Victoria Leal Garcia de Souza

Construção e projeto de controle de um monociclo autoequilibrado

Instituto de Pesquisa e Ensino (Insper)

Engenharia Mecatrônica

Iniciação Tecnológica

Orientador: Dr. Carlos Eduardo de Brito Novaes

Coorientador: Dr. Gabriel Pereira das Neves

São Paulo

Dezembro - 2023

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3D	Tridimensional
CAD	*Computer-aided Design*
CM	Centro de massa
CNC	*Computerized Numerical Control*
IMU	*Inertial Measurement Unit*
LQR	*Linear Quadratic Regulator*
PID	Controlador Proporcional-Integral-Derivativo
PWM	*Pulse Width Modulation*
rpm	Rotações por minuto

LISTA DE SÍMBOLOS

d	Distância entre o CM do corpo e da roda de inércia $[m]$
g	Aceleração da gravidade $[m/s^2]$
J_{br}	Momento de inércia do corpo com a roda de inércia $[kgm^2]$
J_{bw}	Momento de inércia do corpo com a roda $[kgm^2]$
J_r	Momento de inércia da roda de inércia $[kgm^2]$
J_w	Momento de inércia da roda $[kgm^2]$
L	Altura do CM do corpo em relação ao chão $[m]$
M_b	Massa do corpo $[kg]$
M_{br}	Massa do corpo com a roda de inércia $[kg]$
M_r	Massa da roda de inércia $[kg]$
M_w	Massa da roda $[kg]$
R_i	Raio interno da roda de inércia $[m]$
R_e	Raio externo da roda de inércia $[m]$
R_w	Raio da roda $[m]$
φ	Ângulo de *roll* $[rad]$
$\dot{\varphi}$	Velocidade angular em *roll* $[rad/s]$
$\ddot{\varphi}$	Aceleração angular em *roll* $[rad/s^s]$
ψ	Ângulo de *pitch* $[rad]$
$\dot{\psi}$	Velocidade angular em *pitch* $[rad/s]$
$\ddot{\psi}$	Aceleração angular em *pitch* $[rad/s^s]$
θ_r	Posição angular da roda de inércia $[rad]$
$\dot{\theta}_r$	Velocidade angular da roda de inércia $[rad/s]$
$\ddot{\theta}_r$	Aceleração angular da roda de inércia $[rad/s^s]$

θ_w	Posição angular da roda $[rad]$
$\dot{\theta_w}$	Velocidade angular da roda $[rad/s]$
$\ddot{\theta_w}$	Aceleração angular da roda $[rad/s^s]$
τ	Torque resultante no monociclo $[Nm]$
τ_r	Torque da roda de inércia $[Nm]$
τ_w	Torque da roda $[Nm]$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Um monociclo autoequilibrado consiste em um veículo que mantém a posição de equilíbrio apenas com uma roda em contato com o chão, utilizando outro sistema de atuação para controlar o ângulo de queda lateral. Conforme a literatura encontrada, há apenas um tal monociclo na América Latina, originalmente construído em 2017 por um dos professores orientadores (NEVES, 2017). Ele possui dois ângulos controlados: *pitch* e *roll*. O controle de *pitch* é feito através da roda em contato com o chão, enquanto o ângulo de *roll* é controlado através de uma roda de reação, também chamada de roda de inércia. Atualmente o sistema não possui controle no ângulo de *yaw*.

Os ângulos de *pitch*, *roll* e *yaw* são os ângulos em torno dos eixos y, x e z, respectivamente. O desenho esquemático do monociclo, juntamente com o sistema de coordenadas de referência, é apresentado na Figura 1, adaptada de (NEVES, 2017). Na Tabela 1, podem ser encontrados os componentes principais do monociclo que estão indicados ao lado.

