

Victoria Leal Garcia de Souza

Construção e projeto de controle de um monociclo autoequilibrado

Instituto de Pesquisa e Ensino (Insper)

Engenharia Mecatrônica

Iniciação Tecnológica

Orientador: Dr. Carlos Eduardo de Brito Novaes

Coorientador: Dr. Gabriel Pereira das Neves

São Paulo

Dezembro - 2023

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Desenho esquemático do monociclo, adaptado de (NEVES, 2017). . . .	8
Figura 2 – Exemplo de um controlador em cascata. Retirado de (MATHWORKS, 2023).	12
Figura 3 – Diagrama de blocos do modelo com um controlador LQR implementado.	17
Figura 4 – Diagrama de blocos do controlador LQR.	17
Figura 5 – Implementação do LQR com o modelo linearizado, em notação de espaço de estados.	18
Figura 6 – Resultados da simulação com o controlador LQR, usando o modelo não-linear.	18
Figura 7 – Simulação em malha fechada de velocidades usando um controlador PID.	21
Figura 8 – Diagrama de blocos implementado para o PID em cascata.	22
Figura 9 – Resultados da simulação da última tentativa de fazer um PID em cascata.	23
Figura 10 – Diagrama de blocos da realimentação de velocidades.	23
Figura 11 – Simulação do controle da malha usando a realimentação de velocidades.	24
Figura 12 – Simulação dos esforços de controle da realimentação de velocidades. . .	24
Figura 13 – Modelo 3D do monociclo feito por meio do CAD.	25
Figura 14 – Peça feita em CAD.	26
Figura 15 – DTM da peça.	26
Figura 16 – IMU usada para o projeto, imagem retirada de Aliexpress.	28
Figura 17 – Microcontrolador usado para o projeto, imagem retirada de Mouser. . .	28
Figura 18 – Motor da roda de inércia, imagem retirada de Servocity.	28
Figura 19 – Motor da roda em contato com o chão, imagem retirada de Polulu. . .	28

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Componentes do monociclo.	8
Tabela 2	– Tabela com os parâmetros e valores calculados do monociclo de réplica.	27
Tabela 3	– Cronograma originalmente proposto para o trabalho.	30

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional
CAD	<i>Computer-aided Design</i>
CM	Centro de massa
CNC	<i>Computerized Numerical Control</i>
DOF	<i>Degrees of Freedom</i>
DTM	Desenho Técnico Mecânico
IMU	<i>Inertial Measurement Unit</i>
LGR	Lugar Geométrico das Raízes
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
PWM	<i>Pulse Width Modulation</i>
rpm	Rotações por minuto

LISTA DE SÍMBOLOS

B_{vr}	Atrito viscoso da roda de inércia [Ns^2/rad]
B_{vw}	Atrito viscoso da roda de contato com o chão [Ns^2/rad]
d	Distância entre o CM do corpo e da roda de inércia [m]
g	Aceleração da gravidade [m/s^2]
J_{br}	Momento de inércia do corpo com a roda de inércia [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
J_{bw}	Momento de inércia do corpo com a roda [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
J_r	Momento de inércia da roda de inércia [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
J_w	Momento de inércia da roda [$\text{kg} \cdot \text{m}^2$]
K_p	Ganho proporcional
K_{er}	Constante elétrica do motor da roda de inércia [Vs^2/rad]
K_{ew}	Constante elétrica do motor da roda de contato com o chão [Vs^2/rad]
K_{tr}	Constante de torque do motor da roda de inércia [N m/A]
K_{tw}	Constante de torque do motor da roda de contato com o chão [N m/A]
L	Altura do CM do corpo em relação ao chão [m]
M_b	Massa do corpo [kg]
M_{br}	Massa do corpo com a roda de inércia [kg]
M_r	Massa da roda de inércia [kg]
M_w	Massa da roda [kg]
R_e	Raio externo da roda de inércia [m]
R_i	Raio interno da roda de inércia [m]
R_{er}	Resistência elétrica do motor da roda de inércia [Ω]
R_{ew}	Resistência elétrica do motor da roda de contato com o chão [Ω]
R_w	Raio da roda [m]

T_d	Ganho derivativo
T_i	Ganho integral
φ	Ângulo de <i>roll</i> [rad]
$\dot{\varphi}$	Velocidade angular em <i>roll</i> [rad/s]
$\ddot{\varphi}$	Aceleração angular em <i>roll</i> [rad/s ²]
ψ	Ângulo de <i>pitch</i> [rad]
$\dot{\psi}$	Velocidade angular em <i>pitch</i> [rad/s]
$\ddot{\psi}$	Aceleração angular em <i>pitch</i> [rad/s ²]
θ_r	Posição angular da roda de inércia [rad]
$\dot{\theta}_r$	Velocidade angular da roda de inércia [rad/s]
$\ddot{\theta}_r$	Aceleração angular da roda de inércia [rad/s ²]
θ_w	Posição angular da roda [rad]
$\dot{\theta}_w$	Velocidade angular da roda [rad/s]
$\ddot{\theta}_w$	Aceleração angular da roda [rad/s ²]
τ	Torque resultante no monociclo [N · m]
τ_r	Torque da roda de inércia [N · m]
τ_w	Torque da roda [N · m]

$\dot{\theta}_w$

$\dot{\theta}_w$
 $\ddot{\theta}_w$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Objetivo	9
1.2	Revisão Bibliográfica	9
1.2.1	LQR	10
1.2.2	Controlador por norma \mathcal{H}_2	11
1.2.3	PID em cascata	11
2	MODELO SIMULADO	14
2.1	Modelo linearizado	14
2.2	Controladores	15
2.2.1	LQR	15
2.2.2	PID em cascata	19
2.2.3	Controlador por realimentação de velocidades	23
3	MONOCICLO CONSTRUÍDO	25
3.1	Manufatura e construção	25
3.2	Eletrônica e programação	27
4	CRONOGRAMA REVISADO	30
	Conclusão Parcial	31
	REFERÊNCIAS	32

1 INTRODUÇÃO

Um monociclo autoequilibrado consiste em um veículo que mantém a posição de equilíbrio apenas com uma roda em contato com o chão, utilizando outro sistema de atuação para controlar o ângulo de queda lateral. Conforme a literatura encontrada, há apenas um tal monociclo na América Latina, originalmente construído em 2017 por um dos professores orientadores (NEVES, 2017). Ele possui dois ângulos controlados: *pitch* e *roll*. O controle de *pitch* é feito através da roda em contato com o chão, enquanto o ângulo de *roll* é controlado através de uma roda de reação, também chamada de roda de inércia. Atualmente o sistema não possui controle no ângulo de *yaw*.

Os ângulos de *pitch*, *roll* e *yaw* são os ângulos em torno dos eixos y , x e z , respectivamente. O desenho esquemático do monociclo, juntamente com o sistema de coordenadas de referência, é apresentado na Figura 1, adaptada de (NEVES, 2017). Na Tabela 1, podem ser encontrados os componentes principais do monociclo que estão indicados ao lado.

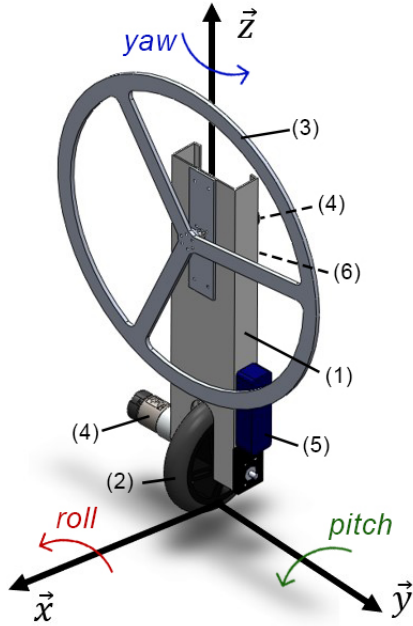


Figura 1 – Desenho esquemático do monociclo, adaptado de (NEVES, 2017).

Peça	Nome	Quantidade
1	Corpo	1
2	Roda de contato	1
3	Roda de inércia	1
4	Motor	2
5	Bateria	1
6	Componentes eletrônicos	-

Tabela 1 – Componentes do monociclo.

Há literatura significativa a respeito do controle da estabilidade estática sobre uma roda. Algumas das soluções já existentes em monociclos autônomos incluem o uso de giroscópios (MURATA, 2013), a adição de uma ou mais rodas de inércia (HO; RIZAL; CHEN, 2014; GEIST et al., 2022), o uso de força magnética (RUAN et al., 2012), massas móveis afim de mudar o centro de massa (GUO; HE; SONG, 2016) ou o uso de uma

omniwheel (SHEN; HONG, 2020).

