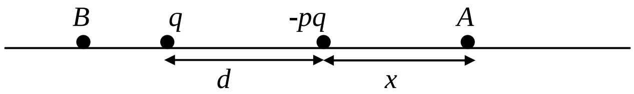
习题 1-10



解：首先物理概念上分析电场强度为零的点一定是 A 点，因为 *0<q<1*，A 离*-qp* 近，离 *q* 远，则二者即产生的 $\vec{E}_A$ 会抵消，而 B 点不行，这是因为离 *q* 近离*-pq* 远，即产生的 $\vec{E}$ 一大一小无法抵消。

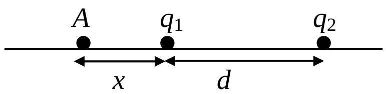
令 *x* 如图，则两点电荷在 A 点产生的场强分别为：

q: $\vec{E}_1 = \dfrac{q}{4\pi q_0 (d+x)^2}\vec{r}$， *-pq:* $\vec{E}_2 = \dfrac{-pq}{4\pi\varepsilon_0 (x)^2}\vec{r}$

令 $\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0$，有 $\dfrac{1}{(d+x)^2} = \dfrac{p}{x^2}$ $p(d+x)^2 = x^2$

两边开方取正值：$x = \dfrac{\sqrt{p}}{1-\sqrt{p}} d$

习题 1-11



解：分析知，只可能是 A 点，$\because q_2 > q_1$，$\therefore$A 点必须离 q_1 近、离 q_2 远才行

令 *x* 如图示，据题意有

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{(d+x)^2}$，$x$=1.37$d$

习题 1-12

解：在直角坐标系中，取棒中心在原点处，棒沿 *z* 轴放置。

①因为求的点在 *y* 轴上，所以棒上下的对称性决定了 $\vec{E}$ 的 *z* 分量被抵消了，只剩了 *y* 分量，而且可只计算一半棒上的电荷在 *p* 点产生的场强，乘 2 即为所求。

设棒长 2*L*，显然 $dq = \tau dz = \dfrac{q}{2L}dz$

$$E_r = 2\int_0^L \frac{q}{2L}\frac{0.1dz}{4\pi\varepsilon_0 (z^2+0.1^2)^{3/2}}$$

$$= 2\times\frac{0.1q}{8L\pi\varepsilon_0}\frac{Z}{(0.1)^2(z^2+0.1^2)^{1/2}}\Bigg|_0^L$$

$$=\frac{q}{4\pi L\varepsilon_0 * 0.1}\left[\frac{L}{\left(0.1^2+L^2\right)^{1/2}}-0\right]$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 * 0.3}$$

$$=5994.5V/m$$

$$\therefore \vec{E}=5994.5\vec{y}$$

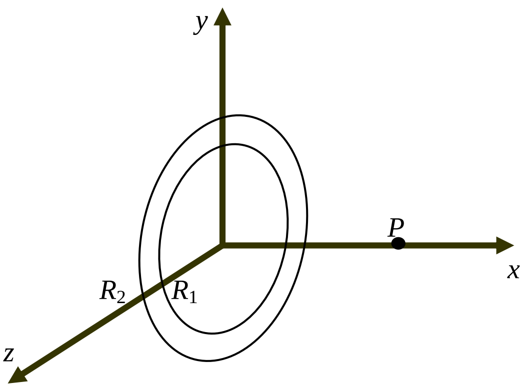
②近似计算棒是无限长而保持电场线密度不变，计算结果是：

$$E=\frac{\tau}{2\pi r\varepsilon_0}=\frac{q}{2L\cdot 2\pi\cdot 0.1q_0}=5997.9V/m$$

L 并非无限长，还是取以前的 $L=\sqrt{3^2-0.1^2}\approx 3$

它与上述的相对误差 $\frac{5997.9-5994.5}{5994.5} * 100\% = 0.0567\%$

习题 1-13



解：

已知一圆环产生的场强

$$\vec{E}=\frac{qx}{4\pi q_0\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$$

此圆环可分为无数半径为 r 的细圆环，其上微电荷

$$dq=\sigma dS=\sigma\cdot 2\pi rdr$$

其产生的微元电场 $\quad d\vec{E}=\frac{\sigma\cdot 2\pi rdr\cdot x}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}$

故 r 从 R_1 到 R_2 积分即所有圆环产生的场强：

$$\vec{E}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\sigma\cdot 2\pi rdr\cdot x}{4\pi\varepsilon_0\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}=\frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{d\left(r^2+x^2\right)}{\left(r^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\vec{i}=\frac{\sigma x}{4\varepsilon_0}\left.\frac{-2}{\left(r^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right|_{R_1}^{R_2}\vec{i}$$

$$=\frac{\sigma x}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\left(R_1^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\left(R_2^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]\vec{i}$$

讨论：

1）σ 不变，$R_1 \to 0$，得

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{\left(R_2^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

2）又 $\frac{R_2}{x} \to \infty$ 得

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

这相当于 $R_2 \to \infty$ 比 x 快的多，即变成无限大带电平板。

当在板右侧即 $x>0$ 时，$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$

当在板左侧即 $x<0$ 时，$\vec{E}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$

$\vec{E}$ 的方向突变。

习题 1-14

解：当 $\sigma_2>\sigma_1>0$ 时，首先应了解单独一个无限大带电平面两边的电场分布，然后由叠加原理求合成场强。

由习题 1-13 知 $\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}$ 在板两边突变。

所以 A 点场强：$\vec{E}_A=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(-\vec{i})+\frac{-\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{i})=\frac{-1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-\sigma_2)\vec{i}$

B 点：$\vec{E}_B=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(\vec{i})+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(\vec{i})=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2)\vec{i}$

C 点：$\vec{E}_C=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}(\vec{i})+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}(-\vec{i})=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-\sigma_2)\vec{i}$

2）当 $\delta_2=\delta_1>0$ 时，$\vec{E}_A=\vec{E}_C=0$

$$\vec{E}_B = \frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1 + \sigma_2)\vec{i} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$$

习题 1-15

解：1)求各区域内的场强分布

应用真空中的高斯通量定理：封闭圆柱面 $\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$

R_1内：　$\because q = 0, \therefore E_1 = 0$

$R_1 < R < R_2$：　$E_2 \cdot 2\pi R = \frac{\tau_1}{\varepsilon_0}$，$E_2 = \frac{\tau_1}{2\varepsilon_0 \pi R}$

$R > R_2$：　$E_3 \cdot 2\pi R = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\varepsilon_0}$，$E_3 = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\varepsilon_0 \pi R}$

2)当 $\tau_1 = -\tau_2$ 时：　$E_3 = 0$，E_1, E_2 同前

E 的方向是射线方向，各点不一。

习题 1-16

解：此题可用叠加法解；

R_2 中添加 ρ 后其中任一点的 $\vec{E}_1$：

$$\oint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = q/\varepsilon_0 \rightarrow E_1 \cdot 2\pi R = \rho\pi R^2 \frac{1}{\varepsilon_0}$$

$\vec{E}_1 = \frac{\rho\vec{R}}{2\varepsilon_0}$　　$\vec{R}$ 非单位矢量

仅 R_2 中不填 ρ，其内 $\vec{E}_2$：

$E_2 \cdot 2\pi r = \frac{\rho\pi r^2}{\varepsilon_0}$　　$\vec{E}_2 = \frac{\rho\vec{r}}{2\varepsilon_0}$

$$\therefore \vec{E} = \vec{E}_1 - \vec{E}_2 = \frac{\rho}{2\varepsilon_0}(\vec{R} - \vec{r}) = \frac{\rho\vec{a}}{2\varepsilon_0}$$

习题 1-17

解：任意半径 r 处 E：

$$\oint_S \varepsilon\vec{E}d\vec{S} = q$$

$$\varepsilon E \cdot 2\pi r = \tau$$

$$E=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon r}$$

在 ε_1 内 $E_1=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 r}$， $E_{1MAX}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 R_0}$ $E_{1MIN}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1(R_0+d_1)}$

在 ε_2 内 $E_2=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 r}$， $E_{2MAX}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2(R_0+d_1)}$ $E_{2MIN}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2(R_0+d_1+d_2)}$

在 ε_3 内 $E_3=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_3 r}$， $E_{3MAX}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_3(R_0+d_1+d_2)}$ $E_{3MIN}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_3(R_0+d_1+d_2+d_3)}$

在 ε_4 内 $E_4=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_4 r}$， $E_{4MAX}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_4(R_0+d_1+d_2+d_3)}$ $E_{4MIN}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_4(R_0+d_1+d_2+d_3+d_4)}$

作图时注意 E 和 r 是双曲线型关系，先在图上画出两端点，再用双曲线连接即可。

习题 1-18

解：$E_{1\max}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 R_1}=\frac{\tau}{11\pi\varepsilon_0}$ $E_{2\max}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 R}=\frac{\tau}{11\pi\varepsilon_0}$

$E_{1mIN}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 R}=\frac{\tau}{27.5\pi\varepsilon_0}$ $E_{2mIN}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 R_2}=\frac{\tau}{17.6\pi\varepsilon_0}$

$$\therefore\frac{E_{\max}}{E_{\min}}=\frac{E_{1\max}}{E_{1\min}}=\frac{27.5}{11}=2.5$$

习题 1-20

解法一：用电偶极子算：距电偶子中心 r 处的电位

$$\varphi=\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon r^2}$$

此外 $r=\sqrt{R^2+x^2},\cos\theta=\frac{x}{r}$

故在两环对应处各取 dl，则 $dq=\frac{q}{2\pi R}dl, dl=Rd\alpha$

$$\therefore d\varphi=\frac{qRd\alpha}{2\pi R}\cdot\frac{lx}{4\pi\varepsilon r^3}$$

$$\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{qlx}{4\pi\varepsilon r^3}=\frac{qlx}{4\pi\varepsilon(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

