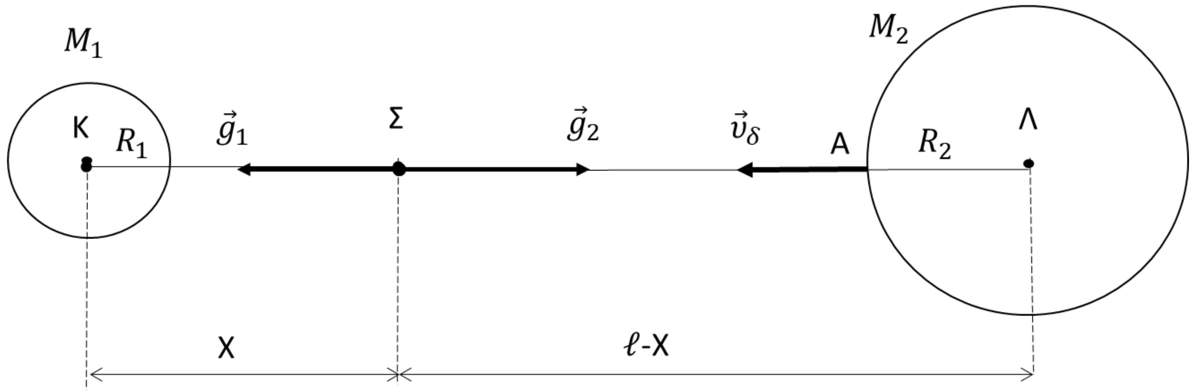
ΘΕΜΑ 4



4.1. Στο σημείο Σ η συνολική ένταση του βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών έχει δύο συνιστώσες, την $\vec{g}_1$ λόγω του πλανήτη Π_1 και την $\vec{g}_2$ λόγω του πλανήτη Π_2, επομένως:

$$\vec{g}_\Sigma = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \Rightarrow g_1 = g_2 \Rightarrow \frac{GM_1}{X^2} = \frac{GM_2}{(\ell - X)^2} \Rightarrow \frac{M_1}{X^2} = \frac{9M_1}{(\ell - X)^2} \Rightarrow (\ell - X)^2 = 9X^2 \Rightarrow X = \frac{\ell}{4}$$

Επομένως, $X = 10\,R_1 \Rightarrow X = 10^6 m$

Μονάδες 6

4.2. Το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών στο σημείο Σ είναι ίσο με:

$$V_\Sigma = V_1 + V_2 \Rightarrow V_\Sigma = -\frac{GM_1}{X} - \frac{GM_2}{\ell - X} \Rightarrow V_\Sigma = -\frac{g_{0,1}R_1^2}{10R_1} - \frac{9g_{0,1}R_1^2}{30R_1} \Rightarrow V_\Sigma = -\frac{4g_{0,1}R_1}{10} \Rightarrow V_\Sigma = -24 \cdot 10^4 \frac{J}{Kg}.$$

Μονάδες 6

4.3. Το συνολικό δυναμικό του βαρυτικού πεδίου των δύο πλανητών στο σημείο Α είναι ίσο με:

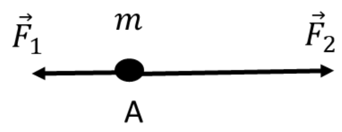
$$V_A = V_1 + V_2 \Rightarrow V_A = -\frac{GM_1}{\ell - R_2} - \frac{GM_2}{R_2} \Rightarrow V_A = -\frac{g_{0,1}R_1^2}{30R_1} - \frac{9g_{0,1}R_1^2}{10R_1} \Rightarrow V_\Sigma = -\frac{28g_{0,1}R_1}{30} \Rightarrow V_A = -56 \cdot 10^4 \frac{J}{Kg}.$$

Η ελάχιστη ταχύτητα $\vec{\upsilon}_\delta$ με την οποία πρέπει να εκτοξεύσουμε ένα σώμα μάζας $m = 3\,Kg$ από την επιφάνεια του πλανήτη Π_2 για να φτάσει στον πλανήτη Π_1 αντιστοιχεί σε μηδενική ταχύτητα του σώματος στο σημείο Σ αφού στη συνέχεια θα επιταχυνθεί προς την επιφάνεια του πλανήτη Π_1 λόγω της ισχυρότερης βαρυτικής έλξης που δέχεται από αυτόν.
Εφαρμόζουμε ΘΜΚΕ από το Α στο Σ.

$$\Delta K = W_{(A)\to(\Sigma)} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2}m\upsilon_\delta^2 = m(V_A - V_\Sigma) \Rightarrow \upsilon_\delta = \sqrt{2(V_\Sigma - V_A)} \Rightarrow \upsilon_\delta = 800\frac{m}{s}$$

Μονάδες 8

4.4. Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής του σώματος μάζας m αμέσως μετά την εκτόξευσή του από τον πλανήτη Π_2 είναι ίσος με τη συνισταμένη βαρυτική έλξη που δέχεται στο σημείο Α.



$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = F_2 - F_1 \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{GM_2m}{R_2^2} - \frac{GM_1m}{(\ell - R_2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9GM_1m}{100R_1^2} - \frac{GM_1m}{900R_1^2} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{9g_{0,1}R_1^2m}{100R_1^2} - \frac{g_{0,1}R_1^2m}{900R_1^2} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{8mg_{0,1}}{90} \Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = 1{,}6\,N$$

Μονάδες 5