

Victoria Leal Garcia de Souza

# **Construção e projeto de controle de um monociclo autoequilibrado**

Instituto de Pesquisa e Ensino (Insper)

Engenharia Mecatrônica

Iniciação Tecnológica

Orientador: Dr. Carlos Eduardo de Brito Novaes

Coorientador: Dr. Gabriel Pereira das Neves

São Paulo

Dezembro - 2023

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Desenho esquemático do monociclo. . . . .	8
Figura 2 – Exemplo de um controlador em cascata. Retirado de (MATHWORKS, 2023). . . . .	12

# LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Componentes do monociclo. . . . .	8
--	---

# LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional
CAD	<i>Computer-aided Design</i>
CM	Centro de massa
CNC	<i>Computerized Numerical Control</i>
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
rpm	Rotações por minuto

# LISTA DE SÍMBOLOS

$d$	Distância entre o CM do corpo e da roda de inércia $[m]$
$g$	Aceleração da gravidade $[m/s^2]$
$K_p$	Ganho proporcional
$J_{br}$	Momento de inércia do corpo com a roda de inércia $[kgm^2]$
$J_{bw}$	Momento de inércia do corpo com a roda $[kgm^2]$
$J_r$	Momento de inércia da roda de inércia $[kgm^2]$
$J_w$	Momento de inércia da roda $[kgm^2]$
$L$	Altura do CM do corpo em relação ao chão $[m]$
$M_b$	Massa do corpo $[kg]$
$M_{br}$	Massa do corpo com a roda de inércia $[kg]$
$M_r$	Massa da roda de inércia $[kg]$
$M_w$	Massa da roda $[kg]$
$R_i$	Raio interno da roda de inércia $[m]$
$R_e$	Raio externo da roda de inércia $[m]$
$R_w$	Raio da roda $[m]$
$T_d$	Ganho derivativo item $[T_i]$ Ganho integral
$\varphi$	Ângulo de <i>roll</i> $[rad]$
$\dot{\varphi}$	Velocidade angular em <i>roll</i> $[rad/s]$
$\ddot{\varphi}$	Aceleração angular em <i>roll</i> $[rad/s^2]$
$\psi$	Ângulo de <i>pitch</i> $[rad]$
$\dot{\psi}$	Velocidade angular em <i>pitch</i> $[rad/s]$
$\ddot{\psi}$	Aceleração angular em <i>pitch</i> $[rad/s^2]$
$\theta_r$	Posição angular da roda de inércia $[rad]$

$\dot{\theta}_r$	Velocidade angular da roda de inércia [ $rad/s$ ]
$\ddot{\theta}_r$	Aceleração angular da roda de inércia [ $rad/s^2$ ]
$\theta_w$	Posição angular da roda [ $rad$ ]
$\dot{\theta}_w$	Velocidade angular da roda [ $rad/s$ ]
$\ddot{\theta}_w$	Aceleração angular da roda [ $rad/s^2$ ]
$\tau$	Torque resultante no monociclo [ $Nm$ ]
$\tau_r$	Torque da roda de inércia [ $Nm$ ]
$\tau_w$	Torque da roda [ $Nm$ ]

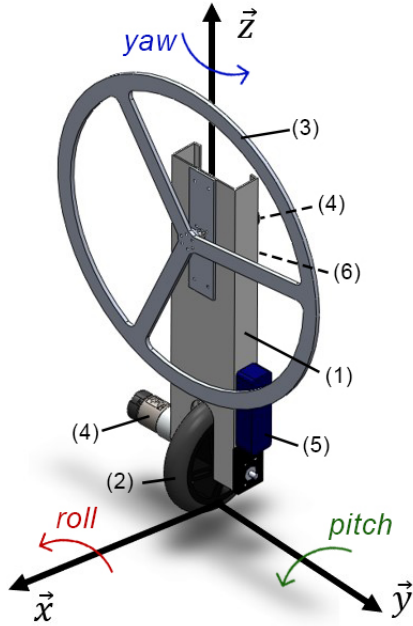
# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO . . . . .</b>	<b>8</b>
<b>1.1</b>	<b>Objetivo . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>1.2</b>	<b>Revisão Bibliográfica . . . . .</b>	<b>9</b>
1.2.1	LQR . . . . .	10
1.2.2	Controlador por norma $\mathcal{H}_2$ . . . . .	11
1.2.3	PID em cascata . . . . .	11
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>14</b>

