第一章 图的基本概念

§1.1 图和简单图

定义 1 一个图 G 定义为一个有序对(V, E)，记为 $G = (V, E)$，其中

（1）V 是一个非空集合，称为顶点集或边集，其元素称为顶点或点；

（2）E 是由 V 中的点组成的无序点对构成的集合，称为边集，其元素称为边，且同一点对在 E 中可出现多次。

图 G 的顶点集也记为 $V(G)$, 边集也记为 $E(G)$。顶点集和边集都有限的图称为**有限图**。只有一个顶点而无边的图称为**平凡图**。其他所有的图都称为**非平凡图**。边集为空的图称为**空图**。图 G 的**顶点数**（或**阶数**）和**边数**可分别用符号 $n(G)$ 和 $m(G)$表示。连接两个相同顶点的边的条数，叫做边的**重数**。重数大于 1 的边称为**重边**。端点重合为一点的边称为**环**。既没有环也没有重边的图称为**简单图**。其他所有的图都称为**复合图**。

边记为 uv，也可记 uv 为 e，即 $e = uv$。此时称 u 和 v 是 e 的端点，并称 u 和 v **相邻**，u (或 v)与 e **相关联**。若两条边有一个共同的端点，则称这两条边相邻。若用小圆点代表点，连线代表边，则可将一个图用“图形”来表示。

定义 2 设有两个图 $G_1 = (V_1, E_1)$和 $G_2 = (V_2, E_2)$，若在其顶点集合之间存在双射，即存在一一对应的关系，使得边之间有如下的关系：设 $u_1 \leftrightarrow u_2$， $v_1 \leftrightarrow v_2$， $u_1, v_1 \in V_1$，$u_2, v_2 \in V_2$；$u_1v_1 \in E_1$，当且仅当 $u_2v_2 \in E_2$，且 u_1v_1 的重数与 u_2v_2 的重数相同，则称两图同构，记为 $G_1 \cong G_2$。

定义 3 每两个不同的顶点之间都有一条边相连的简单图称为**完全图**。在同构意义下，n 个顶点的完全图只有一个，记为 K_n。所谓具有二分类（X, Y）的**偶图**（或二部图）是指一个图，它的点集可以分解为两个（非空）子集 X 和 Y,，使得每条边的一个端点在 X 中，另一个端点在 Y 中；**完全偶图**是指具有二分类（X, Y）的简单偶图，其中 X 的每个顶点与 Y 的每个顶点相连，若$|X|=m$，$|Y|=n$，则这样的偶图记为 $K_{m,n}$。对于一个简单图 $G =$（V, E），令集合 $E_1 = \{uv \mid u \neq v, u, v \in V\}$，则图 $H =$（V，$E_1 \backslash E$）称为 G 的**补图**，记为 $H = \overline{G}$。

定理 1 若 n 阶图 G 是自补的（即 $G \cong \overline{G}$），则 $n = 0, 1$（mod 4）。

定义 4 G 的顶点 v 的度 $d(v)$是指 G 中与 v 关联的边的数目，每个环计算两次。用 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示 G 的顶点的**最小度**和**最大度**。为方便，奇数度的顶点称为**奇点**，偶数度的顶点称**偶点**。设 $G = (V, E)$为简单图，如果对所有 $v \in V$，有 $d(v) = k$，称图 G 为 ***k*-正则图**。完全图和完全偶图 $K_{n,n}$ 均是正则图。

定理 2　图 $G=(V,E)$中所有顶点的度的和等于边数 m 的 2 倍，即

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2m$$

推论 3　在任何图中，奇点个数为偶数。

推论 4　正则图的阶数和度数不同时为奇数。

定义 5　一个图 G 的各个点的度 $d_1, d_2,\cdots, d_n$ 构成的非负整数组 $(d_1, d_2,\cdots, d_n)$称为 G 的度序列。若对一个非负整数组$(d_1, d_2,\cdots, d_n)$，$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$，存在一个简单图 G，以它为度序列，则称这个数组是**可图**的。

定理 5　设有非负整数组 $\Pi = (d_1, d_2,\cdots, d_n)$，且$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2m$ 是一个偶数，$n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n$，它是可图的充要条件为 $\Pi' = (d_2-1, d_3-1,\cdots, d_{d_1+1}-1, d_{d_1+2},\cdots, d_n)$ 是可图的。

定理 6　一个简单图 G 的 n 个点的度不能互不相同。

定义 6　设 n 阶图 G 的各点的度取 s 个不同的非负整数 $d_1,d_2,\cdots, d_s$。又设度为 d_i 的点有 b_i 个 $(i = 1,2,\cdots,s)$，则有$\sum_{i=1}^{s} b_i = n$。故非整数组$(b_1,b_2,\cdots, b_s)$是 n 的一个划分，称为 G 的频序列。

定理 7　一个 n 阶图 G 和它的补图$\overline{G}$有相同的频序列。

§1.2 子图与图的运算

定义 1　如果$V(H)\subseteq V(G)$，$E(H)\subseteq E(G)$，且 H 中边的重数不超过 G 中对应边的重数，则称 H 是 G 的子图，记为$H\subseteq G$。有时又称 G 是 H 的母图。

