مجله‌ی ریاضی شریف
دوره‌ی سوم، شماره‌ی دوم (بهار ۱۴۰۳)

مکاتبات فرگه و راسل*

بخش دوم

ترجمه‌ی ساجد طیبی
sadjad.tayebi@gmail.com

چکیده. در شماره‌ی پیشین مجله به ۲ نامه‌ی ابتدایی از ۲۰ نامه‌ی فرگه و راسل پرداختیم. در این مقاله ۲ نامه‌ی بعدی ترجمه شده‌است. ابتدائاً مقدمه‌ی ویراستار کتاب، Brian McGuinness، بر بخش راسل–فرگه را می‌خوانیم. در شماره‌های بعدی مجله به باقی نامه‌ها خواهیم پرداخت.

۱. مقدمه‌ی ویراستار

برتراند راسل (۱۸۷۲–۱۹۷۰) از ۱۹۰۲ تا ۱۹۱۲ با فرگه مکاتبه داشت، گرچه بیشتر مکاتبات مربوط‌اند به سال‌های ۱۹۰۲–۴. مکاتبات با اعلام آن چه امروزه به‌عنوان پارادوکس راسل شناخته می‌شود توسط راسل آغاز می‌شوند، و بیشتر آن‌ها ناظر اند بر راه‌حل‌های مختلفی که راسل برای پارادوکس پیش می‌نهد و فرگه آن‌ها را رد می‌کند. اما در آن‌ها به اغلب مفاهیم محوری فلسفه‌ی زبان فرگه نیز پرداخته می‌شود: مفاد و مرجع، شیء و مفهوم، صدق و کذب، جمله و رده. راسل زمانی پارادوکس را کشف کرد که مهم‌ترین اثر فرگه در شرف اتمام بود: در آستانه‌ی انتشار جلد II قوانین پایه‌ای‌اش. آثار اصلی راسل هنوز منتشر نشده بود: او در زمان این کشف به آماده‌سازی اصول ریاضیات برای انتشار مشغول بود. تمام نامه‌های راسل به فرگه به زبان آلمانی نوشته شده‌اند. دست‌کم یک نامه که در سال ۱۹۱۲ نوشته شده‌است امروز مفقود شده. نامه‌ی اول راسل (نامه‌ی ۱) و جواب مشهور فرگه به آن (نامه‌ی ۲) پیش از این به انگلیسی منتشر شده‌اند. ر.ک. به

Jean van Heijnoort (ed.) (1967) *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*. Cambridge. Mass. 1967.

از میان تمام نامه‌های فرگه به راسل، تنها اصلِ نامه‌ی آخر (نامه بیستم) باقی مانده‌است. راسل، بر این اساس که آن را کاملاً شخصی می‌دانسته، آن را پیش خودش نگاه داشته بوده‌است. باقیِ نامه‌ها برای شولز[1] فرستاده شده‌بودند و اکنون تنها فتوکپی آن‌ها در اختیار است.

۲. نامه‌ی سوم: راسل به فرگه

فرایدز هیل
هسلمر
۱۹۰۲/۰۶/۲۴

همکار عزیز،
از نامه‌تان و این که آثارتان را برایم ارسال کردید بسیار ممنونم. آن چه را در آن نامه مفقود شده‌بود دوباره ارسال می‌کنم. اشتباه صفحه ۷ را در مفهوم‌نگاشت شما از پیش اصلاح کرده بودم؛ اما همان‌طور که گفتید این اشتباه مطلقاً هیچ تالی فاسدی ندارد.

---

*این نوشته ترجمه‌ی بخشی از کتاب زیر است:

Frege, G. (1980) *Philosophical and Mathemtical Correspondence of Gottlob Frege*. University of Chicago Press.

[1] H. Scholz

به نظرم مفاهیم به طور کلی می‌توانند متفاوت باشند، و تناقض تنها وقتی نتیجه می‌شود که آرگومان [ـِ یک تابع] خودْ تابعی از آن تابع است، یعنی اگر تابع و آرگومان نتوانند مستقل از هم تغییر کنند. φ در تابع $\varphi(\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon))$ یگانه متغیر است و آرگومان $\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$ خودش (آن گونه که عموماً بیان می‌شود) تابعی از φ است. به نظر می‌رسد توابعی به شکل $\varphi\{F(\varphi)\}$، که در آن‌ها F ثابت و φ متغیر است، حتماً به ازای هر مقداری از φ مجازند، گرچه وقتی بحث از مصداق است خطرناک‌اند. من آنها را فرم‌های درجه‌ی دوم می‌خوانم: کسی در واقع ممکن است مایل باشد به سیاق موهومی در جبر[۱] به معرفی موهومی در منطق بپردازد.[۲] با چنین توابعی ما به محض مقدار دادن به φ تابعی اشباع‌شده خواهیم داشت؛ با این حال، آن‌ها نه توابعی مرتبه اول‌اند، و نه آرگومان‌های ثابت دارند. تابع $-\!\!\top\!\!-\varphi(\varphi)$ به تناقضی مشابه تناقض برآمده از $-\!\!\top\!\!-\varphi(\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon))$ می‌انجامد.

