی با رئوس $[۱,n]$ و m یال به دست می‌آید که آن را با G نمایش می‌دهیم.

الف) واضح است که شرط تراگذر بودن عمل $\langle\tau_۱,\dots,\tau_m\rangle$، معادل با همبند بودن G است. پس از شرط مینیمال بودن نتیجه می‌شود که G یک درخت با $m=n-۱$ یال است.

ب) فرض کنید $\tau_i=(ab)$ متناظر با یک یال متصل به برگ a در درخت G باشد. داریم:

$$\begin{aligned}&(\tau_۱\cdots\tau_{i-۱})^{-۱}(\tau_۱\cdots\tau_m)(\tau_۱\cdots\tau_{i-۱})\\&=\tau_i\tau_{i+۱}\cdots\tau_m\tau_۱\cdots\tau_{i-۱}.\end{aligned}$$

در نتیجه $\tau_۱\cdots\tau_m$ و $\tau_i\cdots\tau_m\tau_۱\cdots\tau_{i-۱}$ مزدوج یکدیگرند. پس می‌توانیم فرض کنیم $i=۱$. اما با استفاده از استقرا روی n و این نکته که $\tau_۲,\dots,\tau_m$ ترانهش‌هایی روی $[۱,n]\backslash\{a\}$ هستند که تشکیل یک درخت می‌دهند، می‌توان نتیجه گرفت که $\tau_۲\cdots\tau_m$ یک دور کامل روی $[۱,n]\backslash\{a\}$ است. پس داریم:

$$\tau_۱\cdots\tau_m=(ab)(bc_۱\dots c_{n-۲})=(abc_۱\dots c_{n-۲}).$$

$\square$

اثبات اول قضیه‌ی اصلی [۱]. می‌دانیم که هر دور به طول l را می‌توان به صورت ترکیبی از $l-۱$ ترانهش نمایش داد. در نتیجه اگر تجزیه‌ی دوری $\sigma\in S_n$ دارای دورهایی به طول $l_۱,\dots,l_t$ باشد، σ را می‌توان به صورت ترکیبی از $\nu(\sigma)=n-t=\sum(l_i-۱)$ ترانهش نمایش داد. پس برای هر $۱\leq j\leq k$، σ_j را می‌توانیم به صورت $\tau_{۱j}\cdots\tau_{r_jj}$ نمایش دهیم که $r_j=\nu(\sigma_j)$ و τ_{ij}ها ترانهش هستند. در ضمن مقدار ν برای ترانهش‌ها برابر ۱ است، پس $\nu(\sigma_j)=\sum_i\nu(\tau_{ij})$. بنابراین کافیست قضیه را برای ترانهش‌ها ثابت کنیم.

فرض کنید $\tau_1,\dots,\tau_k$، k ترانهش با خواص $\tau_1\cdots\tau_k = 1$ و تراگذری عمل گروه $\langle\tau_1,\dots,\tau_k\rangle$ باشند. باید نشان دهیم $k \geq 2(n-1)$. اگر $\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_m}$ ($i_1 < \cdots < i_m$) زیرمجموعه‌ای مینیمال از $\tau_1,\dots,\tau_k$ با خاصیت تراگذری عمل گروه $\langle\tau_{i_1},\dots,\tau_{i_m}\rangle$ باشد، بنابر لم، $m = n-1$ و $\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_m}$ یک جایگشت دوری به طول n است. از طرف دیگر با مزدوج کردن بقیه‌ی ترانهش‌ها می‌توان از رابطه‌ی $\tau_1\cdots\tau_k = 1$ به رابطه‌ی $\tau_{i_1}\cdots\tau_{i_m}\tau'_1\cdots\tau'_{k-m} = 1$ رسید که τ'_jها هم ترانهش هستند. در نتیجه $\tau'_1\cdots\tau'_{k-m}$ هم جایگشتی دوری به طول n است که به صورت تراگذر روی $[1,n]$ عمل می‌کند. پس بنابر لم، $k-m \geq n-1$ و حکم نتیجه می‌شود:

$$k = m + (k-m) \geq n-1+n-1 = 2(n-1).$$

□

۳ اثبات با استفاده از جبرخطی

نمادگذاری. فرض کنید V یک فضای برداری n-بعدی باشد. تبدیلات خطی وارون‌پذیر V را با $\mathrm{Gl}(V)$ و تبدیل همانی را با 1 نمایش می‌دهیم. برای $g \in \mathrm{Gl}(V)$، V^g زیرفضای متشکل از اعضایی از V است که g آنها را ثابت نگه می‌دارد و $\nu(g)$ نقص بعد این زیرفضا. عدد مشابه برای عمل g روی V^* را[3] با $\nu(g^*)$ نمایش می‌دهیم. همین‌طور اگر G زیرگروهی از $\mathrm{Gl}(V)$ باشد، بزرگترین زیرفضای V (V^*) که G روی آن به صورت بدیهی عمل می‌کند را با V^G (V^{*G}) و نقص بعدش را با $\nu(G)$ ($\nu(G^*)$) نمایش می‌دهیم.

تذکر. بین زیرفضاهای V و V^* تناظری به صورت زیر وجود دارد:

$$W \subseteq V^* \longleftrightarrow \bigcap_{f\in W} \mathrm{Ker}(f) \subseteq V,$$

که در آن بعد هر زیرفضای V^* با نقص بعد زیرفضای متناظر آن در V برابر است. با توجه به این تناظر می‌توان دید که بزرگترین زیرفضایی از V^* که زیرگروه $G \subseteq \mathrm{Gl}(V)$، روی آن بدیهی عمل می‌کند، متناظر با کوچکترین زیرفضای W در V است که عمل G روی خارج‌قسمت V/W بدیهی است. پس $\nu(G^*)$ برابر با بعد W است، ضمناً

$$W = \sum_{g\in G}(1-g)V.$$

با توجه به این رابطه، برای $g \in \mathrm{Gl}(V)$ داریم:

$$\nu(g^*) = \dim((1-g)V) = \mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(1-g))$$
$$= \mathrm{codim}(V^g) = \nu(g).$$

اما برای هر زیرگروه دلخواه $G \subseteq \mathrm{Gl}(V)$، لزوماً $\nu(G)$ با $\nu(G^*)$ برابر نیست. اما اگر حالتی را در نظر بگیریم که G متناهی و میدان ضرایب $\mathbb{R}$ باشد، می‌توان یک ضرب داخلی مثبت معین روی V پیدا کرد که تحت G ناوردا باشد. این ضرب داخلی یک ایزومورفیسم بین V و V^* القا می‌کند که به عمل G احترام می‌گذارد و در نتیجه $\nu(G) = \nu(G^*)$.

قضیه ۱. *فرض کنید V یک فضای برداری n-بعدی است، $g_1,\dots,g_k \in \mathrm{Gl}(V)$ در رابطه‌ی $g_1\cdots g_k = 1$ صدق می‌کنند و $G = \langle g_1,\dots,g_k\rangle$. در این‌صورت:*

$$\nu(g_1)+\cdots+\nu(g_k) \geq \nu(G)+\nu(G^*).$$

اثبات [۶]. زیرفضای C از V^k را به صورت زیر تعریف کنید:

$$C = \{((1-g_1)v_1,\dots,(1-g_k)v_k) \,:\, v_i \in V\}.$$

برای هر i، بعد $(1-g_i)V$ برابر با $\nu(g_i)$ است، پس بعد C برابر است با: $\nu(g_1)+\cdots+\nu(g_k)$.

اگر نگاشت‌های خطی $\alpha : V \to C$ و $\beta : C \to V$ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\alpha(v) = ((1-g_1)v,\dots,(1-g_k)v),$$
$$\beta((v_1,\dots,v_k)) = v_1 + g_1v_2 + \cdots + g_1\cdots g_{k-1}v_k.$$

داریم:

$$\beta\alpha(v) = (1-g_1)v + g_1(1-g_2)v + \cdots + g_1\cdots g_{k-1}(1-g_k)v$$
$$= (1-g_1\cdots g_k)v = 0.$$

پس $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathrm{Ker}\,\beta =: Z$. از طرف دیگر

$$\mathrm{Ker}\,\alpha = \bigcap_{i=1}^{k}\mathrm{Ker}(1-g_i) = V^G.$$

پس بعد $\mathrm{Im}\,\alpha$ برابر با نقص بعد V^G یعنی همان $\nu(G)$ است. ادعا می‌کنیم:

$$\mathrm{Im}\,\beta = \sum_{i=1}^{k}(1-g_i)V.$$

در نتیجه

$$\dim C/Z = \dim(\mathrm{Im}\beta) = \nu(G^*),$$

و حکم از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\nu(g_1)+\cdots+\nu(g_k) &= \dim C\\ &= \dim Z + \dim C/Z\\ &\geq \dim(\mathrm{Im}\,\alpha) + \dim(\mathrm{Im}\,\beta)\\ &= \nu(G)+\nu(G^*).\end{aligned}$$

[3] برای $f \in V^*$ عمل g روی f با g^*f نشان داده می‌شود: $\forall v \in V,\ g^*f(v) = f(g^{-1}v)$.

اما برای اثبات ادعا، با توجه به تعریف β داریم:

$$\operatorname{Im}\beta = (۱-g_۱)V + g_۱(۱-g_۲)V + \cdots + g_۱\cdots g_{k-۱}(۱-g_k)V.$$

با استقرا نشان می‌دهیم که برای هر $i \le k$:

$$(۱-g_۱)V+\cdots+g_۱\cdots g_{i-۱}(۱-g_i)V = (۱-g_۱)V+\cdots+(۱-g_i)V.$$

(سمت چپ را با W_i و سمت راست را با W'_i نشان می‌دهیم.) حالت $i=۱$ واضح است. اگر ادعا برای $i-۱$ برقرار باشد، برای گام بعدی با توجه به تودرتو بودن W_iها و W'_iها، کافیست نشان دهیم:

$$W_i/W'_{i-۱} = W'_i/W'_{i-۱}.$$

اما عمل $g_۱,\dots,g_{i-۱}$ روی $V/W'_{i-۱}$ همانی است، پس:

$$\begin{aligned} W_i/W'_{i-۱} &= (g_۱\cdots g_{i-۱}(۱-g_i)V + W'_{i-۱})/W'_{i-۱} \\ &= ((۱-g_i)V + W'_{i-۱})/W'_{i-۱} = W'_i/W'_{i-۱}. \end{aligned}$$

□

اثبات دوم قضیه‌ی اصلی [۶]. فرض کنید $e_۱,\dots,e_n$ یک پایه برای فضای برداری n-بعدی V روی میدان K باشد. به هر جایگشت $\sigma \in S_n$، تبدیلی خطی به نام T_σ نسبت می‌دهیم که e_i را به $e_{\sigma(i)}$ می‌برد. اگر تجزیه‌ی دوری σ به صورت

$$(i_۱i_۲\dots i_s)(j_۱j_۲\dots j_t)\cdots$$

باشد، به راحتی می‌توان دید که

$$e_{i_۱}+\cdots+e_{i_s}, e_{j_۱}+\cdots+e_{j_t},\dots$$

یک پایه برای V^{T_σ} می‌سازند. در نتیجه بعد V^{T_σ} برابر تعداد دورهای σ است و $\nu(T_\sigma)=\nu(\sigma)$.

همین‌طور اگر $G = \langle T_{\sigma_۱},\dots,T_{\sigma_k}\rangle$، خاصیت تراگذری $\langle\sigma_۱,\dots,\sigma_k\rangle$ نتیجه می‌دهد:

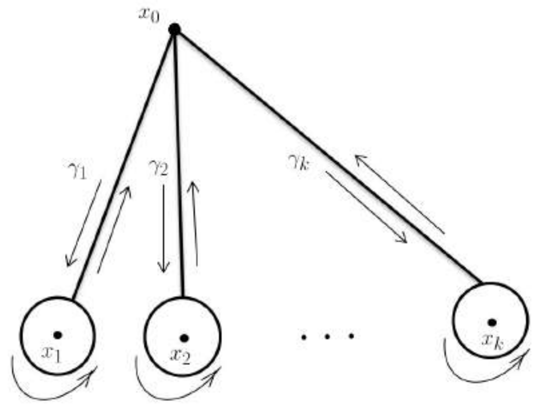
$$\begin{aligned} V^G &= K(e_۱+\cdots+e_n), \\ V^{*^G} &= K(e^*_۱+\cdots+e^*_n). \end{aligned}$$

($(e^*_۱,\dots,e^*_n)$ پایه‌ی دوگان $(e_۱,\dots,e_n)$ است.) پس $\nu(G)=\nu(G^*)=n-۱$ و جایگذاری این مقادیر در قضیه‌ی قبل، قضیه‌ی اصلی را نتیجه می‌دهد. □

۴ اثبات توپولوژیک

اثبات سوم قضیه‌ی اصلی. $k+۱$ نقطه‌ی متمایز $x_۰,\dots,x_k$ را روی کره‌ی دوبعدی ($S^۲$) در نظر بگیرید و تعریف کنید

شکل ۱:



$X = S^۲\setminus\{x_۱,\dots,x_k\}$. با انتخاب مناسبی از خم‌های بسته‌ی γ_i (مانند شکل ۱)، می‌توان دید که

$$\pi_۱(X,x_۰)=\langle\gamma_۱,\dots,\gamma_k|\gamma_۱\cdots\gamma_k=۱\rangle.$$

می‌دانیم که هر پوشش شاخه‌ای [۴] همبند $S^۲$ از درجه‌ی n، که فقط روی نقاط $x_۱,\dots,x_k$ شاخه شده باشد، با عمل تراگذری از $\pi_۱(X,x_۰)$ روی تار [۵] بالای $x_۰$ (عمل مونودرومی [۶]) داده می‌شود که در تناظر با $[۱,n]$ است. با توجه به نمایش فوق از این گروه، اگر عمل γ_i را با σ_i تعریف کنیم، یک عمل یکتای خوش‌تعریف و تراگذر به دست می‌آید که با یک پوشش شاخه‌ای همبند و جهت‌پذیر Y از $S^۲$ که واجد همه‌ی خواص ذکر شده نیز هست، در تناظر است. تصویر وارون هر یک از x_iها در Y متناظر با مدارهای σ_i ($\simeq$ مدارهای مونودرومی موضعی حول x_i) هستند و بنابراین جمع اندیس‌های شاخه‌ای [۷] در این نقاط برابر $\nu(\sigma_i)$ است. اگر گونای [۸] Y را با g نمایش دهیم، بنابر فرمول ریمان-هورویتس [۹] داریم:

$$۲-۲g = ۲n - \sum_{i=۱}^{k} \nu(\sigma_i).$$

اما گونای یک رویه نمی‌تواند منفی باشد، پس

$$\sum_{i=۱}^{k}\nu(\sigma_i) - ۲(n-۱) = ۲g \ge ۰.$$

□

بیان دیگر اثبات. برای اینکه ببینیم در اثبات بالا دقیقاً چه اتفاقی می‌افتد، آن را به بیانی ساده‌تر در حالت $k=۳$ ارائه می‌کنیم.

[۴] Branched Covering
[۵] Fiber
[۶] Monodromy
[۷] Branching Index
[۸] Genus
[۹] Riemann-Hurwitz Formula

پس فرض کنید $\sigma_1 = \alpha$ و $\sigma_2 = \beta$ دو جایگشت در S_n باشند که گروه تولیدشده توسط آنها به صورت تراگذر روی $[1,n]$ عمل می‌کند. گراف دوبخشی G با دو بخش سیاه و سفید را به این صورت می‌سازیم: برای هر دور در تجزیه‌ی دوری α یک رأس در بخش سفید و برای هر دور β، یک رأس در بخش سیاه در نظر می‌گیریم. هر $1 \leq i \leq n$ در دقیقاً یک دور α و یک دور β قرار دارد که متناظر با دو رأس G هستند؛ یالی با شماره‌ی i که این دو رأس را به هم متصل می‌کند، به G اضافه می‌کنیم. در نتیجه G گرافی دو بخشی است که یال‌های آن با اعداد ۱ تا n شماره‌گذاری شده‌اند. هر یال G مانند i را می‌توان به دو طریق سفید به سیاه یا سیاه به سفید، جهت‌دهی کرد. این دو جهت‌دهی را با i_1 و i_2 نشان می‌دهیم.

برای هر $1 \leq i \leq n$، می‌توان یک گردش بسته‌ی جهت‌دار به صورت زیر ساخت:

$$i_1,\ (\beta(i))_2,\ (\alpha\beta(i))_1,\ (\beta\alpha\beta(i))_2, \ldots$$

(این روند را تا جایی ادامه می‌دهیم که اولین تکرار با در نظر گرفتن جهت، رخ دهد.) گردش‌هایی که به این طریق به دست می‌آیند[10] در تناظر با دورهای $\alpha\beta$ هستند و هر یال جهت‌دهی‌شده‌ی G، در دقیقاً یکی از این گردش‌ها ظاهر می‌شود. حال G را به عنوان گرافی توپولوژیک نگاه کنید و به ازای هر یک از این گردش‌های بسته، یک دیسک در نظر بگیرید و مرز آن را روی همین گردش به G بچسبانید تا نهایتاً به فضای توپولوژیک M برسید. با توجه به آنچه گفته شد، فضای توپولوژیک حاصل یک رویه‌ی فشرده و جهت‌پذیر است.[11] ضمناً شرط تراگذری همبندی M را هم نتیجه می‌دهد. اگر گونای M برابر g باشد، با توجه به تناظری که بین وجوه M و دورهای $\alpha\beta$ داشتیم، نتیجه می‌شود:

$$n - (\text{تعداد دورهای } \alpha\beta) + (\text{تعداد دورهای } \beta) + (\text{تعداد دورهای } \alpha)$$
$$= \chi(M) = 2 - 2g \leq 2.$$

□

یک مثال از نحوه‌ی ساختن رویه‌ی M در حالتی که α و β به صورت زیر داده شده باشند، در شکل ۲ نشان داده شده است:

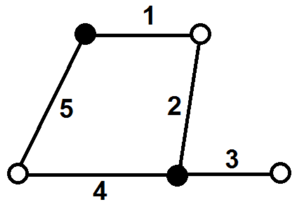
$$\alpha = (12)(3)(45),\ \beta = (15)(243).$$

در این حالت $\alpha\beta$ دو دور دارد که متناظر با دو وجه بیرونی و درونی در شکل است. رویه‌ی حاصل نیز با کره یکریخت است.

[10] دو گردش که یک ترتیب دوری یکسان روی یال‌های جهت‌دار می‌دهند را یکی در نظر می‌گیریم.

[11] برای اثبات این ادعا باید رفتار موضعی M در رئوس و درون یال‌ها بررسی شود. جهت‌پذیری نیز از اینکه هر یال جهت‌دهی شده در دقیقاً دو گردش قرار دارد، نتیجه می‌شود. اثبات این نکات به خوانندگان علاقه‌مند واگذار می‌شود.

شکل ۲:



با استفاده از این ایده می‌توان نشاندن‌هایی برای گراف‌های دوبخشی همبند در رویه‌های جهت‌دار ارائه کرد. به این ترتیب که اگر G، n یال داشته باشد، یال‌هایش را با ۱ تا n شماره‌گذاری می‌کنیم. بعد دو جایگشت α و β می‌سازیم که دورهای آنها با رئوس دو بخش G (سفید و سیاه) در تناظرند و دور متناظر با هر رأس شامل یال‌های مجاور آن است. البته معمولاً در ترتیب اعداد درون هر یک از دورها آزادی عمل زیادی داریم که در نتیجه‌ی نهایی مؤثر است. سپس رویه‌ی M را مانند اثبات می‌سازیم و یک نشاندن G در M به دست می‌آید که گونای آن به راحتی قابل محاسبه است. ضمناً اگر گردش‌های بسته‌ای که مرزهای وجوه M را تشکیل می‌دهند، دور (گردش بسته بدون رأس تکراری) باشند، اصطلاحاً یک نشاندن قوی[12] برای G به دست می‌آید. در صورتی که G گرافی دوبخشی نباشد، باز با اضافه کردن یک رأس در وسط هر یال می‌توان به گرافی دوبخشی و هومیومورف با G رسید و از همین ایده برای یافتن نشاندن‌های خوبی برای G استفاده کرد.

مثال. $G = K_{n,n}$. در این حالت G دوبخشی است و اگر تناظری بین رأس‌های هر دو بخش G و $\mathbb{Z}_n$ برقرار کنیم، یال‌های G متناظر با $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ می‌شود. برای یافتن نشاندن‌های G، کافیست دو جایگشت α و β روی $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$ معرفی کنیم که دورهای α به صورت $\{i\} \times \mathbb{Z}_n$ و دورهای β به صورت $\mathbb{Z}_n \times \{j\}$ باشند.

مثلاً اگر قرار دهیم:

$$\begin{aligned} \alpha(i,j) &= \begin{cases} (i, j+1) & i \neq 0 \\ (i, j-1) & i = 0, \end{cases} \\ \beta(i,j) &= (i+1, j). \end{aligned}$$

در این‌صورت برای دورهای $\alpha\beta$ داریم:

$$(0,0) \xrightarrow{\alpha\beta} (1,1) \xrightarrow{\alpha\beta} \cdots \xrightarrow{\alpha\beta} (n-1, n-1) \xrightarrow{\alpha\beta} (0, n-2) \xrightarrow{\alpha\beta} \cdots \xrightarrow{\alpha\beta} (0, n-4) \xrightarrow{\alpha\beta} \cdots$$

پس برای nهای فرد، $\alpha\beta$ فقط یک دور و برای nهای زوج، ۲ $\alpha\beta$

[12] Strong Embedding

دور دارد:

$$g = \frac{۱}{۲}\left(n^۲ - ۲n - \left\{\begin{array}{ll} ۱ & \text{فرد } n \\ ۲ & \text{زوج } n \end{array}\right. + ۲\right) = \left\lfloor \frac{(n-۱)^۲}{۲} \right\rfloor.$$

که ماکزیمم گونای نشاندن‌هایی از G را می‌دهد که مکمل G اجتماع مجزای تعدادی دیسک باشد.(چون کمترین وجوه ممکن را دارد.)

اما اگر در حالت n زوج قرار دهیم:

$$\alpha(i,j) = (i, j + (-۱)^i), \quad \beta(i,j) = (i + (-۱)^j, j).$$

با این تعریف مرز وجوه به صورت زیر درمی‌آید:

$$(i,j) \xrightarrow{\beta} (i + (-۱)^j, j) \xrightarrow{\alpha} (i + (-۱)^j, j - (-۱)^i)$$
$$\xrightarrow{\beta} (i, j - (-۱)^i) \xrightarrow{\alpha} (i,j).$$

پس همه‌ی این گردش‌ها، دورهای به طول ۴ هستند و یک نشاندن قوی G در رویه‌ای با گونای $(\frac{n}{۲} - ۱)^۲$ به دست می‌آید که کمترین گونای G است.

* * *

برای مشاهده‌ی اطلاعات بیشتر در زمینه‌ی گونای مینیمم گراف‌های کامل و گراف‌های کامل دوبخشی می‌توانید به [۵] مراجعه کنید. نشاندن‌های گراف‌ها در رویه‌ها به زمینه‌های مختلفی از ریاضی مرتبط است. [۳] به این موضوع و کاربردهای مختلف آن پرداخته است.

مراجع

[۱] Feit W., Lyndon R., Scott L.- *A remark about permutations*, J. Comb. Theory, vol. 18 (1975), 234-235.

[۲] Herzog M., Lehrer G.- *A note concerning Coxeter groups and permutations*, Springer lecture notes in math., vol. 573 (1977), 53-56.

[۳] Lando S., Zvonkin A.- *Graphs on surfaces and their applications*, Springer, 2004.

[۴] Ree R.- *A theorem on permutations*, J. Comb. Theory, vol. 10 (1971), 174-175.

[۵] Ringel G.- *Map color theorem*, Springer, 1974.

[۶] Scott L.- *Matrices and cohomology*, Annals of Math., vol. 105 (1977), 473-492.

مثال نقضی در نظریه‌ی گروه‌های متناهی

لعیا قدرتی

در اولین مطالب نظریه‌ی گروه‌ها، یکی از مسائل استاندارد این است که نشان دهیم برای گروه آبلی $G=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ که n عددی فرد است: $x_1x_2\dots x_n = e$ که e عضو همانی G است. در این نوشتار ابتدا مثال نقضی برای حالتی که آبلی بودن را از شرایط مسأله حذف کنیم، ارائه می‌دهیم که در [۱] ارائه شده است. سپس نشان می‌دهیم اگر G یک گروه آبلی متناهی دلخواه باشد آن‌گاه می‌توان ترتیبی برای اعضای آن ارائه کرد که حاصل‌ضرب آن غیرهمانی باشد. بخش دوم نیز بر اساس مقاله‌ی [۳] است.

برای به دست آوردن این گروه، قاعدتا نباید به دنبال گروه‌هایی از مرتبه ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹ بود زیرا این اعداد اول‌اند و هر گروه از مرتبه‌ی اول دوری و بنابراین آبلی است. هم‌چنین $n=9$ نمی‌تواند مثال خوبی باشد زیرا مربع یک عدد اول است و بنابراین گروهی آبلی است. هم‌چنین به کمک استدلال‌هایی استاندارد می‌توان دید که گروه از مرتبه‌ی ۱۵ آبلی است. بنابراین اولین کاندید مناسب برای مرتبه‌ی چنین گروهی ۲۱ است. بدون احتساب گروه‌های دوری از مرتبه‌ی ۲۱، یک گروه یکتای غیرآبلی از مرتبه‌ی ۲۱ وجود دارد. این از گزاره‌ی زیر (مرجع [۲] را ببینید) نتیجه می‌شود:

گزاره ۱. *فرض کنید p و q اعدادی اول باشند به طوری که $q<p$. اگر $q \nmid p-1$ آن‌گاه هر گروه از مرتبه pq با گروه دوری $\mathbb{Z}_{pq}$ یکریخت است. اگر $q \mid p-1$ در این صورت دقیقا دو گروه متفاوت از مرتبه‌ی pq (با احتساب یکریختی) وجود دارد: گروه دوری $\mathbb{Z}_{pq}$ و گروه ناآبلی K تولید شده توسط اعضای c و d به طوری که*

$$o(c)=p, o(d)[1]=q, dc=c^sd$$

که $s \not\equiv 1 \pmod p$ و $s^q \equiv 1 \pmod p$.

نشان می‌دهیم این گروه یکتای غیرآبلی G از مرتبه‌ی ۲۱، همان مثالی است که به دنبالش هستیم. برای این کار ترتیبی از $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ -مجموعه‌ی اعضای غیرهمانی G- را پیدا می‌کنیم به طوری که حاصل‌ضرب $x_1x_2\dots x_{20}$ غیرهمانی باشد. فرض کنید $a, b \in G$ به طوری که مرتبه‌ی a و b به ترتیب ۳ و ۷ باشد و e عضو همانی G است. داریم:

$$G=\{e, a, a^2, b^i, ab^i, a^2b^i : 1 \le i \le 6\}$$

چون $a^{-1}=a^2$ و $\{e, b^i : 1 \le i \le 6\}$ زیرگروهی نرمال از G است (بنابر قضیه‌ی سیلو [۲]) و هم‌چنین $ab \neq ba$، بنابراین $2 \le i \le 7$ وجود دارد به طوری که $aba^2=b^i$.

حال قرار می‌دهیم:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = ab^2 & x_{11} = a^2 \\
x_2 = a^2b^2 & x_{12} = ab \\
x_3 = ab^3 & x_{13} = a \\
x_4 = a^2b^3 & x_{14} = a^2b \\
x_5 = ab^4 & x_{15} = b \\
x_6 = a^2b^4 & x_{16} = b^2 \\
x_7 = ab^5 & x_{17} = b^3 \\
x_8 = a^2b^5 & x_{18} = b^4 \\
x_9 = ab^6 & x_{19} = b^5 \\
x_{10} = a^2b^6 & x_{20} = b^6
\end{array}$$

چون $aba^2=b^i$، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}
x_1x_2\dots x_{10} &= b^{2i+2}b^{3i+3}\dots b^{6i+6} \\
&= b^{i(2+3+\dots+6)+(2+3+\dots+6)} \\
&= b^{20i+20} = b^{20(i+1)}
\end{aligned}$$

هم‌چنین از آن‌جایی که $a^3=e$ و $b^7=e$ داریم $x_{11}x_{12}\dots x_{20}=b^2$. بنابراین حاصل‌ضرب به دست می‌آید:

$$x_1x_2\dots x_{20}=b^{20(i+1)+2}$$

حال چون $20(i+1)+2$، برای $2 \le i \le 6$ بر ۷ قابل‌قسمت نیست پس $x_1x_2\dots x_{20} \neq e$. بنابراین این مثال مورد نظر است.

تذکر ۲. *بنابر گزاره‌ی ۱، می‌توان دید که مقدار i تنها می‌تواند ۲ یا ۴ باشد اما نه هر دو! که البته این مطلب در این‌جا اهمیتی ندارد.*

حال فرض کنید G یک گروه ناآبلی متناهی دلخواه باشد و $\{x_1, \dots, x_n\}$ تمام اعضای G باشد. می‌خواهیم ترتیبی برای اعضای G ارائه دهیم که حاصل‌ضرب آن غیرهمانی باشد. راه‌حل به این شکل است که اعضای a و b از G را انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم $x_1=a$ و $x_2=b$ به طوری که $ab \neq ba$ و $abx_3\dots x_n$ یا $bax_3\dots x_n$ غیرهمانی باشد. در واقع اگر n فرد باشد، ترتیب را به این شکل تعریف می‌کنیم:

$$x_1=a, x_2=b, x_3=a^{-1}, x_4=b^{-1}$$

[۱] منظور از $o(x)$ مرتبه‌ی عنصرِ x از گروه است.

[۲] یک راه ساده‌تر برای اثبات اینکه این زیرگروه نرمال است، استفاده از این نکته است که زیرگروهی که اندیسش کوچکترین عامل اول مرتبه‌ی گروه باشد، حتماً نرمال است. پس یک زیرگروه ۷ عضوی از گروهی ۲۱ عضوی، زیرگروهی نرمال است.

$$x_{2i} = x_{2i-1}^{-1}, 3 \leq i \leq \frac{n-1}{2} \quad {}^{3}$$

$$x_n = e$$

از طرفی اگر G گروهی متناهی باشد به طوری که

$$S = \{x \in G : x^2 = e\}$$

زیرگروهی از G باشد و $|S| \neq 2$ (به طور خاص، اگر G گروه از مرتبه فرد باشد)، ترتیبی همچون $x_1, \ldots, x_n$ از تمام اعضای G وجود دارد به طوری که $x_1 x_2 \ldots x_n$ همانی باشد. برای دیدن این مطلب ابتدا نشان دهید S آبلی است ([4] را ببینید) و ضرب اعضایش همانی، سپس با استفاده از ایده‌ی مطرح شده در این‌جا می‌توان این حاصل‌ضرب را ساخت. به این صورت که عناصری که در S نیستند را کنار هم بنویسیم به طوری‌که هر عنصر در کنار وارونش ظاهر شود (توجه کنید این کار امکان‌پذیر است زیرا اعضای S دقیقا آنهایی هستند که با وارونشان برابرند.) و اعضای S را نیز در کنار هم. این حاصل‌ضرب همانی خواهد شد.

نتیجه‌ی فوق برای یک گروه متناهی دلخواه برقرار نیست. به عنوان مثال، حاصل‌ضرب اعضای S_3 (گروه جایگشت‌های روی $\{1,2,3\}$)در هر ترتیبی غیرهمانی است.

مراجع

[1] Ramesh Garimella, A Counter Example in Group Theory, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 3 (1991), 77-78.

[2] T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

[3] Kandasamy Muthuvel, A Note on a Counter Example in Finite Groups, Missouri Journal of Mathematical Sciences, 1993.

[4] I. N. Herstein, Abstract Algebra, Macmillan, New York, 1990.

[3] در واقع چون مرتبه‌ی گروه فرد است، هیچ عضوی به جز همانی با وارونش یکسان نیست. پس $n-5$ عضو دیگر به جز e, a, b, a^{-1}, b^{-1} را می‌توان در ترتیبی در نظر گرفت که هر عنصر در کنار وارونش آمده باشد. این همان کاری است که اینجا انجام شد.

مقدارویژه‌های ماتریس‌های تصادفی

محمدصادق زمانی

۱ ماتریس‌های یکانیِ تصادفی

گروه ماتریس‌های یکانی از مرتبهٔ n، $\mathcal{U}_n$، را در نظر بگیرید. این گروه شامل همهٔ ماتریس‌های $n \times n$ با درایه‌های مختلط مانند U است به طوریکه $U^*U = I_n$. در اینجا U^* ترانهادهٔ مزدوج U است. می‌توان نشان داد که روی این گروه، اندازه احتمالِ ناوردایی (تحت عمل گروه از سمت چپ) مانند μ وجود دارد با این ویژگی که برای هر مجموعهٔ برلی مانند B در $\mathcal{U}_n$ و هر ماتریس $U \in \mathcal{U}_n$ داشته باشیم

$$\mu(UB) = \mu(B) \quad , \quad \mu(\mathcal{U}_n) = 1$$

همچنین تنها یک اندازه با این شرایط وجود دارد. چنین اندازه احتمال‌هایی روی گروه‌های توپولوژیکِ فشرده، اندازهٔ هار [1] نامیده می‌شوند.

می‌خواهیم یک ماتریس تصادفی نسبت به اندازهٔ μ از $\mathcal{U}_n$ انتخاب کنیم. برای این منظور می‌توانیم ابتدا n^2 متغیر تصادفیِ مستقلِ x_{ij}، $1 \leq i, j \leq n$ از توزیع نرمال روی صفحهٔ مختلط انتخاب کنیم. تابع چگالیِ این توزیع $\frac{e^{-|z|^2}}{\pi}\,\mathrm{d}z$ است. سپس ماتریسی از مرتبه n با درایه‌های x_{ij} را در نظر بگیرید، روی آن الگوریتم گرام-اشمیت را اجرا کنید و ماتریس حاصل که یک ماتریس یکانی است را U بنامید. به کمک ناورداییِ توزیعِ یک بردار با درایه‌های نرمال استانداردِ مختلط در $\mathbb{C}^n$ تحت تبدیلاتِ یکانی، می‌توان دید که U از توزیع μ انتخاب شده است یعنی برای هر مجموعهٔ برل مانند B در $\mathcal{U}_n$ داریم:

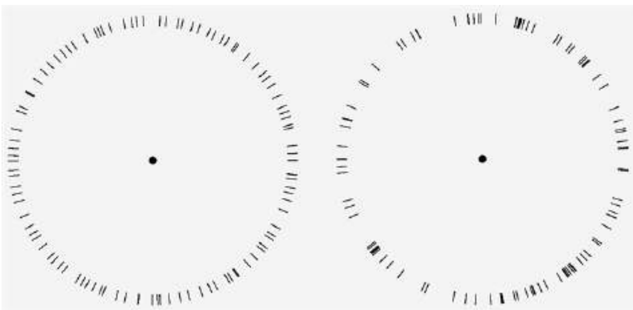
$$\mathbf{P}(U \in B) = \mu(B).$$

اغلب برای یک ماتریس علاقمند به بررسی مقدارویژه‌های آن هستیم. فرض کنید ماتریس U از $\mathcal{U}_n$ نسبت به اندازهٔ μ انتخاب شده باشد. در این صورت مقدارویژه‌های U، n نقطه روی دایرهٔ $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ مانند $e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n}$ هستند. به کمک فرمول انتگرال وایل [2] می‌توان چگالیِ بردار $(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})$ را (با یک ترتیب تصادفی و یکنواخت) نسبت به اندازهٔ لبگ روی $(S^1)^n$ به صورت زیر بدست آورد.

$$\frac{1}{(2\pi)^n n!} \prod_{1 \leq j < k \leq n} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 \qquad (1)$$

[1] Haar measure
[2] Weyl's integration formula

از روی تابع چگالی می‌توان نتیجه گرفت که توزیع مقدارویژه‌های U تحت دوران‌های دایره ناوردا است همچنین انتظار یک نوع دافعه بین مقدارویژه‌ها داریم این دافعه منجر به این می‌شود که آرایش مقدارویژه‌ها منظم‌تر از آرایش نقاط تصادفی، مستقل و یکنواخت روی دایره باشد. در شکل ۱ تصویرِ مقدارویژه‌های یک ماتریس یکانیِ تصادفی از مرتبهٔ ۱۰۰ و همچنین ۱۰۰ نقطهٔ تصادفی و مستقل با توزیع یکنواخت روی دایره ترسیم شده‌اند.



شکل ۱: سمت چپ مقدارویژه‌های یک ماتریس یکانیِ تصادفی از مرتبهٔ ۱۰۰ و در سمت راست ۱۰۰ نقطهٔ تصادفی و مستقل با توزیع یکنواخت.

با توجه به شکل دیده می‌شود که مقدارویژه‌های ماتریس U آرایش بسیار منظمی دارند. می‌توان محک‌های متنوعی برای میزان نظم یا همگنیِ مجموعه‌ای متناهی از نقاط روی دایره در نظر گرفت و وضعیت این نقاط را نسبت به این محک‌ها بررسی کرد. برای مثال می‌توان تابع انرژی‌های متفاوتی از آرایش n نقطه روی دایره را در نظر گرفت.

مدلی که ارائه شد مثالی از یک فرایند نقطه‌ای تصادفی [3] (ساده) است. یک فرایند نقطه‌ای تصادفی، اندازه احتمالی روی مجموعهٔ همهٔ خانواده‌های متناهی (یا موضعاً متناهی) از نقاط متمایز در یک فضای خاص است. فرایندهای نقطه‌ای توسط تابع‌های همبستگی [4] مشخص می‌شوند. به کمک این توابع می‌توان آماره‌های مختلفی از فرایند نقطه‌ای را محاسبه کرد.

برای این مدل تابع همبستگی از مرتبهٔ k را به صورت $\rho_k^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_k})$ نمایش دهید آنگاه هر یک از دو ویژگی که در ادامه ذکر می‌شود را می‌توان مبنای تعریف تابع‌های همبستگی قرار داد. یک آنکه احتمال اینکه در کمان‌هایی به طول ϵ به مرکز $e^{i\phi_j}$، $1 \leq j \leq k$، دقیقاً یکی از مقدارویژه‌های U وجود داشته باشد برابر با

$$\left(\rho_k^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1}, \ldots, e^{i\phi_k}) + o(1)\right) \epsilon^k$$

[3] Random point process
[4] Correlation functions

است وقتی $\epsilon \to 0^+$. یا می‌توانیم $\rho_k^{\mathcal{U}_n}$ را از این ویژگی که برای توابع پیوسته $F : S^1 \to \mathbb{C}$ داریم:

$$\mathbf{E} \sum_{l_1,\dots,l_k \text{ دو به دو متمایز}} F(e^{i\theta_{l_1}},\dots,e^{i\theta_{l_k}}) = \int_{(S^1)^k} F(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_k})\rho_k^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_k})\,\mathrm{d}\phi_1\dots\mathrm{d}\phi_k$$

بشناسیم.

(در رابطهٔ بالا $1 \le l_1,\dots,l_k \le n$ و همانند قبل $e^{i\theta_1},\dots,e^{i\theta_n}$ مقدارویژه‌های ماتریس تصادفی U از $\mathcal{U}_n$ نسبت به اندازه احتمال μ است.)

با توجه به تعابیر قبل نتیجه می‌شود که $\rho_k^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_n})$، $n!$ برابرِ تابع چگالی در رابطهٔ ۱ می‌باشد. بنابراین خواهیم داشت:

$$\rho_n^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_n}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\prod_{1\le j<k\le n}|e^{i\phi_j}-e^{i\phi_k}|^2$$

همچنین طبق فرمول دترمینانِ ماتریس واندرموند، عبارت $\prod_{1\le j<k\le n}(e^{i\phi_j}-e^{i\phi_k})$ صرف نظر از علامت، برابر با دترمینان ماتریس $A=[e^{ij\phi_k}]_{1\le j,k\le n}$ خواهد بود. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\rho_n^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_n}) = \frac{1}{(2\pi)^n}\det(AA^*)$$

اگر تعریف کنیم:

$$K_n(e^{i\theta},e^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{n-1} e^{ij\theta-ij\phi}$$

در این صورت با توجه به درایه‌های ماتریس AA^* خواهیم داشت:

$$\rho_n^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_n}) = \det[K_n(e^{i\phi_j},e^{i\phi_k})]_{1\le j,k\le n}$$

می‌توان به سادگی دید که تابع‌های همبستگی از مرتبهٔ k برای $k<n$ از $\rho_n^{\mathcal{U}_n}$ به کمک رابطهٔ زیر قابل محاسبه هستند.

$$\rho_k^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_k}) = \frac{1}{(n-k)!}\int_{(S^1)^{n-k}} \rho_n^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_n})\,\mathrm{d}\phi_{k+1}\dots\mathrm{d}\phi_n$$

با قرار دادن نمایش دترمینانی $\rho_n^{\mathcal{U}_n}$ در رابطهٔ بالا و استفاده از فرمول کوشی- بینِت [5] می‌توانیم رابطهٔ جالب زیر را نتیجه بگیریم.

$$\rho_k^{\mathcal{U}_n}(e^{i\phi_1},\dots,e^{i\phi_k}) = \det[K_n(e^{i\phi_j},e^{i\phi_l})]_{1\le j,l\le k}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که این فرایندِ نقطه‌ای دارای یک ساختار جبریِ غنی است. به کمک این ساختار و رابطه‌های جبری می‌توان بسیاری از کمیت‌هایی را که به آنها علاقه‌مندیم -بسیار ساده‌تر از فرایندهای نقطه‌ای که چنین ساختاری ندارند- محاسبه نماییم.

برای مثال روی دایره به کمک تابع چگالی

$$C\prod_{1\le j<k\le n}|e^{i\theta_j}-e^{i\theta_k}|^\beta$$

می‌توان یک فرایند نقطه‌ای تصادفی با n نقطه ساخت. (C ثابت طوری تعیین می‌شود که تابع بالا یک تابع چگالی شود. این ثابت را می‌توان از فرمول انتگرال سِلبرگ [6] محاسبه کرد.) این فرایندهای نقطه‌ای حالت تعادل یک مدل فیزیکی خاص هستند که β در این مدل فیزیکی، متناسب با معکوس دما است. طبیعی است که انتظار داشته باشیم با افزایش β (کاهش دما) فرایندهای نقطه‌ای تصادفی که از این طریق ساخته می‌شوند، دارای نظم بیشتری باشند. به جز حالت $\beta = 2$ که ارتباط آن با ماتریس‌های تصادفی بیان شد، به دست آوردن کمیت‌های مورد علاقه در دماهای دیگر به دلیل عدم وجود ساختار جبریِ مناسب به مراتب دشوارتر است. (برای حالت‌های $\beta = 1,4$ نیز ساختارهای جبری خوب اما پیچیده‌تری وجود دارد. در این دماها تابع همبستگی از مرتبهٔ k بر حسب دترمینانِ کواترنیونی یک ماتریس $k\times k$ بیان می‌شود.)

فرایند نقطه‌ای تصادفی روی فضای Λ را یک فرایند نقطه‌ای دترمینانی [7] می‌گوییم هرگاه هستهٔ $K:\Lambda\times\Lambda\to\mathbb{C}$ چنان موجود باشد به طوریکه برای هر $k\ge 1$، تابع همبستگی از مرتبهٔ k ، ρ_k، برای هر $x_1,\dots,x_k\in\Lambda$ از رابطهٔ زیر بدست آید:

$$\rho_k(x_1,\dots,x_k)=\det[K(x_i,x_j)]_{1\le i,j\le k}.$$

مثال‌های متنوعی از فرایندهای نقطه‌ای دترمینانی وجود دارد. تعداد زیادی از فرایندها که به طور طبیعی تعریف می‌شوند یک فرایند نقطه‌ای دترمینانی هستند. ویژگی دترمینانی بودن علاوه بر مورد ماتریس‌های تصادفی یکانی، برای مدل‌های دیگری از ماتریس‌های تصادفی نیز برقرار است.

می‌توانیم عملگرِ انتگرالیِ نظیر هستهٔ K_n را روی فضای توابع $L^2(S^1)$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\mathcal{K}_n f(e^{i\theta}) = \int_{S^1} K_n(e^{i\theta},e^{i\phi})f(e^{i\phi})\,\mathrm{d}\phi.$$

عملگر $\mathcal{K}_n$، عملگر تصویر روی فضای تولید شده توسط توابع $\{1,e^{i\theta},\dots,e^{(n-1)\theta}\}$ است. این عملگر برای هر تابع $f\in L^2(S^1)$ تقریب n جملهٔ اول سری فوریهٔ مختلط آن را نسبت می‌دهد. یکی از قضیه‌های اساسی در مورد فرایندهای دترمینانی، بیان می‌کند که اگر طیفِ عملگر انتگرالی منسوب به هستهٔ هرمیتی K در بازهٔ $[0,1]$ قرار داشته باشد آنگاه فرایند دترمینانی نظیر آن هسته وجود دارد. در ادامه

[5] Cauchy-Binet formula

[6] Selberg's integral formula

[7] Determinantal point process

تعدادی از نتایج در مورد مقدارویژه‌های ماتریس‌های تصادفی یکانی ذکر شده است.