当$H\subseteq G$，但$H\neq G$时，则记为$H\subset G$，且称 H 为 G 的**真子图**。G 的**生成子图**是指满足 $V(H) = V(G)$的子图 H。

假设V'是 V 的一个非空子集。以V'为顶点集，以两端点均在V'中的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的由V'导出的子图，记为 $G[V']$；简称为 G 的**导出子图**，导出子图 $G[V\backslash V']$记为$G-V'$；它是 G 中删除V'中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图。若$V'=\{v\}$，则把 $G-\{v\}$简记为 $G-v$。

假设E'是 E 的非空子集。以E'为边集，以E'中边的端点全体为顶点集所组成的子图称为 G 的由E'导出的子图，记为$G[E']$；简称为 G 的**边导出子图**，边集为$E\backslash E'$的 G 的导出子图简记为$G-E'$。若$E'=\{e\}$，则用 $G-e$ 来代替 $G-\{e\}$。

定理 8　简单图 G 中所有不同的生成子图（包括 G 和空图）的个数是 2^m 个。

定义 2　设 G_1，G_2 是 G 的子图。若 G_1 和 G_2 无公共顶点，则称它们是**不相交**的；若 G_1 和 G_2 无公共边，则称它们是**边不重**的。G_1 和 G_2 的**并图** $G_1\cup G_2$ 是指 G 的一个子图，其顶点集为 $V(G_1)\cup V(G_2)$，其边集为 $E(G_1)\cup E(G_2)$；如果 G_1 和 G_2 是不相交的，有时就记其并图为 G_1+G_2。类似地可定义 G_1 和 G_2 的交图 $G_1\cap G_2$，但此时 G_1 和 G_2 至少要有一个公共顶点。

G_1和 G_2的**差** G_1-G_2是由 G_1中去掉 G_2中的边组成的图。G_1与 G_2的**对称差** $G_1\triangle G_2$是 G_1和 G_2的并中去掉 G_1与 G_2的交所得到的图，即

$$G_1\triangle G_2 = (G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2) = (G_1-G_2)\cup(G_2-G_1)$$

定义 3　在不相交的 G_1和 G_2的并图 G_1+G_2中，把 G_1的每个顶点和 G_2的每个顶点连接起来所得到的图称为 G_1和 G_2的联图，记为 $G_1\vee G_2$。

定义 4　设 $G_1= (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$，对点集 $V = V_1\times V_2$中的任意两个点 $u = (u_1,u_2)$和 $v = (v_1,v_2)$，当$(u_1 = v_1$和 u_2 adj $v_2)$ 或 $(u_2 = v_2$和 u_1 adj $v_1)$ 时就把 u 和 v 连接起来所得到的图 G 称为 G_1和 G_2积图，记为 $G = G_1\times G_2$。其中 u_i adj v_i表 u_i 和 v_i邻接。

§1.3 路和连通性

定义 1　G 的一条**途径**（或**通道**或**通路**）是指一个有限非空序列 $w= v_0\, e_1\, v_1\, e_2\, v_2\cdots e_k\, v_k$，它的项交替地为顶点和边，使得对$1\le i\le k$，$e_i$的端点是$v_{i-1}$和$v_i$。称 w 是从 v_0到 v_k的一条途径，或一条（v_0, v_k）途径。顶点 v_0和 v_k分别称为 w 的**起点**和**终点**，而 $v_1, v_2,\cdots, v_{k-1}$称为它的内部顶点。整数 k 称为 w 的**长**。在简单图中，途径可简单地由其顶点序列来表示，即 $w= v_0\, v_1\, v_2\cdots\ v_k$。

若途径 w 的边 $e_1, e_2,\cdots, e_k$互不相同，则 w 称为**迹**；这时 w 的长恰好是 $m(w)$。又若途径 w 的顶点 $v_0, v_1,\cdots, v_k$也互不相同，则 w 称为**路**。

G 的两个顶点 u 和 v 称为**连通的**，如果在 G 中存在（u, v）路。规定 u 和 u 是连通的。如果对 G 中每一对顶点 u，v 都有一条（u, v）路，则称 G 为**连通图**，否则称为**非连通图**。连通是顶点集 V 上的一个等价关系，于是可将 V 划分为一些等价类。设 V 的所有不同的等价类为 $V_1, V_2,\cdots, V_k$, 这样，两个顶点 u 和 v 是连通的当且仅当它们属于同一子集 V_i，称子图 $G[V_1]$, $G[V_2],\cdots$, $G[V_k]$为 G 的**连通分支**，简称**分支**或**支**。记 G 的分支个数为$\omega(G)$。于是 G 是连通图当且仅当$\omega(G) =1$。

定理 9　若图 G 是不连通的，则$\overline{G}$是连通图。

定义 2　称一条途径是**闭的**，如果它有正的长且起点和终点相同。闭迹也称为**回路**。若一条闭迹的起点和内部顶点互不相同，则称它为**圈**。长为 k 的圈称为 ***k*圈**；按 k 是奇数还是偶数，称 k 圈是**奇圈**和**偶圈**。3 圈常称为三角形。联结 u 和 v 中长度最短的途径之长度，称为 u 与 v 的距离，记为 $d(u, v)$。称 $d(G) = \max\{ d(u, v) \mid u, v\in V\}$为 G 的**直径**。