این مسیری بود که من را به تناقض رساند. همان‌طور که قطعاً می‌دانید، کانتور اثبات کرده‌است که بزرگترین عدد وجود ندارد. اثبات او چنین است:

$$R\varepsilon 1 \to 1 \cdot \breve{\varrho} \supset \mathrm{Cls}'\varrho \cdot w = \varrho \cap x\ni(x \sim \varepsilon\, \iota\breve{\varrho}x) \cdot \supset_R \cdot w \sim \varepsilon\varrho :\supset \cdot \mathrm{Nc}'\mathrm{Cls}'\varrho \succ \mathrm{Nc}'\varrho\ ^{\dagger}$$

(دقیقاً این است که مهم‌ترین بخش اثبات است.)[۳] حال مفاهیمی وجود دارد که مصداق آنها شامل همه چیز است؛ بنابراین این مفاهیم باید واجد بزرگترین عدد باشند. تلاش کردم رابطه‌ای یک–به–یک میان تمام اشیاء و تمام رده‌ها برقرار کنم؛ با کاربست برهان کانتور بر این رابطه‌ی خاص خود، متوجه شدم که در حالی که تمام رده‌ها شمرده شده‌اند، رده‌ی $Cls \cap x\ni(x \sim \varepsilon x)$ بیرون مانده‌است. من تا کنون حدود یک سال راجع به این تناقض تأمل کرده‌ام؛ فکر می‌کنم یگانه راه‌حل این است که تابع و آرگومان باید بتوانند مستقل از هم تغییر کنند.

آنچه شما در ص. ۳۷ می‌گویید، این که یک تابع‌نشانه هرگز نمی‌تواند جای یک نام خاص را بگیرد (دارم از قوانین پایه‌ای سخن می‌گویم)، به مشکلی فلسفی می‌انجامد. خیلی خوب می‌دانم که چه دلایل خوبی به‌نفع این دیدگاه می‌توان یافت؛ با این حال این خودمتناقض است. چرا که اگر ξ یک نام خاص باشد، «ξ هرگز نمی‌تواند جای یک نام خاص را بگیرد» جمله‌ای کاذب است، و در غیر اینصورت اصلاً جمله نیست. اگر چیزی بتواند وجود داشته باشد که یک شیء نباشد، آنگاه این واقعیت را نمی‌توان بدون تناقض بیان کرد؛ چرا که در این حکم، آن چیز مورد بحث یک شیء خواهد شد. بنابراین من تردید دارم که آیا φ در φx را بتوان اصولاً چیزی در نظر گرفت. اینک همانا در منطق فلسفی غوطه‌ور شده‌ایم.

شما در ص. ۴۹ می‌گویید که $\Delta = \Gamma$ مرجع دارد اگر Γ و Δ نام‌هایی خاص برای گستره‌های مقادیر یا نام‌هایی برای

---

[۱] [مترجم فارسی: واژه آلمانی‌ای که فرگه در اینجا به کار می‌گیرد «*algebraischen*» است‌که، همان‌طور که در ص. ۱۲۰
D. Bell (1981), Gottlob Frege: *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Philosophical Books, 22: 117–121.
اشاره شده است، در ترجمه‌ی انگلیسی به اشتباه به arithmetic [=حساب] برگردانده شده‌است.]

[۲] ر.ک. به ص. ۱۰۴، ۱۰۷، ۵۱۲، و ۵۱۴ از
B. Russell, *The Principles of Mathematics* (Cambridge 1903; 2nd ed. London 1937)