因为电偶极子 φ 是近似的，故这里也是近似的 。

解法二：各取一微元段

$$d\varphi_1=\frac{dq_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}=\frac{-qdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R\sqrt{R^2+(\frac{l}{2}+x)^2}}$$

$$d\varphi_2=\frac{dq_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}=\frac{qdl}{8\pi^2\varepsilon_0 R\sqrt{R^2+(x-\frac{l}{2})^2}}$$

$$\therefore \varphi=\varphi_1+\varphi_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2+(x-\frac{l}{2})^2}}-\frac{1}{\sqrt{R^2+(x+\frac{l}{2})^2}}\right)$$

$\because l<<R,\therefore r_1\approx r_2\approx r.\qquad r_1-r_2\approx l\cos\theta$

$$\varphi\approx\frac{qlx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

习题 1-21

解：$\varepsilon_r=\dfrac{k+R}{R}$

由高斯定理 $E_R=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon R^2}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon(k+R)R}$

令 $\varphi_b=0$ 则

$$\varphi_R=\int_R^b E_R dR=\int_R^b\frac{q}{4\pi\varepsilon_0(k+R)R}dR$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 k}\int_R^b\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+k}\right)dR$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 k}\left(\ln\frac{b}{R}-\ln\frac{k+b}{k+R}\right)$$
$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 k}\ln\frac{b(k+R)}{R(k+b)}$$

习题 1-22

解：$R_2<2R_1$，当 u 增大时哪层介质先击穿？

$$U_{12\max}=\frac{1}{2}E_{\max}r\ln\frac{{R_2}^2}{rR_1}$$

同轴圆柱电容 $E=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon R}$

介质 1 中，$E_1=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 R}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}R}$

介质 2 中，$E_2=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 R}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}(R/2)}$

介质 1 中最大场强：$E_{1\max}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}R_1}$

介质 2 中最大场强：$E_{2\max}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r_1}\left(r/2\right)}$

因为 $R_2<2R_1$，$r<R_2$，所以 $r<2R_1$，$(r/2)<R_1$，故介质 2 中，$E_{2MAX}>E_{1MAX}$，即当电压升高时，τ 增大，介质 2 中将先达到最大场强，尽管两种介质 E_{MAX} 相等，但是介质 2 中先达到，所以外层介质 2 将先被击穿。

假设外层介质先达到 E_{MAX}，因为

$E_2=\dfrac{U_{02}}{RIn\dfrac{R_2}{r}}$，所以 $U_{02}=E_{MAX}rIn\dfrac{R_2}{r}$

而 $U_{02}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}In\dfrac{R_2}{r}$，所以 $\tau=\dfrac{U_{02}2\pi\varepsilon_2}{In\dfrac{R_2}{r}}$

$$U_{10}=\int_{R_1}^{r}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 R}dR=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}In\frac{r}{R_1}=\frac{1}{2\pi\varepsilon_1}\frac{U_{02}2\pi\varepsilon_2}{In\frac{R_2}{r}}In\frac{r}{R_1}=\frac{U_{02}\frac{1}{2}}{In\frac{R_2}{r}}In\frac{r}{R_1}$$

而

$$U_{12}=U_{10}+U_{02}=\frac{U_{02}\frac{1}{2}}{In\frac{R_2}{r}}In\frac{r}{R_1}+U_{02}=U_{02}(\frac{1}{2}\frac{In\frac{r}{R_1}}{In\frac{R_2}{r}}+1)=E_{MAX}r\ln\frac{R_2}{r}(\frac{1}{2}\frac{In\frac{r}{R_1}}{In\frac{R_2}{r}}+1)=\frac{1}{2}E_{MAX}rIn\frac{R_2^2}{rR_1}$$

证毕

习题 1-23

解：

$$\vec{E}=-\nabla\varphi$$
$$=-\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}$$
$$=-\frac{-10\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}\vec{i}-\frac{-10\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}\vec{j}$$
$$=\frac{20}{(x^2+y^2)^2}(x\vec{i}+y\vec{j})$$

$$E(1,1,0)=\frac{20}{(1+1)^2}\left|(\vec{i}+\vec{j})\right|=\frac{20\sqrt{2}}{4}=5\sqrt{2}$$

习题 1-25

解：由 $D_{1n}=D_{2n}$ 知：

$$E_{2n}=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1n}=6.5E\cos 75^o$$

$E_{2t} = E_{1t} = E\sin 75^o$

所以 $E_0 = \sqrt{6.5^2 E^2 \cos^2 75^o + E^2 \sin^2 75^o} = 34.9kV/cm$， 超过。

习题 1-26

解：设内外之间加 U_0 电压，内层金属带电荷+ τ，外层金属带电荷- τ

因为两层介质中的最大场强相等，所以

$$\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1 a} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 b}，\quad \varepsilon_1 a = \varepsilon_2 b$$

交界面上出现场强极值。

因为

$$U_o = U_{ab} + U_{bc} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_1}\ln\frac{b}{a} + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}\ln\frac{c}{b} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2}(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \ln\frac{c}{b})$$

所以 $\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_2} = \dfrac{U_o}{\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \ln\dfrac{c}{b}}$

$$E_{\max 2}\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_2 b} = \frac{U_o}{b(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \ln\frac{c}{b})}$$

求 $E_{\max 2}$ 的极值：

$$\frac{dE_{\max 2}}{db} = 0$$

$$\frac{-U_o[(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \ln\frac{c}{b}) + b\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{-c}{b^2}]}{b^2(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \ln\frac{c}{b})^2} = 0$$

$$(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \ln\frac{c}{b}) - 1 = 0$$

所以 $b = (\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2})^{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}\dfrac{c}{e}$， $a = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}b$

习题 1-34

解： $\nabla^2\varphi = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}) = -\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$

$$\varphi|_{r=R1} = 0$$

$\varphi|_{r=R2}=50V$

得：$\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r})=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}r$

解微分方程，转换为：$r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+r^2(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2})=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}r^2$

此即数学上的尤拉方程：令 $r=e^t$，则方程变为：

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}e^{2t}$$

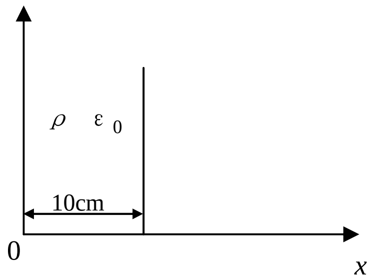
积分两次得：$\varphi(t)=-\dfrac{\rho}{4\varepsilon_0}e^{2t}+At+B$

$$\varphi(r)=-\frac{\rho}{4\varepsilon_0}r^2+A\ln r+B$$

由边界条件得 A=452.53，B=1373.299

所以 $\varphi(r)=-28248.59r^2+452.53\ln r+1373.299$

习题 1-35



解： $\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\\ \varphi|_{x=0}=0\end{cases}$

$\varphi|_{x=d}=200V$

所以 $\varphi(x)=-\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}x^2+Ax+B$

由 $\varphi|_{x=0}=0$ 知 B=0

由 $\varphi|_{x=d}=200V$ 知 A=7649.7

$$\varphi(x)=-56497.18x^2+7649.7x$$

$\vec{E}=-\nabla\varphi(x)=(112994.36x^2-7649.7x)\vec{i}$

习题 1-36

解：

在$R_1<r<R_2$区域，令球感应电荷q_1。

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=0,\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial r})=0\\ \varphi|_{r=R1}=0\\ -\varepsilon_0\dfrac{\partial\phi}{\partial r}|_{r=R1}=\dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1^2}\end{cases}$$

得$\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial r})=0$

$2r\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}+r^2\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}=0$，尤拉方程

令$r=e^t$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=Ae^{-t}$$

得$\varphi(t)=-Ae^{-t}+B$

$$\varphi(r)=-Ae^{-\ln r}+B=\frac{A}{r}+B$$

由边界条件得：

$$A=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0},B=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0R_1}$$

$$\varphi_1(r)=\frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1})$$

在$r>R_3$区域

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi=0,\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial\varphi}{\partial r})=0\\ \varphi|_{r=\infty}=0\\ \oint_S-\varepsilon_0\dfrac{\partial\phi}{\partial r}dS=q_1+q\end{cases}$$

因为$\varphi|_{r=\infty}=0$，所以$B=0$

又 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial r}=\dfrac{-A_1}{r^2}$，所以 $\oint_S \varepsilon_0 \dfrac{A_1}{r^2} dS = q_1 + q$

S 取 $r=R_3$，则 $A_1 = \dfrac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0}$

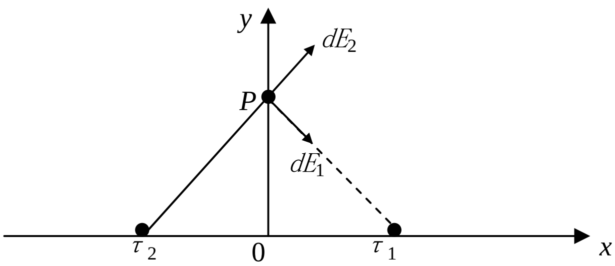
所以 $\varphi_2(r) = \dfrac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

求 q_1，由 $\varphi_1|_{r=R2} = \varphi_2|_{r=R3}$ 得

$$\frac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3} = \frac{-q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_2} + \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}$$