# 1 INTRODUÇÃO

Um monociclo autoequilibrado consiste em um veículo que mantém a posição de equilíbrio apenas com uma roda em contato com o chão, utilizando outro sistema de atuação para controlar o ângulo de queda lateral. Conforme a literatura encontrada, há apenas um tal monociclo na América Latina, originalmente construído em 2017 por um dos professores orientadores (NEVES, 2017). Ele possui dois ângulos controlados: *pitch* e *roll*. O controle de *pitch* é feito através da roda em contato com o chão, enquanto o ângulo de *roll* é controlado através de uma roda de reação, também chamada de roda de inércia. Atualmente o sistema não possui controle no ângulo de *yaw*.

Os ângulos de *pitch*, *roll* e *yaw* são os ângulos em torno dos eixos  $y$ ,  $x$  e  $z$ , respectivamente. O desenho esquemático do monociclo, juntamente com o sistema de coordenadas de referência, é apresentado na Figura 1, adaptada de (NEVES, 2017). Na Tabela 1, podem ser encontrados os componentes principais do monociclo que estão indicados ao lado.



Peça	Nome	Quantidade
1	Corpo	1
2	Roda de contato	1
3	Roda de inércia	1
4	Motor	2
5	Bateria	1
6	Componentes eletrônicos	-

Figura 1 – Desenho esquemático do monociclo.

Tabela 1 – Componentes do monociclo.

Há literatura significativa a respeito do controle da estabilidade estática sobre uma roda. Algumas das soluções já existentes em monociclos autônomos incluem o uso de giroscópios (MURATA, 2013), a adição de uma ou mais rodas de inércia (HO; RIZAL; CHEN, 2014; GEIST et al., 2022), o uso de força magnética (RUAN et al., 2012), massas móveis afim de mudar o centro de massa (GUO; HE; SONG, 2016) ou o uso de uma *omniwheel* (SHEN; HONG, 2020).



Enquanto o sistema de acionamento de escolha é um tema muito explorado, há uma série de fatores que podem ser relevantes nessa decisão. O primeiro destes é o grau de complexidade atrelado à implementação do acionador e do controle dele, que favorece muito a escolha da roda de inércia ao invés de outros acionadores citados. O controle de um monociclo por meio de uma roda de reação é um conceito recente que tem sido estudado na última década. Ademais, replicar um monociclo onde já é conhecido o sistema de atuação traz vantagens no âmbito de melhorias na construção dele. É importante considerar como o monociclo autônomo poderia comportar outros acionadores afim de controlar o ângulo responsável por fazer curvas (*yaw*, em torno de  $z$ ) para poder, posteriormente à construção de um tal monociclo, o fazer seguir trajetórias.

## 1.1 Objetivo

Este projeto tem como objetivo principal replicar o monociclo autônomo apresentado com a finalidade de testar diferentes controladores, incluindo ambas as técnicas implementadas no monociclo de referência - LQR e controlador robusto por norma  $\mathcal{H}_2$  - assim como um controlador PID em cascata a ser projetado.

Os objetivos secundários são relacionados a melhorias e problemas apontados que foram mencionadas na dissertação (NEVES, 2017). Por exemplo, foram observados problemas com o monociclo decorrentes da manufatura que podem ser evitados por meio do uso de processos mais robustos de manufatura subtrativa.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

O sensoriamento dos ângulos de *pitch* e *roll* é feito usando o acelerômetro e giroscópio presentes na IMU (*Inertial Measurement Unit*) localizado na Figura 1, em (6). Estes sinais são interpretados pelo microcontrolador, que aciona um ou ambos os motores conectados às rodas de forma que o monociclo volte para a posição de equilíbrio vertical. A IMU é sensível a erros de medição, tanto por ser posto na localização aproximada do centro de massa do monociclo quanto por incertezas dos sensores, então para garantir maior precisão com as leituras, é aplicado um filtro de Kalman nos sinais.

