ΘΕΜΑ 2

2.1.

2.1.Α. Σωστή απάντηση η (γ)

Μονάδες 4

2.1.Β.

Το βάρος του δορυφόρου στην επιφάνεια της Γης είναι ίσο με $B_0 = \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{R^2}$ (1)

ενώ το βάρος του δορυφόρου σε ύψος h πάνω από την επιφάνεια της Γης είναι ίσο με $B = \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{(R+h)^2}$ (2)

Ισχύει όμως

$$B = \frac{1}{16} B_0 \Leftrightarrow \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{(R+h)^2} = \frac{1}{16} \cdot \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{R^2}$$

$$\frac{1}{(R+h)^2} = \frac{1}{16R^2} \Leftrightarrow (R+h)^2 = 16R^2 \Leftrightarrow (R+h)^2 = (4R)^2$$

$$R + h = 4R \Leftrightarrow h = 3R \ (1)$$

Η ταχύτητα περιφοράς του δορυφόρου σε ύψος h=3R υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mathrm{F} = \mathrm{F_\kappa} \Leftrightarrow \mathrm{G}\frac{M_\Gamma \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{r}^2} = \frac{\mathrm{m}\,\upsilon^2}{\mathrm{r}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{G} \cdot M_\Gamma}{\mathrm{r}} = \upsilon^2 \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{G} \cdot M_\Gamma}{\mathrm{r}}}$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{G} \cdot M_\Gamma}{\mathrm{R+h}}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{G} \cdot M_\Gamma}{4\mathrm{R}}} \ (1)$$

Η βαρυτική επιτάχυνση στην επιφάνεια της Γης δίνεται από τον τύπο $\mathrm{g_0} = \frac{\mathrm{G} \cdot M_\Gamma}{\mathrm{R}^2} \Leftrightarrow \mathrm{G} \cdot M_\Gamma = \mathrm{g_0 R^2}$ (2)

Αντικαθιστώ το αποτέλεσμα της σχέσεως (2) στην σχέση (1) και έχω:

$$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{g_0 \cdot R^2}}{4\mathrm{R}}} \Leftrightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{g_0 \cdot R}}{4}} \Leftrightarrow \upsilon = \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{g_0 \cdot R}}$$

Μονάδες 8

2.2.

2.2.Α. Σωστή απάντηση η (β)

Μονάδες 4

2.2.Β.

Η ταχύτητα διαφυγής από την επιφάνεια της Γης υπολογίζεται με εφαρμογή της αρχής διατήρησης μηχανικής ενέργειας από την επιφάνεια της Γης μέχρι το άπειρο, όπου το σώμα φτάνει με μηδενική μηχανική ενέργεια.

$$\mathrm{E\mu\eta\chi_{\Gamma\eta}} = \mathrm{E\mu\eta\chi_\infty} \Leftrightarrow -\mathrm{G}\frac{M_\Gamma \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{R}} + \frac{1}{2}\mathrm{m}\upsilon\delta^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{m}\,\upsilon_\delta^2 = \mathrm{G}\frac{M_\Gamma \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \upsilon_\delta^2 = \frac{2\mathrm{G} \cdot M_\Gamma}{\mathrm{R}}$$

$$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2\mathrm{G} \cdot M_\Gamma}{\mathrm{R}}} \ (1)$$

Για το σώμα m που τοποθετείται σε κυκλική τροχιά ως δορυφόρος, η βαρυτική έλξη της Γης παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης.

$$\mathrm{F} = \mathrm{F_κ} \Leftrightarrow \mathrm{G}\frac{M_Γ \cdot \mathrm{m}}{\mathrm{r}^2} = \frac{\mathrm{m}\,υ^2}{\mathrm{r}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{G} \cdot M_Γ}{\mathrm{r}} = υ^2 \Leftrightarrow υ = \sqrt{\frac{\mathrm{G} \cdot M_Γ}{\mathrm{r}}}\ (2)$$

Από τα δεδομένα της άσκησης έχω:

$υ = \frac{1}{2}υ_δ \overset{(1)}{\underset{(2)}{\Leftrightarrow}} \sqrt{\frac{\mathrm{G} \cdot M_Γ}{\mathrm{r}}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\mathrm{G}\frac{M_Γ}{\mathrm{R}}}$ υψώνω στο τετράγωνο

$$\frac{\mathrm{G} \cdot M_Γ}{\mathrm{r}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\mathrm{G} \cdot M_Γ}{\mathrm{R}} \Leftrightarrow \frac{1}{\mathrm{r}} = \frac{1}{2\mathrm{R}} \Leftrightarrow \mathrm{r} = 2\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{R} + \mathrm{h} = 2\mathrm{R} \Leftrightarrow \mathrm{h} = \mathrm{R}$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας σε ύψος h δίνεται από τον τύπο:

$$g = \frac{G \cdot M_Γ}{(R + h)^2}$$

αντικαθιστώ h=R και ο τύπος γίνεται:

$$g = \frac{G \cdot M_Γ}{(R + R)^2} \Leftrightarrow g = \frac{G \cdot M_Γ}{4R^2}\ (3)$$

Η ένταση του πεδίου βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης είναι:

$$g_0 = \frac{G \cdot M_Γ}{R^2} \Leftrightarrow G \cdot M_Γ = g_0 \cdot R^2\ (4)$$

Αντικαθιστώ την σχέση (3) με την σχέση (4) και έχω

$$g = \frac{g_0 . R^2}{4R^2} \Leftrightarrow g = \frac{g_0}{4}$$

Μονάδες 9