武漢大學 Wuhan University

第三章 静电场计算与应用

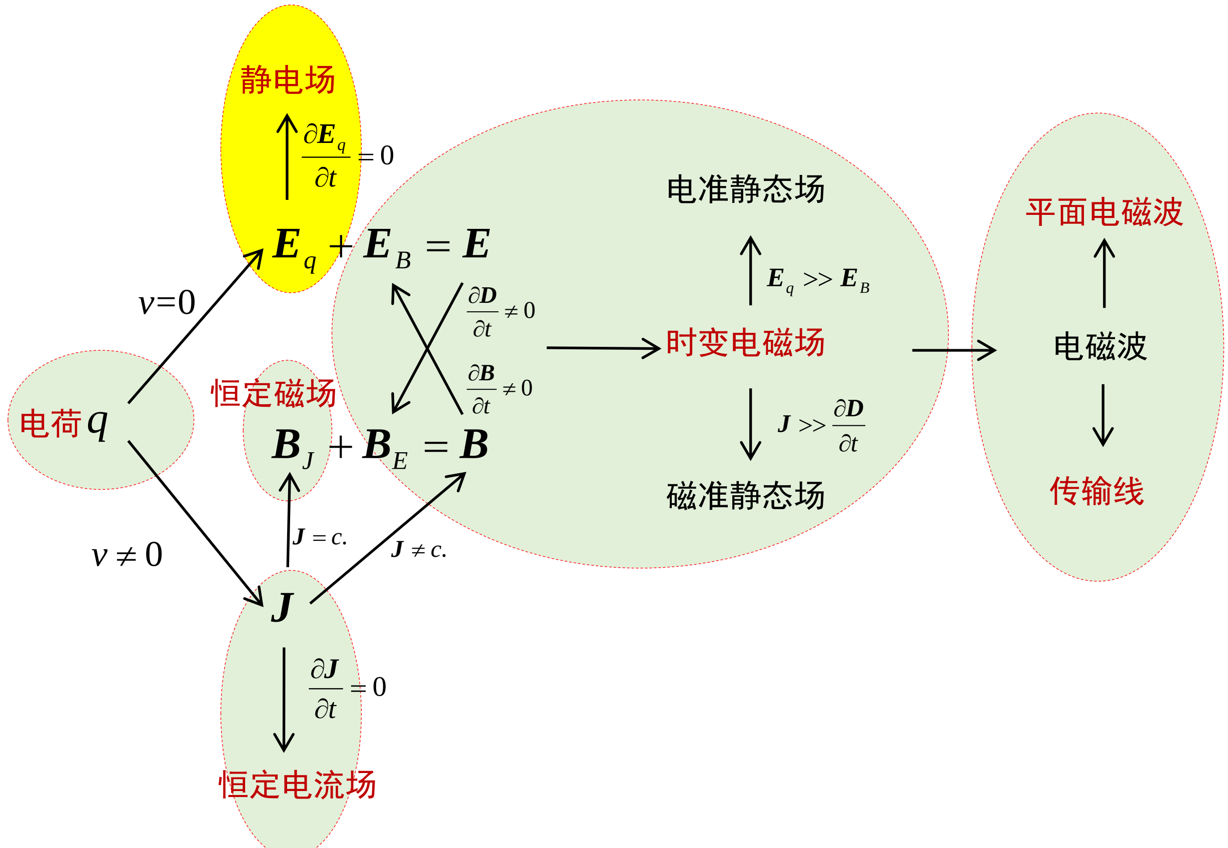
力本身就是一种物质

主讲人：阮江军、邓永清

2022年3月

主要内容回顾

1）作为电磁学中引人的第一个基本概念，电荷的物理含义
2）库仑定律的成立条件
3）库仑定律表达了两个电荷之间的相互作用关系。如果空间中只存在一个带电体，空间中是否还存在作用力？



