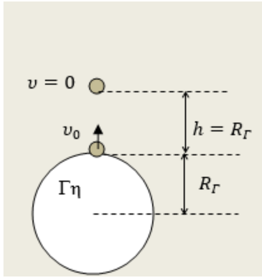
ΘΕΜΑ 4

4.1. Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας από την εκτόξευση μέχρι το σημείο που φτάνει:



$E_M^{\alpha\rho\chi} = E_M^{\tau\varepsilon\lambda}$ ή $-G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{R_\Gamma} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot \upsilon_0^2 = -G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m}{2 \cdot R_\Gamma}$

ή $\frac{m \cdot \upsilon_0^2}{2} = \frac{G \cdot M_\Gamma \cdot m}{2 \cdot R_\Gamma}$, οπότε $\upsilon_0 = \sqrt{g_0 \cdot R_\Gamma} = 8 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

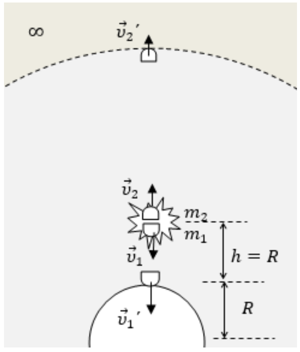
Μονάδες 6

4.2. Η ταχύτητα διαφυγής ενός σώματος από το ύψος $h = R_\Gamma$, είναι:

$\upsilon_\delta = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma + h}} = \sqrt{g_0 \cdot R_\Gamma} = 8 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Μονάδες 6

4.3. Έστω $\vec{\upsilon}_1$ η ταχύτητα του σώματος μάζας m_1 αμέσως μετά την έκρηξη και $\vec{\upsilon}_1{}'$ η ταχύτητά του όταν φτάνει στην επιφάνεια της Γης. Το σώμα αυτό αμέσως μετά την έκρηξη κινείται προς τη Γη. Η μηχανική ενέργεια διατηρείται, συνεπώς:



$$E_M^{\varepsilon\kappa\rho} = E_M^{\tau\varepsilon\lambda}$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m_1}{R_\Gamma + h} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1'^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m_1}{R_\Gamma}$$

$$\upsilon_1^2 - \frac{G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma} = \upsilon_1'^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma}$$

$$\upsilon_1^2 = \upsilon_1'^2 - \frac{G \cdot M_\Gamma}{R_\Gamma}$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{\upsilon_1'^2 - g_0 \cdot R_\Gamma} = \sqrt{2{,}56 \cdot 10^8 - 0{,}64 \cdot 10^8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \sqrt{192} \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Κατά την έκρηξη που συνέβη στο αρχικό σώμα, με την οποία χωρίστηκε στα δύο νέα σώματα ίσης μάζας και η οποία θεωρείται ασήμαντης χρονικής διάρκειας, ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής για το σύστημα των σωμάτων αυτών:

$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}}$, ή $0 = m_1 \cdot \upsilon_1 - m_2 \cdot \upsilon_2$, άρα ισχύει $m_1 \cdot \upsilon_1 = m_2 \cdot \upsilon_2$ και επειδή $m_1 = m_2$ προκύπτει $\upsilon_2 = \upsilon_1 = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} > \upsilon_\delta$

Άρα η μάζα m_2 διαφεύγει από την έλξη του πεδίου βαρύτητας της Γης κινούμενη προς το διάστημα.

Μονάδες 7

4.4. Για να υπολογίσουμε το μέτρο της ταχύτητας με την οποία η μάζα m_2 διαφεύγει στο διάστημα εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας, κατά την κίνησή της από το σημείο της έκρηξης μέχρι τη διαφυγή της από το πεδίο βαρύτητας της Γης:

$E_M^{\varepsilon\kappa\rho} = E_M^{\infty}$, ή $\frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon_2^2 - G \cdot \frac{M_\Gamma \cdot m_2}{2 \cdot R_\Gamma} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \upsilon_2'^2$

ή $\upsilon_2'^2 = \upsilon_2^2 - g_0 \cdot R_\Gamma$

τελικά $\upsilon_2{}' = \sqrt{\upsilon_2^2 - g_0 \cdot R_\Gamma} = \sqrt{1{,}92 \cdot 10^8 - 0{,}64 \cdot 10^8}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$

Μονάδες 6