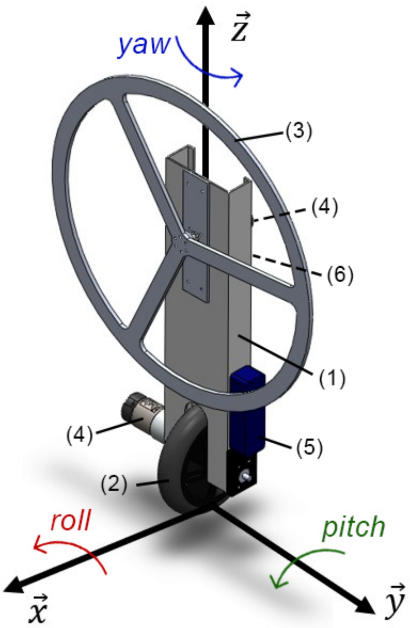

Figura 1 – Desenho esquemático do monociclo.

Peça	Nome	Quantidade
1	Corpo	1
2	Roda de contato	1
3	Roda de inércia	1
4	Motor	2
5	Bateria	1
6	Componentes eletrônicos	-

Tabela 1 – Componentes do monociclo.

Há literatura significativa a respeito do controle da estabilidade estática sobre uma roda. Algumas das soluções já existentes em monociclos autônomos incluem o uso de giroscópios (MURATA, 2013), a adição de uma ou mais rodas de inércia (HO; RIZAL; CHEN, 2014; GEIST et al., 2022), o uso de força magnética (RUAN et al., 2012), massas móveis afim de mudar o centro de massa (GUO; HE; SONG, 2016) ou o uso de uma *omniwheel* (SHEN; HONG, 2020).

Enquanto o sistema de acionamento de escolha é um tema muito explorado, há uma série de fatores que podem ser relevantes nessa decisão. O primeiro destes é o grau de complexidade atrelado à implementação do acionador e do controle dele, que favorece muito a escolha da roda de inércia ao invés de outros acionadores citados. O controle de um monociclo por meio de uma roda de reação é um conceito recente que tem sido estudado na última década. Ademais, replicar um monociclo onde já é conhecido o sistema de atuação traz vantagens no âmbito de melhorias na construção dele. É importante considerar como o monociclo autônomo poderia comportar outros acionadores afim de controlar o ângulo responsável por fazer curvas (yaw, em torno de z) para poder, posteriormente à construção de um tal monociclo, o fazer seguir trajetórias.

1.1 Objetivo

Este projeto tem como objetivo principal replicar o monociclo autônomo apresentado com a finalidade de testar diferentes controladores, incluindo ambas as técnicas implementadas no monociclo de referência - LQR e controlador robusto por norma $\mathcal{H}_2$ - assim como um controlador PID em cascata a ser projetado.

Os objetivos secundários são relacionados a melhorias e problemas apontados que foram mencionadas na dissertação (NEVES, 2017). Por exemplo, foram observados problemas com o monociclo decorrentes da manufatura que podem ser evitados por meio do uso de processos mais robustos de manufatura subtrativa.

1.2 Revisão Bibliográfica

O sensoriamento dos ângulos de *pitch* e *roll* é feito usando o acelerômetro e giroscópio presentes no IMU (*Inertial Measurement Unit*) localizado na Figura 1, em (6). Estes sinais são interpretados pelo microcontrolador, que aciona um ou ambos os motores conectados às rodas de forma que o monociclo volte para a posição de equilíbrio vertical. O IMU é sensível a erros de medição, tanto por ser posto na localização aproximada do centro de massa do monociclo quanto por incertezas dos sensores, então para garantir maior precisão com as leituras, é aplicado um filtro de Kalman nos sinais.

O filtro de Kalman (KALMAN, 1960) é um estimador ótimo para ruido branco que trata os parâmetros do processo controlado - o sistema, distúrbios e as incertezas dos sensores - como variáveis aleatórias dentro de uma distribuição normal. Os parâmetros do filtro dependem principalmente do ganho K_m do filtro, que é atualizado conforme as medições para poder responder com maior velocidade às mudanças no sistema minimizando a covariância calculada, no caso onde há mais de uma variável. Como o filtro é dinâmico, o peso da medição feita e do valor estimado são reguladas pelo ganho K_m, que varia com a operação do sistema.