定理 10　一个图是偶图当且当它不包含奇圈。

§1.4 最短路及其算法

定义 1　对 G 的每一条边 e，可赋以一个实数 $w(e)$，称为 e 的**权**。G 连同它边上的权称为**赋权图**。若 H 是赋权图的一个子图，则 H 的权 $W(H) = \sum_{e\in E(H)} w(e)$。赋权图中路 P 的长定义为 $W(P)$，距离 $d(u, v)$仍定义为最短(u, v)路的长。在一个赋权图中找出某类具有最小（或最大）权的子图，其中之一就是**最短路问题**

最短通路算法 1. 记 $a = a_1$，$t(a_1) = 0$，$A_1 = \{a_1\}$，$T_1 = \Phi$。

2. 若已得到 $A_i=\{a_1, a_2,\cdots, a_i\}$，且对$1 \le n \le i$，已知 $t(a_n)$，对每一个 $a_n \in A_i$，求一点

$$b_n^{(i)} \in N\left(a_n\right) - A_i = B_n^{(i)}$$

使

$$l(a_n b_n^{(i)}) = \min_{v \in B_n^{(i)}} l(a_n v)$$

其中 $N(a_n)$是与 a_n 邻接的所有的点的集合，又称为点 a_n 的**邻域**或**邻集**。

3. 设有 $m_i, 1 \le m_i \le i$，而$b_{m_i}^{(i)}$使$t\left(a_{m_i}\right) + l\left(a_{m_i} b_{m_i}^{(i)}\right)$取最小值，令

$$b_{m_i}^{(i)} = a_{i+1}, \quad t(a_{i+1}) = t(a_{m_i}) + l(a_{m_i} a_{i+1}), \quad T_{i+1} = T_i \cup \{ a_{m_i} a_{i+1} \}$$

4. 若 $a_{i+1} = b$，停止。否则，记 $A_{i+1} = A_i \cup \{ a_{i+1}\}$ 回到第二步。

§1.5 图的代数表示及特征

定义 1 有 n 个点的一个标定图 G 的邻接矩阵 $A = \left(a_{ij}\right)$是一个 $n \times n$ 矩阵，其中，如果v_i邻接v_j则$a_{ij} = 1$，否则$a_{ij} = 0$。

定理 12 令 G 是一个有邻接矩阵 A 的 p 阶简单标定图，则 A^n 的 i 行 j 列元素 $a_{ij}^{(n)}$ 等于由v_i到v_j的长度为 n 的通道的数目。

推论 13 设 A 为简单图 G 的邻接矩阵，则（1）A^2 的元素 $a_{ii}^{(2)}$ 是 v_i 的度数。A^3 的元素 $a_{ij}^{(3)}$ 是含 v_i 的三角形的数目的两倍。

（2）若 G 是连通的，对于$i \ne j$，v_i 与 v_j 之间的距离是使 A^n 的 $a_{ij}^{(n)} \ne 0$ 的最小整数 n。

定义 2 无环图G的关联矩阵$B = \left(b_{ij}\right)$是一个 $n \times m$ 矩阵，当点v_i与边e_j关联时$b_{ij} = 1$，否则$b_{ij} = 0$。

定义 3 图 G 的邻接矩阵的各个复系数的多项式在通常的矩阵运算法则下构成一个有限维的线性空间，它也是一个代数，称为图 G 的邻接代数，记为$\Lambda(G)$。

定理 14 n 阶连通图 G 的邻接代数的维数有

$$d(G) + 1 \leqslant \dim \Lambda(G) \leqslant n$$

定理 15 集合 $M = \{G_1, G_2,\cdots, G_N\}, N = 2^m$ 在对称差Δ运算与数乘运算

$$0G_i = \Phi, 1G_i = G_i, G_i \in M$$

下构成数域$F = \{0,1\}$上的一个 m 维线性空间。

定理 16 设 G 为 n 阶连通图，则邻接矩阵 $A(G)$的不同特征值数目 s 满足不等式

$$d(G)+1 \leqslant s \leqslant n$$

定理 17 设 $A(G)$的谱为 Spec $A(G)=\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_s \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_s \end{bmatrix}$，则

$$\sum_{i=1}^{s} m_i \lambda_i^2 = 2m$$

其中 m_i 是特征值 λ_i 的重数，m 为 G 的边数。

定理 18 设 λ 是 $A(G)$的任一特征值，则

$$|\lambda| \leqslant \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$$

§1.6 极图

定义 1 若简单图 G 的点集 V 有一个划分

$$V=\bigcup_{i=1}^{l} V_i\text{，} \quad V_i \cap V_j = \phi \qquad i \neq j$$

且所有 V_i 非空，V_i 内的点均不连通，则称 G 是一个 ***l* 部图**。

定义 2 如果在一个 l 部图 G 中，$\left|V_i\right| = n_i$，任何两点 $u \in V_i, v \in V_j$，$i \neq j$, $i,j=1,2,\cdots, l$ 均邻接，则称 G 为完全 l 部图。

