

# Estimador de Estado e Filtro de Kalman

Fábio S. El Hage

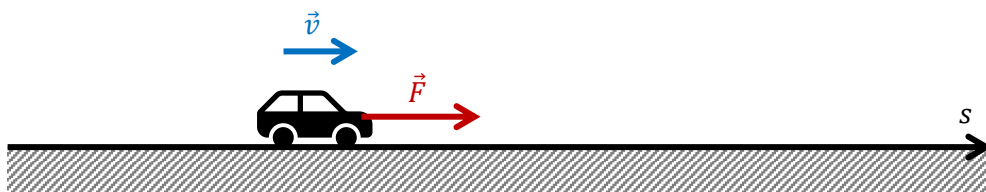
É comum na engenharia que saibamos modelar um sistema físico a partir de equações diferenciais, as quais descrevem o comportamento do sistema no tempo. Também é corriqueiro que possamos obter medições sobre esse mesmo sistema por meio de sensores, os quais podem medir variáveis como temperatura, pressão, posição, velocidade, aceleração etc.

Duas questões fundamentais surgem quando podemos estimar e, ao mesmo tempo, medir variáveis no tempo (chamadas de estados de um sistema): i) quando há diferenças entre a estimativa e a medição, em qual delas confiar? ii) quando há uma ou mais variáveis não medidas (estados não mensuráveis), seja por falta de sensores ou pela impossibilidade física de medi-las, a medição das variáveis mensuráveis pode ajudar a melhorar a estimativa de variáveis não mensuráveis? Para responder a ambas as perguntas, lançaremos mão de um processo denominado estimador de estado e, em seguida, abordaremos um estimador de estados especial, muito conhecido na engenharia por Filtro de Kalman.

Em resumo, um estimador de estados pode ser definido como um processo matemático recursivo, que tem por função determinar um ou mais estados de um sistema ao longo do tempo, “fundindo” estimativas de um modelo matemático e medições de alguns estados, o que tornará a estimativa de cada estado a mais precisa possível. Para compreender esse processo, assim como o Filtro de Kalman, lançaremos mão de um exemplo bastante intuitivo: um carro acelerando em uma pista.

## Sistema Físico com equações diferenciais lineares

Consideremos o seguinte sistema físico simplificado: um carro de massa  $m$  que acelera para a direita em uma pista, sendo a força propulsora  $F$  constante. Nesta primeira versão de nosso sistema, que é irreal, também vamos desprezar a resistência do ar.



Sendo  $F$  a única força que age no carro, podemos escrever as seguintes equações diferenciais do movimento:

$$\frac{ds}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

Usando o método de Euler, podemos discretizar as equações diferenciais usando as seguintes equações a diferenças:

$$s(t + \Delta t) = s(t) + v(t) \cdot \Delta t$$

$$v(t + \Delta t) = v(t) + \frac{F}{m} \cdot \Delta t$$

Para implementarmos a solução numérica dessas equações a diferenças, vamos substituir o instante de tempo  $t$  pelo contador  $k$ , sendo  $t = k\Delta t$ .

$$s_{k+1} = s_k + v_k \cdot \Delta t$$

$$v_{k+1} = v_k + \frac{F}{m} \cdot \Delta t$$

As equações do sistema acima podem ser reescritas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} s_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \end{bmatrix} F$$

Comumente, expressa-se a equação acima usando-se uma simbologia compacta, como na equação abaixo.

$$X_{k+1} = AX_k + Bu$$

Na equação,  $X_{k+1} = \begin{bmatrix} s_{k+1} \\ v_{k+1} \end{bmatrix}$ ,  $X_k = \begin{bmatrix} s_k \\ v_k \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{m} \end{bmatrix}$  e  $u = F$ .

Vamos ainda supor que, neste sistema, possamos medir apenas a variável  $s_k$  (a posição do carro), de modo que a medição  $y_k$  seja:

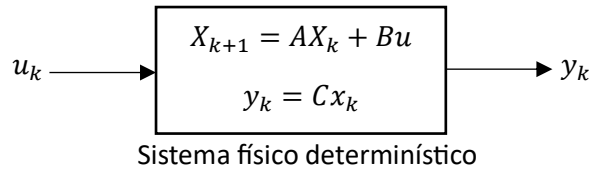
$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_k \\ v_k \end{bmatrix}$$

A matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$  é denominada matriz  $C$ . Deste modo, podemos representar o sistema na forma matricial:

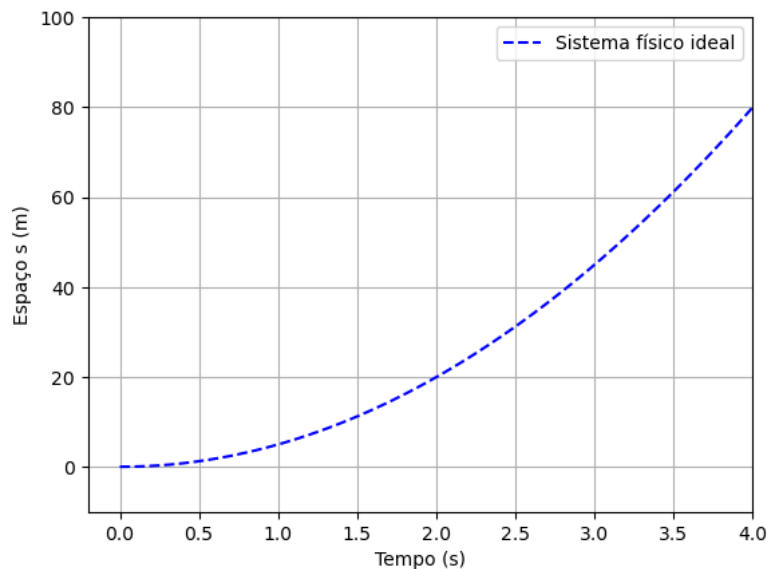
$$X_{k+1} = AX_k + Bu$$

$$y_k = CX_k$$

Cujo diagrama pode ser representado a seguir, sendo  $u_k$  a entrada e  $y_k$  a saída do sistema (variável medida).



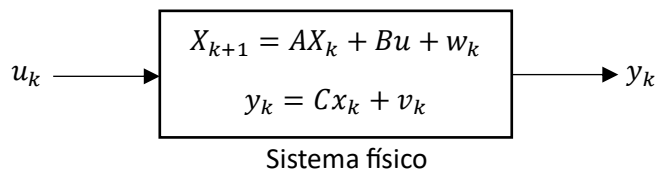
Simulando esse sistema físico simplificado e idealizado, podemos encontrar a saída  $y(t)$ , que é igual ao espaço percorrido  $s(t)$ , conforme ilustra a figura a seguir. Perceba que esse sistema físico é determinístico, resultando em uma esperada função parabólica de  $s(t)$ , uma vez que se trata de um movimento uniformemente acelerado.