Enquanto o sistema de acionamento de escolha é um tema muito explorado, há uma série de fatores que podem ser relevantes nessa decisão. O primeiro destes é o grau de complexidade atrelado à implementação do acionador e do controle dele, que favorece muito a escolha da roda de inércia ao invés de outros acionadores citados. O controle de um monociclo por meio de uma roda de reação é um conceito recente que tem sido estudado na última década. Ademais, replicar um monociclo onde já é conhecido o sistema de atuação traz vantagens no âmbito de melhorias na construção dele. É importante considerar como o monociclo autônomo poderia comportar outros acionadores afim de controlar o ângulo responsável por fazer curvas (*yaw*, em torno de z) para poder, posteriormente à construção de um tal monociclo, o fazer seguir trajetórias.

1.1 Objetivo

Este projeto tem como objetivo principal replicar o monociclo autônomo apresentado com a finalidade de testar diferentes controladores, incluindo uma das técnicas implementadas no monociclo de referência - LQR e controlador robusto por norma \mathcal{H}_2 - assim como um controlador PID em cascata a ser projetado.

L7 tinaia

Os objetivos secundários são relacionados a melhorias e problemas apontados que foram mencionadas na dissertação (NEVES, 2017). Por exemplo, foram observados problemas com o monociclo decorrentes da manufatura que podem ser evitados por meio do uso de processos mais robustos de manufatura subtrativa.

1.2 Revisão Bibliográfica

O sensoriamento dos ângulos de *pitch* e *roll* é feito usando o acelerômetro e giroscópio presentes na IMU (*Inertial Measurement Unit*) localizado na Figura 1, em (6). Estes sinais são interpretados pelo microcontrolador, que aciona um ou ambos os motores conectados às rodas de forma que o monociclo volte para a posição de equilíbrio vertical. A IMU é sensível a erros de medição, tanto por ser posta na localização aproximada do centro de massa do monociclo quanto por incertezas dos sensores, então para garantir maior precisão com as leituras, é aplicado um filtro de Kalman nos sinais.

O filtro de Kalman (KALMAN, 1960) é um estimador ótimo para ruído branco que trata os parâmetros do processo controlado - o sistema, distúrbios e as incertezas dos sensores - como variáveis aleatórias dentro de uma distribuição normal. Os parâmetros do filtro dependem principalmente do ganho K_m do filtro, que é atualizado conforme as medições para poder responder com maior velocidade às mudanças no sistema minimizando a covariância calculada, no caso onde há mais de uma variável. Como o filtro é dinâmico,

o peso da medição feita e do valor estimado são reguladas pelo ganho K_m , que varia com a operação do sistema.

A modelagem do monociclo foi feita usando a mecânica de Lagrange (MORIN, 2007), inicialmente o considerando como um pêndulo invertido para obter as equações de movimento. Para a entrada foram calculados momentos gerados em relação às quatro coordenadas generalizadas, e, adotando a hipótese de que não há escorregamento entre a roda de contato com o chão e o mesmo, as velocidades e posições de ambas as rodas do monociclo são as saídas. No modelo dado, elas são representadas pelos torques de ambos os motores nas saídas e seus respectivos PWMs que os controlam nas entradas. De forma que o objetivo principal seja que as rodas estejam estáticas - ou seja, não haja aceleração em ambas - os PWMs que controlam as rodas sempre irão variar entre 100% e -100%, gerando um torque máximo capaz de equilibrar o monociclo em relação ao grau de liberdade. O modelo não-linear obtido pela equação de Euler-Lagrange foi linearizado para permitir a aplicação de controle para que o sistema seja capaz de se manter equilibrado.

Ao longo da construção do monociclo de referência, foram testadas duas técnicas de controle ótimo: primeiro, um LQR (*Linear Quadratic Regulator*), e depois um controlador robusto projetado por norma \mathcal{H}_2 (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020). São técnicas de controle de espaço de estado por *feedback*, e conforme a literatura publicada, ambas são capazes de estabilizar a planta rapidamente e usam algoritmos similares.

1.2.1 LQR

O controle por meio do LQR é feito de forma a minimizar o índice de performance que é ponderado principalmente pelas matrizes Q e R para ser possível determinar a matriz K do vetor de controle ótimo. As matrizes Q e R são, respectivamente, as responsáveis pela importância que o modelo dá ao erro dos sinais da IMU, já filtrados, e pelo esforço de controle que é aceitável para controlar o sistema (OGATA, 2010).

A partir das matrizes Q e R , é possível obter a matriz de controle ótimo K que satisfaça a equação de custo mínimo (1.1):

$$J = \int_0^\infty x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) dx \quad (1.1)$$

A matriz K é calculada conforme (1.2):

$$K = R^{-1} B^\top P, \quad (1.2)$$

onde P é a solução da equação de Riccati (1.3):

$$A^\top P + P A - P B R^{-1} B^\top P + Q = 0. \quad (1.3)$$

Uma forma popular de projetar um controlador LQR é usando a regra de Bryson (HESPANHA, 2009), onde as matrizes \bar{Q} e \bar{R} são assumidas diagonais tal que

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } x_i^2}, \quad i \in 1, 2, \dots, l$$

$$\bar{R}_{jj} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } u_j^2}, \quad j \in 1, 2, \dots, k$$

e posteriormente, refinando os valores por meio de outras técnicas conforme o modelo simulado.

1.2.2 Controlador por norma \mathcal{H}_2

O espaço \mathcal{H}_2 é composto por funções de transferência estritamente estáveis e próprias, ou seja, que têm sua norma \mathcal{H}_2 limitadas. O controle robusto implementado visa minimizar a norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência da malha fechada, de forma que considere a energia total das entradas e busca otimizar uma saída de escolha para uma condição de desempenho garantido aceitável (GEROMEL; KOROGUI, 2019).

Em geral, é usada LMI (*Linear Matrix Inequality*) para resolver problemas de otimização convexa, principalmente pela facilidade de tratar as incertezas politópicas que são limitadas por norma. Um politopo é uma representação sem modelo nominal, que pode ser obtido pela combinação convexa dos valores extremos das incertezas, como as matrizes do sistema construídas em seus vértices. A estabilidade dos vértices é uma das condições necessárias para a estabilidade robusta, que não é garantida apenas por esta condição. O custo garantido é um limitante superior da estabilidade quadrática para cada vértice do politopo, e geralmente é mais conservador que a norma \mathcal{H}_2 realmente obtida para cada vértice. (PALHARES, 2023)

A diferença principal entre esta técnica e o LQR é que o controlador por norma \mathcal{H}_2 comporta incertezas de parâmetros ou perturbações na planta e por isso é mais robusto do que é preciso em relação à referência, enquanto o LQR necessita de um grau de confiança maior em ambos o modelo e o sistema. No entanto, o LQR pode ser considerado um caso particular de um controlador robusto por norma \mathcal{H}_2 , e assim, é esperado que hajam semelhanças entre eles, visto que é possível reproduzir o mesmo resultado que a abordagem pela equação de Riccati quando o modelo é precisamente conhecido, e que a equação de Riccati permite incertezas limitadas pela norma \mathcal{H}_2 (NEVES, 2017; PALHARES, 2023).

Para projetar um controlador usando a norma \mathcal{H}_2 de uma matriz K de ganhos, basta substituir os resultados da análise \mathcal{H}_2 em malha fechada por termos na LMI.

1.2.3 PID em cascata

Um controlador PID é formado por três componentes: uma parcela de ganho proporcional, outra de ganho integral, e mais outra de ganho derivativo. Cada elemento tem

sua função dentro do compensador:

- Ganho proporcional: produz uma saída proporcional ao erro do sistema, conseguindo diminuir o tempo de pico;
- Ganho integral: produz uma saída com erro nulo em regime permanente, acumulando o erro total gerado pelo ganho proporcional e gerando ultrapassagem percentual da saída;
- Ganho derivativo: diminui o tempo de acomodação e a ultrapassagem percentual da saída, além de diminuir a velocidade com a qual a planta responde ao erro.

Analisando a matriz de transferência do sistema, se nota que é de ordem 4 e tipo 2, com zeros de ordem 2. Enquanto se sabe que controladores PID são bastante efetivos em sistemas de primeira ou segunda ordem, ou até mesmo de ordens maiores que possam ser aproximados por sistemas mais simples ao ignorar as dinâmicas mais rápidas dos polos, serão aplicadas diversas técnicas diferentes para projetar um controlador PID em cascata para o sistema do monociclo. Ao projetar mais de um controlador PID em forma de cascata, a chance do sistema ser possível de ser controlado por um PID aumentam, principalmente pelas características de um sistema em cascata.