本章课程大纲

目 录

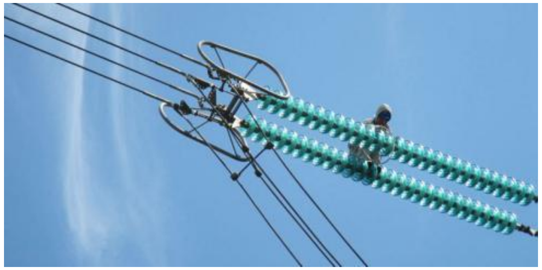
Contents

1 静电场理论是高电压与绝缘技术的基础
2 电力是一种场
3 静电场强度的定义与计算
4 电荷对称分布的静电场简化计算
5 金属导体表面静电场计算
6 均匀电介质中静电场计算
7 标量电位简化静电场计算
8 非规则多介质中的静电场计算模型
9 规则双介质中静电场计算的镜像法
10 静电场的能量与电容
11 多导体系统等效电容系
12 静电力计算

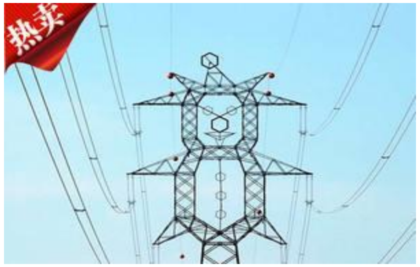
1.1 “高电压与绝缘技术”-“静电场”

“没有静电场知识，无法从事高电压与绝缘技术研究。掌握静电场计算方法是本章的主要内容”

- ✓ 绝缘介质：气体，液体，固体
- ✓ 空气临界击穿电场强度：3kV/mm
- ✓ 变压器油临界击穿电场强度：18-22kV/mm
- ✓ SF_6气体临界击穿电场强度：88kV/mm

【讨论】高电压工程中，如何处理结构体中难以避免的尖端和棱角？




【讨论】分裂导线有何作用？



■ 工程上为什么要采用分裂导线

✓ 1. 降低导线表面电场强度，抑制电晕的发生（增大等效半径）。

✓ 2. 降低单根导线的半径，多根导线并联，增加导线的载流量，降低导线趋肤效应，有效利用截面。

✓ 3. 增大线路等效电容，降低线路等效电感（降低导线波阻抗），提高交流输电线路的自然功率。典型500kV输电线路分裂导线如下图所示。

架空线路分裂导线表面电场

1.2 静电场知识结构

武漢大學 电气与自动化学院
School of Electrical Engineering and Automation, Wuhan University

要点:
- 电场分布
- 电场强度计算

等效电容系
多导体
电荷力是如何做功的？
双导体
空气中
库仑定律
电场能量
电容量
电荷力是如何传递的？
电荷量已知，分布未知？
电场E
已知电位差，电荷量及分布未知？
已知电荷分布
电场通量
求得E
电场环量
高斯公式
斯托克斯公式
电力线
电场散度定理
电场旋度定理
非空气中
规则带电体
规则带电体
电介质极化
电位移矢量D
单一介质
求得E
电位u
求得E
多种介质
不规则带电体
不规则带电体
将多介质不规则问题转变成单介质问题
如何求得E
交界面E的法向关系
如何求得E
金属表面E与电荷密度关系
如何求得E
交界面E的切向关系
等位面法
平行双电轴法
镜像法
求得E
本构关系
微分方程求解
边界条件
泊松方程
拉普拉斯方程

本章课程大纲

目 录

Contents

1 静电场理论是高电压与绝缘技术的基础
2 电力是一种场
3 静电场强度的定义与计算
4 电荷对称分布的静电场简化计算
5 金属导体表面静电场计算
6 均匀电介质中静电场计算
7 标量电位简化静电场计算
8 非规则多介质中的静电场计算模型
9 规则双介质中静电场计算的镜像法
10 静电场的能量与电容
11 多导体系统等效电容系
12 静电力计算

2.1 静电“场”概念的建立过程

【讨论】电荷相互作用力是如何传递的？“场”概念如何建立的？

概念：是对客观事物本质属性的理性认识，它源于具体事物而又高于具体事物，是经验的结晶、感知的升华、思维的产物。形成正确、恰当的概念是建立物理理论的决定性步骤。

三个阶段：“电流体”→“电力线”→“电场”