得 $q_1 = \dfrac{-\dfrac{1}{R_3}q}{\dfrac{1}{R_3}+\dfrac{1}{R_2}-\dfrac{1}{R_1}}$

测验题 1-37



解：(1) P 点坐标（0,1.5,Z）,z 可变，无论 z 变到什么地方，P 点距两导线的距离均相等(r)。

$r = \sqrt{1.5^2 + 0.75^2 + z^2} = \sqrt{a^2 + (d/2)^2 + z^2}$

(2) τ_1和 τ_2在 P 点产生的 dE 的 y 轴分量抵消，只剩 x 轴分量，所以

$dE_x = dE\sin\theta = dE(d/2r)$

因为 $dE = \dfrac{\tau_2 dz}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，所以

$$dE_x = \frac{\tau_2 dz}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{d}{2r} = \frac{d\tau_2 dz}{8\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{d\tau_2 dz}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+(d/2)^2+z^2}^3}$$

$$E_x = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\tau_2 dz}{8\pi\varepsilon_0\sqrt{a^2+(d/2)^2+z^2}^3} = \left.\frac{\tau_2 z}{4\pi\varepsilon_0(a^2+(d/2)^2)\sqrt{a^2+(d/2)^2+z^2}}\right|_0^\infty$$

$$= \frac{5.17*10^{-10}}{4\pi 8.85*10^{-12}(1.5^2+0.75^2)} = 1.65$$

$$\vec{E}=\frac{2\cdot\tau\cdot 1.5}{2\pi\varepsilon_0 2r^2}=4.96V/m$$

测验题 1-38
解：

(1) 求 $\vec{E}$

$R_1<r<R_2$ 时， $\vec{E}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$r>R_2$ 时， $\vec{E}=\frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\varphi_1=\int_{R_2}^{\infty}\frac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr+\int_{R_1}^{R_2}\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})+\frac{q_1+q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$\varphi_1=0$， 则 $\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1}=-\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2},q_2=-\frac{R_2 q_1}{R_1}=-2q_1$

$\varphi_1<0$， 则 $\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}<0,q_2<-2q_1$

测验题 1-39
解：

$$\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},\vec{E}=-\nabla\varphi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{r}^{\,0}$$

$\varphi,\vec{E}$ 均将在 $R=R_0$ 处出现最大值。

所以 $\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}<30,q<30\cdot 4\pi\varepsilon_0 R^2$

而 $\sigma_{\max}=\frac{30\cdot 4\pi\varepsilon_0 R^2}{4\pi R^2}=30\times 10^6\cdot\varepsilon_0=2.655\times 10^{-5}C/m^2$

$$\varphi_{\max}=\frac{q_{\max}}{4\pi\varepsilon_0 R}=30\times 10^6\times 0.5\cdot R_0=750KV$$

测验题 1-40
解：

(1) $E_2=\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1=200V/m$， 仅法向分量

（2） $E_2 = E_1 = 100V/m$，仅切向分量

测验题 1-41

解：

$$\varphi(r,\theta,\varphi) = \frac{K_1 \cos^2\theta + K_2}{r^3}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\vec{r}^{\,0} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\vec{\theta}^{\,0}) = \frac{3(K_1\cos^2\theta + K_2)}{r^4}\vec{r}^{\,0} + \frac{1}{r}\frac{K2\cos\theta\sin\theta}{r^3}\vec{\theta}^{\,0}$$

测验题 1-42

解：

（1） $\vec{E} = \dfrac{U_{12}}{r\ln\dfrac{R_2}{R_1}}, \therefore E_{\max} = \dfrac{U_{12}}{R_1\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \qquad (r = R_1)$

（2） $\vec{E}\,|_{r=0} = 0, U_{02} = U_{12}$

习题 2-14

解：由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \\ \varphi|_{x=0} = U_0 \\ \varphi|_{x=d} = 0 \end{cases}$$

可得：$\varphi = \dfrac{-U_0 x}{d} + U_0$

$\vec{E} = -\nabla \varphi = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} = \dfrac{U_0}{d}\vec{i}$，与 ε_0 无关，所以 $E_1=E_2$。

习题 2-15

解：因为 $E_1=E_2$

所以 $\varphi_1 = \dfrac{A_1}{r} + B_1, \varphi_2 = \dfrac{A_2}{r} + B_2$ 中 $A_1=A_2$。

又 $r = \infty$ 时，$\varphi = 0$，所以 $B_1=B_2=0$。

$$\varphi = \frac{A}{r}$$

以 r 为半径作圆球面包围 q，则 $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = q$

$D_1 2\pi r^2 + D_2 2\pi r^2 = q$

$$\varepsilon_1 E_1 + \varepsilon_2 E_2 = \frac{q}{2\pi r^2}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r^2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{A}{r^2}$$

所以 $A = \dfrac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \varphi = \dfrac{q}{2\pi(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) r}$

习题 2-16

解：$x_0 - \sqrt{x_0^2 - R_0^2} \le 0.02R_0$

$$(x_0 - 0.02R_0)^2 \le x_0^2 - R_0^2$$

$$(1 + 0.02^2)R_0^2 \le 0.02R_0 2x_0$$

$$(1 + 0.02^2)R_0 \le 0.02d$$

$$\therefore \frac{R_0}{d} \le \frac{0.02}{\left(1+0.02^2\right)}$$

习题 2-17

解： $\sigma_{\max}=\sigma_A,\sigma_{\min}=\sigma_B$

电轴位置 $(\frac{D}{2})^2=x_0^2-R_0^2=100-36=64$

$$\frac{D}{2}=8cm$$

单个长直线时，$E=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$

$\varphi_1=-500=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{R_2}{R_1}$，即可求 τ

$$\sigma_{\max}=\sigma_A=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$\sigma_{\min}=\sigma_B=-\varepsilon_0\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

习题 2-19

解： 确定镜像电荷的位置

$$\frac{D}{2}=\sqrt{x_0^2-R_0^2}$$

两轴对称于原墙面才能保证 $\varphi=0$

习题 2-20

解： $q^{'}=\dfrac{R}{d}q,b=\dfrac{R^2}{d}$，$\varphi_{(x,y,z)}$ 由四个电荷产生。

习题 2－21

解： 求 q 受力，再加以分析即可。

$$q^{'}=\frac{R}{d}q$$

$$q''=Q+q^{'}=Q+\frac{R}{d}q$$

$-q^{'}$ 与 q 相吸，q'' 与 q 相斥，吸力有可能无穷大，斥力有限，故可能相吸。

所以 q 处场强：

$$E=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0 d^2}-\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(d-b)^2}=\frac{Q+\frac{R}{d}q}{4\pi\varepsilon_0 d^2}-\frac{\frac{R}{d}q}{4\pi\varepsilon_0(d-\frac{R^2}{d})^2}$$

受力

$$F=qE=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q+\frac{R}{d}q}{d^2}-\frac{\frac{R}{d}q}{(d-\frac{R^2}{d})^2}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{dQ+Rq}{d^3}-\frac{Rdq}{(d^2-R^2)^2}\right]$$

当 q 移近导体球时，d^2-R^2 很小，而 $dQ+Rq\to 2Rq$， $Rdq\to R^2q$，

当 $R>2$ 时有可能 $\frac{dQ+Rq}{d^3}-\frac{Rdq}{(d^2-R^2)^2}<0$，变成吸力。

习题 2-22

解：叠加法

无 q_2 时，q_1 处， $E_1=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}=\frac{\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_1}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}$

无 q_1 时，q_1 处， $E_2=\frac{q''}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}=\frac{\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_1}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}$

所以 q_1 受力， $F=q_1E=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2}\left[\frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_1+\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q_1\right]$

习题 2-23

解：设外球带电+q，内球带电-q。

则球间 $E=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\varphi_o=\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

$$C=C_1+C_2=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_x^2}{R_2-R_1}$$

习题 2-24

解：圆柱式电容器的单位长电容 $C_0=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$

从外至里

$$\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_4}{r_3}}l_1=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_3}{r_2}}l_2=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_2}{r_1}}l_3=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{r_1}{r_0}}l_4$$

已知 r_0 至 r_4，以及 l_4，可以求 l_1 至 l_3。

习题 2-25

解：圆柱电容器 $E=\frac{U}{r\ln\frac{R_2}{R}}$，而 $E_{\max}=\frac{U_{\max}}{R\ln\frac{R_2}{R}}$，由于 R 可以自由选择，又要求 $U_{\max}$，所以求 $E_{\max}$ 的极值：

$$\frac{dE_{\max}}{dR}=\frac{U_{\max}}{R^2\ln^2\frac{R_2}{R}}(-\ln\frac{R_2}{R}-R\cdot\frac{R}{R_2}\cdot\frac{-R_2}{R^2})=0$$

$$\ln\frac{R_2}{R}=1,\frac{R_2}{R}=e$$

习题 2-26

解： $\varepsilon_1>\varepsilon_2>\varepsilon_3$，击穿场强相等，若让击穿场强同时出现在三种介质中，则充分利用绝缘特性。

$$\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_1R_1}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_2R_2}=\frac{\tau}{4\pi\varepsilon_3R_3}$$

$$\varepsilon_1R_1=\varepsilon_2R_2=\varepsilon_3R_3$$

$$C=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}}=\frac{1}{\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\varepsilon_1}+\frac{\ln\frac{R_3}{R_2}}{2\pi\varepsilon_2}+\frac{\ln\frac{R_4}{R_3}}{2\pi\varepsilon_3}}=\frac{1}{\frac{\ln\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{2\pi\varepsilon_1}+\frac{\ln\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}}{2\pi\varepsilon_2}+\frac{\ln\frac{\varepsilon_4}{\varepsilon_3}}{2\pi\varepsilon_3}}$$

习题 2-27

解： $C_0=\frac{\tau}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{d-R_0}{R_0}}$