Para projetar um controlador em cascata, basta admitir que o sinal de saída de uma malha fechada de controle seja a planta a ser controlada em uma nova malha fechada. Assim, um controlador em cascata tem um aspecto conforme a Figura 2.

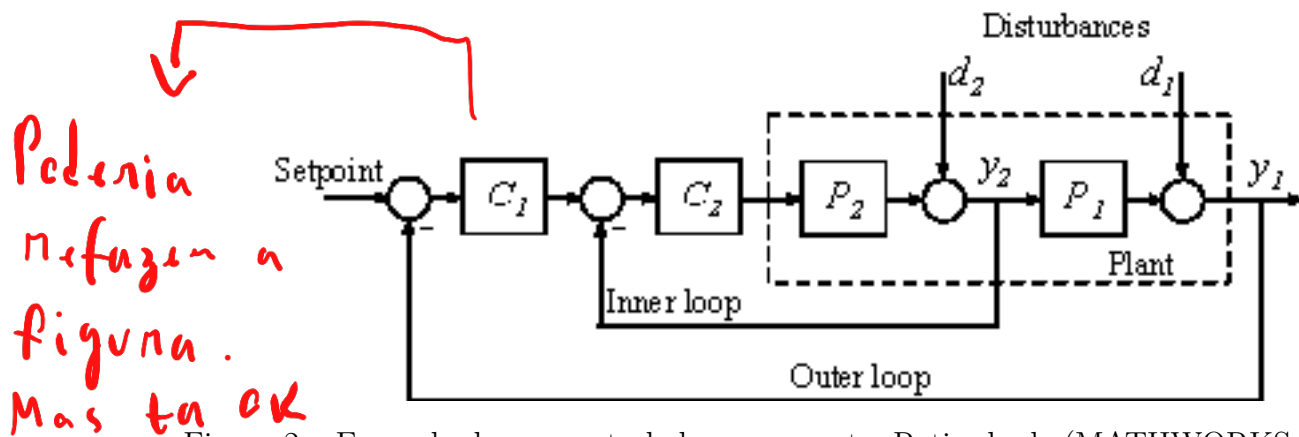


Figura 2 – Exemplo de um controlador em cascata. Retirado de (MATHWORKS, 2023).

Um dos principais casos de uso de controladores em cascata é de quando se deseja uma rejeição rápida de distúrbios provocados por ganhos não-lineares antes que se propague ao resto da planta, também podendo ser usado quando há mais de uma variável medida porém apenas uma é controlável.

Para que seja possível o uso de controladores em cascata, é necessário cumprir com algumas condições:

- A malha externa exerce autoridade sobre a malha interna, de forma que a interna obedece prontamente os comandos da externa;
- A malha interna deverá rejeitar perturbações de modo que não afete a malha externa.

Algumas das vantagens de usar controladores em cascata são menor variabilidade e intensidade dos distúrbios, além de boa rejeição a distúrbios (WATLOW, 2020).

2 MODELO SIMULADO

De forma a validar o modelo não-linearizado da Equação (2.1),

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}(-N(q, \dot{q}) - O(q) + Pu) \quad (2.1)$$

apresentado na dissertação (NEVES, 2017), foi feito um modelo simulado em MATLAB®.

Conforme o modelo, caso a posição inicial do monociclo fosse no ponto de equilíbrio, o monociclo deverá se manter equilibrado enquanto qualquer deslocamento na posição inicial deverá causar uma eventual queda. Foi verificado que o ponto de convergência do modelo não-linear, quando controlado, é de $\pm 8^\circ$, usando o modelo simulado com o LQR implementado que será discutido na seção 2.2.1.

O modelo simulado conta atualmente com duas implementações de controladores: um LQR e uma realimentação de velocidades por PID. Devido à semelhança entre a resposta produzida pelos controladores LQR e por \mathcal{H}_2 , além da complexidade muito maior do segundo controlador, foi escolhido implementar apenas o LQR para fins de comparação com o monociclo de referência.

2.1 Modelo linearizado

Para projetar os controladores, foi usado o modelo linearizado (NEVES, 2017), em notação de espaço de estados (2.2),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde o vetor de estados é

$$x^\top = [\theta_R \ \varphi \ \theta_W \ \psi \ \dot{\theta}_R \ \dot{\varphi} \ \dot{\theta}_W \ \dot{\psi}]$$

~ espaço

que pode ser reescrito no formato de $\ddot{q}^\top = [q \ \dot{q}]$ [rad/s²], sendo que os estados do vetor q são, respectivamente:

- θ_R : posição angular da roda de inércia [rad]
- φ : posição angular do monociclo em *pitch* [rad]
- θ_W : posição angular da roda de contato com o chão [rad]
- ψ : posição angular do monociclo em *roll* [rad]

$\ddot{q} \neq \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \dot{q} \end{bmatrix}$
 $x = \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix}$

O vetor u de entrada é composto por ambas as entradas de PWM, $u^\top = [PWM_R \ PWM_W]$.

As matrizes A, B e C são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & -21.9599 & 0 & 0 & -52.1139 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 21.9599 & 0 & 0 & 5.1226 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -151.8787 & 0 & 0 & -67.5793 & 44.9081 \\ 0 & 0 & 0 & 58.3574 & 0 & 0 & 15.6751 & -10.4165 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 557.0062 & 0 \\ -54.7512 & 0 \\ 0 & 400.2352 \\ 0 & -92.8352 \end{bmatrix}$$

e a matriz identidade 8×8 , visto que todas as variáveis de estado são medidas pela IMU ou observadas.

Como os estados 1 e 3 do vetor de estado (θ_r e θ_w , respectivamente) não são controlados, eles podem ser removidos das três matrizes, removendo as respectivas linhas e colunas correspondentes. Assim, o novo vetor de estado x_R é dado por:

$$x_R = [\varphi \ \psi \ \dot{\theta}_R \ \dot{\varphi} \ \dot{\theta}_W \ \dot{\psi}]^\top$$

2.2 Controladores

Para o modelo simulado foram empregados os controladores LQR e realimentação de velocidades por meio de PID, substituindo o formato mais tradicional de um PID em cascata.

2.2.1 LQR

Usando as matrizes reduzidas A_R e B_R , a matriz Q deverá ser diagonal de dimensões 6×6 enquanto a matriz R deverá ser uma diagonal de dimensões 2×2 . A matriz R inicialmente é posta como a matriz identidade 2×2 , enquanto a matriz Q é inicialmente

adotada como

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{ângulo máximo}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ângulo máximo}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{rotação máxima}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\text{rotação máxima}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Os valores foram estimados considerando a velocidade máxima atingida pelo motor acionador, o maior ângulo de inclinação do sistema e a velocidade máxima de um dado ângulo para ambos *pitch* e *roll*, conforme (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020).

Feito o ajuste fino da matriz Q por meio do modelo simulado, onde é verificado que não há saturação dos PWMs e que a simulação é parada caso o monociclo colida com o chão, foi realizada uma simulação. A matriz K indicada é encontrada por meio de (1.2). O ajuste da matriz Q foi feito observando as posições e velocidades dos ângulos controlados, além dos torques em ambos os motores e os PWMs.

Ao final do ajuste, a matriz Q encontrada é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \left(\frac{60}{118}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{60}{118}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

onde o ângulo máximo é de 15° e a rotação máxima é de 118 rpm.

A resultante matriz K é

$$K = \begin{bmatrix} -18.0798 & 0.0000 & -0.2173 & -5.9749 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -10.7524 & -0.0000 & -0.0000 & -0.3561 & -2.1300 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Conforme as Figuras 3 e 4, foi montado um controlador LQR via Simulink®.