A modelagem do monociclo foi feita usando a mecânica de Lagrange (MORIN, 2007), inicialmente o considerando como um pêndulo invertido para obter as equações de movimento. Para a entrada, foram calculados momentos gerados em relação às quatro coordenadas generalizadas, e foram considerados o atrito viscoso da roda de inércia com o mancal e o atrito que a roda de contato tem com o chão (ambos assumidos como máximo), além dos torques de ambos os motores, como a saída. O modelo não-linear obtido pela equação de Euler-Lagrange foi linearizado para permitir a aplicação de controle para que o sistema seja capaz de se manter equilibrado.

Ao longo da construção do monociclo de referência, foram testadas duas técnicas de controle regulador: primeiro, um LQR (*Linear Quadratic Regulator*), e depois um controlador robusto projetado por norma $\mathcal{H}_2$ (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020). São técnicas de controle de espaço de estado por *feedback*, e conforme a literatura publicada, ambas são capazes de estabilizar a planta rapidamente e usam algoritmos similares.

1.2.1 LQR

Uma forma popular de projetar um controlador LQR é usando a regra de Bryson (HESPANHA, 2009), onde as matrizes $\bar{Q}$ e $\bar{R}$ são assumidas diagonais tal que

$$\bar{Q}_{ii} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } x_i^2}, \ i \in \{1, 2, ..., l\}$$
$$\bar{R}_{jj} = \frac{1}{\text{valor máximo aceitável de } u_j^2}, \ j \in \{1, 2, ..., k\}$$

e posteriormente, afinando os valores por meio de outras técnicas conforme o modelo simulado. A partir das matrizes Q e R, é possível obter a matriz de controle ótimo K que satisfaça a equação de custo mínimo (1.1):

$$J = \int_0^{\infty} x(t)^\top Q x(t) + u(t)^\top R u(t) dx \tag{1.1}$$

A matriz K é calculada conforme (1.2):

$$K = R^{-1} B^\top P, \tag{1.2}$$

onde P é a solução da equação de Riccati (1.3):

$$A^\top P + PA - PBR^{-1}B^\top P + Q = 0. \tag{1.3}$$

O controle por meio do LQR é feito de forma a minimizar o índice de performance que é ponderado principalmente pelas matrizes Q e R para ser possível determinar a matriz K do vetor do controle ótimo. As matrizes Q e R são, respectivamente, as responsáveis pela importância que o modelo dá ao erro dos sinais do IMU, já filtrados, e pelo esforço de controle que é aceitável para controlar o sistema (OGATA, 2010).

1.2.2 Controlador por norma $\mathcal{H}_2$

O controle robusto implementado visa minimizar a norma $\mathcal{H}_2$ da função de transferência da malha fechada, de forma que considera a energia total das entradas e busca otimizar uma saída de escolha para uma condição de desempenho garantido aceitável. Assim como em outros controladores, conforme o ganho γ da função $\Delta(s)$ no *loop* de *feedback* aumenta, menor é a incerteza a respeito dos parâmetros medidos pelo IMU (GEROMEL; KOROGUI, 2019).

A diferença principal entre as técnicas é que o controlador por norma $\mathcal{H}_2$ comporta incertezas de parâmetros ou perturbações na planta e por isso é mais robusto do que é preciso em relação à referência, enquanto o LQR necessita de um grau de confiança maior em ambos o modelo e o sistema. No entanto, o LQR pode ser considerado um caso particular de um controlador robusto por norma $\mathcal{H}_2$, e assim, é esperado que hajam semelhanças entre eles (NEVES, 2017).

1.2.3 PID em cascata

Um controlador PID é formado por três componentes: uma parcela de ganho proporcional, outra de ganho integral, e mais outra de ganho derivativo. Cada elemento tem sua função dentro do compensador:

- Ganho proporcional: produz uma saída proporcional ao erro do sistema, além de sua derivada e integral. Responsável pela diminuição do tempo de pico;
- Ganho integral: produz uma saída com erro nulo em regime permanente, acumulando o erro total gerado pelo ganho proporcional e gerando ultrapassagem percentual da saída;
- Ganho derivativo: diminui o tempo de acomodação e a ultrapassagem percentual da saída, além de diminuir a velocidade com a qual a planta responde ao erro.

