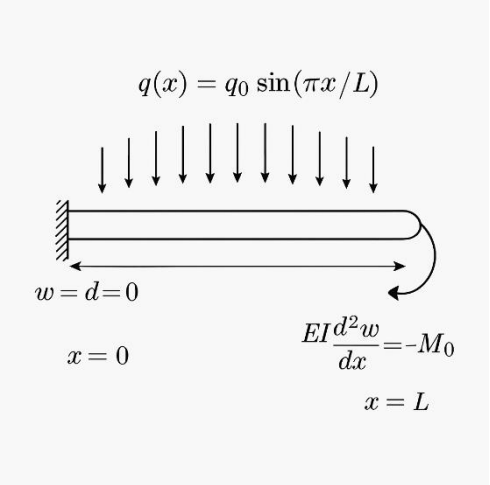
FEM Homework 2 (113.4.12)

(1) 考慮一個均勻樑，受到正弦分布載重的作用 $q(x)=q_0\sin(\pi x/L)$, 如圖所示. 此問題的強形式(strong form)為



ODE: $EI\dfrac{d^4w}{dx^4}=q_0\sin(\pi x/L)$ for $0<x<L$

BCs: $w=\dfrac{dw}{dx}=0$ at $x=0$

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-M_0,\quad EI\frac{d^3w}{dx^3}=0,\quad \text{at } x=L$$

(a) 推導出理論解 $w(x)$

(b) 使用"加權殘差法"推導出此樑問題的弱形式

(c) 使用多項式函數，推導出 Rayleigh-Ritz 的近似解，其中 $M_0=q_0L^2/\pi^4$, in which *N*=1,2 and 3.

Hint:

1. Rayleigh-Ritz method

$$K_{ij}C_j=F_i$$

$$K_{ij}=B(\phi_i,\phi_j)=\int_0^L EI\frac{d^2\phi_i}{dx^2}\frac{d^2\phi_j}{dx^2}dx$$

$$F_i=l(\phi_i)=\int_0^L q\phi_i dx-M_o\left.\frac{d\phi_i}{dx}\right|_{x=L}$$

2. 多項式函數

$$\left\{\phi_j\Big|_{j=1}^{N}\phi_1(x)=x^2,\phi_2(x)=x^3,\phi_3(x)=x^4,....\right\}$$

(d) 繪製四張圖，位移、旋轉角、彎矩及剪力，分別對應理論解的分析，並說明上一題不同項次(N=1,2 and 3) Rayleigh-Ritz 近似解的精確程度。(編寫程式並畫圖)