Contudo, sabemos que um sistema físico mais realista está sujeito a ruídos de dois tipos:

- Ruídos de processos
- Ruídos de medição

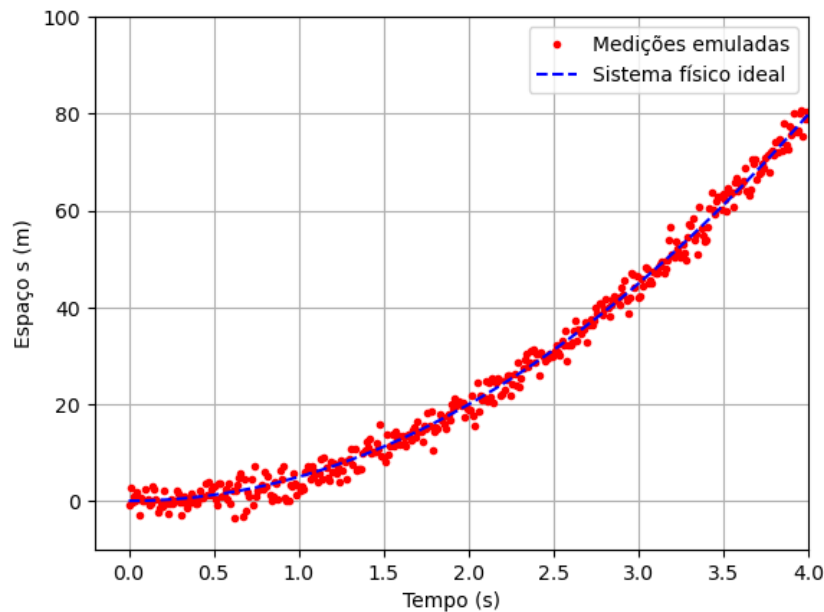
Em linha com o processo de estimação denominado Filtro de Kalman, o qual veremos a seguir, considera-se que ambos os ruídos são ruídos brancos gaussianos, o que significa dizer que são valores sequenciais aleatórios não correlacionados no tempo, tendo média zero e variância finita. Assim, vamos atualizar nosso sistema físico adicionando ambos os ruídos nas equações que o descrevem. Observe o diagrama a seguir.



No novo sistema físico,  $w_k$  é a variável proveniente de um sorteio, a cada passo da iteração, com distribuição normal de média zero e desvio  $\sigma_w$ . Por sua vez,  $v_k$  é uma variável gerada pelo sorteio com distribuição normal de média zero e desvio padrão  $\sigma_y$ . Fazendo uma nova simulação do sistema físico, agora considerando os ruídos supracitados, sendo adotados  $\sigma_w = \begin{bmatrix} 0,0001 \\ 0,01 \end{bmatrix}$  (na forma matricial, significa que 0,0001 é o desvio padrão do espaço e 0,01 o da velocidade a cada passo  $k$ ) e  $\sigma_y = 2$  (desvio padrão da medição), obteremos um resultado não determinístico (dito estocástico).

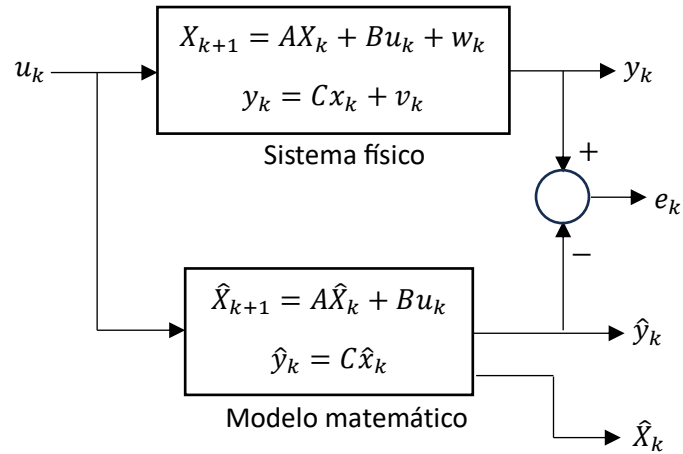
Em relação aos desvios do ruído de processo, faz sentido adotar um desvio para a posição bem menor que o da velocidade, pois a variação da posição depende apenas da velocidade no instante anterior. Já a variação da velocidade depende de distúrbios externos (forças), como imperfeições no asfalto, declives, vento etc. O desvio da medição  $y$ , por sua vez, é bem maior que os desvios dos ruídos de processo, indicando que os sensores de posição têm erros de medição mais significativos (por exemplo, o erro de posição de um sistema GPS é da ordem de metros).

A figura a seguir ilustra a simulação do sistema físico não determinístico (estocástico). Note que estamos emulando um sistema físico a partir do qual faríamos medições da posição no tempo, ou seja, com propósitos didáticos, estamos criando um sistema “real” em computador, sabendo que, no uso prático dos estimadores ou do Filtro de Kalman, teríamos apenas as medições proveniente desse sistema.



## Estimador de estado em malha aberta

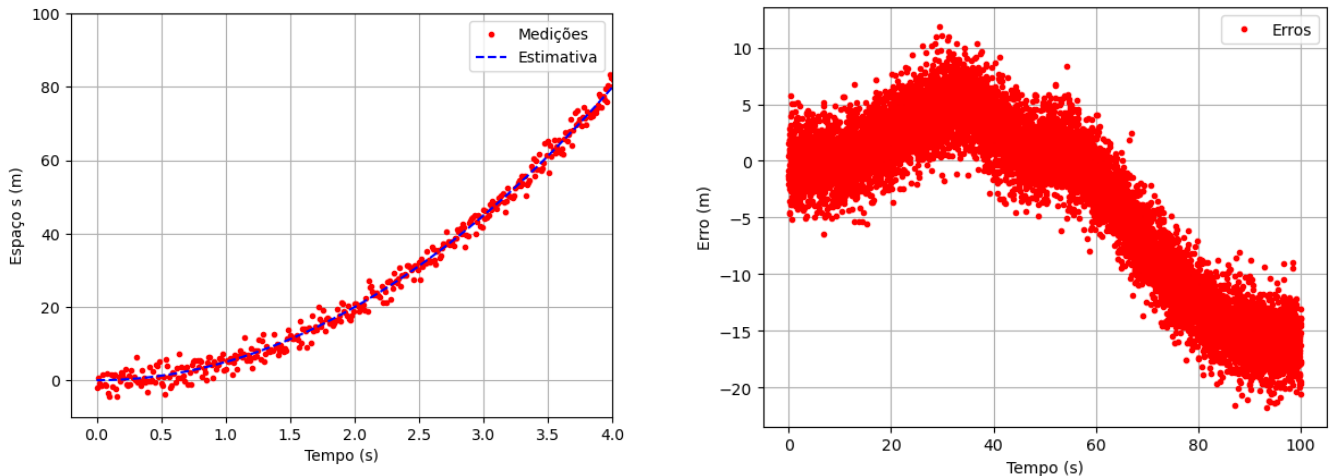
Temos agora condições de propor o desenho de um estimador de estado, que será desenhado para estimar os estados (posição e velocidade) do sistema físico criado. Como conhecemos o sistema, sabemos descrevê-lo em equações diferenciais e a diferenças (discretizadas). Ressalta-se uma vez mais que, no mundo real, não precisaríamos emular um modelo físico, apenas obter dele as medições necessárias). Tratando-se do sistema físico descrito, as equações do modelo matemático serão exatamente as mesmas usadas na emulação do sistema. Assim, considere o seguinte diagrama de blocos.