Conforme (NISE, 2022), projetar um controlador para um sistema de ordem superior a 2 e com zeros se torna possível seguindo o procedimento descrito:

1. Esboçar o lugar geométrico das raízes de cada função de transferência.
2. Admitir que a malha fechada formada pela função de transferência não tem zeros, nem polos de ordem maior que 2, como hipótese. Assim, calcular o ganho necessário para atender as especificações de resposta transitória.
3. Justificar a hipótese anterior pela posição dos polos de ordem maior que 2 e dos zeros pois não são dominantes ou se cancelam, respectivamente.

4. Simular a solução para justificar novamente a hipótese.

2 MODELO SIMULADO

2.1 Modelo não-linear

De forma a validar o modelo não-linearizado na Equação (2.1),

$$\ddot{q} = M(q)^{-1}(-N(q, \dot{q}) - O(q) + Pu) \tag{2.1}$$

apresentado na dissertação (NEVES, 2017), foi feito um modelo simulado em MATLAB®.

Conforme o modelo, caso a posição inicial do monociclo fosse no ponto de equilíbrio o monociclo deverá se manter equilibrado enquanto qualquer deslocamento na posição inicial deverá causar uma eventual queda. Foi verificado que o ponto de convergência do modelo não-linear, quando controlado por meio do LQR, é de ±8°. Tal verificação foi feita usando o modelo simulado com o LQR implementado, conforme as Figuras 2 e 3.

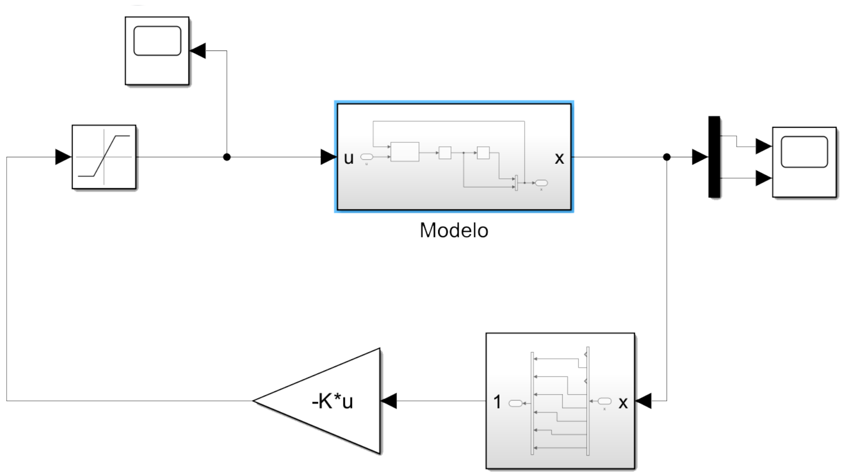

Figura 2 – Diagrama de blocos do modelo com um controlador LQR implementado.

