

Victoria Leal Garcia de Souza

# **Construção e projeto de controle de um monociclo autoequilibrado**

Instituto de Pesquisa e Ensino (Insper)

Engenharia Mecatrônica

Iniciação Tecnológica

Orientador: Dr. Carlos Eduardo de Brito Novaes

Coorientador: Dr. Gabriel Pereira das Neves

São Paulo

Dezembro - 2023

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Desenho esquemático do monociclo, adaptado de (NEVES, 2017). . . .	7
Figura 2 – Exemplo de um controlador em cascata. Retirado de (MATHWORKS, 2023). . . . .	12
Figura 3 – Diagrama de blocos do modelo com um controlador LQR implementado.	15
Figura 4 – Diagrama de blocos do controlador LQR. . . . .	16
Figura 5 – Implementação do LQR com o modelo linearizado, em notação de espaço de estados. . . . .	17
Figura 6 – Resultados da simulação com o controlador LQR, usando o modelo não-linear. . . . .	17
Figura 7 – Simulação em malha fechada de velocidades usando um controlador PID.	19
Figura 8 – Diagrama de blocos implementado para o PID em cascata. . . . .	20
Figura 9 – Diagrama de blocos da realimentação de velocidades. . . . .	21
Figura 10 – Modelo 3D do monociclo feito por meio do CAD. . . . .	22

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Componentes do monociclo. . . . .	7
Tabela 2 – Cronograma originalmente proposto para o trabalho. . . . .	25
Tabela 3 – Cronograma revisado. . . . .	26

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional
CAD	<i>Computer-aided Design</i>
CM	Centro de massa
CNC	<i>Computerized Numerical Control</i>
DTM	Desenho Técnico Mecânico
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
rpm	Rotações por minuto

# LISTA DE SÍMBOLOS

$K_p$	Ganho proporcional
$T_d$	Ganho derivativo
$T_i$	Ganho integral
$\varphi$	Ângulo de <i>roll</i> [rad]
$\dot{\varphi}$	Velocidade angular em <i>roll</i> [rad/s]
$\ddot{\varphi}$	Aceleração angular em <i>roll</i> [rad/s <sup>2</sup> ]
$\psi$	Ângulo de <i>pitch</i> [rad]
$\dot{\psi}$	Velocidade angular em <i>pitch</i> [rad/s]
$\ddot{\psi}$	Aceleração angular em <i>pitch</i> [rad/s <sup>2</sup> ]
$\theta_r$	Posição angular da roda de inércia [rad]
$\dot{\theta}_r$	Velocidade angular da roda de inércia [rad/s]
$\ddot{\theta}_r$	Aceleração angular da roda de inércia [rad/s <sup>2</sup> ]
$\theta_w$	Posição angular da roda [rad]
$\dot{\theta}_w$	Velocidade angular da roda [rad/s]
$\ddot{\theta}_w$	Aceleração angular da roda [rad/s <sup>2</sup> ]

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>7</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão Bibliográfica . . . . .</b>	<b>8</b>
1.2.1	LQR . . . . .	9
1.2.2	Controlador por norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	10
1.2.3	PID em cascata . . . . .	11
<b>2</b>	<b>MODELO SIMULADO . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo linearizado . . . . .</b>	<b>13</b>
<b>2.2</b>	<b>Controladores . . . . .</b>	<b>14</b>
2.2.1	LQR . . . . .	14
2.2.2	PID em cascata . . . . .	17
2.2.3	Controlador por realimentação de velocidades . . . . .	20
<b>3</b>	<b>MONOCICLO CONSTRUÍDO . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>3.1</b>	<b>Manufatura e construção . . . . .</b>	<b>22</b>
<b>3.2</b>	<b>Eletrônica e programação . . . . .</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>CRONOGRAMA REVISADO . . . . .</b>	<b>25</b>
	<b>Conclusão Parcial . . . . .</b>	<b>27</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>28</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Um monociclo autoequilibrado consiste em um veículo que mantém a posição de equilíbrio apenas com uma roda em contato com o chão, utilizando outro sistema de atuação para controlar o ângulo de queda lateral. Conforme a literatura encontrada, há apenas um tal monociclo na América Latina, originalmente construído em 2017 por um dos professores orientadores (NEVES, 2017). Ele possui dois ângulos controlados: *pitch* e *roll*. O controle de *pitch* é feito através da roda em contato com o chão, enquanto o ângulo de *roll* é controlado através de uma roda de reação, também chamada de roda de inércia. Atualmente o sistema não possui controle no ângulo de *yaw*.

Os ângulos de *pitch*, *roll* e *yaw* são os ângulos em torno dos eixos  $y$ ,  $x$  e  $z$ , respectivamente. O desenho esquemático do monociclo, juntamente com o sistema de coordenadas de referência, é apresentado na Figura 1, adaptada de (NEVES, 2017). Na Tabela 1, podem ser encontrados os componentes principais do monociclo que estão indicados ao lado.

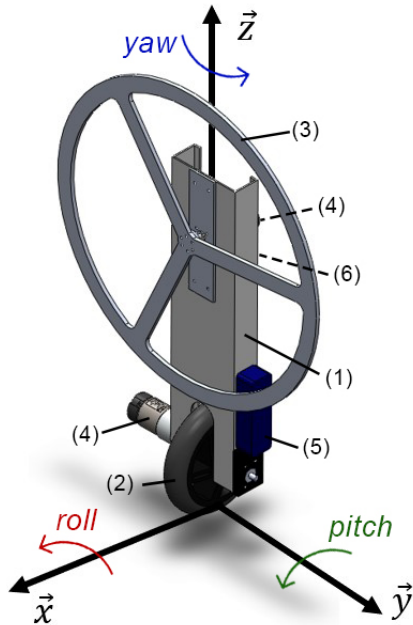


Figura 1 – Desenho esquemático do monociclo, adaptado de (NEVES, 2017).

Peça	Nome	Quantidade
1	Corpo	1
2	Roda de contato	1
3	Roda de inércia	1
4	Motor	2
5	Bateria	1
6	Componentes eletrônicos	-

Tabela 1 – Componentes do monociclo.

Há literatura significativa a respeito do controle da estabilidade estática sobre uma roda. Algumas das soluções já existentes em monociclos autônomos incluem o uso de giroscópios (MURATA, 2013), a adição de uma ou mais rodas de inércia (HO; RIZAL; CHEN, 2014; GEIST et al., 2022), o uso de força magnética (RUAN et al., 2012), massas móveis afim de mudar o centro de massa (GUO; HE; SONG, 2016) ou o uso de uma

*omniwheel* (SHEN; HONG, 2020).

