ΘΕΜΑ 4

4.1. Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ύψος $h = 3R_Γ$ από την επιφάνεια της γης υπολογίζεται από τον τύπο: $g = G\frac{M_Γ}{(R_Γ+h)^2}$.

Αντικαθιστώ στον τύπο του ύψους $h = 3R_Γ$. Έτσι έχω

$$g = \frac{G \cdot M_Γ}{(R_Γ + 3R_Γ)^2} \Leftrightarrow\ g = \frac{G\ \cdot M_Γ}{(4\, R_Γ)^2} \Leftrightarrow\ g = \frac{G\ \cdot M_Γ}{16{R_Γ}^2}(1)$$

Για την ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνειας της Γης έχω

$$g_0 = \frac{G \cdot M_Γ}{{R_Γ}^2} \Leftrightarrow\ G \cdot M_Γ = g_0 \cdot {R_Γ}^2(2)$$

Έχω $g = \frac{G\ \cdot M_Γ}{16{R_Γ}^2} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} g = \frac{g_0 \cdot {R_Γ}^2}{16{R_Γ}^2} \Leftrightarrow g = \frac{1}{16}g_0 \Leftrightarrow g = \frac{1}{16}10\, {}^{m}/{}_{s^2} \Leftrightarrow g = \frac{5}{8}{}^{m}/{}_{s^2}$

Μονάδες 6

4.2. Το βάρος του δορυφόρου, παίζει τον ρόλο της κεντρομόλου δύναμης, οπότε:

$$F = F_κ \Leftrightarrow \frac{G \cdot M_Γ \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot u^2}{r} \Leftrightarrow \frac{G \cdot M_Γ}{r} = u^2 \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{G \cdot M_Γ}{r}}(1)$$

όπου $M_Γ$ η μάζα της Γης και $r = R_Γ + h = 4R_Γ$, η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς.

Για την επιτάχυνση στην επιφάνεια της Γης έχουμε:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_Γ}{{R_Γ}^2} \Leftrightarrow\ G \cdot M_Γ = g_0 \cdot {R_Γ}^2(2)$$

και με αντικατάσταση στην (1) παίρνουμε:

$$u = \sqrt{\frac{G \cdot M_Γ}{r}} = u = \sqrt{\frac{g_0 \cdot {R_Γ}^2}{4\, R_Γ}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_Γ}{4}} \Leftrightarrow u = \sqrt{\frac{10\, {}^{m}/{}_{s^2} \cdot 6400 \cdot 10^3 m}{4}} \Leftrightarrow u = 4000\, {}^{m}/{}_{s}$$

Μονάδες 6

4.3. Η μηχανική ενέργεια του σώματος Σ, ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας είναι ίση:

$$E_M = K + U = \frac{1}{2}m \cdot u^2 + \left(-G\frac{M_Γ \cdot m}{r}\right) = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{G\frac{M_Γ}{r}}\right)^2 - G\frac{M_Γ \cdot m}{r}$$

$$E_M = \frac{1}{2}\frac{m \cdot G \cdot M_Γ}{r} - \frac{m \cdot G \cdot M_Γ}{r} \Leftrightarrow E_M = -\frac{m \cdot G \cdot M_Γ}{2r}(3)$$

Αντικαθιστώ στην σχέση (3) όπου $G \cdot M_Γ = g_0{R_Γ}^2$ και όπου $r = 4R_Γ$ και έτσι έχω:

$$E_M = -\frac{g_0 \cdot m \cdot {R_Γ}^2}{2 \cdot 4 \cdot R_Γ} \Leftrightarrow E_M = -\frac{1}{8}g_0 \cdot m \cdot R_Γ \Leftrightarrow E_M = -\frac{1}{8}4kg \cdot 10\frac{m}{s^2} \cdot 6400 \cdot 10^3 m = -32 \cdot 10^6 J$$

Άρα: E_M=-32·10^6J

Μονάδες 6

4.4. Η ελάχιστη ενέργεια $E_{προσφ}$ είναι αυτή η οποία θα επιτρέψει στο σώμα να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα.

Από την αρχή διατήρηση ενέργειας για το σώμα Σ θα πάρουμε:

$$E_{M(αρχ)}+E_{προσφ}=E_{M(τελ)}$$

$$E_M+E_{προσφ}=K_\infty+U_\infty$$

$$E_M+E_{προσφ}=0$$

$$E_{προσφ}=-\ E_M$$

$$E_{προσφ}=-\ (-32\cdot 10^6 J)$$

$$E_{προσφ}=32\cdot 10^6 J$$

Μονάδες 7