ΘΕΜΑ 4

4.1. Η ένταση στο σημείο Σ της τροχιάς του δορυφόρου είναι :

$$g_Σ = G\frac{M_Γ}{(R_Γ + h)^2} = \frac{g_0 \cdot R_Γ^2}{(R_Γ + h)^2} = \frac{10 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6)^2}{(9 \cdot 10^6)^2} = \frac{409{,}6}{81} = 5{,}06\ \mathrm{m/s^2}$$

με διεύθυνση, την διεύθυνση της ακτίνας και φορά προς το κέντρο της Γης.

Για το δυναμικό ισχύει:

$$V_Σ = -G\frac{M_Γ}{R_Γ + h} = -\frac{g_0 \cdot R_Γ^2}{R_Γ + h} = -\frac{10 \cdot (6{,}4 \cdot 10^6)^2}{9 \cdot 10^6} = -45{,}5 \cdot 10^6\ \mathrm{J/kg}$$

Μονάδες 6

4.2. Η μηχανική ενέργεια είναι το άθροισμα δυναμικής και κινητικής ενέργειας στο ύψος αυτό.

Η δυναμική ενέργεια είναι:

$$U_Σ = -G\frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h}$$

Για την κινητική ενέργεια:

Από την κυκλική κίνηση είναι $\quad ΣF = F_κ \Leftrightarrow F_g = F_κ$

$$G\frac{M_Γ \cdot m_Σ}{(R_Γ + h)^2} = \frac{m_Σ \cdot u^2}{R_Γ + h} \Leftrightarrow G\frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h} = m_Σ \cdot u^2$$

$$\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h} = \frac{1}{2} \cdot m_Σ \cdot u^2 = K_Σ$$

$$E_M = U_Σ + K_Σ = -G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h} + \frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h} = -\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h}$$

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot 45{,}5 \cdot 10^6 \cdot 450 = -1{,}02 \cdot 10^{10}\mathrm{J}$$

Μονάδες 6

4.3. Στη νέα τροχιά ο δορυφόρος θα έχει το 80% της αρχικής μηχανικής ενέργειας:

$$E'_M = 0{,}8 \cdot E_M$$

Επειδή η μηχανική ενέργεια είναι αρνητική, το ποσοστό αυτό σημαίνει ότι $E'_M > E_M$, δηλαδή ισοδυναμεί με αύξηση της μηχανικής ενέργειας, γεγονός που συμφωνεί με την αναφορά της εκφώνησης σε μεγαλύτερο τελικό ύψος.

$$-\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h'} = 0{,}8 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot G \cdot \frac{M_Γ \cdot m_Σ}{R_Γ + h}\right)$$

$$\frac{1}{R_Γ + h'} = \frac{0{,}8}{R_Γ + h} \Leftrightarrow R_Γ + h = 0{,}8 \cdot (R_Γ + h') \Leftrightarrow h' = 4850\ \mathrm{km}$$

Μονάδες 6

4.4. Οι ταχύτητες του δορυφόρου στις δύο τροχιές είναι:

$$G\frac{M_\Gamma \cdot m_\Sigma}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{m_\Sigma \cdot u^2}{R_\Gamma + h} \Leftrightarrow G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h} = u^2 \Leftrightarrow$$

$$u = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}} \qquad (1)$$

και (ομοίως):

$$u' = \sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h'}} \qquad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις (1) και (2), προκύπτει:

$$\frac{u'}{u} = \frac{\sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h'}}}{\sqrt{G\frac{M_\Gamma}{R_\Gamma + h}}} = \sqrt{\frac{R_\Gamma + h}{R_\Gamma + h'}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 10^6}{11{,}25 \cdot 10^6}} = \sqrt{0{,}8} = 0{,}9$$

Μονάδες 7