$U=\varphi_1-\varphi_0$，由镜像法求 φ_1,φ_0

总 $C=C_0l$

习题 2-28

解：假设电轴与几何轴线重合，则问题变为求双电轴在边界一点的 E_n（切线分量抵消、只剩法线分量）

$$E_n = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta = \frac{\tau}{\pi\varepsilon_0 R}\sin\theta = \frac{\tau h}{\pi\varepsilon_0 R^2}$$

求导线电位：

$$\varphi = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h-R_0}{R_0} = 3300$$

$$\therefore \tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 \times 3300}{\ln\frac{2h}{R_0}}$$

$$\therefore \sigma = -\varepsilon_0 E_n = \frac{-\tau h}{\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{-2\varepsilon_0 \times 3300}{\ln\frac{2h}{R_0}}\cdot\frac{h}{R^2} = \frac{247.15\times10^{-10}}{9+x^2} C/m^2$$

习题 2-30

解：要由电轴法求 φ_1、φ_2，因为地面影响要考虑。

$$\therefore \varphi_1 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{R_0} + \frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{d} = \alpha_{11}\tau_1 + \alpha_{12}\tau_2$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \alpha_{12} = \alpha_{21}$$

$$\therefore \alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h}{R_0} = \ldots$$

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\sqrt{(2h)^2+d^2}}{d} = \ldots$$

习题 2-31

解：相距很远，则 $d>>a$

$$\therefore \varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon a} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon d} = \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2$$

$$\therefore \varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon d} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon a} = \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2$$

$$\alpha_{11} = \alpha_{22}, \alpha_{12} = \alpha_{21}$$

则 β, c 可求

习题 2-33

解：不考虑地面影响的传输线，单位长电容为 C_0

$$\therefore W_e=\frac{1}{2}C_0U^2=\frac{\pi\varepsilon_0}{2\ln\frac{d}{R}}U^2.$$

$$\therefore f_g=\frac{\partial W}{\partial d}\Big|_{U=C}=\frac{-\pi\varepsilon_0}{2d(\ln\frac{d}{R})^2}U^2.$$

即为所求一个圆柱单位长受力。

习题 2-34

解：$f_x=\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{U=C}$

分析，何处有电场，R_1 柱内 $E=0$，R_2 柱内 $E=0$，只在图示两柱相重合之间才有 E 不为 0，因柱间 $U=0$。

$\therefore W_e=\frac{1}{2}C_0U^2$，$C$ 应是阴影所示处的电容。

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}x.$$

$$\therefore f_x=\frac{\partial W}{\partial x}\Big|_{U=C}=\frac{1}{2}U^2\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{R_2}{R_1}}=1.52\times10^{-4}N$$

习题 2-35

解：$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=q$，$D_1S_1+D_2S_2=q$

$$\varepsilon_1E_1xa+\varepsilon_0E_2a(a-x)=q$$

而 $E_1=E_2=E$

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0[\varepsilon_{r1}xa+a(a-x)]}=\frac{q}{\varepsilon_0[(\varepsilon_{r1}-1)xa+a^2]}$$

而交界上受力

$$f=f_0S=\frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}-1)da\frac{q^2}{a^2\varepsilon_0^2[(\varepsilon_{r1}-1)x+a]^2}=\frac{(\varepsilon_{r1}-1)dq^2}{2a\varepsilon_0[(\varepsilon_{r1}-1)x+a]^2}$$

方向应由 ε_1 指向 ε_0 一方，即有使电容增大的趋势。

测验题 2-36

解：对左边区域：q_1受力：$F=\dfrac{q_1^{\ 2}}{4\pi\varepsilon_0(2h_1)^2}$，吸引力

对右边区域：q_2受力：$F=\dfrac{q_2^{\ 2}}{4\pi\varepsilon_0(2(h_2-H-h_1))^2}$，吸引力

测验题 2-37

解：$(\dfrac{D}{2})^2=x_0^2-R_0^2$，而已知$\dfrac{D}{2}=x_0-a$

所以$(x-a)^2=x_0^2-R_0^2$

$$2x=\frac{a^2+R_0^2}{a}$$

测验题 2-38

解：$E=\dfrac{U}{r\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

而最大耐压

$V_{\max}=E_m r\ln\dfrac{b}{r}$

r 由$V'_{\max}=0$求得：

$$E_m\ln\frac{b}{r}+E_m r\cdot\frac{r}{b}\cdot\frac{-b}{r^2}=0$$

$\ln\dfrac{b}{r}-1=0$，$r=\dfrac{b}{e}$

$$\therefore C_0=\frac{2\pi\varepsilon}{\ln\dfrac{b}{b/e}}=2\pi\varepsilon_0$$

测验题2-39

求C_{AB}及C_{11}, C_{12}, C_{22}, C_{21}

解：设两导线单位长带τ_A,τ_B电荷，则由镜象知：

$$\varphi_A=\frac{\tau_A}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h+D-R}{R}+\frac{\tau_B}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h-R}{D-R}$$

$$\varphi_B=\frac{\tau_A}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h-R}{R+D}+\frac{\tau_B}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{2h-D-R}{R}$$

$$\therefore \partial_{11} = \frac{1}{2\pi*8.85*10^{-12}} \ln\frac{2*10+0.8-0.002}{0.002} = 0.166*10^{12}$$
$$\therefore \partial_{21} = \frac{1}{2\pi*8.85*10^{-12}} \ln\frac{2*10-0.002}{0.8-0.002} = 0.058*10^{12}$$
$$\therefore \partial_{22} = \frac{1}{2\pi*8.85*10^{-12}} \ln\frac{2*10-0.8-0.002}{0.002} = 0.165*10^{12}$$

部分电容：

$$C_{12}=C_{21}=-\beta_{21}=\frac{\partial_{21}}{\partial_{11}\partial_{12}-\partial_{12}^2}=2.46*10^{-12}$$

$$C_{11}=\beta_{11}+\beta_{12}=\frac{\partial_{22}-\partial_{12}}{\partial_{11}\partial_{12}-\partial_{12}^2}=4.53*10^{-12}$$

$$C_{22}=\beta_{21}+\beta_{22}=\frac{\partial_{11}-\partial_{12}}{\partial_{11}\partial_{12}-\partial_{12}^2}=4.53*10^{-12}$$

其等效工作电容：
$$C'_{12等}=C_{12}+\frac{C_{11}C_{22}}{C_{11}+C_{22}}=4.72*10^{-12}$$

测验题2-40

解：1. 当两极板都对地绝缘体时

$$C_{AB工B}=C_{AB}+\frac{C_{AA}C_{BB}}{C_{AA}+C_{BB}}$$

2. 当极板A全导通时

$$C_{AB工作}=C_{AB}+C_{AB}$$

测验题2-41

解：抽出金属板需作功

1. $W=W_2-W_1$

$$=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c_2}-\frac{1}{2}\frac{q^2}{c_1}=\frac{q^2}{2}\left(\frac{l}{\varepsilon s}-\frac{l-d}{\varepsilon s}\right)=\frac{q^2 d}{2\varepsilon s}$$

2. $W=f_g d,\qquad W_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c_1}=\frac{q^2(l-d)}{2\varepsilon s}$

$$f_g=f_d=-\frac{2W_e}{8d}|_{q=c}=-\frac{q^2}{2}\frac{-1}{\varepsilon s}$$

$$\therefore w=f_\alpha d=\frac{q^2 d}{2\varepsilon s}$$

等效于板移开d距离.

习题3-10

解：由P142例3-4-1知

$$I_0=\frac{2\pi v_1 v_2 U_0}{v_2\ln\frac{R_2}{R_1}+v_1\ln\frac{R_3}{R_2}}=1.88*10^{-7}A$$

$$\sigma=\left(\frac{\varepsilon_2}{v_2}-\frac{\varepsilon_1}{v_1}\right)\sigma_{1n}=\frac{U_0\left(v_1\varepsilon_2-v_2\varepsilon_1\right)}{\left(v_2\ln\frac{R_2}{R_1}+v_1\ln\frac{R_3}{R_2}\right)R_2}$$

即求： $$q=\sigma 2\pi R_2=\frac{U_0 2\pi v_1 v_2}{v_2\ln\frac{R_2}{R_1}+v_1\ln\frac{R_3}{R_2}}\left(\frac{\varepsilon_2}{v_2}-\frac{\varepsilon_1}{v_1}\right)=-7.807*10^{-6}C$$

习题3-11

解： $$\sigma_1=\frac{I_0}{s}=\sigma_2, E_1=\frac{\sigma_1}{v_1}=\frac{I_0}{sv_1}, E_2=\frac{\sigma_2}{v_2}=\frac{I_0}{sv_2}, U_0=\frac{I_0}{v_1 s}d_1+\frac{I_0}{v_2 s}d_2$$

$$\therefore I_0=\frac{U_0 s v_1 v_2}{v_2 d_1+v_1 d_2}$$

$$\therefore \sigma_1=\frac{U_0 v_1 v_2}{v_2 d_1+v_1 d_2}$$

$$\sigma=\left(\frac{\varepsilon_2}{v_2}-\frac{\varepsilon_1}{v_1}\right)\sigma_1$$

$$q=\sigma s=\left(\frac{\varepsilon_2}{v_2}-\frac{\varepsilon_1}{v_1}\right)\frac{U_0 v_1 v_2}{v_2 d_1+v_1 d_2}s=\frac{U_0\left(\varepsilon_2 v_1-\varepsilon_1 v_2\right)s}{v_2 d_1+v_1 d_2}$$