定义 3 如果在一个 n 个点的完全 l 部图 G 中，

$$n = k\,n + r \qquad 0 \leqslant r < l$$
$$|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_r| = k + 1$$
$$|V_{r+1}| = |V_{r+2}| = \cdots = |V_l| = k$$

则称 G 为 n 阶**完全 *l* 几乎等部图**，记为 $T_{l,n}$。$|V_1| = |V_2| = \cdots = |V_l|$ 的完全 l 几乎等部图称为**完全 *l* 等部图**。

定理 19 连通偶图的 2 部划分是唯一的。

定理 20 n 阶完全偶图 K_{n_1,n_2} 的边数 $m = n_1 n_2$ 条边，且有

$$m \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

定理 21 n 阶 l 部图 G 有最多边数的充要条件是 $G \cong T_{l,n}$。

定义 4 设 G 和 H 是两个 n 阶图，若存在 $V(G)$ 和 $V(H)$ 的一个一一对应 μ，使对任何点 $v \in V(G)$，有

$$d_G(v) \leq d_H(\mu(v))$$

则称 H 的**度序列优于** G (简称 H 度优于 G)，或 G 的**度序列弱于** H (简称 G 度弱于 H)。

定理 22 若 n 阶简单图 G 不包含 K_{l+1}，则 G 度弱于某个完全 l 部图 H。且若 G 具有与 H 相同的度序列，则 $G \cong H$ 。

定理 23 （Turán）若 G 是简单图，并且不包含 K_{l+1}，则边数 $m(G) \leqslant m(T_{l,n})$。此外，仅当 $G = T_{l,n}$ 时有 $m(G) = m(T_{l,n})$。

定理 24 设 $A=\{x_1, x_2,\cdots, x_n\}$为任意一个直径为 1 的平面点集，则 A 中距离大于 $\sqrt{2}/2$ 的点对的最大数目为$\lfloor n^2/3 \rfloor$。并且对每个 n，存在直径为 1 的点集 $A^* = \{x_1, x_2,\cdots, x_n\}$，它恰有$\lfloor n^2/3 \rfloor$个点对，其距离大于$\sqrt{2}/2$。

§1.7 交图与团图

定义 1 令 S 是一个集，$F=\{S_1, S_2,\cdots, S_n\}$是 S 的不同的非空子集的一个非空族，这些子集的并是 S。F 的**交图**，记作$\Omega(F)$，定义为$V(\Omega(F)) = F$，当$i \neq j$ 且 $S_i \cap S_j \neq \Phi$ 时 S_i与S_j邻接。于是，如果存在 S 的子集的一个族 F，对于这个族，$G \cong \Omega(F)$，就称为 G 是 S 上的一个交图。

定理 25 每一个图都是一个交图。

定义 2 给定的图 G 的交数$\nu(G)$是构成一个集 S 所需要的最少的元素的数目，而使得 G 是 S 上的一个交图。

推论 26 n 阶连通图 G 有 m 条边，$n \geqslant 3$, 则$\nu(G) \leqslant m$。

推论 27 若图 G 有 m 条边，n_0 个孤立点，且没有 K_2 支，则$\nu(G) \leqslant m+n_0$。

定理 28 设 G 是一个有 $n>3$ 个点的连通图，则当且仅当 G 中没有三角形时，$\nu(G) = m$。

定理 29 对于任何一个 $n \geqslant 4$ 个点的图 G，

$$\nu(G) \leqslant \left[n^2/4\right]$$

定义 3 简单图 G 的一个**团**是指 V 中的一个子集V_1，使$G[V_1]$是完全图。一个给定的图 G 的**团图**是 G 的团的族的交图。

定理 30 一个图 G 是一个团图当且仅当它含有完全子图的一个族 F，它们的并是 G，且如果 F 的某个子族 F' 中每一对完全子图的交非空，则 F' 的所有元素的交就非空。

习 题 1

1、证明在 n 阶连通图中

（1） 至少有 n-1 条边。

（2） 如果边数大于 n-1，则至少有一条闭迹。

（3） 如恰有 n-1 条边，则至少有一个奇度点。

证明 (1) 若对$\forall v\in V(G)$,有 $d(v)\geq 2$,则：$2m=\sum d(v)\geq 2n \Rightarrow m\geq n>n-1$;

若 G 中有 1 度顶点，对顶点数 n 作数学归纳。

当 n=2 时，G 显然至少有一条边，结论成立。

设当 n=k 时，结论成立，

当 n=k+1 时，设 d(v)=1，则 G-v 是 k 阶连通图，因此至少有 k-1 条边，所以 G 至少有 k 条边。

(2) 考虑 $v_1\to v_2\to\ldots\to v_n$ 的途径，若该途径是一条路，则长为 n-1,但图 G 的边数大于 n-1,因此存在 v_i,v_j,使得 $v_i\,adg\,v_j$,这样，$v_i\to v_{i+1}\to\ldots\to v_j$ 并上 v_iv_j 构成一条闭途径，一条闭途径中一定存在闭迹，即图 G 中有闭迹。