Note que agora os estados estimados do sistema são representados por  $\hat{X}_k$ , enquanto o real estado continua sendo  $X_k$ . Quando comparamos a medição  $y_k$  com a estimativa  $\hat{y}_k$ , podemos calcular o erro entre a estimativa e a medição, denominado  $e_k$ . Ou seja:

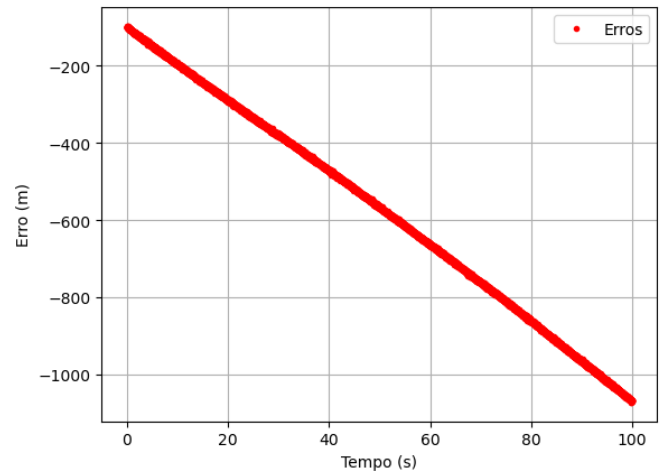
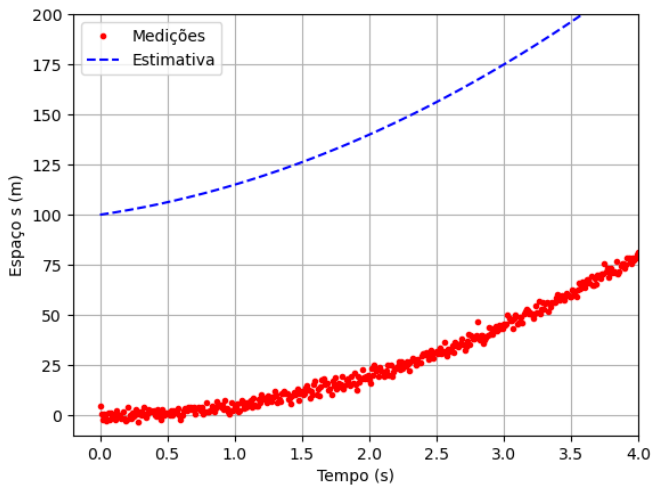
$$e_k = y_k - \hat{y}_k$$

Para o exemplo do sistema físico do carro acelerando com força constante, os erros obtidos pela simulação são observados no gráfico da direita, a seguir. Note que os erros não têm média zero, o que indica um viés na estimativa quando comparada às medições<sup>1</sup>.



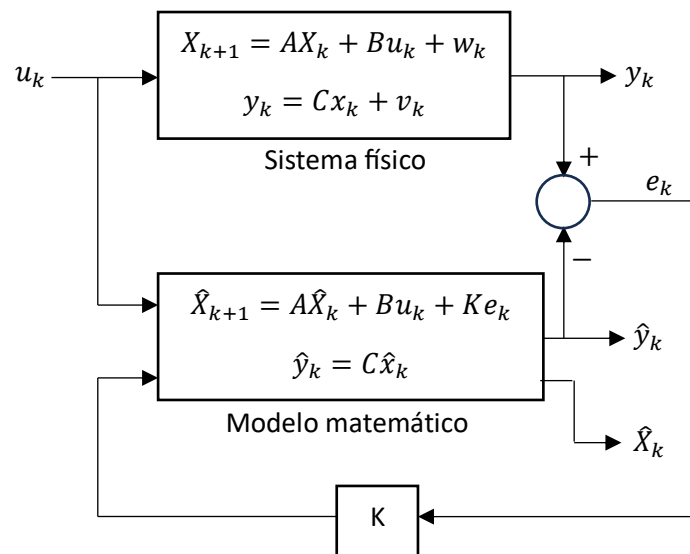
Seria muito interessante que esses erros convergissem para uma média igual a zero, eliminando o viés da estimativa, o que faremos na próxima sessão. Antes de analisarmos o estimador em malha fechada, é importante notar que o estimador em malha aberta depende sobremaneira do estado inicial do sistema. Imaginemos que, por um erro, o estimador iniciasse com estados  $\hat{s}(0) = 100\text{ m}$  e  $\hat{v}(0) = 10\text{ m/s}$ , enquanto o sistema físico (o carro real) partisse do repouso ( $v(0) = 0$ ) e do ponto  $s(0) = 0$ . Os gráficos a seguir ilustram a diferença de viés entre a estimativa e as medições, o que não pode ser corrigido ao longo do processo, a menos que reiniciemos o modelo matemático com valores iniciais próximos à medição.

<sup>1</sup> Medições aqui são geradas pela simulação do “sistema físico”



## Estimador de estado em malha fechada

Partindo do estimador de estado em malha aberta, mas agora usando os próprios erros para calcular as estimativas dos estados  $X_k$  (no caso, a posição e a velocidade), podemos alterar a dinâmica do modelo matemático. Observe o diagrama da figura a seguir.



Alteramos o modelo matemático para que a estimativa dos próximos estados dependesse não somente da dinâmica do sistema (dada pelo modelo matemático), mas também dos erros entre a estimativa  $\hat{y}_k$  e a medição  $y_k$ , multiplicados por um ganho  $K$  (por ora, um número constante e arbitrário). Matematicamente, podemos escrever:

$$\hat{X}_{k+1} = A\hat{X}_k + Bu_k + K(y_k - \hat{y}_k)$$

Como o sistema físico pode ser descrito por:

$$X_{k+1} = AX_k + Bu_k + w_k$$

Subtrairemos a segunda equação da primeira, obtendo:

$$X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} = A(X_k - \hat{X}_k) - K(y_k - \hat{y}_k) + w_k$$

Como  $y_k = CX_k$  e  $\hat{y}_k = C\hat{X}_k$ , podemos escrever:

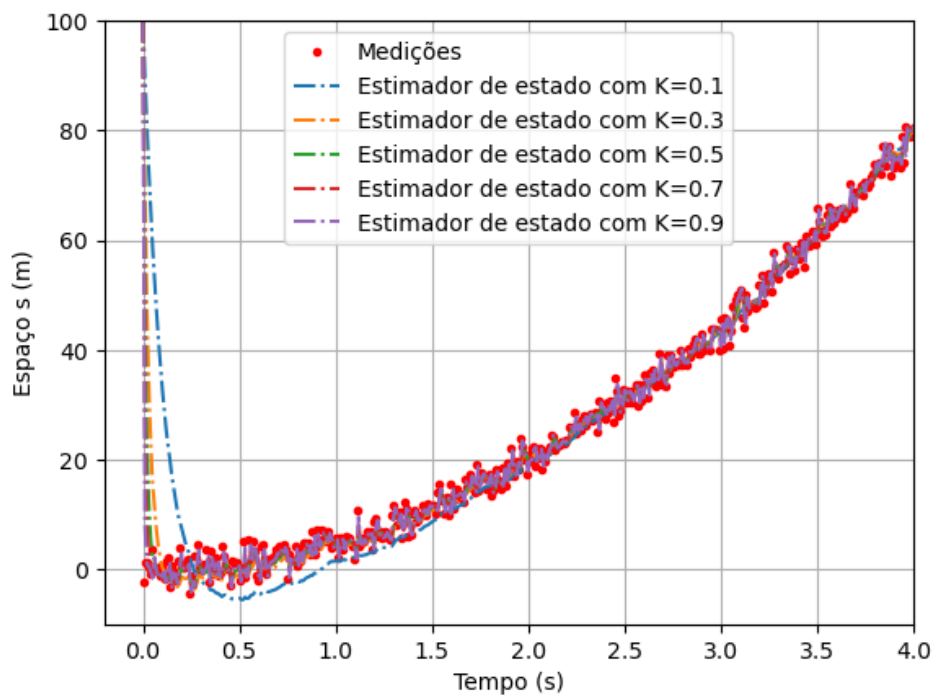
$$X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} = A(X_k - \hat{X}_k) - K(CX_k - C\hat{X}_k) + w_k$$