Enquanto o sistema de acionamento de escolha é um tema muito explorado, há uma série de fatores que podem ser relevantes nessa decisão. O primeiro destes é o grau de complexidade atrelado à implementação do acionador e do controle dele, que favorece muito a escolha da roda de inércia ao invés de outros acionadores citados. O controle de um monociclo por meio de uma roda de reação é um conceito recente que tem sido estudado na última década. Ademais, replicar um monociclo onde já é conhecido o sistema de atuação traz vantagens no âmbito de melhorias na construção dele. É importante considerar como o monociclo autônomo poderia comportar outros acionadores afim de controlar o ângulo responsável por fazer curvas (*yaw*, em torno de  $z$ ) para poder, posteriormente à construção de um tal monociclo, o fazer seguir trajetórias.

## 1.1 Objetivo

Este projeto tem como objetivo principal replicar o monociclo autônomo apresentado com a finalidade de testar diferentes controladores, incluindo uma das técnicas implementadas no monociclo de referência - LQR e controlador robusto por norma  $\mathcal{H}_2$  - assim como um controlador PID em cascata a ser projetado. (eu troquei de "ambas as técnicas" pra "uma das" porque a essa altura eu basicamente abandonei a ideia de implementar o norma  $\mathcal{H}_2$  do gab já que eu não vou ter feito nada. escolhi manter o cascatinha nos objetivos porque eu vou explicar toda a narrativa das aventuras que eu passei pra fazer ele funcionar, e depois explicar a relação dele com o que eu realmente consegui implementar que é a realimentação de velocidades.)

Os objetivos secundários são relacionados a melhorias e problemas apontados que foram mencionadas na dissertação (NEVES, 2017). Por exemplo, foram observados problemas com o monociclo decorrentes da manufatura que podem ser evitados por meio do uso de processos mais robustos de manufatura subtrativa.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O sensoramento dos ângulos de *pitch* e *roll* é feito usando o acelerômetro e giroscópio presentes na IMU (*Inertial Measurement Unit*) localizado na Figura 1, em (6). Estes sinais são interpretados pelo microcontrolador, que aciona um ou ambos os motores conectados às rodas de forma que o monociclo volte para a posição de equilíbrio vertical. A IMU é sensível a erros de medição, tanto por ser posta na localização aproximada do centro de massa do monociclo quanto por incertezas dos sensores, então para garantir maior precisão com as leituras, é aplicado um filtro de Kalman nos sinais.

O filtro de Kalman (KALMAN, 1960) é um estimador ótimo para ruído branco



que trata os parâmetros do processo controlado - o sistema, distúrbios e as incertezas dos sensores - como variáveis aleatórias dentro de uma distribuição normal. Os parâmetros do filtro dependem principalmente do ganho  $K_m$  do filtro, que é atualizado conforme as medições para poder responder com maior velocidade às mudanças no sistema minimizando a covariância calculada, no caso onde há mais de uma variável. Como o filtro é dinâmico, o peso da medição feita e do valor estimado são reguladas pelo ganho  $K_m$ , que varia com a operação do sistema.

A modelagem do monociclo foi feita usando a mecânica de Lagrange (MORIN, 2007), inicialmente o considerando como um pêndulo invertido para obter as equações de movimento. Para a entrada, foram calculados momentos gerados em relação às quatro coordenadas generalizadas, e foram considerados o atrito viscoso da roda de inércia com o mancal e o atrito que a roda de contato tem com o chão (considerando que não há escorregamento entre as duas superfícies), além dos torques de ambos os motores, como a saída. O modelo não-linear obtido pela equação de Euler-Lagrange foi linearizado para permitir a aplicação de controle para que o sistema seja capaz de se manter equilibrado. (eu sinceramente não sei o que fazer com a frase que tá em vermelho. eu já pensei em reescrever ela, tirar ela completamente, fazer qualquer coisa com ela, mas eu simplesmente não acho algo que fique melhor do que isso, mesmo sabendo qu ela tá errada. aceito sugestões.)

Ao longo da construção do monociclo de referência, foram testadas duas técnicas de controle ótimo: primeiro, um LQR (*Linear Quadratic Regulator*), e depois um controlador robusto projetado por norma  $\mathcal{H}_2$  (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020). São técnicas de controle de espaço de estado por *feedback*, e conforme a literatura publicada, ambas são capazes de estabilizar a planta rapidamente e usam algoritmos similares.

### 1.2.1 LQR

O controle por meio do LQR é feito de forma a minimizar o índice de performance que é ponderado principalmente pelas matrizes  $Q$  e  $R$  para ser possível determinar a matriz  $K$  do vetor de controle ótimo. As matrizes  $Q$  e  $R$  são, respectivamente, as responsáveis pela importância que o modelo dá ao erro dos sinais da IMU, já filtrados, e pelo esforço de controle que é aceitável para controlar o sistema (OGATA, 2010).

A partir das matrizes  $Q$  e  $R$ , é possível obter a matriz de controle ótimo  $K$  que satisfaça a equação de custo mínimo (1.1):

$$J = \int_0^\infty x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) dx \quad (1.1)$$

A matriz  $K$  é calculada conforme (1.2):

$$K = R^{-1} B^\top P, \quad (1.2)$$

onde  $P$  é a solução da equação de Riccati (1.3):

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0. \quad (1.3)$$

Uma forma popular de projetar um controlador LQR é usando a regra de Bryson (HESPANHA, 2009), onde as matrizes  $\bar{Q}$  e  $\bar{R}$  são assumidas diagonais tal que

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } x_i^2}, \quad i \in \{1, 2, \dots, l\}$$

$$\bar{R}_{jj} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } u_j^2}, \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

e posteriormente, **afinando** os valores por meio de outras técnicas conforme o modelo simulado.

### 1.2.2 Controlador por norma $\mathcal{H}_2$

O espaço  $\mathcal{H}_2$  é composto por funções de transferência estritamente estáveis e próprias, ou seja, que têm sua norma  $\mathcal{H}_2$  limitadas. O controle robusto implementado visa minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  da matriz de transferência da malha fechada, de forma que considere a energia total das entradas e busca otimizar uma saída de escolha para uma condição de desempenho garantido aceitável (GEROMEL; KOROGUI, 2019).