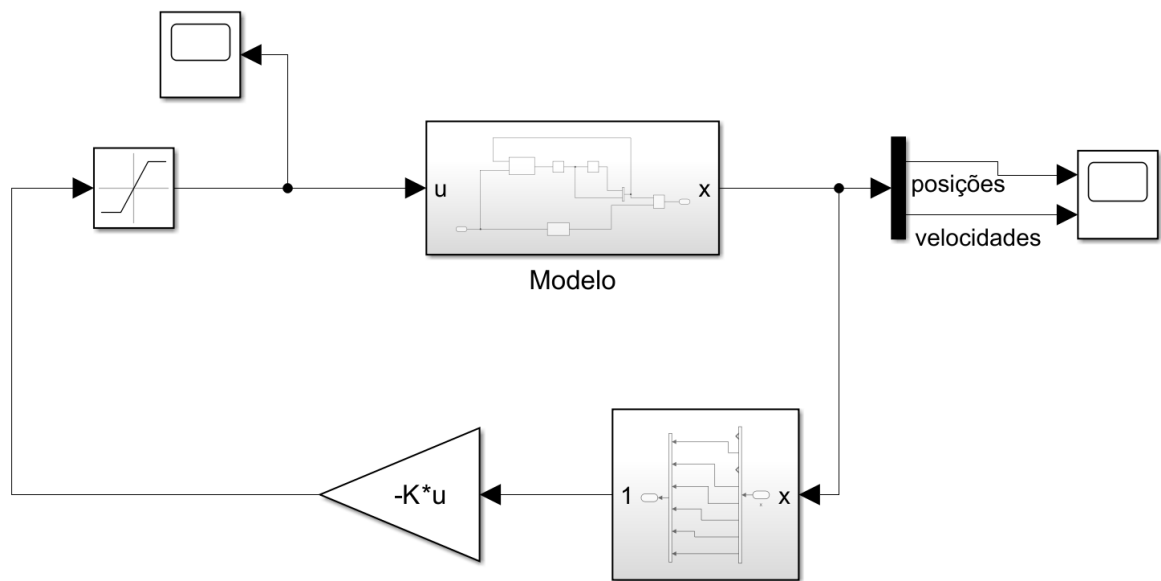


Figura 3 – Diagrama de blocos do modelo com um controlador LQR implementado.

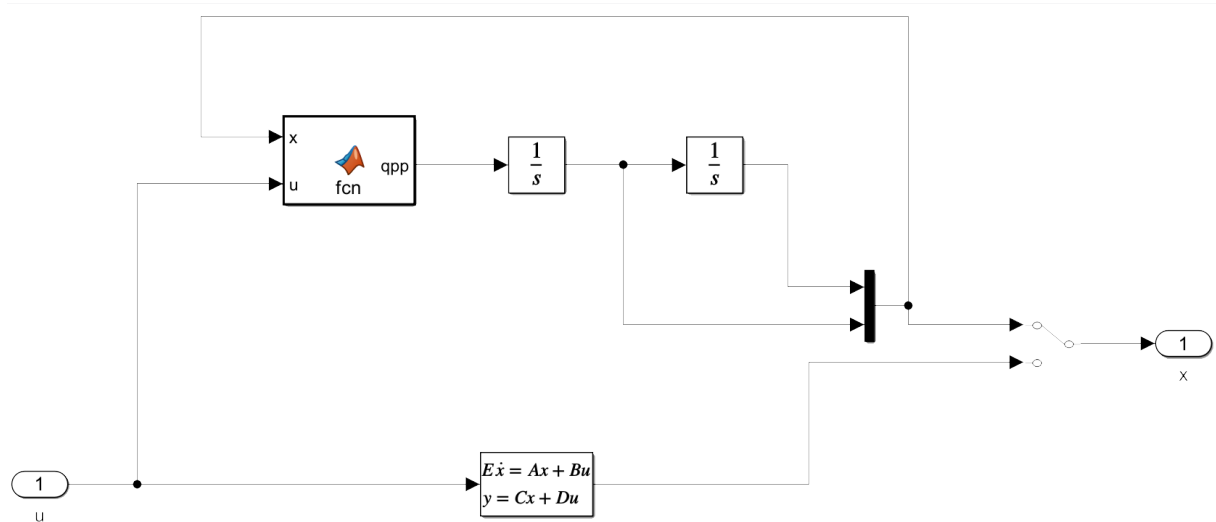


Figura 4 – Diagrama de blocos do controlador LQR.

O código dentro do bloco *MATLAB Function* contém o modelo não-linear, onde x é composto por $[\theta_R \ \varphi \ \theta_W \ \psi \ \dot{\theta}_R \ \dot{\varphi} \ \dot{\theta}_W \ \dot{\psi}]^T$, ou seja, segue a estrutura de $x = [q \ \dot{q}]^T$.

```

1 function qpp = fcn(x,u)
2
3 M = function_M(x(4));
4 V = function_V(x(6),x(4),x(8),x(5),x(7));
5 G = function_G(x(2),x(4));
6 P = function_P();
7
8 qpp = M^-1*(-V-G+P*u);

```

Listing 2.1 – Código dentro do bloco *MATLAB Function*.

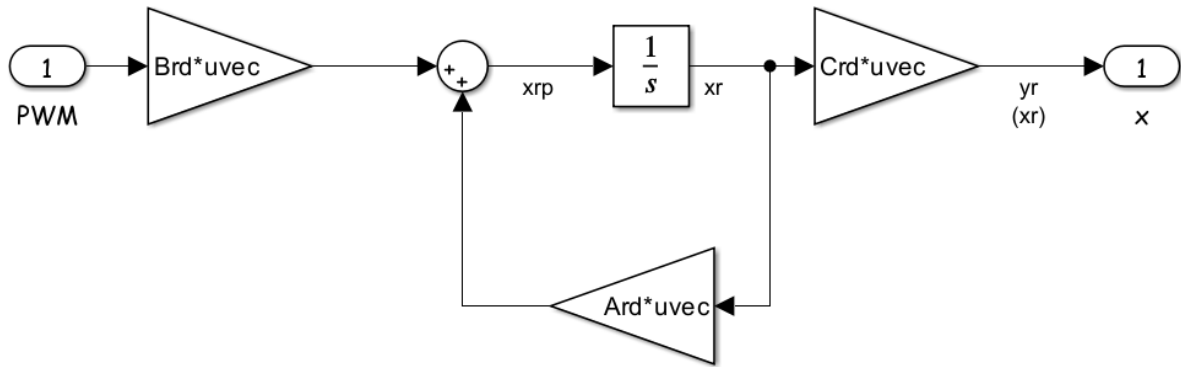


Figura 5 – Implementação do LQR com o modelo linearizado, em notação de espaço de estados.

Considerando o modelo linear, é aplicado o controle visto na Figura 5, onde A_{rd} , B_{rd} e C_{rd} são as matrizes da notação de estado de espaço já reduzidas, conforme o vetor x_R . Para ambos os modos do controlador LQR, o resultado da simulação com posição inicial em $X_0 = [0 \ 5^\circ \ 0 \ -5^\circ]^\top$ é idêntico, e pode ser encontrado na Figura 6.

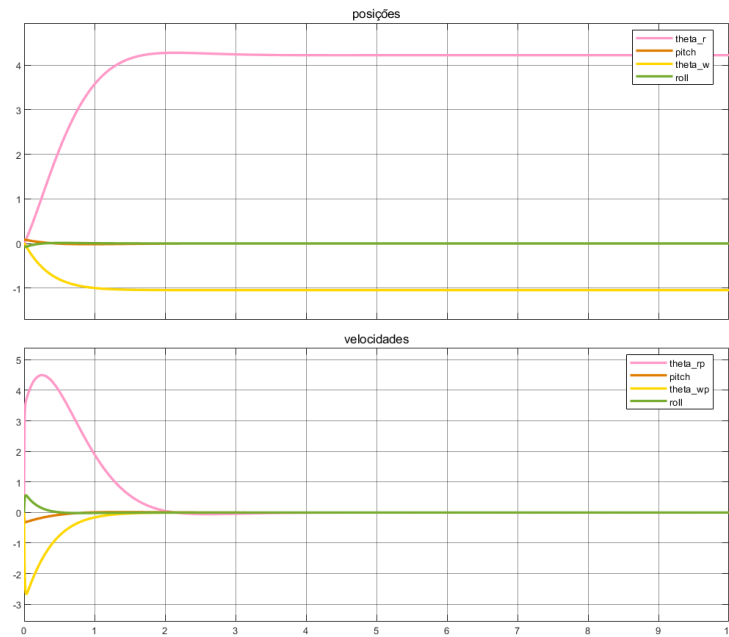


Figura 6 – Resultados da simulação com o controlador LQR, usando o modelo não-linear.

2.2.2 PID em cascata

Devido à complexidade da planta, foi escolhido projetar uma série de compensadores PID em cascata para controlar o sistema. Assim, primeiro foi necessário controlar a malha de velocidades para, por fim, poder controlar a malha de posições.