$$X_{k+1} - \hat{X}_{k+1} = (A - KC)(X_k - \hat{X}_k) + w_k$$

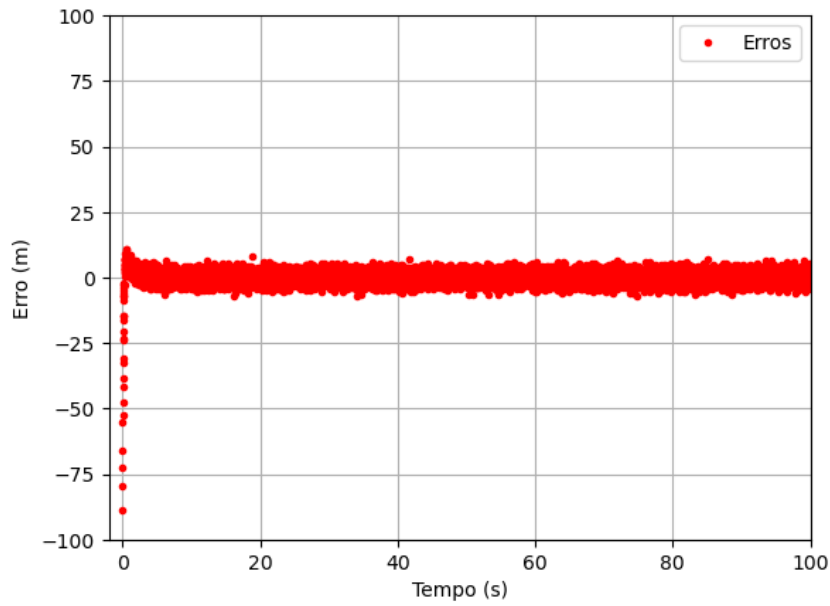
$$E_{k+1} = (A - KC)E_k + w_k$$

Na equação acima,  $E_k$  representa o erro de estimação dos estados, pois é a subtração de  $X_k$  e  $\hat{X}_k$ . Como  $C = [1 \ 0]$ , a subtração das matrizes  $A - KC$  resultará em uma matriz  $\tilde{A}$  cujos elementos da primeira coluna são subtraídos do valor  $K$ . Ao adotarmos  $0 < K < 1$ , teremos uma condição na qual os erros  $E_{k+1}$  serão sempre menores do que os erros  $E_k$ , o que fará com que a sequência de erros de estado convirja para zero, resultado muito desejado em um estimador de estados. O termo  $w_k$  não interferirá na dinâmica de convergência do erro por tratar-se de um ruído com distribuição gaussiana de média zero (ruído branco).

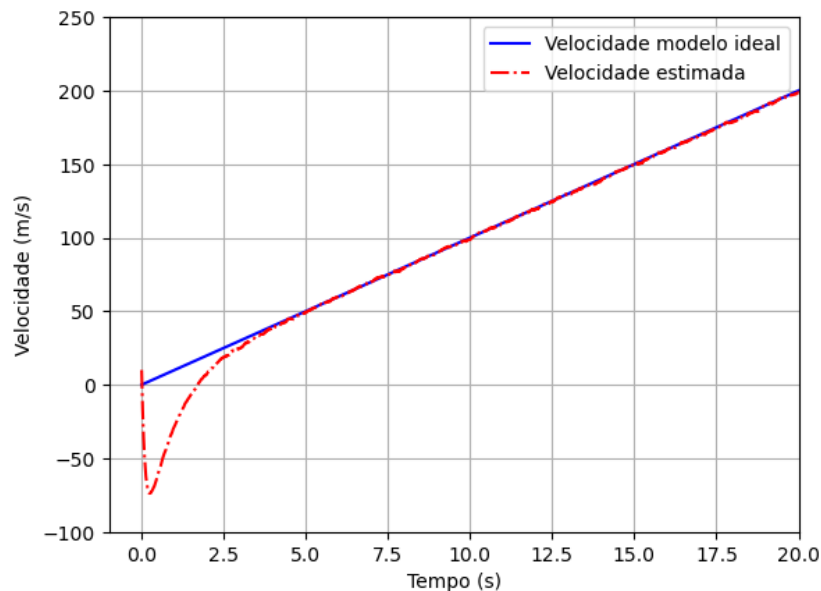
Simulando o estimador de estados em malha fechada com valores de  $K$  entre 0,1 e 0,9, observamos que, mesmo iniciando o estimador em posição e velocidade muito diferentes das medições iniciais do sistema físico ( $\hat{s}(0) = 100m$  e  $\hat{v}(0) = 10m/s$ ), ao longo do tempo as estimativas de  $\hat{s}(t)$  convergem para os valores medidos.



Note, no gráfico da figura a seguir, com  $K = 0,1$ , que os erros  $e_k$  convergem para média zero, restando apenas a variabilidade relativa aos erros de processo e medição.



Por fim, no gráfico a seguir é plotada a estimativa da velocidade em comparação à velocidade calculada pelo modelo determinístico. Note que é necessário um certo tempo para que a velocidade estimada convirja para a velocidade medida. O algoritmo garante, contudo, que os erros tenderão a zero ao longo do tempo, o que comprova a eficácia do processo para estimar variáveis não mensuráveis (caso da velocidade no exemplo utilizado).



Uma forma de analisar o estimador em malha fechada é reexaminar os termos da equação do modelo:

$$\hat{X}_{k+1} = A\hat{X}_k + Bu_k + K(y_k - \hat{y}_k)$$



Como  $\hat{y}_k = C\hat{X}_k$ , a equação pode ser reescrita na forma:

$$\hat{X}_{k+1} = A\hat{X}_k + Bu_k + Ky_k - KC\hat{X}_k$$

Que resulta em:

$$\hat{X}_{k+1} = (A - CK)\hat{X}_k + Bu_k + Ky_k$$

Supondo que o ganho  $K = 1$ , teríamos:

$$\hat{X}_{k+1} = (A - C)\hat{X}_k + Bu_k + y_k$$

Como  $C$  é uma matriz com zeros e uns (no caso do sistema em análise,  $C = [1 \ 0]$ ), subtrair 1 na primeira coluna da matriz  $A$  significa zerar o termo  $\hat{s}_k$  a cada passo  $k$ , ou seja, zerar o espaço estimado pelo modelo. Ao mesmo tempo, o termo  $y_k$ , que é a medição no instante  $k$ , é usada integralmente na estimativa do próximo estado  $\hat{X}_{k+1}$ . Se o ganho  $K = 0$ , o contrário ocorre, ou seja, o próximo estado desconsiderará completamente a medição  $y_k$ , estimando  $\hat{X}_{k+1}$  a partir de  $\hat{X}_k$ . Concluimos, assim, que  $0 < K < 1$  resultará em uma combinação de estimativa e medição a cada passo, fundindo ambos os valores na estimativa do passo seguinte.

