ΘΕΜΑ 4

4.1. Η ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης σε ύψος h από την επιφάνειά της δίνεται από την σχέση

$$g = \frac{GM_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2}$$

Αντικαθιστώντας το ύψος $h = 3R_\Gamma$ και το γεγονός ότι $GM_\Gamma = g_0 R_\Gamma^2$ θα έχουμε

$$g = \frac{GM_\Gamma}{(R_\Gamma + h)^2} = \frac{g_0 R_\Gamma^2}{16R_\Gamma^2} = \frac{g_0}{16} = 0{,}624\,\frac{m}{s^2}$$

Μονάδες 5

4.2. Η ταχύτητα περιστροφής του δορυφόρου θα είναι

$$u = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}} = \frac{\sqrt{g_0 R_\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{10\,\frac{m}{s^2}\;6{,}4 \cdot 10^6\,m}}{2} = 4 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

Μονάδες 6

4.3. Σε χρονικό διάστημα μισής περιόδου, ο δορυφόρος αντιστρέφει την φορά της ταχύτητάς του χωρίς να αλλάζει το μέτρο, οπότε το μέτρο της μεταβολής της ορμής του θα είναι:

$$\Delta P = P_{\tau\varepsilon\lambda} - P_{\alpha\rho\chi} = mu - (-mu) = 2mu = 2 \cdot 5 \cdot 10^3 kg \cdot 4 \cdot 10^3\,\frac{m}{s} = 4 \cdot 10^7\,\frac{kgm}{s}$$

Μονάδες 6

4.4. Για να αποδείξουμε ότι ο δορυφόρος διαφεύγει από το βαρυτικό πεδίο της Γης θα συγκρίνουμε την ταχύτητα διαφυγής σε αυτό το ύψος με την ταχύτητα που απέκτησε ο δορυφόρος. Έχουμε

$$u_\delta = \sqrt{\frac{2GM_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{2g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma}} = \frac{\sqrt{2g_0 R_\Gamma}}{2} = \frac{\sqrt{2 \cdot 10\,\frac{m}{s^2}\;6{,}4 \cdot 10^6\,m}}{2} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3\,\frac{m}{s} < 2u = 8 \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

Η ταχύτητα που απέκτησε από τους πυραύλους είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα διαφυγής στο σημείο αυτό, οπότε θα μεταβεί σε ''άπειρη' απόσταση. Για να υπολογίσουμε την τελική ταχύτητα του δορυφόρου θα εφαρμόσουμε την Α.Δ.Μ.Ε. από την αρχική θέση μέχρι την τελική ($U_{\tau\varepsilon\lambda} = 0$).

$$U_{\alpha\rho\chi} + K_{\alpha\rho\chi} = U_{\tau\varepsilon\lambda} + K_{\tau\varepsilon\lambda} \Leftrightarrow -\frac{GM_\Gamma m}{R_\Gamma + h} + \frac{mu_1^2}{2} = \frac{mu_\infty^2}{2} \Leftrightarrow \frac{u_\infty^2}{2} = -\frac{g_0 R_\Gamma^2}{4R_\Gamma} + \frac{u_1^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$u_\infty = \sqrt{\frac{2u_1^2 - g_0 R_\Gamma}{2}} = \sqrt{\frac{128 \cdot 10^6 - 64 \cdot 10^6}{2}\frac{m}{s}} = \sqrt{32 \cdot 10^6}\,\frac{m}{s} = 4\sqrt{2} \cdot 10^3\,\frac{m}{s}$$

Μονάδες 8