ΛΥΣΗ

α) Έχουμε $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x (x^2 - x - 2) = 0$. Οπότε x = 0 ή $x^2 - x - 2 = 0$ που έχει $\Delta = 9$ και ρίζες x = -1 και x = 2. Τελικά ρίζες της εξίσωσης P(x) = 0 είναι οι x = 0, x = -1 και x = 2.

β) Για να ορίζεται η εξίσωση, πρέπει x>0. Θέτουμε $\ln x=\omega$ και η εξίσωση γίνεται $P(\omega)=0$.

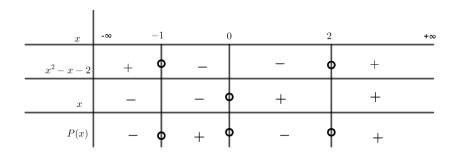
Από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες $\omega = 0$, $\omega = -1$, $\omega = 2$. Οπότε προκύπτουν τρείς εξισώσεις:

i)
$$\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \ln 1 \Leftrightarrow x = 1 \delta \epsilon \kappa \tau \dot{\eta}$$
.

ii)
$$\ln x = -1 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^{-1} \Leftrightarrow x = e^{-1}$$
 δεκτή.

iii)
$$\ln x = 2 \Leftrightarrow \ln x = \ln e^2 \Leftrightarrow x = e^2$$
 δεκτή.

γ) Η ανίσωση $x^3-x^2-2x>0 \Leftrightarrow P(x)>0 \Leftrightarrow x\big(x^2-x-2\big)>0$ αληθεύει για $x\in (-1,0)\cup (2,+\infty)$, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.



Οπότε για την ανίσωση $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - 2(\ln x) > 0 \Leftrightarrow P(\ln x) > 0$, προκύπτει ότι $\ln x \in (-1,0) \cup (2,+\infty)$. Λύνουμε τις δύο ανισώσεις:

i)
$$-1 < \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln e^{-1} < \ln x < \ln 1 \Leftrightarrow \frac{1}{e} < x < 1$$

ii)
$$2 < \ln x \Leftrightarrow \ln e^2 < \ln x \Leftrightarrow e^2 < x$$
.

Τελικά
$$x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right) \cup \left(e^2, +\infty\right)$$
.