Em geral, é usada LMI (*Linear Matrix Inequality*) para resolver problemas de otimização convexa, principalmente pela facilidade de tratar as incertezas politópicas que são limitadas por norma. Um politopo é uma representação sem modelo nominal, que pode ser obtido pela combinação convexa dos valores extremos das incertezas, como as matrizes do sistema construídas em seus vértices. A estabilidade dos vértices é uma das condições necessárias para a estabilidade robusta, que não é garantida apenas por esta condição. O custo garantido é um limitante superior da estabilidade quadrática para cada vértice do politopo, e geralmente é mais conservador que a norma  $\mathcal{H}_2$  realmente obtida para cada vértice. (PALHARES, 2023)

A diferença principal entre esta técnica e o LQR é que o controlador por norma  $\mathcal{H}_2$  comporta incertezas de parâmetros ou perturbações na planta e por isso é mais robusto do que é preciso em relação à referência, enquanto o LQR necessita de um grau de confiança maior em ambos o modelo e o sistema. No entanto, o LQR pode ser considerado um caso particular de um controlador robusto por norma  $\mathcal{H}_2$ , e assim, é esperado que hajam semelhanças entre eles, visto que é possível reproduzir o mesmo resultado que a abordagem pela equação de Riccati quando o modelo é precisamente conhecido, e que a equação de Riccati permite incertezas limitadas pela norma  $\mathcal{H}_2$  (NEVES, 2017; PALHARES, 2023).

Para projetar um controlador usando a norma  $\mathcal{H}_2$  de uma matriz  $K$  de ganhos, basta substituir os resultados da análise  $\mathcal{H}_2$  em malha fechada por termos na LMI.

optei por deixar isso na revisão basicamente pra justificar a escolha de fazer só um dos controladores que o gab implementou no dele, e porque de certa forma eu acho que ficaria incompleto eu só falar do lqr e não do  $\mathcal{H}_2$  também. entendo se vocês acharem melhor que eu tire, mas eu preferiria deixar.

### 1.2.3 PID em cascata

Um controlador PID é formado por três componentes: uma parcela de ganho proporcional, outra de ganho integral, e mais outra de ganho derivativo. Cada elemento tem sua função dentro do compensador:

- Ganho proporcional: produz uma saída proporcional ao erro do sistema, além de sua derivada e integral, conseguindo diminuir o tempo de pico;
- Ganho integral: produz uma saída com erro nulo em regime permanente, acumulando o erro total gerado pelo ganho proporcional e gerando ultrapassagem percentual da saída;
- Ganho derivativo: diminui o tempo de acomodação e a ultrapassagem percentual da saída, além de diminuir a velocidade com a qual a planta responde ao erro.

Analisando a matriz de transferência do sistema, se nota que é de ordem 4 e tipo 2, com zeros de ordem 2. Conforme (NISE, 2022), projetar um controlador para um sistema de ordem superior a 2 e com zeros se torna possível seguindo o procedimento descrito:

1. Esboçar o LGR de cada função de transferência.
2. Admitir que a malha fechada formada pela função de transferência não tem zeros, nem polos de ordem maior que 2, como hipótese. Assim, calcular o ganho necessário para atender as especificações de resposta transitória.
3. Justificar a hipótese anterior pela posição dos polos de ordem maior que 2 e dos zeros, pois não são dominantes ou se cancelam, respectivamente.
4. Simular a solução para justificar novamente a hipótese.

Para projetar um controlador em cascata, basta admitir que o sinal de saída de uma malha fechada de controle seja a planta a ser controlada em uma nova malha fechada. Assim, um controlador em cascata tem um aspecto conforme a Figura 2.

Um dos principais casos de uso de controladores em cascata é de quando se deseja uma rejeição rápida de distúrbios provocados por ganhos não-lineares antes que se propague ao resto da planta, também podendo ser usado quando há mais de uma variável medida porém apenas uma é controlável.

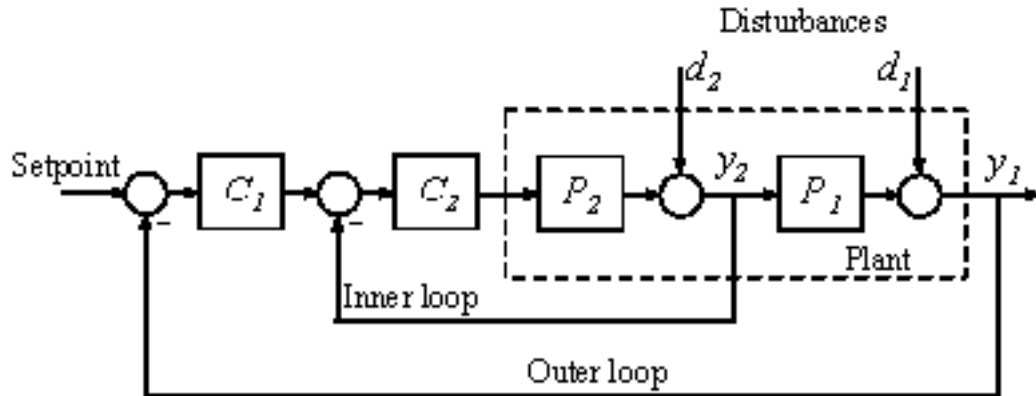


Figura 2 – Exemplo de um controlador em cascata. Retirado de (MATHWORKS, 2023).

Para que seja possível o uso de controladores em cascata, é necessário cumprir com três condições:

- A malha externa deverá influenciar a malha interna;
- A malha interna deverá ser mais rápida que a malha externa, de forma que poderá compensar pelas perturbações da malha externa sem afetar o sistema sendo controlado;
- A malha interna deverá rejeitar perturbações de modo que não afete a malha externa.

Algumas das vantagens de usar controladores em cascata são menor variabilidade e intensidade dos distúrbios, além de boa rejeição a distúrbios (WATLOW, 2020). A malha externa exerce autoridade sobre a malha interna, de forma que a interna obedece prontamente os comandos da externa.

## 2 MODELO SIMULADO

De forma a validar o modelo não-linearizado da Equação (2.1),

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}(-N(q, \dot{q}) - O(q) + Pu) \quad (2.1)$$

apresentado na dissertação (NEVES, 2017), foi feito um modelo simulado em MATLAB®.

Conforme o modelo, caso a posição inicial do monociclo fosse no ponto de equilíbrio, o monociclo deverá se manter equilibrado enquanto qualquer deslocamento na posição inicial deverá causar uma eventual queda. Foi verificado que o ponto de convergência do modelo não-linear, quando controlado, é de  $\pm 8^\circ$ , usando o modelo simulado com o LQR implementado que será discutido na seção 2.2.1.