O filtro de Kalman (KALMAN, 1960) é um estimador ótimo para ruído branco que trata os parâmetros do processo controlado - o sistema, distúrbios e as incertezas dos sensores - como variáveis aleatórias dentro de uma distribuição normal. Os parâmetros do filtro dependem principalmente do ganho  $K_m$  do filtro, que é atualizado conforme as medições para poder responder com maior velocidade às mudanças no sistema minimizando a covariância calculada, no caso onde há mais de uma variável. Como o filtro é dinâmico, o peso da medição feita e do valor estimado são reguladas pelo ganho  $K_m$ , que varia com

a operação do sistema.

A modelagem do monociclo foi feita usando a mecânica de Lagrange (MORIN, 2007), inicialmente o considerando como um pêndulo invertido para obter as equações de movimento. Para a entrada, foram calculados momentos gerados em relação às quatro coordenadas generalizadas, e foram considerados o atrito viscoso da roda de inércia com o mancal e o atrito que a roda de contato tem com o chão (ambos assumidos como máximo), além dos torques de ambos os motores, como a saída. O modelo não-linear obtido pela equação de Euler-Lagrange foi linearizado para permitir a aplicação de controle para que o sistema seja capaz de se manter equilibrado.

Ao longo da construção do monociclo de referência, foram testadas duas técnicas de controle ótimo: primeiro, um LQR (*Linear Quadratic Regulator*), e depois um controlador robusto projetado por norma  $\mathcal{H}_2$  (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020). São técnicas de controle de espaço de estado por *feedback*, e conforme a literatura publicada, ambas são capazes de estabilizar a planta rapidamente e usam algoritmos similares.

### 1.2.1 LQR

O controle por meio do LQR é feito de forma a minimizar o índice de performance que é ponderado principalmente pelas matrizes  $Q$  e  $R$  para ser possível determinar a matriz  $K$  do vetor do controle ótimo. As matrizes  $Q$  e  $R$  são, respectivamente, as responsáveis pela importância que o modelo dá ao erro dos sinais da IMU, já filtrados, e pelo esforço de controle que é aceitável para controlar o sistema (OGATA, 2010).

A partir das matrizes  $Q$  e  $R$ , é possível obter a matriz de controle ótimo  $K$  que satisfaça a equação de custo mínimo (1.1):

$$J = \int_0^\infty x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) dx \quad (1.1)$$

A matriz  $K$  é calculada conforme (1.2):

$$K = R^{-1} B^\top P, \quad (1.2)$$

onde  $P$  é a solução da equação de Riccati (1.3):

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0. \quad (1.3)$$

Uma forma popular de projetar um controlador LQR é usando a regra de Bryson (HESPANHA, 2009), onde as matrizes  $\bar{Q}$  e  $\bar{R}$  são assumidas diagonais tal que

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } x_i^2}, \quad i \in \{1, 2, \dots, l\}$$

$$\bar{R}_{jj} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } u_j^2}, \quad j \in \{1, 2, \dots, k\}$$

e posteriormente, afinando os valores por meio de outras técnicas conforme o modelo simulado.

### 1.2.2 Controlador por norma $\mathcal{H}_2$

O espaço  $\mathcal{H}_2$  é composto por funções de transferência estritamente estáveis e próprias, ou seja, que têm sua norma  $\mathcal{H}_2$  limitadas. O controle robusto implementado visa minimizar a norma  $\mathcal{H}_2$  da função de transferência da malha fechada, de forma que considere a energia total das entradas e busca otimizar uma saída de escolha para uma condição de desempenho garantido aceitável (GEROMEL; KOROGUI, 2019).