四种认识：

接触作用：推、拉、压迫、支撑、冲击、摩擦—牛顿

超距作用：（无需媒介、无需时间）：万有引力、电荷引力、磁铁引力

—库伦、安培、韦伯、纽曼、 拉格朗日、拉普拉斯、泊松

近距作用：（需要媒介、需要时间、真空中有以太）：

两个电荷间的作用力因电荷之间的物质的不同而不同

—法拉第，麦克斯韦

狭义相对论：宣告一切超距作用的失败，以太退出历史舞台—爱因斯坦

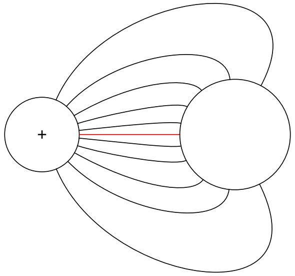
2.2 带电导体的电流体假说

- ✓ 库仑定律：建立了点电荷作用力的的平方反比关系。电荷如何传递？电荷在带电体上的分布？力的作用机制？
- ✓ 开文迪许，1771年《用弹性流体解释电学的一些主要现象的尝试》：
  - 电荷是一种可压缩的流体（电流体）。
  - 首次提出“电势”概念描述电流体的压缩程度。例如同样大小的金属球，电荷量大表明电流体被压缩的程度高，也即电势高。
  - 提出地球的电势为零，因为地球体积非常大，无论多少电荷注入到地球，电流体的压缩程度都接近为零。
- ✓ 泊松，1811年《论导体表面电荷的分布》：
  - 提出了导体表面电荷密度与导体形状的关系：椭球面上的电荷密度与这一点到对面的距离成正比，即导体表面曲率越大，面电荷密度就越大。
  - 把拉普拉斯关于引力势的拉普拉斯方程引入到带电体，认为导体带电后具有不同的电势V，提出了著名的电势泊松方程。
  - 认为电荷之间作用力的传递是一种超距作用，电势是建立在导体上的。

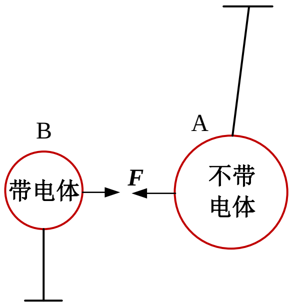
【思考】为什么两个电荷间的作用力因电荷之间的物质的不同而不同

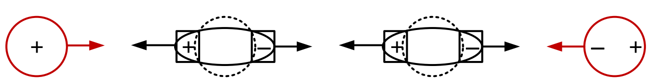
2.3 法拉第静电感应理论—力线

- 1781，康德《纯理性批判》：自然学科处理的空间应该是充满的空间，这个空间充满着力，我们只有通过空间的力知道这个空间的物质
- 促使法拉第对电流体假说发起挑战的问题是，如何解释电感应现象。
- 法拉第电感应理论：当物质带电，对其邻近的物质中的粒子产生极化（感应），极化力从一个粒子“邻接”地传到下一个粒子，一个接着一个，最终形成一条极化的粒子曲线，这条极化曲线就是电感应力线（电力线），它一直伸向远方，直至遇到另一金属为止。



- 实验证明了电感应力线是曲线，推翻了超距作用论的直线传播的观点
- 电荷相互作用力不仅与电量、距离有关，而且与它们中间的介质有关
- 如果物体粒子不仅能传递电力，而且能维持它们的极化状态，则是绝缘体
- 如果物体粒子仅能传递电力，而不能维持其极化状态，则是导体
- 放电是一种剧烈的电感应现象，是电介质中粒子瞬间释放极化力的过程。放电并不是在整个介质发生，而且在抗拒电感应力最薄弱的地方发生
- 由于空气分布不均匀或其他因素的影响，闪电的经路一般都是弯曲的
- 把电介质放人电容器极板之间，可以增大电容





2.4 “力线”→“场论”

✓ **法拉第静电感应理论遇到的最大挑战是“真空”，在真空中没有粒子，感应力又如何传递？法拉第如此解释：**

- 所谓的空虚空间（真空）是不存在的，力本身就是一种物质，粒子的极化只是这种力的存在的体现。
- 只要有带电体存在，电荷力就是一种物质充满了整个周围空间，这就是“力场”，如果有另一个物体出现，它就能把这种场显示出来。
- 超距作用论认为：空间中必须同时存在两个实体（质点、电荷或磁极）时，力才能产生。

✓ **法拉第“力线”思想：**

- 力线或场是独立于物体的另一种物质，物体的运动是力线传递的力作用的结果，物体可以改变力线的分布；
- 力线在纵向有收缩的趋势，在横向有扩张的趋势；
- 电力线是不闭合的，有起点和终点；
- 力线的传播需要时间