[۳] به‌عنوان طرحی از برهان کانتور، فرمول راسل به‌تنهایی چندان قابل فهم نیست. با وجود این، اگر آن را با ارائه‌ی راسل از این برهان در
B. Russell, 'On Some Difficulties in the Theory of Transfinite Numbers', *Proceedings of the London Mathematical Society*, series 2, vol. 4 (1907), part 1 (issued March 7, 1906), pp. 29–53
مخصوصاً در ص. ۳۲، و همچنین با طرح راسل از این برهان در بخش ۳۴۹ [کتابِ] اصول او مقایسه کنیم، می‌توان محتوای این فرمول را این‌چنین بازسازی کرد:
مطابق نمادگذاری پئانو و کاربرد راسل از حروف متناظر در مقاله فوق‌الذکر و در اصول، ϱ دامنه و $\breve{\varrho}$ دامنه‌ی عکس رابطه یک–به–یک R است؛ $\mathrm{Cls}'\varrho$ رده‌ی زیررده‌های ϱ است؛ $\mathrm{NC}'\varrho$ عدد اصلی ϱ است؛ و نشانه‌ی «$\supset$»، همچون در پئانو، به‌عنوان نشانه‌ی شمول، میان نشانه‌های رده‌ها استفاده می‌شود، یعنی مانند نشانه‌ی امروزی «$\supseteq$». با این اوصاف، فرمول فوق می‌گوید که عدد اصلی رده‌ای از زیررده‌های رده‌ی ϱ بزرگ‌تر است از عدد اصلی خود ϱ، زیرا در هر تناظر یک–به–یک R میان ϱ با رده‌ای از زیررده‌های ϱ (و مشخصاً، با رده‌ی همه‌ی زیررده‌های ϱ) رده‌ی w شامل تمام عناصر ϱ که عناصری از دامنه‌ی R نیستند، به‌عنوان عنصری از دامنه‌ی R ظاهر نمی‌شود. چرا که اگر w به‌عنوان متناظر عنصر x از ϱ ظاهر شود، آنگاه از یک سو، فرض $x \in w$ به‌واسطه‌ی شرط معرف w به $x \notin Rx$ و بنابراین، به‌دلیل فرض $w = Rx$، به $x \notin w$ (و نتیجةً به نقیض خودش) می‌انجامد، در حالی که از سوی دیگر، فرض $x \notin w$، اولاً به‌واسطه‌ی $w = Rx$ به $x \notin Rx$ و در پی آن، به همراه $x \in \varrho$ که همواره معتبر است و به‌واسطه‌ی شرط معرفِ w، به $x \in w$ (و نتیجةً دوباره به نقیض خودش)، و بنابراین، با لحاظ کردن همه‌ی این‌ها با هم، به تناقض می‌انجامد.
اما، اگر این بازسازی درست باشد، آنگاه «$w \sim \varepsilon\varrho$» را میان دو علامت استلزام در فرمول راسل باید «$w \sim \varepsilon\breve{\varrho}$» بخوانیم.

[مترجم فارسی: در ترجمه‌ای انگلیسی، دو فرمول جمله آخر اشتباهاً جابجا نوشته شده‌اند. در ترجمه‌ی فارسی جمله مطابق با اصل آلمانی اصلاح شده‌است. با تشکر از آرش اباذری.]

ارزش‌های صدق باشند. با این حال، در صفحات قبل توضیحی راجع به $\Gamma = \Delta$ در موردی که یکی از آن‌ها نامی برای یک گستره‌ی مقادیر و دیگری نامی برای یک ارزش صدق باشد نیافتم، جز در موردی که گستره‌ی مقادیر مورد بحث متشکل از همه چیز یا هیچ چیز است. اما گمان می‌کنم در این مورد درست متوجه منظورتان نشده‌ام.[۱]

تا کنون فقط مفهوم‌نگاشت و قوانین پایه‌ای شما را خوانده‌ام؛ به‌زودی خواندن آثار دیگر را شروع می‌کنم.

با احترام،
برتراند راسل

[†]این نمادها در *Revue de mathématiques* VII, 2 توضیح داده شده‌اند.[۲]

۳. نامه‌ی چهارم: فرگه به راسل

ینا
۱۹۰۲/۰۶/۲۹

همکار عزیز،
نامه‌ی مورخ ۲۴اُم شما و مقالات‌تان را دریافت کردم؛ بابت آنها بسیار ممنونم.

در مورد تناقضی که یافته‌اید، شاید گفته‌تان راجع به آن را درست متوجه نمی‌شوم. به نظر می‌رسد می‌خواهید برای اجتناب از تناقضْ فرمول‌هایی به شکل «$\varphi(\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon))$» را ممنوع کنید. اما اگر نشانه‌ای برای مصداق یک مفهوم (یک رده) را به‌عنوان یک نام خاص دارای مرجع بپذیرید و در نتیجه یک رده را چونان یک شیء به‌رسمیت بشناسید، آنگاه خود این رده باید یا تحت آن مفهوم قرار بگیرد یا خیر؛ طرد شق ثالث. اگر رده‌ی ریشه‌های دوم ۲ را به رسمیت بشناسید، آنگاه گریزی از این پرسش ندارید که آیا این رده یک ریشه دوم ۲ است یا خیر. اگر به نظر برسد که به این پرسش نه می‌توان پاسخ مثبت داد و نه پاسخ منفی، معنای آن این خواهد بود که نام خاص «$\grave{\varepsilon}(\varepsilon^2 = 2)$» فاقد مرجع بوده‌است. یا این که آیا باید قائل شد که گستره‌های مقادیر (مصادیق مفاهیم، اعداد) به‌مثابه نوعی خاص از اشیاء چنان‌اند که محمول‌هایی خاص را نه می‌توان به آنها نسبت داد و نه از آنها سلب کرد؟ این نیز قطعاً به مشکلات عمده‌ای می‌انجامد.