Começando com as velocidades, foram projetados controladores para um tempo de acomodação $T_s \leq 0,5$ s. A partir da linearização do modelo simulado, foram encontradas as funções de transferência para cada variável no vetor de estado x_R conforme (2.6):

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.6)$$

Com as funções de transferência para ambos os PWMs e todas as variáveis de estado, foi possível montar a matriz de transferência (2.7), de onde foi possível extrair as equações características das funções de transferência das rodas de inércia e de contato com o chão (2.8).

$$G = \begin{bmatrix} \frac{529.6s^2 - 103e04}{s^4 + 473s^3 - 21.96s^2 - 868.9s} & 0 \\ \frac{529.6s^2 - 1.103e04}{s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9} & 0 \\ \frac{-27.38s - 1.399e-13}{s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9} & 0 \\ \frac{-27.38s^2 - 1.399e-13s}{s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9} & 0 \\ 0 & \frac{333.2s^2 - 2.959e-13s - 9257}{s^4 + 44.91s^3 - 58.36s^2 - 1039s} \\ 0 & \frac{333.2s^2 - 2.959e-13s - 9257}{s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039} \\ 0 & \frac{-67.07s - 1.496e-13}{s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039} \\ 0 & \frac{-67.07s^2 - 1.496e-13s}{s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039} \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} eq_R &= s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9 \\ eq_W &= s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em seguida, houve uma tentativa de iniciar o procedimento descrito por (NISE, 2022), que constata que projetar um controlador para um sistema de ordem superior a 2 e com zeros se torna possível ao:

1. Esboçar o LGR de cada função de transferência.
2. Admitir que a malha fechada formada pela função de transferência não tem zeros, nem polos de ordem maior que 2, como hipótese. Assim, calcular o ganho necessário para atender as especificações de resposta transitória.
3. Justificar a hipótese anterior pela posição dos polos de ordem maior que 2 e dos zeros, pois não são dominantes ou se cancelam, respectivamente.
4. Simular a solução para justificar novamente a hipótese.

Tanto no caso da equação característica da roda de inércia (eq_R), cujos polos são $[-41.7576 \ 4.5754 \ -4.5478]$, quanto no caso da equação característica da roda em contato com o chão (eq_W), cujos polos são $[-45.6896 \ 5.1744 \ -4.3948]$, há nitidamente um par de polos mais dominantes. Os zeros se encontram muito próximos da origem e assim, não é possível concluir que eles se cancelem com os polos, invalidando a hipótese do item 2. Como a hipótese do item 2 do procedimento é rejeitada, é inviável fazer um compensador PID em cascata por meio deste procedimento. Adicionalmente, o quase-cancelamento dos polos e zeros mais perto da origem gera uma dinâmica que não pode ser ignorada no sistema, em especial devido aos polos não-estáveis de ambas as equações características.

Em seguida, foi usado o segundo método da regra de Ziegler-Nichols como ponto de partida para os valores das componentes proporcional, integral e derivativa, conforme (2.9) e (2.10):

$$\begin{aligned} K_p &= 0.6K_{cr} \\ T_i &= 0.5P_{cr} \\ T_d &= 0.125P_{cr} \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$G_c(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (2.10)$$

onde K_{cr} é encontrado pelo esboço do LGR, sendo este o ganho crítico no diagrama, e P_{cr} é encontrado considerando a frequência crítica ω_{cr} tal que $P_{cr} = \frac{2\pi}{\omega_{cr}}$.

O segundo método foi usado pelo conhecimento do modelo matemático que rege o sistema, dado por (2.1), e assim, o compensador foi estimado como sendo:

$$\begin{aligned} K_p &= 12.49 \\ T_i &= 0.7500 \\ T_d &= 0.1875 \end{aligned} \quad (2.11)$$

ou seja, a função de transferência do compensador seria:

$$G_c(s) = 12.49 \left(1 + \frac{1}{0.7500s} + 0.1875s \right) \quad (2.12)$$

Após o uso de *tuners* nativos do MATLAB®, ainda assim os zeros se fazem notáveis na resposta dos sistemas, conforme se pode ver na Figura 7. Tradicionalmente, em um sistema sem os zeros causando dinâmicas adicionais na planta, o comportamento na Figura 7 das linhas verde e laranja não fugiria tanto da referência em vermelho. A regra de Ziegler-Nichols deveria ser capaz de projetar um compensador que elimine por completo efeitos não-desejados como, neste caso, a ultrapassagem percentual alta em ambas as rodas. Devido a problemas relacionados com a documentação desta tentativa, não foi possível incluir uma imagem dos esforços de controle utilizando esta técnica junto à simulação.

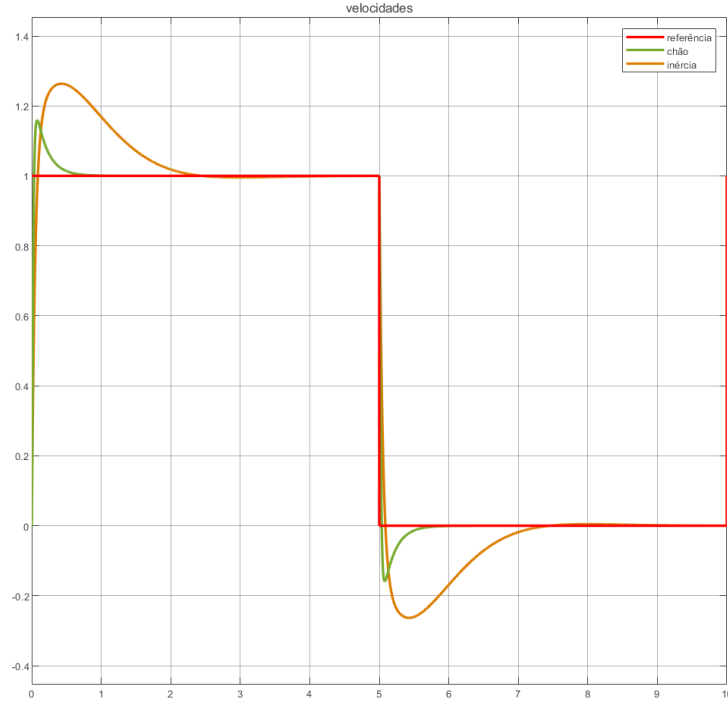


Figura 7 – Simulação em malha fechada de velocidades usando um controlador PID.

No entanto, como já constatado, o quase-cancelamento dos polos e zeros muito próximos da origem tornam o sistema muito mais complexo de controlar. Por isso, mais um método foi experimentado para tentar obter os valores de K_p , T_i e T_d , adotando a técnica de espaço de estados. Primeiro, cada função de transferência foi descrita como um espaço de estados onde

$$\begin{aligned} x_1 &= \text{posições} & \dot{x}_1 &= \text{velocidades} \\ x_2 &= \text{velocidades} & \dot{x}_2 &= \text{acelerações} \\ x_3 &= \text{acelerações} & \dot{x}_3 &= \text{jerk} \end{aligned}$$

Em seguida, sabendo que a saída u pode ser descrita como

$$u = -Kx, \quad (2.13)$$

a fórmula de Ackermann (2.14)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C \frac{\text{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)} B, \quad (2.14)$$

pode ser usada para encontrar a matriz K de *feedback* de malha fechada, tendo como polos desejados $[-10 \quad -5 + 5i \quad -5 - 5i]$. Usando o comando `acker` no MATLAB®, foram obtidos os valores de K_p , T_i e T_d . Assim, uma nova matriz de transferência pode ser feita

composta dos compensadores para cada variável de estado no vetor x_R :

$$\begin{bmatrix} \frac{-0.7696s^2+0.1161s+0.4911}{s} & 0 \\ \frac{[31.00s^2-4.676s-19.79]}{s} & 0 \\ \frac{[31.00s^2-4.676s-19.79]}{s} & 0 \\ 0 & \frac{0.1144s^2+0.0099s+0.0589}{s} \\ 0 & \frac{-15.79s^4-710.44s^3+860.1s^2+16480s+1352}{s^4+44.91s^3-58.36s^2-1039s} \\ 0 & \frac{-15.79s^2-1.366s-8.125}{s} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

No entanto, não foi possível estabilizar a planta com os compensadores projetados.

Usando o diagrama de blocos visto na Figura 8, foi feita uma última tentativa para controlar o sistema com um simples PID em cascata em seu formato mais tradicional usando a plataforma *pidTuner* do MATLAB®:

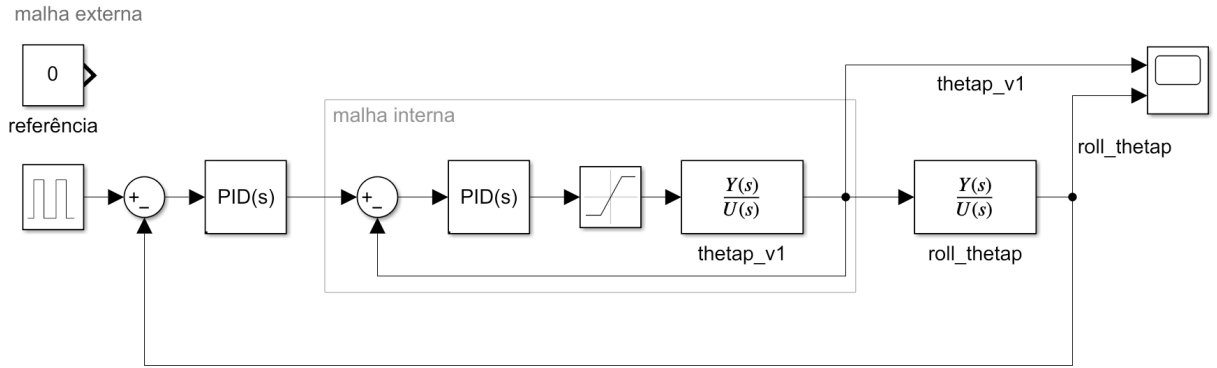


Figura 8 – Diagrama de blocos implementado para o PID em cascata.