W. 汤姆生：借助傅里叶热分析方法和拉普拉斯引力势的概念，将法拉第的静电感应理论与泊松的**静电势**理论进行了结合

麦克斯韦：力线是一个矢量场，推导出**电场强度**和**电通量**的关系，进而提出了**电位移矢量**的概念

力，充满了空间

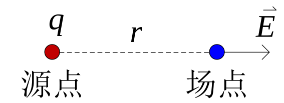
本章课程大纲

目 录
Contents

1 静电场理论是高电压与绝缘技术的基础
2 电力是一种场
3 静电场强度的定义与计算
4 电荷对称分布的静电场简化计算
5 金属导体表面静电场计算
6 均匀电介质中静电场计算
7 标量电位简化静电场计算
8 非规则多介质中的静电场计算模型
9 规则双介质中静电场计算的镜像法
10 静电场的能量与电容
11 多导体系统等效电容系
12 静电力计算

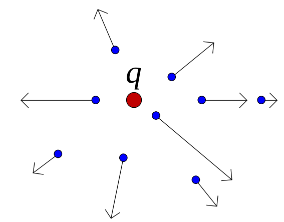
3.1 电场强度的引入

库仑定律： $\boldsymbol{F}_{12}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1q_2}{r_{12}^{\ 2}}\hat{r}_{12}=q_2\left(\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1}{r_{12}^{\ 2}}\hat{r}_{12}\right)=q_2\boldsymbol{E}_{12}$



$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{12}^{\ 2}}\hat{r}_{12}=\boldsymbol{E}_{12}$$

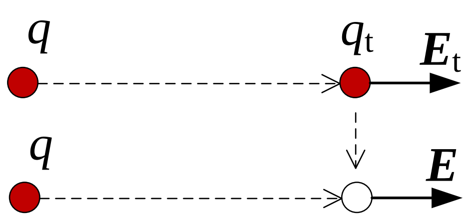
点电荷电场强度： $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q}{r^2}\hat{r}$



【讨论】根据传统的静电场定义式，E与q_t有关吗？

$$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\lim_{q_t\to 0}\frac{\boldsymbol{F}_t(x,y,z)}{q_t}$$

- 数学表达意味着与q_t相关
- 如果是为了测试，q_t应该足够的大，并保持点电荷的特性



静电场叠加原理：

$$\boldsymbol{E}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}_i=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{r_i^{\ 2}}\hat{r}_i$$

线电荷： $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\int_{l'}\frac{\tau\boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}l'$ $\qquad \tau=\displaystyle\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l}$

面电荷： $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iint_{S'}\frac{\sigma\boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}S'$ $\qquad \sigma=\displaystyle\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta S}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S}$

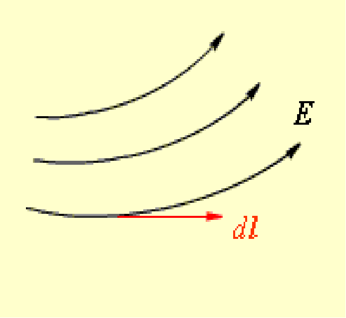
体电荷： $\boldsymbol{E}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\displaystyle\iiint_{V'}\frac{\rho\boldsymbol{e}_R}{R^2}\mathrm{d}V'$ $\qquad \rho=\displaystyle\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta V}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}$

3.2 用电力线描述电场

法拉第电感应理论：电荷会对临近的物质粒子受到极化，并从一个粒子“邻接”地传到下—个粒子，最终形成一条极化的粒子曲线，这条极化曲线就是电力线，它一直伸向远方，直至遇到另一电荷为止