روی دایرهٔ $S^۱$ کمانی به طول α در نظر بگیرید و آن را D بنامید. تحدید فرایند نقطه‌ای مقدارویژه‌های ماتریس‌های تصادفی یکانی روی D نیز یک فرایند دترمینانی با همان هستهٔ قبلی است. عملگر انتگرالی منسوب به این فرایند دترمینانی جدید، تحدید عملگر $\mathcal{K}_n$ به $L^۲(D)$، $\mathcal{K}_{n|_D}$، است. به کمک نتایج کلی‌تری که در مورد فرایندهای دترمینانی داریم، دیده می‌شود که تعداد نقاطِ فرایند دترمینانی جدید، هم‌توزیع با جمع تعدادی متغیر تصادفیِ برنولیِ مستقل با پارامترهایی برابر با مقدارویژه‌های عملگر انتگرالی $\mathcal{K}_{n|_D}$ است. به طور دقیق‌تر همانند قبل فرض کنید ماتریس U از $\mathcal{U}_n$ نسبت به اندازهٔ هار انتخاب شده باشد و مقدارویژه‌های آن $e^{i\theta_۱},\dots,e^{i\theta_n}$ باشند.

تعریف می‌کنیم:

$$N_D := |\{j : e^{i\theta_j} \in D\}| \qquad (۲)$$

که متغیر تصادفی N_D برابر با تعداد مقدارویژه‌های ماتریس U در کمان D است. اگر مقدارویژه‌های ناصفر عملگر $\mathcal{K}_{n|_D}$ را با احتساب تکرر، $\lambda_۱,\dots,\lambda_n$ بنامیم (می‌توان دید که با احتساب تکرر این عملگر دقیقاً n مقدارویژهٔ ناصفر دارد.) در این صورت N_D هم‌توزیع با مجموع n متغیر تصادفی برنولیِ مستقل مانند $B_۱,\dots,B_n$ است به طوریکه

$$\mathbf{P}(B_j = ۱) = \lambda_j \ , \ \mathbf{P}(B_j = ۰) = ۱ - \lambda_j$$

برای مثال می‌توان نتیجه گرفت که احتمال خالی بودن کمان D برابر است با:

$$\mathbf{P}(N_D = ۰) = \det(\mathrm{Id} - \mathcal{K}_{n|_D})$$

با استفاده از روش‌هایی که برای حل مسائل ریمان-هیلبرت [۸] به کار می‌رود، نشان داده شده است که

$$\log \mathbf{P}(N_D = ۰) =$$
$$n^۲ \log\cos\frac{\alpha}{۴} - \frac{۱}{۴}\log\left(n\sin(\alpha/۴)\right) + c_۰ + O\left(\frac{۱}{n\sin(\alpha/۴)}\right)$$

که $c_۰ = \frac{۱}{۱۲}\log ۲ + ۳\zeta'(-۱)$ و $\zeta(s)$ تابع زتای ریمان است.

به علاوه به کمک $\rho_۲^{\mathcal{U}_n}$ می‌توان واریانس N_D را محاسبه کرد و با توجه به اینکه N_D هم‌توزیع با مجموع تعدادی متغیر تصادفی مستقل است، به کمک قضیهٔ حد مرکزی لیندِبرگ-فِلِر [۹] می‌توان نشان داد که

$$\frac{N_D - n\frac{\alpha}{۲\pi}}{\frac{۱}{\pi}\sqrt{\log n}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(۰,۱)$$

وقتی $n \to +\infty$. (نماد $\xrightarrow{\mathrm{d}}$ به معنای همگرایی در توزیع است.) مقایسه کنید با حالتی که n نقطهٔ تصادفی، مستقل و از توزیع یکنواخت روی دایره در نظر گرفته باشیم.

برای تابع $f : S^۱ \to \mathbb{R}$ با شرایط همواریِ مناسب نیز نشان داده شده است که برای آمارهٔ خطی $T_n(f) = \sum_{j=۱}^n f(e^{i\theta_j})$ داریم:

$$\frac{T_n(f) - \int_{S^۱} f}{\sqrt{\sum_{j=-n}^{j=n} |\hat{f}_j|^۲ |j|}} \xrightarrow{\mathrm{d}} N(۰,۱)$$

($\hat{f}_j$ ضریب jاُم تبدیل فوریهٔ f است.) برای مثال برای هر $j \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\mathrm{tr}(U^j) \xrightarrow{\mathrm{d}} N(۰, j)_{\mathbb{C}}$$

وقتی $n \to +\infty$.

مقایسه کنید با حالتی که n نقطهٔ تصادفی، مستقل و از توزیع یکنواخت روی دایره انتخاب شده باشند. در این حالت جمع برداری نقاط تقسیم بر $\sqrt{n}$، همگرا در توزیع به $N(۰,۱)_{\mathbb{C}}$ است.

از دیگر کمیت‌هایی که به آن علاقه‌مندیم، کمترین و بیشترین فاصلهٔ دو نقطهٔ متوالی از مدل است. متغیرهای تصادفی زیر را در نظر بگیرید:

$$m_n := \min_{۱\le j\le n} |e^{i\theta_{j+۱}} - e^{i\theta_j}|$$
$$M_n := \max_{۱\le j\le n} |e^{i\theta_{j+۱}} - e^{i\theta_j}|$$

(اندیس‌ها را به پیمانهٔ n در نظر بگیرید.)

نشان داده شده است که

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}\left(m_n \left(\frac{n^۴}{۷۲\pi}\right)^{۱/۳} > x\right) = e^{-x^۳/۳}$$

همچنین برای هر $p > ۰$ وقتی $n \to +\infty$ داریم:

$$\frac{M_n}{\frac{\sqrt{۳۲\log n}}{n}} \xrightarrow{L^p} ۱$$

در نهایت نتیجه‌ای جالب از ارتباط بین مقدارویژه‌های ماتریس تصادفی یکانی و طول بزرگترین زیردنبالهٔ صعودی در یک جایگشت تصادفی را ذکر می‌کنیم. فرض کنید σ یک جایگشت مجموعهٔ $\{۱,\dots,m\}$ باشد. یک زیردنبالهٔ صعودی $(i_۱,\dots,i_k)$ از σ یک زیردنباله با شرایط زیر است:

$$i_۱ < i_۲ < \ldots < i_k$$
$$\sigma(i_۱) < \sigma(i_۲) < \ldots < \sigma(i_k)$$

از گروه تمام جایگشت‌های مجموعهٔ $\{۱,\dots,m\}$، S_m، یک جایگشت به تصادف (با احتمال برابر از بین $m!$ جایگشت موجود) انتخاب کنید. و متغیر تصادفی L_m را برابر با طول بزرگترین زیردنبالهٔ

---
[۸] Riemann-Hilbert problems
[۹] Lindeberg-Feller central limit theorem

صعودی از این جایگشت تعریف می‌کنیم. در این صورت می‌توان توزیع L_m را از رابطهٔ زیر بدست آورد:

$$\mathbf{P}(L_m \le n) = \frac{1}{m!}\mathbf{E}\left[|\operatorname{tr}(U)|^{2m}\right]$$

که U یک ماتریس تصادفی از $\mathcal{U}_n$ نسبت به اندازهٔ هار است. برای مطالعهٔ بیشتر در این زمینه و رفتار حدی جالب L_m [۲] و [۴] را ببینید. هر چند اثبات این رابطه سخت نیست ولی دلایل عمیقی برای وجود ارتباط بین ماتریس‌های تصادفی و جایگشت‌های تصادفی وجود دارد. برای مثال مقالهٔ جالب [۳] و نتایج دیگر نویسندهٔ این مقاله در کمک به ایجاد پلی بین احتمال، هندسه جبری و نظریهٔ نمایش را ببینید.

۲ ماتریس‌های متقارن تصادفی

ویگنر [۱۰] اولین بار مقداروِیژه‌های ماتریس‌های تصادفی بزرگ را به عنوان مدلی برای بررسی طیف اتم‌های سنگین پیشنهاد داد. فرض کنید A_n یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های مستقل و از توزیع نرمال استاندارد مختلط باشد. قرار دهید $H_n = \frac{A_n + A_n^*}{\sqrt{2}}$ و فرض کنید $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots \le \lambda_n$، n مقداروِیژهٔ (لزوماً حقیقی) ماتریس $\frac{1}{\sqrt{n}}H_n$ باشند.

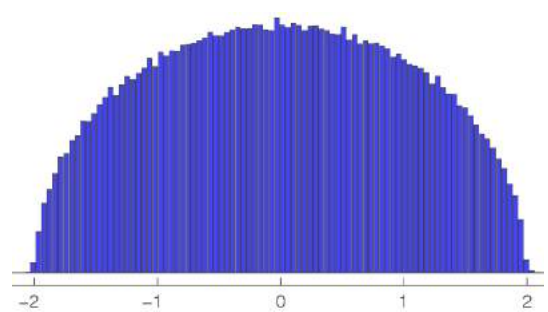
مشابه تعریف ۲ برای هر بازهٔ $I \subset \mathbb{R}$ متغیر تصادفی N_I را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$N_I := \{1 \le j \le n : \lambda_j \in I\}.$$

آنگاه قانون نیم‌دایره‌ای ویگنر [۱۱] بیان می‌کند که در احتمال

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} N_I = \int_I \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4 - x^2)^+}\,\mathrm{d}x.$$

(شکل ۲ را ببینید.)



شکل ۲: هیستوگرام مقداروِیژه‌های ۱۰۰ ماتریس ۴۰۰ × ۴۰۰ از توزیع GUE

این قانون به روش‌های مختلفی اثبات شده است. در حالت بالا که درایه‌های ماتریس A از توزیع نرمال استاندارد مختلط بودند (این حالت را GUE [۱۲] می‌نامیم.) اتفاقات خوب زیادی رخ می‌دهد. در این حالت توزیع ماتریس تصادفی H_n تحت مزدوج‌گیری با گروه $\mathcal{U}_n$ ناوردا است. یعنی برای هر $U \in \mathcal{U}_n$ توزیع UH_nU^* با توزیع H_n برابر است. به دلیل چنین تقارن‌هایی حالت GUE بسیار ساده‌تر از حالت‌هایی است که درایه‌های A_n از توزیع‌های دیگری باشند. می‌توان دید که مقداروِیژه‌های H_n روی خط حقیقی، یک فرایندِ دترمینانی خواهد بود، به طوریکه عملگر انتگرالیِ منسوب به هستهٔ آن، عملگر تصویر از فضای $L^2(\mathbb{R}, \nu)$ به فضای خطیِ تولید شده توسط n جملهٔ اول چندجمله‌ای‌های هرمیت [۱۳] است. ν اندازهٔ گاوسی است یعنی $\mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ و می‌دانیم چندجمله‌ای‌های هرمیت نسبت به این اندازه بر هم متعامدند.

در نتیجه به کمک نتایج کلی که برای فرایندهای دترمینانی داریم (همانند حالت ماتریس تصادفی یکانی) بدست آوردن توزیع N_I به صورت صریح و یا بدست آوردن همهٔ تابع‌های همبستگی قابل انجام است. لذا علاوه بر قانون نیم‌دایره‌ای می‌توانیم رفتار متغیر تصادفی N_I را دقیق‌تر بررسی کنیم. برای مثال نشان داده شده است که برای هر $A > 0$ و هر $\epsilon > 0$ به احتمال $1 - O(n^{-A})$ و یکنواخت نسبت به I داریم:

$$N_I = n\int_I \frac{1}{2\pi}\sqrt{(4 - x^2)^+}\,\mathrm{d}x + O(\log^{1+o(1)} n) \qquad (3)$$

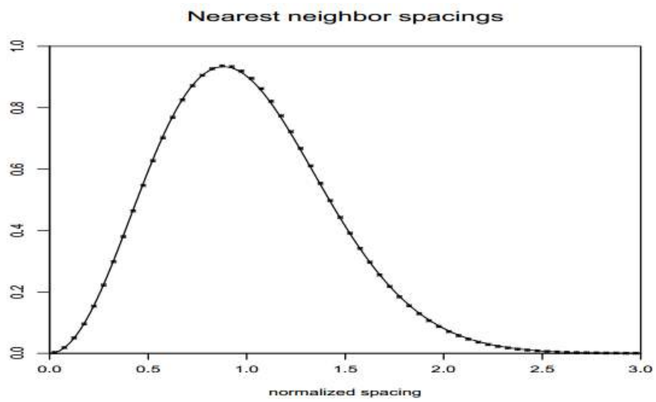
در ادامه ارتباط جالبی که بین مقداروِیژه‌های H_n و صفرهای تابع زتای ریمان وجود دارد، را بیان می‌کنیم. تابع زتای ریمان را در نظر بگیرید:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

ریمان نشان داد که این تابع دارای یک گسترش تحلیلی به تمام صفحه، مگر یک قطب ساده در $s = 1$ است. همچنین حدس زد که تمام صفرهای نابدیهی این تابع روی خط $\mathbf{Re}(s) = \frac{1}{2}$ قرار دارد. به این حدس فرض ریمان [۱۴] گفته می‌شود و نتایج متعددی در مورد توزیع اعداد اول دارد. در صورت درستی فرض ریمان در مورد توزیع صفرها روی خط $\mathbf{Re}(s) = \frac{1}{2}$ چه می‌توان گفت؟ به کمک نتایج به دست آمده از روش‌های عددی و دیگر نتایج، مشاهده شده است که بین ریشه‌های تابع زتا نوعی دافعه وجود دارد و با دقت باورنکردنی توزیع ریشه‌ها با پیش‌بینی‌ها بر اساس نظریهٔ ماتریس‌های تصادفی یکی است. حدس این است که ویژگی‌های آماری صفرهای زتا و

[۱۰] Eugene Wigner
[۱۱] Wigner's semicircle law
[۱۲] Gaussian unitary ensemble
[۱۳] Hermite polynomials
[۱۴] Riemann hypothesis

مقدارویژه‌های ماتریس‌های GUE (در $n \to +\infty$) تطابق دارند. (فرض GUE)



شکل ۳: چگالی (احتمال) فواصل نرمال شده. برای یک میلیارد ریشهٔ تابع زتا (نقاط پراکنده) و پیش‌بینی GUE (خط یکپارچه). تصویر از [۵].

برای مطالعهٔ بیشتر در مورد تابع زتا و ارتباط آن با ماتریس‌های تصادفی [۶] را ببینید.

همانطور که دیدیم هنگامی که درایه‌های ماتریس A_n از توزیع نرمال استاندارد مختلط باشند، بررسی بسیاری از ویژگی‌های آماری با توجه به فرایندِ دترمینانی بودن مقدارویژه‌ها قابل انجام است. حال اگر درایه‌های A_n از توزیع دیگری با میانگین صفر و واریانس یک باشند (در حالت خاص توزیع‌های گسسته را در نظر بگیرید.) در مورد مقدارویژه‌ها چه می‌توان گفت؟ بر اساس مشاهدات همچنان انتظار می‌رود که بسیاری از رفتارهای آماریِ مقدارویژه‌ها به حالت GUE برای nهای بزرگ نزدیک باشد.

یکی از مهمترین مسائلی که در چند سال اخیر در نظریهٔ ماتریس‌های تصادفی بررسی شده است پدیدهٔ عمومیت [15] برای این ماتریس‌ها است. برای مثال قضیهٔ حد مرکزی دارای ویژگی عمومیت است: در این قضیه نتیجهٔ نهایی، مستقل از توزیع اولیهٔ متغیرهای تصادفی، توزیع نرمال است. به طور مشابه در حالتی که درایه‌های ماتریس A_n از یک توزیع دلخواه با میانگین صفر و واریانس ۱ باشد نیز قانون نیم‌دایره‌ای ویگنر برقرار است. ویژگی‌های آماری دیگری مشابه رابطهٔ ۳ نیز در حالت‌های کلی‌تری برقرار است. از ابزارهای قدرتمندی برای اثبات ویژگی عمومیت در این حالت یا مدل‌های دیگری از ماتریس‌های تصادفی استفاده شده است. برای مطالعهٔ بیشترِ پدیدهٔ عمومیت برای ماتریس‌های تصادفی متقارن، [۷] را ببینید.

[15] Universality

مراجع

[1] G.W. Anderson, A. Guionnet, O. Zeitouni, An Introduction to Random Matrices, Cambridge University Press, 2009.

[2] D. Aldous, P. Diaconis, Longest increasing subsequences: From patience sorting to the Baik-Deift-Johansson theorem, Bull. Amer. Math. Soc., 36: 413–432 (1999).

[3] A. Okounkov, Random matrices and random permutations., International Mathematics Research Notices, 2000(20), 1043-1095.

[4] J. Beik, K. Johansson, P. Deift, On the distribution of the length of the longest increasing subsequence of random permutations, Journal of the American Mathematical Society, 12.4 (1999): 1119-1178.

[5] A. Odlyzko, The 10^{22}-nd zero of the Riemann zeta function., Contemporary Mathematics, 290.

[6] J.B. Conrey, The Riemann hypothesis, Notices of the AMS 50, no. 3 (2003): 341-353.

[7] T. Tao, V. Vu, Random matrices: The Universality phenomenon for Wigner ensembles, arXiv:1202.0068, 2012.

انتقال بهینه

ابوالفضل طاهری

چکیده

در ریاضیات و اقتصاد، نظریه‌ی انتقال نامی است که بر مطالعه‌ی روش‌های مناسب برای تخصیص منابع نهاده‌اند. مسأله‌ی اولیه‌ی این موضوع در سال ۱۷۸۱ توسط مونژ صورت‌بندی شد و بعدها توسط کانترویچ به گونه‌ای دیگر بیان شد. این موضوع در سه دهه‌ی اخیر پیشرفت‌های بزرگی در ریاضیات داشته و در حال حاضر در مباحث مختلفی از ریاضیات جایگاه ویژه‌ای یافته است. در این نوشتار سعی در ارائه‌ی تاریخچه‌ای مختصر از این موضوع و معرفی آن داریم. در بخش اول تاریخچه‌ی شکل‌گیری این نظریه را مورد بررسی قرار می‌دهیم و می‌توان در مطالعه‌ی این بخش از اصطلاحات علمی چشم‌پوشی کرد و بنابراین این بخش برای عموم مفید است. اما بخش دوم به صورت تکنیکال به مقدمات مبحث می‌پردازد و پیش‌نیازهایی در نظریه اندازه لازم است.


تاریخچه‌ی کمینه‌سازی مونژ

فرض کنید می‌خواهیم مقداری خاک را از زمین استخراج کنیم و آن را به مکانی برای ساخت و ساز منتقل کنیم. مکان‌هایی که می‌توان از آن استخراج کرد و هم‌چنین مکان‌هایی که باید به آن‌ها انتقال صورت بگیرد مشخص شده‌اند. مسأله این است که خاک هر کدام از منطقه‌ها را از کدام معادن تامین کنیم؟ در واقع از آن‌جایی که انتقال هزینه دارد و می‌خواهیم هزینه را کمینه کنیم، اینکه این مسأله از کجا می‌آید واضح است.

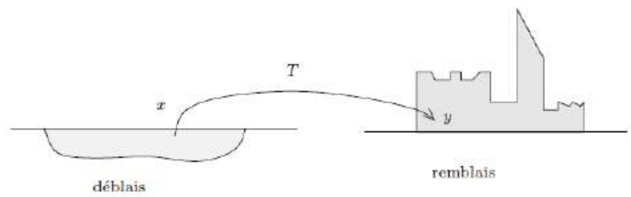
مانند بسیاری از تحقیقات در ریاضیات، مبحث انتقال بهینه[1] نیز در چندین دوره‌ی زمانی مختلف به وجود آمده است. اولین بار، در اواخر قرن هجدهم، توسط هندسه‌دان فرانسوی گاسپارد مونژ[2] این مبحث مطرح شد.

مونژ در سال ۱۷۴۶ در فرانسه متولد شد. در سال ۱۷۸۱ مونژ یکی از معروف‌ترین کارهایش را منتشر کرد: "Memoire sur la theorie des deblais et des remblais" مسأله‌ای که توسط مونژ مطرح شد، همان مسأله‌ی مطرح شده در بالاست.

در نام مقاله، deblai مقدار ماده‌ای است که از معدن استخراج می‌شود و remblai، ماده‌ای است که برای ساخت و ساز جدید استفاده می‌شود.

بیاید به صورت بندی دیگری از مسأله نگاه کنیم: فرض کنید تعداد زیادی نانوایی در یک شهر موجود است. وظیفه‌ی نانوایی‌ها این است که هر روز صبح نان تمامی شهروندان را تامین کنند. حال مسأله چنین است: از آن‌جایی که انتقال نان از نانوایی به خانه‌ها هزینه‌بر

[1] Optimal Transport
[2] Gaspard Monge

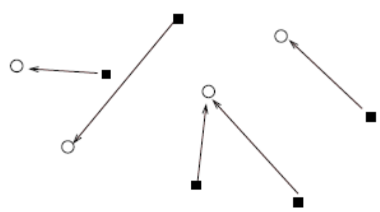


شکل ۱: مسأله‌ی مونژ

است، می‌خواهیم هزینه را کمینه کنیم.

با توجه به اطلاعاتی که در مورد نانوایی‌ها و خانه‌ها داریم، می‌توان مسأله را به کمک اندازه‌های احتمال[۳] روی یک فضای خاص که به یک متریک طبیعی مجهز شده است، مدل کنیم و فاصله‌ی هر دو نقطه برابر طول کوچکترین مسیری باشد که دو نقطه را به یکدیگر متصل می‌کند.

مسأله، پیدا کردن روشی است که مشخص کند هر نان به کجا برده شود به طوری که هزینه‌ی انتقال کل کمینه شود. شکل زیر را ببینید.



شکل ۲: صورت‌بندی دیگر مسأله‌ی مونژ

مونژ، مسأله را در سه بعد برای جرم‌های با توزیع پیوسته مطالعه کرد و به کمک شهود زیبای هندسی‌اش، به نتایج مهمی دست یافت؛ انتقال‌ها باید در امتداد خطوط راستی باشد که به خانواده‌ای از رویه[۴]ها عموداند. این مطالعه او را به سمت کشف خم‌های انحنا[۵]، مفهومی که به خودی خود سهم بزرگی در هندسه‌ی رویه‌ها دارد، سوق داد.

ایده‌های او توسط چارلز دوپین[۶] و بعدها توسط پُل آپِل[۷] توسعه داده شد. با استانداردهای کنونی ریاضی، تمامی استدلال‌های او ناقص بود، با این حال قطعا ارزش آن را داشت که تمامی مشکلات آن را با ابزارهای مدرن ریاضی پیگیری کرد.

بعدها، مسأله‌ی مونژ توسط ریاضی‌دان روسی لینوید ویتالیویچ کانتروویچ[۸] دوباره مطرح شد. کانتروویچ در سال ۱۹۱۲ متولد شد.

[۳] Probability Measure
[۴] Surface
[۵] Lines of Curvature
[۶] Charles Dupin
[۷] Paul Appell
[۸] Leonid Vitaliyevich Kantorovich

او یک ریاضی‌دان بسیار با استعداد بود که شهرت خود را به عنوان یک محقق در سن ۱۸ سالگی و هم‌چنین مرتبه‌ی استادی را مانند مونژ در ۲۲ سالگی به‌دست آورد. او در شاخه‌های متعددی از ریاضیات، با دید کاربردی در اقتصاد و بعدتر در علوم کامپیوتر نظری، کار کرد.

بخشی از کارهای کانتروویچ که مورد بحث ماست، مسأله‌ی جفت‌های مطلوب[۹] است که کانتروویچ به کمک ابزارهای توابع تحلیلی، قضیه‌ی دوگانی را ثابت کرد که نقش اساسی در کارهای بعدی داشت. او هم‌چنین مفهوم مناسبی را برای فاصله‌ی بین اندازه‌های احتمال معرفی کرد: فاصله‌ی بین دو اندازه باید هزینه‌ی انتقال بهینه از یکی به دیگری باشد؛ اگر هزینه به عنوان تابع فاصله انتخاب شود. این فاصله بین اندازه‌های احتمال، در حال حاضر فاصله‌ی کانتروویچ-رابین‌اشتاین[۱۰] نامیده می‌شود و ثابت شده است که بسیار مفید و انعطاف‌پذیر است.

چند سال بعد از نتایج اساسی به‌دست آمده، کانتروویچ ارتباطی بین آن‌ها و کارهای مونژ پیدا کرد. مسأله‌ی جفت مطلوب از آن زمان به مسأله‌ی مونژ- کانتروویچ[۱۱] معروف است.

در نیمه‌ی دوم قرن بیستم، جفت‌های مطلوب و انواع مختلف فاصله‌ی کانترویچ-رابین‌اشتاین (که امروزه فاصله‌ی واسراشتاین نامیده می‌شود) در آمار و احتمال مورد استفاده قرار گرفت. فضای پایه می‌تواند متناهی بعد یا نامتناهی بعد باشد: برای نمونه، جفت‌های مطلوب مفاهیم جالبی از فاصله‌ی بین اندازه‌های احتمال در فضاهای مسیر[۱۲] می‌دهد. سهم قابل توجهی از نتایج حاصل در دهه‌ی هفتاد میلادی به رولاند دُبروشین[۱۳] کسی که از این فاصله در سیستم ذرات[۱۴] استفاده کرد و هیروشی تاناکا[۱۵]، فردی که از این مفاهیم برای مطالعه‌ی رفتار زمانی[۱۶] یک نوع ساده از معادله‌ی بولتزمن[۱۷] استفاده کرد، مربوط می‌شود. در اواسط دهه‌ی هشتاد، متخصصین این مبحث، کسانی مانند استلوزار ریچاو[۱۸] یا لوگر راشن‌دروف[۱۹] بودند که ایده‌های بسیار، ابزارها و تکنیک‌های متعدد و کاربردهای مختلف انتقال بهینه را در دست داشتند.

در طول آن زمان، تکنیک بازپرمایش[۲۰] (یا به عبارت دیگر تغییر متغیر) توسط محققین بسیاری در نامساوی‌های شامل حجم و انتگرال

[۹] Optimal Coupling
[۱۰] Kantorovich-Rubinstein
[۱۱] Monge-Kantorovich Problem
[۱۲] Path Space
[۱۳] Roland Dobrushin
[۱۴] Particle System
[۱۵] Hiroshi Tanaka
[۱۶] Time-Behavior
[۱۷] Boltzman Equation
[۱۸] Svetlozar Rachev
[۱۹] Ludger Ruschendrof
[۲۰] Reparametrization

مورد استفاده قرار گرفت. بعد از آن بود که متوجه شدند انتقال بهینه، اغلب پرمایش‌های مفیدی را امکان‌پذیر می‌کند.

در اواخر دهه‌ی هشتاد، سه نوع مستقل از تحقیقات شکل گرفت که تقریبا به طور همزمان، تصویری جدید از انتقال بهینه ارائه کردند.

یکی از آن‌ها کارهای جان متر[۲۱] روی سیستم‌های دینامیکی لاگرانژی[۲۲] بود.

شاخه‌ی دوم از این تحقیقات از کارهای یان برینر[۲۳] حاصل شد. هنگام مطالعه‌ی مسائل موجود در مکانیک سیالات تراکم‌ناپذیر[۲۴]، برینر به عملگری نیاز داشت که مانند عملگر تصویر[۲۵] بر نگاشت‌های حافظ اندازه[۲۶] در یک مجموعه‌ی باز باشد. او متوجه شد که به کمک جفت‌های مطلوب می‌تواند به چنین چیزی دست پیدا کند.

و اما سومین شاخه از این تحقیقات، در کمال تعجب از خارج ریاضیات آمده است. مایک کولن[۲۷] که عضو گروه هواشناسی بود و دانش زیادی در ریاضیات داشت، روی معادلات وابسته به نیروی انحنا و پیچیدگی که در اثر گردش زمین ایجاد می‌شوند – که در هواشناسی برای مدل‌سازی جبهه‌ی جوی استفاده می‌شود– کار می‌کرد. کولن و همکارانش نشان دادند که این کارها را می‌توان بر اساس مسأله‌ی جفت‌های مطلوب تفسیر کرد و خاصیت کمینه‌سازی را به عنوان پایداری شناسایی کردند.

هر سه مورد ذکر شده سهم بسزایی (در حوزه‌ی خود)، در فهم انتقال بهینه به کمک توصیف‌های کیفی دارند. این شاخه‌های جدید وارد تحقیقات ریاضی‌دانان مختلفی (لویس کافرلی[۲۸]، کریگ اوانس[۲۹]، ویلفرید گنگبو[۳۰]، رابرت مک‌کان[۳۱] و دیگران) شد که مشغول به کار در مورد توصیف بهتر ساختار انتقال بهینه و کشف کاربردهای آن هستند.

یکی از گام‌های مهم مفهومی توسط فلیکس اُتو[۳۲] انجام شد. او با دید دیفرانسیلی به نظریه‌ی انتقال بهینه، فرمالیسم جالبی را کشف کرد. کارهای او راه‌های جدیدی را برای توصیف هندسی فضای اندازه‌های احتمال و ارتباط بین انتقال بهینه و معادلات انتشار[۳۳] فراهم کرد که منجر به تعامل غنی بین هندسه، آنالیز تابعی[۳۴] و معادلات

۲۱ John Mather
۲۲ Lagrangian Dynamical System
۲۳ Yann Brenier
۲۴ Incompressible Fluid Mechanics
۲۵ Projection
۲۶ Measure-Preserving
۲۷ Mike Cullen
۲۸ Luis Caffarelli
۲۹ Craig Evans
۳۰ Wilfrid Gangbo
۳۱ Robert McCann
۳۲ Felix Otto
۳۳ Diffusion Equation
۳۴ Functional Analysis

دیفرانسیل پاره‌ای[۳۵] شد.

سدریک ویلانی[۳۶] و جان لات[۳۷] از نتایج اخیر استفاده کرده و نتایج هندسی را برای فضای اندازه‌های احتمال گسترش دادند. در واقع ویلانی و لات با کمک مفاهیمی که رابرت مک‌کان مطرح کرده بود توانستند انحنا[۳۸] را برای فضاهای متریک-اندازه[۳۹] تعریف کنند و با اثبات خوش‌تعریفی آن، نتایج هندسی و نامساوی‌های مهمی را به‌دست آورند.

پروفسور ویلانی (۱۹۷۳)، ریاضیدانی فرانسوی است که در زمینه‌های معادلات دیفرانسیل پاره‌ای و ریاضی-فیزیک[۴۰] فعالیت می‌کند. او به خاطر کارهایش در رابطه با معادله‌ی بولتزمن در سال ۲۰۱۰ موفق به دریافت جایزه‌ی فیلدز شد. مختصری از کارهای او را می‌توانید در [۱۶] ببینید.

جان لات (۱۹۵۹)، پروفسور دانشگاه برکلی است. مطالعات او در زمینه‌ی شار ریچی بوده است.

بر اساس کارهای لات و ویلانی، برای هدف ما، به دو اندازه‌ی احتمال μ و ν روی فضای متریک-اندازه و فشرده‌ی X نیاز است. هدف پیدا کردن نگاشت $T : X \to X$ است به طوری که $T_*\mu = \nu$ و

$$\int c(x, T(x))\mathrm{d}\mu(x)$$

کمینه شود. ریشه‌ی دوم کمینه‌ی انتگرال فوق با تابع هزینه‌ی $c(x,y) = d(x,y)^۲$ را فاصله‌ی ۲-واسراشتاین، $W_۲$ بین دو اندازه‌ی μ و ν می‌گوییم و به نگاشت T که انتگرال را کمینه می‌کند، نگاشت انتقال بهینه گفته می‌شود. وجود و یکتایی T در فضای اقلیدسی توسط برینر و در خمینه‌های ریمانی توسط مک‌کان ثابت شده است.

اندازه‌های احتمال روی فضای متریک X، با فاصله‌ی واسراشتاین، فضای متریک فشرده‌ای به دست می‌دهند که به آن فضای واسراشتاین روی X می‌گویند $\mathcal{P}_۲(X) := (\mathcal{P}(X), W_۲)$. حال فرض کنید X خمینه‌ی فشرده‌ی M با تانسور متر g که فاصله‌ی ژئودزیک d را به دست می‌دهد و اندازه حجم نرمال شده‌ی $\nu = \frac{\mathrm{dvol}_M}{\mathrm{vol}_M}$ باشد. اطلاعات (قرینه‌ی آنتروپی) اندازه‌ی مطلقا پیوسته‌ی $\mu = \rho\nu$ نسبت به ν، $H(\nu)$ را تعریف می‌کنیم:

$$H(\nu) = \int \rho \log \rho \mathrm{d}\nu$$

اتو و ویلانی خاصیت قابل توجهی برای آنتروپی به دست آوردند. آن‌ها

۳۵ Partial Differential Equation
۳۶ Cedric Villani
۳۷ John Lott
۳۸ Curvature
۳۹ Metric-Measure Space
۴۰ Mathematical Physics

آنتروپی را به عنوان تابعی بر فضای $\mathcal{P}_2(X)$ در نظر گرفتند و به این نتیجه رسیدند که این تابع مقعر است اگر انحنای ریچی خمینه‌ی M نامنفی باشد. این اولین ارتباط بین خواص تابع آنتروپی در فضای واسراشتاین و انحنای ریچی بود. او و ویلانی در مورد عکس این مسأله نیز بحث کردند و بعدتر این مسأله نیز ثابت شد.

اگر به جای محدب بودن آنتروپی از کران پایین K برای هسیان آنتروپی روی $\mathcal{P}_2(M)$ استفاده کنیم، در این صورت گزاره‌ی معادل، کران پایینی برای انحنای ریچی به دست می‌دهد:

$$Ric \geq Kg$$

بعلاوه می‌توانیم اندازه‌ی حجم را با حالت کلی‌تر اندازه حجم وزن‌دار $e^{\Phi}\mathrm{dvol}$ جایگزین کنیم با این شرط که، تانسور بکری-امری[41] را جایگزین انحنای ریچی کرده باشیم. به دست می‌آید:

$$Ric_{\infty} := Ric + Hess(\Phi) \geq Kg$$

به کمک این ایده، اتو و ویلانی، رویکرد یکپارچه‌ای به طیف وسیعی از نامساوی‌های آنالیز و هندسه، شامل نامساوی لگاریتمی سوبولوف و نامساوی تالاگراند به دست آوردند.

اگر $\mathcal{P}_2(M)$ خمینه‌ی ریمانی منظمی باشد، کران پایین K برای هسیان تابع آنتروپی، معادل است با نامساوی جابه‌جایی محدب:

$$H(\mu_t) \leq (1-t)H(\mu_0)+tH(\mu_1)-K\frac{t(t-1)}{2}W_2(\mu_0,\mu_1)^2 \quad (1)$$

برای هر ژئودزیک $\{\mu_t\}_{t\in[0,1]}$ در فضای واسراشتاین. این تعریف تنها به ژئودزیک‌های فضای واسراشتاین وابسته است، بنابراین می‌توان آن را روی هر فضای متریک تعریف کرد. در واقع اگر ۱ را به عنوان تعریف انحنای ریچی با کران پایین K برای فضای متریک X بگیریم، دیگر نیازی به ساختار خمینه‌ی ریمانی M نیست. با این تعریف لات و ویلانی به نتیجه‌ای بنیادی دست یافتند: کران پایین انحنای ریچی تحت همگرایی در توپولوژی گروموف-هاسدورف پایدار می‌ماند. این نتیجه را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

قضیه ۱. *فرض کنید* $\{(X_i,d_i,\nu_i)\}$ *دنباله‌ای از فضاهای طول-اندازه‌ی فشرده باشد و* $\lim_{i\to\infty}(X_i,d_i,\nu_i) = (X,d,\nu)$ *در توپولوژی-اندازه گروموف-هاسدورف برقرار باشد. اگر انحنای ریچی* (X_i,d_i,ν_i) *توسط* K *از پایین کران‌دار باشد، آن‌گاه انحنای ریچی* (X,d,ν) *نیز با کران پایین* K *است.*

این قضیه توانمندی تعریف انحنای ریچی با کران پایین را به خوبی نشان می‌دهد. از طرف دیگر، این تعریف، نمادگذاری بسیار مفیدی است زیرا به ما اجازه می‌دهد قضایای بسیاری از جمله قضیه‌ی بیشاپ-گروموف، نامساوی لگاریتمی سوبولوف و قضیه‌ی بونه-میر از هندسه‌ی ریمانی را به فضاهای کلی‌تر تعمیم دهیم. همچنین این تعریف را می‌توان به سادگی به حالت گسسته منتقل کرد و به این ترتیب ابزار قدرتمندی برای انجام کارهای عددی به دست می‌آید. از نمونه‌های گسسته‌ی این تعریف می‌توانید [۲] را ببینید. در این مرجع به متریک‌های مختلفی از قبیل امری-بکری روی گراف‌ها پرداخته شده است. عکس این ماجرا نیز به نوبه‌ی خود نتایج مفیدی را به دست داده است، یعنی انتقال مسائل گسسته به حالت پیوسته و سپس استفاده از انتقال بهینه برای حل آن‌ها به کمک اندازه‌های احتمال. نمونه‌ای از این کارها در نظریه‌ی بازی‌ها انجام شده است که می‌توانید در [۴] ببینید. در این مقاله دسته‌ای از بازی‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد که تعداد بازیکن‌ها در آن‌ها پیوسته است. با استفاده از متدهای انتقال بهینه می‌توان با کمینه کردن هزینه تعادل نش-کورنو[42] را برای این بازی‌ها به دست آورد.

از دیگر کاربردهای انتقال بهینه می‌توان به حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای، گرافیک کامپیوتر و اقتصاد اشاره کرد. حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از اولین کاربردهای انتقال بهینه و یکی از دلایل توجه به این مبحث بود. مرجع [۵] درس‌نامه‌ای کوتاه و مفید برای آشنایی با این مبحث است. در رابطه با گرافیک کامپیوتری کارهای جدید آغاز شده است. نمونه‌ی آن مقاله‌ی [۱۰] است. در ارتباط با همین مقاله ویدیویی[43] نیز وجود دارد که مسأله را تشریح می‌کند. در همین راستا می‌توان مقاله‌ی [۹] را نیز نام برد.[44]

کاربردهای این نظریه به همین موارد محدود نمی‌شود و هر روزه نیز کاربردهای جدیدی از این نظریه به دست می‌آید. فیزیک، اقتصاد، یادگیری ماشین، بینایی ماشین و بسیاری دیگر از نمونه عرصه‌هایی است که این نظریه در آن‌ها کاربردهایی پیدا کرده است.

در ادامه سعی می‌کنیم صورت‌بندی مونژ و کانترویچ از مسأله انتقال بهینه را ارائه دهیم و برخی نتایج مقدماتی را بیاوریم و در نهایت با چند مثال در این زمینه کار را به پایان برسانیم. در این‌جا نیاز است که خواننده با برخی مباحث مقدماتی از نظریه اندازه آشنایی داشته باشد. مرجع [۱۲] در زمینه‌ی نظریه‌ی اندازه و [۸] در نظریه‌ی هندسی اندازه بسیار سودمند است و می‌توانید اطلاعات لازم را در این مراجع مطالعه کنید.

[41] Bakry-Emery

[42] Cournot-Nash equilibria

[43] http://www.youtube.com/watch?v=24aSLTcJ6RI

[44] http://www.youtube.com/watch?v=cYbDJ4NR6WY

تعریف و مفاهیم اولیه

در مسأله‌ی مونژ، باید با صرف هزینه‌ای کاری انجام می‌شد که سیستم از یک حالت اولیه به یک حالت ثانویه تغییر کند و هدف این بود که هزینه کمینه شود. بنابراین تابع هزینه $c : X \times Y \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ را در نظر بگیرید و فرض کنید برل است.[۴۵] حال می‌توان مسأله‌ی مونژ را به شکل زیر بیان کرد:

مسأله‌ی مونژ: فرض کنید $\mu \in \mathcal{P}(X)$ و $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ که در آن $\mathcal{P}(X)$ مجموعه‌ی تمام اندازه احتمال‌های روی X است. کمینه‌ی

$$T \mapsto \int_X c(x, T(x))\mathrm{d}\mu(x)$$

روی تمام نگاشت‌های انتقال[۴۶] T از μ به ν (تمام نگاشت‌های T که $T_*\mu = \nu$) چیست؟

اولین مشکلی که در این مسأله دیده می‌شود وجود T است. آیا حداقل یک T وجود دارد که در شرایط فوق صدق کند؟ پاسخ این سوال به وضوح منفی است، به طور مثال اگر μ را اندازه دلتای دیراک در نظر بگیریم و ν این چنین نباشد، به وضوح چنین Tای وجود ندارد.

اما دومین نکته‌ای که در مورد این مسأله مطرح می‌شود این است که آیا دنباله‌ی $\{T_n\}$ از چنین توابعی نسبت به همگرایی ضعیف بسته است؟ با کمی دقت می‌توان مثال‌هایی در نفی صحیح بودن این پرسش به دست آورد. به طور مثال دنباله‌ی توابع $f_n(x) = f(nx)$ را در نظر بگیرید و f را به این شکل تعریف کنید: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ تابعی متناوب با دوره‌ی تناوب ۱ است و روی $[0, \frac{1}{2})$ تعریف می‌کنیم $f = 1$ و روی $[\frac{1}{2}, 1)$ آن را مساوی ۱- تعریف می‌کنیم. حال اگر $\mu = \mathfrak{L}|_{[0,1]}$[۴۷] و $\nu = (\delta_{-1} + \delta_1)$، دیده می‌شود که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(f_n)_*\mu = \nu$ اما f_n به تابع ثابت $g = 0$ همگراست ولی $g_*\mu = \delta_0 \neq \nu$.

کانترویچ ایده‌هایی مطرح کرد که مشکلات مسأله‌ی مونژ را برطرف سازد. برای دیدن صورت‌بندی جدیدی که کانترویچ ارائه کرد نیاز به یک تعریف داریم.

تعریف ۲. *فرض کنید $\mu \in \mathcal{P}(X)$ و $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. اندازه‌ی برل $\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y)$ را یک طرح انتقال از μ به ν می‌گوییم اگر داشته باشیم:*

$$\forall A \in P(X) : \gamma(A \times Y) = \mu(A)$$

و

$$\forall B \in P(Y) : \gamma(X \times B) = \nu(B)$$

یا معادلا $\pi^X_*\gamma = \mu$ و $\pi^Y_*\gamma = \nu$ که π^X و π^Y نگاشت‌های تصویر طبیعی از $X \times Y$ به ترتیب به X و Y است. مجموعه‌ی تمام طرح انتقال‌های بین μ و ν را با $\Pi(\mu, \nu)$ نمایش می‌دهیم. یک طرح انتقال را قطعی[۴۸] گوییم اگر نگاشت اندازه‌پذیر $T : X \to Y$ وجود داشته باشد به طوری که $Y = T(X)$.

صورت‌بندی کانترویچ از انتقال بهینه: مسأله، کمینه کردن انتگرال

$$\gamma \mapsto \int_{X \times Y} c(x, y)\mathrm{d}\gamma(x, y)$$

روی $\Pi(\mu, \nu)$ است.

در مورد مسأله‌ی کانترویچ، نکات قابل توجهی وجود دارد:

۱. $\Pi(\mu, \nu)$ همواره ناتهی است (شامل $\mu \times \nu$)

۲. مجموعه‌ی $\Pi(\mu, \nu)$ با توجه به توپولوژی ضعیف روی $\mathcal{P}(X \times Y)$ محدب و فشرده است و $\gamma \mapsto \int c\mathrm{d}\gamma$ خطی است.

۳. کمینه با فرض شرایطی اندک روی تابع هزینه، همواره وجود دارد.

۴. طرح انتقال‌ها شامل نگاشت‌های انتقال هستند، زیرا $T_*\mu = \nu$ نتیجه می‌دهد $\gamma := (Id \times T)_*\mu$ در $\Pi(\mu, \nu)$ قرار می‌گیرد.

فرض کنید $K_1 \subset X$ و $K_2 \subset Y$، در این صورت برای هر $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ نامساوی

$$\gamma(X \times Y \backslash K_1 \times K_2) \leq \mu(X \backslash K_1) + \nu(Y \backslash K_2)$$

برقرار است. بنابراین اگر $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{P}(X)$ و $\mathcal{K}_2 \subset \mathcal{P}(Y)$ تنگ[۴۹] باشد در این صورت

$$\{\gamma \in \mathcal{P}(X \times Y) : \pi^X_*\gamma \in \mathcal{K}_1, \pi^Y_*\gamma \in \mathcal{K}_2\}$$

نیز تنگ است پس از قضیه‌ی اولام[۵۰] (با فرض شرایط قضیه) نتیجه می‌شود $\Pi(\mu, \nu)$ در $\mathcal{P}(X \times Y)$ تنگ است و بنابراین بنابر قضیه‌ی پروخرو اگر نشان دهیم بسته است، فشرده خواهد بود.

دنباله‌ی $\{\gamma_n\} \in \Pi(\mu, \nu)$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $\gamma_n \to \gamma$. نشان می‌دهیم $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$. فرض کنید ϕ تابعی در $C_b(X)$ باشد. در این صورت $(x, y) \mapsto \phi(x)$ روی $X \times Y$ پیوسته و کراندار است.

---

[۴۵] فضاهای متریک مورد بحث در این‌جا، منظور فضاهای کامل و جدایی‌پذیر هستند مگر اینکه با تاکید ذکر شود.