(3) 若不然，对$\forall v\in V(G)$,有 $d(v)\geq 2$,则：$2m=\sum d(v)\geq 2n \Rightarrow m\geq n>n-1$,与已知矛盾。

2、设 G 是 n 阶完全图，试问

(1) 有多少圈？

(2) 包含 G 中某边 e 的圈有多少？

(3) 任意两点间有多少条路？

解：(1) 对 n 阶完全图中的任意 $k(3\leq k\leq n)$ 个不同顶点，都可以构成一个长度为 k 的圈。

所以 n 阶完全图中不同的全的个数为：

$$\binom{3}{n}+\binom{4}{n}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n-\frac{n^2+n}{2}-1$$

(2) 要求圈包含某边 e，则不同圈的个数为：

$$\binom{1}{n-2}+\binom{2}{n-2}+\cdots+\binom{n-2}{n-2}=2^{n-2}-1$$

(3) 任意两点间的不同路的条数为：

$$1+\binom{1}{n-2}+\binom{2}{n-2}+\cdots+\binom{n-2}{n-2}=2^{n-2}$$

3、证明图 1-27 中的两图不同构：

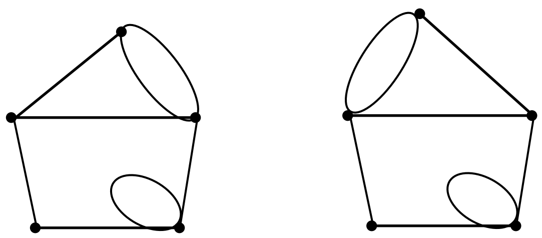


图 1-27

证明 容易观察出两图中的点与边的邻接关系各不相同，因此，两图不同构。

4、证明图 1-28 中的两图是同构的

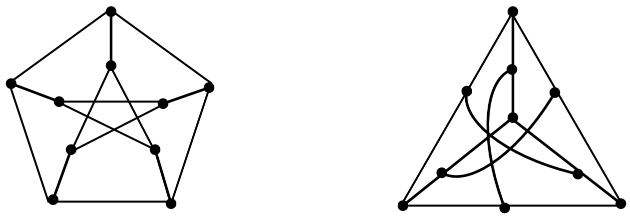
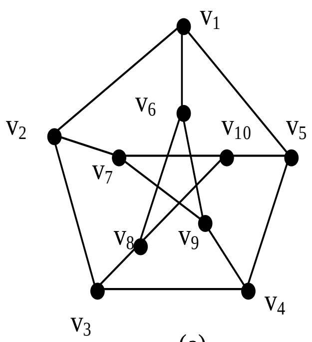
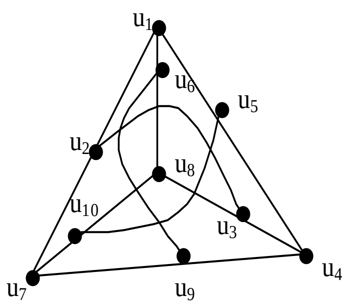


图 1-28

证明 将图 1-28 的两图顶点标号为如下的(a)与(b)图



(a)



(b)

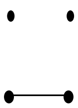
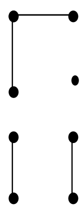
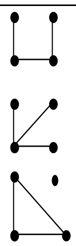
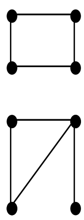
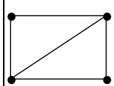
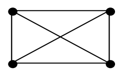
作映射 $f : f(v_i) \to u_i \quad (1 \le i \le 10)$

容易证明，对$\forall v_iv_j \in E((a))$,有 $f(v_iv_j)=u_iu_j \in E((b))$ $(1\le i \le 10,\ 1\le j\le 10)$

由图的同构定义知，图 1-27 的两个图是同构的。

5、证明：四个顶点的非同构简单图有 11 个。

证明

m=0	1	2	3	4	5	6
						

由于四个顶点的简单图至多 6 条边，因此上表已经穷举了所有情形，由上表知：四个顶点的非同构简单图有 11 个。

6、设 G 是具有 m 条边的 n 阶简单图。证明：$m=\binom{n}{2}$ 当且仅当 G 是完全图。

证明 必要性 若 G 为非完全图，则$\exists\, v\in V(G)$,有 $d(v)< n-1 \Rightarrow \sum d(v) < n(n-1) \Rightarrow 2m<n(n-1)$

$\Rightarrow$ m < n(n-1)/2= $\binom{n}{2}$，与已知矛盾！

充分性 若 G 为完全图，则 2m=$\sum$ d(v) =n(n-1) $\Rightarrow$ m= $\binom{n}{2}$。

7、**证明**：（1）$m(K_{l,n}) = ln$，

（2）若 G 是具有 m 条边的 n 阶简单偶图，则 $m \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$。