根据上述电力线的表述，电力线上任一点的切向与该点的**E**方向一致

$$\mathbf{E}//d\vec{l} \Rightarrow \mathbf{E}\times d\vec{l}=0$$

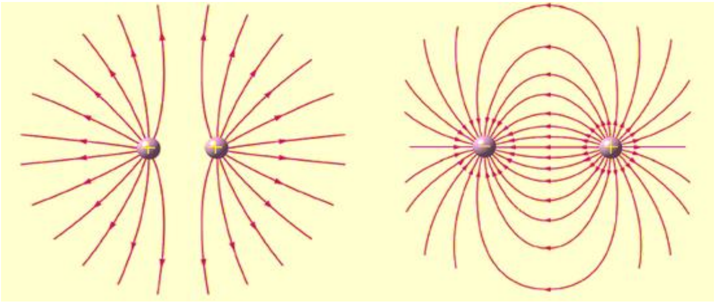


直角坐标系中：$\mathbf{E}=E_x\hat{x}+E_y\hat{y}+E_z\hat{z} \quad d\vec{l}=dx\hat{x}+dy\hat{y}+dz\hat{z}$

$$\mathbf{E}\times d\vec{l}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ E_x & E_y & E_z\\ dx & dy & dz\end{vmatrix}=0 \quad \Rightarrow \frac{E_x}{dx}=\frac{E_y}{dy}=\frac{E_z}{dz}$$

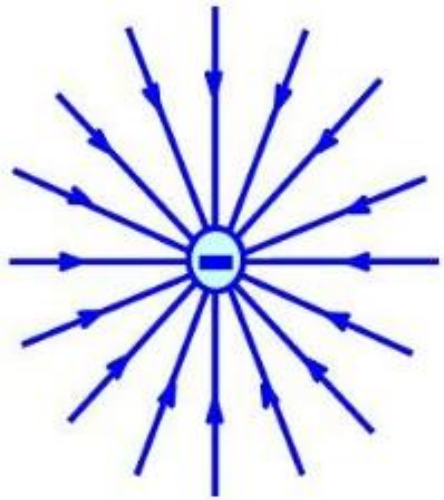
静电场中电力线的具有以下性质：

1. 电力线起于正电荷（或无穷远），止于负电荷（或无穷远）
2. 电力线上任一点的切向与该点的电场强度方向一致
3. 电力线不能相交，不能在无电荷处中断；
4. 电力线不能自行闭合；
5. 电荷集中处电力线密集，否则稀疏。