[۴۶] Transfer Map

[۴۷] منظور اندازه لبگ است

[۴۸] Deterministic

[۴۹] tight

[۵۰] Ulam theorem

بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\int \phi \mathrm{d}\pi^X_*\gamma &= \int \phi \mathrm{d}\gamma(x,y)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int \phi(x)\mathrm{d}\gamma_n(x,y)\\ &= \lim_{n\to\infty}\int \phi \mathrm{d}\pi^X_*\gamma_n = \int \phi \mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

و چون ϕ دلخواه بود پس $\pi^X_*\gamma = \mu$. مشابها $\pi^Y_*\gamma = \nu$. و در نتیجه $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$. پس $\Pi(\mu,\nu)$ فشرده است.

قضیه ۳. *فرض کنید c نیم‌پیوسته‌ی پایینی و از پایین کراندار باشد. در این صورت $\gamma \in \Pi(\mu,\nu)$ وجود دارد به طوری که مسأله‌ی کانترویچ را کمینه می‌کند.*

اثبات. بنا به فرض c نیم‌پیوسته‌ی پایینی است. بنابراین دنباله‌ی صعودی از توابع پیوسته و کراندار $c_n : X \times Y \to \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $c(x,y) = \sup_n c_n(x,y)$. بنابراین داریم

$$\int c\mathrm{d}\gamma = \sup_n \int c_n \mathrm{d}\gamma$$

بنابراین $\gamma \mapsto \int c\mathrm{d}\gamma$ نیم‌پیوسته‌ی پایینی است و این حکم را به کمک فشردگی $\Pi(\mu,\nu)$ نتیجه می‌دهد. □

طرح انتقال‌هایی که مسأله‌ی کانترویچ را بهینه می‌کند، طرح انتقال بهینه[51] می‌گوییم. مجموعه‌ی تمام انتقال‌های بهینه را با $\Pi^{\mathrm{Opt}}(\mu,\nu)$ نمایش می‌دهیم. ثابت کردیم با شرایطی $\Pi^{\mathrm{Opt}}(\mu,\nu)$ ناتهی است. با این حال، سوالات دیگری مطرح می‌شود:

۱. آیا انتقال بهینه یکتاست؟

۲. آیا راه ساده‌ای وجود دارد که بررسی کنیم یک انتقال داده شده، بهینه است یا خیر؟

۳. آیا انتقال‌های بهینه خاصیت مشخصی دارند که آن‌ها را شناسایی کرد؟ به طور مثال آیا از یک نگاشت بدست می‌آیند؟

۴. چه موقع پاسخ مسأله‌ی کانترویچ با مسأله‌ی مونژ یکی است؟

پرسش اخیر در واقع بیان می‌کند که چه موقع به کمک ایده‌های کانترویچ، مسأله‌ی مونژ قابل حل است؟ ثابت شده است که اگر c پیوسته باشد و μ بدون اتم باشد، آن‌گاه

$$\inf(\text{مونژ}) = \min(\text{کانترویچ})$$

بنابراین، طرح انتقال‌ها کم‌ارزش‌تر از نگاشت‌ها نیستند.

فرض کنید (X,d,μ) فضایی متریک-اندازه باشد. تابع $c : X^2 \to [0,\infty)$ را برای هر $x,y \in X$ و $p \in [1,\infty)$ به صورت $c(x,y) = d(x,y)^p$ تعریف می‌کنیم. نشان می‌دهیم اگر X جدایی‌پذیر و فشرده باشد، آن‌گاه طرح انتقال بهینه برای این تابع هزینه‌ی خاص را، می‌توان به شکلی به دست آورد و تا حدودی مطالبی که تا اینجا بیان شد را جمع‌بندی می‌کنیم.

لم ۴. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد و $\pi \in \mathcal{P}(X^n)$ که $n \in \mathbb{N}$. همچنین فرض کنید $p : X^n \to X^k$ نگاشت تصویر بر k درایه‌ی اول، $1 \le k \le n$، باشد. در این صورت برای هر $f \in C_b(X^k)$ داریم:*

$$\int_{X^n} f\mathrm{d}\pi = \int_{X^k} f\mathrm{d}(p_*\pi)$$

اثبات. فرض کنید $f \in C_b(X^k)$. بنابراین داریم:

$$\int_{X^n} f\mathrm{d}\pi = \int_{X^n} (fop)\mathrm{d}\pi = \int_{X^k} f\mathrm{d}(p_*\pi)$$

□

لم ۵. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد. تعریف کنید $\rho : \mathcal{P}(X^2) \to \mathcal{P}(X)^2$ به طوری که برای هر $\pi \in \mathcal{P}(X^2)$:*

$$((p_1)_*\pi, (p_2)_*\pi)$$

در این صورت ρ در توپولوژی ضعیف پیوسته است.

اثبات. فرض کنید $\pi \in \mathcal{P}(X^2)$ و $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}(X)$ به ترتیب تصویر روی مولفه‌ی اول و دوم π باشند یعنی $\rho(\pi) = (\mu_1,\mu_2)$.

یک پایه‌ی دلخواه $B_1 \times B_2$ از (μ_1,μ_2) در توپولوژی حاصلضربی در نظر بگیرید، به طوری که مجموعه‌های متناهی $I, J \subset \mathbb{N}$ وجود داشته باشند که (بدون کاسته شدن از کلیت، فرض کنید مجزا هستند):

$$B_1 = \{\mu \in \mathcal{P}(X) : |\int_X f_i\mathrm{d}\mu - \int_X f_i\mathrm{d}\mu_1| < \epsilon_1, \forall i \in I\}$$

$$B_2 = \{\mu \in \mathcal{P}(X) : |\int_X f_i\mathrm{d}\mu - \int_X f_i\mathrm{d}\mu_2| < \epsilon_2, \forall i \in J\}$$

که در آن $\{f_i\}_{i\in I\cup J} \subset C_b(X)$ و $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$. حال بگیرید $\epsilon = \min\{\epsilon_1,\epsilon_2\} > 0$ و همسایگی باز B از π در $\mathcal{P}^2(X)$ را به شکل زیر بگیرید:

$$B = \{\nu \in \mathcal{P}(X^2) : |\int_{X^2} f_i\mathrm{d}\nu - \int_{X^2} f_i\mathrm{d}\pi| < \epsilon, \forall i \in I \cup J\}$$

نشان می‌دهیم $\rho(B) \subset B_1 \times B_2$. بدین منظور، فرض کنید $\nu \in B$ دلخواه باشد و $\rho(\nu) = (\nu_1,\nu_2)$. لم قبل نتیجه می‌دهد برای هر $i \in I$:

$$|\int_X f_i\mathrm{d}\nu_1 - \int_X f_i\mathrm{d}\mu_1| = |\int_{X^2} f_i\mathrm{d}\nu - \int_{X^2} f_i\mathrm{d}\pi| < \epsilon \le \epsilon_1$$

و برای هر $i \in J$:

$$|\int_X f_i\mathrm{d}\nu_2 - \int_X f_i\mathrm{d}\mu_2| = |\int_{X^2} f_i\mathrm{d}\nu - \int_{X^2} f_i\mathrm{d}\pi| < \epsilon \le \epsilon_2$$

[51] Optimal Transference Plan

که نتیجه می‌دهد $\rho(\nu) = (\nu_1, \nu_2) \in B_1 \times B_2$ و بنابراین $\rho(B) \subset B_1 \times B_2$. بنابراین ρ در π پیوسته است و چون $\pi \in \mathcal{P}(X^2)$ دلخواه بود، ρ پیوسته است. □

قضیه ۶. *فرض کنید (X,d) فضایی فشرده و جدایی‌پذیر باشد. هم‌چنین $p \in [1,\infty)$ و $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$. در این صورت مسأله‌ی انتقال:*

$$I(\pi) = \int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\pi(x,y) \quad , \quad \pi \in \Pi(\mu,\nu)$$

دارای مینیمم است. یعنی $\pi_* \in \Pi(\mu,\nu)$ وجود دارد به طوری که:

$$I(\pi_*) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi)$$

اثبات. نکته‌ی کلیدی در این است که $\Pi(\mu,\nu)$ در توپولوژی ضعیف، دنباله‌وار فشرده است. فرض کنید $\epsilon > 0$، چون X کامل و جدایی‌پذیر است نتیجه می‌شود μ و ν تنگ هستند. بنابراین مجموعه‌های فشرده‌ی $K_1, K_2 \subset X$ وجود دارد به طوری که $\mu(K_1^c) < \frac{\epsilon}{2}$ و $\nu(K_2^c) < \frac{\epsilon}{2}$.
حال برای هر $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ داریم:

$$\begin{aligned}
\pi((K_1 \times K_2)^c) &= \pi((K_1^c \times X) \cup (X \times K_2^c)) \\
&\leq \pi(K_1^c \times X) + \pi(X \times {}_2^c) \\
&= \mu(K_1^c) + \nu(K_2^c) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $\Pi(\mu,\nu)$ تنگ است و در نتیجه بنا به قضیه‌ی پروخرو، پیش‌فشرده است (یعنی بستارش فشرده است). فرض کنید $(\pi_i)_{i=1}^{\infty} \subset \Pi(\mu,\nu)$ به طوری که $\lim_{i\to\infty} I(\pi_i) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi)$ و $\rho : \mathcal{P}(X^2) \to \mathcal{P}(X)^2$ را مانند لم قبل بگیرید. چون $\Pi(\mu,\nu)$ پیش‌فشرده است، زیردنباله‌ی $(\pi_{i_k})_{k=1}^{\infty}$ از $(\pi_i)_{i=1}^{\infty}$ وجود دارد به طوری که $\pi_{i_k} \to \pi_* \in \mathcal{P}(X^2)$. از آن‌جایی که برای هر $k \in \mathbb{N}$: $\rho(\pi_{i_k}) = (\mu,\nu)$، از پیوستگی ρ به دست می‌آوریم $\rho(\pi_*) = (\mu,\nu)$. بنابراین $\pi_* \in \Pi(\mu,\nu)$. حال نشان می‌دهیم π_* مسأله‌ی انتقال را کمینه می‌کند.

تابع هزینه، d^p را به صورت حد دنباله‌ای نانزولی از توابع پیوسته‌ی کراندار بیان می‌کنیم. برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض کنید $d_n = d^p(1+\frac{d}{n})^{-p}$ که تابعی پیوسته از X^2 به $[0,\infty)$ است. بعلاوه $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نانزولی است که به صورت نقطه‌وار به d^p همگراست. برای $n \in \mathbb{N}$ تابع $f_n : X^2 \to \mathbb{R}$ را برای هر $x,y \in X$ تعریف می‌کنیم:

$$f_n(x,y) = \min\{n, d_n(x,y)\}$$

که تابعی و کراندار است، به عبارتی برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \in C_b(X^2)$. بعلاوه، $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نانزولی است که به صورت نقطه‌وار به d^p همگراست. به کمک قضیه‌ی همگرایی یکنواخت و این واقعیت که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $f_n \leq d^p$ داریم:

$$\begin{aligned}
I(\pi_*) &= \int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\pi_*(x,y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{X^2} f_n(x,y) \mathrm{d}\pi_*(x,y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \big(\lim_{k\to\infty} \int_{X^2} f_n(x,y) \mathrm{d}\pi_{i_k}(x,y) \big) \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \int_{X^2} d^p(x,y) \mathrm{d}\pi_{i_k}(x,y) \\
&= \lim_{k\to\infty} I(\pi_{i_k}) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi)
\end{aligned}$$

عکس نامساوی نیز از $\pi_* \in \Pi(\mu,\nu)$ حاصل می‌شود. بنابراین:

$$I(\pi_*) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu,\nu)} I(\pi)$$

□

در ادامه‌ی این بخش می‌خواهیم نشان دهیم اگر X کران‌دار باشد، برای تابع هزینه‌ی $c(x,y) = d(x,y)^p$، بهینه بودن تحت همگرایی پایا می‌ماند. به عبارت دیگر اگر $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}, (\nu_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ و $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$ باشند به طوری که $\mu_n \to \mu$ و $\nu \to \nu$ و $\pi_n \in \Pi(\mu_n,\nu_n)$ برای هر n بهینه باشد و $\pi_n \to \pi$، در این صورت $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$ و π بهینه است. کران‌دار بودن X تنها به دلایل تکنیکی و برای جلوگیری از دیگر فرضیات متناهی بودن در مسأله‌ی انتقال و انتگرال‌پذیر بودن تابع هزینه است. در واقع چون معمولا با فضاهای متریک فشرده کار می‌کنیم، این فرض چندان محدودیتی ایجاد نمی‌کند.

تعریف ۷. یکنواخت دوری[52]: *مجموعه‌ی $E \subset X^2$ را یکنواخت دوری می‌گوییم اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n} \subset E$ و جایگشت $\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$ داشته باشیم:*

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_i)^p \leq \sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_{\sigma(i)})^p$$

تعریف فوق وابسته به p است. اما با ثابت کردن p این مسأله برطرف می‌شود. بنابراین هنگامی که از بهینه بودن و یکنواخت دوری صحبت می‌کنیم، منظور نسبت به p ثابت است.

در ادامه نشان می‌دهیم که بهینه بودن طرح انتقال و یکنواخت دوری بودن تکیه‌گاه‌ی آن، هنگامی که X کران‌دار باشد، معادل‌اند.

قضیه ۸. *فرض کنید X کران‌دار باشد و $\mu,\nu \in \mathcal{P}(X)$ و $\pi \in \Pi(\mu,\nu)$. در این صورت π بهینه است اگر و تنها اگر $\mathrm{Supp}(\pi)$ یکنواخت دوری باشد.*

[52] Cyclical monotonic

اثبات. ابتدا فرض کنید π یک طرح انتقال بهینه باشد. فرض خلف می‌گیریم که $\mathrm{Supp}(\pi)$ یکنواخت دوری نیست. بنابراین $n \in \mathbb{N}$، $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n \subset \mathrm{Supp}(\pi)$ و $\sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ وجود دارد به طوری که:

$$\sum_{i=1}^n \left(d(x_i, y_{\sigma(i)})^p - d(x_i, y_i)^p \right) < 0 \qquad (2)$$

از آن‌جایی که سمت چپ معادله‌ی ۲ تابعی پیوسته از $(X \times X)^n$ به $\mathbb{R}$ است، بنابراین برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ همسایگی باز $x_i \in U_i$ و $y_i \in V_i$ در X وجود دارد به طوری که برای هر $u_i \in U_i$ و $v_i \in V_i$ داریم:

$$\sum_{i=1}^n \left(d(u_i, v_{\sigma(i)})^p - d(u_i, v_i)^p \right) < 0$$

هدف یافتن اندازه‌ی $\pi_* = \pi + \eta$ است به طوری که بهینه بودن π را نقض کند. قرار دهید $W = \prod_{i=1}^n (U_i \times V_i)$ و برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$، $\pi_i \in \mathcal{P}(X^2)$ را طوری تعریف کنید که برای هر $B \in \mathcal{B}(X^2)$ داشته باشیم:

$$\pi_i(B) = \frac{1}{\pi(U_i \times V_i)} \pi(B \cap (U_i \times V_i))$$

بنابراین $\prod_{i=1}^n \pi_i(W) = 1$. برای هر $i \in \{1, \dots, n\}$ فرض کنید $p_{i,1} : (X \times X)^n \to X$ نگاشت تصویر بر اولین X در iامین مولفه باشد (مولفه‌ی $2(i-1)+1$) و به همین ترتیب $p_{i,2}$ را تعریف می‌کنیم. قرار دهید

$$N = \frac{\min_{1 \le i \le n} \{\pi(U_i \times V_i)\}}{n}$$

و $\eta : \mathcal{B}(X^2) \to [-1, 1]$ را تعریف کنید:

$$\eta = N \sum_{i=1}^n \left((p_{i,1}, p_{\sigma(i),2})_* \prod_{i=1}^n \pi_i - (p_{i,1}, p_{i,2})_* \prod_{i=1}^n \pi_i \right)$$

به وضوح $\eta(\emptyset) = 0$. حال تعریف می‌کنیم $\pi_* = \pi + \eta$ و نشان می‌دهیم بهینه است و هزینه‌ی کمتری نسبت به π دارد. برای به دست آوردن این نتیجه نیاز است نشان دهیم π_* یک اندازه است و مولفه‌های η پوچ هستند، بعلاوه $\int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\eta(x,y) < 0$. به وضوح π_* جمعی است چون π و η هر دو جمعی هستند و مشابها $\pi_*(\emptyset) = 0$. برای اینکه نشان دهیم $\pi_* \ge 0$ کافی است نشان دهیم $-\eta \le \pi$. برای هر $B \in \mathcal{B}(X^2)$ داریم:

$$\begin{aligned}
-\eta(B) &= N \sum_{i=1}^n \Big(\pi_i(B) - \pi_i(p_{i,1}^{-1}(B) \times X) \\
&\quad \cdot \pi_{\sigma(i)}(X \times p_{\sigma(i),2}^{-1}(B)) \Big) \\
&\le \frac{\min_{1 \le i \le n} \{\pi(U_i \times V_i)\}}{n} \\
&\quad \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\pi(U_i \times V_i)} \pi(B \cap (U_i \times V_i)) \\
&\le \max_{1 \le i \le n} \pi(B \cap (U_i \times V_i)) \le \pi(B)
\end{aligned}$$

بنابراین π_* یک اندازه است. برای اینکه نشان دهیم مولفه‌های η پوچ است، دوباره $B \in \mathcal{B}(X)$ را دلخواه بگیرید:

$$\eta(B \times X) = N \sum_{i=1}^n \left(\pi_i(B \times X) - \pi_i(B \times X) \right) = 0$$

به طور مشابه با جابه‌جایی جملات داریم:

$$\eta(X \times B) = N \sum_{i=1}^n \left(\pi_{\sigma(i)}(X \times B) - \pi_i(X \times B) \right)$$

بنابراین مولفه‌های η پوچ هستند. به خصوص نتیجه می‌شود $\eta(X^2) = 0$ پس $\pi_*(X^2) = 1$. بعلاوه برای هر $B \in \mathcal{B}(X)$:

$$\pi_*(B \times X) = \pi(B \times X) + \eta(B \times X) = \mu(B) + 0 = \mu(B)$$

و مشابها $\pi_*(X \times B) = \nu(B)$. و این نتیجه می‌دهد $\pi_* \in \Pi(\mu, \nu)$. حال نشان می‌دهیم $\int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\eta(x,y) < 0$. برای راحتی قرار می‌دهیم $Y = (X \times X)^n$ بنابراین $\bar{x} \in Y$ به این معنی است که

$$\bar{x} = ((x_{1,1}, x_{1,2}), \dots, (x_{n,1}, x_{n,2})) \quad , \quad x_{i,j} = p_{i,j}(\bar{x})$$

با توجه به اینکه $\prod_{i=1}^n \pi_i(W^c) = 0$، داریم:

$$
\begin{aligned}
&\int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\eta(x,y) \\
&= N\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}[(p_{i,1},p_{\sigma(i),2})_* \prod_{i=1}^{n}\pi_i](x,y) \\
&- \int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}[(p_{i,1},p_{i,2})_* \prod_{i=1}^{n}\pi_i](x,y)\Big) \\
&= N\sum_{i=1}^{n}\Big(\int_{Y} d(p_{i,1}(\bar{x}),p_{\sigma(i),2}(\bar{y}))^p \mathrm{d}[\prod_{i=1}^{n}\pi_i](\bar{x},\bar{y}) \\
&- \int_{Y} d(p_{i,1}(\bar{x}),p_{i,2}(\bar{y}))^p \mathrm{d}[\prod_{i=1}^{n}\pi_i](\bar{x},\bar{y})\Big) \\
&= N\int_{W}\sum_{i=1}^{n}\big(d(p_{i,1}(\bar{x}),p_{\sigma(i),2}(\bar{y}))^p - d(p_{i,1}(\bar{x}),p_{i,2}(\bar{y}))^p\big) \\
&\qquad \mathrm{d}[\prod_{i=1}^{n}\pi_i](\bar{x},\bar{y}) \\
&< N\int_{W} 0 \;\mathrm{d}[\prod_{i=1}^{n}\pi_i](\bar{x},\bar{y}) = 0
\end{aligned}
$$

و در نهایت از بهینه بودن π به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi) \\
&\le \int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}pi_*(x,y) \\
&= \int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\pi(x,y) + \int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\eta(x,y) \\
&< \int_{X^2} d(x,y)^p \mathrm{d}\pi(x,y) + 0 = \inf_{\pi\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi)
\end{aligned}
$$

که تناقض است. بنابراین $\mathrm{Supp}(\pi)$ یکنواخت دوری است و یک طرف قضیه نتیجه می‌شود.

برعکس، فرض کنید $\mathrm{Supp}(\pi)$ یکنواخت دوری باشد و $f: X \to \mathbb{R}$ را اینگونه تعریف کنید:

$$
f(x) = \inf\big(d(x,y_1)^p + \sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_{i+1})^p - \sum_{i=1}^{n} d(x_i,y_i)^p\big) \tag{۳}
$$

که اینفیمم روی تمام حالت‌های $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n} \subset \mathrm{Supp}(\pi)$، $n\in\mathbb{N}$ و $y_{n+1}=y_1$ است. هم‌چنین تابع $f_p: X\to\mathbb{R}$ را تعریف می‌کنیم:

$$
f_p(x) = \inf_{y\in X}(d(x,y)^p - f(y)) \tag{۴}
$$

به وضوح f نسبت به μ و ν اندازه‌پذیر است. با قرار دادن $n=1$ در ۳ نتیجه می‌شود $f \le diam(X)^p$ و یکنواخت دوری بودن $\mathrm{Supp}(\pi)$ نتیجه می‌دهد $f \ge 0$. بنابراین $||f||_\infty < \infty$ و $f \in L^p(X,\mu) \cap L^p(X,\nu)$. از کران‌دار بودن f و تعریف f_p نتیجه می‌شود که f_p نیز نسبت به μ و ν اندازه‌پذیر است و $|f_p| \le diam(X)^p$ پس $||f_p||_\infty < \infty$ و $f_p \in L^p(X,\mu)\cap L^p(X,\nu)$. فرض کنید $(x,y)\in\mathrm{Supp}(\pi)$ و $z\in X$ دلخواه باشد و $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n} \subset \mathrm{Supp}(\pi)$. با قرار دادن $(x_0,y_0)=(x,y)$ داریم:

$$
f(z) \le d(z,y)^p + \sum_{i=0}^{n} d(x_i,y_{i+1})^p - \sum_{i=0}^{n} d(x_i,y_i)^p
$$

اگر روی تمام $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}\subset\mathrm{Supp}(\pi)$، اینفیمم بگیریم، به دست می‌آید:

$$
f(z) \le d(z,y)^p + f(x) - d(x,y)^p
$$

که برای هر $z\in X$ برقرار است، بنابراین:

$$
\begin{aligned}
f(x)+f_p(y) &= f(x) + \inf_{z\in X}(d(y,z)^p - f(z)) \\
&\ge f(x) + d(x,y)^p - f(x) = d(x,y)^p
\end{aligned} \tag{۵}
$$

از طرفی با قرار دادن $z=x$ به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
f(x)+f_p(y) &= f(x) + \inf_{z\in X}(d(x,z)^p - f(z)) \\
&\le f(x) + d(x,y)^p - f(x) = d(x,y)^p
\end{aligned} \tag{۶}
$$

بنابراین از ۵ و ۶ نتیجه می‌شود که برای تقریبا (نسبت به π) تمامی $(x,y)\in X^2$ داریم:

$$
f(x) + f_p(y) = d(x,y)^p
$$

و در واقع نامساوی ۶ برای هر $(x,y)\in X^2$ برقرار است. در نهایت برای هر $\pi_0\in\Pi(\mu,\nu)$ داریم:

$$
\begin{aligned}
I(\pi) &= \int_{X^2} d(x,y)\mathrm{d}\pi(x,y) \\
&= \int_{X^2} f(x) + f_p(y)\mathrm{d}\pi(x,y) \\
&= \int_{X} f(x)\mathrm{d}\mu(x) + \int_{X} f_p(y)\mathrm{d}\nu(y) \\
&= \int_{X^2} f(x) + f_p(y)\mathrm{d}\pi_0(x,y) \\
&\le \int_{X^2} d(x,y)^p\mathrm{d}\pi_0(x,y) = I(\pi_0)
\end{aligned}
$$

که نتیجه می‌دهد $I(\pi) = \inf_{\pi_0\in\Pi(\mu,\nu)} I(\pi_0)$. پس π بهینه است و قسمت دوم حکم نیز نتیجه می‌شود. □

قضیه‌ی فوق نتیجه می‌دهد که بهینه بودن خاصیتی است که تنها به تکیه‌گاه‌ی طرح انتقال π وابسته است نه به نحوه‌ی توزیع جرم روی تکیه‌گاه. به عبارت دیگر اگر π بهینه باشد و π_* طرح انتقال دیگری باشد به طوری که $\mathrm{Supp}(\pi_*) \subset \mathrm{Supp}(\pi)$، در این صورت π_* نیز بهینه است.

لم ۹. *فرض کنید (X,d) فضایی متریک باشد و $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}\subset\mathcal{P}(X)$ و $\mu\in\mathcal{P}(X)$ به طوری که $\mu_k\to\mu$. در این صورت برای هر $x\in\mathrm{Supp}(\mu)$ دنباله‌ی $(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$ وجود دارد به طوری که $x_n\in\mathrm{Supp}(\mu_{k_n})$ و $\lim_{n\to\infty} x_{k_n} = x$.*

اثبات. فرض کنید $x \in \mathrm{Supp}(\mu)$ دلخواه باشد. از همگرایی نتیجه می‌شود برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم:

$$0 < \mu(B(x, \frac{1}{k})) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu_n(B(x, \frac{1}{k}))$$

به عبارتی برای هر $k \in \mathbb{N}$، $n_k \in \mathbb{N}$ یافت می‌شود به طوری که برای هر $n \geq n_k$، $\mu_n(B(x, \frac{1}{k})) > 0$. مجموعه‌ی $\{i_0, i_1, i_2, \dots\}$ از اندیس‌ها را تعریف می‌کنیم به صورت دنباله‌ای صعودی و با شروع $i_0 = 0$. برای هر $k > 0$ تعریف می‌کنیم:

$$i_k = \min\{n \in \mathbb{N} : n > i_{k-1}, \mathrm{Supp}(\mu_n) \cap B(x, \frac{1}{k}) \neq \emptyset\}$$

بنابراین برای هر $k \in \mathbb{N}$، $x_k \in \mathrm{Supp}(\mu_{i_k}) \cap B(x, \frac{1}{k})$ به دست آوردیم که $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ و $x_k \in \mathrm{Supp}(\mu_{i_k})$. □

قضیه ۱۰. پایداری[۵۳]: *فرض کنید (X, d) فضایی متریک و کران‌دار باشد و $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}, (\nu_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X)$ به طوری که $\mu_k \to \mu$ و $\nu_k \to \nu$ برای $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$. هم‌چنین فرض کنید $(\pi_k)_{k=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}(X^2)$ دنباله‌ای از طرح انتقال‌های بهینه باشد که $\pi_k \in \Pi(\mu_k, \nu_k)$ با $\pi_k \to \pi \in \mathcal{P}(X^2)$. در این صورت π طرح انتقال بهینه‌ای در $\Pi(\mu, \nu)$ است.*

اثبات. ابتدا نشان می‌دهیم $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. با توجه به لم ۴، برای هر $f, g \in C(X)$ داریم:

$$\begin{aligned}
&\int_{X^2} (f(x) + g(y)) \mathrm{d}\pi(x, y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{X^2} (f(x) + g(y)) \mathrm{d}\pi_k(x, y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{X^2} f(x) \mathrm{d}\pi_k(x, y) + \lim_{k\to\infty} \int_{X^2} g(y) \mathrm{d}\pi_k(x, y) \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X f(x) \mathrm{d}\mu_k(x) + \lim_{k\to\infty} \int_X g(y) \mathrm{d}\nu_k(y) \\
&= \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x) + \int_X g(y) \mathrm{d}\mu(y)
\end{aligned}$$

با قرار دادن $g \equiv 0$، برای هر $f \in C(X)$ داریم:

$$\int_X f(x) \mathrm{d}((p_1)_* \pi) x = \int_{X^2} f(x) \mathrm{d}\pi(x, y) = \int_X f(x) \mathrm{d}\mu(x)$$

که نتیجه می‌دهد $(p_1)_* \pi = \mu$. به طور مشابه با انتخاب $f \equiv 0$ نتیجه می‌شود $(p_2)_* \pi = \nu$. بنابراین $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

حال بهینه بودن π را ثابت می‌کنیم. بنا به قضیه‌ی ۸ بهینه بودن π معادل با یکنواخت دوری بودن تکیه‌گاه‌ی آن است. از طرفی چون π_kها بهینه‌اند، پس تکیه‌گاه‌ی آن‌ها یکنواخت دوری است. فرض کنید $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{j} \subset \mathrm{Supp}(\pi)$ مجموعه‌ی متناهی دلخواهی باشد و $\sigma : \{1, \dots, j\} \to \{1, \dots, j\}$ جایگشت دلخواهی باشد. بنا به لم ۹ برای هر $i \in \{1, \dots, j\}$ دنباله‌ی $((x^i_{k_n}, y^i_{k_n}))_{n=1}^{\infty} \subset X^2$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n\to\infty} (x^i_{k_n}, y^i_{k_n}) = (x_i, y_i)$ و برای هر $i \in \{1, \dots, j\}$، $(x^i_{k_n}, y^i_{k_n}) \in \mathrm{Supp}(\pi_{k_n(i)})$. با توجه به پیوستگی متریک d و یکنواخت دوری بودن تکیه‌گاه‌ی $\pi_{k_n(i)}$ داریم:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{j} d(x_i, y_i)^p &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{j} d(x^i_{k_n}, y^i_{k_n})^p \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{j} d(x^i_{k_n}, y^{\sigma(i)}_{k_n})^p \\
&= \sum_{i=1}^{j} d(x_i, y_{\sigma(i)})^p
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد $\mathrm{Supp}(\pi)$ یکنواخت دوری است. بنابراین π طرح انتقال بهینه است. □

چند مثال از انتقال بهینه

در این بخش می‌خواهیم با ارائه‌ی مثال‌هایی از مفاهیمی که در بخش قبل ارائه شد، با آن‌ها بیشتر آشنا شویم و در عمل این مفاهیم را ببینیم. اغلب مثال‌های این بخش از [۱۵] و [۷] برگرفته شده است.

مثال ۱۱. یکریختی اندازه‌پذیر[۵۴]: *فرض کنید (X, μ) و (Y, ν) دو فضای متریک کامل جدایی‌پذیر به همراه اندازه‌های احتمال بدون اتم باشند. در این صورت یک نگاشت (غیریکتا)، یک به یک و پوشای $T : X \to Y$ وجود دارد به طوری که*

$$T_* \mu = \nu \quad \text{و} \quad (T^{-1})_* \nu = \mu$$

در واقع هر فضای متریک کامل جدایی‌پذیر با فضای $[0, 1]$ مجهز شده به اندازه لبگ یکریخت است. (برای جزئیات به [۱۳] مراجعه کنید.)

مثال ۱۲. نگاشت موزر[۵۵]: *فرض کنید X یک خمینه‌ی ریمانی هموار و فشرده با عنصر حجم vol باشد و f و g دو تابع چگالی احتمال پیوسته‌ی لیپ‌شیتس مثبت باشند. در این صورت اگر قرار دهیم $\mu_0 = f\mathrm{vol}$ و $\mu_1 = g\mathrm{vol}$، آن‌گاه نگاشت انتقال قطعی $T : X \to X$ از μ_0 به μ_1 وجود دارد که می‌توان آن را به طور صریح مشخص کرد. بعلاوه اگر f و g، C^k باشند، آن‌گاه T، C^{k+1} است. برای به دست آوردن فرمول صریح T، برای هر $x \in M$ جواب معادله‌ی*

$$\Delta u(x) = \mu_0 - \mu_1$$

[۵۳] Stability

[۵۴] Measurable Isomorphic

[۵۵] Moser Mapping

را در نظر بگیرید که در آن Δ عملگر لاپلاس[۵۶] است. نگاشت انتقال با تعریف موضعی میدان برداری لیپ‌شیتس

$$\xi(t,x)=\frac{\nabla u(x)}{(1-t)\mu_0(x)+t\mu_1(x)}$$

وابسته به شار $(T_t(x))_{0\le t\le 1}$ و خانواده‌ی اندازه احتمال‌های $(\mu_t)_{0<t<1}$؛

$$\mu_t=(1-t)\mu_0+t\mu_1$$

به دست می‌آید. برای جزئیات بیشتر به [۱۵] رجوع کنید.

مثال ۱۳. بازآرایش صعودی[۵۷] در $\mathbb{R}$: فرض کنید μ و ν دو اندازه احتمال روی $\mathbb{R}$ باشند. تابع توزیع تجمعی[۵۸] آن‌ها چنین تعریف می‌شود:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}\mu \quad \text{و} \quad G(y)=\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}\nu$$

بعلاوه وارون این توابع را می‌توان تعریف کرد:

$$F^{-1}(t)=\inf\{x\in\mathbb{R}:F(x)>t\}$$

$$G^{-1}(t)=\inf\{y\in\mathbb{R}:G(y)>t\}$$

که از راست پیوسته‌اند. اگر فرض کنیم μ بدون اتم است و قرار دهیم $T=G^{-1}\circ F$، در این صورت $T_*\mu=\nu$.

مثال ۱۴. فرض کنید $n\ge 1$ عددی صحیح باشد و $\mu_0=\chi_{[0,n]}\mathfrak{L}^1$ و $\mu_1=\chi_{[1,n+1]}\mathfrak{L}^1$. در این صورت نگاشت $\psi(t)=t+1$ برای تابع هزینه‌ی حاصل از متر اقلیدسی، بهینه است. اگر $n>1$ باشد نگاشت

$$\psi(t)=\begin{cases} t+n & t\in[0,1]\\ t & t\in[1,n]\end{cases}$$

نگاشت بهینه‌ی دیگری است. برای حالت $n=1$ نیز نگاشت $\psi(t)=2-t$ بهینه است.

مثال ۱۵. فرض کنید $\mu_0=\chi_{[-1,1]}\mathfrak{L}^1$ و $\mu_1=\delta_{-1}+\delta_1$. در این حالت نگاشت انتقال بهینه‌ی ψ یکتاست و روی $[-1,0)$ ثابت و برابر ۱- است و روی $[0,1)$ ثابت و برابر ۱ است. (در این‌جا نیز مانند مثال قبل تابع هزینه، همان است که از متریک اقلیدسی حاصل می‌شود.)

مثال ۱۶. فرض کنید $2\mu_0$ جمع دو اندازه دیراک در نقاط $(0,0)$ و $(1,1)$ باشد و $2\mu_1$ جمع دو اندازه دیراک در نقاط $(1,0)$ و $(0,1)$. در این صورت انتقال عمودی و افقی هر دو بهینه‌اند.

[۵۶] Laplace Operator
[۵۷] Increasing Rearrangment
[۵۸] Cumulative Distribution Function

مثال ۱۷. حالت گسسته[۵۹]: فرض کنید X و Y فضاهایی گسسته باشند که تمامی نقاط آن‌ها جرم یکسان دارند:

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\delta_{x_i}\quad\text{و}\quad \nu=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\delta_{y_j}$$

در این صورت هر اندازه‌ای در $\Pi(\mu,\nu)$ را می‌توان با یک ماتریس تصادفی دوگانه[۶۰] $\pi=(\pi_{ij})_{i,j}$ نمایش داد. منظور از تصادفی دوگانه این است که تمامی π_{ij}ها نامنفی هستند و

$$\forall j,\sum_{i}\pi_{ij}=1 \quad\text{و}\quad \forall i,\sum_{j}\pi_{ij}=1$$

بنابراین در این حالت مسأله‌ی کانترویچ تبدیل می‌شود به یافتن

$$\inf\{\frac{1}{n}\sum_{i,j}\pi_{ij}c(x_i,y_j);\pi\in\mathcal{B}_n\}$$

که در آن $\mathcal{B}_n$ مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های تصادفی دوگانه $n\times n$ است.

این مسأله یک مسأله‌ی کمینه‌سازی خطی روی مجموعه‌ی کراندار محدب $\mathcal{B}_n\subset M_n(\mathbb{R})$ است. بنابر قضیه‌ی چوکت[۶۱] می‌دانیم مسأله جوابی در نقاط اکسترمال[۶۲] $\mathcal{B}_n$ - اعضایی از $\mathcal{B}_n$ که نمی‌توان آن‌ها را به صورت ترکیب محدب غیربدیهی از دو نقطه‌ی $\mathcal{B}_n$ نوشت- دارد. بنا بر قضیه‌ی بیرکف[۶۳] این نقاط اکسترمال، ماتریس‌های جایگشت[۶۴]، ماتریس‌هایی به شکل $\pi_{ij}=\delta_{i,\sigma(i)}$ هستند که در آن σ جایگشت دلخواهی از $\{1,\ldots,n\}$ و δ نماد کرونکر است.

بنابراین طرح انتقال بهینه در مسأله‌ی کانترویچ با جواب مسأله‌ی مونژ

$$\inf\{\frac{1}{n}\sum c(x_i,y_{\sigma(i)});\sigma\in S_n\}$$

برابر خواهد بود که در آن S_n تمام جایگشت‌های $\{1,\ldots,n\}$ است.

قضیه‌ی چوکت برای زیرمجموعه‌ی محدب و فشرده‌ی C از فضای نرم‌دار V بیان می‌دارد که: برای هر $c\in C$، اندازه احتمال μ با تکیه‌گاه در مجموعه‌ی E، تمام نقاط اکسترمال C، وجود دارد به طوری که برای هر تابع آفین f بر C داریم

$$f(c)=\int f(e)\mathrm{d}\mu(e)$$

برای اطلاعات بیشتر در مورد این قضیه می‌توانید به [۱۱] مراجعه کنید. هم‌چنین اثبات قضیه‌ی بیرکف را می‌توانید در [۶] ببینید.

[۵۹] Discrete Case
[۶۰] Bistochastic
[۶۱] Choquet's Theorem
[۶۲] Extermal Point
[۶۳] Birkhoff's Theorem
[۶۴] Permutation Matrices

مطالب فوق براساس [۱] است. علاقمندان می‌توانند برای ادامه‌ی مطالب به مراجع [۱۵]، [۱۴] و [۳] مراجعه کنند.

در این‌جا جا دارد از دکتر علیرضا بحرینی و دکتر علیرضا رنجبر به خاطر راهنمایی‌هایشان تشکر ویژه‌ای داشته باشم.

مراجع

[۱] طاهری، ابوالفضل. *گسترش مفاهیم انحنای ریچی به فضاهای متریک-اندازه به کمک انتقال بهینه*. ۱۳۹۲.

[۲] نقیبی، سیدعلی. انحنا ریچی روی گراف‌ها، ۱۳۹۱.

[۳] Ambrosio, Luigi and Gigli, Nicola. *A User's Guide to Optimal Transport*. Lecture Note, 2011.

[۴] Blanchet, Adrien and Carlier, Guillaume. Optimal transport and Cournot-Nash equilibria. 2012.

[۵] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations and Monge-Kantorovich Mass Transfer*. Department of Mathematics, UC Berkeley.

[۶] Hurlbert, Glenn. A short proof of the Birkhoff-Von Neumann theorem.

[۷] L. Ambrosio, K. Deckelnick, G. Dziuk M. Mimura V. A. Solonnikov and Soner, H. M. *Mathematical Aspects of Evolving Interfaces*. Springer, Lectures given at the C.I.M.-C.I.M.E., 2003.

[۸] Morgan, Frank. *Geometric Measure Theory: A Beginner's Guide*. Elsevier, 2009.

[۹] Nicolas Bonneel, Kalyan Sunkavalli, Sylvain Paris and Pfister, Hanspeter. Example-based video color grading. 2013.

[۱۰] Nicolas Bonneel, Michiel van de Panne, Sylvain Paris and Heidrich, Wolfgang. displacement interpolation using lagrangian mass transport. 2011.

[۱۱] Phelps, Robert R. *Lectures on Choquet's Theorem*. Springer, 2001.

[۱۲] Stein, Elias M. and Shakarchi, Rami. *Real Analysis: Measure Theory, Integration, & Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.

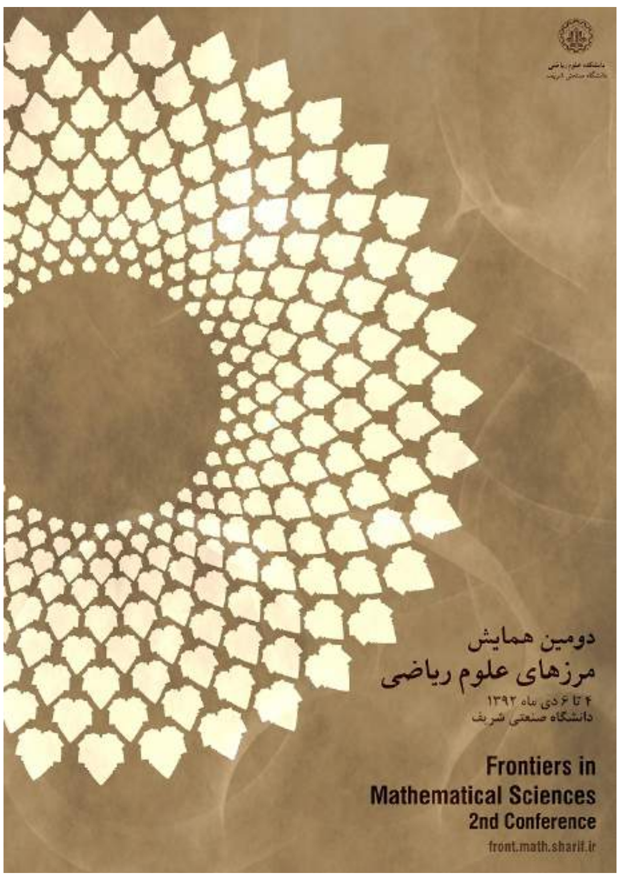
[۱۳] Troitskiy, V. G. Real partitions of measure spaces. 1994.

[۱۴] Villani, Cedric. *Topics in Optimal Transportation*. American Mathematical Society, 2003.

[۱۵] Villani, Cedric. *Optimal transport, old and new*. Springer, 2009.

[۱۶] Yau, Horng-Tzer. The work of Cedric Villani. 2010.

دومین همایش مرزهای علوم ریاضی



یکی از مهمترین وقایعی که ترم گذشته در دانشکده‌ی ریاضی شریف به وقوع پیوست، برگزاری دومین دوره‌ی همایش سالانه‌ی مرزهای دانش ریاضی در تاریخ ۴ الی ۶ دی‌ماه بود[۱]. یکی از اهداف مهم این همایش، ایجاد محفلی برای ارتباط مؤثر بین جامعه‌ی ریاضیدانان ایرانی است. در این راستا و به منظور بهره‌گیری از تجربیات سخنرانان مدعو که در میان اسامی آنها افراد بسیار سرشناسی به چشم می‌آیند، بر آن شدیم تا با تعدادی از اساتید شرکت‌کننده در این همایش مصاحبه کنیم. این مصاحبه‌ها را می‌توانید در صفحات آتی بخوانید.

بدون هیچ تردیدی هماهنگی، انجام و پیاده‌سازی این تعداد مصاحبه، میسر نمی‌شد مگر با کمک جمع زیادی از دوستان در دانشکده که ضروری است اینجا از تمامی این عزیزان تشکر کنیم: دکتر سعید شعبانی که در طی این روند همواره به ما کمک کردند، دکتر کمالی‌نژاد به خاطر پیشنهادهای خوبشان برای تنظیم سؤالات، دکتر شریفی‌تبار که زحمت یکی از مصاحبه‌ها را تقبل کردند، دکتر مجتبی مجتهدی به خاطر وقتی که گذاشتند؛ از میان دانشجویان حسین بومری، عرفان صلواتی و روزبه فرهودی که تعدادی از مصاحبه‌ها را انجام دادند و در نهایت ابوالفضل طاهری، یاسمن بقایی، سینا حسن‌زاده و امین محمدی به خاطر پیشنهادهایی که برای تنظیم سؤالات دادند و مسؤولیت ضبط صدا و عکاسی در مصاحبه‌ها را بر عهده گرفتند.

[۱] آدرس سایت همایش: front.math.sharif.ir

مصاحبه با دکتر محمد مهدیان

دکتر محمد مهدیان، از فارغ‌التحصیلان دوره‌ی کارشناسی دانشگاه صنعتی شریف در رشته‌ی مهندسی کامپیوتر هستند. ایشان دوره‌ی کارشناسی ارشد در دانشگاه تورنتو و سپس دوره‌ی دکترای خود را در دانشگاه MIT در رشته‌ی ریاضیات کاربردی، به پایان رساندند و در حال حاضر از محققین موسسه‌ی گوگل هستند.

مصاحبه‌ای که در ادامه می‌آید، در زمان برگزاری دومین سمینار مرزهای علوم ریاضی توسط حسین بومری، سینا حسن‌زاده و ابوالفضل طاهری انجام شده است.

چه اتفاقی افتاد که شما به زمینه‌ای که هم اکنون در آن مشغول هستید علاقه‌مند شدید و تحصیلات و تحقیقاتتان را در این زمینه ادامه دادید؟

همه‌ی این‌ها به تدریج اتفاق افتاد. به طور مثال من در دوره‌ی لیسانس با دکتر محمودیان کارهای ترکیبیاتی بسیاری انجام دادم. برای همین در دوره فوق‌لیسانس و دکترا هم کارهایی که انجام دادم بیشتر ترکیبیاتی بود. اما چیز دیگری که در خارج با آن آشنا شدم مباحث probabilistic method بود که مسیر حرکت من را کمی نسبت به آنچه در دوره لیسانس انجام می‌دادم تغییر داد. بعلاوه این‌که من درس‌های علوم کامپیوتری محض‌تری را هم گذراندم که آن هم در تعیین مسیر من بی‌تاثیر نبود.