راجع به تردیدهای شما راجع به گفته‌ی من که یک تابع‌نام هرگز نمی‌تواند جای یک نام خاص را بگیرد، باید تمایز قاطعی میان یک نام یا نشانه و مرجع آن بگذاریم. وقتی نامی را در یک جمله به کار می‌بریم، نه از این نام بلکه از شیئی که به آن اشاره می‌کند سخن می‌گوییم. اما پیش می‌آید که بخواهیم از خود نام هم سخن بگوییم؛ در این صورت آن را درون علائم نقل قول قرار می‌دهم. برای نشان دادن اشباع‌نشده بودن تابع‌نام‌ها، این بار بگذارید جایگاه آرگومان را خالی بگذارم. فلذا می‌توانم بگویم:

«$(\quad)\cdot 3 + 4$» یک تابع‌نام است.

«$(\quad)\cdot 3 + 4$» هرگز نمی‌تواند جای یک نام خاص را بگیرد.

شما درست می‌گویید که:

«اگر ξ یک نام خاص باشد، «ξ» هرگز نمی‌تواند جای یک نام خاص را بگیرد» جمله‌ای کاذب است»؛

اما اشتباه ادامه می‌دهید که:

«و در غیر اینطورت اصلاً جمله نیست.»

[۱] به نظر می‌رسد راسل قرارداد فرگه در بخش ۱۰ از جلد اول قوانین پایه‌ای حساب (ص. ۱۷) را که گستره‌ی مقادیر $\grave{\varepsilon}(-\varepsilon)$ صدق و گستره‌ی مقادیر $\grave{\varepsilon}(\varepsilon = \smile^{\mathfrak{a}}\, \mathfrak{a} = \mathfrak{a})$ کذب است، به اشتباه چنین فهمیده‌است که این دو گستره مقادیر متشکل از «همه چیز یا هیچ چیز»، یعنی اولی همه چیز و دومی هیچ چیز، است. فرگه در نامه بعدی این اشتباه را تصحیح می‌کند.

[۲] از قرار معلوم ارجاع به
‘Sur la logique des relations avec des applications à la théorie des séries’, *Rivista di matematica (= Revue de mathématiques)* 7 (1900-1), pp. 115–48
است، اما همه نمادهایی که در اینجا استفاده شده‌است آنجا توضیح داده نشده‌اند.

درست‌اش این است که بگوییم:

اگر «ξ» نامی خاص نباشد، آنگاه «ξ هرگز نمی‌تواند جای یک نام خاص را بگیرد» جمله نیست.