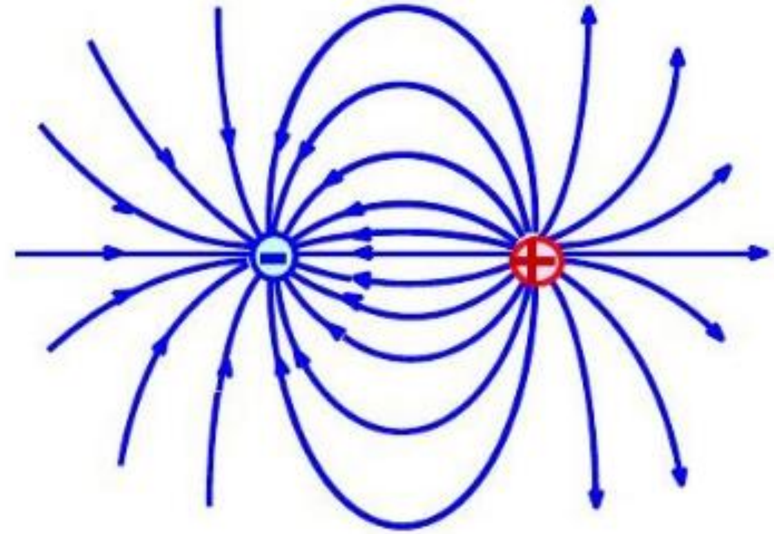


3.2 用电力线描述电场

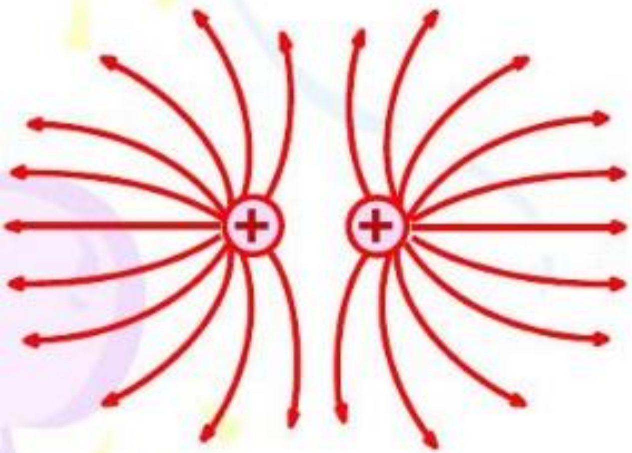
正点电荷



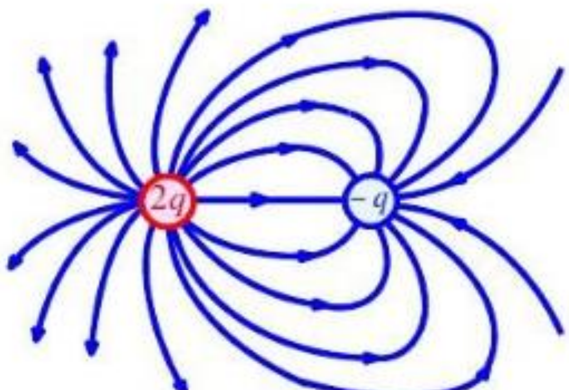
负点电荷



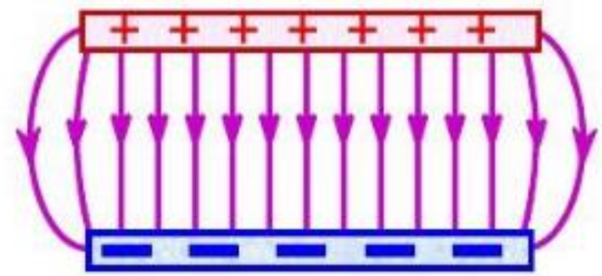
等量异性电荷



等量同性电荷



不等量异性电荷

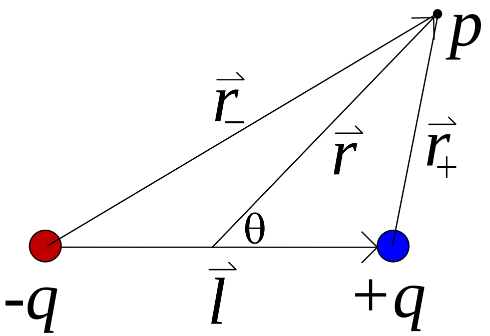


平行板电荷

3.3 电偶极子的电场

电偶极子是电介质理论和原子物理学的重要模型，电介质极化、电磁波发射等研究中都要用到电偶极子的概念概念。

电偶极子由两个电量相等、极性相反、距离很近的电荷构成，电量与距离的乘积称为电偶极子的偶极矩：$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$

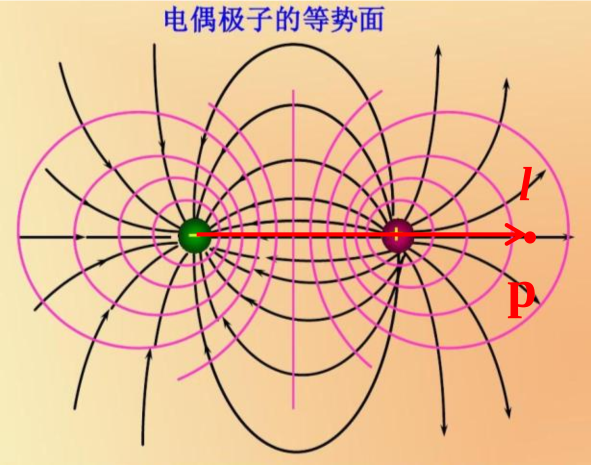


$$\boldsymbol{E}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+{}^2}\hat{r}_+-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_-{}^2}\hat{r}_-$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}_+}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-rl\cos\theta}-\frac{\hat{r}_-}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2+rl\cos\theta}\right)$$

3.3 电偶极子的电场

✓ 当$\theta=0^\circ$ 时，场点 p 在电偶极子的延长线上：



$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{l}}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2-rl}-\frac{\hat{l}}{r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2+rl}\right)$$

$$=\frac{q\hat{l}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2}-\frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right)=\frac{q\hat{l}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2rl}{\left(r^2-\frac{l^2}{4}\right)^2}\right)$$

当 r 远远大于 l 时： $\boldsymbol{E}=\dfrac{q\boldsymbol{l}}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$