消耗的功率

$$p=U_0 I_0=\frac{U_0{}^2 s}{\frac{d_1}{v_1}+\frac{d_2}{v_2}}$$

$p=v_1 E_1{}^2+v_2 E_2{}^2$ 也一样。

习题3-12

解：用圆柱坐标，φ 仅与 α 有关

$$\begin{cases}\nabla^2\varphi_1=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\alpha^2}=0 \qquad \nabla^2\varphi_2=\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\alpha^2}=0\\ \varphi_1|_{\alpha=\pi/2}=U_{0,}\varphi_2|_{\alpha=0}=0\\ \varphi_1|_{\alpha=\pi/4}=\varphi_2|_{\alpha=\pi/4}\end{cases}$$

$$\gamma_1 \frac{2\varphi_1}{2\alpha}\Big|_{\alpha=\pi/4} = \gamma_2 \frac{2\varphi_2}{2\alpha}\Big|_{\alpha=\pi/4}$$

$$\varphi_1 = A_1\alpha + A_2, \varphi_2 = B_1\alpha + B_2$$

代入边界条件可得：

$$A_1 = \frac{4U_0\gamma_2}{(\gamma_1+\gamma_2)\pi}, A_2 = \frac{U_0(\gamma_1-\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2}$$

$$B_1 = \frac{4U_0\gamma_1}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}, B_2 = 0$$

$$\therefore \varphi_1 = \frac{AU_0\gamma_2}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\alpha + \frac{U_0(\gamma_1-\gamma_2)}{\gamma_1+\gamma_2}$$

$$\varphi_2 = \frac{4U_0\gamma_1}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}\alpha$$

要求R先求I

$$\sigma_1 = \gamma_1 E_1 = -\frac{4\gamma_1\gamma_2 U_0}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)r}$$

$$I = \int_s \vec{\sigma}\cdot d\vec{S} = \int_s \sigma dS(-\vec{\alpha})(-\vec{\alpha}) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{4U_0\gamma_1\gamma_2}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)r} drh = \frac{4U_0\gamma_1\gamma_2}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)} h \ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$\therefore R = \frac{U_0}{I} = \frac{\pi(\gamma_1+\gamma_2)}{4U_0\gamma_1\gamma_2 h \ln\frac{R_2}{R_1}}$$

$$\alpha = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)\sigma_{1n} = \left(\frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)\frac{4\gamma_1\gamma_2 U_0}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)r} = \frac{(\varepsilon_2\gamma_1 - \varepsilon_1\gamma_2)4U_0}{\pi(\gamma_1+\gamma_2)r}$$

习题3-13

解： 此时φ只与r有关，与z，α无关

且由边界条件知$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

$$\frac{\partial}{r\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\varphi|_{r=R_1} = U_0, \varphi|_{r=R_2} = 0$$

$\varphi = A\ln r + B$，代入边界条件得

$$A=\frac{U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}},B=-\frac{U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\ln R_2$$

$$\therefore\varphi=\frac{U_0\ln\frac{r}{R_2}}{\ln\frac{R_1}{R_2}},\sigma_1=\gamma_1E_1=\gamma_1\left(-\frac{U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}}\frac{R_2}{r}\frac{1}{R_2}\right)=-\frac{\gamma_1U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}r}$$

$$\sigma_2=\gamma_2E_2=\gamma_2\left(-\frac{U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}r}\right)=-\frac{\gamma_2U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}r}$$

$$I=I_1+I_2=\int\sigma_1dS+\int\sigma_2dS=\int_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\gamma_1U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}r}hrd\alpha+\int_0^{\pi/4}\frac{\gamma_2U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}r}hrd\alpha=\frac{\gamma_1U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}}h\frac{\pi}{4}+\frac{\gamma_2U_0}{\ln\frac{R_1}{R_2}}h\frac{\pi}{4}$$

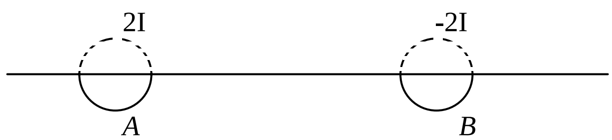
$$\therefore R=\frac{U_0}{I}=\frac{4\ln\frac{R_1}{R_2}}{\pi h(\gamma_1+\gamma_2)}$$

$\because$ 交界 $\sigma_{1n}=\sigma_{2n}=0,\therefore\sigma=0$

习题3-14

解： $R=\frac{1}{2\pi\gamma l}\ln\frac{4l}{d}$，代入数据即可。

习题3-15



解：（1）

$$\varphi_A=\frac{2I}{4\pi\gamma R_0}-\frac{2I}{4\pi\gamma(D-R_0)},\varphi_B=\frac{2I}{4\pi\gamma(D-R_0)}+\frac{-2I}{4\pi\gamma R_0}$$

$$\therefore\varphi_A-\varphi_B=\frac{I}{\pi\gamma R_0}-\frac{I}{\pi\gamma(D-R_0)}$$

$$\therefore R=\frac{\varphi_A-\varphi_B}{I}=\frac{1}{\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_0}-\frac{1}{D-R_0}\right)=\frac{1}{\pi\gamma R_0}$$

（2）

电流$I=\frac{U_0}{R}=\frac{U_0}{\frac{1}{\pi\gamma R_0}}=\pi\gamma U_0 R_0$

测验题3-16

解：$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln\frac{R_2}{R_1}},G=\frac{\gamma}{\varepsilon}C=\frac{2\pi\gamma L}{\ln\frac{R_2}{R_1}},R=\frac{1}{G}=\frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\gamma L}$

测验题3-17

解：半球电容

$$C_1=\frac{2\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1},\ C_2=\frac{2\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2-R_1}$$

$$R_1=\frac{R_2-R_1}{2\pi\gamma_1 R_1 R_2},R_2=\frac{R_2-R_1}{2\pi\gamma_2 R_1 R_2}$$

$$I_1=\frac{U_0}{R_1}=2\pi\gamma_1 R_1 R_2/(R_2-R_1)$$

$$I_2=\frac{U_0}{R_2}=2\pi\gamma_2 R_1 R_2/(R_2-R_1)$$

测验题3-18

解：1. 设两端加电压U_0

$$则\nabla^2\varphi=0,\ \ \varphi|_{\alpha=0}=0,\varphi|_{\alpha=\pi}=U_0$$

$$\varphi=C\alpha+D,\alpha=0,\varphi=0则D=0$$

$$\alpha=\pi,\ \ \varphi=0则C=\frac{U_0}{\pi}$$

$$\varphi=\frac{U_0}{\pi}\alpha,\vec{E}=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\vec{\alpha}_0=-\frac{1}{r}\frac{U_0}{\pi}\vec{\alpha}_0$$

$$\therefore\sigma=\gamma E=\frac{\gamma U_0}{\pi r},I=\int\sigma dS=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\gamma U_0}{\pi r}hdr=\frac{\gamma U_0}{\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}h$$

$$\therefore R=\frac{U_0}{I}=\frac{\pi}{\gamma h\ln\frac{R_2}{R_1}}=\frac{\pi}{10^7 10^{-3}\ln\frac{20}{12}}=6.2*10^{-4}$$

2．长方形薄片，$l=\frac{R_2+R_1}{2}\pi, b=R_2-R_1$，厚$h$

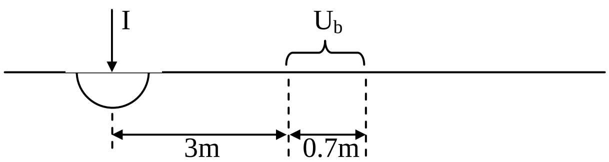
$$R=\frac{1}{r}\frac{1}{s}=\frac{1}{r}\frac{\frac{R_2+R_1}{2}\pi}{R_2-R_1}=6.2*10^{-4}$$欧，两者相等

测验题3-19

解：$\alpha=30^0+90^0+\alpha_2$，$\alpha_2$是$\gamma_2$中场量对法线的夹角，$\alpha_1=60^0$是$\gamma_1$中场量对法线的夹角

$$tg\alpha_2=\frac{tg\alpha_1\gamma_2}{\gamma_1}=0.57, \alpha_2=30^0 \quad \therefore \alpha=150^0$$

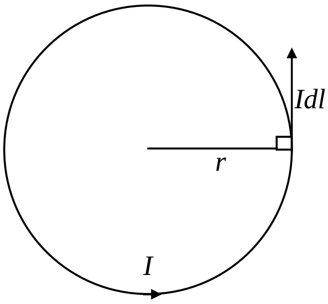
测验题3-20

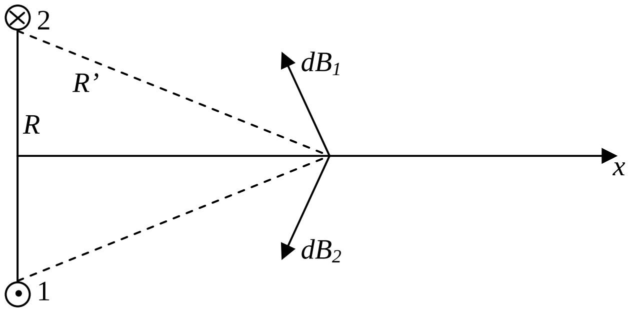


解：

$$\gamma=10^{-2}s/m, I=1000A, b=0.7m, u_b=\frac{Ib}{2\pi\gamma x^2}=\frac{1000*0.7}{2\pi*10^{-2}*3^2}=1.24*10^3V$$

习题4-16





解：B只有x分量，从平面图可见x=0时 $Id\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 垂直，x≠0时 $Id\vec{l}$ 与 $\vec{r}$ 垂直

$$\therefore dB_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl}{R'^2}\frac{R}{R'} = \frac{\mu_0 IRdl}{4\pi R'^3}, dl = Rd\alpha$$

$$\therefore B = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 IR^2}{4\pi R'^3}d\alpha = \frac{\mu_0 IR^2 2\pi}{4\pi\left(\sqrt{R^2+X^2}\right)^3} = \frac{\mu_0 IR^2}{2\left(\sqrt{R^2+X^2}\right)^3}$$