Em geral, é usada LMI (*Linear Matrix Inequality*) para resolver problemas de otimização convexa, principalmente pela facilidade de tratar as incertezas politópicas que são limitadas por norma. Um politopo é uma representação sem modelo nominal, que pode ser obtido pela combinação convexa dos valores extremos das incertezas, como as matrizes do sistema construídas em seus vértices. A estabilidade dos vértices é uma das condições necessárias para a estabilidade robusta, que não é garantida apenas por esta condição. O custo garantido é um limitante superior da estabilidade quadrática para cada vértice do politopo, e geralmente é mais conservador que a norma  $\mathcal{H}_2$  realmente obtida para cada vértice. (PALHARES, 2023)

A diferença principal entre esta técnica e o LQR é que o controlador por norma  $\mathcal{H}_2$  comporta incertezas de parâmetros ou perturbações na planta e por isso é mais robusto do que é preciso em relação à referência, enquanto o LQR necessita de um grau de confiança maior em ambos o modelo e o sistema. No entanto, o LQR pode ser considerado um caso particular de um controlador robusto por norma  $\mathcal{H}_2$ , e assim, é esperado que hajam semelhanças entre eles, visto que é possível reproduzir o mesmo resultado que a abordagem pela equação de Riccati quando o modelo é precisamente conhecido e a equação de Riccati permite incertezas limitadas pela norma  $\mathcal{H}_2$  (NEVES, 2017; PALHARES, 2023).

Para projetar um controlador usando a norma  $\mathcal{H}_2$  de uma matriz K de ganhos, basta substituir os resultados da análise  $\mathcal{H}_2$  em malha fechada por termos na LMI.

### 1.2.3 PID em cascata

Um controlador PID é formado por três componentes: uma parcela de ganho proporcional, outra de ganho integral, e mais outra de ganho derivativo. Cada elemento tem sua função dentro do compensador:

- Ganho proporcional: produz uma saída proporcional ao erro do sistema, além de sua derivada e integral, conseguindo diminuir do tempo de pico;
- Ganho integral: produz uma saída com erro nulo em regime permanente, acumulando o erro total gerado pelo ganho proporcional e gerando ultrapassagem percentual da saída;

- Ganho derivativo: diminui o tempo de acomodação e a ultrapassagem percentual da saída, além de diminuir a velocidade com a qual a planta responde ao erro.

Analisando a matriz de transferência do sistema, se nota que é de ordem 4 e tipo 2, com zeros de ordem 2. Conforme (NISE, 2022), projetar um controlador para um sistema de ordem superior a 2 e com zeros se torna possível seguindo o procedimento descrito:

1. Esboçar o lugar geométrico das raízes de cada função de transferência.
2. Admitir que a malha fechada formada pela função de transferência não tem zeros, nem polos de ordem maior que 2, como hipótese. Assim, calcular o ganho necessário para atender as especificações de resposta transitória.
3. Justificar a hipótese anterior pela posição dos polos de ordem maior que 2 e dos zeros pois não são dominantes ou se cancelam, respectivamente.
4. Simular a solução para justificar novamente a hipótese.

Para projetar um controlador em cascata, basta admitir que o sinal de saída de uma malha fechada de controle seja a planta a ser controlada em uma nova malha fechada. Assim, um controlador em cascata tem um aspecto conforme a Figura 2.

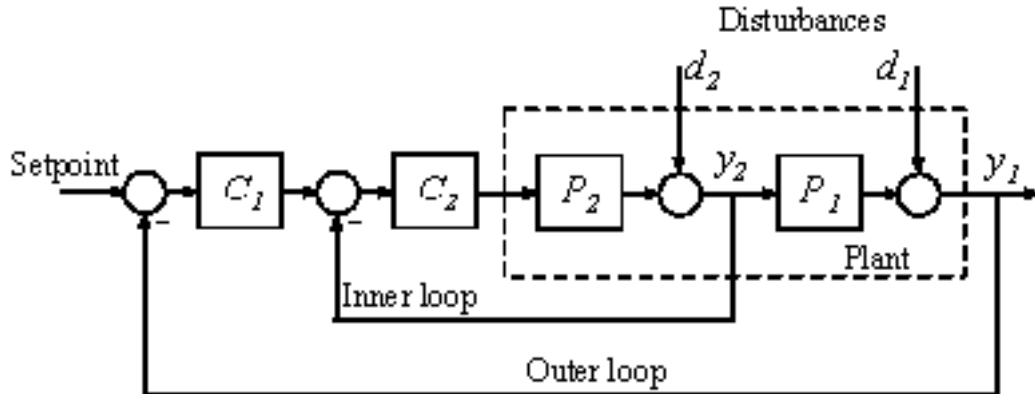


Figura 2 – Exemplo de um controlador em cascata. Retirado de (MATHWORKS, 2023).