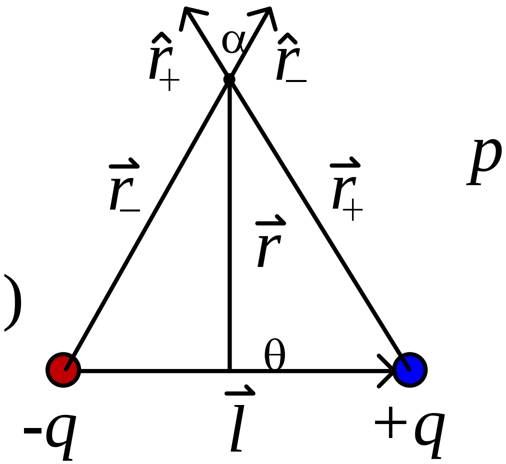
3.3 电偶极子的电场

✓ 当θ = 90° 时，场点 p 在电偶极子的中垂线上：

$$r_+^{\ 2} = r_-^{\ 2} = r^2 + (\frac{l}{2})^2$$

$$l^2 = r_+^{\ 2} + r_-^{\ 2} - 2r_+ r_- \cos\alpha = 2(r^2 + (\frac{l}{2})^2)(1-\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{l^2}{2(r^2 + (\frac{l}{2})^2)} = \frac{4r^2 - l^2}{4r^2 + l^2}$$



$$\hat{r}_- - \hat{r}_+ = (1^2 + 1^2 - 2\cos\alpha)^{1/2}\hat{l} = (2 - 2\frac{4r^2 - l^2}{4r^2 + l^2})^{1/2}\hat{l} = (\frac{4l^2}{4r^2 + l^2})^{1/2}\hat{l}$$

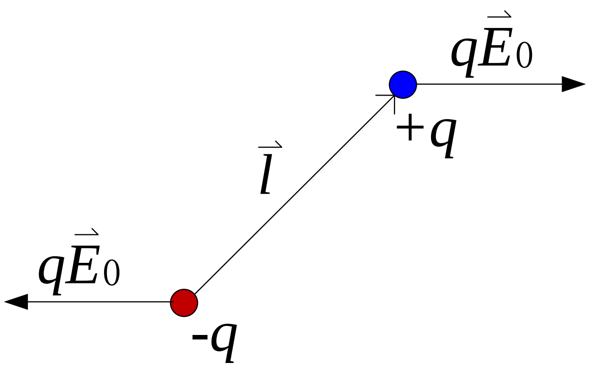
3.3 电偶极子的电场

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}_+}{r^2+(l/2)^2}-\frac{\hat{r}_-}{r^2+(l/2)^2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\hat{r}_+-\hat{r}_-}{r^2+(l/2)^2}\right)$$

$$=\frac{-q\hat{l}}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\left(\frac{4l^2}{4r^2+l^2}\right)^{1/2}}{r^2+(l/2)^2}\right)$$

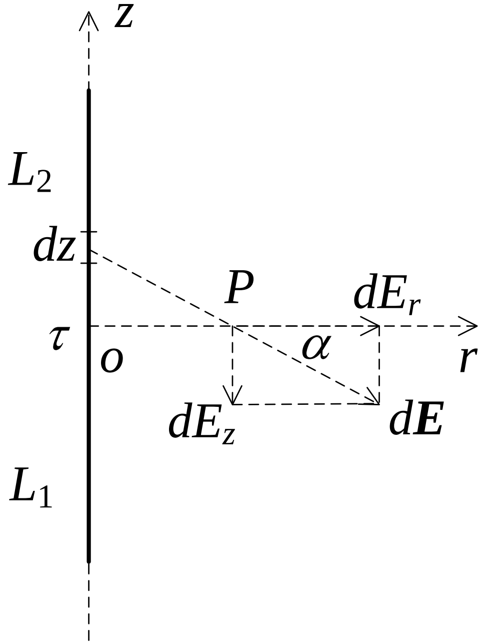
当 r 远远大于 l 时：$\boldsymbol{E}=\dfrac{-q\boldsymbol{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$

电偶极子 $\boldsymbol{p}$ 中的正负电荷在均匀外电场 $\boldsymbol{E}_0$ 中所受的力大小相等，方向相反，并形成力偶。在力偶的作用下，电偶极子会旋转，但不平动。（若场非均匀，则会发生平动）。