O modelo simulado conta atualmente com duas implementações de controladores: um LQR e uma realimentação de velocidades por PID. Devido à semelhança entre a resposta produzida pelos controladores LQR e por  $\mathcal{H}_2$ , além da complexidade muito maior do segundo controlador, foi escolhido implementar apenas o LQR para fins de comparação com o monociclo de referência.

### 2.1 Modelo linearizado

Para projetar os controladores, foi usado o modelo linearizado (NEVES, 2017), em notação de espaço de estados (2.2),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde as matrizes A, B e C são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & -21.9599 & 0 & 0 & -52.1139 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21.9599 & 0 & 0 & 5.1226 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -151.8787 & 0 & 0 & -67.5793 & 44.9081 \\ 0 & 0 & 0 & 58.3574 & 0 & 0 & 15.6751 & -10.4165 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 557.0062 & 0 \\ -54.7512 & 0 \\ 0 & 400.2352 \\ 0 & -92.8352 \end{bmatrix}$$

e a matriz identidade  $8 \times 8$ , visto que todas as variáveis de estado são medidas pela IMU ou observadas.

Como os estados 1 e 3 do vetor de estado ( $\theta_r$  e  $\theta_w$ , respectivamente) não são controlados, eles podem ser removidos das três matrizes, removendo as respectivas linhas e colunas correspondentes. Assim, o novo vetor de estado  $x_R$  é dado por:

$$x_R = [\varphi \ \psi \ \dot{\theta}_R \ \dot{\varphi} \ \dot{\theta}_W \ \dot{\psi}]^\top$$

## 2.2 Controladores

Para o modelo simulado foram empregados os controladores LQR e realimentação de velocidades por meio de PID, substituindo o PID em cascata.

### 2.2.1 LQR

Usando as matrizes reduzidas  $A_R$  e  $B_R$ , a matriz  $Q$  deverá ser diagonal de dimensões  $6 \times 6$  enquanto a matriz  $R$  deverá ser uma diagonal de dimensões  $2 \times 2$ . A matriz  $R$  inicialmente é posta como a matriz identidade  $2 \times 2$ , enquanto a matriz  $Q$  é inicialmente adotada como

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{ângulo máximo}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ângulo máximo}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{rotação máxima}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\text{rotação máxima}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Os valores foram estimados considerando a velocidade máxima atingida pelo motor acionador, o maior ângulo de inclinação do sistema e a velocidade máxima de um dado ângulo para ambos *pitch* e *roll*, conforme (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020).

Feito o ajuste fino da matriz  $Q$  por meio do modelo simulado, onde é verificado que não há saturação dos PWMs e que a simulação é parada caso o monociclo colida

com o chão, foi realizada uma simulação. A matriz  $K$  indicada é encontrada por meio de (1.2). O ajuste da matriz  $Q$  foi feito observando as posições e velocidades dos ângulos controlados, além dos torques em ambos os motores e os PWMs.

Ao final do ajuste, a matriz  $Q$  encontrada é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \left(\frac{60}{118}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{60}{118}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde o ângulo máximo é de  $15^\circ$  e a rotação máxima é de 118 rpm.

A resultante matriz  $K$  é

$$K = \begin{bmatrix} -18.0798 & 0.0000 & -0.2173 & -5.9749 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -10.7524 & -0.0000 & -0.0000 & -0.3561 & -2.1300 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Conforme as Figuras 3 e 4, foi montado um controlador LQR via Simulink®.

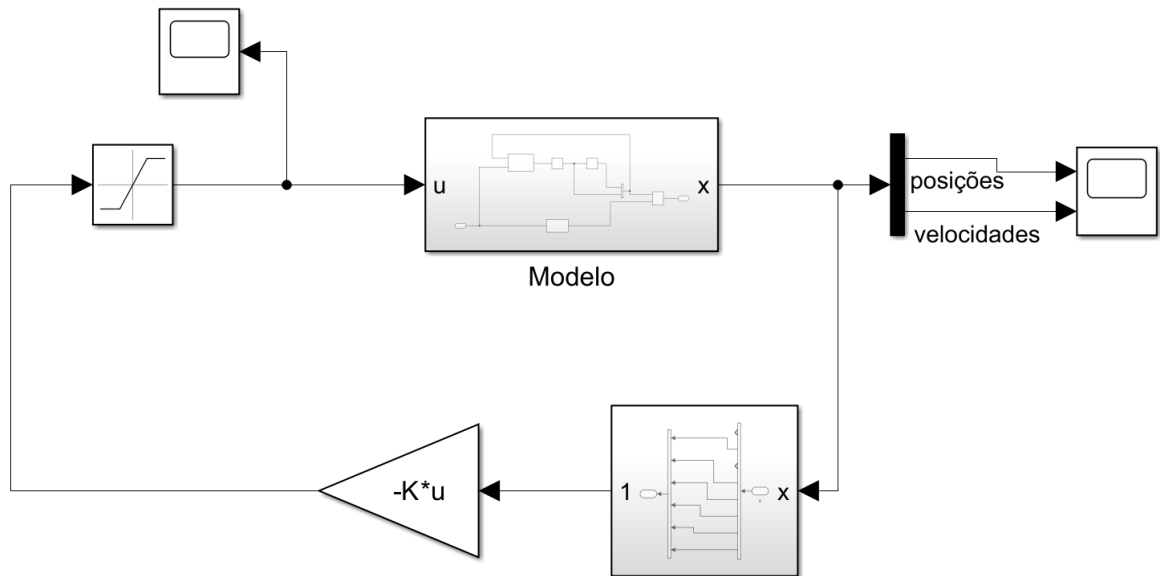


Figura 3 – Diagrama de blocos do modelo com um controlador LQR implementado.





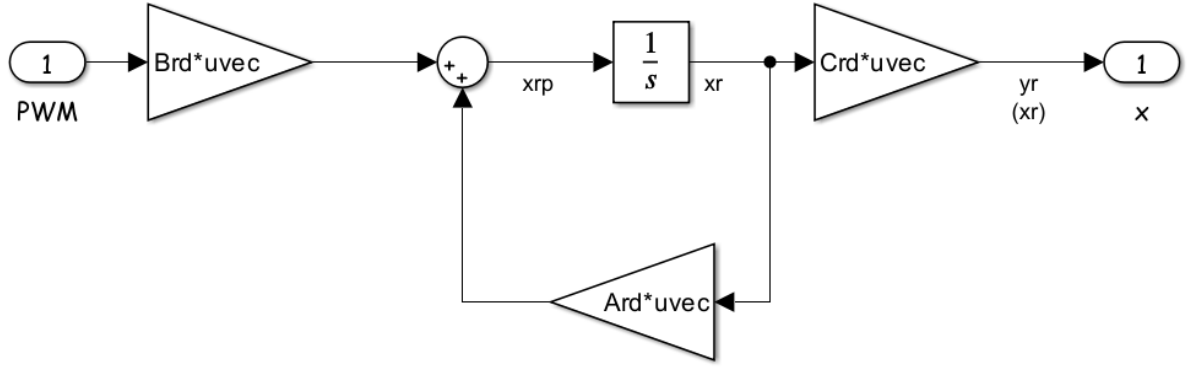


Figura 5 – Implementação do LQR com o modelo linearizado, em notação de espaço de estados.