زمانی که شما تصمیم به ادامه‌ی تحصیل در خارج از کشور گرفتید، آیا این‌کار در داخل کشور ممکن نبود؟ تحصیل در خارج، چه مزایای برای شما ایجاد کرد؟

در آن زمان واقعا آدم‌های زیادی نبودند که در این زمینه مشغول به کار باشند. علاوه بر این، همین رفتن به محیط جدید و چیزهای جدید را یاد گرفتن بسیار به دید آدم کمک می‌کند. و قطعا فضای جدید به شکوفا شدن فکر و تحقیقات هم کمک می‌کند. اما در مورد مسائل علمی هم در آن زمان در مورد ترکیبیات در دانشکده‌ی ریاضی کارهایی انجام می‌شد. اما به طور خاص درمورد probabilistic method کاری در حال انجام نبود. یا در دانشکده کامپیوتر هم کار تئوری خیلی ضعیف و در زمینه‌های محدود و خاصی دنبال می‌شد. البته این اتفاق با توجه به تعداد کم اساتید طبیعی هم بود. شما وقتی به خارج از کشور می‌روید با مجموعه‌ی جدیدی و زمینه های تحقیقی جدیدی مواجه می‌شوید و ممکن است مسائل جدیدی را که قبلا ندیده بودید، ببینید و علاقه‌مند شوید و در آن زمینه‌ها به کارتان ادامه دهید. ولی جواب کاملی نمی‌شود به این سوال داد. چون که نمی‌توانیم همه دانشگاه‌های ایران را با هم، و همه دانشگاه‌های خارج را با هم یک کاسه کنیم.

سمینار مرزهای علوم ریاضی، توانسته است که هر ساله تعداد زیادی از اساتید و محققان و دانشجویان را از سرتاسر دنیا در ایران جمع کند و فرصت خوبی را برای کارهای آینده دانشجویان و محققان ایرانی ایجادکند. آیا شما سمینار مشابهی را در خارج از کشور می‌شناسید؟

مشابه این سمینار در کشورهای خارجی، سمینارهای معمولی هستند که محققان در آنها مقاله ارائه می‌دهند و مقاله‌های دیگران را هم می‌بینند. من به شخصه در طی سال، سمینارهای مختلفی را چه در آمریکا و چه در اروپا شرکت می‌کنم و همه‌ی این‌ها تعاملات زیادی را ایجاد می‌کنند. اما در ایران با توجه به محدودیت‌هایی از قبیل فاندینگ برای سفر کردن و مشکلات ویزا و غیره این اتفاق کمتر می‌افتد. برای همین سمینارهایی مانند مرزهای علوم ریاضی راه‌کارهای بسیار خوبی هستند که کسانی که نمی‌توانند در کنفرانس‌های بین‌المللی شرکت کنند با مجموعه‌ای از کسانی که در این کنفرانس‌ها شرکت داشته‌اند ملاقات کنند. البته خارج از این سمینار هم، این اتفاق به صورت درس‌های کوتاه یا سخنرانی می‌افتد اما خب اینکه این کنفرانس باعث جمع شدن هم‌زمان عده‌ی زیادی می‌شود، ارزش افزوده‌ای را ایجاد می‌کند که قابل توجه است.

به نظر شما، جای چه بخش‌هایی در سمینار مرزهای علوم خالی

بود؟

به نظر من، سمینار می‌توانست در ابعاد بزرگتری برگزار شود. به طور مثال سخنرانی‌هایی بودند که من چیزی از آنها نمی‌فهمیدم! اما اگر تعداد آدم‌های بیشتری حضور داشتند و در هر زمینه‌ای سخنرانی‌های بیشتری ارائه می‌شد بهتر بود.

چگونه زمینه‌های تحقیقات شما از مسیر تحصیل به سمت مسیر کاری تغییر کرد و در مرکز تحقیقات گوگل مشغول به کار شدید؟

اولاً که تحقیقات آکادمیک و کاری تفاوت چندانی با هم ندارند، و مسیر آن‌ها از هم جدا نیست. کاری که من در گوگل مشغول به انجام آن هستم، شاید در خیلی از محیط‌های آکادمیک هم در حال تحقیق و بررسی باشد. اما اگر از لحاظ تاریخچه‌ای بررسی کنیم، من در دوره‌ی دکتری به عنوان کارآموز به مایکروسافت رفتم و در آن‌جا با آدم‌های زیادی آشنا شدم. بعد از آن در IBM هم مشغول به کارآموزی شدم. این کارآموزی‌ها مسیر تحقیقات من را خیلی تغییر نداد. اما حداقل من را با این محیط‌های کاری در مرکزهای تحقیقاتی کمپانی‌ها آشنا کرد.

زمینه‌ی کاری شما با نظریه‌ی بازی‌ها در ارتباط است. آیا در دوران تحصیل هم در زمینه‌ی نظریه‌ی بازی‌ها مشغول بوده‌اید؟

زمانی که من در دوره‌ی دکتری بودم، تازه پای نظریه‌ی بازی‌ها به علوم کامپیوتر باز شده بود و من هم در همان زمان با آن آشنا شدم.

نظریه‌ی بازی‌ها چقدر در زمینه‌ی کاری برای شما کاربرد داشته است؟

کاربردهای نظریه‌ی بازی‌ها شاید به این میزان که تصور می‌شود زیاد نباشد. به طور مثال نظریه‌هایی مانند طراحی آکشن‌ها، نظریه‌های سرراست‌تری هستند. چون به طور مثال شما می‌توانید مطلوبیت آدم‌ها را بنویسید. به طور مثال اگر شرکتی می‌خواهد برای تبلیغات خودش محل خاصی را بخرد، در واقع دوست دارد که با هزینه‌ی کمتری مشتری‌هایش را افزایش دهد و این مطلوبیت سرراستی است. برای همین می‌توان برای حل این مشکل آن را با مسئله‌ای مدل کرد و به سادگی آن را حل کرد. اما وقتی که ما در مورد آدم‌ها صحبت می‌کنیم شما برای مدل‌سازی مجبورید که فرض‌های زیادی رادر نظر بگیرید تا بتوانید تصوری از مطلوبیت آن‌ها به دست بیاورید، که تقریبا کاری غیرممکن است. چون انسان‌ها انتخاب‌های پیچیده‌ای دارند و در بسیاری از مواقع اصلا مطلوبیت خاصی برای آن‌ها قابل تعریف نیست! برای همین تئوری‌هایی که در این زمینه وجود دارد، فاصله‌ی زیادی با واقعیت دارد و برای همین من تا به حال استفاده‌ی خیلی خاص و زیادی را از نظریه‌ی بازی‌ها در این زمینه ندیده‌ام.

پس به نظر شما، آیا نظریه‌ی بازی‌ها، نظریه‌ای غیرکاربردی است؟

قطعاً نه! حداقل در دنیای تئوری‌ها، این نظریه بسیار کاربردی است. مثال‌های زیادی هم وجود دارد که مسئله‌های تئوری به کاربردهایی در زندگی واقعی بدل شده‌اند. از طرفی همین فکر کردن بر روی مسائل تئوری، نتایجی را در بردارد که به عنوان نتایج سطح بالایی دسته‌بندی می‌شوند. شاید نتایج به دست آمده خیلی به واقعیت نزدیک نباشند، اما قطعاً این طرز فکر کردن بر روی تئوری‌ها در عمل به کار خواهد آمد.

شما در دوران کارشناسی در رشته‌ی مهندسی کامپیوتر تحصیل می‌کردید. اما با مرور زمان به بحث‌های تئرویک‌تر نزدیک شدید. دلیل این تغییر مسیر چه چیزی بوده است؟

تا حد خوبی ترجیح شخصی است و نمی‌توان دلیل کلی‌تری برای آن تراشید. شاید علاقه به این‌که مسائل را دقیقتر بررسی کنم و یا آنها را اثبات کنم و یا در یک چارچوب منطقی به آن فکر کنم، باعث این تغییر شده است.

اما در ایران با این دید به این قضیه نگاه نمی‌شود. به طور مثال افراد با علاقه‌های تئوری هم به سمت مهندسی می‌روند، به این بهانه که مثلاً با رشته‌ی علوم کامپیوتر نمی‌توان کار کرد. در خارج از ایران هم، همین‌طور است؟

این اتفاق تنها در ایران می‌افتد و در خارج از ایران، علوم کامپیوتر بسیار هم کاربردی است. در ایران، به این دلیل که علوم کامپیوتر در دانشکده‌ی ریاضی است، خیلی به مسائل کاربردی آن توجه نمی‌شود و فارغ‌التحصیلان علوم کامپیوتر هم، مسائل کاربردی زیادی در دوره تحصیل یاد نمی‌گیرند. اما در همه جای دنیا این‌طور نیست، و به طور مثال کسی که از دانشکده‌ی علوم کامپیوتر فارغ‌التحصیل می‌شود، برنامه‌نویس خوبی است و می‌تواند در شرکت‌های زیادی مشغول به کار شود، و این زمانی شکل عالی‌تری به خود می‌گیرد که کسی که در زمینه‌ی تئوری هم کار کرده است، بتواند الگوریتمی را که خودش

طراحی کرده، با دانش کاربردی‌اش برنامه‌نویسی کند.

مشکلی که در ایران هست، ارتباط بسیار کم بخش تئوری با صنعت است. به طور مثال رشته‌ی علوم کامپیوتر در ایران، در مقایسه با مهندسی کامپیوتر، تعاملات و کسب درآمدهای بسیار کمتری دارد. چطور می‌توان یک شرکت را قانع کرد که شما نیاز دارید که از علوم پایه هم استفاده کنید تا به بهترین شکل به مسیر خود ادامه دهید؟

شاید مشکل از این نباشد که صنعت قانع نمی‌شود. شاید بهتر باشد که ما ساختار علوم کامپیوتر را تغییر بدهیم که خود شرکت احساس نیاز را پیدا کند! به نظر من، به طور خاص در مورد علوم کامپیوتر تغییر خوبی که باید اتفاق بیفتد این است که دانشجویان مهارت‌های کامپیوتری را هم بلد باشند. مدرک دانشجوی علوم کامپیوتری که نتواند چند خط برنامه‌نویسی کند، واقعاً بی‌ارزش است و اصلاً عجیب نیست که صنعت به چنین فردی بی‌علاقه باشد. البته به زمان نیاز است که این تفکر راجع به علوم کامپیوتر عوض شود، اما خب بدون تلاش دانشجویان ممکن نیست.

این شروع، نیازمند همکاری صنعت هم هست. چگونه می‌توان این جرقه را ایجاد کرد؟

به نظر من، مشکل دیگری که در ایران وجود دارد، ارتباط بسیار ضعیف ما بین دانشکده‌هاست. به طور مثال اگر پروژه‌ای در دانشکده‌ی مهندسی کامپیوتر وجود دارد، و فردی از علوم کامپیوتر هست که قادر به انجام این کار است، بهتر این بود که از این فرد در انجام پروژه استفاده می‌شد. البته مشکلات اداری و ... برای این مسائل کم نیست، اما خب به هر حال، هرکاری موانع خاص خودش را دارد. البته این را هم باید در نظر داشت که آوازه‌ای که یک دانشکده دارد را فارغ‌التحصیلان آن دانشکده می‌سازند.

اما مشکل اینجاست که اکثر پروژه‌های صنعتی به فکر بهینه کردن و نحوه‌ی طراحی الگوریتم‌ها، که کارهای تئوری محسوب می‌شوند نیستند، و صرفاً می‌خواهند که چند خط کد تحویل بگیرند که کارشان راه بیفتد! با این مشکل چگونه باید مواجه شد؟

این نیاز در بعضی از پروژه‌ها وجود دارد و در بعضی از پروژه‌ها هم نه. در بعضی از مسائل شاید اولویت این باشد که سریعتر راه‌حلی تولید و برنامه‌نویسی شود و بهینه‌سازیِ راه‌حل اهمیتی نداشته باشد. از طرفی برعکس این هم وجود دارد. اما بالاخره، گاهی هم تئوری برای صنعت‌گران مهم است. اما شاید این مورد کم‌تر پیش آمده باشد.

در مورد تحقیقات و تخصص‌تان توضیح کلی و مختصری بدهید.

زمینه‌ی کاری من، در اشتراک بین علوم نظری کامپیوتر و اقتصاد است که به طور خاص به طراحی مکانیسم برای آکشن‌ها و همین‌طور آنالیز کردن شبکه‌های اجتماعی و داده‌های بزرگ منجر می‌شود.

مشکلی که باز هم وجود دارد این است که، دانشکده‌ی ریاضی شریف در زمینه‌های اقتصادی فعال نیست و درس‌هایی هم که در دانشکده اقتصاد ارائه می‌شوند زمینه ریاضی غنی ندارند!

به نظر من این موضوع حتی می‌تواند مزیت محسوب شود. چون شما از دید یک اقتصاددان، اقتصاد را فرا می‌گیرید و خودتان، می‌توانید بعداً به زمینه‌های ریاضی آن بپردازید. به طور مثال، در دوره دکتری، هم برای ما درس‌های اقتصادی وجود نداشت و من به صورت شخصی و داوطلبانه درس‌هایی از دانشکده‌ی اقتصاد می‌گرفتم و یا در کلاس‌هایی از دانشگاه‌های دیگر مانند هاوارد، در زمینه‌ی نظریه‌ی بازی‌ها شرکت می‌کردم که چیزهای زیادی (شاید بیشتر از کلاس‌های الگوریتم و ...)، از این کلاس‌ها یاد گرفتم. برای همین تا حد زیادی این قضیه، به خود شخص بستگی دارد.

اقتصادی که شما با آن درگیر هستید، به چه زمینه‌ای از اقتصاد مربوط می‌شود؟

اقتصادی که در زمینه کاری من استفاده می‌شود، اقتصاد خرد و جنبه‌های ریاضی آن است. به طور خاص طراحی مکانیزم برای آکشن‌ها. برای مثال، فرض کنید که شما قصد دارید محصولی را بفروشید و قصد دارید طرح فروشی را پیاده کنید، که جنس شما به حداکثر قیمت فروخته شود. در مرحله‌ی اول این مسئله باید به صورت ریاضی مدل‌سازی شود و در مرحله‌ی بعدی باید با بهینه‌سازی، این مسئله حل شود. طبعاً وقتی این کار در مقیاس بزرگی مانند تبلیغات گوگل انجام شود، شما درگیر قضایای تحلیل داده و یادگیری ماشین می‌شوید که جنبه اقتصادی مسئله را پیچیده‌تر می‌کند.

لطفاً در مورد مباحث شبکه‌های اجتماعی و داده‌های بزرگ هم توضیح مختصری بدهید.

از کارهایی که در گذشته در حوزه‌ی شبکه‌های اجتماعی انجام می‌شد، به طور مثال،نمونه‌ای از ۵۰ نفر انتخاب می‌شد و شبکه‌ی اجتماعی آنان آنالیز می‌شد. این مشاهدات و مصاحبه‌های فردی، منجر به تولید یک مقاله می‌شد. اما در حال حاظر هم مقیاس و هم آنالیز داده‌ها بسیار دقیق‌تر شده است. به طور مثال، ما ابزارهایی داریم که با دقت، شبکه‌های اجتماعی شامل ۱۰۰ها میلیون انسان را بررسی می‌کند. برای همین با داده‌های بسیار بزرگتری روبرو هستیم که طبعا نویز موجود در این حجم داده هم، به مراتب از یک نمونه ۵۰تایی بیشتر است. اما به هر حال امکاناتی وجود دارد، که رشته‌هایی مانند جامعه‌شناسی، مشاهدات خوبی بر این داده‌ها داشته باشند و نتایج خوبی هم کسب کنند. کاربردهای دیگری هم وجود دارد. به طور مثال، فرض کنید که شما می‌خواهید به یکی از اعضای شبکه اجتماعی‌تان یک دوست جدید پیشنهاد کنید. همین که چه کسانی را می‌توانید به عنوان دوست پیشنهاد کنید مسئله‌ای برآمده از مسائل بهینه‌سازی و یادگیری ماشین است.

خیلی از مسائلی که در تحلیل داده وجود دارند، در نهایت به مسائل NP منتهی می‌شوند. برای حل این مسائل در دنیای واقعی چه کارهایی انجام می‌شود؟

اولاً که متدها و روش‌های زیادی وجود دارند که پیچیدگی مسائل را کمتر می‌کنند تا در نهایت با این مشکلات مواجه نشویم. دوماً NP بودن یک مسئله هم، دلیلی بر غیرقابل حل بودن یک مسئله نیست. مسائل NP زیادی وجود دارند که در عمل حل می‌شوند. برای همین بسیاری از مسائل آنالیز داده تجربی هستند و خیلی به فکر اثبات و قضایا نیستیم. در حالت کلی جنبه‌ی عملی مسئله می‌تواند کمک شایانی به جنبه تئوری مسئله کند و البته عکس این هم صادق است.

پس به نظر شما تا حد خوبی بررسی روش‌ها و الگوریتم‌ها بر روی داده‌های کوچک تفاوت زیادی با بررسی آنها بر روی داده‌های بسیار بزرگ ندارد؟

داده‌هایی در مقیاس بسیار بزرگ مانند گوگل، خیلی از چیزها را به صورت بنیادین تغییر می‌دهد. اما در عین حال بسیاری از چیزها را هم تغییر نمی‌دهد! به طور مثال اگر مشکل NP بودن مسئله باشد، این مشکل خیلی زودتر از اینکه با سایزهای خیلی بزرگ برسیم، مشخص می‌شود. اما به هر حال داده‌های با سایز بزرگ، مشکلات خاص خودشان را نسبت به داده‌های کوچکتر دارند. اما خب، اشتراک‌ها هم کم نیستند.

برای کسانی که به زمینه‌های تخصصی شما علاقه‌مند هستند، چه منابعی را برای آشنایی بیشتر پیشنهاد می‌کنید؟

رفرنس خاصی وجود ندارد. در واقع هر دوی این زمینه‌ها، زمینه‌های جوانی هستند و بهترین مرجع برای آنها مقالات منتشر شده است. کتاب‌هایی در این مورد شاید وجود داشته باشند، اما مقاله خواندن کار بهتر و بهینه‌تری برای این اشخاص است.

در مورد سمینارهای مرتبط چطور؟

در این زمینه‌ها ورکشاپ‌های واین هستند، که بسیار مفیدند و هر ساله برگزار می‌شود. بهترین کنفرانس در زمینه‌های اقتصادی هم، ACM Transactions on Economics and Computation باشد که بهترین مقاله‌ها در این زمینه در آن ارائه می‌شود.

به نظر شما، چه عواملی باعث می‌شوند تا شرکتی به غول بزرگی مانند گوگل تبدیل شود؟

نمی‌توان به گوگل مانند یک شرکت نگاه کرد و بررسی کرد که چرا موفق شده است. چون گوگل زاییده‌ی اکوسیستمی است که در سیلیکون ویلی[۱] وجود دارد که تعداد بسیار زیادی کمپانی و استارت آپ در آن‌جا متولد می‌شوند. هم‌چنین آدم‌هایی هستند که این کمپانی‌ها را بررسی می‌کنند و آن‌هایی را که به نظر آینده روشنی دارند، حمایت می‌کنند و سرمایه برای ادامه کار در اختیار آن‌ها قرار می‌دهند. از بین این هزار کمپانی که شروع به کار می‌کنند، شاید ۹۵۰ کمپانی با شکست مواجه شوند. اما بقیه کمپانی‌هایی که می‌مانند، موفقیت‌های معقولی دارند و شاید یکی از آن‌ها هم، کمپانی‌ای مانند گوگل شود. برای همین نمی‌توان گوگل را به صورت تکی بررسی کرد. همین‌طور که نمی‌توان فقط به بلیت برنده لاتاری توجه کرد،

[۱] Silicon Valley

بدون این‌که حواسمان باشد که بلیط‌های بازنده هم وجود داشته‌اند. تمام بدنه‌ی این اکوسیستم است که باعث می‌شود نوآوری وجود داشته باشد. البته نوآوری‌هایی که گوگل در ابتدای کار خود داشت را نباید از یاد برد. گوگل از همان ابتدا تحولی در دنیای موتورهای جست‌وجو پدید آورد. از طرفی، اینترنت چند سال قبل از گوگل ایجاد شده بود و داده‌های زیادی در سرتاسر وب بر روی سرورهای مختلف وجود داشت و این‌جا بود که مسئله جستجو پدید می‌آمد. بزرگترین مسئله برای موتورهای جستجو، ایندکس کردن داده‌ها بود. اما سایز اینترنت آن‌قدر بزرگ شد که شما با جستجوی هر واژه‌ای با خیل عظیمی از داده‌ها مواجه می‌شدید که نمی‌توانستید همه‌ی آن‌ها را بررسی کنید. حالا اگر اولویت‌بندی این داده‌ها به شکل رندم صورت می‌گرفت، عملاً کاربری خود را از دست می‌داد. مهم‌ترین کار گوگل در چینش داده‌ها بود. به طوری که نتایج بهتر و به درد بخورتر در رتبه‌های بالاتر قرار بگیرند. همین باعث شد تا گوگل در آن زمان به یک غول تبدیل شود. در ادامه هم، تکنیک‌های مدیریتی بودند که باعث شدند گوگل در این اندازه باقی بماند. اهمیتی که در گوگل به نوآوری داده می‌شود، واقعاً قابل توجه است. به طور مثال در گوگل، شما می‌توانید یک پنجم از زمان کاری خودتان را به تحقیق بپردازید و خب خیلی از موفقیت‌های گوگل از دل همین پروژه‌های ۲۰ درصدی درآمده‌اند.

محیط کاری در گوگل چطور است؟

یکی دیگر از مزایای گوگل شاید همین باشد. غذاهای خوب و متنوع و رایگان، کافه‌های خوب، سرگرمی‌های فراوان، میانگین سنی جوان و ...، خیلی به جو داخلی کمپانی کمک می‌کند. برای همین جذب نیروی انسانی و حفظ آن هم برای گوگل ساده‌تر می‌شود. **جای**

چه چیزهایی در حوزه‌های کاری ایران خالی است؟

به نظر من این ساختار باید در ایران ایجاد شود که به طور مثال، اگر شرکتی با ایده‌های خوب مشغول به کار است، بتواند رشدش را ادامه دهد و آدم‌های مختلفی روی آن سرمایه‌گذاری کنند و اگر استارت‌آپی موفق بود، توسط شرکت‌های بزرگتر خریداری شود. فرهنگی که در خارج جا افتاده اما در ایران کمتر به آن توجه شده است.

با تشکر از دکتر مهدیان، بابت وقتی که در اختیار ما قرار دادند.

مصاحبه با دکتر پوران معماری

دکتر پوران معماری، از فارغ‌التحصیلان دوره‌ی کارشناسی دانشگاه صنعتی شریف در رشته‌ی علوم ریاضی است. ایشان دوره‌ی کارشناسی‌ارشد را در دانشگاهی در فرانسه [1] در رشته‌ی هندسه‌ی محاسباتی گذراندند و پس از آن دوره‌ی دکتری را نیز در همین دانشگاه سپری کردند.

مصاحبه‌ای که در ادامه می‌آید، در زمان برگزاری دومین سمینار مرزهای علوم ریاضی توسط حسین بومری، سینا حسن‌زاده و ابوالفضل طاهری انجام شده است.

[1] University of Nice Sophia Antipolis

لطفاً در مورد زمینه‌ی کاری‌تان توضیح دهید، و این‌که چه اتفاقی افتاد که به این زمینه علاقه‌مند شدید؟

علاقه‌ی من از دوره‌ی دبیرستان و با درس هندسه، و دید خوبی که به ما داد شروع شد. بعد از آن برای کارشناسی به دانشگاه پلی‌تکنیک پاریس رفتم و با درسی به نام هندسه‌ی محاسباتی مواجه شدم. کاربرد هندسه‌ی اقلیدسی و نتایج آن برایم بسیار جالب بود. برای همین تصمیم گرفتم که برای کارآموزی به گروهی در جنوب فرانسه که به کار هندسه محاسباتی مشغول بودند ملحق شوم. بعد از گذراندن کارآموزی تصمیم گرفته بودم که دوره‌ی ارشد را هم در همان‌جا و در همین زمینه بگذرانم و تز ارشدم را هم در همین زمینه ارائه کردم. در حال حاضر زمینه‌ی کاری من اشتراکی از ابزارهای هندسی و ریاضی برای پردازش و شبیه‌سازی اجسامِ سه‌بعدی است. این تخصص، کاربردهای بسیاری دارد. که از جمله‌ی آن‌ها می توان به پردازش تصاویر پزشکی اشاره کرد. فاصله‌ی میان تصویرهای اولیه تا شبیه‌سازیِ نهاییِ مربوط به افزایش بعد رویه‌هاست که mesh optimization گفته می‌شود و کار تخصصی من است که دقیقا در مرز علوم ریاضی و علوم کامپیوتر قرار دارد.

از وضعیت این زمینه در ایران مطلع هستید؟ وضعیت آن نسبت به مقیاس جهانی چگونه است؟

متاسفانه من زمان این را پیدا نکرده‌ام که مطالعات کافی در مورد کارهایی که در ایران انجام شده داشته باشم. اما فکر می‌کنم که موضوعی که باعث می‌شود پروژه‌های مشابه در کشورهای دیگر پیشرفت داشته باشند، احساس نیاز صنعت و تکنولوژی به این علم‌هاست. به طور مثال، اکثر تقاضاهایی که از سمت کمپانی‌ها مطرح می‌شود، کمک شایانی به پیش‌برد تحقیقات علمی می‌کند. برای همین، یکی از مهم‌ترین عامل‌هایی که می‌تواند به پیش‌برد این علم در ایران کمک کند احساس نیاز تکنولوژیک و اجتماعی به این نوع تحقیقات است. حتی در بسیاری از موارد نیازهایی که وجود دارند، با هزینه‌های کمی و توسط این تخقیقات قابل رفع شدن هستند و می‌توانند ما را از منابع خارجی بی‌نیاز کنند. به خاطر همین قضایا، تعداد افرادی که در خارج از ایران، بر روی این موضوع مشغول به کار هستند، بسیار بیشتر است و باالطبع این حجم بیشتر، می‌توانند موضوعات بیشتر و متنوع تری را پوشش دهند.

به عنوان یک متخصص خارج از ایران، آیا تا به حال دانشکده‌ی ریاضی و علوم کامپیوتر شریف، در این زمینه‌ی تخصصی شما

نوآوری یا کار بزرگی داشته است؟

قطعاً بوده. من به شخصه، چند مقاله در این مورد از دانشجویان شریف دیده‌ام. به خصوص در دوران دکتری و پسادکتری، کارهای هندسه‌ی محاسباتی کلاسیک بسیار خوبی از ایران دیده‌ام.

شما برای تحصیلات به خارج از ایران سفر کردید. به نظر شما در حال حاضر می‌توان با همان کیفیتی که در خارج از ایران وجود دارد به تحصیل در این رشته و این زمینه‌ی خاص پرداخت؟ یا اینکه کسانی که به این زمینه علاقه‌مند هستند، مجبورند که برای ادامه به خارج از کشور مهاجرت کنند؟

این سوال زمانی که من برای تحصیل از فرانسه به آمریکا می‌رفتم هم، وجود داشت. که آیا باید به دانشگاه آمریکایی بروم یا نه؟ و پاسخ من به این سوال این بود: این یک تجربه کاملاً شخصی است و کاملاً بستگی به موسسه و شخصی دارد که شما برای کار کردن و ادامه‌ی تحصیل انتخاب کرده‌اید. حتی ممکن است دو نفر در یک موسسه و در یک شرایط یکسان نتیجه‌های متفاوتی بگیرند. برای همین نمی‌توان یک دستور کلی برای این سوال مطرح کرد. اما تجربه شخصی من بیانگر این است که از همه‌ی این جابه‌جایی‌ها و حرکت‌ها چیزی جز سود ندیده‌ام. البته قطعاً سختی‌هایی هم وجود دارد، ولی همین‌ها انسان را پخته‌تر می‌کند. در همان دانشکده‌ای که در آمریکا مشغول تحصیل بودم یکی از همکلاسی‌های فرانسوی من هم حضور داشت. در پایان من از نتایج و شرایطام بی‌نهایت راضی بودم و دوست من کاملاً ناراضی بود و چیزی را که می‌خواست پیدا نکرده بود .در نهایت توصیه‌ی من این است که اگر قصد مسافرت به خارج از کشور برای ادامه تحصیل دارید، مخصوصاً در دوره‌ی دکتری، که سوپروایزر نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند، با گزینه‌های موجود تماس برقرار کنید و با شناخت کافی، قدم به جلو بردارید.

آیا سمیناری مشابه با مرزهای علوم ریاضی در خارج از کشور می‌شناسید، که هدف برگزاری آن گرد هم آوردن افراد با زمینه‌های مشترک در یک زمان و مکان باشد؟

در ابتدا، به نظر من سمینار مرزها بسیار سمینار خوب و مفیدی است و بسیار کارهای مفیدی خواهد کرد. هم برای محققین و هم برای دانشجویان.

درمورد سمینارهای مشابه، من موردی با این فرم و هدف ندیده‌ام. اما در حالت کلی کنفرانس بزرگی به نام C-Graph، با هزاران شرکت کننده، هر ساله در آمریکا برگزار می‌شود که سمیناری تخصصی است. افراد مختلفی از زمینه‌های متفاوت، اما مرتبط به گرافیک کامپیوتری درکنار هم جمع می‌شوند. نکته جالب این است که در بطن این کنفرانس بزرگ، کنفرانس‌های کوچکی از ملیت‌های مختلف هم تشکیل می‌شود و به صورت خاص‌تر در این مورد صحبت می‌کنند. نکته‌ی مثبتی که وجود دارد این است که، در خارج این گردهم آمدن‌ها مستمرتر هستند و سیستم پایدارتری را تشکیل داده‌اند. که امیدواریم این استمرار در گردهمایی‌های ایرانی هم به وجود بیاید.

من فکر می‌کنم برگزاری این سمینار، بسیار ایده‌ی خوبی بود برای کسانی که در خارج از کشور هستند تا بتوانند کارهایی که در کشور انجام می‌شود را ببینند. همچنین برای دانشجوها هم از این لحاظ مفید است که از موضوعاتی که در خارج از ایران به روزتر هستند مطلع شوند.

در سمینار مرزهای علوم ریاضی، جای چه چیزهایی خالی است؟

من یک ریاضی‌کار محض نیستم. برای همین، شاید ترجیح می‌دادم که از افرادی که از ریاضیات در علوم دیگر استفاده می‌کنند هم بهره ببریم و فضا را کمی کاربردی‌تر کنیم. به نظر من این کار دید بسیار خوبی به دانشجویان می‌دهد و به انتخاب مسیر دقیق‌تر آنها کمک می‌کند.

اگر مایل باشید کمی تخصصی در مورد زمینه‌ی کاری شما و کاربرد ریاضی در آن صحبت کنیم.

کاربرد ریاضی بسیار بامزه است! به طور مثال، زمینه‌ی کار من در مورد بازسازی اجسام سه‌بعدی کامل از اجسام ناکامل بوده است. مثلاً زمانی که نمی‌توانید اطلاعات کاملی راجع به جسمی سه‌بعدی داشته باشیم، چگونه می‌توانیم آن را بازسازی کنیم؟ یک کاربرد جالب از ریاضی تبدیل داده‌ها و تصاویر ۲-بعدی سونوگرافی، به تصاویر سه‌بعدی جنین است! به صورتی که کاملاً می‌توان مسئله‌ی ریاضی را از آن جدا کرد و به آن فرم داد و آن را کاملاً ریاضی حل کرد. بدون این‌که نیاز داشته باشیم که بدانیم سونوگرافی چگونه کار می‌کند و داده‌ها چگونه تهیه می‌شوند. برای همین این امکان به سادگی وجود دارد که در ایران بر روی این مسائل کار کنیم. چون به امکانات پزشکی خاصی نیز نیاز ندارند و کاملاً قابل تبدیل به مسئله‌ای ریاضی هستند.

در ایران بین دانشکده‌های فنی و علوم ریاضی با دانشکده‌های پزشکی فواصل زیادی وجود دارد. چه از لحاظ فرهنگی و چه از لحاظ اداره شدن و ... . نحوه‌ی تعامل دانشکده ریاضی با دانشکده‌های پزشکی در فرانسه چگونه است؟

ما نباید فضای تحقیقاتی و دانشگاهی فرانسه را هم خیلی رویایی ببینیم. ممکن است که چند سالی در زمینه‌ی همکاری‌های این چنینی از ما جلوتر باشند، اما این میزان اصلاً زیاد نیست و هنوز هم ارتباط بین این رشته‌ها سخت است. اما خوشبختانه این تعاملات و رابطه‌ها در حال شکل گرفتن هستند. به طور مثال، من ایده‌ای داشتم در مورد کاربرد نحوه‌ی مثلث‌بندی رویه‌ها در پردازش تصویر پزشکی. برای همین تصمیم داشتم که مقداری داده جمع‌آوری کنم و این متدها را بر روی آن‌ها پیاده‌سازی کنم تا نتیجه‌ی کار را ببینم. برای همین با یکی از معروفترین مراکز پزشکی فرانسه که داده‌های مورد نیاز من را داشت تماس گرفتم. اما به نتیجه‌ای نرسیدم. بلاخره بعد از پیگیری‌های فراوان موفق شدم که داده‌های لازم را به دست بیاورم. برای همین، کار کردن در این زمینه سخت هست اما در فرانسه هم برای این قضیه تلاش‌های زیادی صورت می‌گیرد و فضا به صورت ۱۰۰ درصد آماده نیست. یکی دیگر از مشکلاتی هم که وجود دارد این است که متقاعد شدن پزشک‌ها برای استفاده از این متدهای ریاضی چند سالی زمان می‌برد. در ادامه هم، پس از قانع شدن پزشکان، دریافت مجوز برای استفاده‌ی عمومی از این متدها و ابزارها هم چند سال دیگر زمان می‌برد. و بالاخره باید این گام‌ها را برداشت تا به هدف رسید.

خاطره یا تجربه‌ای از یک نمونه‌ی کاری موفق به این شکل دارید؟

یکی از گروه‌هایی که با آن‌ها همکاری کردم، گروهی بودند که به بررسی مسائل پزشکی می‌پرداختند. وقتی که من با این گروه آشنا شدم با توجه به دید کاملاً خارجی که نسبت به موضوع داشتم، راه‌ها و مدل‌سازی‌های بسیار جالبی به ذهنم می‌رسید. به طور مثال یکی از موضوعات تحقیقی آن‌ها این بود که آیا رگ‌های خونیِ سر انگشت، مانند اثر انگشت یکتا هستند یا نه؟ که منجر به مسائلِ بسیار دشوار پزشکی شده بود. در صورتی که از دید من یک مسئله‌ی کاملاً توپولوژیک بود و کاملاً با مدل‌سازی‌های ریاضی قابل توصیف و بررسی بود. برای همین کار، من گارانتی‌های توپولوژیکی ارائه کردم تا به آن‌ها ثابت کنم که در مرز مشترک این علوم در حال فعالیت هستم. به طور مثال قصد داشتم اثبات کنم بین شیئی که من می‌سازم با شیء واقعیِ در حال بررسی، همیومورفیسم برقرار است. من به سبک خودم تک‌تک این قضایا را به صورت ریاضی مدل‌سازی و اثبات کردم که چیزی در حدود دو صفحه شد. بعد از پایان کار تصمیم داشتیم که آن را چاپ کنیم و بسیار هم از نتیجه کار راضی بودیم. قبل از انتشار من این مطلب را به دکتر امینی نشان دادم تا مطالعه‌ای بر روی آن داشته باشند و نظرات‌شان را بگویند. که دکتر امینی تمام این دوصفحه اثبات را در یک نمودار خلاصه کردند. استاد من، بیتر، کارهای کامپیوتری انجام می‌دادند و دکتر امینی ریاضی‌کار بودند. و در این بین من همه چیز را فرمالایز کردم و سعی کردم که به نحوی آن را به یک مسئله‌ی ریاضی تبدیل کنم که کاملاً برای یک ریاضی‌دان قابل بررسی و خواندن بود. برای همین ما هم به کسانی که کاربردی کار می‌کنند نیاز داریم، و هم به کسانی که محض کار می‌کنند. و خب در این میان به افرادی مانند من که در مرز این علوم مشغول هستند هم برای ترجمه نیاز داریم.

شما در کارهای تحقیقاتی‌تان از متدهای توپولوژیکی به وفور استفاده کرده‌اید. در این مورد توضیح بیشتری بدهید.

در خیلی از مسائل کاربردی، مانند مسائل پردازش تصویر پزشکی که دقت و گارانتی‌های موجود برای بررسی و تشخیص بیماری‌ها

بسیار مهم هستند، الگوریتم‌های زیادی وجود دارند که به صورت کلاسیک استفاده می‌شوند و یا حتی در شرایط جدید هم الگوریتم‌های زیادی تولید می‌شوند که قابل استفاده‌اند. اما در واقع بیشتر کسانی که بر روی این موضوعات مشغول به کار هستند از جامعه بیولوژیست‌ها و علوم کامپیوتر هستند و غالبا آن‌ها به نوع مسائل مطرح شده و یا گارانتی‌ای ریاضی که می‌توان برای این مسائل داد توجهی نمی‌کنند. یکی از مسائل کلاسیکی که وجود دارد مسائل بازسازی است. در جامعه‌ی هندسه‌ی محاسباتی یا توپولوژی محاسباتی الگوریتم‌هایی وجود دارند، اما صرفاً برای بعضی از حالت‌های خاص بررسی شده‌اند و هنوز مسائل جالب بسیاری وجود دارند که از لحاظ ریاضی مورد مطالعه قرار نگرفته‌اند و گارانتی برای آن‌ها وجود ندارد. یکی از عامل‌های مهمی که می‌تواند به ما اجازه و توانایی استفاده از این متدها را در عمل بدهد، همین گارانتی‌های ریاضی است. یکی از کارهای بارزی که ما انجام دادیم بررسی ریاضیِ این متدها در ماربرهایی مانند سونوگرافی بود. ما بررسی کردیم که با چه شرایط اولیه‌ای می‌توان گارانتی‌هایی برای نتایج نهایی قائل شد. افرادی که ریاضی و توپولوژی می‌دانند در این زمینه کارهای بسیار زیادی می‌توانند انجام دهند. حتی بسیاری از الگوریتم‌هایی که درحال حاضر هم وجود دارند با مطالعات ریاضی قابلیت تصحیح و بهینه شدن را هم دارند. توپولوژی از ابزارهای بسیار کاربردی در این امر است. چون به ما اجازه مقایسه‌ی اشیائی که مایلیم آن‌ها را شبیه‌سازی کنیم و نتایج الگوریتم‌های موجود را می‌دهد.

برای دانشجویانی که به توپولوژی محاسباتی علاقه‌مند هستند می‌توانید مرجع مناسبی را معرفی کنید؟

رفرنس خاصی برای این موضوع وجود ندارد. چون یک مبحث در حال توسعه است. اما اگر بخواهیم هدف آن را بررسی کنیم، همه‌ی مسائل عددی و توپولوژیک، مسائل مدل‌سازی هستند. به این معنا که چطور می‌توانیم این ابزارهایی را که داریم گسسته کنیم، طوری که خصوصیات خوبی که از قبل داریم تا حد امکان حفظ شوند و در عین حال دقت خوبی هم برای محاسبات به ما بدهد. در مرحله‌ی بعدی، باید از این ابزاری که ساختیم یک سری خصوصیات را نتیجه‌گیری کنیم.

این عملیات گسسته‌سازی چه میزانی از اطلاعات را از بین می‌برد و در حالت کلی این گذر از حالت پیوسته به گسسته و بالعکس چقدر به ما کمک می‌کند؟

این قضیه کاملاً به مثال مورد بررسی بستگی دارد. به طور مثال ما بر روی مسئله‌ی گسسته‌سازی معادلات انیشتین کار می‌کردیم. زمانی که می‌خواهیم گسسته‌سازی را روی یک مثلث‌بندی انجام دهیم باید سعی کنیم روی اعضا انحناها و منحنی ریچی را تعریف کنیم و اینجاست که تازه به یک مسئله‌ی مدل‌سازی می‌رسیم. پس از پایان این کار، باید بررسی کنیم که چه میزانی از ویژگی‌های قبلی هم‌چنان برقرار هستند. این خطای گسسته‌سازی مانند خطاهای محاسبات عددی قابل بررسی نیست. چون که خود این خطاها بعد دیگری می‌گیرند. در واقع هزینه‌ای که گسسته‌سازی برای ما دارد برابر است با میزان ویژگی‌هایی که از دست می‌دهیم و دیگر برقرار نیستند. برای همین ما مدل‌سازی‌های مختلف را با بررسی میزان هزینه و خطای آن مقایسه می‌کنیم.

تبدیل اجسام گسسته به پیوسته چه کاربردهایی دارد؟

ما در پردازش تصویر، علاوه بر متغیرهای گسسته، متغیرهای بسیار گسسته هم داریم. به طور مثال اگر یک عکس با رزولوشن بالا داشته باشیم آن را به عنوان حالت پیوسته در نظر می‌گیریم. اما اگر یک نمونه با اندازه کوچکتری از این عکس را داشته باشیم، آن را به عنوان حالت گسسته در نظر می‌گیریم. که برای به دست آوردن تصویر بزرگتر ما به این متدها نیاز داریم.

کاری که شما انجام می‌دهید کاری بین رشته‌ای است و نیار به امکاناتی مانند آزمایشگاه و ... دارد. این نیاز را چگونه می‌توان برطرف کرد؟

واقعاً در فرانسه هم، ما چیز بیشتری از امکاناتی که در ایران هست نداریم. به طور مثال در مورد همین سونوگرافی سه‌بعدی، ما دستگاه سونوگرافی در محل دفترمان نداریم و خودمان هم باید تلاش کنیم تا بتوانیم از یک مرکز درمانی تعدادی داده بگیریم. پس از این بابت خیال‌تان راحت باشد! در واقع کل این زنجیره بر عهده‌ی ما نیست. قسمت‌های الگوریتم و کد نوشتن و ریاضیات را هم که می‌توان در یک آزمایشگاه معمولی ریاضی و علوم کامپیوتر انجام داد.

با تشکر از دکتر معماری، بابت وقتی که در اختیار ما قرار دادند.

مصاحبه با دکتر فریدون رضاخانلو

دکتر فریدون رضاخانلو، استاد دانشگاه برکلی هستند و امسال و سال گذشته در همایش مرزهای علوم ریاضی حضور داشتند. مصاحبه‌ای از ایشان که در ادامه می‌آید، اندکی پس از دومین همایش مرزهای علوم ریاضی توسط عرفان صلواتی انجام شده است.

لطفاً در مورد تحصیلاتتان برای ما توضیح دهید.

من در سال ۱۳۵۷ وارد دانشگاه تهران شدم. البته در آن زمان دانشگاه شریف دانشجو نمی‌گرفت. بعد از ۲ سال تحصیل در دانشگاه تهران به انقلاب فرهنگی برخوردیم و دانشگاه‌ها به مدت ۳ سال تعطیل شدند. بعد از این‌که دانشگاه‌ها مجدداً بازگشایی شدند به مدت یک سال دیگر در دانشگاه تهران بودم و بعد از آن به دانشگاه شریف آمدم و تا سال ۶۳ در شریف بودم اما هیچ وقت به صورت رسمی لیسانس را تمام نکردم. سال ۶۳ به دانشگاه ویرجینیا رفتم و به مدت ۲ سال در آنجا مشغول تحصیل فوق شدم و نهایتاً در سال ۱۹۸۲ مدرک دکتری را از آنجا دریافت کردم. بعد از آن هم به مدت یک‌سال در دانشگاه نیویورک و یک‌سال در دانشگاه پرینستون مشغول پسادکتری شدم و در نهایت به عنوان هیأت علمی در دانشگاه برکلی مشغول به کار شدم.

درمورد زمینه‌ی کاری‌تان در ریاضیات توضیح دهید.

زمینه‌ی کاری من احتمالات است. و به طور خاص در حوزه‌ی مکانیک آماری فعال هستم و بیشتر هم مکانیک آماری غیرتعادل. زمانی که من دانشجو بودم مکانیک آماری غیرتعادلی جا نیفتاده بود و منابع زیادی برای مطالعه وجود نداشت. در آن زمان تعداد محدودی مدل وجود داشت که حدس‌های خوبی هم برای آنها فرموله شده بود که شانس این را ایجاد کرد که بتوانیم بعضی از این مسائل را به صورت ریاضی اثبات کنیم. اما بعد از فارغ‌التحصیلی به سمت معادلات دیفرانسیل و سیستم‌های دینامیکی و حتی در سال‌های اخیر به سمت هندسه رفتم. اما هنوز هدف اصلی تحصیلی من همان مکانیک آماری است. ما برای همه‌ی پدیده‌ها دو نوع توصیف میکروسکوپیک و ماکروسکوپیک داریم. توصیف میکرسکوپیک معمولاً یک سیستم دینامیکی یا یک سیستم کاملاً تصادفی است. اما توصیف ماکروسکوپیک معمولاً یک معادله‌ی دیفرانسیل است و من همواره بین اینها کار کرده‌ام.