3.4 均匀长直带电体的电场强度

【例1】真空中有一长为L的均匀带电直导线，电荷线密度为τ，求P 点的电场



解：轴对称场，圆柱坐标系

$$dE = \frac{\tau dz}{4\pi\varepsilon_o(z^2+r^2)}$$

$$dE_z = -dE\sin\alpha = \frac{-z}{\sqrt{r^2+z^2}}dE$$

$$dE_r = dE\cos\alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2+z^2}}dE$$

$$E_z = \int_{-L_1}^{L_2}\frac{-\tau z}{4\pi\varepsilon_o(z^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}z = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{\sqrt{L_2{}^2+r^2}}-\frac{1}{\sqrt{L_1{}^2+r^2}}\right)$$

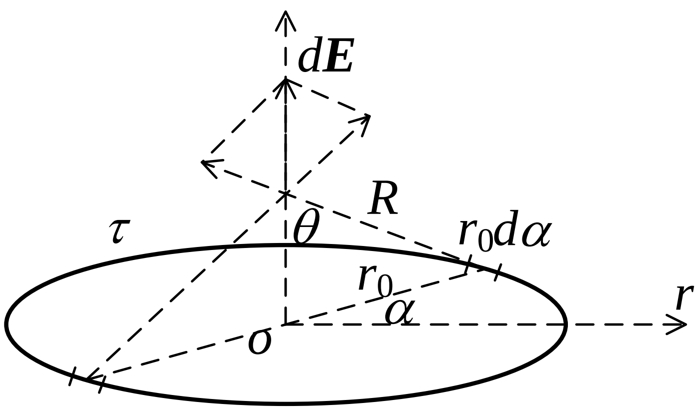
$$E_r = \int_{-L_1}^{L_2}\frac{\tau r}{4\pi\varepsilon_o(z^2+r^2)^{3/2}}\mathrm{d}z = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_o r}\left(\frac{L_2}{\sqrt{L_2{}^2+r^2}}+\frac{L_1}{\sqrt{L_1{}^2+r^2}}\right)$$

当$L = L_1 + L_2 \to \infty$时： $\boldsymbol{E} = E_r\boldsymbol{e}_r + E_z\boldsymbol{e}_z = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\boldsymbol{e}_r$

实际上，在静电场条件下，一段有限长的导线不可能均匀带电。端部电荷密度最大，中部电荷密度最小。

3.5 均匀带电圆环的电场强度

真空中一个半径为r0的均匀带电导体圆环，如果其所带的线电荷密度为τ（忽略其截面尺寸），可根据电场强度定义式计算其轴线上的电场强度。



两个对称电荷元产生的电场强度为

$$d\boldsymbol{E} = \frac{2\tau r_0 d\alpha}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cos\theta \boldsymbol{e}_z \qquad \cos\theta = \frac{z}{R} \qquad R = \sqrt{r_0^{\ 2} + z^2}$$

$$\boldsymbol{E} = \int_0^{\pi} \frac{2\tau r_0 d\alpha}{4\pi\varepsilon_o R^2}\cos\theta \boldsymbol{e}_z = \frac{\tau r_0 z}{2\varepsilon_o R^3}\boldsymbol{e}_z = \frac{\tau r_0 z}{2\varepsilon_o\left(r_0^{\ 2}+z^2\right)^{3/2}}\boldsymbol{e}_z$$

可进一步计算均匀带电圆盘轴线上的电场强度。取其中一半径为r宽度为dr的圆环，其所带的电荷量为：

$$dq = \frac{q}{\pi r_0^{\ 2}}\left(\pi(r+dr)^2 - \pi r^2\right) = \frac{2rdr}{r_0^{\ 2}}q$$

$$\tau = \frac{dq}{2\pi r} = \frac{dr}{\pi r_0^{\ 2}}q$$

$$dE = \frac{dr}{\pi r_0^{\ 2}}q\frac{rz}{2\varepsilon_o\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{qzrdr}{2\pi\varepsilon_o r_0^{\ 2}\left(r^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$E = \frac{qz}{2\pi\varepsilon_o r_0^{\ 2}}\int_o^{r_0}\frac{rdr}{\left(r^2+z^2\right)^{3/2}} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_0^{\ 2}}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+r_0^{\ 2}}}\right)$$

对于无限大圆盘： $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0 r_0^{\ 2}} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

【讨论】叠加积分计算*E*太过复杂，太受局限，有没有简化的方法？