ΘΕΜΑ 4

4.1. Με βάση την ένταση του βαρυτικού πεδίου της Γης στην επιφάνειά της έχουμε:

$$g_o = \frac{G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma^2} \implies G \cdot M_\Gamma = g_o \cdot R_\Gamma^2$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος Γη-δορυφόρος δίνεται από τη σχέση:

$$U = -G\frac{M_\Gamma \cdot m_1}{r} = -\frac{m_1 g_o \cdot R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h} = -\frac{m_1 g_o R_\Gamma}{2} = -96 \cdot 10^8 \text{ J}$$

Μονάδες 5

4.2. Εφόσον το όχημα δέχεται μόνο τη δύναμη της βαρύτητας, αυτή η δύναμη θα είναι και κεντρομόλος δύναμη ώστε να εκτελέσει ομαλή κυκλική κίνηση, οπότε:

$$F_g = F_K \Rightarrow G\frac{M_\Gamma m_1}{r^2} = m_1\frac{\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}} = \sqrt{\frac{g_o R_\Gamma^2}{r}} = \sqrt{\frac{g_o R_\Gamma^2}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{\frac{g_o R_\Gamma}{2}} = 5600 \text{ m/s}$$

Άρα η γωνιακή ταχύτητα του δορυφόρου σε ύψος h από την επιφάνεια της Γης είναι:

$$\omega = \frac{\upsilon}{r} = \frac{\upsilon}{R_\Gamma + h} = \frac{\upsilon}{2R_\Gamma} = 43{,}75 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$$

Μονάδες 6

4.3. Η αρχική μηχανική ενέργεια του σώματος Γ, ίση με το άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής του ενέργειας:

$$E_{M(\alpha\rho\chi)} = K + U = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \left(-G\frac{M_\Gamma m}{r}\right) = \frac{1}{2}m\frac{g_o R_\Gamma}{2} - m\frac{g_o R_\Gamma}{2} = -m\frac{g_o R_\Gamma}{4} = -16 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Έστω ότι η απαιτούμενη ενέργεια δίνεται με την επίδραση κατάλληλης δύναμης, η οποία παράγει έργο W, προσφέροντας έτσι την απαραίτητη ενέργεια. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας για το σώμα Γ θα πάρουμε:

$$E_{M(\alpha\rho\chi)} + W_F = E_{M(\tau\varepsilon\lambda)} \Rightarrow E_{M(\alpha\rho\chi)} + W_F = K_\infty + U_\infty$$

Αλλά η ελάχιστη ενέργεια είναι αυτή η οποία θα επιτρέψει στο σώμα να φτάσει στο άπειρο με μηδενική ταχύτητα, άρα $K_\infty = 0$. Επίσης τη δυναμική ενέργεια στο άπειρο θεωρούμε μηδενική, οπότε $E_{M(\tau\varepsilon\lambda)} = 0$. Συνεπώς, από την τελευταία σχέση θα έχουμε:

$$W_F = -E_{M(\alpha\rho\chi)} = 16 \cdot 10^5 \text{ J}$$

Μονάδες 7

4.4. Ο δορυφόρος Β κινείται στην ίδια κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη με αυτήν που κινείται ο δορυφόρος Α, άρα το μέτρο της ταχύτητάς του είναι υ, δηλαδή το ίδιο με το μέτρο της ταχύτητας του δορυφόρου Α, όπως φαίνεται από τη σχέση $\upsilon = \sqrt{\frac{GM_\Gamma}{r}}$. Το σύστημα των δύο μαζών είναι μονωμένο, άρα για κάθε χρονική στιγμή ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής:

$$\vec{p}_{\alpha\rho\chi} = \vec{p}_{\tau\varepsilon\lambda} \Rightarrow m_1\upsilon - m_2\upsilon = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon}{m_1 + m_2} = 2800 \text{ m/s}$$

Το ποσοστό % της αρχικής ενέργειας του συστήματος των δύο δορυφόρων Α και Β που χάνεται κατά την κρούση είναι:

$$\pi\% = \frac{\mathrm{K}_{\alpha\rho\chi} - \mathrm{K}_{\tau\varepsilon\lambda}}{\mathrm{K}_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{m}_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}_2\upsilon^2 - \frac{1}{2}(\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2)\mathrm{V}^2}{\frac{1}{2}\mathrm{m}_1\upsilon^2 + \frac{1}{2}\mathrm{m}_2\upsilon^2} 100\% = 75\%$$

Μονάδες 7