Assim como as tentativas prévias, a dinâmica causada pelos polos e zeros que quase se cancelam é impossível de ignorar e não é possível controlar o sistema com este estilo de controlador. Na Figura 9 é possível ver que o sistema é completamente instável, e assim, nem foram simulados os esforços de controle.

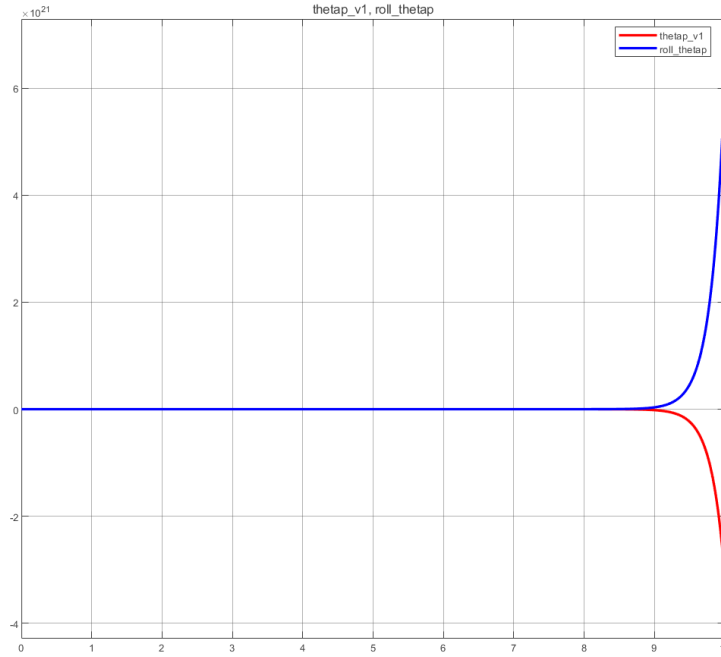


Figura 9 – Resultados da simulação da última tentativa de fazer um PID em cascata.

2.2.3 Controlador por realimentação de velocidades

De forma a reimaginar o controlador PID em cascata, foi feito um controlador que funciona por meio da realimentação de velocidades do sistema (Figura 10). Assim como o PID em cascata apresentado na Figura 2, ele trabalha com o controle da malha de velocidades (a malha interna) pois é entendido que o monociclo terá atingido seu ponto de equilíbrio quando as velocidades em ambos os ângulos de *pitch* e *roll*, além das velocidades dos acionadores, sejam nulas.

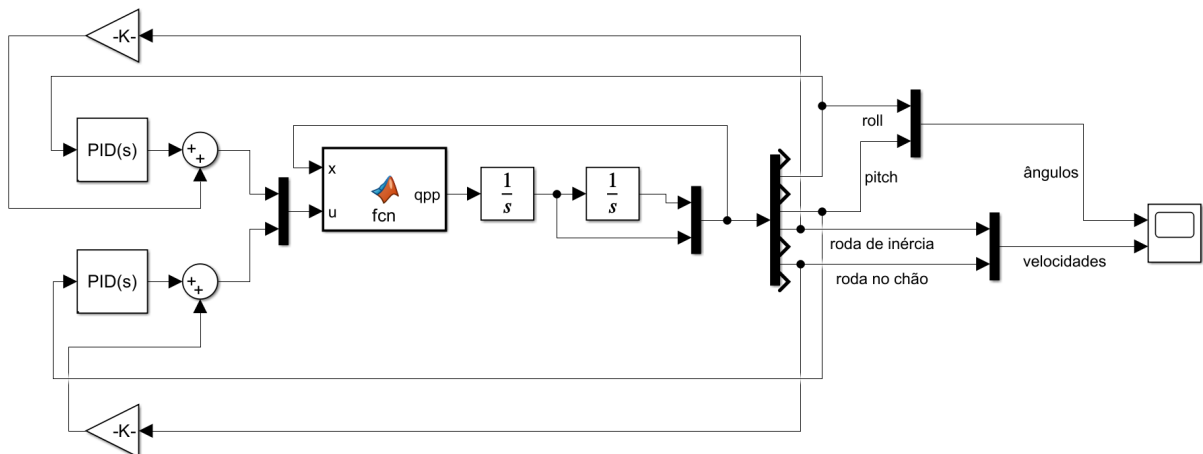


Figura 10 – Diagrama de blocos da realimentação de velocidades.

Vou
Mandar
áudio

 O sistema funciona por meio de dois controladores concorrentes um com o outro, que representam as malhas interna e externa do controlador PID em cascata mais tradicional. Os controladores PID que agem nas velocidades em *pitch* e *roll*, com valores de ganhos cerca de 100 vezes o tamanho dos ganhos K das rodas (de inércia e em contato com o chão), têm um efeito muito maior na planta e tem como função principal levar as velocidades em ambos os ângulos até muito próximo de 0 rad/s. Isto é comparável ao que se diz a respeito da autoridade que a malha externa exerce sobre a malha interna. Quando estas velocidades chegarem a valores tão baixos, os controladores que agem sobre as velocidades das rodas são mais dominantes e conseguem levar a velocidade das rodas até 0, ou muito próximo disso. Abaixo, na Figura 11, é possível ver a simulação do controle, e na Figura 12 ao lado, os esforços de controle:

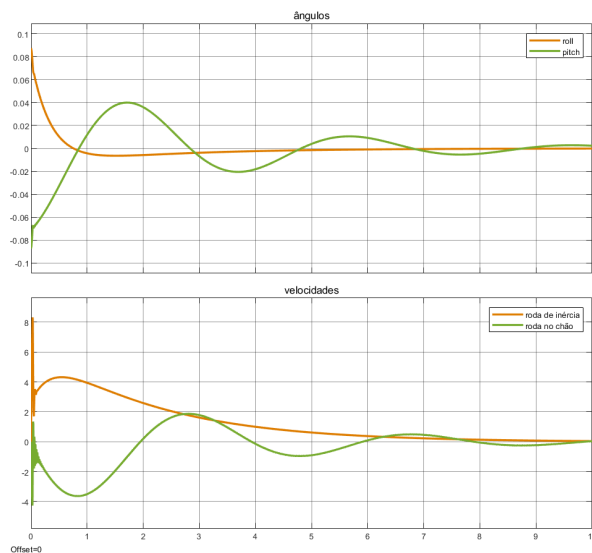


Figura 11 – Simulação do controle da malha usando a realimentação de velocidades.

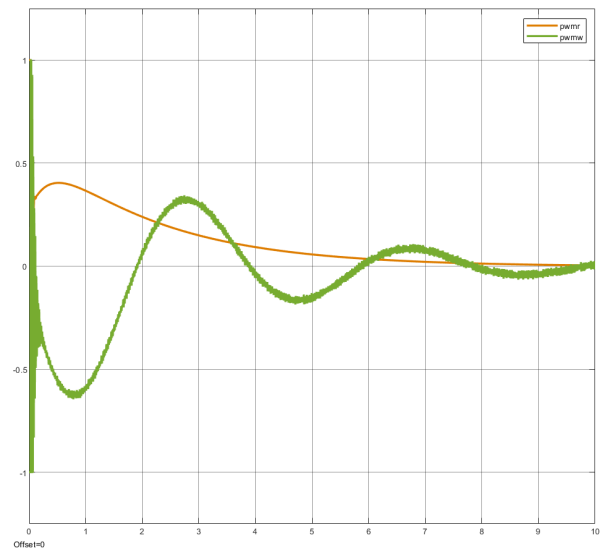


Figura 12 – Simulação dos esforços de controle da realimentação de velocidades.