习题4-18

解：$\Phi = \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_S \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{\alpha}^0\cdot d\vec{S} = \int_d^{d+b}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}dr = \frac{\mu_0 Ia}{2\pi}\ln\frac{d+b}{d}$

习题 4-19

解：$R_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$

$R_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\pi-\alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$

任一点 $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$

$\therefore \Phi_{AB} = \int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot 2adx = \frac{\mu_0 I}{2\pi}2a\ln\frac{R_2}{R_1}$

习题 4-20

解：由安培环路定律

$0<r<R_1$ 时，取单位长，$B\cdot 2\pi r = \dfrac{\mu_0 I}{\pi R_1^2}\pi r^2$，$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi R_1^2}r$

$R_1<r<R_2$ 时，$B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$，$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

$R_2<r<R_3$ 时，$B\cdot 2\pi r = \mu_0[I - \dfrac{I\pi(r^2-R_2^2)}{\pi(R_3^2-R_2^2)}] = \mu_0[I - \dfrac{I(r^2-R_2^2)}{(R_3^2-R_2^2)}]$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{(R_3^2-r^2)}{(R_3^2-R_2^2)}$$

$r>R_3$ 时， $B\cdot 2\pi r=0$， $B=0$

习题 4-21

解：任意点： $\vec{B}=(\frac{\mu_0 I}{2\pi x}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(D-x)})\vec{j}$

习题 4-22

解：电流反向，则磁力线反向

$$\vec{B}=(\frac{\mu_0 I}{2\pi x}-\frac{\mu_0 I}{2\pi(D-x)})\vec{j}$$

习题 4-23

解： $B\cdot 2\pi r=\mu\omega I$， $B=\frac{\mu\omega I}{2\pi r}$

$$\therefore \Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu\omega Ib}{2\pi r}\cdot dr=\frac{\mu\omega Ib}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}=0.973\times 10^{-3}wb$$

习题 4-24

解：P176 例中， $\Phi=\mu_0 I(d-\sqrt{d^2-a^2})$

本题， $\Phi=\mu(\omega I)(d-\sqrt{d^2-a^2})=0.9696\times 10^{-3}wb$

习题 4-25

解：B_1、B_2 只有 t 分量，由边界条件 $H_{1t}=H_{2t}$

$$B_1=\mu_1 H_{1t}=500\mu_0\frac{0.0024}{\mu_0}=1.2T$$

习题 4-26

解： $\nabla\times\vec{H}=\begin{vmatrix}\frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\alpha & \frac{1}{r}\vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\alpha} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & \frac{I}{2\pi r}\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2} & 0\end{vmatrix}=\frac{\partial}{\partial r}(\frac{I}{2\pi r}\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2})\frac{1}{r}\vec{e}_z=\ldots$

习题 4-27

解：0 点上下的 φ_m， $\varphi_{m\infty}=0$

带 I 圆导线线圈在轴线上产生的

$$H=\frac{B}{\mu}=\frac{R^2 I}{2(R+x)^{3/2}}$$

$$\varphi_A-\varphi_B=\int_A^B \vec{H}\cdot d\vec{l}\ =I$$

习题 4-28

解：忽略边缘效应，H 是圆线

φ_m 仅与 α 有关，$\varphi_m=C\alpha+D$

令 $\alpha=0$ 是障碍面，且 $\varphi_m|_{\alpha=0}=0$

所以 $D=0$

由安培定律

$$\int_0^{2\pi} Hdl=\omega I=\int_0^{\theta} Hdl+\int_{\theta}^{2\pi} Hdl$$

在（0,2 π）中， μ ->∞，H 只有法线分量，B_{1n}=B_{2n}，知

$$H_t=\frac{\mu_0 H}{\mu}=0$$

所以 $\int_{\theta}^{2\pi} H_t dl=0$

所以 $\omega I=\int_0^{\theta} Hdl=\varphi_m|_{\alpha=\theta}-\varphi_m|_{\alpha=0}$

$\omega I=CQ$， $C=\dfrac{\omega I}{Q}$

$$\varphi_m=\frac{\omega I}{Q}\alpha$$

$$\vec{B}=\mu_0\vec{H}=-\mu_0\nabla\varphi_m=-\mu_0\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_m}{\partial\alpha}\vec{\alpha}^0=-\mu_0\frac{\omega I}{Qr}\vec{\alpha}^0$$

习题 4-29

解： $\vec{F}\ =(x^2+y^2+z^2)^{-1}\vec{e}_x$

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ (x^2+y^2+z^2)^{-1} & 0 & 0\end{vmatrix}=\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{j}-\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\vec{k}$$

习题 4-30

解：$\therefore \Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

r<a，$B = \dfrac{\mu r I}{2\pi a^2}$

r>a，$B = \dfrac{\mu I}{2\pi r}$

$$\therefore \Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^a \frac{\mu r I}{2\pi a^2} a dr + \int_a^{2a} \frac{\mu I}{2\pi r} a dr = \frac{\mu I}{2\pi a} \frac{a^2}{2} + \frac{\mu a I}{2\pi} \ln \frac{2a}{a} = \frac{\mu I a}{r\pi} [1 + 2\ln 2]$$

习题 4-32

解：$L = \dfrac{\mu_0}{\pi} l \ln \dfrac{d}{R_0} = 2.119 * 10^{-3} H$

习题 4-34

解：铜：$\mu = \mu_0$，钢：$\mu = 200\mu_0$

(1)算每公里长自感

铜 $L = L_i + L_e$

其中 $L_i = 2 \times \dfrac{\mu_0}{8\pi} \times 1000 = 1000 \times 10^{-7} H / km$

$L_e = \dfrac{\mu_0}{\pi} \ln \dfrac{D}{R_0} \cdot l = 27631 \times 10^{-7} H / km$

$L = L_i + L_e = 2.863 mH / km$

钢：$L_i = 2 \times \dfrac{\mu_0}{8\pi} \times 1000 = 20000 \times 10^{-7} H / km$

$L_e = 22815 \times 10^{-7} H / km$

$L = L_i + L_e = 22.286 mH / km$

(2)互感：根据方向判断 $\therefore \Phi = \Phi_1 + \Phi_1^{'}$

$M = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \ln \dfrac{12 \cdot 1'2'}{12' \cdot 1'2} \cdot l = 0.036 mH / km$

习题 4-35

解：$B = \dfrac{\mu \omega_1 I}{2\pi r}$，$d\Phi = \dfrac{\mu \omega_1 I}{2\pi r} dr \times 10^{-2}$

$d\Psi = \omega_2 d\Phi = \dfrac{\mu \omega_2 \omega_1 I}{2\pi r} dr \times 10^{-2}$

$$\Psi=\int_6^7\frac{\mu\omega_2\omega_1 I}{2\pi r}dr\times10^{-2}=\frac{\mu\omega_2\omega_1 I}{2\pi}\times10^{-2}\ln\frac{7}{6}$$

$$M=\frac{\mu\omega_2\omega_1 I}{2\pi}\times10^{-2}\ln\frac{7}{6}=0.0148H$$

习题 4-36

解：由题意得

$$W=\frac{1}{2}LI^2=\oiiint_v\frac{1}{2}\mu H^2 dV$$

$$=\int_0^{R_1}\frac{1}{2}\mu_0(\frac{Ir}{2\pi R_1^2})^2 2\pi rdr+\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\mu_0(\frac{I}{2\pi r})^2 2\pi rdr+\int_{R_2}^{R_3}\frac{1}{2}\mu_0(\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2{}^2}I)^2 2\pi rdr=\ldots$$

$$L=\frac{W}{I^2/2}=\ldots$$

习题 4-37

解：$M_\alpha=\frac{\partial W_m}{\partial\alpha}|_{I=C}$

$$W_m=MI_1I_2=M_{\max}I_1I_2\cos\alpha$$

$$\therefore M_\alpha=-M_{\max}I_1I_2\sin\alpha$$

$\alpha=45^o$， $\therefore M_\alpha=-0.035\times10^{-3}N\cdot m$

习题 4-38

解：$W=\oiiint_v\frac{1}{2}\mu H^2 dV=\int_0^{R_1}\frac{1}{2}\mu_0(\frac{Ir}{2\pi R_1^2})^2 2\pi rdr=\frac{1}{2}\mu_0 I^2\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

$V=\pi r^2 l$， $\frac{dV}{dR_1}=2\pi R_1 l$

$$f_g=\frac{\partial W_m}{\partial V}|_{I=C}=\frac{\mu_0 I^2}{4\pi}\frac{R_1}{R_2}\frac{-R_2}{R_1^2}\frac{dR_1}{dV}=\frac{-\mu_0 I^2}{8\pi^2 R_1^2}$$

测验题 4-39

解：将其分段考虑，与 0 点在一条线上的两直线段上的电流不在 0 点产生磁场，仅两段圆弧上的电流在 0 点产生磁场。

据 P173 习题知，单匝线圈在轴心 *x=0* 处产生磁感应强度：

$$B=\frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2+o^2)^{3/2}}=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

则半圆线圈产生 $B=\frac{\mu_0 I}{4R}$

本题：$B=\frac{\mu_0 I}{4a}+\frac{\mu_0 I}{4b}-\frac{\mu_0 I}{4}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$，方向垂直纸面向里

测验题 4-41

解：除与缺口相对应的 d 段外，上下两段中的电流在 0 点产生的磁感应强度相互抵消。

$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}=\frac{\mu_0 da}{2\pi R}$$