در اینجا «««$4+3\cdot(\quad)$»»» — با دو دسته علامت نقل قول — جای «ξ» را می‌گیرد. در حالی که «$4+3\cdot(\quad)$» تابع‌نام است، «««$4+3\cdot(\quad)$»»» نام خاص است، و مرجع آن عبارت است از تابع‌نامِ «$4+3\cdot(\quad)$». در جمله «چیزی یک شیء است»، واژه «چیزی» جای یک آرگومان از نوع اول را می‌گیرد و نشانه‌ای برای نامی خاص است. بنابرین، هر چه را که به جای «چیزی» بگذاریم، همواره به جمله‌ای صادق می‌رسیم؛ چرا که یک تابع‌نام نمی‌تواند جای «چیزی» را بگیرد. در اینجا خود را در موقعیتی می‌یابیم که ماهیت زبانْ ما را ناگزیر از استفاده از عبارت‌های نادقیق می‌کند. جمله «A یک تابع است» چنین عبارتی است: همواره نادقیق است؛ چرا که «A» نشانه‌ای برای یک نام خاص است. مفهوم یک تابع باید مفهومی مرتبه دوم باشد، در حالی که در زبان همواره به شکل یک مفهوم مرتبه اول ظاهر می‌شود. کاملاً متوجه‌ام که همین حالا که دارم این را می‌نویسم، باز هم منظورم را نادقیق بیان کرده‌ام. گاهی این امر واقعاً اجتناب‌ناپذیر است. آن چه مهم است این است که بدانیم داریم چنین می‌کنیم، و این چطور رخ می‌دهد. در یک نمادگذاری مفهومی می‌توانیم عبارتی دقیق برای آنچه از تابع (مرتبه اول با یک آرگومان) مراد می‌کنیم معرفی کنیم، برای مثال: «$\grave{\varepsilon}\varphi(\varepsilon)$».[1] بنابرین، «$\acute{\varepsilon}(4+3\cdot\varepsilon)$» دقیقاً همان چیزی را بیان می‌کند که در «$4+3\cdot\xi$ یک تابع است» نادقیق بیان می‌شود. اکنون هرچه را جایگزین «$\varphi(\quad)$» کنیم، همواره به جمله‌ای صادق می‌رسیم چرا که تنها می‌توانیم نام‌های توابع مرتبه اول با یک آرگومان را جایگزین کنیم، زیرا در اینجا جایگاه آرگومان از نوع دوم است. همان‌طور که در زبان نمی‌توانیم به درستی درباره‌ی یک تابع بگوییم که یک شیء نیست، از زبان همچنین نمی‌توانیم استفاده کنیم تا درباره‌ی یک شیء، فی‌المثل ♃،[2] بگوییم که یک تابع نیست. شما درست فکر می‌کنید که با یک تابع نمی‌توان چون چیزی برخورد کرد؛ چرا که، همان‌طور که پیشتر گفتم، واژه‌ی «چیزی» نشانه‌ای از نامی خاص است. به جای استفاده از عبارت نادقیق «ξ یک تابع است»، می‌توانیم بگوییم: «««$4+3\cdot(\quad)$»» یک تابع‌نام است». نمی‌توانیم به درستی درباره یک مفهوم‌نام بگوییم که به چیزی ارجاع می‌کند؛ اما می‌توانیم بگوییم که فاقد مرجع نیست. درست است که تابع‌نشانه‌ها یا مفهوم‌نام‌ها اجتناب‌ناپذیرند؛ اما با پذیرش این، باید این را نیز بپذیریم که برخی از آن‌ها هستند که فاقد مرجع نیستند، حتی با وجود اینکه، به بیانی دقیق، عبارت «مرجع یک تابع‌نام» را نباید به‌کار ببریم.

راجع به آخرین نکته‌ی مورد اشاره‌ی شما، لازم است این را بگوییم: $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$ رده‌ای شامل تنها یک شیء واحد، یعنی صدق، و $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, a = a)$ رده‌ای شامل تنها یک شیء واحد، یعنی کذب است. اگر Γ نه این رده و نه آن دیگری، بلکه گستره‌ی مقادیری دیگر باشد، آنگاه Γ از صدق متمایز است چرا که بر $\acute{\varepsilon}(-\varepsilon)$ منطبق نیست و هکذا از کذب متمایز است چرا که بر $\acute{\varepsilon}(\varepsilon = \top\!\!\smile^{\mathfrak{a}}\!\!-\, a = a)$ منطبق نیست. بنابرین، اگر Δ یک ارزش صدق باشد، آنگاه «$\Gamma = \Delta$» بر کذب ارجاع می‌کند.

عنوان مقاله‌ی «آیا موقعیت در زمان ...» باعث شد گمان کنم شاید شما به مقاله‌ای که من زمانی در *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* درباره‌ی پرسشی مشابه منتشر کردم علاقه‌مند باشید. در حال حاضر دیگر قادر به یافتن نسخه‌ای از آن نیستم و عنوان آن را نیز به یاد نمی‌آورم، اما اگر بخواهید می‌توانم به‌دنبالش بگردم. احتمالاً با مقاله‌ی کوتاه من «درباره اعداد آقای اچ. شوبرت» آشنا هستید.

هنوز مجالی برای مطالعه‌ی مقالاتتان پیدا نکرده‌ام، اما امیدوارم به زودی این کار را انجام دهم.

با احترام،
گ. فرگه

---

[1] به نظر می‌رسد در اینجا فرگه با استفاده از *spiritus asper* [«$\grave{\varepsilon}$»] به جای *spiritus lenis* [«$\acute{\varepsilon}$»] که اغلب به کار می‌برد می‌خواهد میان عبارت مورد بحث و نام‌هایی که برای گستره‌های مقادیر دارد تمییز قائل شود.

[2] این نشانه‌ی سیاره‌ی مشتری است؛ ر.ک. به جلد II قوانین بنیادین حساب، صفحه ۸۴، و ص. ۲۲۷ از منتشرات پس از مرگ.