Como se pode ver, a condição inicial de $x^T = [0 \ 5^\circ \ 0 \ -5^\circ]$ foi rapidamente corrigida para a condição de 0° , e a velocidade em ambos os ângulos também foi completamente reduzida até zero. Na Figura 12 se nota a saturação instantânea do motor que controla a roda em contato com o chão, e também há a presença de um leve ruído, nenhum dos dois que se vê no motor controlando a roda de inércia. O ruído pode ser completamente reduzido diminuindo o passo do simulador de 0,5 s para 0,001 s, então ele foi desconsiderado como um erro numérico. A saturação, no entanto, é muito provavelmente devida ao aumento inicial da velocidade em *roll*. Se acredita que é possível que no monociclo construído isso não chegue a acontecer devido a pequenas não-linearidades não consideradas no modelo, como o coeficiente de atrito da roda com o chão.

3 MONOCICLO CONSTRUÍDO

3.1 Manufatura e construção

Tendo conhecimento de algumas falhas na manufatura do primeiro monociclo, o segundo foi projetado para resolver alguns destes problemas. Primeiro, foi feito o seu modelo 3D no programa Siemens NX®, que pode ser visto na Figura 13:

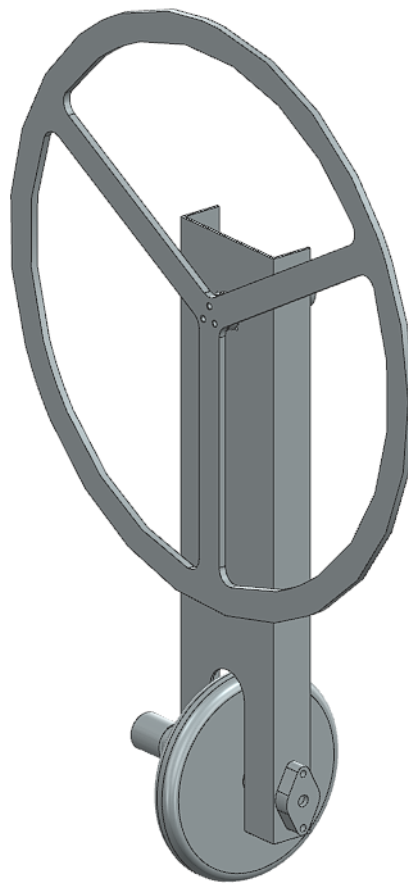


Figura 13 – Modelo 3D do monociclo feito por meio do CAD.

Como a roda de inércia do monociclo de referência tem um diâmetro muito grande, foi pensada uma troca de material tal que fosse possível manter um momento de inércia similar enquanto fosse possível fazer uma roda menor, usando um material mais denso (aço 3340). Devido ao aumento de massa e a subsequente maior demanda de torque nos motores que isso acarretaria, foi decidido contra a mudança de material de alumínio 6061 para aço 3340.

Assim como o monociclo de referência, o corpo e roda de inércia serão feitos de

alumínio 6061, sendo o corpo cortado de uma viga com perfil U de dimensões 93x30 mm e 2mm de espessura, e a roda cortada de uma chapa de 5mm de espessura. Foi apresentado um problema no monociclo de referência quanto à forma de acoplamento da roda de inércia ao eixo de seu respectivo motor, e foi encontrada uma solução que evite este mesmo problema para o monociclo a ser construído. Foi projetada uma peça em potencial que poderia solucionar o problema, e tal peça pode ser vista nas Figuras 14 e 15:

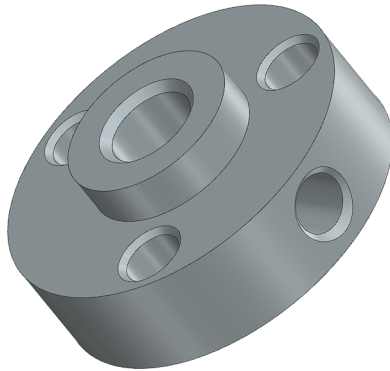


Figura 14 – Peça feita em CAD.

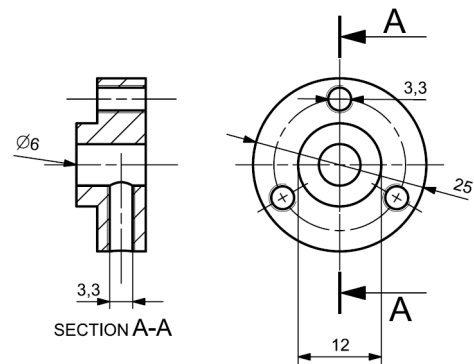


Figura 15 – DTM da peça.

Sendo construída de alumínio também, ela pode acabar acarretando o mesmo problema que a peça original: gerar folga no eixo do motor e fazer a roda de inércia girar em falso. No entanto, ela é uma solução viável por acoplar a roda ao eixo de uma forma diferente e também apresenta mais uma função, que é de ser uma espécie de *failsafe* caso haja muita demanda de torque no motor, cedendo antes de causar dano à caixa de redução do motor.

A roda de contato com o chão é uma roda de patinete, escolhida por ser leve e apresentar maior contato com a superfície do chão do que rodas similares, como a roda de carro de supermercado, por exemplo. Como quanto maior a superfície de contato entre a roda e o chão, mais fácil é de atingir o equilíbrio estático do monociclo físico, é muito relevante o perfil da roda escolhida.

A função principal do CAD do monociclo, além de gerar os DTMs para a fabricação, é a obtenção de dados que seriam muito difíceis o cálculo manual, sendo estes principalmente os momentos de inércia em cada direção e de cada peça ou conjunto de peças. Para que os dados sejam o mais próximos da realidade possível, foram estimadas as massas dos motores, bateria e componentes eletrônicos, que foram postos aproximadamente onde estarão no monociclo construído.

Por fim, os dados que correspondem ao monociclo a ser construído, por meio do CAD podem ser encontrados na Tabela 2 a seguir.

Símbolo	Parâmetro	Valor	Unidade
R_e	Raio externo da roda de inércia	0.2	m
R_i	Raio interno da roda de inércia	0.18	m
R_w	Raio da roda em contato com o chão	0.071	m
L	Altura do CM	0.18632	m
d	Distância entre o CM e o centro da roda de inércia	0.1503	m
M_r	Massa da roda de inércia	0.4695	kg
M_b	Massa do corpo	0.3031	kg
M_w	Massa da roda em contato com o chão	0.294	kg
g	Aceleração da gravidade	9.81	m/s ²
J_r	Momento de inércia da roda de inércia (YY)	0.01337	kgm ²
J_w	Momento de inércia roda de contato com o chão (XX)	0.0013	kgm ²
J_{br}	Momento de inércia do corpo e roda de inércia (YY)	0.0406	kgm ²
J_{bw}	Momento de inércia do corpo e roda de contato com o chão (XX)	0.0328	kgm ²
K_{tr}	Constante de torque do motor da roda de inércia	0.3383	N m/A
K_{er}	Constante elétrica do motor da roda de inércia	0.9454	Vs ² /rad
R_{er}	Resistência elétrica do motor da roda de inércia	0.6	Ω
K_{tw}	Constante de torque do motor da roda de contato com o chão	0.3531	N m/A
K_{ew}	Constante elétrica do motor da roda de contato com o chão	1.3465	Vs ² /rad
R_{ew}	Resistência elétrica do motor da roda de contato com o chão	2.4	Ω
B_{vr}	Atrito viscoso da roda de inércia (estimado)	0.1	Ns ² /rad
B_{vw}	Atrito viscoso da roda em contato com o chão (estimado)	0.1	Ns ² /rad

Tabela 2 – Tabela com os parâmetros e valores calculados do monociclo de réplica.

3.2 Eletrônica e programação

Foi iniciada a elaboração de métodos de leitura dos sensores presentes na IMU, de modelo GY-86 (10DOF) (Figura 16). Nela estão presentes um giroscópio e acelerômetro (MPU6050), ambos de 3 eixos, um magnetômetro de 3 eixos (HMC5883L) e um barômetro (MS5611). Primeiro está sendo feito o estudo das leituras do sensor MPU6050, de forma que permitam indicar a posição do monociclo em *pitch* (φ) e *roll* (ψ). Como o sensor é sujeito a erros de medição, será aplicado um filtro de Kalman nas leituras, de forma a garantir um pouco mais de acurácia. Está sendo usada uma placa FRDM-K64 (Figura 17) como microcontrolador, cujo sistema utiliza `mbed` nas linguagens C e C++.

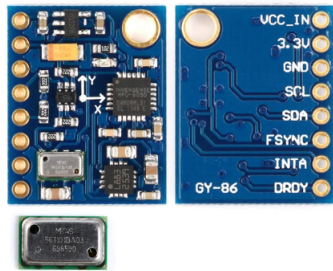


Figura 16 – IMU usada para o projeto, imagem retirada de [Aliexpress](#).



Figura 17 – Microcontrolador usado para o projeto, imagem retirada de [Mouser](#).