چرا این شاخه را انتخاب کردید؟

قسمتی از این تصادفی است و کاملاً به این بستگی دارد که شما چه درسهای را پاس کرده‌اید یا چه سخنرانی هایی را گوش کرده‌اید یا چه منابعی را مطالعه کرده‌اید و یا این‌که با چه مسائلی مواجه شده‌اید. قسمت غیر تصادفی هم سلیقه است. شما ممکن است با موضوعات متفاوتی آشنا شوید اما فقط به سمت یکی از آنها بروید. من زمانی که به دانشگاه نیویورک رفتم با این مبحث آشنا شدم و به آن علاقمند شدم.

موضوع تز دکتری شما چه بود؟

دکتری من مدلی در مکانیک آماری برای نقل و انتقال شارژهای مغناطیسی بود. در این مدل بر روی یک شبکه شما به هر عضو عددی نسبت می‌دادید که این عدد شارژ مغناطیسی آن نقطه را توصیف می‌کرد. این نقطه‌ها به صورت تصادفی نقل و انتقال شارژ را بین خود انجام می‌دادند و توصیفی که برای دینامیک این ذرات می‌شد توصیفی تصادفی بود و علاوه بر این میزان مجموع این شارژها عددی ثابت درنظر گرفته شده بود. این قانون بقا کمک می‌کرد که توصیفی ماکروسکوپیک از چگالی شاخه ارائه بدهید که میزان این چگالی به مکان شاخه و زمان بستگی داشت و این مدل به صورت ماکروسکوپیک به یک معادله‌ی دیفرانسیل بسیار پارامتریک و غیرخطی تبدیل می‌شد.

نظر شما در مورد همایش مرزهای علوم ریاضی چیست؟

همایش بسیار مفید بود و سخنرانی‌های بسیار خوبی ارائه شد و من به شخصه چیزهای زیادی یاد گرفتم.

برای ایجاد ارتباط بین ریاضی دانان داخل و خارج کشور، آیا این اقدام را موثر می‌بینید؟

به نظر من بهترین اقدامی که در این مورد می‌توان انجام داد همین است. من به شخصه با همین رفتن به کنفرانس‌ها است که در جریان اتفاقات جدید قرار می‌گیرم. در واقع خواندن یک مقاله‌ی خوب کار ساده‌ای نیست. اما اگر این مقاله در یک کنفرانس توسط یک شخص که در این امر تجربه دارد ارائه شود به سادگی می‌توانید با این مقاله ارتباط برقرار کنید و این بهترین راه برای تحقیق در ریاضی است و برای همین است که این نوع کنفرانس‌ها جنبه حیاتی برای ریاضیات دارند.

شما محیط علمی دانشگاه‌های معتبر زیادی را دیده‌اید. با این حساب وضعیت دانشکده‌ی ریاضی شریف نسبت به مقیاس جهانی چگونه است؟

ایران محدودیت‌های خاص خودش را دارد. تعداد افراد که تحقیق می‌کنند محدود تر است.شرایط مختلفی باعث مهاجرت افراد نخبه می‌شود و این‌که تا امروز تحقیق به صورت مناسبی هنوز در ایران جا نیفتاده است. حدود ۲۰ سال است که دوره‌ی دکتری در ایران راه افتاده است اما هنوز هم زمان می‌برد تا اتفاقاتی که در جهان افتاده است به ایران برسد و این باعث می‌شود که برخی از مباحث به کلی در ایران ارائه نشوند. با بررسی تاریخش هم می‌توانید ببینید که بین ایران و آمریکا یا اروپا فرق فاحشی در زمینه تحقیقات وجود دارد و به نظر من پر کردن این خلا به جز با برگزاری این کنفرانس‌ها و مراودات علمی ممکن نیست.

در مورد اساتیدی که در این سال‌ها در ایران و خارج از کشور داشتید برای ما بگویید.

دکتر شهشهانی در بین اساتیدی که من در ایران داشتم بیشترین کمک را به من کردند تا با موضوعات جدید بسیاری آشنا شوم و به نظر من دانشگاه صنعتی شریف یکی از بهترین برنامه‌های دوره‌ی کارشناسی را در جهان دارد و تنها در مورد زمینه‌های تحقیقی و یا دوره‌ی دکترا از دانشگاه‌های مطرح جهان عقب مانده است. اما روندی که در این دانشگاه طی می‌شود روند مثبتی است که امیدوارم ادامه نیز داشته باشد.

هدف شما از ارائه‌ی درس‌های کوتاه در ایران چیست؟

هدف من بیشتر این است که کسانی که علاقمند هستند را با موضوعات به روز جهانی آشنا کنم. قسمتی از مباحث انتخابی سلیقه‌ای است اما قطعاً همه‌ی آنها از مباحثی هستند که امروز در دنیای ریاضیات مطرح هستند اما در ایران به آنها پرداخته نشده است. برای همین من از این فرصت در جهت مثبت استفاده می‌کنم و درس‌های کوتاه را ارائه می‌دهم.

یکی از ویژگی‌هایی که در تحقیقات شما مشاهده می‌شود استفاده از شاخه‌های متنوع ریاضی است. به نظر شما جامع بودن علم یک ریاضی‌دان چقدر مهم است؟

شما وقتی که مکانیک آماری را انتخاب می‌کنید با مسائل مختلفی روبرو می‌شوید که هدف شما محدود به این مسائل می‌شود. برای حل هرکدام از این مسائل شما نیاز به یک وسیله دارید. فرض کنید شما در یک کنفرانس با موضوعی مواجه می‌شوید که حس می‌کنید در مبحث مورد نظر شما به عنوان ابزار به کار می‌آید. برای همین احتمالاً شما وقتی می‌گذارید تا این موضوع را یاد بگیرید و این کاری است که من انجام داده ام.

آیا توصیه‌ی خاصی برای یک دانشجوی لیسانس ریاضی دارید؟

مهمترین چیز شجاعت است. اگر دیدید که مبحثی است که به کار شما می‌آید از یاد گرفتن آن نترسید و به این فکر نکنید که مبحث سخت است و من توانایی یادگیری آن را ندارم و .... دقت داشته باشید که وقتی وارد یک مبحث می‌شوید به خودی خود شرایط یادگیری آن مبحث برای شما ساده‌تر می‌شود. صرفاً این مهم است که قدم‌به‌قدم

وارد این مبحث شوید تا بتوانید در نهایت به قله‌ی آن برسید.

تدریس را بیشتر دوست دارید یا پژوهش را؟

یکی از بهترین راه‌هایی که شما می‌توانید یک مبحث را یاد بگیرید و از آن در پژوهش‌هایتان استفاده کنید تدریس است .خود من به شخصه تمام مباحثی را که استفاده می‌کنم حداقل یک‌بار تدریس کرده‌ام. در نتیجه نمی‌توان این دو را از هم جدا کرد.

به نظر شما ریاضیات چیست؟!

در دنیا ما با پدیده‌های اطرافمان در ارتباطیم و می‌خواهیم این پدیده‌ها را درک کنیم. برای درک کردن این پدیده‌ها ما همواره به مدل‌سازی روی آورده ایم. برای این مدل‌سازی‌ها باید از اعداد و متغیرها استفاده کرد. شما هر زمانی که بخواهید چنین مدلی بسازید به چیزی به نام ریاضیات نیاز دارید. پس ریاضی علم درک پدیده‌های اطراف انسان است. کار فیزیک‌دانان و شیمی‌دانان فرموله کردن این پدیده‌ها است. اما ریاضی‌دانان به توصیف و تعریف این مدل‌ها می‌پردازند.

معیار شما در انتخاب موضوعاتی که بر روی آنها کار می‌کنید چیست؟

این معیار زیبایی یک مبحث نیست. چون مباحث زیبای زیادی وجود دارند که به کار نمی‌آیند. به نظر من هدف حل کردن یک مساله‌ی خاص هم نیست.و به نظر من مهم‌ترین چیز این که شما چگونه به حل این مساله می‌رسید و درک کردن آن مساله است.

زمینه‌ی تحقیقاتی شما اشتراکات زیادی با مباحث دیگر مانند فیزیک دارد. به نظر شما ارتباط ریاضی و فیزیک چگونه است؟

در قرن ۲۰ اُم تحولات زیادی مانند نظریه‌ی کوانتوم و نسبیت در فیزیک داشتیم. این تغییر و تحول فیزیک باعث شد تا مسائل مهم بسیاری در ریاضی مطرح شود. به همین خاطر خیلی از مسائلی که در ریاضی مطرح است از فیزیک برآمده است. به طور مثال برای تمام معادلات دیفرانسیل یک زمینه‌ی فیزیکی هم وجود دارد. به همین خاطر هست که خیلی از مدل‌هایی که من روی آن کار کرده‌ام مناسبت مستقیمی با فیزیک دارند. اما این دلیل نمی‌شود که همه‌ی مدل‌های مهم به فیزیک منتهی شوند. به خصوص در قرن ۲۱اُم مسائل بسیاری در بیولوژی مطرح شده است که از روش‌های ریاضی و آماری بهره می‌برند.

با تشکر از دکتر رضاخانلو، بابت وقتی که در اختیار ما قرار دادند.

مصاحبه با دکتر سید امین اصفهانی

دکتر سید امین اصفهانی، تحصیلات دوره‌ی کارشناسی خود را در دانشگاه دامغان و تحصیلات دوره‌ی کارشناسی ارشد خود را در دانشگاه شریف به پایان رساندند. ایشان سپس برای مقطع دکترا به موسسه‌ی IMPA[1] در برزیل رفتند و دکترای خود را در زمینه‌ی دینامیک سیالات و معادلات دیفرانسیل از آنجا اخذ نمودند
مصاحبه‌ای که در ادامه می‌آید، در زمان برگزاری دومین همایش مرزهای علوم ریاضی توسط روزبه فرهودی و سینا حسن‌زاده انجام شده است.

در مورد زمینه‌ی کاری‌تان توضیح بدید و این که چرا این رشته و این گرایش رو انتخاب کردید؟

انتخاب ریاضی برای من خیلی هدفمندانه نبود و در واقع هدف اصلی من تحصیل در علوم پایه بوده است. برای انتخاب رشته هم همواره بین ریاضی و فیزیک مردد بودم. شاید به این خاطر که در دوران دبیرستان(حداقل در آن زمان) اطلاعات کافی راجع به رشته‌های مختلف وجود نداشت. من از بین این دو رشته ریاضی را انتخاب کردم. شاید برای اینکه بتوانم هر دوی آنها را با هم داشته باشم که در واقع هم این اتفاق افتاد و شاخه‌ی تخصصی من به هر دو رشته‌ی ریاضی و فیزیک مربوط است و هر دوی آن ها را دارم.

نکته‌ی جالبی که در رزومه‌ی شما وجود دارد، تنوعی است که در محل تحصیل شما بوده است. در این مورد برای ما بگویید.

[1] Instituto Nacional de Matematica Pura e Aplicada

در دوره‌ی لیسانس خانواده اصرار زیادی داشتند که من در نزدیکی محل زندگیمان مشغول به تحصیل شوم. برای همین من سعی کردم که در دوره‌ی لیسانس در جایی با فاصله کمتر از ۵کیلومتر از منزل(دانشگاه دامغان) ادامه‌ی تحصیل بدهم. اما برای دوره‌ی فوق‌لیسانس دانشگاه دامغان جای کوچکی بود و با تقریب خوبی هم دوره‌ی فوق‌لیسانس نداشت. از سمتی هم به نظر من آدم با هجرت کردن چیزهای جدید زیادی یاد می‌گیرد. علاوه بر این به نظر من اگر این هجرت بعد از دوره‌ی لیسانس اتفاق بیفتد نتیجه‌ی بهتری خواهد داشت. چون به هر حال یک دختر یا پسر ۱۸ ساله خامی‌های زیادی دارد، اما بعد از گذشتن دوره‌ی لیسانس، محیط دانشگاه باعث پخته‌تر شدن انسان می‌شود و آمادگی هجرت را در او ایجاد می‌کند. برای دوره‌ی فوق باید به جایی می‌رفتم که شاخه‌ی مورد نظر من در آن وجود می‌داشت. برای همین دانشگاه صنعتی شریف را برای دوره‌ی ارشد انتخاب کردم. یکی از خوبی‌های دانشگاه این بود که به ما اجازه می‌داد چیزی که دوست داریم را بخوانیم. من همواره با شناخت کافی به سراغ موقعیت‌های جدید می روم. برای همین در دانشگاه درس‌های مختلفی را از زمینه‌های مختلف مانند جبر و ترکیبیات و معادلات و ... گذراندم و از بین آنها معادلات دیفرانسیل پاره‌ای را برای ادامه‌ی تحصیل انتخاب کردم. در سال آخر فوق لیسانس معمولاً این جو ایجاد می‌شود که برای دوره‌ی دکترا قرار است چه کنیم؟! من به شخصه با توجه به رشته‌ی تخصصی خودم چند کشور را برای ادامه‌ی تحصیل مدنظر داشتم. برای مثال یک موسسه در آلمان و کانادا و آمریکا. یک مورد دیگر هم پیشنهادی از یکی از دوستان برای موسسه‌ی IMPA بود. این موسسه در حوزه‌ی سیستم‌های دینامیکی بسیار فعال بود. اما من با بررسی‌های بیشتری متوجه شدم که این موسسه گروه‌های فعال زیادی هم در زمینه‌های مختلف مانند آمار و مکانیک و نفت و ریاضی دارد. برای من بسیار مهم بود که بدانم در چه جایی قرار است درس بخوانم و زندگی کنم. با پرس‌وجو از دوستان متوجه شدم که این موسسه محیط بسیار خوب و آرامی دارد که شرایط ایده آلی برای ادامه‌ی تحصیل محسوب می‌شد. همه‌ی این‌ها دست به دست هم دادند و من برای مقطع دکتری ایران را به مقصد موسسه IMPA ترک کردم. بعد از این که وارد IMPA شدم، کمی از زمینه‌ی تخصصی خودم در مقطع ارشد فاصله گرفتم. این برای من تغییر بزرگی بود. چون برای من بسیار مهم بود که در زمینه‌ای که در ارشد تحصیل کرده بودم ادامه تحقیقاتم را داشته باشم. برای همین حتی به این فکر کردم که به سمت زمینه‌هایی مانند دینامیک سیالات و ... بروم. که با علایق من سازگارتر بود. به خصوص اینکه در IMPA اساتید با تغییر رشته و گرایش بسیار منطقی و ساده برخورد می‌کردند

و دست من باز بود که هر رشته‌ای را برای ادامه‌ی تحصیل انتخاب کنم. اما خوشبختانه این اتفاق نیفتاد! چون بعد از گذراندن چند درس متوجه شدم که این مبحث اصلاً از علایق من دور نیست و دیدم که این زمینه رابطه‌ی مستقیمی با دینامیک سیالات دارد و از طرفی هم ترکیبی کامل از هر دو رشته ریاضی و فیزیک است.

موضوع تحقیق شما دقیقاً چه بوده و بر روی چه چیزی کار کرده‌اید؟

در IMPA گروه دینامیک سیالات بسیار فعال بود و اشخاص بزرگی درآن جا مشغول به کار بودند. موضوع تحقیقی من هم رابطه تنگاتنگی با موج های آبی داشت و متوجه شدم که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که در IMPA کار می‌شود کاملاً برآمده از همین دینامیک سیالات است. مساله‌ای هم که برای تز دکترا به من داده شد مربوط به همین زمینه بود. در واقع شاید کاری که من در ادامه روی این مساله انجام دادم یک کار محض ریاضی بود، اما به هر حال این مساله، مساله‌ای کاملاً فیزیکی بود. به عبارت دیگر وقتی به شما یک معادله دیفرانسیل را برای حل کردن می دهند شما می‌توانید با تکنیک‌های آنالیزی آن را حل کنید، اما اگر بدانید که این معادله در دنیای واقعی چه چیزی را مدل می‌کند و چه رفتاری دارد، راحت‌تر می‌توانید انتظارات و نتایج خود را لمس کنید. حتی می‌توانید بفهمید که نتیجه‌ای که گرفته‌اید اصلاً منطقی هست یا نه! برای همین داشتن شهود در زمینه‌ی PDE بسیار مهم و موثر است.جالب است که بدانید در IMPA برای کسانی که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای عددی می‌خوانند درس‌های محض‌تری وجود دارد. برای همین است که به نظر من واقعاً نمی‌توان مرزی بین علوم محض و کاربردی قائل شد.

خیلی از افراد ریاضی را به صورت یک ابزار می بینند، در صورتی که در عین حال افراد زیادی هم اعتقاد دارند که ریاضی یک اصل است که در کنار خود کاربردهایی هم دارد. چقدر با هر کدام از این دیدها موافق هستید؟

سوال بسیار سختی است! من افراد زیادی را در خارج دیدم که با اینکه مشغول به کار محض بودند اصلاً به این اعتقادی نداشتند که ریاضی یک علم صرفاً محض است! به‌خصوص اینکه ریاضی محض زیر شاخه‌های بسیار کاربردی و تخصصی دارد. در واقع محض‌ترین زمینه‌های ریاضی هم حداقل در خود ریاضی کاربرد دارند! موارد زیادی بوده که ریاضی‌دانان یک مساله فیزیک محض را گسترش و توسعه دادند و این مساله خودش به یک شاخه و زمینه تبدیل شده است. اگر دقت کرده باشید در شاخه‌های کاملاً محض ریاضی مانند هندسه‌ی جبری یا سیستم‌های دینامیکی هم زیر شاخه‌های کاربردی مثل هندسه جبری محاسباتی یا سیستم‌های دینامیکی محاسباتی وجود دارند.

شما دوران تحصیلتان را در سه دانشگاه مختلف در شهرها و کشورهای مختلف گذرانده‌اید. در مورد ویژگی‌ها و خصوصیات هر کدام برای ما بگویید و دانشگاه‌های ایران را با دانشگاه‌های خارج از ایران مقایسه کنید.

یک ویژگی که به نظر من در یک دانشگاه خوب باید وجود داشته باشد، این است که دانشگاه در هر زمینه‌ی تحقیقاتی چند محقق و چند گروه داشته باشد. اما متاسفانه در ایران اینگونه نیست. به طور مثال من در دانشگاه دامغان در زمینه تخصصی خودم تنها هستم و تنها راه ارتباطی من با بقیه محققان در این زمینه مسافرت کردن است. چون به این معتقد هستم که ارتباط آنلاین نمی تواند جای صحبت‌های رودررو را بگیرد. به طور مثال فکر می کنید که چرا IMPA با این‌همه گروه‌های تحقیقاتی بزرگی که در زمینه‌های مختلف دارد؛ در زمینه سیستم‌های دینامیکی شهره است؟ چون در این زمینه مجموعه‌ای از محققان مشغول فعالیت هستند که این به پیشرفت این زمینه کمک شایانی می‌کند. در سایر دانشگاه‌های خارجی هم کمتر پیش می آید که شخصی به تنهایی مشغول کار کردن در یک زمینه باشد. مگر اینکه در جایی باشد که دسترسی به محققان مربوطه به سادگی امکان‌پذیر باشد. در ایران اینطور نیست و دانشگاه در پی آن است که در زمینه‌های مختلف آدم های مختلفی را گردآوری کند. به طور مثال دانشگاه حس می‌کند که اگر کسی را در زمینه‌ی هندسه جذب کرده است دیگر نیاز در این زمینه کاملاً برطرف شده است. چیزی که همواره در همه جا بر آن تاکید می‌شود گروهی کار کردن و گروهی فکر کردن است. چون قطعاً مغز سه نفر بهتر از یک نفر کار می‌کند تجربیات هر کس

با دیگری متفاوت است. در نتیجه حس می کنم که جای خالی این کارهای گروهی در دانشگاه‌های ایران به شدت حس می‌شود.

علاوه بر همه این‌ها به نظر شما جو علمی داخل کشور با جو دانشگاه‌های خارجی چه تفاوتی دارد؟ به طور مثال یک مشکل بزرگی که در ایران وجود دارد این است که حتی مساله‌هایی که روی آنها کار می‌شود مساله‌هایی خارجی یا به اصطلاح وارداتی(!) است و به همین خاطر جو علمی خوبی در ایران شکل نمی‌گیرد! نظر شما چیست؟

ببینید وقتی شما در زمینه‌ای تحقیقات و کارهای زیادی انجام می‌دهید، نتایج و یافته های بسیاری پیدا می کنید که دیگران هم ازآنها استفاده می‌کنند. در واقع با همین استفاده کردن آنها مجبور به ادامه مسیر شما می‌شوند. فرض کنید که فردی در دانشگاه صنعتی شریف مشغول تحصیل در مقطع دکتری است. به نظر من این خیلی مهم است که این فرد به محیطی برود که علم در زمینه‌ی مورد نظرش به روز و در حال پیشرفت باشد. پس این فرد برای ادامه‌ی تحقیقات ممکن است به دانشگاهی خارجی برود. اما تا زمانی که این شخص تجربیاتی را که بدست آورده به داخل ایران منتقل نکند این علم در داخل ایران همچنان در رکود می ماند. مشکل اینجاست که ما افراد مستعد و خوبی داریم که به دلایل مختلف ترجیح می‌دهند که در ایران نباشند. اخیراً کارهای زیادی به طور مثال از سمت بنیاد نخبگان انجام شده که به بازگشت علم به ایران کمک کند. اما با این حال درصد بسیار کمی از این کار انجام می‌شود و همه‌ی آن محدود می‌شود به کنفرانس‌ها و همایش‌هایی مانند مرزهای علوم ریاضی که عده ای از افراد را برای سخنرانی و گردهمایی‌های کوتاه دعوت می‌کنند. نکته‌ی مهم این است که انتقال علم و تجربیات به دانشجو با یک همایش اتفاق نمی‌افتد. با این وجود ایده‌هایی مانند اینکه از اساتید مختلف دعوت شود تا یک درس کوتاه ارائه دهند یا حتی یک ترم در ایران مشغول به تدریس شوند بسیار کمک‌کننده است. ولی باز هم این کمک محدود است و دانشجو ترجیح می‌دهد که برای ادامه‌ی تحصیل به خارج سفر کند. به هر حال این حق هر کسی است که در هر زمینه‌ای که کار می‌کند بهترین مساله و به‌روزترین مساله را داشته باشد. به هر حال ما راه درازی داریم تا به کشورهایی که علم در آنجا به روز است برسیم. به نظر من هم ابتدایی‌ترین کار این است که در هر زمینه‌ای یک تیم از افراد متخصص و ماهر جمع شوند تا برای پیشبرد علم در آن زمینه کار کنند! در واقع این گردهمایی‌ها است که به پیشرفت کمک می‌کند. به طور مثال تعداد کنفرانس‌هایی که سالانه در IMPA برگزار می‌شود از تعداد تمام کنفرانس‌هایی که در ایران برگزار می‌شود بیشتر است و این واقعاً کمک‌کننده است. ابزار ریاضیات مباحثه و حرف زدن است. اگر سالی ۳ کنفرانس مشابه با مرزهای علوم ریاضی برگزار شود، این ملاقات‌ها باعث ایجاد تیم‌های خوبی در زمینه‌های مختلف ریاضی می‌شود و این تیم‌های تحقیقاتی می‌توانند دانشگاه‌ها را به سمت این موضوعات بکشانند. ما دانشگاه‌های زیادی داریم که به خاطر اینکه گروهی فعال در یک زمینه تحقیقاتی دارند معروف شده‌اند. به نظرم این راهکار خوبی است که خودمان را با دانشگاه‌های خوب دنیا هم‌تراز کنیم.

با همه این توصیفات چه چیزی باعث شد که شما بعد از تحصیل در دانشگاه شریف و IMPA، به ایران و به صورت خاص دانشگاه دامغان برگشتید؟

سوال سختی است. چون آدم‌ها کامپیوتر نیستند و مشکلات شخصی هم دارند. من به خاطر دلایل شخصی به ایران برگشتم و البته به این اعتقاد داشتم که انسان در هر جایی که بوده باید چیزی هم آنجا به بار بیاورد. من دیدم که می‌شود از جای کوچکی به جای بزرگتری رسید. دوره‌ی لیسانس با دکتری فرق زیادی دارد و در دوره‌ی لیسانس شما صرفاً دانشجو هستید و دانشجوپروری برای شما معنی ندارد. اما از یک بازه‌ای به بعد شما وظیفه دیگری هم دارید. یعنی علاوه بر کار و تحقیق باید دانشجو را هم در مسیر درستی بپرورانید. من در ایران گزینه‌های متفاوتی داشتم اما متاسفانه جایی را پیدا نکردم که در حال کار بر روی زمینه‌ی تخصصی من باشند و از سمتی هم ترجیح می‌دادم که در جایی باشم که برای تحقیقاتم آرامش داشته باشم تا اینکه درگیر تنش باشم. فرض کنید حداکثر زمانی که طول می کشد تا من از دانشگاه به منزل بروم ۴۰ دقیقه است. در صورتی که اگر بخواهم از این دانشگاه به خانه بروم بعضی موقع‌ها بیشتر از ۲ ساعت طول خواهد کشید و قطعاً در این رفت‌وآمدها و مسیرهای طولانی آرامش از دست خواهد رفت. شاید در شهرهای کوچک امکانات کمتری موجود باشد، ولی در عوض با تنش‌های سیاسی اجتماعی و فکری کمتری روبرو هستید که این فضای مناسبی را برای یک محقق ایجاد می‌کند. علاوه بر این‌ها من در دانشگاه دامغان علاوه بر آرامش فکری، نزدیکی به خانواده‌ام را هم داشتم که قطعاً آرامش فکری مضاعفی را به من می‌دهد.

در زمانی که تصمیم گرفتید برای ادامه‌ی تحصیل ایران را ترک کنید آیا می‌شد که با همان کیفیت تحصیلاتتان را در ایران دنبال کنید؟ اگر نه، چه مزیت خاصی با اپلای کردن برای شما ایجاد

می‌شد؟

همین‌طور که الان اختلاف سطح علمی زیادی با کشورهای خارجی داریم، در گذشته هم همینطور بوده است. من اعتقاد دارم که اگر قرار باشد کسی بعد از ادامه‌ی تحصیل به ایران برگردد باید بهترین چیز را در دستش داشته باشد و همین باعث شد که تحصیلم را در جای به‌روزی به پایان برسانم تا در هنگام برگشت به ایران بتوانم دانسته‌های مفیدی را با کسانی که در ایران هستند به اشتراک بگذارم.

با تشکر از دکتر اصفهانی، بابت وقتی که در اختیار ما قرار دادند.

مصاحبه با دکتر عباس مؤمنی

دکتر عباس مومنی از فارغ‌التحصیلان دانشگاه شریف هستند. ایشان پس از سپری دوران لیسانس و ارشد در دانشگاه شریف، دوره‌ی دکتری را زیر نظر دکتر حصارکی به پایان رساندند و برای مقاطع بعدی عازم کشورهای دیگر شدند.

مصاحبه‌ای که در ادامه می‌آید، در زمان برگزاری دومین سمینار مرزهای علوم ریاضی توسط دکتر محسن شریفی‌تبار، خشایار فیلُم و سینا حسن‌زاده انجام شده است.

لطفا در مورد زمینه کاری‌تان توضیح دهید و این‌که چه اتفاقی افتاد که به این زمینه علاقه‌مند شدید؟

در دوره‌ی کارشناسی تصمیمی نداشتم که در چه حوزه‌ای کار کنم. اما به آنالیز علاقه داشتم. بعد از شروع دوره‌ی فوق‌لیسانس، دکتر حصارکی را که فیلد کاری‌شان کمی به آنالیز نزدیک بود، به عنوان سوپروایزر انتخاب کردم. در ادامه هم مدرکم را در زمینه معادلات دیفرانسیل اخذ کردم. بعد از آن، متوجه شدم که واقعاً این یک موهبت بوده که در آن زمان هیچ یک از اساتید در زمینه‌ی آنالیز کار نمی‌کردند و من به سمت معادلات دیفرانسیل رفتم. چون هم موضوع کاربردی‌تری بود و هم این‌که شاخه‌های آنالیز به سرعت در حال کهنه شدن بودند. همه‌ی این‌ها باعث شد که من به رشته‌ی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای که ترکیبی از معادلات دیفرانسیل و کمی آنالیز بود علاقه‌مند شوم. بعد از این‌که دکتری خودم را در این رشته گرفتم، در همین زمینه هم مشغول به کار شدم. در سال ۲۰۱۰ در یک سخنرانی دانشگاهی، در مورد Optimal Mass Transportation شرکت کردم و بسیار به این زمینه علاقه‌مند شدم. از آن زمان هم، کمتر بر روی معادلات دیفرانسیل پاره‌ای کار کردم و بیشتر مشغول همین حوزه شدم.

وضعیت زمینه‌ی کاری‌تان در ایران و به خصوص دانشکده‌ی علوم ریاضی شریف نسبت به مقیاس جهانی چگونه است؟

من به صورت تخصصی در دو زمینه‌ی PDE و Optimal Mass Transportation کار کرده‌ام. در مورد PDE فکر می‌کنم که فقط دانشجویان دکتر حصارکی در این زمینه فعالیت کرده‌اند. ولی به نظرم همین کارهای محدودی که در حال انجام هستند، کارهایی بسیار خوب و قوی هستند. به هر حال PDE در ایران تاریخی ندارد و الان کسانی که در این زمینه فعال هستند، در حال ساخت این تاریخ هستند. اما در مورد Optimal Mass Transportation باید گفت که خود این رشته، رشته‌ی جوانی است. در مورد این‌که چقدر این رشته در ایران کار شده است هیچ اطلاعی ندارم ولی فکر نمی‌کنم که کاری در این زمینه انجام شده باشد. چون ما استادی در این زمینه نداریم. شریف هم به صورت خاص به عنوان یک دانشگاه برجسته بهتر است که به فکر گردآوری اساتیدی در این زمینه باشد تا علاقه‌مندان بتوانند تحصیلات خود را در این رشته ادامه دهند. این رشته از این لحاظ رشته دشواری است که ترکیبی از PDE، هندسه، measure theory و... است و برای دنبال کردن مسائل این رشته لازم است که شما همه‌ی این‌ها را به خوبی بدانید. اما در نهایت علی‌رغم همه‌ی دشواری‌ها بسیار رشته زیبایی است و می‌تواند تمام دید شما را به کلی تغییر دهد.

با این که در زمان شما Optimal Mass Transportation در ایران رشته‌ای جوان بود اما تصمیم گرفتید که دوره‌ی دکتری را نیز در ایران بگذرانید. آیا در آن زمان به رفتن از ایران فکر می‌کردید؟

در آن زمان به خاطر جو موجود در شریف، من هم از دانشگاه‌های خارجی پذیرش گرفتم. اما در آن زمان به همراه چند نفر از دوستان شرکتی را تاسیس کرده بودیم و خوش‌بختانه در وضعیت بسیار خوبی قرار داشتیم و همین باعث شد که دلیلی برای ادامه‌ی تحصیل در خارج نداشته باشیم. برای همین برای ادامه تحصیل شریف را انتخاب کردم. در ماه‌های نزدیک به آزمون جامع دکتری من به شدت درگیر کارهای شرکت بودم. در همین حوالی یک روز دکتر حصارکی به صورت جدی با من در مورد ادامه‌ی تحصیل و انگیزه‌ها صحبت کردند و من متوجه شدم که اگر قرار باشد که دکتری بگیرم باید واقعاً دکتری بگیرم و به صورت جدی مشغول به تحقیقات شوم. همین روزها بود که

شرکت هم از رونق اولیه افتاد و من کاملاً مشغول به درس شدم. بعد از آزمون جامع دکتری که مشغول به تحقیق شدم، با خوش‌شانسی زیادی روبرو بودم و توانستم که همه‌ی مسائلی که داشتم را در یک سال به سرانجام برسانم و سه مقاله هم چاپ کنم، که یکی از آن‌ها موفق‌ترین و پربازدیدترینِ تمام مقالات من، حتی با احتساب تمام مقالاتی که بعد از دکتری دادم بوده است. در مورد خارج رفتن هم، در آن زمان وزارت علوم یک فرصت مطالعاتی شش ماهه به دانشجویان دکتری ارائه می‌کرد. من این دوره را بدون دلیل خاصی از وزارت علوم گرفتم و به خارج مسافرت کردم. در آن‌جا با فردی به نام Ivar Ekeland که یکی از فوق ستاره‌های ریاضی و اقتصاد در جهان به شمار می‌آید آشنا شدم که این آشنایی باعث تغییر بزرگی در شرایط فکری و شرایط زندگی من شد. بعد از این دیدار متوجه شدم که باید چیزهای بیشتری را از ایشان یاد بگیرم. در آن زمان تمامی کارهای دکتری من انجام شده بود و فقط دفاع باقی‌مانده بود. در طی صحبتی، شرایطم را برای ایشان توضیح دادم و از ایشان خواستم که دوره پسادکتری را با ایشان بگذارنم. این درخواست من بسیار جسورانه و البته عجیب بود. چون افراد زیادی از بهترین دانشگاه‌های دنیا به دنبال این فرصت بودند و عجیب بود که یک نفر از شریف چنین درخواستی داشته باشد. ایشان در مواجهه با این درخواست، من را پای تخته فرستادند و صرفا از من پرسیدند که "چه چیزهایی بلدی؟!". خوشبختانه موفق شدم که ایشان را قانع کنم و پسادکتری را از ایشان دریافت کردم. مدرکی که اگر هر شخصی به جای ایشان بود، حتی به داشتنش هم فکر نمی‌کردم! ایشان در آن زمان مسول موسسه‌ای به نام Pacific Institute for the Mathematical Sciences در کانادا بودند. یک سال پس از پسادکتری من، مدیریت این موسسه به فردی به نام Nassif Ghoussoub سپرده شد که ایشان هم بسیار انسان بزرگی بودند. به دلیل این‌که تحقیقات من در زمان دکتر Ekeland بسیار موفق بودند، مسئول جدید موسسه هم به من اجازه دادند که من به مدت دل‌خواهی به تحقیقاتم در این موسسه ادامه دهم. که ادامه‌ی این همکاری با دکتر Nassif Ghoussoub منجر به تولید و توسعه یک نظریه شد و در همان زمان بود که من تصمیم گرفتم در کانادا بمانم. بعد از دوره‌ی پسادکتری موفق به اخذ یک فلوشیپ از یک موسسه شدم و اوضاع به خوبی پیش می‌رفت. مقاله‌های خوب و مفصلی که در آن دوران در ژورنال‌های مطرح چاپ کردم باعث شد تا شغل خوبی در کانادا به دست بیاورم. برای همین در خارج از ایران ماندنی شدم.

سمینار مرزهای علوم ریاضی توانسته است که هر ساله تعداد زیادی از اساتید و محققان و دانشجویان را از سرتاسر دنیا در ایران جمع کند و فرصت خوبی را برای کارهای آینده دانشجویان و محققان ایرانی ایجادکند. آیا شما سمینار مشابهی را در خارج از کشور می‌شناسید؟

در خارج از ایران چنین چیزی اصلا مطرح نیست به خودیِ خود به خاطر نبود مشکلاتِ سیاسی و غیره، افراد با هم در ارتباط هستند و طبعاً نیازی به چنین همایش‌هایی حس نمی‌شود.

به نظر شما، همایش مرزهای علوم ریاضی، چقدر توانسته است در رسیدن به اهدافش موفق باشد؟

من، امسال برای اولین بار در این سمینار شرکت کردم و صادقانه می‌گویم که بسیار سمینار لذت‌بخشی بود. به نظر من این سمینار، در سطح کاملاً حرفه ای برگزار شد و شریفی‌ها ثابت کردند که از پس هر کاری بر می‌آیند. چون من اصلاً احساس نکردم که سمینار یک سمینار داخل ایران است و توسط یک تیم دانشجویی اداره می‌شود. به نظر من اگر در دومین دوره به این حد از کمال رسیده است، تا چند سال آینده کاملاً بی‌نقص و کامل خواهد بود. زمانی که من برای سخنرانی در این سمینار دعوت شدم، به دکتر فتوحی برای همکاری‌های بیشتر در دوران حضورم اعلام آمادگی کردم که منجر به ارائه‌ی یک درس کوتاه هم شد. در این مدت با دانشجویان ارشد و دکتری مختلفی هم صحبت‌هایی انجام دادم و واقعاً از کارهای خوب انجام شده آن‌ها لذت بردم. به نظر من شریفی‌ها هیچ وقت از شریف نمی‌روند. برای همین من خیلی خوشحال می‌شوم که بتوانم در مدت زمان حضورم در ایران به شریفی‌ها کمکی کرده باشم. در حالت کلی این رفت و آمدهایی که به واسطه‌ی این همایش انجام شده، می‌تواند کمک شایانی به دانشجویان دکتری آینده این دانشگاه انجام دهد. چون آن‌ها را با فضای موجود در خارج از ایران تا حدودی آشنا می‌کند.

به نظر شما جای چه بخش‌هایی در سمینار مرزهای علوم ریاضی خالی بود؟

به نظر من به خوبی و کامل برگزار شد.

موضوع تز ارشد و دکتری شما چه بود؟

تز ارشدم درمورد رفتاری‌های جانبی معادلات Shockwave بود که با دکتر حصارکی کار کردم. تز دکتری من هم در مورد Blow-up Theory for Evolotion Equations بود. بعد از شروع پسادکتری هم به سراغ Variational Methods رفتم و در نهایت هم کارم به Optimal Mass Transport ختم شد.

در مورد مقاله‌ی دوم دکتری، که با استقبال زیادی مواجه شد توضیح دهید.

به سختی آن مقاله را می‌توانم به یاد بیاورم. چون همان‌طور که احتمالاً از صحبت‌های من فهمیدید، من به دفعات زمینه‌های کاریم را عوض کرده‌ام. در همین مورد هم به نظرم بد نیست که یک تجربه‌ی کوچکی را با دانشجویان درمیان بگذارم. من در دوران تحصیلم و بعد از آن همواره پیگیر درس‌ها و سخنرانی‌های رشته‌های مختلف بوده‌ام و آن را به زمینه‌ی تخصصی خودم محدود نکردم. به این دلیل که حس می‌کنم که انسان نباید خودش را زندانی کند. مقاله دوم من در مورد Hamilton–Jacobi Equation بود.

در زمینه‌ی تخصصی شما، آیا کارهایی که انجام می‌شود به همان شکل سابق باقی‌مانده است؟ به طور مثال چقدر به سمت کارهای عددی و کاربردی رفته است؟

PDE در دهه‌ی ۸۰ به شدت از آنالیز تابعی در راستای اثبات قضایای کلی بهره می‌برد. اما در حال حاضر بیشتر محققان یک مسئله‌ی خاص را در نظر می‌گیرند و با کارهای آنالیزی و تکنیکال به حل آن‌ها می‌پردازند. و برای همین آن دیدگاه آنالیز تابعی به مرور کمرنگ‌تر خواهد شد.

شما در هردو زمینه‌ی PDE و Optimal Mass Trasnportation کار انجام داده‌اید. PDE درکدام بخش‌های Optimal Mass Trasnportation به کار می‌آید و اشتراک این دو زمینه چیست؟

خود مسائل Optimal Mass Trasnportation مدل‌های خاصی دارند که کمتر از PDE در آن‌ها استفاده شده است. اما اگر موشکافانه به این مدل‌ها نگاه کنیم می‌بینیم که در دل این مدل‌ها PDE به وضوح دیده می‌شود. به طور مثال در Monge–Ampère Equation که از تئوری Mass Trasnportation به دست می‌آید. PDE کارها می‌دانند که این مساله بر خلاف ظاهر ساده‌اش راه‌حل بسیار دشواری در PDE دارد. اما یکی از مزیت‌های Optimal Mass Trasnportation این بود که با دید کاملاً جدیدی نسبت به PDE این مسائل را به سادگی حل کرد. از سمت دیگر، نگاشت‌هایی که در Optimal Mass Trasnportation استفاده می‌شوند، باید نگاشت‌های خوبی باشند. برای همین برای بررسی و تحلیل آن‌ها از PDE استفاده‌های فراوانی می‌شود. در نتیجه، مهم‌ترین استفاده‌ی PDE در Optimal Mass Trasnportation در تئوری نظم است.

بهترین منابعی که برای Optimal Mass Trasnportation می‌توان دنبال کرد، چه کتاب‌هایی هستند؟

کتاب Optimal Mass Trasnportation از دکتر Cedric Villani که در سال ۲۰۰۹ چاپ شده، جامع‌ترین و بهترین منبع در این زمینه محسوب می‌شود. برای کسانی هم که مایل هستند که به صورت مختصر، کلیتی از Optimal Mass Transportation را فرا بگیرند لکچرهای آنلاینی از Ambrosio و Evans می‌تواند مفید باشد.

به نظر شما، برای یک دانشجوی تحصیلات تکمیلی ایرانی که به زمینه‌های جوانی مانند Optimal Mass Transportation علاقه دارد و به منابعی دسترسی ندارد، مطالعه‌ی همین کتاب ها و لکچرها کافی است؟

به نظر من، بهترین حالت موجود وجود یک سوپروایزر برای دانشجو است. چون دانشجو توان و امکانات تجربه‌ی همه چیز را ندارد و باید کسی باشد که بعضی از تجربه‌ها را به وی انتقال دهد. در غیر این‌صورت، در بسیاری از مواقع ممکن است دانشجو در یک دور باطل بیفتد! برای همین ترجیح این است که دانشجویان با اساتیدی کار کنند که فعال هستند. از طرفی دانشجو باید یاد بگیرد که اصول

تحقیق کردن به چه صورت است. اما بعد از دوره‌ی دکتری مطالعه‌ی صرف هم می‌تواند مفید باشد. چون فرد دید بهتری کسب کرده وروش‌های تحقیق کردن را هم می‌داند.

آیا مثالی از کاربرد Optimal Mass Transportation در ذهن دارید؟

داده‌ها در Optimal Mass Transportation بسیار منعطف هستند. برای همین این تئوری کاربردهای بسیار زیادی در دنیای واقعی و حتی در علوم دیگر دارد. به طور مثال در Matching Problemها در اقتصاد، از Optimal Mass Transportation استفاده می‌شود. حتی در ترکیبیات هم استفاده‌های زیادی برای بررسی قضایا از Optimal Mass Transportation می‌شود.

با تشکر از دکتر مومنی، بابت وقتی که در اختیار ما قرار دادند.

مسأله

مسأله ۱. فرض کنید H یک گروه باشد و σ خودریختی‌ای از H. نشان دهید گروهِ G وجود دارد که $H \leq G$ و σ تحدید یک خودریختی داخلیِ G است[1].

مسأله ۲. n عددی فرد است و D گروهی $2n$عضوی که دارای یک زیرگروه nعضویِ H است با این ویژگی که برای $h \in H$ و $x \in D-H$ تساویِ $xhx^{-1} = h^{-1}$ برقرار است. نشان دهید H آبلی است و هر عنصرِ $D-H$ از مرتبه‌ی ۲ است. آیا می‌توانید برای هر عدد فردِ n مثالی از چنین گروهی ارائه دهید؟

مسأله ۳. فرض کنید G گروهی متناهی باشد. برای زیرمجموعه‌های دلخواهِ U، V و W از G، N_{UVW} را تعداد سه‌تایی‌های (x,y,z)ای می‌گیریم که $(x,y,z,) \in U \times V \times W$ و $xyz = e$ (e عضو همانیِ G) را برآورده می‌کنند. فرض کنید G به سه زیرمجموعه‌ی A، B و C افراز شده باشد. ثابت کنید $N_{ABC} = N_{CBA}$.

مسأله ۴. فرض کنید G زیرگروهی از گروه جایگشتیِ S_n و از مرتبه‌ی p^k باشد که در آن p یک عدد اول است با این ویژگی که $n < p^2$. ثابت کنید

$$G \cong \mathbb{Z}_p \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_p$$

مسأله ۵. در یک حلقه‌ی جابجایی و یکدارِ B، مجموعه‌ی عناصری که مقسوم‌علیهِ صفر نیستند تشکیل یک «زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی» [2] می‌دهند. پس می‌توان B را در این زیرمجموعه‌ی بسته‌ی ضربی موضعی کرد. حلقه‌ی جابجایی و یکدارِ حاصل را به $D(B)$ نمایش می‌دهیم. به وضوح در حالتی که B حوزه‌ی صحیح باشد، این همان میدان کسرهای B است. فرض کنید $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ ایده‌آل‌های اولی از حلقه‌ی جابجایی و یکدارِ A باشند که هیچ‌یک از آنها شامل دیگری نیست. ثابت کنید یک یکریختیِ حلقه‌ای به صورت زیر موجود است:

$$D\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_m}\right) \cong D\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_1}\right) \times \cdots \times D\left(\frac{A}{\mathfrak{p}_m}\right)$$

مسأله ۶. «زاویه‌ی x درجه» را به صورتِ x° نشان می‌دهیم:

$$x^\circ = \frac{\pi x}{180} \text{ رادیان}$$

الف) توضیح دهید که چرا برای هر عدد صحیحِ n، $2\cos(n^\circ)$ و $2\sin(n^\circ)$ اعداد صحیح جبری‌اند.

ب) از دو گزاره‌ی زیر دقیقاً یکی صحیح است. با ذکر دلیل مشخص کنید کدامیک؟

$$\cos 36^\circ \in \mathbb{Q}[\sin 36^\circ] \quad \sin 36^\circ \in \mathbb{Q}[\cos 36^\circ]$$

مسأله ۷. سری زیر به چه عددی همگراست؟

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)(4k+5)}$$

مسأله ۸. A، B و C را زیرمجموعه‌هایی ناتهی از $\mathbb{R}^n$ بگیرید. فرض کنید A کراندار باشد، C بسته و محدب [3] و $A + B \subseteq A + C$ [4]. نشان دهید $B \subseteq C$.