Um dos principais casos de uso de controladores em cascata é de quando se deseja uma rejeição rápida de distúrbios provocados por ganhos não-lineares antes que se propague ao resto da planta, também podendo ser usado quando há mais de uma variável medida porém apenas uma é controlável.

Para que seja possível o uso de controladores em cascata, é necessário cumprir com três condições:

- A malha externa deverá influenciar o *loop* interno;

- A malha externa deverá ser mais rápido que o *loop* interno, de forma que poderá compensar pelas perturbações do *loop* interno sem afetar o sistema sendo controlado;
- A malha externa deverá ter perturbações menos severas do que as do *loop* interno.

Algumas das vantagens de usar controladores em cascata são menor variabilidade e intensidade dos distúrbios, além de boa rejeição a distúrbios (WATLOW, 2020).

# REFERÊNCIAS

- GEIST, A. R. et al. The wheelbot: A jumping reaction wheel unicycle. *IEEE Robotics and Automation Letters*, v. 7, n. 4, p. 9683–9690, 2022. Citado na página 8.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Robustez. In: \_\_\_\_\_. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. 2. ed. [S.l.]: Blucher, 2019. p. 279–300. Citado na página 11.
- GUO, L.; HE, K.; SONG, Y. Design of the sliding mode controller for a kind of unicycle robot. *2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*, p. 1432–1437, 2016. Citado na página 8.
- HESPANHA, J. P. Vi: Lqr/lqg optimal control. In: \_\_\_\_\_. *Linear Systems Theory*. 2. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. p. 191–196. Citado na página 10.
- HO, M.-T.; RIZAL, Y.; CHEN, Y.-L. Balance control of a unicycle robot. In: *2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1186–1191. Citado na página 8.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960. Citado na página 9.
- MATHWORKS. Mathworks, 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ug/designing-cascade-control-system-with-pi-controllers.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 12.
- MORIN, D. *Chapter 6: The Lagrangian Method*. [S.l.]: Harvard Edu, 2007. <<https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/cmchap6.pdf>>. Citado na página 10.
- MURATA, T. *Development of the unicycle-riding robot*. 2013. <<https://corporate.murata.com/newsroom/news/company/csrtopic/2008/0923>>. Citado na página 8.
- NEVES, G. P. das. *Modeling, construction and control of a self-balancing unicycle*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), 2017. Disponível em: <<https://bv.fapesp.br/pt/dissertacoes-teses/140601/modelagem-desenvolvimento-e-controle-de-um-monociclo-auto-e>>. Citado 3 vezes nas páginas 8, 9 e 11.
- NEVES, G. P. das; ANGÉLICO, B. A.; AGULHARI, C. M. Robust  $\mathcal{H}_2$  controller with parametric uncertainties applied to a reaction wheel unicycle. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 93, n. 10, p. 2431–2441, 2020. Citado na página 10.
- NISE, N. S. 8.7 projeto da resposta transitória através do ajuste de ganho. In: \_\_\_\_\_. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 7. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2022. p. 338–342. Citado na página 12.
- OGATA, K. 10-8 quadratic optimal regulator system. In: \_\_\_\_\_. *Modern Control Engineering*. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. p. 793–806. Citado na página 10.

PALHARES, R. M. *Controle Ótimo  $\mathcal{H}_2$* . [S.l.]: UFMG, 2023. Citado na página 11.

RUAN, X. et al. Lateral stabilization of a single wheel robot applying electromagnetic force. In: *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 3675–3680. Citado na página 8.

SHEN, J.; HONG, D. Omburo: A novel unicycle robot with active omnidirectional wheel. In: *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 8237–8243. Citado na página 8.

WATLOW. Watlow, 2020. Disponível em: <<https://www.watlow.com/blog/posts/benefits-of-cascade-control>>. Citado na página 13.