证明 (1) $K_{l,n}$ 的总度数为 $2ln$,所以，$m(K_{l,n}) = ln$。

(2) 设 G 的两个顶点子集所含顶点数分别为 n_1 与 n_2,G 的边数为 m,可建立如下的二次规划：

$$m=n_1n_2$$
$$\text{s.t} \quad n_1+n_2=n$$
$$n_1\ge 1,\ n_2\ge 1$$

当 n 为偶数时，$n_1=n_2=n/2$ 时，m 取最大值：$m=n^2/4$

当 n 为奇数时，取 $n_1=(n+1)/2$, $n_2=(n-1)/2$ 时，m 取最大值：$m=(n^2-1)/4$

所以，$m \le \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$。

8、设△和 δ 是简单图 G 的最大度和最小度，则 $\delta \leqslant 2m/n \leqslant \Delta$。

证明

$$2m=\sum_{v\in V} d(v) \ge n\delta \Rightarrow \delta \le \frac{2m}{n}$$

$$2m=\sum_{v\in V} d(v) = \Delta n \Rightarrow \Delta \ge \frac{2m}{n}$$

$$\therefore \delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta$$

9、证明：若 k 正则偶图具有二分类 $V= V_1\cup V_2$，则 $|V_1| = |V_2|$。

证明 由于 G 为 k 正则偶图，所以，$k|V_1| = m = k|V_2| \Rightarrow |V_1| = |V_2|$。

10、证明：由两人或更多个人组成的人群中，总有两人在该人群中恰好有相同的朋友数。

证明 将人用图的顶点表示，图的两顶点邻接当且仅当人群中的两人相认识，于是，问题转化为：证明在任意一个简单图中必有一对度数相等的顶点。

若图 G 为连通单图，则对$\forall v\in V(G)$,有 $1\le d(v)\le n-1$,因此，n 个顶点中必存在两个顶点，其度数相同；若 G 为非连通图。设 G_1 为阶数 n_1 的连通分支，则$\forall v\in V(G_1)$,有 $1\le d(v)\le n_1-1$，于是在 G_1 中必存在两个顶点，其度数相同。

11、证明：序列 (7,6,5,4,3,3,2) 和 (6,6,5,4,3,3,1) 不是图序列。

证明 由于 7 个顶点的简单图的最大度不会超过 6，因此序列 (7,6,5,4,3,3,2) 不是图序列；(6,6,5,4,3,3,1)是图序列 $\Leftrightarrow$ （5，4，3，2，2，0）是图序列，然（5，4，3，2，2，0）不是

图序列，所以(6,6,5,4,3,3,1) 不是图序列。

12、证明：若 δ ≥2，则 *G* 包含圈。

证明 1： 不失一般性，只就连通图证明即可。设$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,对于 G 中的一条最长路$v_1v_2\cdots v_k$，因为$\delta\geq 2$，那么除了最长路上边$v_1v_2$之外，$v_1$在路上至少还有一个邻接顶点$v_j$。 于是，边$v_1v_j\bigcup v_1v_2\cdots v_j$是图$G$的一个圈。

证明 2：不失一般性，只就连通图证明即可。由于$\delta\geq 2$，从图中v_1到v_k的路可以向前延伸，又由于G只是有限个顶点，因此延伸到某一点后再往下延伸，必然要与走过的点相重合，这样就会形成圈。

证明 3：不失一般性，设G为n阶连通图。若G没有圈，那么G是树，于是$m(G)=n-1$。但是，有握手定理：$2m(G)=\sum_{v} d(v)\geq n\delta=2n$，得到$m(G)\geq n>n-1$，从而产生矛盾。

13、 证明：若 *G* 是简单图且 δ ≥2，则 *G* 包含长至少是 δ +1 的圈。

证明：设$v_1v_2\cdots v_k$是简单图G中一条最长路。那么v_1的邻点除v_2外还有$\delta-1$个，且必须也在最长路上，否则，会构建出新的更长路。设与v_1邻接，且脚标最大的点为v_t，显然，我们有$t\geq\delta$，于是路$v_1v_2\cdots v_t\cup v_1v_t$是一个圈长至少为$\delta+1$的圈。

14、G 的**围长**是指 *G* 中最短圈的长；若 *G* 没有圈，则定义 *G* 的围长为无穷大。证明：

（1） 围长为 4 的 *k* 的正则图至少有 2*k* 个顶点，且恰有 2*k* 个顶点的这样的图（在同构意义下）只有一个。

（2） 围长为 5 的 *k* 正则图至少有 k^2+1 个顶点。

证明：(1) 设u与v是G中一对邻接顶点，$N(u)$与$N(v)$分别是u与v的邻点集合。首先，$N(u)\bigcap N(v)=\Phi$，否则，会出现三角形子图，圈长为 3 的子图，由于 G的围长为 4，所以，这是不允许的！所以，$\left|N(u)\bigcup N(v)\right|=2k$。即证明围长为 4 的 k 的正则图至少有 $2k$ 个顶点。

接下来，我们构建一个围长为 4 的 *k* 的正则图，且恰好有$2k$个顶点：

我们将$N(u)\bigcup\{v\}$与$N(v)\bigcup\{u\}$作为两组顶点连成完全偶图，则该图是k正则图，且其围长必然为 4。由作法知道，这是在同构意义下唯一满足要求的图。