مسأله ۹. فرض کنید $f : [a,b] \to [a,b]$ تابعی پیوسته باشد و $p \in [a,b]$. تعریف می‌کنیم $p_0 = p$ و $p_{n+1} = f(p_n)$ برای $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. فرض کنید مجموعه‌ی $T_p = \{p_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ بسته باشد. ثابت کنید T_p متناهی است.

مسأله ۱۰. فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و A یک زیرمجموعه‌ی ناتهی از X باشد. فرض کنید تابعِ $f : A \to \mathbb{R}$ و ثابتِ $M > 0$ چنان باشند که:

$$\forall x, y \in A : |f(x) - f(y)| \leq M.d(x,y)$$

ثابت کنید تابعِ $g : X \to \mathbb{R}$ موجود است که تحدیدش به A همان f است و به علاوه برای هر $x, y \in X$ داریم: $|g(x) - g(y)| \leq M.d(x,y)$.

مسأله ۱۱. تابعِ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ را ϵ-محدب (که در آن $\epsilon > 0$) گوییم اگر برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ و $\alpha \in [0,1]$:

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) + \epsilon$$

ثابت کنید برای هر تابعِ ϵ-محدبِ f، تابع محدبِ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد به قسمی که برای هر x:

$$|f(x) - g(x)| \leq 2\epsilon$$

مسأله ۱۲. قرار دهید $f(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j \sin(2\pi j t)$ که در آن هر a_j حقیقی است و $a_N \neq 0$. N_k را تعداد ریشه‌های $f^{(k)}$ (مشتق kاُمِ f) در بازه‌ی $[0,1)$ با احتساب تکرر بگیرید. نشان دهید:

$$N_0 \leq N_1 \leq N_2 \leq \cdots, \lim_{k \to \infty} N_k = 2N$$

[1] مطرح شده در شماره‌ی ۶ مجله‌ی ریاضی شریف، پاییز ۷۶

[2] m.c.s.

[3] به این معنی که برای هر $x, y \in C, t \in [0,1]$ داریم $tx + (1-t)y \in C$.

[4] اینجا برای دو زیرمجموعه‌ی E و F از $\mathbb{R}^n$، منظور از $E+F$ زیرمجموعه‌ی زیر است:

$$\{e + f \mid e \in E, f \in F\}$$

مسأله ۱۳. (*عرفان صلواتی*) *برای* $1 \leq p < \infty$ *،* p*- نرم روی* $\mathbb{R}^2$ *به این صورت تعریف می‌شود:*

$$x = (x_1, x_2) \Rightarrow \| x \|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$$

نگاشت $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *را حافظِ* p*- نرم گوییم اگر برای هر* x *و* y*،* $\| Tx - Ty \|_p = \| x - y \|_p$*. همه‌ی نگاشت‌های حافظِ* p*- نرم را بیابید.*

مسأله ۱۴. $n \geq 2$ *و* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *نگاشتی هموار و سره*[5] *است با این ویژگی که مجموعه‌ی نقاط بحرانیِ آن کراندارند. ثابت کنید* f *پوشاست و به علاوه با ذکر یک مثال نقض نشان دهید شرطِ* $n \geq 2$ *ضروری است.*

مسأله ۱۵. D *یک زیرمجموعه‌ی باز و همبند از* $\mathbb{C}$ *است و* $f_1, \ldots, f_n$ *توابعی هولومورف بر* D *که به ازای ثابت‌های* $a, b, c \in \mathbb{C}$ *شرطِ*

$$\forall z \in D : \sum_{j=1}^{n} |f_j(z)|^2 = az + b\bar{z} + c$$

را برآورده می‌کنند. ثابت کنید هر تابعِ $f_j : D \to \mathbb{C}$ *ثابت است.*

مسأله ۱۶. *فرض کنید* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *یک تابع هولومورف باشد با این ویژگی که* $|f(z)| = 1$ *برای تمامی* $z \in \mathbb{C}$ *هایی که* $|z| = 1$*. ثابت کنید* $\theta \in \mathbb{R}$ *و* $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ *موجودند به قسمی که* $f(z) = e^{i\theta} z^k$ *برای هر* $z \in \mathbb{C}$*.*

مسأله ۱۷. $n \geq 3$ *را یک عدد طبیعی بگیرید. فرض کنید* $f(x)$ *و* $g(x)$ *دو چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشند به گونه‌ای که نقاطِ*

$$(f(1), g(1)), (f(2), g(2)), \ldots, (f(n), g(n))$$

رئوس یک n*- ضلعیِ منتظم در* $\mathbb{R}^2$ *در جهت پادساعتگرد باشند. نشان دهید درجه‌ی حداقل یکی از این دوچندجمله‌ای باید بزرگتر مساویِ* $n - 1$ *باشد.*

مسأله ۱۸. A *ماتریسی* $n \times n$ *و وارون‌پذیر با درایه‌های مختلط است. نشان دهید اگر توانی از* A *قطری‌پذیر باشد آنگاه* A *نیز قطری‌پذیر است. آیا در حالتی که به جای* $\mathbb{C}$ *میدانی با مشخصه‌ی صفر که بسته‌ی جبری نباشد یا میدان بسته‌ی جبری‌ای با مشخصه‌ی مثبت قرار گیرد، باز هم تحت این شرایط* A *بر این میدان قطری‌پذیر خواهد بود؟*

مسأله ۱۹. A *و* B *را دو ماتریسِ مربعی از مرتبه‌ی* n *بگیرید. برای هر* $1 \leq k \leq n$*،* A_k *را ماتریسی بگیرید که از قرار دادن ستون* k*اُمِ* B *به جای ستون اولِ* A *حاصل می‌شود و همچنین ماتریسی را که از قرار دادن ستون اولِ* A *به جای ستون* k*اُمِ* B *بدست می‌آید* B_k *بنامید. ثابت کنید:* $\det(AB) = \sum_{k=1}^{n} \det(A_k) \det(B_k)$*.*

[5] proper، به این معنی که پیش‌تصویرِ هر فشرده تحت آن فشرده است.

مسأله ۲۰. F *یک میدان است،* $A, B \in M_2(F)$ *دو ماتریسِ* 2×2 *با درایه‌های در این میدان که برای آنها* $AB \neq BA$ *و* $p(x) \in F[x]$ *چندجمله‌ای‌ای که* $p(AB) = p(BA)$ *را برآورده می‌کند. نشان دهید* $c \in F$ *موجود است چنان که:* $p(AB) = cI_2$*.*

مسأله ۲۱. *فرض کنید* $n \geq 3$*. به‌علاوه فرض کنید* $A_1, \ldots, A_n$ *ماتریس‌هایی مربعی از مرتبه‌ی* n *باشند به طوری که* $A_1 \cdots A_n = I_n$*،* $\det A_1 = \cdots = \det A_n = 1$ *و ماتریس‌های* $A_1 - A_k$ *برای هر* $2 \leq k \leq n-1$ *اسکالر*[6] *و ناصفر و متمایز باشند. ثابت کنید* $A_1 + (-1)^n A_n$ *نیز ماتریسی اسکالر است.*

مسأله‌های پیشنهادی خود را به همراه راه‌حل برای ما بفرستید:

mathematicsjournal@gmail.com

[6] منظور از ماتریس اسکالر ماتریس قطری‌ای است که درایه‌های روی قطرش یکسان باشند.

پاسخ مسأله‌ها

پاسخ ۱. گروهِ خودریختی‌های H یا $Aut(H)$ ـ که عملِ گروهی در آن ترکیبِ خودریختی‌ها و عنصرِ همانی، نگاشت همانیِ: $1_H : H \to H$ است ـ که σ به آن تعلق دارد، به شیوه‌ی واضح بر H عمل می‌کند. با توجه به این مطلب، برای ساختنِ گروهِ جدید، از «ضرب نیمه‌مستقیم» [1] H با $Aut(H)$ استفاده می‌کنیم و مجموعه‌ی $H \times Aut(H)$ را مجهز می‌کنیم به ساختار گروهی‌ای که با قاعده‌ی ضربِ

$$(h_1, \alpha_1) * (h_2, \alpha_2) = (\underbrace{h_1.\alpha_1(h_2)}_{H\text{ضرب در}}, \alpha_1 \circ \alpha_2)$$

داده می‌شود[2]. به سادگی می‌توان تحقیق کرد که این عمل شرکت‌پذیر است و $H \times Aut(H)$ را به گروهی با عنصر همانیِ $(e, 1_H)$ (e عنصر همانیِ گروهِ H) تبدیل می‌کند. این گروه را به $(G, *)$ نشان می‌دهیم و ادعا می‌کنیم خواص موردنظر در صورت مسأله را دارد. ابتدا توجه کنید که $H \times \{1_H\}$ زیرگروهی است از این گروه:

$$(h_1, 1_H) * (h_2, 1_H) = (h_1.1_H(h_2), 1_H \circ 1_H) = (h_1h_2, 1_H)$$

بنابراین اگر زیرمجموعه‌ی $H \times \{1_H\}$ از $H \times Aut(H)$ را به شیوه‌ی واضح با H یکی بگیریم، می‌توان H را زیرگروهی از G پنداشت. حال $(1, \sigma)$ عضوی است از G (داشتیم $\sigma \in Aut(H)$) و ادعا می‌کنیم خودریختیِ داخلی‌ای از $(G, *)$ که با آن معین می‌شود (به عبارت دیگر نگاشتِ مزدوج کردن با (e, σ)) بر زیرگروهِ $H = Aut(H)$ از G به $\sigma : H \to H$ تحدید می‌شود. این به سرعت از شیوه‌ی تعریفِ ضربِ $*$ نتیجه می‌شود. چرا که وارونِ (e, σ) با (e, σ^{-1}) داده می‌شود:

$$(e, \sigma) * (e, \sigma^{-1}) = (e.\sigma(e), \sigma \circ \sigma^{-1}) = (e, 1_H)$$

و بنابراین مزدوج کردن عناصرِ زیرگروهِ H با (e, σ) چنین خواهد بود:

$$\begin{aligned}(e, \sigma) * (h, 1_H) * (e, \sigma^{-1}) &= \big((e, \sigma) * (h, 1_H)\big) * (e, \sigma^{-1}) \\ &= (e.\sigma(h), \sigma \circ 1_H) * (e, \sigma^{-1}) = (\sigma(h), \sigma) * (e, \sigma^{-1}) \\ &= (\sigma(h).\sigma(e), \sigma \circ \sigma^{-1}) = (\sigma(h), 1_H)\end{aligned}$$

[1] semidirect product. برای دیدن خواصِ ضرب نیمه مستقیم، رجوع کنید به: J. R. Rotman, An Introduction to the Theory of Groups

[2] در واقع داریم ضرب نیمه‌مستقیمِ $H \rtimes_\theta Aut(H)$ را در نظر می‌گیریم که در آن همریختیِ θ بیانگر عملِ $Aut(H)$ بر H است.

پاسخ ۲. $x \in D - H$ و $h_1, h_2 \in H$ را دلخواه بگیرید. از فرض مسأله:

$$\begin{cases} xh_1x^{-1} = h_1^{-1} \\ xh_2x^{-1} = h_2^{-1} \\ x(h_1h_2)x^{-1} = (h_1h_2)^{-1} \end{cases}$$

با ضرب دو تساوی اول در هم به $x(h_1h_2)x^{-1} = h_1^{-1}h_2^{-1}$ می‌رسیم که مقایسه‌ی آن با تساوی سوم نشان می‌دهد $h_1^{-1}h_2^{-1} = (h_1h_2)^{-1}$ که به شکلِ $h_1h_2 = h_2h_1$ ساده می‌شود و این با توجه به دلخواه بودن عناصرِ h_1 و h_2 از H به معنای آبلی بودنِ این زیرگروه است. در ادامه یک $x \in D - H$ دلخواه را تثبیت کنید. نشان می‌دهیم $x^2 = e$ که در آن e عضو همانیِ G است و این با توجه به $x \neq e$ اثبات خواهد کرد که مرتبه‌ی x دو است و حل به اتمام خواهد رسید. توجه کنید که برای هر $h \in H$ از مفروضات مسأله $xhx^{-1} = h^{-1}$ و $xh^{-1}x^{-1} = (h^{-1})^{-1} = h$. اکنون اگر $xhx^{-1} = h^{-1}$ از چپ در x و از راست در x^{-1} ضرب شود: $x^2hx^{-2} = xh^{-1}x^{-1}$ که مقایسه‌اش با تساوی دیگر نشان می‌دهد $x^2hx^{-2} = h$ که به معنای جابجا شدنِ x^2 با h است. پس x^2 با تمامی اعضای زیرگروهِ nعضویِ H از G جابجا می‌شود و همچنین به وضوح با $x \in D - H$ هم جابجا می‌شود. لذا در گروهِ $2n$عضویِ D، زیرگروهِ عناصری که با x^2 جابجا می‌شوند(به عبارت دیگر مرکزسازِ این عنصر)، حداقل $n + 1$ عضو دارد. لذا اندیسِ آن در D حداکثر $\frac{2n}{n+1} < 2$ است که به معنای منطبق بودن این زیرگروه بر D یا معادلاً تعلقِ x^2 به مرکزِ D است. پس به منظور اثبات آنکه x از مرتبه‌ی دو است، تنها کافی است نشان داد هر عنصرِ y که در مرکزِ D باشد همانی است. حکمِ مسأله در حالتِ $n = 1$ که D دو عضوی می‌شود بدیهی است و لذا توجه خود را به اثبات ادعای فوق در حالتِ $n > 1$ معطوف می‌کنیم. اگر $y \in H$ که با درنظر گرفتنِ یک عنصر دلخواهِ $d \in D - H$ باید

$$dyd^{-1} = y^{-1} \quad \overset{y\text{عضو مرکز است.}}{\Longrightarrow} \quad y^2 = e$$

که به دلیل آنکه y در گروه فردعضویِ H واقع است، نشان می‌دهد $y = e$. حالت آخر آن است که $y \notin H$. در چنین شرایطی اگر h عنصری از H به جز همانی باشد:

$$yhy^{-1} = h^{-1} \quad \overset{y\text{عضو مرکز است.}}{\Longrightarrow} \quad h^2 = e$$

مجدداً چون مرتبه‌ی H فرد است، $h^2 = e$ تنها در حالتِ $h = e$ می‌تواند رخ دهد که با روش انتخابِ h تناقض دارد. پس حکم مطلوب اثبات می‌گردد و هر عضوِ $D - H$ از مرتبه‌ی ۲ خواهد بود. در انتها توجه کنید که برای هر عدد فردِ n، گروه تقارن‌های n-ضلعیِ

منتظم[۳] مثالی از یک گروهِ $2n$عضوی با شرایط مسأله خواهد بود. این گروه با مولدها و روابطِ زیر داده می‌شود:

$$D_n = \langle a, b \mid a^2 = b^n = e, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$$

پاسخ ۳. برای هر سه زیرمجموعه‌ی دلخواهِ U، V و W از G تعریف می‌کنیم:

$$M_{UVW} = \{(x, y, z) \in U \times V \times W \mid xyz = e\}$$

لذا طبق تعریف داریم: $|M_{UVW}| = N_{UVW}$. حال ادعا می‌کنیم که:

$(*)$ اگر U، V و W سه زیرمجموعه‌ی دلخواه از G باشند داریم:

$$N_{UVW} = N_{VWU} = N_{WUV}$$

برای دیدن دلیل توجه کنید که تابعِ زیر خوش‌تعریف است: $\begin{cases} M_{UVW} \to M_{VWU} \\ (x, y, z) \mapsto (y, z, x) \end{cases}$ چرا که $xyz = e$ نتیجه می‌دهد: $yzx = e$. این همچنین به وضوح یک‌به‌یک است. پس با توجه به اینکه زیرمجموعه‌های ظاهر شده متناهی هستند، باید تعداد اعضای M_{UVW} و M_{VWU} یکسان باشد که تساویِ $N_{UVW} = N_{VWU}$ را بدست می‌دهد. با استفاده‌ی مجدد از این حکم و قرار دادنِ سه‌تاییِ (V, W, U) از زیرمجموعه‌های G به جای (U, V, W) در تساوی مذکور خواهیم داشت $N_{VWU} = N_{WUV}$. لذا حکمِ مطلوب در $(*)$ مبنی بر $N_{UVW} = N_{VWU} = N_{WUV}$ حاصل می‌شود.

به یک گزاره‌ی دیگر نیز نیاز داریم:

$(**)$ برای هر دو زیرمجموعه‌ی دلخواهِ U و V از G:

$$N_{UVA} + N_{UVB} + N_{UVC} = |U|.|V|$$

به منظور اثبات قرار می‌دهیم:

$$X = \{(x, y, z) \in U \times V \times G \mid xyz = e\}$$

دراین‌صورت $|X| = |U|.|V|$. زیرا انتخابِ $x \in U$ و $y \in V$ به $|U|.|V|$ روش امکان‌پذیر است و با داشتنِ این دو عضو $z \in G$ یکتایی موجود است که $(x, y, z) \in X$ را برآورده می‌کند: $z = (xy)^{-1}$. حال کافی است تعداد اعضای X را به روشی دیگر شمرده و نشان دهیم که از طرف دیگر برابر است با عبارتِ ظاهر شده در سمت چپِ $(**)$. فرض کنید $(x, y, z) \in X$. چون A، B و C افرازی برای G بود، دقیقاً یکی از سه حالتِ $z \in A$، $z \in B$ و $z \in C$ رخ می‌دهد. ولی با توجه به تعریفی که ارائه شد، این سه به معنای به ترتیب $(x, y, z) \in M_{UVA}$، $(x, y, z) \in M_{UVB}$ و $(x, y, z) \in M_{UVC}$ هستند. پس M_{UVA}، M_{UVB} و M_{UVC} افرازی برای X معین می‌کند. لذا برای تعداد اعضای زیرمجموعه‌ی اخیر علاوه بر $|U|.|V|$ که قبلاً داشتیم به

$$|M_{UVA}| + |M_{UVB}| + |M_{UVC}| = N_{UVA} + N_{UVB} + N_{UVC}$$

می‌رسیم که $(**)$ را اثبات می‌کند.

با استفاده از دو گزاره‌ی ثابت شده مسأله را حل می‌کنیم: در $(**)$ یک بار قرار می‌دهیم $U = A$ و $V = B$ و یک بار دیگر قرار می‌دهیم $U = B$ و $V = A$. دراین‌صورت به دو رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} N_{ABA} + N_{ABB} + N_{ABC} = |A|.|B| \\ N_{BAA} + N_{BAB} + N_{BAC} = |B|.|A| \end{cases} \Rightarrow$$

$$N_{ABA} + N_{ABB} + N_{ABC} = N_{BAA} + N_{BAB} + N_{BAC} (***)$$

ولی از $(*)$: $N_{ABA} = N_{BAA}$ و همچنین $N_{ABB} = N_{BAB}$. پس با حذف جملاتِ برابر از طرفینِ $(***)$: $N_{ABC} = N_{BAC}$. این حکم مطلوب را نتیجه می‌دهد چرا که از $(*)$ همچنین داریم: $N_{BAC} = N_{CBA}$ و بنابراین با ترکیبِ این دو: $N_{ABC} = N_{CBA}$.

پاسخ ۴. می‌دانیم که هر زیرگروهی از S_n که مرتبه‌اش توانی از p باشد مشمول است در یک p-زیرگروه سیلو از S_n. پس به بررسیِ p-زیرگروه‌های سیلو از S_n می‌پردازیم با این هدف که نشان دهیم حکم بیان شده برای آنها معتبر است و سپس برقراری یکریختی مشابهی برای زیرگروه‌های آنها را اثبات نماییم. تعداد اعضای یک p-زیرگروه سیلو از S_n عبارت است از بزرگترین توانی از عدد اولِ p که $|S_n| = n!$ را می‌شمارد. توانِ p در تجزیه‌ی $n!$ به ضربِ عواملِ اول با $\sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$ داده می‌شود که اینجا چون $n < p^2$ مساوی است با $s := \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$. پس p-زیرگروه‌های سیلو از S_n عبارتند از زیرگروه‌های p^s عضوی. مثالی از چنین زیرگروهی ارائه می‌دهیم. اعضای S_n را جایگشت‌های $\{1, \dots, n\}$ می‌گیریم و برای هر $1 \leq i \leq s$ قرار می‌دهیم: $\sigma_i = \big((i-1)p + 1 \quad (i-1)p + 2 \quad \cdots \quad ip\big)$. توجه کنید که داشتیم $s = \lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ و در نتیجه در بالا $ip \leq n$. پس هر σ_i یک p-دور در S_n است. P را زیرگروهی از S_n بگیرید که $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ می‌سازند: $P = \langle \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s \rangle$. ادعا می‌کنیم این یک p-زیرگروه سیلو از S_n است و در یکریختی‌ای مشابه آنچه در صورت مسأله بیان شده صدق می‌کند. در اینجا چون هر σ_i یک p-دور است داریم $o(\sigma_i) = p$[۴] و لذا $\langle \sigma_i \rangle \cong \mathbb{Z}_p$. همچنین هر دو تا از σ_i و σ_j با هم جابجا می‌شوند چرا که p-دورهایی مجزا هستند. پس زیرگروهِ P از S_n که $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ می‌ساختند آبلی است و به علاوه زیرگروه‌های $\langle \sigma_i \rangle$ $1 \leq i \leq s$ از آن نرمال هستند. ولی توجه کنید که:

$$(*) \forall 1 \leq i \leq s : \langle \sigma_i \rangle \cap \big(\langle \sigma_1 \rangle \dots \langle \sigma_{i-1} \rangle \langle \sigma_{i+1} \rangle \dots \langle \sigma_s \rangle\big) = \{e\}$$

[۳] که موسوم است به گروهِ dihedral.

[۴] منظور از $o(x)$ مرتبه‌ی عنصرِ x از گروه است.

زیرا σ_jها به ازای $i \neq j$ و بنابراین همه‌ی جایگشت‌های متعلق به $\langle\sigma_s\rangle \dots \langle\sigma_{i+1}\rangle\langle\sigma_{i-1}\rangle \dots \langle\sigma_1\rangle$، هر نقطه از زیرمجموعه‌ی $\{(i-1)p+1, (i-1)p+2, \dots, ip\}$ را ثابت نگاه می‌دارند در حالی که چون σ_i بر این زیرمجموعه‌ی pعضوی به جایگشتی دوری به طولِ p تحدید می‌شد، تنها عضوی از $\langle\sigma_i\rangle$ که تمامی نقاط این زیرمجموعه را ثابت نگاه می‌دارد، e (جایگشت همانی) است. پس زیرگروه‌های نرمالِ $\langle\sigma_i\rangle$ $1 \leq i \leq s$ از P را داریم که حاصل‌ضربِ آنها کلِ P است (زیرا $\sigma_1, \dots, \sigma_s$، P را تولید می‌کردند.) و به علاوه در $(*)$ صدق می‌کنند. بنابراین با توجه به این موارد قضیه‌ی ساختاری گروه‌ها نشان می‌دهد که P یکریخت است با جمع مستقیمِ زیرگروه‌های نرمالِ مذکور. بنابراین $P \cong \langle\sigma_1\rangle \oplus \dots \oplus \langle\sigma_s\rangle$ و حال چون همان‌گونه که بیان شد هر $\langle\sigma_i\rangle$ با $\mathbb{Z}_p$ یکریخت است:

$$(**) : P \cong \overbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p}^{s \text{ تا } \mathbb{Z}_p}$$

این نشان می‌دهد $|P| = p^s$ و در نتیجه بنابر آنچه که در ابتدا بیان شد، P یک p- زیرگروه سیلو از S_n است. اکنون حکمِ مطلوب را ثابت می‌کنیم: G را زیرگروهی p^k عضوی از S_n بگیرید. G یک p- زیرگروه است و لذا طبق قضیه‌ی اول سیلو باید مشمول باشد در یک p- زیرگروه سیلو از S_n همچون Q: $G < Q$. از طرف دیگر، قضیه‌ی دوم سیلو بیان می‌کند که هر دو p- زیرگروه سیلو مزدوج هستند. لذا Q با P مزدوج است و بنابراین آن هم با گروه ظاهر شده در سمت راستِ $(**)$ یکریخت است، امری که نتیجه می‌دهد Q آبلی است و مرتبه‌ی هر عنصرِ غیرهمانی از آن p. به وضوح هر زیرگروه از Q هم این دو ویژگی را دارد. علی‌الخصوص G هم گروهی آبلی است که تمامی اعضایش به جز همانی از مرتبه‌ی pاند. در خاتمه باید نشان دهیم G یکریخت است با جمع مستقیمِ چند نسخه از $\mathbb{Z}_p$. G یک گروه آبلیِ متناهی است و لذا بنابر قضیه‌ی ساختاری گروه‌های آبلی با تولید متناهی، G یکریخت است با جمع مستقیمِ گروه‌های دوری. ولی مرتبه‌ی هریک از این گروه‌های دوری باید p باشد زیرا در غیر این صورت G اعضایی خواهد داشت که مرتبه‌شان ۱ یا p نیست. پس G یکریخت است با گروهی که از چند بار جمع مستقیمِ $\mathbb{Z}_p$ با خودش حاصل می‌شود و تعدادِ این جمعوندهای $\mathbb{Z}_p$ به دلیلِ $|G| = p^k$ باید k باشد:

$$G \cong \overbrace{\mathbb{Z}_p \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_p}^{k \text{ تا } \mathbb{Z}_p}$$

و این حل را به اتمام می‌رساند.

پاسخ ۵. هم‌دسته‌ی متناظرِ $x \in A$ در هر حلقه‌ی خارج‌قسمتیِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ را با $x+\mathfrak{p}_i$ نشان می‌دهیم و هم‌دسته‌ی متناظرِ آن در حلقه‌ی خارج‌قسمتیِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}$ را با $x+\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m$. پس برای هر $1 \leq i \leq m$، اعضای $D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}\big)$ به شکلِ $\frac{x+\mathfrak{p}_i}{s+\mathfrak{p}_i}$ خواهند بود که در آن $s+\mathfrak{p}_i \in \frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ مقسوم‌علیهِ صفر نیست و اعضای $D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}\big)$ به شکلِ $\frac{x+\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}{s+\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}$ قابل بیانند که در آن $s + \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m \in \frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}$ مقسوم‌علیهِ صفر نیست. یک همریختی حلقه‌ایِ[5] خوش‌تعریف به صورتِ زیر داریم:

$$\begin{cases} \frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m} \to \frac{A}{\mathfrak{p}_1} \times \dots \times \frac{A}{\mathfrak{p}_m} \\ x + \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m \mapsto (x + \mathfrak{p}_1, \dots, x + \mathfrak{p}_m) \end{cases}$$

این را می‌توان به ازای هر $1 \leq i \leq m$ در مؤلفه‌ی iاُم با نگاشت واضحِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_i} \to D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}\big)$ ترکیب نمود و از این طریق به یک همریختی حلقه‌ایِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m} \to D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1}\big) \times \dots \times D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_m}\big)$ رسید. ادعا می‌کنیم تحت آن عناصرِ $s + \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m \in \frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}$ای که مقسوم‌علیهِ صفر نباشند به عناصری وارون‌پذیر از $D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1}\big) \times \dots \times D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_m}\big)$ تصویر می‌شوند. با توجه به آنکه حلقه‌ی اخیر حاصلضربی از میدان‌هاست($\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ها به دلیل اول بودن ایده‌آل‌های $\mathfrak{p}_i$ حوزه‌ی صحیح هستند.)، تنها کافی است نشان داد که برای هر $1 \leq i \leq m$ مؤلفه‌ی iاُم عنصرِ حاصل از اثر دادنِ همریختیِ مذکور بر $s + \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m$ ناصفر است. یعنی $\frac{s+\mathfrak{p}_i}{1+\mathfrak{p}_i}$ در $D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}\big)$ صفر نیست. این به آن دلیل است که در غیراین‌صورت باید $y \in A - \mathfrak{p}_i$ موجود باشد چنان‌که $(y + \mathfrak{p}_i)(s + \mathfrak{p}_i) = 0 + \mathfrak{p}_i$ (یا معادلاً $ys \in \mathfrak{p}_i$) که به دلیل اول بودنِ این ایده‌آل به معنای $s \in \mathfrak{p}_i$ است. ولی این ممکن نیست. چرا که $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_m$ ایده‌آل‌های اولی از A بودند که هیچ‌یک از آنها مشمول در دیگری نبود. پس می‌توان یک $z \in \cap_{1\leq j\leq m, j\neq i}\mathfrak{p}_j - \mathfrak{p}_i$ یافت. حال اگر s عضوِ $\mathfrak{p}_i$ باشد، خواهیم داشت $sz \in \mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m$ در صورتی که عناصرِ $s + \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m$ و $z + \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_m$ از $\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}$ ناصفرند و این با مقسوم‌علیهِ صفر نبودنِ عنصر اول در تناقض است. پس همریختی حلقه‌ایِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m} \to D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1}\big) \times \dots \times D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_m}\big)$ که در بالا داشتیم، اعضایی از مبدأ را که مقسوم‌علیهِ صفر نیستند، به اعضایی وارون‌پذیر ازحلقه‌ی مقصد می‌برد. پس بنابر ویژگی جهانیِ موضعی‌سازی باید به صورت یک همریختی حلقه‌ایِ خوش‌تعریفِ $D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}\big) \to D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1}\big) \times \dots \times D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_m}\big)$ فاکتور شود. ضابطه‌ی این همریختی چنین خواهد بود:

$$(*) \begin{cases} D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}\big) \to D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_1}\big) \times \dots \times D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_m}\big) \\ \frac{x+\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}{s+\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m} \mapsto \big(\frac{x+\mathfrak{p}_1}{s+\mathfrak{p}_1}, \dots, \frac{x+\mathfrak{p}_m}{s+\mathfrak{p}_m}\big) \end{cases}$$

ادعا می‌کنیم همریختیِ ظاهر شده در $(*)$ یکریختی است. برای اثباتِ یک‌به‌یک بودن توجه کنید که اعضای هسته به شکلِ $\frac{x+\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}{s+\mathfrak{p}_1\cap\dots\cap\mathfrak{p}_m}$هایی هستند که برای هر $1 \leq i \leq m$ در $\frac{x+\mathfrak{p}_i}{s+\mathfrak{p}_i} = 0 \in D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}\big)$ صدق می‌کنند.ولی $D\big(\frac{A}{\mathfrak{p}_i}\big)$ میدان کسرهای حوزه‌ی

[5] اینجا حلقه‌ها همگی جابجایی و یکدار فرض شده‌اند و همریختی‌های میان حلقه‌ها، یک را به یک می‌برند.

صحیحِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ بود و لذا صفر بودنِ $\frac{x+\mathfrak{p}_i}{s+\mathfrak{p}_i}$ در آن به معنای صفر بودنِ عنصرِ $x+\mathfrak{p}_i$ از $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ و از آنجا به معنای تعلقِ x به $\mathfrak{p}_i$ است. بنابراین برای هر $\frac{x+\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m}{s+\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m}$ ای که در هسته‌ی $(*)$ باشد باید داشته باشیم $x\in\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m$ که به معنای بدیهی بودنِ هسته است و یک‌به‌یک بودنِ $(*)$ را بدست می‌دهد. در نهایت به اثباتِ پوشایی می‌پردازیم: برای هر $1\le i\le m$ اعضای x_i, s_i از A را چنان بگیرید که $s_i+\mathfrak{p}_i$ در حلقه‌ی خارج‌قسمتیِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ مقسوم‌علیهِ صفر نباشد یا معادلاً با توجه به حوزه‌ی صحیح بودنِ $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$: $s_i\notin\mathfrak{p}_i$. نشان می‌دهیم $\left(\frac{x_i+\mathfrak{p}_i}{s_i+\mathfrak{p}_i}\right)_{1\le i\le m}$ در بُردِ $(*)$ واقع است. مجدداً از این استفاده می‌کنیم که برای هر i: $\cap_{1\le j\le m, j\neq i}\mathfrak{p}_j \subsetneq \mathfrak{p}_i$. پس می‌توان عناصرِ $z_1,\ldots,z_m\in A$ را چنان برگزید که برای هر i داشته باشیم $z_i\in\cap_{1\le j\le m}\mathfrak{p}_j-\mathfrak{p}_i$. ادعا می‌کنیم که تحتِ $(*)$ داریم:

$$(**)\frac{\sum_{j=1}^m x_jz_j+\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m}{\sum_{j=1}^m s_jz_j+\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m}\mapsto\left(\frac{x_i+\mathfrak{p}_i}{s_i+\mathfrak{p}_i}\right)_{1\le i\le m}$$

اثباتِ این پوشایی همریختیِ $(*)$ را هم نشان خواهد داد و یکریختی بودنِ $(*)$ و از آنجا حکمِ مطلوب را بدست می‌دهد. پس درستیِ $(**)$ را نشان می‌دهیم. اولاً توجه کنید عنصرِ ظاهر شده در سمت چپِ آن خوش‌تعریف است یا به عبارت دیگر $\sum_{j=1}^m s_jz_j+\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m$ در $\frac{A}{\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m}$ مقسوم‌علیهِ صفر نیست. زیرا اگر باشد $y\in A-\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m$ موجود خواهد بود به قسمی که $y(\sum_{j=1}^m s_jz)\in\mathfrak{p}_1\cap\cdots\cap\mathfrak{p}_m$. ولی $1\le i\le m$ ای موجود است که برایش $y\notin\mathfrak{p}_i$ و بنابراین به $y(\sum_{j=1}^m s_jz)\in\mathfrak{p}_i$ و از آنجا با توجه به اول بودنِ ایده‌آلِ $\mathfrak{p}_i$، تعلقِ s_jها به آن به ازای $j\neq i$ و عدم تعلقِ s_i, z_i, y به آن، به تناقض می‌رسیم. ثانیاً به سادگی می‌توان دید که $(**)$ برقرار است. چرا که عنصرِ ظاهر شده در سمت چپِ آن با توجه به ضابطه‌ی $(*)$ تصویر می‌شود به $\left(\frac{\sum_{j=1}^m x_jz_j+\mathfrak{p}_i}{\sum_{j=1}^m s_jz_j+\mathfrak{p}_i}\right)_{1\le i\le m}$ و تنها کافی است توجه کرد که برای هر i، $\sum_{j=1}^m x_jz_j$ و $\sum_{j=1}^m s_jz_j$ به دلیل شیوه‌ی انتخابِ z_jها به پیمانه‌ی $\mathfrak{p}_i$ به ترتیب برابرند با x_iz_i و s_iz_i. پس مؤلفه‌ی iاُمِ $\left(\frac{\sum_{j=1}^m x_jz_j+\mathfrak{p}_i}{\sum_{j=1}^m s_jz_j+\mathfrak{p}_i}\right)_{1\le i\le m}$ برابر است با $\frac{x_iz_i+\mathfrak{p}_i}{s_iz_i+\mathfrak{p}_i}$، عنصری از میدان کسرهای $\frac{A}{\mathfrak{p}_i}$ که به دلیل ناصفر بودنِ عنصرِ $z_i+\mathfrak{p}_i$ از آن (که نتیجه‌ای است از شیوه‌ی انتخابِ z_i) مساوی است با $\frac{x_i+\mathfrak{p}_i}{s_i+\mathfrak{p}_i}$ که همان مؤلفه‌ی iاُمِ سمت راستِ $(**)$ است.

پاسخ ۶. قسمت الف) باید نشان دهیم که برای هر $n\in\mathbb{Z}$، $2\cos(\frac{\pi n}{180})$ و $2\sin(\frac{\pi n}{180})$ که در آن زاویه‌ها برحسب رادیان هستند اعدادی صحیح جبری‌اند. توجه کنید:

$$2\cos(\frac{\pi n}{180})=e^{i\frac{\pi n}{180}}+e^{-i\frac{\pi n}{180}}\qquad 2\sin(\frac{\pi n}{180})=ie^{-i\frac{\pi n}{180}}-ie^{i\frac{\pi n}{180}}$$

با توجه به این تساوی‌ها و اینکه اعداد صحیح جبری تشکیلِ یک حلقه می‌دهند، کافی است اثبات کنیم $e^{i\frac{\pi n}{180}}$ و $e^{-i\frac{\pi n}{180}}$ ریشه‌ی چندجمله‌هایی تکین با ضرایبِ صحیح هستند.این هم از آنجا نتیجه می‌شود که:

$$\left(e^{i\frac{\pi n}{180}}\right)^{180}=\left(e^{-i\frac{\pi n}{180}}\right)^{180}=e^{i\pi n}=e^{-i\pi n}=\cos(\pi n)=(-1)^n$$

که نشان می‌دهد $e^{i\frac{\pi n}{180}}$ و $e^{-i\frac{\pi n}{180}}$ ریشه‌های چندجمله‌ایِ $x^n-(-1)^n$ هستند.

قسمت ب) از حکمِ قسمتِ قبل، $2\cos 36^\circ$ و $2\sin 36^\circ$ اعدادی صحیح جبری و لذا جبری‌اند. پس $\cos 36^\circ$ و $\sin 36^\circ$ اعدادی جبری‌اند و بنابراین $\mathbb{Q}(\cos 36^\circ)=\mathbb{Q}[\cos 36^\circ]$ و $\mathbb{Q}(\sin 36^\circ)=\mathbb{Q}[\sin 36^\circ]$ توسیع‌هایی متناهی از $\mathbb{Q}$ هستند. محاسباتِ زیر نشان می‌دهند که $\cos 36^\circ$ به صورت چندجمله‌ای از $\sin 36^\circ$ قابلِ بیان است:

$$\begin{cases}\cos 36^\circ=1-2\sin^2 18^\circ\\ \sin 18^\circ=\cos 72^\circ\\ \cos 72^\circ = 1-2\sin^2 36^\circ\end{cases}\Rightarrow \cos 36^\circ=1-2\left(1-2\sin^2 36^\circ\right)^2$$

لذا $\cos 36^\circ\in\mathbb{Q}(\sin 36^\circ)$. ادعا می‌کنیم گزاره‌ی دیگر مبنی بر تعلقِ $\sin 36^\circ$ به $\mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$ صحیح نیست. برهان‌خلف: فرض کنید این هم برقرار باشد. پس با توجه به اینکه قبلاً $\cos 36^\circ\in\mathbb{Q}(\sin 36^\circ)$ اثبات گردید: $\mathbb{Q}(\cos 36^\circ)=\mathbb{Q}(\sin 36^\circ)=\mathbb{Q}(\cos 36^\circ,\sin 36^\circ)$. ولی با استفاده از اتحادِ $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ می‌توان به سادگی دید که $\cos 36^\circ$ ریشه‌ی یک چندجمله‌ای ناصفرِ از درجه‌ی ۳ با ضرایبِ گویا است:

$$\begin{cases}\cos 108^\circ = 4\cos^3 36^\circ - 3\cos 36^\circ\\ \cos 108^\circ = -\cos 72^\circ\\ \cos 72^\circ = 2\cos^2 36^\circ - 1\end{cases}$$

$$\Rightarrow 4\cos^3 36^\circ+2\cos^2 36^\circ-3\cos 36^\circ-1=0$$

$x=-1$ ریشه‌ی چندجمله‌ای سومِ $4x^3+2x^2-3x-1=0$ است و این چندجمله‌ای به صورتِ $(x+1)(4x^2-2x-1)$ تجزیه می‌شود و لذا $\cos 36^\circ$ در چندجمله‌ای درجه‌ی دومِ $4x^2-2x-1$ صدق می‌کند. این چندجمله‌ای بر $\mathbb{Q}$ تحویل‌ناپذیر است زیرا ریشه‌هایش عبارتند از $\frac{1\pm\sqrt5}{4}$ که گویا نیستند[6] و لذا $\cos 36^\circ$ ریشه‌ی یک چندجمله‌ای درجه‌ی دوم و تحویل‌ناپذیر با ضرایب گویا است، امری که نشان می‌دهد $[\mathbb{Q}(\cos 36^\circ):\mathbb{Q}]=2$، $\{1,\cos 36^\circ\}$ پایه‌ای است برای $\mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$ بر $\mathbb{Q}$ و چندجمله‌ای مینیمالِ $\cos 36^\circ$ بر $\mathbb{Q}$ با $4x^2-2x-1$ داده می‌شود. $\sin 36^\circ$ باید به صورت ترکیب خطی عناصر این پایه با ضرایب گویا قابل بیان باشد: $\sin 36^\circ = a\cos 36^\circ + b$ به ازای اعداد گویای مناسبی همچون a و b. حال $\cos^2 36^\circ+\sin^2 36^\circ=1$ نشان می‌دهد که $\cos 36^\circ$ ریشه‌ی چندجمله‌ایِ ضرایب گویای زیر است:

$$x^2+(ax+b)^2-1$$

[6] توجه کنید که این اثبات می‌کند $\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt5}{4}$.

پس این چندجمله‌ای در $\mathbb{Q}[x]$ مضربی است از چندجمله‌ای مینیمالِ $\cos 36^\circ$ که برابر بود با $4x^2 - 2x - 1$. ولی چون هر دوی این چندجمله‌ای‌ها درجه‌ی دو هستند، باید یکی از آنها از ضرب دیگری در عددی گویا بدست آیند. با مقایسه‌ی ضریبِ پیشرو در این دو چندجمله‌ای، این عدد گویا نسبت ضریبِ x^2 در این چندجمله‌ای خواهد بود و بنابراین:

$$x^2 + (ax+b)^2 - 1 = \frac{a^2+1}{4}(4x^2 - 2x - 1)$$

با مقایسه‌ی ضرایبِ x و ثابت در دو طرف این تساوی به ترتیب خواهیم داشت $2ab = -\frac{a^2+1}{2}$ و $b^2 - 1 = -\frac{a^2+1}{4}$. تساوی اول نتیجه می‌دهد $b = -\frac{a+\frac{1}{a}}{4}$ و با قرار دادنِ آن در دومی داریم:

$$(\frac{a+\frac{1}{a}}{4})^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{5a^2}{16} + \frac{1}{16a^2} = \frac{5}{8}$$

ولی از تساوی فوق عدد گویای $t := a^2$ در $5t^2 - 10t + 1 = 0$ صدق می‌کند، معادله‌ای که ریشه‌هایش عبارتند از $\frac{5\pm2\sqrt{5}}{5}$ که گویا نیستند. تناقض حاصله نشان می‌دهد $\sin 36^\circ \notin \mathbb{Q}(\cos 36^\circ)$[7].

پاسخ ۷. *جمله‌ی عمومیِ این سری را به شیوه‌ی مناسبی می‌نویسیم به قسمی که این مجموع به یک مجموع تلسکوپی تبدیل گردد. بدین منظور توجه کنید که صورت کسر ظاهر شده در جمله‌ی عمومی یعنی $2k+1$ برابر است با $\frac{(4k+1)+(4k+3)}{4}$. پس می‌توان نوشت:*

$$\frac{2k+1}{(4k+1)(4k+3)(4k+5)} = \frac{(4k+1)+(4k+3)}{4(4k+1)(4k+3)(4k+5)}$$
$$= \frac{1}{4(4k+3)(4k+5)} + \frac{1}{4(4k+1)(4k+5)}$$
$$= (\frac{1}{8(4k+3)} - \frac{1}{8(4k+5)}) + (\frac{1}{16(4k+1)} - \frac{1}{16(4k+5)})$$

بنابراین حاصل سری مطلوب اینگونه محاسبه می‌شود:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(4k+1)(4k+3)(4k+5)} =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{8(4k+3)} - \frac{1}{8(4k+5)})$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{16(4k+1)} - \frac{1}{16(4k+5)})$$
$$= \frac{1}{8}(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}) + \frac{1}{16(4k+1)}|_{k=0}$$
$$= \frac{1}{8}(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}) + \frac{1}{16}$$

مجموعِ $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ با توجه به بسط تیلورِ $\arctan(x)$ حول مبدأ برابر است با $\frac{\pi}{4}$ و در نتیجه حاصل سریِ مطلوب با $\frac{\pi}{32} - \frac{3}{16}$ داده می‌شود.