## Filtro de Kalman

O Filtro de Kalman, também conhecido por estimador quadrático linear, é um algoritmo muito parecido com o estimador de estados introduzido na sessão anterior, porém com uma diferença: o ganho  $K$ , agora uma matriz com dois elementos, é ajustado a cada iteração  $k$ . Assim como no estimador de estados em malha fechada, o Filtro de Kalman usa medições observadas ao longo do tempo, que incluem ruídos de processo e de medição, produzindo estimativas de variáveis desconhecidas de modo otimizado. O filtro recebeu o nome por conta dos trabalhos de Rudolf E. Kálmán, um engenheiro elétrico, matemático húngaro-americano.

Está além do escopo deste texto demonstrar que o processo denominado Filtro de Kalman minimiza os erros quadráticos entre estimativa e medição. Focaremos na sua implementação, analisando seus resultados. O processo de estimação é recursivo, assim como no caso do estimador de estados, porém é comum analisá-lo por meio da divisão do processo em duas etapas: predição dos estados e atualização dos estados. Observe o algoritmo descrito a seguir, que será também aplicado ao sistema do carro acelerando.

Predição

$$\hat{X}_{\bar{k}} = A\hat{X}_{k-1} + Bu_k$$

$$P_{\bar{k}} = AP_{k-1}A^T + Q$$

Atualização

$$K_k = P_{\bar{k}}C^T(CP_{\bar{k}}C^T + R)^{-1}$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{\bar{k}} + K_k(y_k - C\hat{X}_{\bar{k}})$$

$$P_k = (I - K_k C)P_{\bar{k}}$$

Note que a primeira linha da etapa de predição é idêntica à estimação do modelo matemático no estimador de estados. No filtro de Kalman, a matriz  $P$  é denominada “matriz de covariância”, e será atualizada recursivamente levando em consideração o ganho  $K_k$ , que varia ao longo do tempo.  $Q$  é a matriz de covariância dos erros de processo, sendo definida por:

$$Q = \begin{bmatrix} \sigma_{w1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{w2}^2 \end{bmatrix}$$

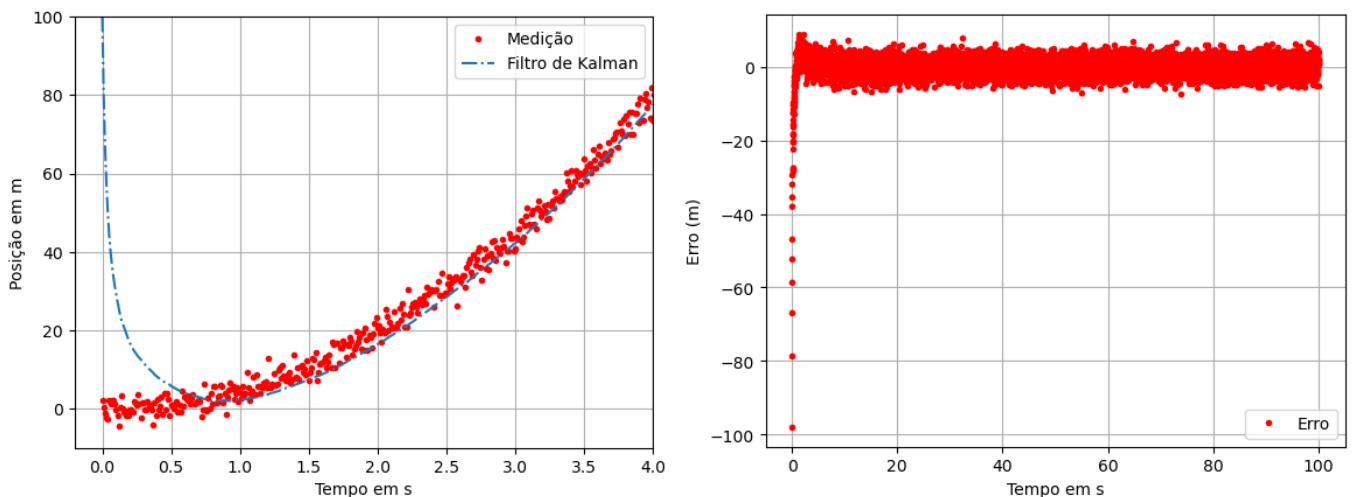
Na matriz acima,  $\sigma_{w1}$  é o desvio padrão do erro do primeiro estado (no caso de nosso exemplo, o espaço) e  $\sigma_{w2}$  é o desvio padrão do segundo estado (a velocidade). Por sua vez,  $R = \sigma_y^2$ , sendo  $\sigma_y$  o desvio padrão do erro de medição.

Note, na sequência, que parte da etapa atualização já é conhecida:

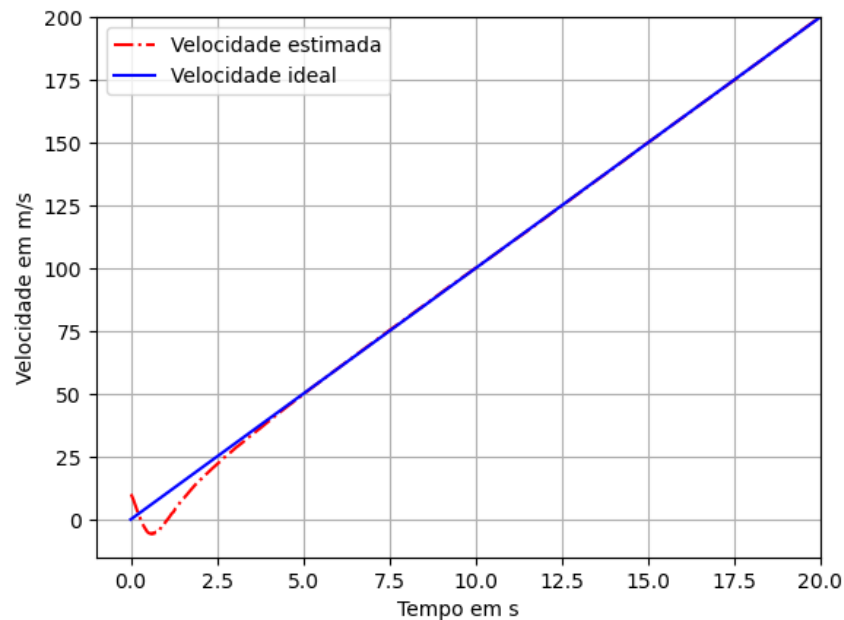
$$\hat{X}_k = \hat{X}_{\bar{k}} + K_k(y_k - C\hat{X}_{\bar{k}})$$

Denominamos  $\hat{X}_{\bar{k}}$  a matriz de estados previstos na etapa de predição, enquanto  $\hat{X}_k$  representa a matriz dos estados estimados com base tanto na predição como nas medições, usando um ganho  $K_k$ . O algoritmo garante que os ganhos  $K_k$  minimizarão os erros quadráticos entre a medição e a estimativa ao longo do tempo.