(1)叠加：将缺口补齐+仅缺口通以反向电流

$$B_0=B_{01}+B_{02}=\frac{\mu_0 da}{2\pi R}$$

测验题 4-42

解：叠加法，将内部用同向电流填满+仅内部通反向电流

填满后，$I'=I+\frac{I\cdot\pi R_1^2}{\pi(R_2^2-R_1^2)}B_{02}=\frac{IR_2^2}{R_2^2-R_1^2}$

则 $\vec{A}_o=\frac{\mu_0 I'}{2\pi}\ln\frac{x_0}{r}\vec{j}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\ln\frac{R_2}{r}\vec{j}$

通反向电流时，$\vec{A}_o=\frac{\mu_0 I''}{2\pi}\ln\frac{x_0}{r}\vec{j}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\ln\frac{R_2}{r}\vec{j}$

所以总和：$\vec{A}_o=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{R_2^2}{R_2^2-R_1^2}\ln\frac{R_2}{r}\vec{j}-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{R_1^2}{R_2^2-R_1^2}\ln\frac{R_2}{r}\vec{j}=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\frac{R_2}{r}\vec{j}$

测验题 4-44

解：先算 $\Phi=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{2\pi R}bdR=\frac{\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$

$$\Psi=\omega\Phi=\frac{\omega\mu_0 Ib}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

$$M=\frac{\Psi}{I}=\frac{\omega\mu_0 b}{2\pi}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

测验题 4-45

解：$\omega'_m=\frac{1}{2}\mu H^2$

$H_{in}=\frac{1}{2\pi r}\frac{\pi r^2 I}{\pi R^2}=\frac{rI}{2\pi R^2}$，所以 $\omega'_{\min}=\frac{1}{2}\mu(\frac{rI}{2\pi R^2})^2$

$H_{out}=\frac{I}{2\pi r}$，所以 $\omega'_{mout}=\frac{1}{2}\mu(\frac{I}{2\pi r})^2$

测验题 4−46

解： 转矩 $=\dfrac{\partial W_m}{\partial \alpha}\Big|_{I=C}=5.6\cos(\alpha-40^o)I_1I_2=5.6\cos(\alpha-40^o)I^2$

$I_1=I_2=I$

而 $5.6\cos(\alpha-40^o)\times10^{-6}I^2=M_{f1}=2.2\times10^{-5}\alpha$

$$I^2=\frac{2.2\times10^{-5}\alpha}{5.6\cos(\alpha-40^o)\times10^{-6}}$$

5-13 解：取直角坐标系 z 轴方向垂直于矩形平面，则炭块内电位函数与 z 无关。其所满足的拉氏方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

其解为

$$\varphi=(D_1x+D_2)(F_1y+F_2)+\sum_{m=1}^{\infty}(A_{3m}\sin k_m x+A_{4m}\cos k_m x)\cdot(B_{3m}shk_m y+B_{4m}chk_m y)$$

其边界定解条件为

$$y=0 \quad 0\le x\le a\text{处} \quad \varphi=0$$

$$y=b \quad 0\le x\le a\text{处} \quad \varphi=0$$

$$x=a \quad 0<y<b\text{处} \quad \varphi=U_0$$

而当 $x=a \quad 0<y<b$ 处　有 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0$，这是因为炭块左端边界线为电流密度线（它们分别流向上下银质极板）。

将上述边界条件分别代入电位函数表达式，可求待定常数，从而求得电位解。

5－14　解：取圆柱体轴线方向为 z 方向，则圆柱体外的电位函数及电场强度与 z 轴无关。其满足的拉氏方程为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2}=0$$

其一般解为

$$\varphi=(m_1+m_2\ln r)+\sum_{m=1}^{\infty}(A_n\cos n\alpha+B_n\sin n\alpha)\cdot(C_n r^n+Dr^{-n})$$

其定解边界条件为

$$r=a \qquad \varphi=0$$

$$r\to\infty \qquad \varphi=-Er\cos\alpha+\varphi_0$$

前者为均匀场 E_0 所产生的电位，后者则是圆柱导体所带电量产生的电位。

当 $r=a$ 处

有

$$\tau=-\int_0^1\int_0^{2\pi}\varepsilon_0\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}ad\alpha dz$$

将定解条件逐一代入电位函数的解式，则可求得待定常数，并舍去非解项，最终求得电位函数解。

5－15　解：取导体球心为原点，平行于 $\bar{E}_0$ 方向的轴为 r，在球心坐标系下，空间任一点的

电位函数φ与α无关，其满足的拉氏方程为：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)=0$$

运用分离变量法，令

$$\varphi(r,\theta)=R(\theta)\Theta(\theta)$$

代入上述方程，得到两个常微分

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)=-\frac{1}{\Theta\sin\theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)=\lambda$$

要使得$0\le\theta\le\pi$的区间上的解析式为有界函数，必使$\lambda=n(n+1),n=1,2,\ldots$，故得下述两常微分方程

$$\frac{1}{\Theta\sin\theta\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+n(n+1)\Theta=0\quad n\text{阶勒让德方程}$$

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)-n(n+1)R=0\quad\text{欧拉型方程}$$

前者的解为$P_n(\cos\theta)$称为勒让德多项式，是$\cos\theta$的n次多项式。例如$P_0(\cos\theta)=1$，$P_1(\cos\theta)=\cos\theta$，$P_2(\cos\theta)=\frac{1}{2}(3\cos^2\theta-1),\ldots$；后者的解为$R(r)=A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}$

故得电位函数解为：

$$\varphi(r,\theta)=R(\theta)\Theta(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_nr^r+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

给定的边界条件为

$$r=a\qquad\varphi{=}0$$

$$r\to\infty\qquad\varphi{=}-E_0r\cos\theta$$

有

$$\left.\varphi\right|_{r\to\infty}=\sum_{n=0}^{\infty}\left.\left(A_nr^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)\right|_{n\to\infty}P_n(\cos\theta)$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}A_nr^nP_n(\cos\theta)=-E_0r\cos\theta$$

得$A_1=-E_0,A_n=0(n\ne1)$

所以

$$\varphi=-E_0r\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$
$$=-E_0r\cos\theta+\frac{B_0}{r}P_0(\cos\theta)+\frac{B_1}{r^2}P_1(\cos\theta)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

又由

$$\varphi\big|_{r=a}=-E_0 a\cos\theta+\frac{B_0}{a}+\frac{B_1}{a^2}(\cos\theta)+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{B_n}{a^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$=\frac{B_0}{a}+\left(\frac{B_1}{a^2}-E_0 a\right)\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{B_n}{a^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)=0$$

可得 $B_0=0,\frac{B_1}{a^2}-E_0 a=0,B_1=a^3E_0,\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{B_n}{a^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta)=0,B_n=0(n\neq 0,1)$

故解得求外空间电位的解为

$$\varphi=-E_0 r\cos\theta+\frac{a^3E_0}{r^2}\cos\theta$$

习题 6−13

解： $D=\varepsilon_0 E=\varepsilon_0\dfrac{U}{d}=\varepsilon_0\dfrac{U_m\sin\omega t}{d}$

$\sigma_D=\dfrac{\partial D}{\partial t}=\varepsilon_0\dfrac{\omega U_m\cos\omega t}{d}$

$\sigma_{D\max}$ 发生在 $\omega t=k\pi \qquad k=0,2,4,6,\ldots$

$D_{\max}$ 发生在 $\omega t=k\pi/2 \qquad k=1,3,5,7,\ldots$

习题 6−14

解： $\oint_l \vec{H}\cdot d\vec{l}=\iint_S\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$

$2\pi RH=\dfrac{\varepsilon_0\omega U_m}{d}\cos\omega t\cdot\pi R^2$

$H=\dfrac{\varepsilon_0 R\omega U_m}{2d}\cos\omega t$

习题 6−15

解： $D=\dfrac{\tau}{2\pi R_1}$

$U=\int_{R_1}^{R_2}\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}dr$

$\tau=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 U_m}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}\cos\omega t$

$D=\dfrac{2\pi\varepsilon_0\times 240}{2\pi\ln\dfrac{R_2}{R_1}}$

$\sigma_D=\iint_S\dfrac{\partial D}{\partial t}dS=\ldots$

习题 6−16

解： $e=\dfrac{-d\Phi}{dt}=-\Phi_m\cos\omega t$

习题 6−17

解： $\Phi=SB\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{6})=SB_m\sin 314t\cdot\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{6})$

因为转速 n=3000 转/分=3000/60=50

所以 f=50， ω=314

$$\Phi = SB_m \sin 314t \cdot \cos(314t+\frac{\pi}{6}) = \frac{SB_m}{2}[\sin(628t+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}]$$

$$e = \frac{-d\Phi}{dt} = \frac{SB_m 628}{2}\sin(628t-\frac{\pi}{3})$$

习题 6-18

解：取盘的径向元

$$e = \int_0^R BVdR = \int_0^R B\omega RdR = \frac{B\omega}{2}R^2$$

习题 6-20

解：由能量守恒关系式：

$$\oiiint_V (\frac{\partial W}{\partial t} + \gamma E^2 + \rho \vec{V}\cdot\vec{E})dV = -\oiiint_V (\nabla\cdot\vec{s})dV$$

导线内部无运流电流，恒流场 $\frac{\partial W}{\partial t}=0$

所以 $\gamma E^2 = -\nabla\cdot\vec{s}$ ，证毕

测验题 6-28

解：$i = i_m \sin\omega t$ ，则 $B = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi x}\sin\omega t$