پاسخ ۸. *فرض کنید $b \in B$ دلخواه باشد. کافی است نشان دهیم $b \in C$. $A \neq \emptyset$ و لذا یک نقطه‌ی $a_1 \in A$ را می‌توان برگزید. $a_1 + b$ عضوی از $A + B$ است و بنابراین طبق فرض مسأله باید $a_1 + b \in A + C$. پس $a_2 \in A$ و $c_1 \in C$ موجودند چنان‌که: $a_1 + b = a_2 + c_1$. در ادامه $a_2 + b$ را در نظر بگیرید که به $A + B$ تعلق دارد. پس مجدداً با استفاده از $A + B \subseteq A + C$ باید $a_3 \in A$ و $c_2 \in C$ موجود باشند به قسمی که $a_2 + b = a_3 + c_2$. دوباره همان روند بالا را ادامه می‌دهیم: $a_3 + b$ که عضوی از $A + B$ است باید به $A + C$ هم تعلق داشته باشدو... . به این صورت می‌توان دنباله‌های $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ و $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ از اعضای به ترتیب A و C را ساخت با این ویژگی که برای هر عدد طبیعیِ m داشته باشیم: $a_m + b = a_{m+1} + c_m$. k را یک عدد طبیعیِ دلخواه بگیرید. با جمع زدن تمامی این تساوی‌ها برای $1 \leq m \leq k$ داریم:*

$$\sum_{m=1}^{k}(a_m + b) = \sum_{m=1}^{k}(a_{m+1} + c_m) \Rightarrow kb = \sum_{m=1}^{k}(a_{m+1} - a_m)$$
$$+ \sum_{m=1}^{k} c_m = a_{k+1} - a_1 + \sum_{m=1}^{k} c_m$$
$$\Rightarrow b = \frac{a_{k+1} - a_1}{k} + \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} c_m$$

قرار دهید $c'_k = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} c_m$. چون $\{c_m\}_{m=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از نقاطِ C بود، تحدبِ این زیرمجموعه نشان می‌دهد که $\{c'_m\}_{m=1}^{\infty}$ هم دنباله‌ای است از اعضای C. همچنین دیدیم که $b - c'_k = \frac{a_{k+1}-a_1}{k}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$. اگر در این تساوی $k \to \infty$، سمت راست به دلیل آنکه a_iها عضو زیرمجموعه‌ی کراندارِ A بودند به صفر می‌رود و در

[7] توجه کنید به کمک آنچه که در جریان این حل حاصل شد، می‌توان چندجمله‌ای مینیمالِ $\sin 36^\circ$ بر $\mathbb{Q}$ را یافت. از احکامی که در بخش (ب) اثبات شد:

$$\mathbb{Q}(\cos 36^\circ) \subsetneq \mathbb{Q}(\sin 36^\circ), 2 = [\mathbb{Q}(\cos 36^\circ) : \mathbb{Q}] \mid [\mathbb{Q}(\sin 36^\circ) : \mathbb{Q}]$$
$$\Rightarrow [\mathbb{Q}(\sin 36^\circ) : \mathbb{Q}] \geq 4$$

از طرفِ دیگر $\cos 36^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 36^\circ}$ در $4\cos^2 36^\circ - 2\cos 36^\circ - 1 = 0$ صدق می‌کند و لذا $\sin 36^\circ$ ریشه‌ای است از $(4(1-x^2)-1)^2 - 4(1-x^2)$، عبارتی که به صورت چندجمله‌ای درجه‌ی چهارم و با ضرایب گویای $16x^4 - 20x^2 + 5$ ساده می‌شود. پس باید در نامساویِ $[\mathbb{Q}(\sin 36^\circ) : \mathbb{Q}] \geq 4$ تساوی برقرار شود و این چندجمله‌ای، چندجمله‌ای مینیمالِ $\sin 36^\circ$ بر اعداد گویا باشد.

نتیجه از تساوی مذکور: $\lim_{k\to\infty} c'_k = b$. ولی $\{c'_m\}_{m=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از عناصرِ C بود و C بنابر شرایط مسأله بسته. پس این حد نشان می‌دهد که $b \in C$ و این همان چیزی است که در پی آن بودیم.

پاسخ ۹. *برای راحتی در نمادگذاری، تابعِ $\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{i\ \text{مرتبه}}$ را که ترکیبِ iباره‌ی $f:[a,b]\to[a,b]$ با خودش است به f^i نمایش می‌دهیم. پس برای هر $m\in\mathbb{N}$ داریم:*

$$p_m = f^m(p_0)\ ,\ f^m(T_p)=\{f^n(p_0)\mid n\in\mathbb{N}, n\geq m\}$$

از این نتیجه می‌شود که:

$$T_p \supseteq f(T_p)\supseteq f^2(T_p)\supseteq\cdots\supsetneqq\emptyset$$

پس در خانواده‌ی $\{f^m(T_p)\}_{m\in\mathbb{N}}$ از زیرمجموعه‌های $[a,b]$، اشتراک هر تعداد متناهی از اعضا ناتهی است. ولی تمامی این زیرمجموعه‌ها فشرده‌اند زیرا T_p زیرمجموعه‌ای بسته و بنابراین فشرده از $[a,b]$ بود و در نتیجه هر $f^m(T_p)$ فشرده است چرا که تصویرِ زیرمجموعه‌ی فشرده‌ی T_p تحت تابع پیوسته‌ی $f^m:[a,b]\to[a,b]$ است. لذا باید اشتراکِ $\cap_{m\in\mathbb{N}}f^m(T_p)$ ناتهی باشد. x را عضوی از این اشتراک بگیرید. پس اولاً به ازای $s\in\mathbb{N}$ای باید $x=f^s(p_0)$ و ثانیاً چون $x\in f^{s+1}(T_p)$، $t\geq s+1$ موجود است به قسمی که $x=f^t(p_0)$. در نتیجه $t>s$ و $f^s(p_0)=f^t(p_0)$. با استفاده از این تساوی به کمک یک استقرای بسیار ساده خواهیم داشت:

$$\forall k,l\in\mathbb{N}\cup\{0\}: f^{k(t-s)+l+s}(p_0)=f^{l+s}(p_0)$$

حال یک عدد طبیعی دلخواهِ $n>t$ را با تقسیمِ $n-s$ بر $t-s$ می‌توان به صورتِ $q(t-s)+r+s$ نوشت که در آن q,r اعدادی صحیح و نامنفی‌اند و $r<t-s$. از گزاره‌ی فوق:

$$p_n=f^n(p_0)=f^{q(t-s)+r+s}(p_0)=f^{r+s}(p_0)$$

که چون $r+s<t$، به $\{p_0,\ldots,p_t\}$ تعلق دارد. این ثابت می‌کند T_p بر $\{p_0,\ldots,p_t\}$ منطبق است و لذا متناهی است.

پاسخ ۱۰. *از ویژگیِ مفروض برای $f:A\to\mathbb{R}$ نتیجه می‌شود که برای هر $x\in A$:*

$$\forall y\in A: f(x)\leq f(y)+M.d(x,y)$$
$$\Rightarrow f(x)\leq\inf_{y\in A}(f(y)+M.d(x,y))$$

ولی اگر $x=y$، آنگاه $f(y)+M.d(x,y)$ برابر می‌شود با $f(x)$. پس داریم: $f(x)=\inf_{y\in A}(f(y)+M.d(x,y))$ برای هر $x\in A$ و این در حالی است که اینفیممِ مقادیرِ $f(y)+M.d(x,y)$ در سمت راست را حتی در حالتِ $x\in X-A$ می‌توان در نظر گرفت. بنابراین به منظور گسترشِ $f:A\to\mathbb{R}$ به یک تابعِ $f:X\to\mathbb{R}$، این ایده به ذهن متبادر می‌شود که قرار دهیم:

$$g(x):=\inf_{y\in A}(f(y)+M.d(x,y))$$

برای هر $x\in X$. ابتدا باید نشان داد که این تعریف خالی از اشکال است، یعنی برای هر $x\in A$ مجموعه‌ی $\{f(y)+M.d(x,y)\mid y\in A\}$ از پایین کراندار است. بدین منظور یک عنصر دلخواهِ $a\in A$ انتخاب کنید. برای هر $y\in A$ باید $|f(y)-f(a)|\leq M.d(y,a)$ و لذا $f(y)\geq f(a)-M.d(y,a)$. پس:

$$\forall y\in A: f(y)+M.d(x,y)\geq f(a)+M.d(x,y)-M.d(y,a)$$
$$\overbrace{\geq}^{\text{نامساوی مثلث}}\ f(a)-M.d(x,a)$$

پس $\inf\{f(y)+M.d(x,y)\mid y\in A\}$ موجود است و تابعِ $g:X\to\mathbb{R}$ خوش‌تعریف. همچنین در ابتدا گفتیم که این تابع گسترشی است از f. تنها مورد باقی‌مانده اثبات آن است که در نقاط دلخواهِ x,x' از X، نامساویِ $|g(x)-g(x')|\leq M.d(x,x')$ برقرار است. تنها نشان می‌دهیم $g(x')-g(x)\leq M.d(x,x')$ و آنگاه با تعویض جای x,x' نامساویِ $g(x)-g(x')\leq M.d(x,x')$ نیز نتیجه می‌شود و ترکیب این دو حکم مطلوب را بدست خواهد داد. چون $g(x)$ بنابر تعریف برابر است با $\inf_{y\in A}(f(y)+M.d(x,y))$، دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاطِ A موجود است به قسمی که

$$\lim_{n\to\infty}\big(f(y_n)+M.d(x,y_n)\big)=g(x)$$

از طرف دیگر $g(x')$ با $\inf_{y\in A}(f(y)+M.d(x',y))$ داده می‌شد و لذا از هیچ‌یک از مقادیرِ $f(y_n)+M.d(x',y)$ تجاوز نمی‌کند. پس برای هر n:

$$g(x')\leq f(y_n)+M.d(x',y_n)$$
$$=\big(f(y_n)+M.d(x,y_n)\big)+M.\big(d(x',y_n)-d(x,y_n)\big)$$
$$\overbrace{\leq}^{\text{نامساوی مثلث}}\ \big(f(y_n)+M.d(x,y_n)\big)+M.d(x,x')$$

برای هر $n\in\mathbb{N}$. پس

$$g(x')\leq\limsup_{n\to\infty}\big(f(y_n)+M.d(x,y_n)\big)+M.d(x,x')$$

ولی از روش انتخاب دنباله‌ی $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$، حد فوق $g(x)$ است و بنابراین نامساوی اخیر تبدیل می‌شود به $g(x')-g(x)\leq M.d(x,x')$ و این حل را تکمیل می‌کند.

پاسخ ۱۱. *ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.*

لم. *از فرض نتیجه می‌شود که برای هر x_1,x_2,x_3 و اعداد نامنفی $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ که $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$، داریم:*

$$f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)\leq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\alpha_3f(x_3)+2\epsilon$$

اثبات لم.

$$\begin{aligned}
&f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)\\
&= f\big(\alpha_1x_1+(1-\alpha_1)(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}x_2+\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1}x_3)\big)\\
&\le \alpha_1 f(x_1)+(1-\alpha_1)f(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}x_2+\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1}x_3)+\epsilon\\
&\le \alpha_1 f(x_1)+(1-\alpha_1)\big(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1}f(x_2)+\frac{\alpha_3}{1-\alpha_1}f(x_3)+\epsilon\big)+\epsilon\\
&\le \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\alpha_3 f(x_3)+(2-\alpha_1)\epsilon\\
&\le \alpha_1 f(x_1)+\alpha_2 f(x_2)+\alpha_3 f(x_3)+2\epsilon
\end{aligned}$$

در ادامه به حل مسأله‌ی اصلی می‌پردازیم. فرض کنید F ناحیه‌ی بالای نمودار f باشد، یعنی:

$$F=\{(x,y)\mid y\ge f(x)\}$$

G را پوش محدب F فرض کنید. تعریف کنید

$$g(x)=\inf\{y\mid (x,y)\in G\}$$

نشان می‌دهیم $g(x)$ خاصیت مورد نظر را دارد. ابتدا توجه کنید که این تابع به وضوح محدب است. زیرا اگر $a,b\in\mathbb{R}$ و $\lambda\in[0,1]$ می‌توان گفت $g\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\le \lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)$. برای دیدن دلیل، توجه کنید که برای هر $\delta>0$، باید به دلیلِ $g(a)=\inf_{(a,y)\in G} y$ و $g(b)=\inf_{(b,y)\in G} y$ نقاطی همچون $(a,g(a)+u)$ و $(b,g(b)+v)$ در G موجود باشند به قسمی که $u,v\in[0,\delta]$. ولی G زیرمجموعه‌ای محدب از $\mathbb{R}^2$ بود. بنابراین

$$\begin{aligned}
&\lambda.\big(a,g(a)+u\big)+(1-\lambda).\big(b,g(b)+v\big)\\
&=\big(\lambda a+(1-\lambda)b,\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)+\lambda u+(1-\lambda)v\big)
\end{aligned}$$

هم به G تعلق خواهد داشت. ولی در این صورت مجدداً با توجه به ضابطه‌ی g باید:

$$g\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\le \lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)+\lambda u+(1-\lambda)v$$

در سمت راست این نامساوی به دلیل $\lambda\in[0,1]$ و $u,v\in[0,\delta]$ داریم $\lambda u+(1-\lambda)v\le\delta$ و بنابراین اگر $\delta>0$ که دلخواه بود به صفر میل کند، به همان نامساوی مطلوبِ $g\big(\lambda a+(1-\lambda)b\big)\le\lambda g(a)+(1-\lambda)g(b)$ می‌رسیم که تحدبِ g را نشان می‌دهد. در انتها به کمک لم اثبات می‌کنیم که همواره $|f-g|\le 2\epsilon$. فرض کنید $(x,y)\in G$. در این صورت بنابر قضیه‌ی کاراتئودوری [8]، نقاط

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3)$$

و اعداد نامنفی $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ وجود دارند که $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ و

$$x=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3\quad y=\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\alpha_3y_3$$

بنابر لمی که اثبات کردیم:

$$\begin{aligned}
f(x)&\le\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\alpha_3f(x_3)\\
&\le\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+\alpha_3y_3+2\epsilon
\end{aligned}$$

بنابراین $y\ge f(x)-2\epsilon$. پس با توجه به نحوه‌ی تعریفِ g، داریم:

$$g(x)=\inf_{(x,y)\in G} y\ge f(x)-2\epsilon$$

از طرفی با توجه به این‌که $(x,f(x))\in F\subset G$، باید $g(x)\le f(x)$. لذا حکمِ مطلوب نتیجه می‌شود:

$$f(x)-2\epsilon\le g(x)\le f(x)\Rightarrow |f(x)-g(x)|\le 2\epsilon$$

پاسخ ۱۲. مشتق مرتبه‌ی kاُمِ $f(t)$ ($k\ge 0$)، $f^{(k)}(t)$ بسته به زوجیتِ k یا ترکیب خطی توابعِ $\sin(2\pi t),\dots,\sin(2\pi Nt)$ است یا ترکیب خطی توابعِ $\cos(2\pi t),\dots,\cos(2\pi Nt)$:

$$f^{(k)}(t)=\begin{cases}(-1)^{\frac{k}{2}}\sum_{j=1}^N a_j(2\pi j)^k\sin(2\pi jt) & \text{زوج}\ k\\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}\sum_{j=1}^N a_j(2\pi j)^k\cos(2\pi jt) & \text{فرد}\ k\end{cases}$$

همه‌ی این توابع متناوب با دوره‌ی تناوبِ یک هستند. ابتدا نشان می‌دهیم که به ازای مقادیرِ فردِ $k=2m+1$ داریم $N_{2m+1}\le 2N$ و به ازای mهای به اندازه‌ی کافی بزرگ تساوی برقرار می‌شود. سپس نشان خواهیم داد $N_k\le N_{k+1}$ برای هر k. ترکیبِ این دو گزاره، احکامِ مطلوب مبنی بر $N_0\le N_1\cdots$ و $\lim_{k\to\infty}N_k=2N$ را بدست خواهد داد. در تساویِ $f^{(2m+1)}(t)=(-1)^m\sum_{j=1}^N a_j(2\pi j)^{2m+1}\cos(2\pi jt)$ می‌توان هر جمله‌ی $\cos(2\pi jt)$ را به صورت یک چندجمله‌ایِ درجه‌ی $2j$ از $\cos(\pi t)$ نوشت:

$$\begin{aligned}
\cos(2\pi jt)&=\mathrm{Re}\big((\cos(\pi t)+i\sin(\pi t))^{2j}\big)\\
&=\sum_{k=0}^{j}\binom{2j}{2k}(-1)^{j-k}\cos^{2k}(\pi t)\sin^{2j-2k}(\pi t)\\
&=\sum_{k=0}^{j}\binom{2j}{2k}(-1)^{j-k}\cos^{2k}(\pi t)(1-\cos^2(\pi t))^{j-k}
\end{aligned}$$

اگر در این مجموع عباراتِ $(1-\cos^2(\pi t))^{j-k}$ را بسط دهیم، به یک چندجمله‌ای درجه‌ی $2j$ از $\cos(\pi t)$ می‌رسیم که ضریبِ $\cos(\pi t)^{2j}$ در آن با $\sum_{k=0}^{j}\binom{2j}{2k}=2^{2j-1}$ داده می‌شود. بنابراین با قرار دادن در تساویِ

$$f^{(2m+1)}(t)=(-1)^m\sum_{j=1}^{N}a_j(2\pi j)^{2m+1}\cos(2\pi jt)$$

نتیجه می‌شود که $f^{(2m+1)}(t)$ یک چندجمله‌ایِ درجه‌ی $2N$ از $\cos(\pi t)$ است. پس با توجه به اینکه تابعِ $t\mapsto\cos(\pi t)$ بر $(0,1)$ یک‌به‌یک است و مشتقش در هیچ نقطه‌ای صفر نمی‌شود، ، $f^{(2m+1)}(t)$ نمی‌تواند در $(0,1)$ با حساب تکرر بیش از $2N$ ریشه داشته

[8] قضیه‌ی کاراتئودوری بیان می‌کند که اگر نقطه‌ای در پوش محدبِ مجموعه‌ای متشکل از نقاطِ $\mathbb{R}^d$ باشد، آنگاه در پوش محدبِ زیرمجموعه‌ای حداکثر $d+1$ عضوی از این مجموعه واقع خواهد بود.

باشد. اگر m به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد، $t=0$ ریشه‌ی $f^{2m+1}(t)$ نیست. در واقع در ادامه اثبات خواهیم کرد که برای mهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، داریم $f^{(2m+1)}(\frac{k}{2N}) \neq 0$ برای هر $0 \le k < 2N$. آنگاه با توجه به آنچه که درباره‌ی تعداد ریشه‌های $f^{(2m+1)}$ در $[0,1)$ بیان شد، می‌توان نتیجه گرفت که برای این مقادیر از m: $2N \le N_{2m+1}$ و این به همراه صعودی بودن دنباله‌ی $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ -که آن را اثبات خواهیم کرد- نامساوی $2N \le N_k$ برای هر k را نتیجه می‌دهد. پس به بررسی $f^{(2m+1)}(\frac{k}{2N})$ها می‌پردازیم. با توجه به ضابطه‌ی $f^{2m+1}(t)$ که در بالا ظاهر شده:

$$f^{(2m+1)}(\frac{k}{2N}) = (-1)^m \sum_{j=1}^{N} a_j (2\pi j)^{2m+1}\cos(\frac{\pi jk}{N})$$
$$= (-1)^{k+m} a_N (2\pi N)^{2m+1}$$
$$+ (-1)^m \sum_{j=1}^{N-1} a_j (2\pi j)^{2m+1}\cos(\frac{\pi jk}{N})$$

پس به ازای $0 \le k < 2N$هایی که $(-1)^{k+m}a_N > 0$:

$$f^{(2m+1)}(\frac{k}{2N}) \ge |a_N|(2\pi N)^{2m+1} - \sum_{j=1}^{N-1}|a_j|(2\pi j)^{2m+1}$$

و به ازای $0 \le k < 2N$هایی که $(-1)^{k+m}a_N < 0$:

$$f^{(2m+1)}(\frac{k}{2N}) \le -|a_N|(2\pi N)^{2m+1} + \sum_{j=1}^{N-1}|a_j|(2\pi j)^{2m+1}$$

از طرف دیگر چون $a_N \neq 0$، اگر عدد طبیعی m به اندازه‌ی کافی بزرگ باشد: $|a_N|(2\pi N)^{2m+1} > \sum_{j=1}^{N-1}|a_j|(2\pi j)^{2m+1}$. لذا آنچه که در بالا بیان شد، نشان می‌دهد که به ازای mهای به اندازه‌ی کافی بزرگ، علامت $f^{(2m+1)}(t)$ در نقاط $0, \frac{1}{2N}, \ldots, \frac{2N-1}{2N}$ از $[0,1)$ به طور متناوب تغییر می‌کند. این در وهله‌ی اول نتیجه می‌دهد که به ازای این مقادیر m، $t=0$ ریشه‌ای از $f^{(2m+1)}(t)$ نیست و بنابراین با توجه به اینکه دیدیم تعداد ریشه‌های این تابع در $[0,1)$ با حساب تکرر حداکثر $2N$ است، $2N \le N_{2m+1}$ به ازای این مقادیر از m. ثانیاً قضیه‌ی مقدار میانی نشان می‌دهد که از جایی به بعد $f^{2m+1}(t)$ در هر یک از زیربازه‌های $(\frac{k}{2N}, \frac{k+1}{2N})$ $0 \le k \le 2N$ ریشه دارد و بنابراین باید در $2N \le N_{2m+1}$ از جایی به بعد تساوی برقرار شود. تنها مورد باقی مانده اثبات این مطلب است که برای هر عدد صحیح و نامنفی دلخواه k: $N_k \le N_{k+1}$. توجه کنید که به دلیل تناوبی بودن، تعداد ریشه‌های $f^{(k)}$ در هر بازه‌ی $[a, a+1)$ با N_k داده می‌شود. ریشه‌های دوبدو متمایز این تابع در $[0,1)$ را $t_1 < t_2 < \cdots < t_s$ می‌نامیم و فرض کنید تکرر ریشه‌ی t_i از $f^{(k)}(t)$ عدد طبیعی m_i باشد. امری که نشان می‌دهد $\sum_{i=1}^{s} m_i = N_k$. پس $t_1 < \cdots < t_k < t_1 + 1$ و به دلیل تناوبی بودن، $t_1 + 1$ نیز ریشه‌ای است از $f^{(k)}(t)$ با تکرر m_s. حال مشتق $f^{(k)}(t)$ یا همان $f^{(k+1)}(t)$، در هر t_i $(1 \le i \le s)$ ریشه‌ای با تکرر $m_i - 1$ دارد. به علاوه در هریک از بازه‌های

$$(t_1,t_2),(t_2,t_3),\ldots,(t_{s-1},t_s),(t_s,t_1+1)$$

نیز بنابر قضیه‌ی رول صفر می‌شود، چرا که در دو انتهای هریک از این بازه‌ها صفر است. لذا $f^{(k+1)}(t)$ در $[t_1, t_1+1)$ - و در نتیجه در $[0,1)$- با احتساب تکرر حداقل

$$\sum_{i=1}^{s}(m_i - 1) + s = N_k$$

ریشه دارد و از آنجا $N_{k+1} \ge N_k$.

پاسخ ۱۳. ابتدا نشان می‌دهیم که هر نگاشت حافظ p-نرم باید نگاشتی مستوی (ترکیب یک نگاشت خطی و یک انتقال) باشد. به سادگی می‌توان دید که یک نگاشت $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با این ویژگی که هر خط را به یک خط ببرد، مستوی است. پس اینجا نشان می‌دهیم که هر نگاشت حافظ p-نرم $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ حائز چنین ویژگی‌ای است و بدین منظور تنها کافی است نشان دهیم که T باید هر سه نقطه‌ی هم‌خط را به سه نقطه‌ی هم‌خط تصویر کند. فرض کنید $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^2$ هم‌خط باشند و x_2 بین دو نقطه‌ی دیگر واقع شود. از این نکته استفاده می‌کنیم که برای p-نرم نامساوی مثلث برقرار است:

$$\forall x,y \in \mathbb{R}^2 : \| x+y \|_p \le \| x \|_p + \| y \|_p$$

با تساوی وقتی و تنها وقتی که یکی از x و y مضرب اسکالر نامنفی‌ای از دیگری شود. بنابراین اینجا چون x_2 بر پاره‌خط واصل بین x_1 و x_3 واقع است: $\| x_1 - x_2 \|_p + \| x_2 - x_3 \|_p = \| x_1 - x_3 \|_p$. اکنون با توجه به اینکه T حافظ نرم $\| \ . \ \|_p$ است:

$$\| T(x_1) - T(x_2) \|_p + \| T(x_2) - T(x_3) \|_p = \| T(x_1) - T(x_3) \|_p$$

که با توجه به حالت تساوی در نامساوی مثلثی که برای $\| \ . \ \|_p$ داریم، به معنای آن خواهد بود که $T(x_2)$ بر پاره‌خط واصل بین $T(x_1)$ و $T(x_3)$ قرار دارد و در نتیجه این سه نقطه هم‌خط‌اند. لذا توجه خود را به رده‌بندی نگاشت‌های مستوی $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ای معطوف می‌کنیم که حافظ p-نرم باشند. به وضوح اگر T از چپ با یک انتقال ترکیب شود، همچنان برای هر $x, y \in \mathbb{R}^2$ تساوی $\| Tx - Ty \|_p = \| x - y \|_p$ معتبر باقی می‌ماند. پس بدون کاسته شدن از کلیت می‌توانیم فرض کنیم که T خطی است. ماتریس نمایش آن در پایه‌ی استاندارد برای $\mathbb{R}^2$ را $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ می‌گیریم. پس T با ضابطه‌ی $T(u,v) = (au+bv, cu+dv)$ داده می‌شود و چون به دلیل حافظ نرم بودن یک‌به‌یک است، باید $ad - bc \neq 0$. حال مسأله تبدیل می‌شود به یافتن تمامی $a,b,c,d \in \mathbb{R}$هایی که برای آنها

$$\forall u,v \in \mathbb{R} : |au+bv|^p + |cu+dv|^p = |u|^p + |v|^p$$

پس داریم:

$$(*)\ ad-bc\neq 0,\ \forall x\in\mathbb{R}: |ax+b|^p+|cx+d|^p=|x|^p+1$$

در سمت راستِ (*) تابعِ $x\mapsto |x|^p+1$ حولِ $x=0$ هموار (C^∞) است مگر در حالتی که $p\geq 1$ یک عدد طبیعیِ زوج باشد. زیرا در حالتِ $p\notin\{2k\mid k\in\mathbb{N}\}$، $x\mapsto |x|^p$ در $x=0$ مشتق مرتبه‌ی $\lceil p\rceil$اُم ندارد. بنابراین دو حالت مجزا در نظر می‌گیریم و ابتدا فرض می‌کنیم که p یک عدد طبیعیِ زوج نباشد. در چنین حالتی سمت چپِ (*) نباید حولِ مبدأ هموار باشد. ولی هرگاه $x=0$ ریشه‌ی $ax+b$ و $cx+d$ نباشد، توابعِ $x\mapsto|ax+b|$ و $x\mapsto|cx+d|$ و به تبع آنها توابعی از x که در سمت چپِ (*) ظاهر شده‌اند هم حول مبدأ هموار خواهند بود. لذا باید $b=0$ یا $d=0$. با تعویض جای زوج مرتب‌های (a,b) و (c,d) یا معادلاً با تعویض جای سطرها در ماتریس نمایشِ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$، (*) همچنان معتبر خواهد ماند. لذا بدون کاسته شدن از کلیت فرض می‌کنیم $b=0$. آنگاه چون $ad-bc\neq 0$ باید $a,d\neq 0$ و (*) تبدیل می‌شود به $|cx+d|^p=(1-|a|^p)|x|^p+1$ (**) برای هر x. اگر $c=0$ که تساوی اخیر تنها به شرطِ $a=\pm1, d=\pm1$ می‌تواند معتبر باشد. پس تا اینجا به $\begin{bmatrix}a&0\\0&d\end{bmatrix}$ ($a,d\in\{\pm1\}$ و البته ماتریس‌های حاصل از عوض کردن جای سطرها در آن) به عنوان حالت‌های ممکن برای ماتریس نمایشِ T در پایه‌ی استاندارد می‌رسیم. در ادامه به حالتی می‌پردازیم که در (**) داشته باشیم $c\neq 0$. مجدداً بر مبنای تکینگی‌های توابعِ ظاهر شده در دو طرف تساویِ مذکور استدلال می‌کنیم: چون $c\neq 0$ و $p\geq 1$ یک عدد طبیعیِ زوج نیست، $x\mapsto|cx+d|^p$ حولِ $x=\frac{-d}{c}$ هموار نیست در حالی که در سمت راستِ (**) $x\mapsto(1-|a|^p)|x|^p$ حداکثر در $x=0$ مشکلِ C^∞ نبودن را خواهد داشت. پس $d=0$ که گفته بودیم امکان‌پذیر نیست. لذا کار در حالتِ $p\notin\{2k\mid k\in\mathbb{N}\}$ تمام است و چنان که دیدیم، دوحالت ممکن است برای a,b,c,dای که (*) را برآورده می‌کنند رخ دهد: $b=c=0,\ a,d\in\{\pm1\}$ یا آنکه $a=d=0,\ b,c\in\{\pm1\}$. بدیهی است که در این موارد خواهیم داشت $|au+bv|^p+|cu+dv|^p=|u|^p+|v|^p$ برای هر $(u,v)\in\mathbb{R}^2$. بنابراین نگاشت‌های حافظِ p-نرم و خطیِ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ به ازای این مقادیر از p دقیقاً عبارتند از آنهایی که به ازای چنین $a,b,c.d$هایی در پایه‌ی استاندارد با $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ داده می‌شوند، یعنی دورانِ به زاویه‌ای مضربِ 90° حولِ مبدأ و به علاوه انعکاس نسبت به یکی از محورها یا نیمسازهای نواحی مختصاتی. طبعاً ترکیبِ این نگاشت‌های خطی با انتقال، تمامی نگاشت‌های حافظ p-نرم را تعیین خواهد کرد.

در انتها به حالتی می‌پردازیم که در (*) داشته باشیم $p=2k$ به ازای یک $k\in\mathbb{N}$. این بدان معنی خواهد بود که دو چندجمله‌ایِ $(ax+b)^{2k}+(cx+d)^{2k}$ و $x^{2k}+1$ متحد هستند. ولی اگر $k>1$ مقایسه‌ی ضریبِ x و x^2 در این دو چندجمله‌ای نشان می‌دهد که به ترتیب $2ka^{2k-1}b+2kc^{2k-1}d=0$ و $\binom{2k}{2}a^{2k-2}b^2+\binom{2k}{2}c^{2k-2}d^2=0$. پس $a^{2k-1}b=-c^{2k-1}d$ و $a^{2k-2}b^2=-c^{2k-2}d^2$. اگر هیچ‌یک از a,b,c,d صفر نباشند، با تقسیمِ این دو تساوی بر هم به $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌رسیم که با $ad\neq cd$ در تناقض است. لذا یکی از a,b,c,d صفر است. با ترکیبِ این مطلب با تساویِ $a^{2k-1}b=-c^{2k-1}d$ و گزاره‌ی $ad-bc\neq 0$ نتیجه می‌شود که یا باید $a=d=0$ یا آنکه $b=c=0$.

اگر $a=d=0$، برابر بودنِ چندجمله‌ای‌های $(ax+b)^{2k}+(cx+d)^{2k}$ و $x^{2k}+1$ تنها به شرطِ $c^{2k}=b^{2k}=1$ یا معادلاً $b,c\in\{\pm1\}$ می‌تواند رخ دهد و هرگاه $b=c=0$، برابر بودنِ این دو چندجمله‌ای تنها به شرطِ $a^{2k}=d^{2k}=1$ یا معادلاً $a,d\in\{\pm1\}$ است که به وقوع می‌پیوندد. بنابراین مقادیرِ مجاز برای a,b,c,d در (*) در حالتی که p یک عدد زوجِ بزرگتر از ۲ باشد، با حالتی که $p\geq1$ صحیح و زوج نباشد یکسان شد. امری که نشان می‌دهد برای $p=2k$ که در آن $k\in\mathbb{N}, k>1$، نگاشت‌های $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ی حافظِ p-نرم همان‌هایی‌اند که پیشتر بیان شدند. در نهایت تنها $p=2$ برای بررسی باقی می‌ماند که در آن حالت نرمِ $\|\ .\ \|_2$ از ضرب داخلی معمولِ $\mathbb{R}^2$ حاصل شده است و لذا چنین Tهایی ترکیبِ نگاشت‌های متعامد با انتقال هستند. ولی ماتریس‌های 2×2ی متعامد یا به صورتِ $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ هستند که متناظر دوران حول مبدأ در $\mathbb{R}^2$اند، به صورتِ $\begin{bmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\\sin\theta&-\cos\theta\end{bmatrix}$ که بیانگر انعکاس نسبت به خطی گذرنده از مبدأ در $\mathbb{R}^2$اند. پس در جمع‌بندی:

> نگاشت‌های $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ای که به ازای یک $p\geq1$ حافظِ p-نرم باشند، در حد ترکیب با یک انتقال چنین خواهند بود: وقتی $p\neq 2$ نگاشت خطی‌ای که از دوران به زوایای مضاربِ 90° حول مبدأ یا از انعکاس نسبت به یکی از محورها یا نیمسازهای مختصاتی حاصل شده است. در حالتِ $p=2$ هم نگاشت خطی‌ای که با که با دوران حول مبدأ یا انعکاس نسبت به خطی گذرا از مبدأ داده می‌شود.

پاسخ ۱۴. کره‌ی nبعدی، S^n، را به شیوه‌ی واضح از طریق نگاشتِ کنجنگاری[9] به عنوان فشرده‌سازی تک‌نقطه‌ای $\mathbb{R}^n$ در نظر می‌گیریم: $S^n=\mathbb{R}^n\cup\{\infty\}$. سره بودن نگاشت پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ به معنای آن است که با قرار دادنِ $f(\infty)=\infty$، f به یک نگاشت پیوسته‌ی $f:S^n\to S^n$ گسترش می‌یابد. اینجا چون f در صورت

[9] stereographic projection

مسأله هموار بود، $f : S^n \to S^n$ بر بازِ $\mathbb{R}^n = S^n - \{\infty\}$ به نگاشتی هموار تحدید می‌شود. حال نکته آن است که برای نگاشت‌های پیوسته‌ی $S^n \to S^n$ می‌توان درجه[10] تعریف کرد که در صورتِ پوشا نبودنِ نگاشت صفر است. پس اینجا نشان می‌دهیم که درجه‌ی $f : S^n \to S^n$ -که از گسترشِ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ حاصل شده بود- صفر نیست. از فرض مسأله، خارج گوی بسته‌ای از $\mathbb{R}^n$، $\mathrm{D}f$ وارون‌پذیر است. ولی چون $n \geq 2$، مکملِ هر گوی بسته در $\mathbb{R}^n$ همبند است. پس می‌توان این گوی بسته را چنان گرفت که به ازای نقاطِ p واقع در مکملش $\det\left(\mathrm{D}f(p)\right)$ یا همواره مثبت باشد یا همواره منفی. بنابر تقارن حالتِ مثبت بودن را در نظر بگیرید. بنابراین $r > 0$ موجود است به قسمی که برای هر $p \in \mathbb{R}^n$ با $|p| > r$ داریم $\det\left(\mathrm{D}f(p)\right) > 0$. $\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| > r\}$ را U می‌نامیم که می‌توان آن را بازی از $\mathbb{R}^n$ و لذا از S^n تلقی کرد. بنابر قضیه‌ی تابع وارون $f(U)$ نیز باز است. حال V را زیرمجموعه‌ی $f(U) - f(\mathbb{R}^n - U)$ از $\mathbb{R}^n$ بگیرید. این اولاً یک باز است چرا که $f(\mathbb{R}^n - U)$ به دلیل فشردگیِ گوی بسته‌ی $\mathbb{R}^n - U$ فشرده است و ثانیاً ناتهی است، زیرا در غیر این صورت

$$f(U) \subset f(\mathbb{R}^n - U) \Rightarrow U \subset f^{-1}\big(f(\mathbb{R}^n - U)\big) \subset \mathbb{R}^n$$

این غیرممکن است، زیرا $f^{-1}\big(f(\mathbb{R}^n - U)\big)$ به دلیل سره بودنِ f زیرمجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}^n$ است و لذا نمی‌تواند U را که زیرمجموعه‌ی $\{p \in \mathbb{R}^n \mid |p| > r\}$ از $\mathbb{R}^n$ بود دربرداشته باشد. حال بازِ ناتهیِ V از $\mathbb{R}^n$ (و از S^n) دارای این ویژگی‌ای است که شامل هیچ مقدار بحرانی‌ای نیست و برای هر نقطه‌ی q متعلق به آن pای موجود است که $f(p) = q$ و همچنین برای هر p از این دست (با توجه به آنکه $p \notin \mathbb{R}^n - U$) باید $\det\left(\mathrm{D}f(p)\right) > 0$. ولی اگر S^n را به جهتی مجهز کنیم که بر بازِ $\mathbb{R}^n = S^n - \{\infty\}$ جهتی سازگار با جهت استاندارد $\mathbb{R}^n$ القا کند، آنگاه $f : S^n \to S^n$ نگاشتی پیوسته خواهد بود که بر بازِ $\mathbb{R}^n$ به یک نگاشت C^∞ همچون $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ تحدید می‌شود و یک بازِ $V \neq \emptyset$ از $\mathbb{R}^n \subset S^n$ داریم که مشمول است در بُردِ f و برای هر $q \in V$ که با $f(p)$ برابر باشد، یکریختی خطیِ $\mathrm{d}f_p : \mathrm{T}_pS^n \to \mathrm{T}_qS^n$ حافظِ جهت است. از احکامی که درباره‌ی درجه‌ی نگاشت‌ها می‌دانیم، این نتیجه می‌دهد که درجه‌ی این نگاشتِ $f : S^n \to S^n$ مثبت است و در واقع مساوی است با تعدادِ این نقاطِ p[11]. همان‌گونه که قبلاً بیان شد این پوشاییِ نگاشتِ اخیر و از آنجا (با توجه به اینکه f $S^n - \mathbb{R}^n$ را ناوردا نگاه می‌دارد.) پوشاییِ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ حاصل از تحدیدِ آن را بدست می‌دهد.[12]

[10] degree

[11] برای هر $q \in V$، $f^{-1}(q)$ زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{R}^n$ است. زیرا باید به دلیل سره بودنِ f فشرده باشد و از قضیه‌ی تابع وارون (چون $f^{-1}(q)$ شامل هیچ نقطه‌ی بحرانی‌ای نیست.) در توپولوژی القایی دارای توپولوژی گسسته است.

در حالتِ $n = 1$، همبند بودنِ مکملِ گوی‌های بسته در $\mathbb{R}^n$ -که اینجا از آن استفاده کردیم- معتبر نیست و می‌توان مثالی از یک نگاشت C^∞ و سره‌ی $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ با تنها یک نقطه‌ی بحرانی ارائه کرد که پوشا نباشد: $f(x) = x^2$.

پاسخ ۱۵. از عملگرهای $\frac{\partial}{\partial z}$ و $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ استفاده می‌کنیم[13]. به طرفین تساوی داده شده عملگرِ $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ را اعمال می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial |f_j(z)|^2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial (az + b\bar{z} + c)}{\partial \bar{z}} = b$$

ولی در چون f_j هولومورف است: $\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}} = 0$ و در نتیجه در بالا می‌توان قرار داد:

$$\frac{\partial |f_j|^2}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f_j \overline{f_j}}{\partial \bar{z}} = \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}}}_{=0} \overline{f_j} + f_j \underbrace{\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial \bar{z}}}_{=\overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}}} = f_j \overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}}$$

بنابراین داریم: $\sum_{j=1}^{n} f_j \overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}} = b$. سپس $\frac{\partial}{\partial z}$ را به طرفین اعمال می‌کنیم:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z}\big(f_j \overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}}\big) = \frac{\partial b}{\partial z} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \big(\frac{\partial f_j}{\partial z} \overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}} + f_j \frac{\partial (\overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}})}{\partial z}\big) = 0$$

اینجا به دلیل آنکه $\overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}}$ مزدوج تابعی هولومورف است، اثرِ $\frac{\partial}{\partial z}$ بر آن صفر است. در واقع به دلیل هولومورف بودنِ $\frac{\partial f_j}{\partial z}$ می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial z}\big(\overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}}\big) = \overline{\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\big(\frac{\partial f_j}{\partial z}\big)} = 0$$

حال با قرار دادن در آنچه که از قبل داشتیم:

$$\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial z} \overline{\frac{\partial f_j}{\partial z}}}_{=|\frac{\partial f_j}{\partial z}|^2} = 0 \Rightarrow \forall z \in D, 1 \leq j \leq n : \frac{\partial f_j}{\partial z}(z) = 0$$

[12] در حالتی که در مسأله شرط قوی‌تری مبنی برمتناهی بودنِ تعداد نقاط بحرانیِ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ داشته باشیم، می‌توان اثبات ساده‌تری به این شرح ارائه کرد: K را مجموعه‌ی تمامیِ نقاط بحرانی بگیرید که یک زیرمجموعه‌ی متناهی است. سره بودنِ f ویژگی مشابهی را برای نگاشتِ $\mathbb{R}^n - f^{-1}(f(K)) \to \mathbb{R}^n - f(K)$ حاصل از تحدیدِ f نتیجه می‌دهد. لذا چون نگاشت‌های سره بسته‌اند، بُردِ نگاشتِ فوق زیرمجموعه‌ای بسته از $\mathbb{R}^n - f(K)$ خواهد بود. به علاوه طبقِ قضیه‌ی تابع وارون، چون $\mathbb{R}^n - f^{-1}(f(K))$ شاملِ هیچ نقطه‌ی بحرانی‌ای از f نیست (K را قطع نمی‌کند) بُردِ این نگاشت زیرمجموعه‌ای باز از $\mathbb{R}^n - f(K)$ نیز هست. ولی چون $n \geq 2$، مکملِ هر زیرمجموعه‌ی متناهی از $\mathbb{R}^n$ و لذا $\mathbb{R}^n - f(K)$ همبند است. پس باید $\mathbb{R}^n - f^{-1}(f(K)) \to \mathbb{R}^n - f(K)$ که f القا می‌کرد پوشا باشد و این پوشاییِ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ را نتیجه می‌دهد.

[13] یادآوری:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\big) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\big)$$

شرطِ لازم و کافی برای آنکه یک تابعِ دومتغیره‌ی C^1 و مختلط‌مقدار بر بازی از $\mathbb{R}^2$ هولومورف باشد آن است که اثر عملگرِ $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ بر آن صفر شود. به علاوه اثر دادنِ $\frac{\partial}{\partial z}$ بر یک تابع هولومورف به مثابه‌ی مشتق‌گیری از آن است.

ولی صفر بودن مشتقِ هر تابع هولومورف $f_j : D \to \mathbb{C}$، با توجه به همبندیِ D ثابت بودنِ f_j را نتیجه می‌دهد.

پاسخ ۱۶. از یک ایده‌ی استاندارد موسوم به «اصل انعکاس شوارتز»[۱۴] استفاده می‌کنیم: چون $|f(z)| = 1$ هرگاه $|z| = 1$، دو تابعِ $f(z)$ و $g(z) := 1/\overline{f(\frac{1}{\bar{z}})}$ بر دایره‌ی واحد با هم برابرند. به علاوه $g(z)$ بر $\mathbb{C} - \{0\}$ هولومورف است. این را هم می‌توان اینگونه توجیه کرد که با توجه به ضابطه‌ی تعریفش از یک تابع هولومورف با دو بار مزدوج کردن ساخته شده است و هم می‌توان چنین استدلال کرد که بر $\mathbb{C} - \{0\}$ با یک سری لوران همگرا قابل بیان است: چون $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ هولومورف است، به ازای ضرایب مناسبِ a_n:

$$\forall z \in \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

که در آن شعاع همگراییِ سری توانیِ سمت راست بی‌نهایت است. حال با فرض $z \neq 0$ اگر در بالا به جای z، $\frac{1}{\bar{z}}$ قرار داده و طرفین را مزدوج کنیم، نتیجه می‌شود که:

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\} : \frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^{-n}$$

پس $\frac{1}{g}$ بر $\mathbb{C} - \{0\}$ با یک سری لورانِ همگرا داده می‌شود و لذا باید بر این ناحیه هولومورف باشد، امری که حکم مشابهی را برای g نیز نتیجه می‌دهد. ولی گفتیم که g بر دایره‌ی واحد با f که بر کل $\mathbb{C}$ هولومورف بود یکسان است. پس از اصل یگانگی نتیجه می‌شود که g به طور تحلیلی در مبدأ هم گسترش می‌یابد. پس تکینگیِ $\frac{1}{g}$ در مبدأ اساسی نیست و در بدترین حالت در $z = 0$ قطب خواهد داشت. پس در بسط لورانِ $\frac{1}{g}$ حول مبدأ که در بالا به صورت $\sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} z^{-n}$ بیان شد، تعداد جملات با توان‌های منفی باید متناهی باشد که نشان می‌دهد از جایی به بعد a_nها که ضرایب بسط تیلورِ f حول مبدأ بودند صفرند. بنابراین $f(z)$ یک چندجمله‌ای برحسب z است:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k \qquad (a_k \neq 0)$$

با این ویژگی که نرم مقادیری که بر دایره‌ی واحد می‌پذیرد یک است و مسأله تقلیل می‌یابد به تعیین چندجمله‌ای‌هایی از این دست. برای هر عدد حقیقیِ $\theta \in \mathbb{R}$ باید $f(e^{i\theta})\overline{f(e^{i\theta})} = 1$. تساوی اخیر را می‌توان اینگونه نوشت:

$$\Big(\sum_{j=0}^{k} a_j e^{ij\theta}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{k} \overline{a_j} e^{-ij\theta}\Big) = 1$$

با ساده کردن حاصلضربِ فوق و بردن ۱ به طرف دیگر تساوی، به یک رابطه‌ی وابستگی خطی با ضرایب حقیقی میان توابعِ $\theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{ij\theta}$ که در آن $-k \leq j \leq k$ می‌رسیم. ولی این توابع مستقل خطی هستند. پس باید با ساده کردن حاصلضربی که در سمت چپ ظاهر شده، ضریبِ هر $e^{ij\theta}$ای که $j \neq 0$ صفر باشد. این نشان می‌دهد که چندجمله‌ایِ f ضریب اسکالری است از z^k. زیرا درغیراین‌صورت هرگاه در $f(z) = a_0 + \cdots + a_k z^k$، $0 \leq j < k$ را کوچکترین عددی بگیریم که برای آن $a_j \neq 0$، آنگاه در حاصل‌ضرب مذکور $e^{(k-j)i\theta}$ با ضریب ناصفرِ $a_k\bar{a}_j$ ظاهر می‌شود. پس $f(z) = a_k z^k$ و چون مقادیرش بر دایره‌ی واحد با نرم یک است: $|a_k| = 1$ که نشان می‌دهد به ازای θای مناسب f با ضابطه‌ی $z \mapsto e^{i\theta} z^k$ داده می‌شود.