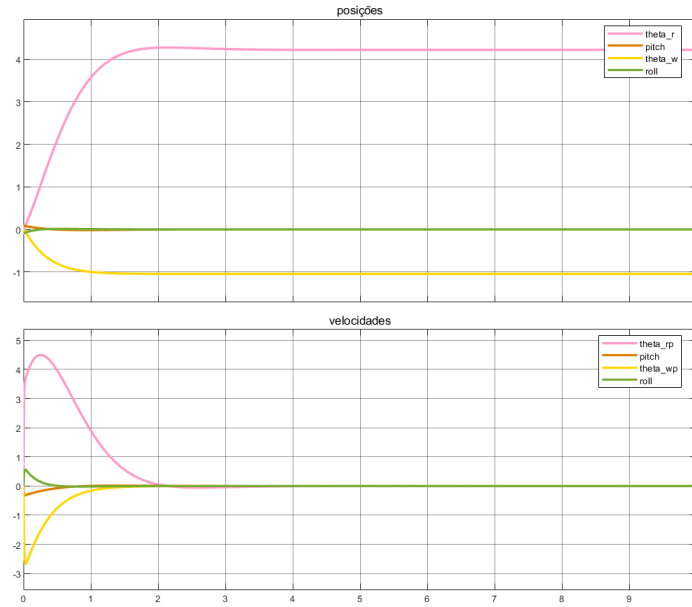


Figura 6 – Resultados da simulação com o controlador LQR, usando o modelo não-linear.

### 2.2.2 PID em cascata

Devido à complexidade da planta, foi escolhido projetar uma série de compensadores PID em cascata para controlar o sistema. Assim, primeiro foi necessário controlar a malha de velocidades para, por fim, poder controlar a malha de posições.

Começando com as velocidades, foram projetados controladores para um tempo de acomodação  $T_s \leq 0,5$  s. A partir da linearização do modelo simulado, foram encontradas as funções de transferência para cada variável no vetor de estado  $x_R$  conforme (2.6):

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.6)$$

Com as funções de transferência para ambos os PWMs e todas as variáveis de estado, foi possível montar a matriz de transferência (2.7), de onde foi possível extrair

as equações características das funções de transferência das rodas de inércia e de contato com o chão (2.8).

$$G = \begin{bmatrix} \frac{529.6s^2 - 103e04}{s^4 + 473s^3 - 21.96s^2 - 868.9s} & 0 \\ \frac{529.6s^2 - 1.103e04}{s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9} & 0 \\ \frac{-27.38s - 1.399e-13}{s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9} & 0 \\ \frac{-27.38s^2 - 1.399e-13s}{s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9} & 0 \\ 0 & \frac{333.2s^2 - 2.959e-13s - 9257}{s^4 + 44.91s^3 - 58.36s^2 - 1039s} \\ 0 & \frac{333.2s^2 - 2.959e-13s - 9257}{s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039} \\ 0 & \frac{-67.07s - 1.496e-13}{s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039} \\ 0 & \frac{-67.07s^2 - 1.496e-13s}{s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} eq_R &= s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9 \\ eq_W &= s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Finalmente, foi possível iniciar o procedimento descrito por (NISE, 2022), esboçando o LGR de cada função e admitir certas hipóteses a respeito dos polos das funções. Tanto no caso da equação característica da roda de inércia ( $eq_R$ ), cujos polos são  $[-41.7576 \ 4.5754 \ -4.5478]$ , quanto no caso da equação característica da roda em contato com o chão ( $eq_W$ ), cujos polos são  $[-45.6896 \ 5.1744 \ -4.3948]$ , há nitidamente um par de polos mais dominantes. Os zeros se encontram muito próximos da origem e assim, não é possível concluir que eles se cancelem com os polos, invalidando a hipótese do item 2. Como a hipótese do item 2 do procedimento é rejeitada, é inviável fazer um compensador PID em cascata por meio deste procedimento. Adicionalmente, o quase-cancelamento dos polos e zeros mais perto da origem gera uma dinâmica que não pode ser ignorada no sistema, em especial devido aos polos não-estáveis de ambas as equações características.

Em seguida, foi usado o segundo método da regra de Ziegler-Nichols como ponto de partida para os valores das componentes proporcional, integral e derivativa, conforme (2.9) e (2.10):

$$\begin{aligned} K_p &= 0.6K_{cr} \\ T_i &= 0.5P_{cr} \\ T_d &= 0.125P_{cr} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.10)$$

onde  $K_{cr}$  é encontrado pelo esboço do LGR, sendo este o ganho crítico no diagrama, e  $P_{cr}$  é encontrado considerando a frequência crítica  $\omega_{cr}$  tal que  $P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}}$ .

O segundo método foi usado pelo conhecimento do modelo matemático que rege o sistema, dado por (2.1), e assim, o compensador foi estimado como sendo:

$$\begin{aligned}
K_p &= 12.49 \\
T_i &= 0.7500 \\
T_d &= 0.1875
\end{aligned} \tag{2.11}$$

ou seja, a função de transferência do compensador seria:

$$G_c(s) = 12.49 \left( 1 + \frac{1}{0.7500s} + 0.1875s \right) \tag{2.12}$$

Após o uso de *tuners* nativos do MATLAB®, ainda assim os zeros se fazem notáveis na resposta dos sistemas, conforme se pode ver na Figura 7.

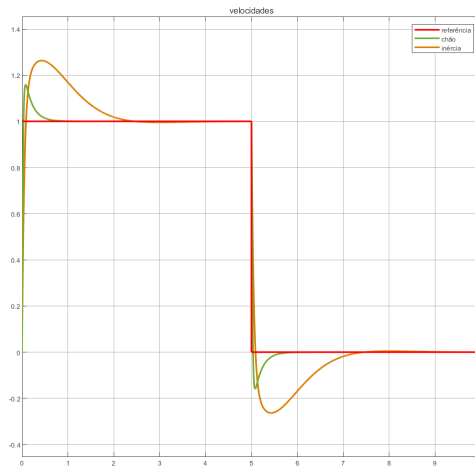


Figura 7 – Simulação em malha fechada de velocidades usando um controlador PID.