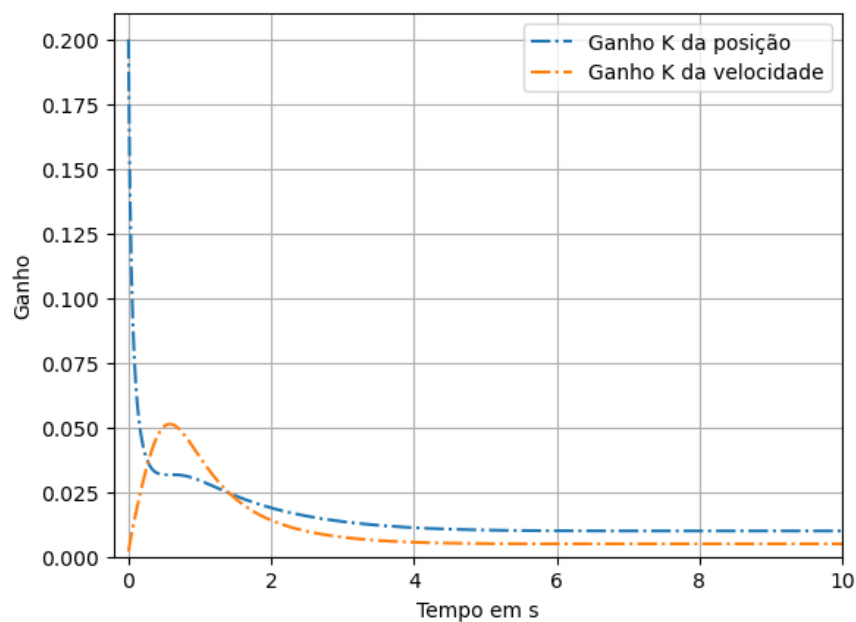
Observe o resultado da implementação do Filtro de Kalman para condições de predição iniciais distantes dos valores iniciais medidos (como no caso do estimador de malha fechada, adotamos  $\hat{s}(0) = 100m$  e  $\hat{v}(0) = 10m/s$ ).



O gráfico da figura seguinte ilustra a estimativa da velocidade comparada à velocidade calculada pelo modelo ideal, determinístico. Em comparação ao processo do estimador em malha fechada, percebemos que a convergência é mais rápida.



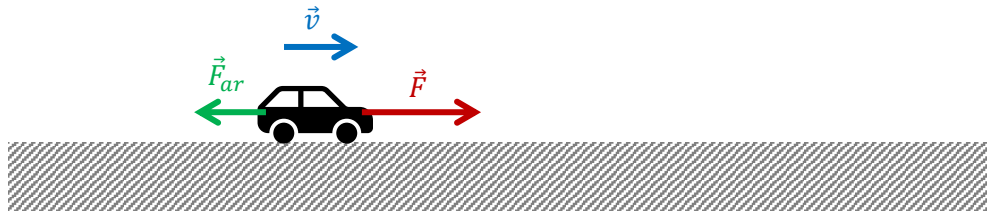
O gráfico a seguir representa a evolução da matriz do ganho  $K$  ao longo do tempo. É possível observar que ambos os elementos da matriz (ganho da posição e da velocidade) convergem para valores constantes.



Implementamos o estimador de estados em malha fechada e o Filtro de Kalman para um problema cujas equações diferenciais são lineares, ou seja, dependem das próprias variáveis de integração de maneira linear. Contudo, a maioria dos sistemas reais têm equações diferenciais não lineares, para os quais poderemos lançar mão do estimador de estados não linear e do Filtro de Kalman Estendido. Ambos serão tratados nas próximas sessões.

## Sistema Físico com equações diferenciais não lineares

Consideremos agora o seguinte sistema físico: um carro de massa  $m$  que acelera para a direita em uma pista com força propulsora constante e sujeito à resistência do ar, cuja função pode ser representada por  $0,4v^2$ .



Podemos expressar a resultante  $R$  por:

$$R = F - 0,4v^2$$

Assim, podemos escrever as seguintes equações diferenciais do movimento:

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{F}{m} - \frac{0,4}{m}v^2\end{aligned}$$

Usando o método de Euler, podemos discretizar as equações diferenciais usando as seguintes equações a diferenças:

$$\begin{aligned}s(t + \Delta t) &= s(t) + v(t) \cdot \Delta t \\ v(t + \Delta t) &= v(t) + \left(\frac{F}{m} - 0,4v(t)^2\right) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Para implementarmos a solução numérica dessas equações a diferenças, vamos substituir o instante de tempo  $t$  pelo contador  $k$ , sendo  $t = k\Delta t$ .

$$\begin{aligned}s_{k+1} &= s_k + v_k \cdot \Delta t \\ v_{k+1} &= v_k + \left(\frac{F}{m} - 0,4v_k^2\right) \cdot \Delta t\end{aligned}$$

Ocorre que, por se tratar de um sistema de equações não lineares, não podemos mais expressar o sistema na forma matricial  $X_{k+1} = AX_k + Bu$ . Em vez disso, expressaremos o sistema na forma:

$$\begin{aligned}s_{k+1} &= f_1(s_k, v_k) \\ v_{k+1} &= f_2(s_k, v_k)\end{aligned}$$

Sendo:

$$f_1(s_k, v_k) = s_k + v_k \cdot \Delta t$$
$$f_2(s_k, v_k) = v_k + \left( \frac{F}{m} - 0,4v_k^2 \right) \cdot \Delta t$$

Do mesmo modo que fizemos com o sistema linear do carro impulsionado por apenas uma força, vamos adicionar os erros de processo e medição. Deste modo, o sistema físico seria:

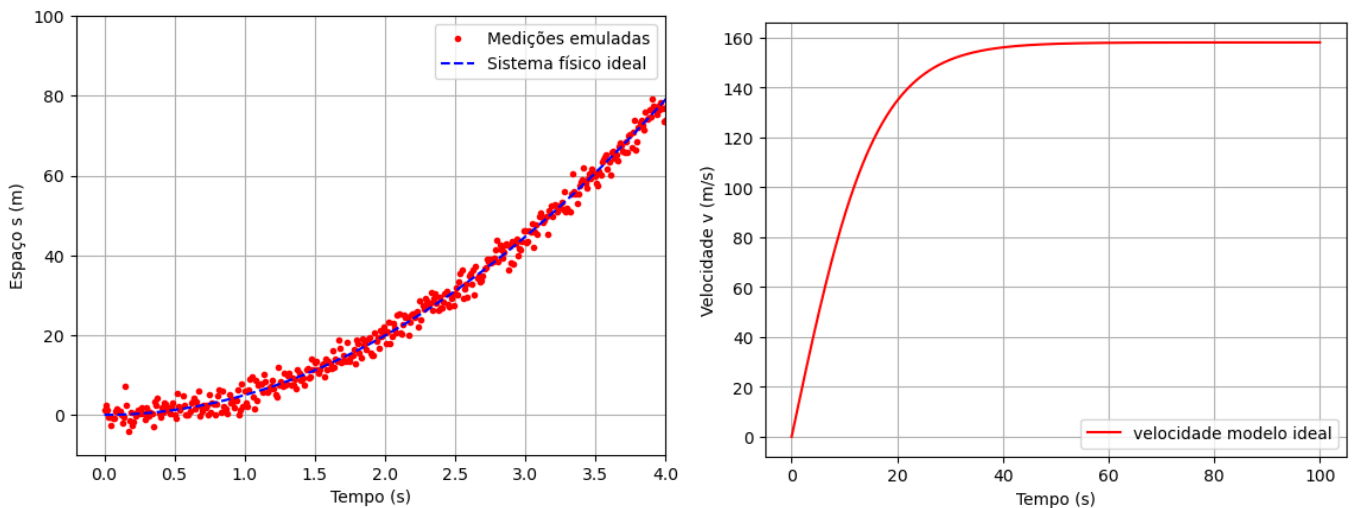
$$s_{k+1} = f_1(s_k, v_k) + w_{ks}$$
$$v_{k+1} = f_2(s_k, v_k) + w_{kv}$$

Sendo a medição  $y_k$  dada por:

$$y_k = c(s_k, v_k) + v_y$$

No nosso exemplo,  $c(s_k, v_k) = s_k$ , já que estamos medindo apenas a posição do carro.

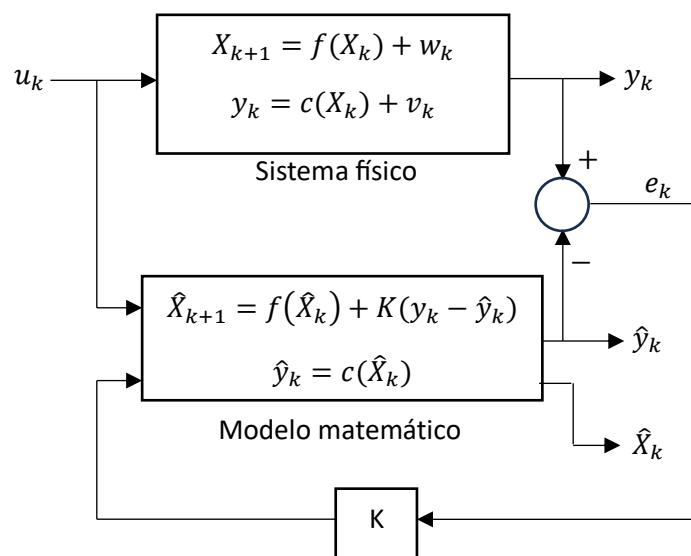
Observe, nas figuras seguintes, os gráficos da posição e da velocidade produzidos pelas equações diferenciais do modelo não linear. Diferentemente do caso linear, em que apenas uma força agia no veículo, agora o carro adquire uma velocidade terminal, dada a resistência do ar.



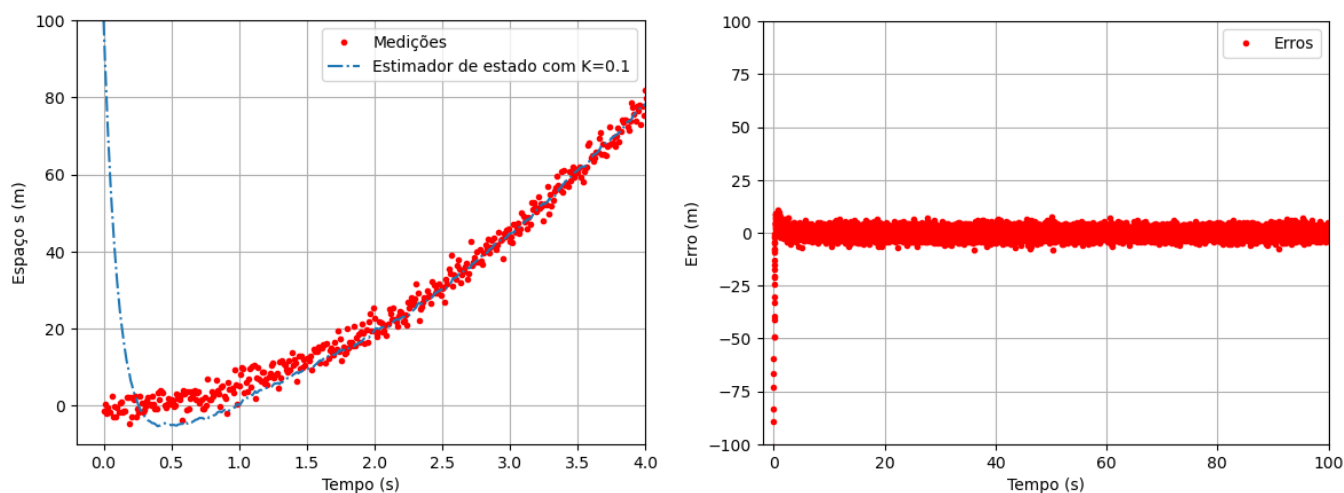
## Estimador de estado em malha fechada não linear

Há apenas duas diferenças entre os estimadores de estado em malha fechada linear e não linear: no não linear, não há as matrizes A, B e C, mas sim as funções  $f_1$ ,  $f_2$  e  $c$ . Além disso, no não linear, não podemos garantir que

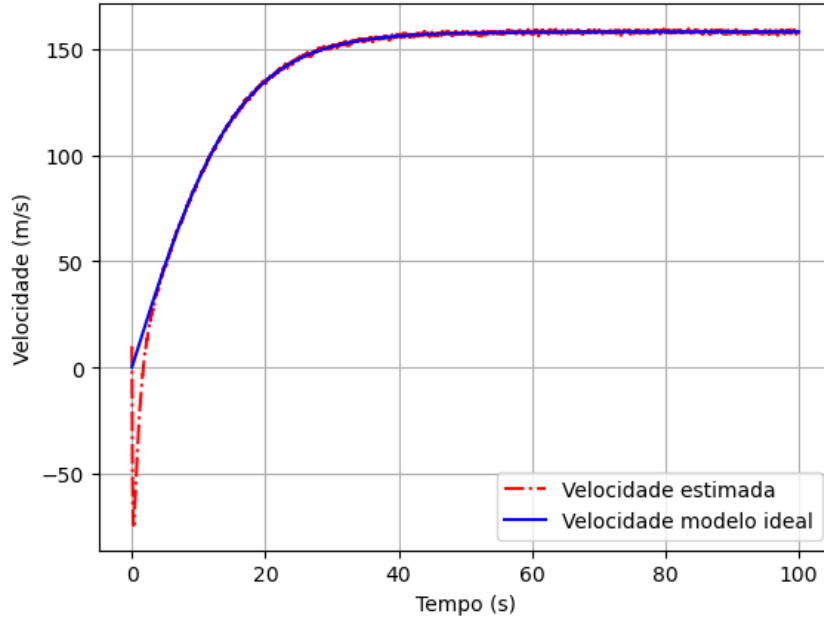
os erros converjam para zero, situação que dependerá bastante das condições iniciais do problema. Observe o diagrama de blocos a seguir, percebendo que o modelo matemático estimará o próximo valor dos estados com base na função  $f$  (aqui,  $f$  representa duas funções) e no erro multiplicado por um ganho  $K$  fixo, como no estimador linear.