Os motores utilizados na roda de inércia (Figura 18) e na roda de contato com o chão (Figura 19) são os mesmos utilizados no monociclo de referência:



Figura 18 – Motor da roda de inércia, imagem retirada de [Servocity](#).

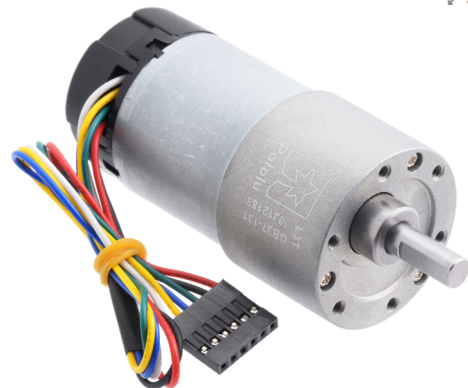


Figura 19 – Motor da roda em contato com o chão, imagem retirada de [Polulu](#).

Será aplicado um filtro passa-baixa no motor da roda de inércia devido ao fenômeno de torque dinâmico que pode ser fatal para o motor selecionado. O torque dinâmico pode ser melhor explicado pelo resultado que ele aplica em uma caixa de redução: enquanto a engrenagem ao fim da redução tenta girar ao máximo em um sentido, a primeira engrenagem da redução todavia se encontra girando no outro, causando o efeito aparente de que há duas vezes o torque máximo na engrenagem do centro. Adotando uma aproximação

do torque dinâmico (3.1):

$$\tau_{dinmico} = \frac{|\Delta\omega|}{\Delta t} J \quad (3.1)$$

onde $\Delta\omega$ é a variação da velocidade angular, Δt é o intervalo de tempo no qual ocorre a variação e J é o momento de inércia da roda de inércia, se sabe que o pior desempenho garantido do sistema é quando $\Delta\omega = 2\omega$ e $\Delta t \rightarrow 0$, causando $\tau_{dinmico} \rightarrow \infty$. Com o filtro (3.2),

$$G_{fpb} = \frac{30}{s + 30} \quad (3.2)$$

o sistema passa a ter uma constante de tempo $\tau = \frac{1}{30}$ s, que significa que, após 4τ , quando o sistema tiver chegado a 98% do seu valor final em resposta ao degrau, terá passado 1,333s. Voltando em (3.1),

$$\tau_{dinmico} = \frac{2 \cdot \left(118 \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{60}\right)}{1.333} \cdot 0.01337 = 2,4778 \text{ N m} \quad (3.3)$$

Como o valor máximo do torque dinâmico é de menos da metade do torque de *stall* to motor, pode-se afirmar que a caixa de redução está bem protegida do fenômeno.

4 CRONOGRAMA REVISADO

Na Tabela 3 pode ser visto o cronograma originalmente proposto para o projeto, com demarcações conforme a conclusão (marcadas em verde) ou não (marcadas em vermelho) das etapas propostas.

Atividade	1º semestre						2º semestre					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Revisão bibliográfica	x	x	x	x								
Conferir o modelo matemático	x	x										
Revisar o controle implementado		x	x									
Elaboração do modelo simulado		x	x	x								
Alteração ou adaptação do modelo			x	x								
Compra de materiais e componentes				x	x	x	x					
Relatório intermediário					x	x						
Manufatura e construção					x	x	x	x	x			
Experimentos para validar dados							x	x	x	x		
Testes práticos								x	x	x	x	
Validação										x	x	
Relatório final											x	x
Revisão do cronograma	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Tabela 3 – Cronograma originalmente proposto para o trabalho.

Grande parte do que foi concluído da primeira metade do cronograma foi feito mais rapidamente do que o esperado, permitindo adiantar a etapa de compras e a primeira tentativa de construção do monociclo. Devido a problemas nesta etapa, originalmente realizada durante o mês 3 do cronograma, ela foi postergada pois haveria a necessidade de compra de mais material. A compra de todos os materiais foi feita, aguardando a entrega destes para realizar a usinagem e construção.

A etapa de alteração ou adaptação do modelo não foi necessária como antes havia sido previsto, pois o modelo providenciado por um dos professores orientadores já comportava tudo que seria necessário para a criação e implementação de controladores.

Visando completar o projeto no período remanescente, o cronograma revisado pode ser visto na Tabela 3, onde as mudanças em relação ao cronograma original estão demarcadas em azul, e o cronograma original permanece em preto.

CONCLUSÃO PARCIAL

O projeto de controle do monociclo por meio do modelo simulado usando Simulink® está muito bem encaminhado para a implementação no monociclo quando estiver construído. Foi possível projetar dois controladores, um LQR e uma realimentação de velocidades usando PID, os quais ambos controlam bem o modelo simulado e indicam que irão ser capazes de controlar o monociclo quando implementados. Enquanto houve a expectativa de poder projetar um controlador por PID em cascata de forma que se apresentasse mais com a estrutura tradicional dele, o compensador que funciona por meio da realimentação de velocidades é uma alternativa a este formato que apresentou muito sucesso em simulação.

Realizando a nova compra de materiais para a manufatura, é possível dar seguimento na construção do monociclo para, por fim, realizar os testes práticos do controle projetado até então. Alguns dos componentes eletrônicos estão sendo utilizados já para a elaboração do circuito do monociclo, enquanto os materiais para a construção do corpo e usinagem ainda estão aguardando a entrega. É esperado que seja possível realizar os testes a partir do mês 8 do cronograma, permitindo fazer ajustes no controle implementado ou até a projeção de um terceiro controlador para o monociclo.

Sendo possível testar o monociclo conforme esperado, é provável que haja a tentativa inicial de projetar um acionador que funcione para controlar o ângulo de *yaw* do monociclo, algo que não existe no monociclo de referência.

Eu não desistirei do cascata
Queria mexer nele ainda.

REFERÊNCIAS

- GEIST, A. R. et al. The wheelbot: A jumping reaction wheel unicycle. *IEEE Robotics and Automation Letters*, v. 7, n. 4, p. 9683–9690, 2022. Citado na página 8.
- GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Robustez. In: _____. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. 2. ed. [S.l.]: Blucher, 2019. p. 279–300. Citado na página 11.
- GUO, L.; HE, K.; SONG, Y. Design of the sliding mode controller for a kind of unicycle robot. *2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*, p. 1432–1437, 2016. Citado na página 8.
- HESPANHA, J. P. Vi: Lqr/lqg optimal control. In: _____. *Linear Systems Theory*. 2. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. p. 191–196. Citado na página 11.
- HO, M.-T.; RIZAL, Y.; CHEN, Y.-L. Balance control of a unicycle robot. In: *2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1186–1191. Citado na página 8.
- KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960. Citado na página 9.
- MATHWORKS. Mathworks, 2023. Disponível em: <<https://www.mathworks.com/help/control/ug/designing-cascade-control-system-with-pi-controllers.html>>. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 12.
- MORIN, D. *Chapter 6: The Lagrangian Method*. [S.l.]: Harvard Edu, 2007. <<https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/cmchap6.pdf>>. Citado na página 10.
- MURATA, T. *Development of the unicycle-riding robot*. 2013. <<https://corporate.murata.com/newsroom/news/company/csrtopic/2008/0923>>. Citado na página 8.
- NEVES, G. P. das. *Modeling, construction and control of a self-balancing unicycle*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), 2017. Disponível em: <<https://bv.fapesp.br/pt/dissertacoes-teses/140601/modelagem-desenvolvimento-e-controle-de-um-monociclo-auto-e>>. Citado 5 vezes nas páginas 2, 8, 9, 11 e 14.
- NEVES, G. P. das; ANGÉLICO, B. A.; AGULHARI, C. M. Robust \mathcal{H}_2 controller with parametric uncertainties applied to a reaction wheel unicycle. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 93, n. 10, p. 2431–2441, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 16.
- NISE, N. S. 8.7 projeto da resposta transitória através do ajuste de ganho. In: _____. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 7. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2022. p. 338–342. Citado na página 19.
- OGATA, K. 10-8 quadratic optimal regulator system. In: _____. *Modern Control Engineering*. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. p. 793–806. Citado na página 10.

PALHARES, R. M. *Controle Ótimo \mathcal{H}_2* . [S.l.]: UFMG, 2023. Citado na página 11.

RUAN, X. et al. Lateral stabilization of a single wheel robot applying electromagnetic force. In: *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 3675–3680. Citado na página 8.

SHEN, J.; HONG, D. Omburo: A novel unicycle robot with active omnidirectional wheel. In: *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 8237–8243. Citado na página 9.

WATLOW. Watlow, 2020. Disponível em: <<https://www.watlow.com/blog/posts/benefits-of-cascade-control>>. Citado na página 13.