Mais um método foi experimentado para tentar obter os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ , adotando a técnica de espaço de estados. Primeiro, cada função de transferência foi descrita como um espaço de estados onde

$$\begin{aligned}
x_1 &= \text{posições} & \dot{x}_1 &= \text{velocidades} \\
x_2 &= \text{velocidades} & \dot{x}_2 &= \text{acelerações} \\
x_3 &= \text{acelerações} & \dot{x}_3 &= \text{jerk}
\end{aligned}$$

Em seguida, sabendo que a saída  $u$  pode ser descrita como

$$u = -Kx, \tag{2.13}$$

a fórmula de Ackermann (2.14)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B, \tag{2.14}$$

pode ser usada para encontrar a matriz  $K$  de *feedback* de malha fechada, tendo como polos desejados  $[-10 \quad -5 + 5i \quad -5 - 5i]$ . Usando o comando `acker` no MATLAB®, foram

obtidos os valores de  $K_p$ ,  $T_i$  e  $T_d$ . Assim, uma nova matriz de transferência pode ser feita composta dos compensadores para cada variável de estado no vetor  $x_R$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{-0.7696s^2+0.1161s+0.4911}{s} & 0 \\ \frac{[31.00s^2-4.676s-19.79]}{s} & 0 \\ \frac{[31.00s^2-4.676s-19.79]}{s} & 0 \\ 0 & \frac{0.1144s^2+0.0099s+0.0589}{s} \\ 0 & \frac{-15.79s^4-710.44s^3+860.1s^2+16480s+1352}{s^4+44.91s^3-58.36s^2-1039s} \\ 0 & \frac{-15.79s^2-1.366s-8.125}{s} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

No entanto, não foi possível estabilizar a planta com os compensadores projetados.

Usando o diagrama de blocos visto na Figura 8, foi feita uma última tentativa para controlar o sistema com um PID em cascata usando a plataforma *pidTuner* do MATLAB®:

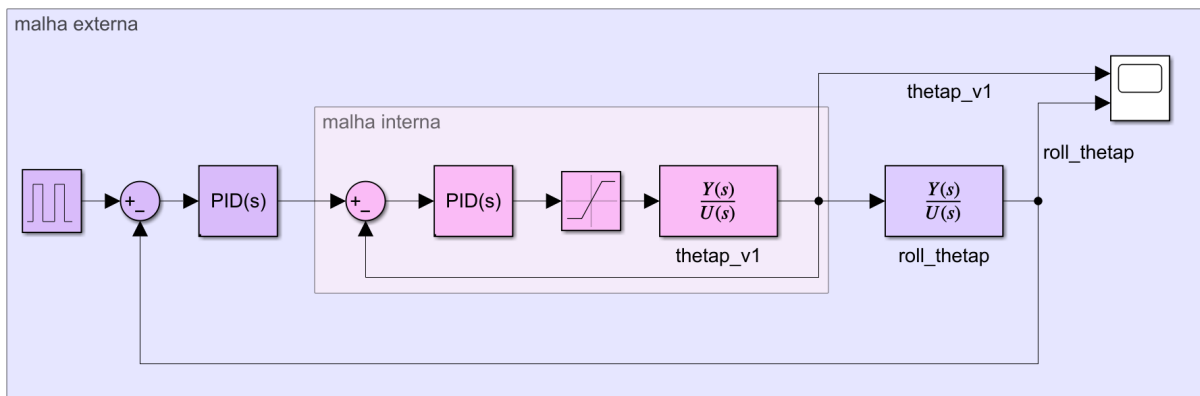


Figura 8 – Diagrama de blocos implementado para o PID em cascata.

Assim como as tentativas prévias, a dinâmica causada pelos polos e zeros que quase se cancelam é impossível de ignorar e não é possível controlar o sistema com este estilo de controlador.

### 2.2.3 Controlador por realimentação de velocidades

De forma a substituir o controlador PID em cascata, foi feito um controlador que funciona por meio da realimentação de velocidades do sistema (Figura 9). Assim como o PID em cascata, ele trabalha com o controle da malha de velocidades pois é entendido que o monociclo terá atingido seu ponto de equilíbrio quando as velocidades em ambos os ângulos de *pitch* e *roll*, além das velocidades dos acionadores, sejam nulas.

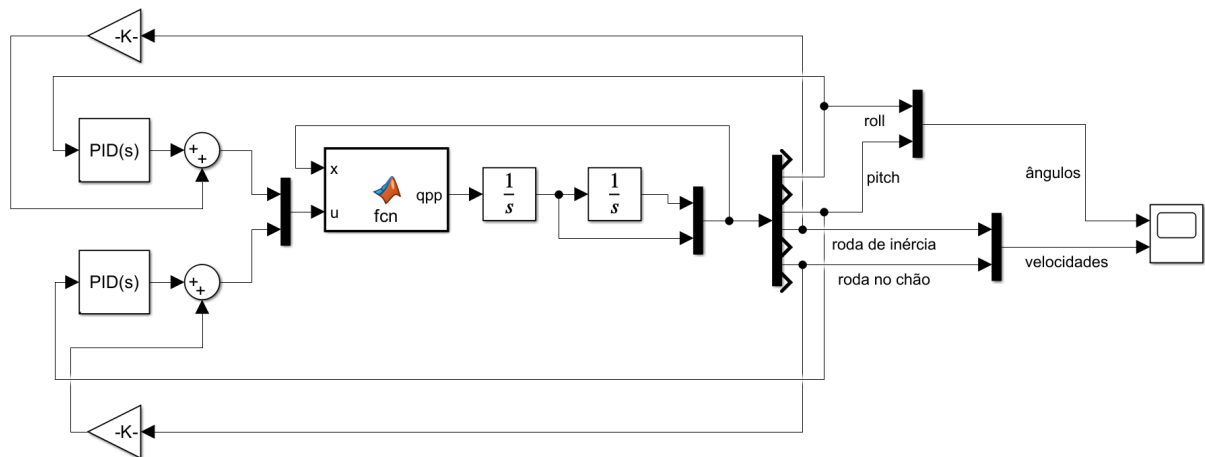


Figura 9 – Diagrama de blocos da realimentação de velocidades.