پاسخ ۱۷. برهان‌خلف: فرض کنید نقاطِ $(f(j), g(j))$ ($1 \leq j \leq n$) در صفحه، در ترتیب گفته شده رئوسِ یک n-ضلعیِ منتظم باشند ولی درجه‌ی هیچ‌یک از $f(x)$ و $g(x)$ از $n-2$ تجاوز نکند. با انتقال، دوران و تجانس، می‌توان n-ضلعیِ منتظمِ مذکور را به هر n-ضلعیِ منتظمِ دلخواهی در صفحه تبدیل کرد. چنین تبدیلی با یک نگاشت مستویِ $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ با ضابطه‌ای همچون

$$T(x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2 + e, cx_1 + dx_2 + f)$$

داده می‌شود. پس به ازای مقادیر مناسبی از a, b, c, d, e, f، و با جایگزین کردن چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ با به ترتیب $af(x) + bg(x) + e$ و $cf(x) + dg(x) + f$، می‌توان فرض کرد که نقاطِ $(f(1), g(1)), (f(2), g(2)), \ldots, (f(n), g(n))$ ($1 \leq i \leq n$) در ترتیبِ پادساعتگرد رئوسِ n-ضلعیِ منتظمی هستند که ریشه‌های n-اُم واحد در صفحه مشخص می‌کنند: $(f(j), g(j)) = (\cos(\frac{2\pi j}{n}), \sin(\frac{2\pi j}{n}))$ برای هر $1 \leq j \leq n$. توجه کنید که کماکان شرطِ $\deg(f), \deg(f) \leq n-2$ معتبر است، زیرا $f(x)$ و $g(x)$ای که در ابتدا داشتیم در این شرط صدق می‌کردند و چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ی جدید ترکیب‌های مستوی‌ای از قبلی‌ها هستند. حال $h(z) := f(z) + ig(z)$ چندجمله‌ایِ با ضرایب مختلطی با درجه‌ای نابیشتر از $n-2$ خواهد بود با این ویژگی که برای هر $1 \leq j \leq n$ داریم $h(j) = \omega^j$ که در آن ω برابر با $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ در نظر گرفته شده است. نشان می‌دهیم این به تناقض منجر می‌گردد. چون $\deg h \leq n$، به کمک دستور درونیابی لاگرانژ، با دانستن مقدارِ چندجمله‌ایِ $h(x)$ در $n-1$ نقطه می‌توان این چندجمله‌ای را به طور کامل معین نمود. علی‌الخصوص $h(n)$ برحسبِ $h(1), \ldots, h(n-1)$ قابل محاسبه است. در واقع بنابر دستور درونیابی لاگرانژ:

$$h(x) = \sum_{j=1}^{n-1} h(j) \prod_{1 \leq k \leq n-1, k \neq j} \frac{x-k}{j-k}$$

در بالا قرار می‌دهیم $x = n$ و از $\forall 1 \leq j \leq n : h(j) = \omega^j$ استفاده

[۱۴] Schwarz reflection principle

می‌کنیم:

$$\omega^n = \sum_{j=1}^{n-1}\omega^j \frac{\prod_{1\le k\le n-1,k\neq j}(n-k)}{\prod_{1\le k\le n-1,k\neq j}(j-k)}$$

$$\Rightarrow \omega^n = \sum_{j=1}^{n-1}\omega^j \frac{\frac{(n-1)!}{n-j}}{(-1)^{n-j-1}(j-1)!(n-j-1)!}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j-1}\binom{n-1}{j-1}\omega^j = -\omega\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-1}{j}(-1)^{n-j-1}\omega^j$$

مجموعی که در سمت راستِ آخرین تساوی در بالا ظاهر شده، به کمک بسط دو جمله‌ای به صورتِ $(\omega-1)^{n-1}-\omega^{n-1}$ ساده می‌شود. بنابراین: $\omega^n = -\omega\left((\omega-1)^{n-1}-\omega^{n-1}\right)$ و از آن $\omega(\omega-1)^{n-1} = 0$ که با توجه به $\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} \neq 0, 1$ ممکن نیست. تناقض حاصله نشان می‌دهد فرض برهان‌خلف باطل است و باید درجه‌ی حداقل یکی از $f(x)$ و $g(x)$ از $n-2$ بیشتر باشد.

پاسخ ۱۸. به ازای $k\in\mathbb{N}$ای A^k قطری‌پذیر است. قضیه‌ای استاندارد در جبرخطی حکم می‌کند که شرط لازم و کافی برای آنکه ماتریسی مربعی با درایه‌های در میدانِ F بر این میدان قطری‌پذیر باشد آن است که چندجمله‌ای مینیمالش بر این میدان به ضرب عوامل خطی و تکینِ دوبدو متمایز تجزیه گردد. پس در اینجا اعداد دوبدو متمایزِ $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{C}$ موجودند به قسمی که چندجمله‌ای مینیمالِ A^k با $(x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_m)\in\mathbb{C}[x]$ داده می‌شود و به علاوه چون A و به تبع آن A^k وارون‌پذیر هستند، صفر مقدار ویژه‌ای برای آنها نیست و لذا در بالا λ_iها ناصفرند. حال A در چندجمله‌ایِ

$$p(x) := (x^k-\lambda_1)\cdots(x^k-\lambda_m)$$

صدق می‌کند. ولی این چندجمله‌ای بر $\mathbb{C}$ اینچنین تجزیه می‌شود:

$$(x^k-\lambda_1)\cdots(x^k-\lambda_m) = \prod_{t=1}^{m}\prod_{j=1}^{k}(x-\lambda_t e^{\frac{2\pi i j}{k}})$$

و ریشه‌های $\lambda_t e^{\frac{2\pi i j}{k}}$ در این حاصل‌ضرب دوبدو متمایزند زیرا $\lambda_1,\dots,\lambda_m \neq 0$ اینگونه بودند. در نتیجه $p(x)$ بر $\mathbb{C}$ به ضرب عوامل خطی تکین و متمایز تجزیه می‌گردد. ولی چون A در این چندجمله‌ای صدق می‌کرد، چندجمله‌ای مینیمالِ A باید $p(x)$ را بشمارد و بنابراین آن هم ویژگی مشابهی دارد. حال از قضیه‌ای که در بالا ذکر شد،ماتریس مختلطِ A قطری‌پذیر خواهد بود.

در حالتی که به هریک از شرط‌های بسته‌ی جبری بودن و از مشخصه‌ی صفر بودنِ میدان زمینه حذف گردند، حکمی که ثابت کردیم مثال نقض خواهد داشت. به عنوان نمونه در حالتی که شرطِ بسته‌ی جبری بودن حذف شود

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

را بر میدانِ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و در حالتی که شرط مشخصه‌ی صفر بودن حذف شود، ماتریسِ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

را بر یک میدان دلخواه از مشخصه‌ی ۲ . در هر دو مورد A^2 قطری است معهذا A بر میدانِ مورد نظر قطری‌پذیر نیست.

پاسخ ۱۹. برای هر دو ماتریسِ $n\times n$ همچون A و B و هر $1\le k\le n$، $f_k(A,B)$ را ماتریسی می‌گیریم که از قرار دادن ستون kاُمِ B به جای ستون اولِ A بدست می‌آید و $g_k(A,B)$ را ماتریسی می‌گیریم که از قرار دادن ستون اولِ A به جای ستون kاُمِ B حاصل شده است. به عبارت دیگر:

$$A = [v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n], B = [w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_n]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_k(A,B) = [w_k \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n] \\ g_k(A,B) = [w_1 \mid \cdots \mid w_{k-1} \mid v_1 \mid w_{k+1} \cdots \mid w_n] \end{cases}$$

پس باید نشان دهیم که

$$\det(AB) = \sum_{k=1}^{n}\det\left(f_k(A,B)\right)\det\left(g_k(A,B)\right)$$

بدون کاسته شدن از کلیت می‌توان فرض کرد A وارون‌پذیر است. زیرا به وضوح $\det\left((A-\lambda I_n)B\right)$ و هر $f_k(A-\lambda I_n,B)$ و $g_k(A-\lambda I_n,B)$ چندجمله‌ای‌هایی از λ با ضرایبِ در میدان زمینه هستند. پس اگر حکم در حالتِ وارون‌پذیر بودنِ A اثبات شده باشد، دو چندجمله‌ایِ $\sum_{k=1}^{n}\det\left(f_k(A-\lambda I_n,B)\right)\det\left(g_k(A-\lambda I_n,B)\right)$ و $\det\left((A-\lambda I_n)B\right)$ از λ، به ازای نامتناهی مقدارِ λ در بستار جبریِ میدان زمینه که مقدار ویژه‌ی A نیستند مقدار برابر خواهند داشت. امری که نشان می‌دهد دو چندجمله‌ایِ مذکور باید با هم متحد باشند و حال قرار دادن $\lambda = 0$ حکمِ مطلوب را اثبات خواهد نمود. پس توجه خود را به حالتی که A وارون‌پذیر باشد معطوف می‌کنیم. به وضوح برای هر ماتریسِ $n\times n$ همچون Q: $f_k(QA,QB) = Qf_k(A,B)$ و مشابهاً $g_k(QA,QB) = Qg_k(A,B)$. بنابراین با قرار دادنِ $Q = A^{-1}$، تساوی مطلوبِ

$$\det(AB) = \sum_{k=1}^{n}\det\left(f_k(A,B)\right)\det\left(g_k(A,B)\right)$$

تقلیل می‌یابد به

$$\det(B) = \sum_{k=1}^{n}\det\left(f_k(I_n,A^{-1}B)\right)\det\left(g_k(I_n,A^{-1}B)\right)$$

یعنی بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توان تنها حالتِ $A = I_n$ را در نظر گرفت. ولی در این صورت برای هر ماتریسِ $n\times n$ی

$$B = [w_1 \mid w_2 \mid \cdots \mid w_n] = [b_{ij}]_{1\le i,j\le n}$$

داریم:

$$f_k(I_n,B) = [w_k \mid e_2 \mid \cdots \mid e_n] \Rightarrow$$

$$\det\left(f_k(I_n,B)\right) = w_k \text{ درایه‌ی اولِ } = b_{1k}$$

$$g_k(I_n,B) = [w_1 \mid \cdots \mid w_{k-1} \mid e_1 \mid w_{k+1} \cdots \mid w_n]$$

$$\overset{\text{بسطِ دترمینان نسبت به ستون } k\text{اُم}}{\Longrightarrow} \quad \det\left(g_k(I_n,B)\right) = (-1)^{k+1}\det(B_{1k})$$

که اینجا B_{1k} ماتریسِ حاصل از حذفِ سطر اول و ستون kاُم در B گرفته شده است. لذا $\det(B) = \sum_{k=1}^{n} \det\left(f_k(I_n,B)\right)\det\left(g(I_n,B)\right)$ که در پی اثباتِ آنیم، تبدیل می‌شود به :

$$\det(B)=\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_{1k}\det(B_{1k})$$

که همان بسطِ دترمینانِ $B=[b_{ij}]_{1\le i,j\le n}$ نسبت به سطر اول است. این حل را تکمیل می‌کند.

پاسخ ۲۰. به وضوح اگر X ماتریسی 2×2 باشد، چندجمله‌ای ویژه‌ی آن با $x^2-\mathrm{tr}(X)x+\det(X)$ داده می‌شود. لذا چون تریس و دترمینانِ AB و BA یکسانند، این دو ماتریسِ 2×2 چندجمله‌ای ویژه‌ی یکسانی خواهند داشت. این چندجمله‌ای درجه‌ی دوم با ضرایبِ در F را $q(x)$ می‌نامیم. پس از قضیه‌ی کیلی-همیلتون: $q(AB)=q(BA)=O_2$ که در آن منظور از O_2 ماتریسِ 2×2 با درایه‌های صفر است. حال می‌توان در حلقه‌ی چندجمله‌ایِ $F[x]$، $p(x)$ را بر $q(x)$ تقسیم کرد. چون $\deg q(x)=2$، درجه‌ی باقیمانده از یک تجاوز نمی‌کند و بنابراین چندجمله‌ای به صورتِ $ux+v$ خواهد بود که در آن $u,v\in F$. پس اگر خارج‌قسمت در این تقسیم را $h(x)\in F[x]$ بگیریم: $p(x)=q(x)h(x)+(ux+v)$. در این تساوی به جای متغیرِ x ماتریس‌های AB و BA را قرار می‌دهیم و آنگاه با توجه به آنکه مقدارِ $q(x)$ در این دو ماتریس - همان‌گونه که بیان شد - صفر است:

$$\begin{cases} p(AB)=uAB+vI_2\\ p(BA)=uBA+vI_2\end{cases} \overset{p(AB)=p(BA)}{\Longrightarrow} \quad u(AB-BA)=O_2$$

ولی از مفروضاتِ مسأله $AB\neq BA$ و در نتیجه در بالا باید $u=0$ که با قرار دادنِ آن در دو تساوی‌ای که در سمتِ چپ ظاهر شده‌اند خواهیم داشت $p(AB)=vI_2$. پس $p(AB)=p(BA)$ مضربی از همانی است که همان چیزی است که در پی اثباتش بودیم.

پاسخ ۲۱. f را چندجمله‌ای ویژه‌ی A_1 بگیرید: $f(\lambda)$. قرار دهید: $g(\lambda)=f(\lambda)-(-1)^n$ که آن هم مانندِ f یک چندجمله‌ای از درجه‌ی n است. طبق فرض برای هر $2\le k\le n-1$ ماتریسِ A_1-A_k اسکالر و ناصفر است. پس به ازای یک عنصر مناسبِ $c_k\neq 0$ در میدان زمینه به شکلِ c_kI_n قابل بیان است. $c_2,c_3,\ldots,c_{n-1}$ دوبدو متمایزند چرا که ماتریس‌های A_1-A_k برای $2\le k\le n-1$ دوبدو متمایز بودند. برای هر چنین kای داریم: $A_1-A_k=c_kI_n$ و از آنجا:

$$\det(-A_k)=\det(c_kI_n-A_1)=f(c_k)$$

ولی دترمینان ماتریسِ $n\times n$ی A_k یک بود و بنابراین: $\det(A_k)=(-1)^n$. با قرار دادنِ این در بالا $f(c_k)=(-1)^n$ و لذا $g(c_k)=f(c_k)-(-1)^n=0$. پس برای هر $2\le k\le n-1$، c_k ریشه‌ای است از g. همچنین چون $\det(A_1)=1$:

$$f(0)=\det(-A_1)=(-1)^n\Rightarrow g(0)=f(0)-(-1)^n=0$$

لذا $0,c_2,c_3,\ldots,c_{n-1}$ -که از آنچه که در بالا بیان شد دوبدو متمایزند- همگی ریشه‌های gاند. پس به ازای یک چندجمله‌ایِ $h(\lambda)$ (با ضرایب در میدان زمینه) می‌توان نوشت:

$$g(\lambda)=h(\lambda)\lambda(\lambda-c_2)\cdots(\lambda-c_{n-1})$$

اما f چندجمله‌ای ویژه‌ی A_1 بود و در نتیجه f و به تبع آن g همگن و درجه‌ی n هستند. بنابراین h را در بالا به ازای یک اسکالرِ مناسبِ α می‌توان به صورتِ $\lambda-\alpha$ نوشت:

$$g(\lambda)=(\lambda-\alpha)\lambda(\lambda-c_2)\cdots(\lambda-c_{n-1})$$

از طرف دیگر مقدار چندجمله‌ایِ g در ماتریسِ A_1 قابل محاسبه است، چرا که $g(\lambda)$ با $f(\lambda)-(-1)^n$ داده می‌شد و A_1 بنابر قضیه‌ی کیلی-همیلتون در چندجمله‌ای ویژه‌ی خود که f بود صدق می‌کند. پس: $g(A_1)=(-1)^{n+1}I_n$. با قرار دادنِ این در توصیفی از g که در بالا ارائه شد:

$$(A_1-\alpha I_n)A_1(A_1-c_2I_n)\cdots(A_1-c_{n-1}I_n)=(-1)^{n+1}I_n$$

با جایگذاریِ $A_1-c_kI_n=A_k$ در تساوی فوق برای $k\in\{2,\ldots,n-1\}$ و سپس به کار بردنِ $A_1\cdots A_n=I_n$ خواهیم داشت:

$$(A_1-\alpha I_n)A_2\cdots A_{n-1}=(-1)^{n+1}I_n\Rightarrow$$

$$(A_1-\alpha I_n){A_n}^{-1}=(-1)^{n+1}I_n\Rightarrow A_1+(-1)^nA_n=\alpha I_n$$

که نشان می‌دهد $A_1+(-1)^nA_n$ اسکالر است.

گزارش برنامه دهه ریاضیات
انجمن علمی و فوق برنامه دانشکده علوم ریاضی

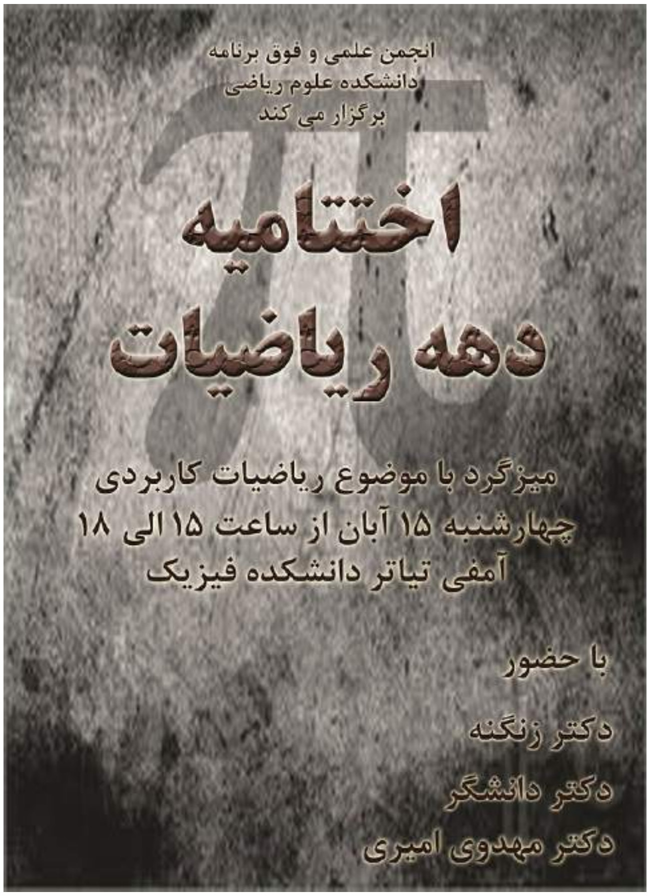
هر ساله در دانشگاه صنعتی شریف در آبان‌ماه سمینارهایی با عنوان دهه ریاضیات برگزار می‌شود. امسال نیز دهه ریاضیات با موضوع ریاضیات کاربردی از تازیخ ۱۱ الی ۱۴ آبان ماه ۱۳۹۲ در دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی شریف برگزار شد. برنامه‌های این دوره شامل ۴ روز سمینار و یک اختتامیه با عنوان "ریاضیات کاربردی چیست؟" بود. برنامه سمینارها به شرح زیر اجرا شد:

- دکتر شهرام خزایی با موضوع "Secure and Insecure Mixing"
- دکتر نظام‌الدین مهدوی امیری با موضوع "بررسی مساله کمترین مربعات غیرخطی مقید"
- دکتر امیر دانشگر با موضوع "آیا قطعه قطعه کردن یک درخت کاربردی دارد؟"
- دکتر کسری علیشاهی با موضوع "تحلیل داده و چالش بعد"

همچنین مراسم اختتامیه شامل دو سخنرانی از دکتر مهدوی امیری و دکتر زنگنه با پرداختن به تاریخ ریاضیات و ریاضیات کاربردی و یک میز گرد با حضور دکتر بابلیان، دکتر دانشگر، دکتر زنگنه، دکتر مهدوی امیری برگزار شد. آنچه در ادامه می‌آید گزارشی از این میزگرد است.

ریاضیات کاربردی از نظر شما چیست؟

دکتر بابلیان: من به این می‌پردازم که ریاضیات محض و کاربردی چه تفاوتی با هم دارند، برای مثال در ریاضی محض وقتی که ثابت می‌شود یک سری همگراست، مساله حل می‌شود، یا وقتی ثابت می‌شود که یک انتگرال وجود دارد کار ریاضی محض تمام است. اما در ریاضیات کاربردی با این مواجه هستیم که مقدار یک سری را به دست آوریم. ریاضیات محض خیلی نیاز به مقدار سری یا انتگرال ندارد، اما در ریاضیات کاربردی دنبال این هستیم که نتیجه بگیریم و این نتیجه را به کار ببندیم.



دکتردانشگر: من به این سوال ساده‌تر که "ریاضیات کاربردی چه چیزی نیست؟" جواب می‌دهم. ریاضیات کاربردی با کاربرد ریاضیات متفاوت است. ریاضیات کاربردی از جنس ریاضیات است یعنی تولید علم ریاضی، کاربرد ریاضیات از جنس کاربرد دانسته‌هایمان از ریاضی در شرایط مختلف است. تولید علم یک فرآیند زمان‌بر است بنابراین اگر شما بخواهید ریاضیاتی را تولید کنید که انگیزه‌های کاربردی هم دارد فرآیند زمان‌بری است.

اما در کاربرد ریاضیات شما یا دیگران دانسته‌هایی که از قبل دارید را به همراه مهارت‌هایی کنار هم می‌گذارید و مشکلاتی از مردم را حل می‌کنید. اما اگر این دو فرآیند را یکی فرض کنیم اتفاق بدی می‌افتد، چون همه مجبور می‌شویم که از دانسته‌های قبلی استفاده کنیم تا مشکلاتی حل شود و در نتیجه علمی تولید نمی‌کنیم.

نظرتون در مورد تفاوت کاربرد ریاضیات و ریاضیات کاربردی چیست؟

دکتر زنگنه: من ریاضیات را مثل یک طیف می‌بینم و هرکسی در جایی از طیف ایستاده است. معتقد نیستم که ما برای ریاضی محض

وظایفی تعیین کنیم، مثلا اثبات همگرایی سری. بنابراین من اصلا فکر نمی‌کنم ما بتوانیم مرزی بین ریاضی محض و کاربردی بکشیم. برای مثال در فرانسه به چیزی میگویند ریاضی کاربردی که در آمریکا به آن ریاضی محض گویند. فکر میکنم اسم ریاضی محض در اثر یک انحراف تاریخی به وجود آمده وگرنه اصلا این مفهوم وجود ندارد. فرق می‌کند که کجای طیف بایستیم اما با مرزبندی مخالفم.

دکتر مهدوی امیری: دلیل این‌که این‌ها از هم جدا می‌شوند این است که در پس آنها تفکر و نگرش متفاوتی وجود دارد، بنابراین باید فکرش ساخته شود و نیاز به نوع آموزش متفاوت دارد. بنابراین آموزش باید روی یک موضوع خاص تمرکز کند. صحبتی نیست که ریاضی کاربردی ریاضی نیست، ریاضی با تاکیدات مشخص است و این تاکیدات را باید شناخت و سرمایه‌گذاری کرد. در شرایطی که ما کشور پیشرفته‌ای باشیم و در تمام زمینه‌ها متخصص داشته باشیم همه چیز مثل یک طیف می‌شود.

آقای دکتر بابلیان، در صحبت‌ها این نظر مطرح شد که در ریاضیات باید اولویت‌دهی داشته باشیم نظر شما چیست؟

دکتر بابلیان: به نظر می‌آید ما سال‌ها در ریاضیات محض کار کرده‌ایم، ولی همان‌طور که دکتر مهدوی اشاره کردند باید ببینیم برای پیشرفت کشور چه چیزی نیاز است؟ بنابراین باید برنامه‌ریزی به سمتی باشد که ریاضیات کاربردی را تقویت کنیم، ما ریاضی محض کار می‌کنیم اما کمی از ریاضیات پیش‌رِو عقب هستیم و کمی هم متاسفانه دنباله‌رو هستیم، باید آموزش را به گونه‌ای هدایت کنیم که تولید داشته باشیم.

آقای دکتر زنگنه نظر شما در مورد اینکه مرزی وجود ندارد چیست؟ یعنی می‌توانیم تمایز قائل شویم مرزی وجود ندارد یا اینکه اصلا ماهیت این دو حوزه یکی است؟

دکتر زنگنه: من مخالف این نیستم که برای مثال یک انیستیتوی ریاضی کاربردی کار کنیم و از تمامی رشته‌ها هم در آن مشارکت داشته باشند (مانند نمونه‌ای در دانشگاه بریتیش کلمبیا). اما بحث این است که ما در واقع دو قسمت داریم، یک قسمت کار تحقیقاتی است. وقتی صحبت از طیف می‌شود، این طیف تلفیق‌های مختلف ایجاد می‌کند و افراد می‌توانند متناسب با دانشجویان برنامه‌های مشخص و پیشرفته در حالی که دست‌شان باز است بچینند و در واقع با نگاهی تحقیق‌محور می‌توان برنامه‌های خوبی چید. در واقع بسته‌های آموزشی اگرانعطاف‌پذیر باشد به رشد و تعالی کمک می‌کند.

ما مشکلی نداریم که ریاضی دستاوردهای بزرگ و کاربردهای زیادی دارد. در این چرخه تبدیل دانش ریاضی به فناوری در جامعه ریاضی چه جایگاهی دارد؟

دکتر دانشگر: اگر حلقه‌ای را در نظر بگیرید که زنجیره شماره یک فردی هست که نظریه‌ای را مطرح می‌کند و بسط می‌دهد که ممکن است نتایج‌اش سودی داشته باشد به نظر من زنجیر شماره یک، یک ریاضیدان است و احتمالا زنجیره شماره دو یک محقق ریاضی است که می‌تواند حرف دو طرف را بفهمد (هم کاربر و هم ریاضی‌دان) به نظر من از آن‌جا به بعد دیگر به علم ریاضی ربطی ندارد. این زنجیر تابع زمان است. یعنی اگر شما امروز روی نظریه‌ای کار می‌کنید که ممکن است نتایجی داشته باشد، این نتایج فردا تولید نخواهد شد. تولید علم فرآیندی قطعا زمان‌بر است و ما باید بدانیم که چه چیزی را می‌خواهیم تشویق کنیم و اولویت بیشتری بدهیم چون اگر اشتباه تشویق کنیم ممکن است خسارات خیلی بیشتری به بار بیاورد.

در زنجیره دانش تا فناوری کدام حلقه در کشور ما ضعیف‌تر است؟

دکتر مهدوی امیری: من این حرف را درک می‌کنم که اگر زمینه‌ای را شاخص کنیم همه ممکن است به سمت آن کشیده شوند و ممکن است در این بین منابع هم تلف شود اما اگر کاری نکنیم هیچ اتفاقی نمی‌افتد، با دکتر دانشگر موافقم که این اولویت‌بندی باید از راه مناسب انجام شود. ما در خیلی از زمینه‌ها نمی‌دانیم برنامه فعلی‌ای که داریم برای چه هدفی هست؟

اگر بدون برنامه باشیم خسارت‌های خیلی بیشتری خواهیم داشت. اگر نتوانیم به صورت مشخص اولویت تعیین کنیم و بر اساس آن برنامه‌ریزی کنیم، به صورت کل و به صورت خاص در ریاضی پیشرفت نخواهیم کرد.

در مجموع وضعیت ریاضیات کاربردی در کشور را چطور ارزیابی می‌کنید؟ نقاط قوت و ضعف، فرصت‌ها و چالش‌ها چه هستند؟

دکتر بابلیان: افرادی که ریاضی محض کار می‌کنند باید بیشتر ببیند که نیازهای دانشجویان چه هست و مثل ریاضی‌دانان خارجی به سمت اولویت‌ها بروند. تمام ریاضیاتی که ما می‌خوانیم کاربرد دارد.

مشکلی که ما در برنامه‌ریزی داریم این است که هر استادی دوست دارد درس خودش جزء درس‌های الزامی باشد. چون درس محض (در خیلی از دانشگاه‌های ما در ایران) اگر الزامی نباشد دانشجو آن درس را برنمی‌دارد.

چرا خود استاد، درس را به گونه‌ای ارائه ندهد که کاربردها را هم در آن نشان بدهد تا دانشجویان هم، درس را بردارند. جا دارد که در این‌جا از دکتر شهشهانی تشکر کنم، چون اول انقلاب، کسی که اصرار داشت درس آنالیز عددی و برنامه‌نویسی جزء دروس الزامی رشته ریاضی باشد، دکتر شهشهانی بود و از سال ۶۲ تدریس آن در ایران باب شد. ما در مسأله کاربردی پیشرفت قابل توجه‌ای داشتیم. چون افرادی که در این رشته‌ها کار کرده‌اند، با پیشرفت‌های جهانی هم خوان‌تر بوده‌اند و فکر می‌کنم اگر که راه ریاضیات کاربردی سد نشود، به زودی می‌تواند پیشرفت لازم را در کشور داشته باشد.

من در این سال‌هایی که در دانشکده بودم، زیاد پیش آمده با دانشجویانی برخورد کرده‌ام که علی‌رغم علاقه‌ای که به ریاضی داشته‌اند چون کاربردهای ملموسی از ریاضی ندیده‌اند، یک مقدار سرخورده و بی‌انگیزه شدند. در مسیر علمی توصیه شما به این دانشجویان چیست؟

دکتر زنگنه: قبل از این‌که به این سوال جواب بدهم، در مورد اولویت‌ها، ما باید یک نقشه جامع داشته باشیم و بر اساس کنگره بین‌المللی ریاضیدان‌ها،بین رشته‌هایی که نداریم و رشته‌هایی که خیلی زیاد داریم اولویت بگذاریم.

این که بچه‌ها بی‌انگیزه می‌شوند، یک مقدار تقصیر ماست، ما باید سعی کنیم مفید بودن، جذاب بودن و کارا بودن ریاضی را به بچه‌ها نشان بدهیم، بنابراین اگر بچه‌ها بی‌انگیزه می‌شوند تقصیر ماست. به نظر من می‌شود برنامه‌های پکیج‌واری داد که بچه‌ها در آن کار کنند. فکر می‌کنم باید فضا را به گونه‌ای باز کنند که افرادی که وارد فضای ریاضی می‌شوند دست‌شان باز باشد که ریاضیات کاربردی کار کنند. در واقع برنامه به گونه‌ای باشد که به همه امکان رشد بدهد و برنامه انعطاف‌پذیر باشد که اگر دانشجویان خواستند به سمت ریاضیات کاربردی بیایند، راه برایشان باز باشد.

سوال حضار از دکتر دانشگر: آیا ریاضی‌دان نباید استفاده از ریاضی را بلد باشد تا علمی تولید کند که قابل استفاده باشد و وارد محیط انتزاعی نشود؟

دکتر دانشگر: خیر، وظیفه ریاضی‌دان استفاده از آن‌چه که یاد می‌گیرد نیست. به نظر من وظیفه ریاضی‌دان کار ریاضی است، یک مهارت دارد (مثل یک چکش ساز که مختص چکش ساختن است و لزومی ندارد بداند که با آن چه کار می کنند). ما در مورد طیفی از افراد به نام ریاضی‌دان صحبت می‌کنیم. یک نفر خیلی دوست دارد در مجردات کار کند ، یک نفر خیلی دوست دارد در کاربردها کار کند. من می‌خواستم نکته‌ای را ذکر کنم: من احساس می‌کنم در حال حاضر در یک برهه خاص هستیم، از لحاظ تاریخی برای رشته‌ی ریاضی. به این دلیل که ما در علوم مهندسی یک سری تکنیک‌های خاص داشتیم و شاید بشود گفت قرن بیستم، چکیده آن تکنیک‌ها بوده است. در حال حاضر آن فضا کمرنگ شده یعنی به عبارتی بیست سال پیش اگر در یک مجله مهندسی، شما مقاله‌ای می‌فرستادید که بار نظری داشت آن را نمی‌پذیرفتند. در حالی که اگر در سال‌های اخیر مقاله‌ای را به یک مجله مهندسی بفرستید در حالی که مبحث نظری‌ای در آن مطرح نباشد مقاله چاپ نمی‌شود. بنابراین فضایی باز شده که به کار نظری احتیاج است. مقدار زیادی فضای انگیزه‌بخش وجود دارد که ممکن است از آن مسائل خیلی خوبی به وجود بیاید و این مخاطره را هم دارد که ممکن است به فضای سطحی با آن برخورد شود. در حالی که اگر مسأله را بگیریم و روی آن کار کنیم شاید خیلی محض یا خیلی کاربردی باشد. به نظر من این یک فرصت استثنایی زمانی است. کشور ما هم در صورت مدیریت و نظارت خوب می‌تواند از آن بهره‌مند شود.

سوال حضار: به طور مثال درس بسیار کاربردی DR و جبرخطی در دانشکده ارائه می‌شود ولی در برنامه‌ریزی دروس امتحانات تداخل دارد. به واقع اساسا علاقه‌مند به حل مشکل در دانشکده‌اید یا فکر می‌کنید این انتقادات در حد حرف باقی می‌ماند؟

دکتر دانشگر: من معاون آموزشی دانشکده نیستم اما اگر اشکالی هست باید بررسی شود، حق دارند.

گاهی وقت‌ها گفته می‌شود که کار کاربردی باید منطبق بر نیازهای کشور باشد، به نظر شما آیا این معیاری برای ریاضیات کاربردی هست یا نه؟

دکتر مهدوی امیری: قبل از این‌که به این سوال پاسخ دهم، این نکته را بگویم که وقتی به ریاضیات کاربردی پرداخته می‌شود، کار مجرد یا نظری در آن نیست. بسیار تحلیل‌های نظری و پیچیده دارد. اما در مورد سوال شما من ریاضی را اینگونه ندیدم که کاربردی فقط به معنای "این‌که اگر مسئله‌ی خاصی را حل کنیم"، باشد. بلکه ریاضیات

کاربردی را این‌گونه دیدم، "مجهز به ابزاری که برای دیگران هم کاربرد دارد". اگر کشور در برنامه‌های توسعه خودش نیاز به کارهایی دارد، باید در سطح گسترده‌تر برنامه‌ریزی کند. بله، در جاهایی هم افراد ممکن است زمینه‌های خاصی را مورد توجه قرار دهند که کاربردی باشد اما این نباید منحصرا مسئولیت ریاضی باشد که مسائل کاربردی مملکت را حل کند.

دکتر دانشگر: من یک نکته در مورد این سوال می‌خواستم بگم: این جمله که آیا ریاضی می‌تواند مشکلات را حل کند، جمله دقیقی نیست. مشکلات یعنی چه؟ در جاهایی مثلا مشکل اتمام ذخیره گندم است، در جاهایی هم این است که پنجاه سال دیگر برای راه‌اندازی پارس جنوبی به چه نرم‌افزاری نیاز است. این بستگی به مدیریت دارد، که آن مشکل را دارد. مدیر باید بتواند تحلیل کند که این مشکل را چه کسی می‌تواند حل کند و به ریاضی‌دان مربوط نمی‌شود.

سوال حضار از دکتر مهدوی امیری: با توجه به اینکه موسسه سایان در همه کشورها فعال است، آیا تلاشی برای ایجاد آن در ایران شده است؟

دکتر مهدوی امیری: خیر، هیچ تلاشی نشده است. من این پیشنهاد را در یک جلسه مطرح کردم، که خوب است موسسه‌ای به این شکل در ایران تاسیس شود و وجودش هم متناقض با وضعیت فعلی ما ندارد. این نشان می‌دهد که قسمتی وجود دارد که ما در آن فعال نیستیم و می‌خواهیم که فعالیت‌مان را بیشتر کنیم.

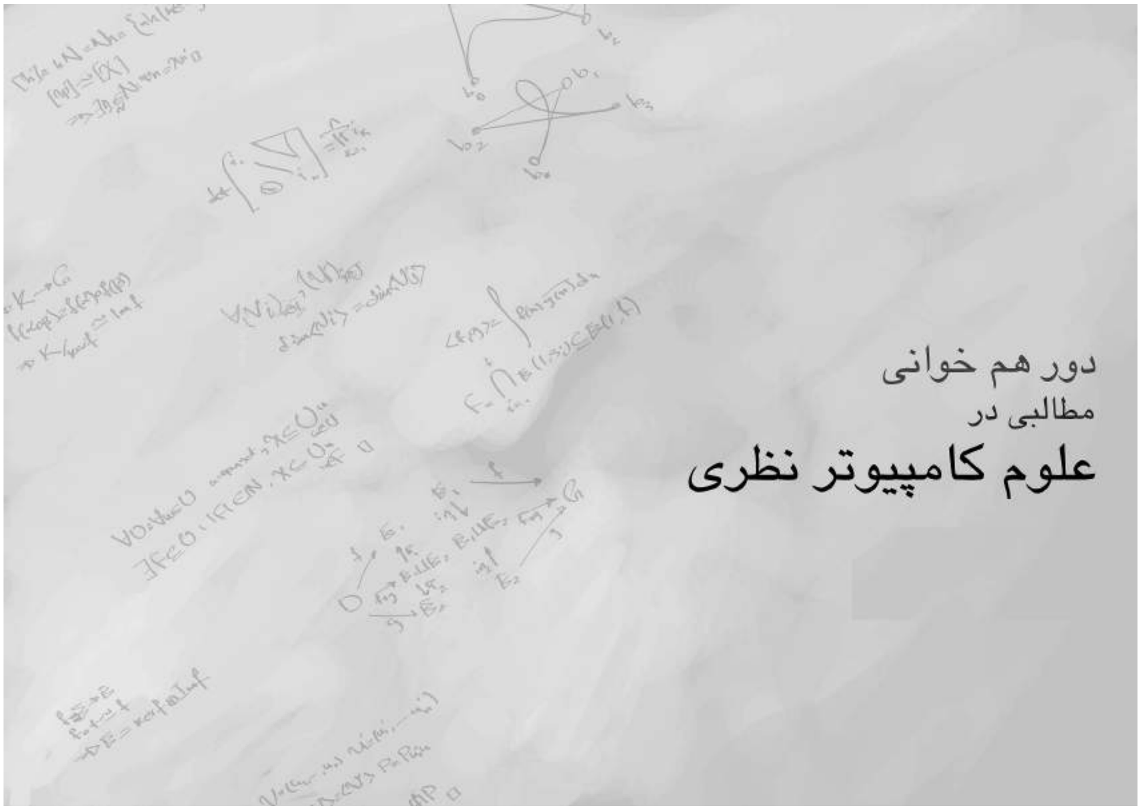
سوال حضار از دکتر زنگنه: چه راه‌کار عملی برای نزدیک شدن وضعیت فعلی ریاضیات کاربردی به وضعیت مطلوب پیشنهاد می‌کنید ؟ راه‌کار برای اساتید و دانشجویان.

دکتر زنگنه: برنامه‌ای باشد که ریاضیات کاربردی در آن جدا نباشد و بتواند رشد کند، برنامه جدیدی که رشته‌های گوناگون و طیف‌های مختلف بتوانند با هم در ارتباط باشند.

صحبت پایانی دکتر بابلیان: نقل قول می‌کنم: در ۲۵ امین کنفرانس ریاضی کشور، دانشجویان صنعتی شریف از پرفسور المیل می‌پرسند که ما منیفلد خوندیم، آنالیز حقیقی خوندیم و...پیشنهاد شما برای اینکه دیگه چی بخونیم چیه؟ پرفسور المیل میگن : آنالیز عددی بخونید .

صحبت پایانی دکتر مهدوی امیری: برنامه‌ها باید محتوای عمومی داشته باشد تا از دورنش زمینه‌های خاص متولد شود و فرد باید جامعیت داشته باشد و بعد از آن خاص‌تر شود.

ممنون از اساتیدی که تشریف آوردند و ممنون از حضار.



نظریه‌ی رسته‌ها

ریاضیات با ایده گرفتن از موجودات آشنا، همواره به دنبال ساختن ساختارهایی بوده است که بتواند علاوه بر بررسی موجودات آشنا، موجودات ناشناخته را هم بشناسد. در این میان به دست آوردن ساختاری که بتوان به کمک آن تمامی موجودات را نمایش داد نیز اهمیت ویژه‌ای دارد. در این‌جا منظور از ساختار ریاضی، مجموعه‌ای از نمادها و روابط ریاضی بین آن‌هاست. با این بیان مجرد، به نظر می‌رسد نمادها چندان اهمیتی ندارند و تنها روابط هستند که یک ساختار را مشخص می‌کنند در حالی که اگر به ساختارهای شناخته‌شده‌تری نگاه کنیم به نظر می‌رسد نمادها از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. به طور مثال در نظریه‌ی گروه‌ها، اگر گروه‌ها را به عنوان نماد در نظر بگیریم و روابط را ایزومورفیسم‌های گروهی، آن‌گاه مطلب فوق به خوبی مشهود است. اما اگر به ساختار مجموعه‌ها نگاهی بیندازیم و توابع دوسویی را به عنوان روابط بین آن‌ها در نظر بگیریم و در واقع ساختار کلی‌تری نسبت به گروه‌ها در نظر بگیریم، می‌بینیم که تنها روابط هستند که اهمیت دارند. در واقع شاید این تفاوت از آن‌جا ناشی شود که یک گروه خود به تنهایی دارای ساختاری است که از مجموعه‌ای از روابط تشکیل شده است.

نظریه‌ی رسته‌ها[1] می‌خواهد با ارائه‌ی ساختاری مجرد، سعی در ساختن جهانی برای اشیاء ریاضی داشته باشد. در واقع یک رسته چیزی نیست جز دسته‌ای از نمادها و روابط آن‌ها که این روابط باید در شرایطی بسیار طبیعی صدق کنند. در واقع باید این ساختار به گونه‌ای باشد که ساختارهای آشنایی هم‌چون گروه‌ها و مجموعه‌ها که مطرح شد را در برگیرد.

این نظریه در رشته‌های مختلفی هم‌چون فیزیک و علوم کامپیوتر و هر جا که دسته‌ای از اشیاء با گردایه‌ای از روابط بین آن‌ها موجود باشد، ظاهر می‌شود. در فیزیک، اشیاء در واقع سیستم‌های فیزیکی هستند و روابط فرآیندهایی هستند که می‌توانند روی یک سیستم اعمال شوند. در مکانیک کوانتومی، اشیاء فضاهای هیلبرت و روابط عملگرهای خطی هستند. در منطق، اشیاء گزاره‌ها

[1] Category Theory

هستند و روابط در واقع اثبات‌ها در نظر گرفته می‌شوند. در علوم کامپیوتر، اشیاء نوع داده[۲] هستند و روابط برنامه‌ها می‌باشند. و مثال‌هایی از نوع بسیارند.

گروه "دور هم‌خوانی علوم کامپیوتر نظری"، در نظر دارد در ترم جدید (۲-۹۳-۹۲) به مطالعه‌ی نظریه‌ی رسته‌ها و کاربردهای آن در منطق و علوم کامپیوتر بپردازد. در مطالعاتی که در چند دهه‌ی اخیر صورت گرفته است، معانی منطق‌گونه‌ای از خواص رسته‌ی فضاهای توپولوژیک به دست آمده است و این باعث شکل‌گیری ارتباطاتی بین توابع پیوسته و محاسبه‌پذیر شده، و در نهایت نتایج جالبی در نظریه‌ی محاسبه به دست آمده است. هدف غایی ما در این دوره مطالعات نیز رسیدن به نتایج تحقیقات اخیر است.

مطالب مورد نیاز از نظریه‌ی رسته‌ها را از مرجع [۱] مطالعه خواهیم کرد و در ادامه برای مقدمات لازم از توپولوژی و منطق و روابط بین آن‌ها از کتاب [۲] استفاده می‌کنیم و در نهایت برای ادامه از مقالات اخیر در این زمینه و پایان‌نامه‌های موجود کمک می‌گیریم.

برای آن‌که در جریان برنامه باشید، در گروه گوگل با نام

Theoretical Computer Science - Sharif University of Technology

عضو شوید.

مراجع

[1] Michael Barr and Charles Wells, Toposes, Triples and Theories

[2] Steven Vickers, Topology via Logic

[۲] Data Type

مجله‌ی ریاضی شریف از هر گونه همکاری در تمامی زمینه‌ها از جمله تهیه یا معرفی مطالب علمی و توصیفی وهمچنین همکاری در زمینه کارهای اجرایی مجله از جانب دانشجویان و اساتید استقبال به عمل می‌آورد. لازم به ذکر است که اکثر همکاران فعلی این مجله به‌صورت کاملا داوطلبانه با مجله همکاری می‌کنند و اساس کار این نشریه بر مبنای همکاری داوطلبانه‌ی اهالی دانشکده‌ی ریاضی قرار گرفته‌است.

تماس با ما:

mathematicsjournal@gmail.com
www.sharifmathjournal.ir

قیمت: ۲۰۰۰ تومان