(1) 仅因 i 变化而产生的 e

$$e = \frac{-d\Phi}{dt} = -\iint_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \int_a^{a+c}\frac{-\mu_0 I_m\omega}{2\pi x}\cos\omega t\cdot bdx = \frac{-\mu_0 I_m \omega b}{2\pi}\cos\omega t \ln\frac{a+c}{a}$$

(2) 因运动切割磁力线产生的 e

$e_a = BVl = \frac{\mu_0 I_m \sin\omega t}{2\pi a}bv$ ，与 I 同向

$e_{a+c} = BVl = \frac{\mu_0 I_m \sin\omega t}{2\pi(a+c)}bv$ ，与 I 反向

所以总 $e = \frac{\mu_0 I_m \omega b}{2\pi}\cos\omega t\ln\frac{a+c}{a} + \frac{\mu_0 I_m bv\sin\omega t}{2\pi}(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+c})$

测验题 6-30

解：略去导线损耗，为理想导体，内部 E=0，H=0。

算出 ε 中的电场和磁场。

$\vec{E} = \frac{U}{R\ln\frac{R_2}{R_1}}\vec{R}_0$ ，射线状

$\vec{H} = \frac{I}{2\pi R}\vec{\alpha}_0$ ，圆

$$\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{U}{R\ln\frac{R_2}{R_1}}\frac{I}{2\pi R}\vec{k}$$

经介质 ε 部分传播的电磁功率

$$P=\iint_S \vec{E}\times\vec{H}\cdot d\vec{S}=\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2}\frac{U}{R\ln\frac{R_2}{R_1}}\frac{I}{2\pi R}Rd\alpha dR=\frac{UI}{2\pi\ln\frac{R_2}{R_1}}2\pi\ln\frac{R_2}{R_1}=UI$$

测验题 6-31

解： 在两导线之间 $\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}$

(1)求电场要用平行双电轴法

$$\frac{D}{2}=\sqrt{x_0^2-R_0^2}=\sqrt{(1.5)^2-(10\cdot10^{-3})^2}\approx1.5$$

所以任意点： $\vec{E}=(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(x+\frac{D}{2})}-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0(\frac{D}{2}-x)})\vec{i}$

(2) 求磁场

$$\vec{H}=(\frac{I}{2\pi\varepsilon_0(x+\frac{D}{2})}-\frac{I}{2\pi\varepsilon_0(\frac{D}{2}-x)})(-\vec{k})$$

$$\therefore\vec{S}=\vec{E}\times\vec{H}=\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\frac{I}{2\pi}(\frac{1}{x+\frac{D}{2}}-\frac{1}{\frac{D}{2}-x})\vec{j}$$

习题 7−9

解：$E = HZ_c = H\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}} = 53\sqrt{\dfrac{4\pi\times10^{-7}}{4\times8.58\times10^{-12}}} = 9985.5V/m$

习题 7−10

解：$\because E(x,t) = E_m\sin(\omega t - \beta x + \psi)$

$\because t = 0, x = 0$ 时， $E = E_m = 2mV/m$

$\therefore \psi = \dfrac{\pi}{2}, \beta = \dfrac{\omega}{v} = 0.209$

$\therefore E(x,t) = 2\times10^{-3}\sin(2\pi\times10^7 t - 0.209x + \pi/2)$

$\therefore H(x,t) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}2\times10^{-3}\sin(2\pi\times10^7 t - 0.209x + \pi/2) = 1.06\times10^{-5}\sin(2\pi\times10^7 t - 0.209x + \pi/2)$

$\because t = 1\times10^{-6}, x = 65m$ 时，E,H,S 均可求

8-2 什么是传播的 TM 模和传播的 TE 模？矩形波导中能存在的 TM 模有多少？
答：设波的传播方向为 z 向，如果 $E_z\neq 0$，$H_z=0$，称为磁场纯横向波，一种这样的波对应一种 TM 模。如果 $E_z=0$，$H_z\neq 0$，称为电场纯横向波，一种这样的波对应一种 TE 模。矩形波导中存在的 TM 模可以表示为 TM_{mn}，其中 m、n 均不为 0。

8-3 波导截止频率的表达式如何？若波导中传播的工作频率高于截止频率时，该波能正常传输吗？

答：截止频率：$f_c=\dfrac{c}{\lambda_c}=\dfrac{ck_c}{2\pi}=\dfrac{c}{2\pi}\sqrt{(\dfrac{m\pi}{a})^2-(\dfrac{n\pi}{b})^2}$

当传播的工作频率高于截止频率时，该波可以正常传输。

8-13 矩形波导的横截面尺寸为 $a\times b=23\times 10\text{mm}^2$，波导内充满空气，传输的是 10GHz 的 TE_{10} 波。试求：
（1）截止波长，波导波长及波速。
（2）如果增大频率，说明上述参量的变化？
（3）如果改变波导尺寸 a 和 b，则上述参量如何变化？
解：（1）$\lambda=c/f=30mm$

$\because \lambda_{cTE10}=2a=46\text{mm}$，$\lambda_{cTE20}=a=23\text{mm}$

$\therefore$波导中仅有 TE10 模式

截止波长 $\lambda_c=46\text{mm}$，$\beta=\sqrt{k^2-k_c^2}=\sqrt{(\dfrac{2\pi}{\lambda})^2-(\dfrac{\pi}{a})^2}=158.77$

$\therefore$波速 $v_p=2\pi f/\beta=3.96\times 10^8\ m/s$，波导波长 $\lambda_g=2\pi/\beta=39.6\text{mm}$

（2）$$\because v_p=\frac{2\pi f}{\beta}=\frac{2\pi f}{\sqrt{k^2-k_c^2}}=\frac{2\pi f}{\sqrt{(\frac{2\pi}{\lambda})^2-(\frac{\pi}{a})^2}}=\frac{2\pi f}{\sqrt{(\frac{2\pi f}{c})^2-(\frac{\pi}{a})^2}}$$

$$\therefore \frac{dv_p}{df}=\frac{-2\pi^3}{a^2(\sqrt{(\frac{2\pi f}{c})^2-(\frac{\pi}{a})^2})^3}<0$$

增大频率，会使波速减小。

同理 $$\frac{d\lambda_g}{df}=\frac{-8\pi^3 f}{c^2(\sqrt{(\frac{2\pi f}{c})^2-(\frac{\pi}{a})^2})^3}<0$$

增大频率，会使波导波长减小。
（3）增大 a，会使截止波长增大，β 增大，波速减小，波导波长减小。增大 b，无影响。

8-16 某一填充空气的波导，其尺寸为 $a\times b=22.9\times 10.2\text{mm}^2$，传输 TE_{10} 波，工作频率 $f=9.375\text{GHz}$，空气的击穿场强 $E_{max}=30kV/cm$，求波导内能传输的最大功率。
解：$\lambda=c/f=3\times 10^8/9.375\times 109=3.2cm$

将 a、b 以 cm 为单位代入公式计算，得：

$$P_{br0} = \frac{abE_{br}^2}{480\pi}\sqrt{1-(\frac{\lambda}{2a})^2} = 997kW$$

9-2 写出传输线的波动方程？传输线有哪几种工作状态？

答：传输线的波动方程包括：

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2}$$

传输线有行波工作状态、驻波工作状态和行驻波工作状态。

9-4 分别写出传输线入射波和反射波的电压、电流方程。

答：入射波电压：$u_+(z,t)=A_1e^{+\alpha z}cos(\omega t+\beta z)$

反射波电压：$u_-(z,t)=A_2e^{-\alpha z}cos(\omega t-\beta z)$

入射波电流：$i_+(z,t)=A_1e^{+\alpha z}cos(\omega t+\beta z)/Z_0$

反射波电流：$i_-(z,t)=A_2e^{-\alpha z}cos(\omega t-\beta z)/Z_0$

9-7 写出输入阻抗和反射系数之间的关系表达式。

答：$Z_{in}(z) = Z_0 \dfrac{1+\Gamma(z)}{1-\Gamma(z)}$

9-14 有一传输频率为 3GHz 的信号通过一均匀无耗传输线时，已知其特性阻抗 Z_0=100Ω，终端负载 Z_l=100+j100Ω，试求：

（1）传输线上驻波系数？

（2）离终端$10cm$处的反射系数？

（3）离负载端$12.5cm$处的输入阻抗？

解：（1） $\Gamma_l = \dfrac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0} = \dfrac{100j}{200+100j} = \dfrac{2j+1}{5} = 0.4472\angle 63.43^\circ$

$$\rho = \frac{1+|\Gamma_l|}{1-|\Gamma_l|} = \frac{3.236}{1.236} = 2.618$$

（2）∵λ=c/f=10cm

∴离终端 10cm 处恰好是一个波长的距离，反射系数

$$\Gamma(10cm) = \Gamma_l = 0.4472\angle 63.43^\circ$$

（3） 离终端 10cm 处是 5/4 个波长的距离，根据 1/4 波长阻抗变换特性，

$$Z_{in}(12.5cm) = Z_{in}(2.5cm) = Z_0^2 / Z_l = 50 - j50 \quad \Omega$$

9-16 传输线的特性阻抗为 50Ω，用测量线测得线上电压最大值为 U_{max}=100mV，最小值为 U_{min}=20mV，邻近负载的第一个电压波节点到负载的距离为 l_{min1}=0.33λ，求负载的阻抗。

解：∵驻波系数 $\rho=U_{max}/U_{min}=5$

$$\therefore |\Gamma_l| = \frac{\rho-1}{\rho+1} = \frac{2}{3}$$

∵ $l_{min1}=(\lambda\varphi_l)/(4\pi)+\lambda/4$

∴ $\varphi_l=\pi/3$

$$\therefore Z_l = Z_0 \frac{1+\Gamma_l}{1-\Gamma_l} = 35.7+74.23j \quad \Omega$$