O sistema funciona por meio de dois controladores concorrentes um com o outro: os controladores PID que agem nas velocidades em *pitch* e *roll*, com valores de ganhos cerca de 100 vezes o tamanho dos ganhos  $K$  das rodas (de inércia e em contato com o chão), têm um efeito muito maior na planta e tem como função principal levar as velocidades em ambos os ângulos até muito próximo de 0 rad/s. Quando estas velocidades chegarem a valores tão baixos, os controladores que agem sobre as velocidades das rodas são mais dominantes e conseguem levar a velocidade das rodas até 0, ou muito próximo disso.

eu tenho a impressão que eu fiz a pior descrição possível de como funciona a realimentação de velocidades, aceito muito feedback aqui. eu sei que acertei a ideia geral, mas eu queria fazer algo um pouco mais específico como eu fiz na revisão bibliográfica - nada *muito* extenso mas que dá uma boa ideia do que que é e como funciona.

## 3 MONOCICLO CONSTRUÍDO

### 3.1 Manufatura e construção

Tendo conhecimento de algumas falhas na manufatura do primeiro monociclo, o segundo foi projetado para resolver alguns destes problemas. Primeiro, foi feito o seu modelo 3D no programa Siemens NX®, que pode ser visto na Figura 10:

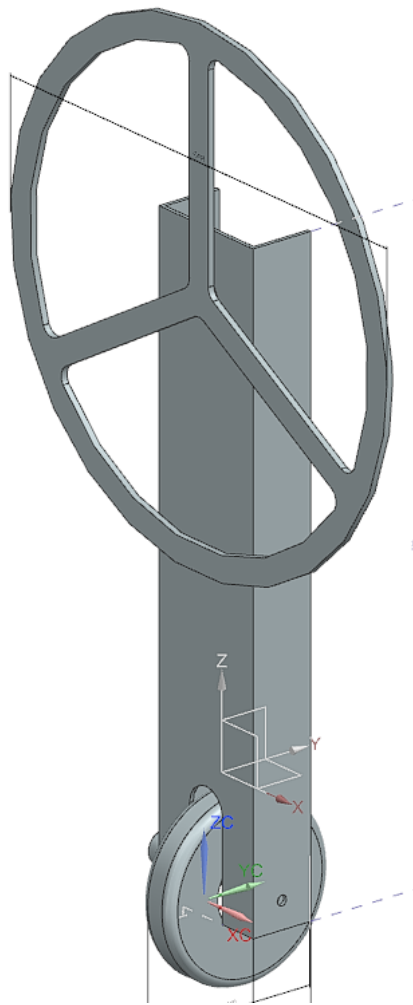


Figura 10 – Modelo 3D do monociclo feito por meio do CAD.

Como a roda de inércia do monociclo de referência tem um diâmetro muito grande, foi pensada uma troca de material tal que fosse possível manter um momento de inércia similar enquanto fosse possível fazer uma roda menor, usando um material mais denso (aço 3340). Devido ao aumento de massa e a subsequente maior demanda de torque nos motores que isso acarretaria, foi decidido contra a mudança de material de alumínio 6060 para aço 3340.

Assim como o monociclo de referência, o corpo e roda de inércia serão feitos de alumínio 6060, sendo o corpo cortado de uma viga com perfil U e a roda cortada de uma chapa de 5mm de espessura. Foi apresentado um problema no monociclo de referência quanto aos parafusos de aço que prendem a roda de inércia no corpo do monociclo, e estão sendo buscadas soluções que evitem este mesmo problema para o monociclo a ser construído.

A roda de contato com o chão é uma roda de patinete, escolhida por ser leve e apresentar maior contato com a superfície do chão do que rodas similares, como a roda de carro de supermercado, por exemplo. Como quanto maior a superfície de contato entre a roda e o chão, mais fácil é de atingir o equilíbrio estático do monociclo, é muito relevante o perfil da roda escolhida.

A função principal do CAD do monociclo, além de gerar os DTMs para a fabricação, é a obtenção de dados que seriam muito difíceis o cálculo manual, sendo estes principalmente os momentos de inércia em cada direção e de cada peça ou conjunto de peças. Para que os dados sejam o mais próximos da realidade possível, foram estimadas as massas dos motores, bateria e componentes eletrônicos, que foram postos aproximadamente onde estarão no monociclo construído.

Por fim, os dados que correspondem ao monociclo a ser construído, por meio do CAD: FAZER UMA ASSIM!!!! essa é do gab, tem alguns valores que vou usar

	Parameter	Value
$R_r$	Reaction wheel radius [m]	0.2
$R_w$	Wheel radius [m]	0.071
$L$	Distance of the center of mass (CM) of the body [m]	0.18632
$d$	Distance between the CM of the body and reaction wheel [m]	0.1503
$M_r$	Reaction wheel mass [Kg]	0.47568
$M_b$	Body mass [Kg]	1.23913
$M_w$	Wheel mass [Kg]	0.30220
$g$	Acceleration of gravity [ $m/s^2$ ]	9.8
$J_r$	Reaction wheel moment of inertia [ $Kgm^2$ ]	0.013472
$J_w$	Wheel moment of inertia [ $Kgm^2$ ]	0.00077
$J_{br}$	Moment of inertia of the body plus reaction wheel [ $Kgm^2$ ]	0.03937
$J_{bw}$	Moment of inertia of the body plus wheel [ $Kgm^2$ ]	0.03458
$n_r$	Reduction of the reaction wheel motor	71
$K_{tr}$	Torque constant of the reaction wheel motor [ $Nm/A$ ]	0.3383
$K_{er}$	Electrical constant of the reaction wheel motor [ $Vs^2/rad$ ]	0.9454
$R_{er}$	Electrical resistance of the reaction wheel motor [ $\Omega$ ]	0.6
$n_w$	Reduction of the wheel motor	131.25
$K_{tw}$	Torque constant of the wheel motor [ $Nm/A$ ]	0.3531
$K_{ew}$	Electrical constant of the reaction wheel motor [ $Vs^2/rad$ ]	1.3465
$R_{ew}$	Electrical resistance of the wheel motor [ $\Omega$ ]	2.4
$B_{vw}$	Travel wheel viscous friction [ $Ns^2/rad$ ]	0.1
$B_{vr}$	Reaction wheel viscous friction [ $Ns^2/rad$ ]	0.1

## 3.2 Eletrônica e programação

Foi iniciada a elaboração de métodos de leitura dos sensores presentes na IMU, de modelo GY-86 (10DOF). Nela estão presentes um giroscópio e acelerômetro (MPU6050), ambos de 3 eixos, um magnetômetro de 3 eixos (HMC5883L) e um barômetro (MS5611). Até o presente momento não foi possível encontrar o endereço I2C pois houve um defeito no sensor, tornando necessário postergar esta etapa da construção do circuito eletrônico do monociclo até a chegada do novo sensor. eu não sei quanta sinceridade eu devo meter aqui, porque eu real tive que parar de tentar mexer na imu por conta disso. tou com medo de mexer nos motores, sinceramente, então eu ia começar pela imu que era o mais simples. até a entrega do relatório com certeza já vai ter chegado a outra e eu vou ter mexido nela e feito os métodos pra ler os ângulos, mas eu não sei muito bem o que escrever prevendo o futuro então optei pela completa honestidade.

eu também não sei como falar dos motores. eu posso só falar "peguei os mesmos motores que o gab"? eu ainda não comecei a mexer neles mas espero ter mexido neles até a entrega do relatório.