Usando as mesmas condições iniciais distantes da posição e velocidade iniciais do sistema físico, notamos, nas figuras seguintes, que o estimador linear foi capaz de convergir para os estados medidos.



A velocidade estimada, apesar de divergir bastante no início da simulação, acaba convergindo para a velocidade medida.



## Filtro de Kalman Estendido

Assim como ocorreu com o estimador em malha fechada não linear, há poucas diferenças entre o Filtro de Kalman e o Filtro de Kalman Estendido, usado para sistemas não lineares. Neste, assim como ocorre com o estimador não linear, não podemos garantir que haja convergência para erros nulos. O algoritmo do Filtro de Kalman Estendido é apresentado abaixo:

Predição

$$\hat{X}_{\bar{k}} = f(\hat{X}_k)$$

$$A = \frac{\partial f}{\partial \hat{X}}$$

$$C = \frac{\partial c}{\partial \hat{X}}$$

$$P_{\bar{k}} = AP_{k-1}A^T + Q$$

Atualização

$$K_k = P_{\bar{k}}C^T(CP_{\bar{k}}C^T + R)^{-1}$$

$$\hat{X}_k = \hat{X}_{\bar{k}} + K_k(y_k - C\hat{X}_{\bar{k}})$$

$$P_k = (I - K_kC)P_{\bar{k}}$$

Assim como ocorreu com o estimador não linear, em vez das matrizes  $A$  e  $B$ , usamos as funções não lineares para o processo de predição. Contudo, precisamos linearizar recursivamente as funções  $f$  e  $c$ , implementadas nas matrizes  $A$  e  $C$ , a partir do cálculo dos jacobianos  $\frac{\partial f}{\partial \hat{X}}$  e  $\frac{\partial c}{\partial \hat{X}}$ , definidos por:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial s} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial s} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}$$

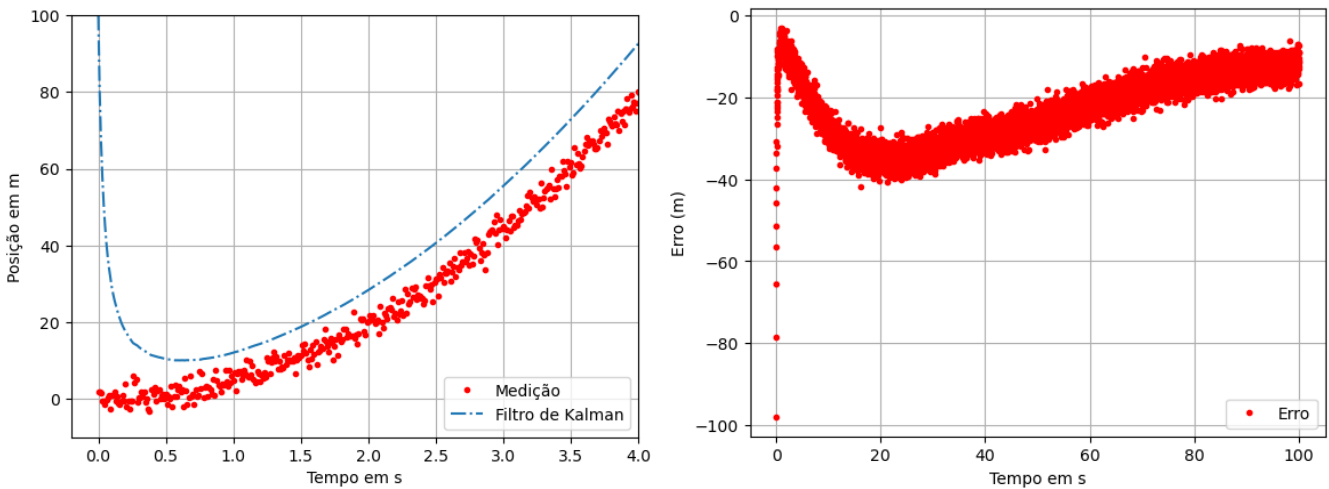
$$\frac{\partial c}{\partial \hat{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c}{\partial s} & \frac{\partial c}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Para o exemplo em questão, no qual  $f_1(s_k, v_k) = s_k + v_k \cdot \Delta t$ ,  $f_2(s_k, v_k) = v_k + \left(\frac{F}{m} - 0,4v_k^2\right) \cdot \Delta t$ , e  $c(s_k, v_k) = s_k$ , as matrizes A e C serão:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 - 0,8v\Delta t \end{bmatrix}$$

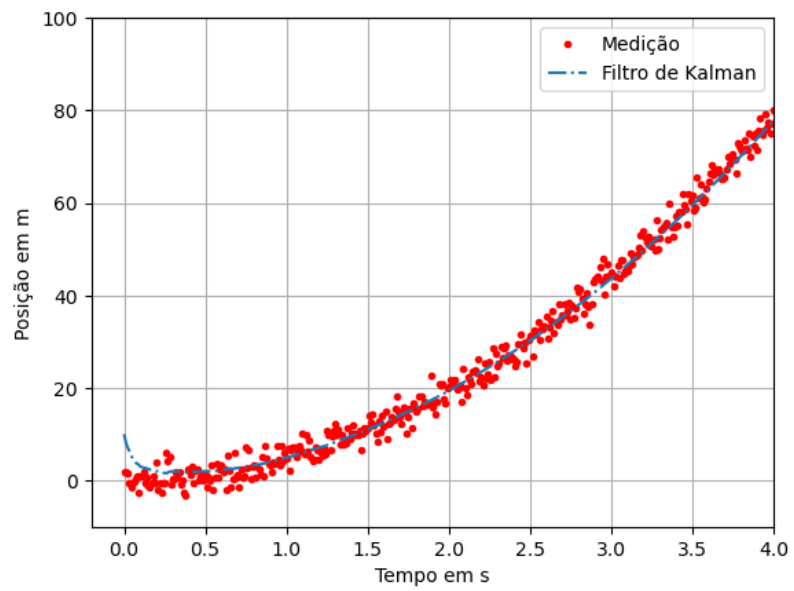
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Os gráficos a seguir apresentam os resultados da simulação do FKE, considerando as condições iniciais estimadas como  $\hat{s}(0) = 100m$  e  $\hat{v}(0) = 10m/s$ . É possível perceber que não há convergência neste caso, uma vez que a posição estimada apresenta um viés positivo em relação às medições.



Alterando-se as condições iniciais para  $\hat{s}(0) = 10m$  e  $\hat{v}(0) = 1m/s$ , o FKE volta a apresentar convergência, como pode ser observado na figura seguinte.





Por fim, a velocidade estimada é apresentada no gráfico a seguir.