(2) 在G中任取一个顶点u，令S_i表示在G中距离顶点u为$i(i=0,1,2,3,\cdots)$顶点构成的集合。显然S_1中的顶点互不邻接，否则，会出现三角形，与围长为 5 相矛盾！S_2中每个顶点恰好存在一条边与S_1相连，否则，也会推出围长小于 5。由于G 是k正则图，于是顶点

u 有 k 个邻接顶点，而这 k 个邻接顶点又有 k 个邻接顶点，所以图的顶点个数至少应该为：

$1+k+k(k-1)=k^2+1$，即证明了结论。

15、对具有 m 条边的 n 阶图 G，证明：（1）若 $m \geqslant n$，则 G 包含圈；

（2）若 $m \geqslant n+4$，则 G 包含两个边不重的圈。

证明 （1）若 G 含有环或平行边，则 G 有圈。假定 G 为 n 阶简单图。若 G 中顶点度大于等于 2，则 G 中有圈。设 G 中有一度顶点，去掉该顶点和其关联的边得图 G_1,由条件，显然有 $m(G_1) \geq |V(G_1)|$,若 G_1 中有一度顶点，去掉该顶点和其关联的边得图 G_2,有 $m(G_2) \geq |V(G_2)|$,…，如此进行下去，该过程不可能进行到 n=1 或 n=2 的情形，否则，不满足 $m \geqslant n$ 所以，过程进行到 G_m, 得到 G_m 是度数≥2 的图，它含有圈。

(2) 只就 m=n+4 证明就行了。

设 G 是满足 m=n+4，但不包含两个边不相交的圈的图族中**顶点数最少**的一个图。可以证明 G 具有如下两个性质：

1) G 的围长 $g \geq 5$。事实上，若 G 的围长≤4，则在 G 中除去一个长度≤4 的圈 C_1 的边，所得之图记为 G',显然， $m(G') \geq |V(G)| = |V(G')|$,由(1), G' 中存在圈 C_2, 使 C_1 与 C_2 的边不相交，这与假定矛盾；

2）$\delta(G) \geq 3$。事实上，若 $d(v_0)=2$,设 $v_0v_1, v_0v_2 \in E(G)$,作 $G_1=G-v_0+\{v_1v_2\}$;若 $d(v_0) \leq 1$,则 G_1 为在 G 中除去 v_0 及其关联的边($d(v_0)=0$,任去 G 中一条边)所得之图。显然，$m(G_1)=|V(G_1)|+4$,G_1 仍然不含两个边不重的圈之图。但 $|V(G_1)|<|V(G)|$，与假定矛盾。

由 2),$n+4=m \geq 3n/2 \Rightarrow n \leq 8$. 但另一方面，由 1),在 G 中存在一个圈 Cg，其上的顶点之间的边，除 Cg 之外，再无其它边，以 S_0 表示 Cg 上的顶点集，故由 2),S_0 上每个顶点均有伸向 Cg 外的的边。记与 S_0 距离为 1 的顶点集为 S_1，则 S_0 的每一个顶点有伸向 S_1 的边，反过来，S_1 中的每个顶点仅有唯一的一边与 S_0 相连，不然在 G 中则含有长不大于 g/2+2 的圈，这与 G 的围长为 g 相矛盾，故 $|S_0| \leq |S_1|$,于是有：$n \geq |S_0|+|S_1| \geq g+g \geq 10$,但这与 $n \leq 8$ 矛盾。所以，假定条件下的 G 不存在。

16、 在图 1-13 的赋权图中，找出 a 到所有其它顶点的距离。

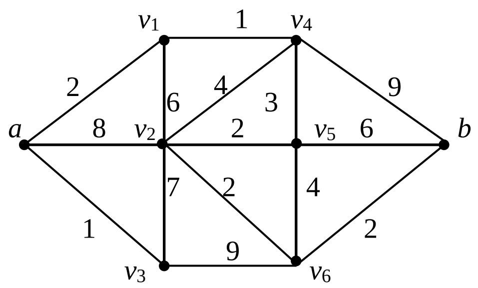


图 1-13

解 1. $A_1=\{a\}$，$t(a)=0$，$T_1=\Phi$

2. $b_1^{(1)}=v_3$

3. $m_1=1$, $a_2=v_3$, $t(v_3)=t(a)+l(av_3)=1$ (最小)，

$T_2=\{av_3\}$

2. $A_2=\{a, v_3\}$，$b_1^{(2)}=v_1, b_2^{(2)}=v_2$

3. $m_2=1, a_3=v_1, t(v_1)=t(a)+l(av_1)=2$ (最小)，

$T_3=\{av_3, av_1\}$

2. $A_3=\{a, v_3, v_1\}$，$b_1^{(3)}=v_2, b_2^{(3)}=v_2, b_3^{(3)}=v_4$

3. $m_3=3, a_4=v_4, t(v_4)=t(v_1)+l(v_1v_4)=3$ (最小)，

$T_4=\{av_3, av_1, v_1v_4\}$

2. $A_4=\{a, v_3, v_1, v_4\}$，$b_1^{(4)}=v_2$，$b_2^{(4)}=v_2$，$b_3^{(4)}=v_2, b_4^{(4)}=v_5$

3. $m_4=4, a_5=v_5, t(v_5)=t(v_4)+l(v_4v_5)=6$ (最小)，

$T_5=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5\}$

2. $A_5=\{a, v_3, v_1, v_4, v_5\}$，$b_1^{(5)}=v_2$，$b_2^{(5)}=v_2$，$b_3^{(5)}=v_2, b_4^{(5)}=v_2, b_5^{(5)}=v_2$