## 4 CRONOGRAMA REVISADO

Na Tabela 2 pode ser visto o cronograma originalmente proposto para o projeto, com demarcações conforme a conclusão (marcadas em verde) ou não (marcadas em vermelho) das etapas propostas.

Atividade	1º semestre						2º semestre					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Revisão bibliográfica	x	x	x	x			x	x				
Conferir o modelo matemático	x	x										
Revisar o controle implementado		x	x									
Elaboração do modelo simulado		x	x	x								
Alteração ou adaptação do modelo			x	x			x	x				
Compra de materiais e componentes				x	x	x						
Relatório intermediário					x	x						
Manufatura e construção					x	x	x	x	x			
Experimentos para validar dados							x	x				
Testes práticos								x	x	x	x	
Validação										x	x	
Relatório final											x	x
Revisão do cronograma	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Tabela 2 – Cronograma originalmente proposto para o trabalho.

Grande parte do que foi concluído da primeira metade do cronograma foi feito mais rapidamente do que o esperado, permitindo adiantar a etapa de compras e a primeira tentativa de construção do monociclo. Devido a problemas nesta etapa, originalmente realizada durante o mês 3 do cronograma, ela foi postergada pois haveria a necessidade de compra de mais material.

A etapa de alteração ou adaptação do modelo não foi necessária como antes havia sido previsto, pois o modelo providenciado por um dos professores orientadores já comportava tudo que seria necessário para a criação e implementação de controladores. (eu não sei se fez sentido o meu raciocínio aqui. eu juro que tentei explicar direito mas eu basicamente não tive que adaptar nada, não acho honesto eu falar "super adaptei horrores aqui o modelo!!!"sendo que eu *não* fiz nada disso.)

Visando completar o projeto no período remanescente, o cronograma revisado pode ser visto na Tabela 3:

Atividade	2º semestre					
	7	8	9	10	11	12
Compra de materiais	x					
Manufatura e construção	x	x				
Testes práticos		x	x	x	x	
Validação				x	x	
Relatório final					x	x
Revisão do cronograma	x	x	x	x	x	

Tabela 3 – Cronograma revisado.

## CONCLUSÃO PARCIAL

O projeto de controle do monociclo por meio do modelo simulado usando Simulink® está muito bem encaminhado para a implementação no monociclo quando estiver construído. Foi possível projetar dois controladores, um LQR e uma realimentação de velocidades usando PID, os quais ambos controlam bem o modelo simulado e indicam que irão ser capazes de controlar o monociclo quando implementados.

Realizando a nova compra de materiais para a manufatura e uma nova IMU, será possível dar seguimento na construção do monociclo para, por fim, realizar os testes práticos do controle projetado até então. É esperado que seja possível realizar os testes a partir do mês 8 do cronograma, permitindo fazer ajustes no controle implementado ou até a projeção de um terceiro controlador para o monociclo.

sinto que preciso botar mais coisas na conclusão parcial mas genuinamente não consigo pensar no que botar. sugestões?

# REFERÊNCIAS

- GEIST, A. R. et al. The wheelbot: A jumping reaction wheel unicycle. *IEEE Robotics and Automation Letters*, v. 7, n. 4, p. 9683–9690, 2022. Citado na página 7.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Robustez. In: \_\_\_\_\_. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. 2. ed. [S.l.]: Blucher, 2019. p. 279–300. Citado na página 10.
- GUO, L.; HE, K.; SONG, Y. Design of the sliding mode controller for a kind of unicycle robot. *2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*, p. 1432–1437, 2016. Citado na página 7.
- HESPANHA, J. P. Vi: Lqr/lqg optimal control. In: \_\_\_\_\_. *Linear Systems Theory*. 2. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. p. 191–196. Citado na página 10.
- HO, M.-T.; RIZAL, Y.; CHEN, Y.-L. Balance control of a unicycle robot. In: *2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1186–1191. Citado na página 7.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960. Citado na página 8.
- MATHWORKS. Mathworks, 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ug/designing-cascade-control-system-with-pi-controllers.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 12.
- MORIN, D. *Chapter 6: The Lagrangian Method*. [S.l.]: Harvard Edu, 2007. <<https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/cmchap6.pdf>>. Citado na página 9.
- MURATA, T. *Development of the unicycle-riding robot*. 2013. <<https://corporate.murata.com/newsroom/news/company/csrtopic/2008/0923>>. Citado na página 7.
- NEVES, G. P. das. *Modeling, construction and control of a self-balancing unicycle*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), 2017. Disponível em: <<https://bv.fapesp.br/pt/dissertacoes-teses/140601/modelagem-desenvolvimento-e-controle-de-um-monociclo-auto-e>>. Citado 5 vezes nas páginas 2, 7, 8, 10 e 13.
- NEVES, G. P. das; ANGÉLICO, B. A.; AGULHARI, C. M. Robust  $\mathcal{H}_2$  controller with parametric uncertainties applied to a reaction wheel unicycle. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 93, n. 10, p. 2431–2441, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 14.
- NISE, N. S. 8.7 projeto da resposta transitória através do ajuste de ganho. In: \_\_\_\_\_. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 7. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2022. p. 338–342. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 18.
- OGATA, K. 10-8 quadratic optimal regulator system. In: \_\_\_\_\_. *Modern Control Engineering*. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. p. 793–806. Citado na página 9.

PALHARES, R. M. *Controle Ótimo  $\mathcal{H}_2$* . [S.l.]: UFMG, 2023. Citado na página 10.

RUAN, X. et al. Lateral stabilization of a single wheel robot applying electromagnetic force. In: *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 3675–3680. Citado na página 7.

SHEN, J.; HONG, D. Omburo: A novel unicycle robot with active omnidirectional wheel. In: *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 8237–8243. Citado na página 8.

WATLOW. Watlow, 2020. Disponível em: <<https://www.watlow.com/blog/posts/benefits-of-cascade-control>>. Citado na página 12.