3. $m_5=4, t(v_2)=t(v_4)+l(v_4v_2)=7$ (最小)，

$T_6=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2\}$

2. $A_6=\{a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2\}, b_2^{(6)}=v_6, b_4^{(6)}=b$，$b_5^{(6)}=v_6$，$b_6^{(6)}=v_6$

3. $m_6=6, a_7=v_6, t(v_6)=t(v_2)+l(v_2v_6)=9$ (最小)，

$T_7=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6\}$

2. $A_7=\{a, v_3, v_1, v_4, v_5, v_2, v_6\}, b_4^{(7)}=b$，$b_5^{(7)}=b$，$b_7^{(7)}=b$

3. $m_7=7, a_8=b, t(b)=t(v_6)+l(v_6b)=11$ (最小)，

$T_8=\{av_3, av_1, v_1v_4, v_4v_5, v_4v_2, v_2v_6, v_6b\}$

于是知 a 与 b 的距离

$$d(a, b)=t(b)=11$$

由 T_8 导出的树中 a 到 b 路 $av_1v_4v_2v_6b$ 就是最短路。

17、证明：若 G 不连通，则 $\overline{G}$ 连通。

证明 对 $\forall u, v\in V(\bar{G})$,若 u 与 v 属于 G 的不同连通分支，显然 u 与 v 在 $\bar{G}$ 中连通；若 u 与 v 属于 g 的同一连通分支，设 w 为 G 的另一个连通分支中的一个顶点，则 u 与 w，v 与 w 分别在 $\bar{G}$ 中连通，因此，u 与 v 在 $\bar{G}$ 中连通。

18、证明：若 $e\in E(G)$，则 $\omega(G)\leqslant\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$。

证明 若 e 为 G 之割边，则 $\omega(G-e)=\omega(G)+1$，若 e 为 G 之非割边，则 $\omega(G-e)=\omega(G)$，所以，若 $e\in E(G)$，则 $\omega(G)\leqslant\omega(G-e)\leqslant\omega(G)+1$。

19、证明：若 G 连通且 G 的每个顶点的度均为偶数，则对于任意的 $v\in V(G)$，$\omega(G-v)\leqslant d(v)/2$ 成立。

证明 设 C 为 $\omega(G-v)$的一连通分支，则在 G 中，v 有偶数条边伸向 C，若不然，C 中奇度点个数为奇数。因此，v 至少有两条边伸向 C，有 $\omega(G-v)\leqslant d(v)/2$ 成立。

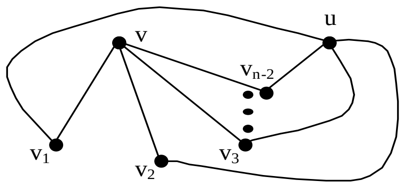
20、证明：若 G 的直径大于 3，则 $\overline{G}$ 的直径小于 3。

证明 $\forall u,v\in V(G)$，若 uv∉E(G) ⇒ uv∈E($\overline{G}$)⇒ $d_{\overline{G}}(u,v)=1$。若 uv∈E(G)，则 uv∉E($\overline{G}$)。分两种情况：(1) 若在 V(G)中任意顶点至少和 u,v 之一相连，在这种情况下，对 G 中任意两个顶点 x,y，有 $d_G(x,y)\le 3$，矛盾。

(2) V(G)中存在一点 w,使得 uw,wv∉ E(G),则 uw,wv∈ E($\overline{G}$)，此时，$d_{\overline{G}}(u,v)=2$。所以，$\overline{G}$ 的直径小于 3。

21．设 *G* 是具有 *m* 条边的 *n* 阶简单图，证明：若 *G* 的直径为 2 且△= *n*-2，则 *m*⩾2*n*-4。

证明 在 G 中，设 d(v)= △= *n*-2,与 v 邻接的顶点设为：$v_1,v_2,\ldots,v_{n-2}$,剩下的一个顶点为 u, u 与 v 不能邻接。如下图所示。



由于 d(G)=2，因此 u 与 $v_1,v_2,\ldots,v_{n-2}$ 必邻接，否则，G 的直径大于 2。因此，该图中至少应该有的边数为 n-2+n-2=2n-4,即：*m*⩾2*n*-4。

22．证明：若 *G* 是至少有三个点的简单连通图但不是完全图，则 *G* 有三个顶点 *u*, *v* 和 *w*，使得 *uv*, *vw*∈*E*，而 *uw*∉*E*。

证明：由于 G 是非完全连通图，所以在 G 中必然存在不邻接的两点 u 与 w_1。对于这两点来说，设 $p=uu_1u_2\cdots u_kw_1$ 是连接它们的最短路。显然 u 与 u_2 不能邻接，否则 $p_1=uu_2\cdots u_kw_1$ 也是连接 u 与 w_1 的一条路，与 p 是最短路矛盾！

现在，我们令 $v=u_1,w=u_2$ ，则 $uv\in E(G),vw\in E(G)$ ，但 $uw\notin E(G)$。