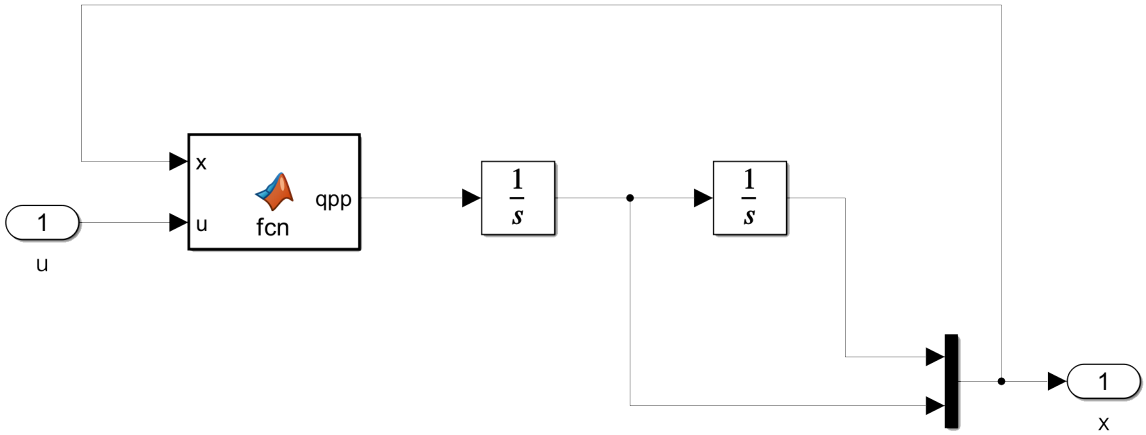

Figura 3 – Diagrama de blocos do controlador LQR.

2.2 Modelo linearizado

Para projetar os controladores foi usado o modelo linearizado (NEVES, 2017), em notação de espaço de estado (2.2),

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde as matrizes A, B e C são, respectivamente,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -52.1139 & -21.9599 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5.1226 & 21.9599 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -67.5793 & -151.8787 & 44.9081 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15.6751 & 58.3574 & -10.4165 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 557.0062 & 0 \\ 0 & 0 \\ -54.7512 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 400.2352 \\ 0 & 0 \\ 0 & -92.8352 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

e a matriz identidade 8×8, visto que todas as variáveis de estado são medidas pelo IMU ou observadas.

Como os estados 1 e 5 do vetor de estado (θ_r e θ_w) não são controlados, eles podem ser removidos das três matrizes, removendo as respectivas linhas e colunas correspondentes. Assim, o novo vetor de estado x_R é dado por:

$$x_R = \begin{bmatrix} \dot{\theta_R} & \varphi & \dot{\varphi} & \dot{\theta_W} & \psi & \dot{\psi} \end{bmatrix}^\top$$

2.3 Controladores

Para ambos os modelos simulados foram empregados três controladores: LQR, PID em cascata e um controlador projetado por norma $\mathcal{H}_2$.

2.3.1 LQR

Usando as matrizes reduzidas A_R e B_R, a matriz Q deverá ser diagonal de dimensões 6×6 enquanto a matriz R deverá ser uma diagonal de dimensões 2×2. A matriz R inicialmente é posta como a matriz identidade 2×2, enquanto a matriz Q é inicialmente adotada como

$$Q = \begin{bmatrix} \left(\frac{60}{118}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{60}{118}\right)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{12}{\pi}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{10}\right)^2 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Os valores foram estimados considerando a velocidade máxima atingida pelo acionador, o maior ângulo de inclinação do sistema e a velocidade máxima de um dado ângulo para ambos *pitch* e *roll*, conforme (NEVES; ANGÉLICO; AGULHARI, 2020).

Feito o ajuste fino da matriz Q por meio do modelo simulado onde é verificado que não há saturação dos PWMs e que a simulação é parada caso o monociclo colida com o chão, foi realizada uma simulação. A matriz K indicada é encontrada por meio da equação (1.2). O ajuste da matriz Q foi feito observando as posições e velocidades dos ângulos controlados, além dos torques em ambos os motores e os PWMs.

Ao final do ajuste, a matriz Q encontrada é dada por:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\text{ângulo máximo}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{ângulo máximo}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\text{rotação máxima}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\text{rotação máxima}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.6}$$

onde o ângulo máximo é de 15° e a rotação máxima é de 118 rpm.

A resultante matriz K é

$$K = \begin{bmatrix} -18.0888 & 0.0000 & -0.2173 & -5.9749 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.0000 & -10.7576 & -0.0000 & -0.0000 & -0.3561 & -2.1301 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

e o resultado da simulação com posição inicial em $X_0 = [0 \;\; 5° \;\; 0 \;\; 5°]^\top$ pode ser encontrado na Figura 4.

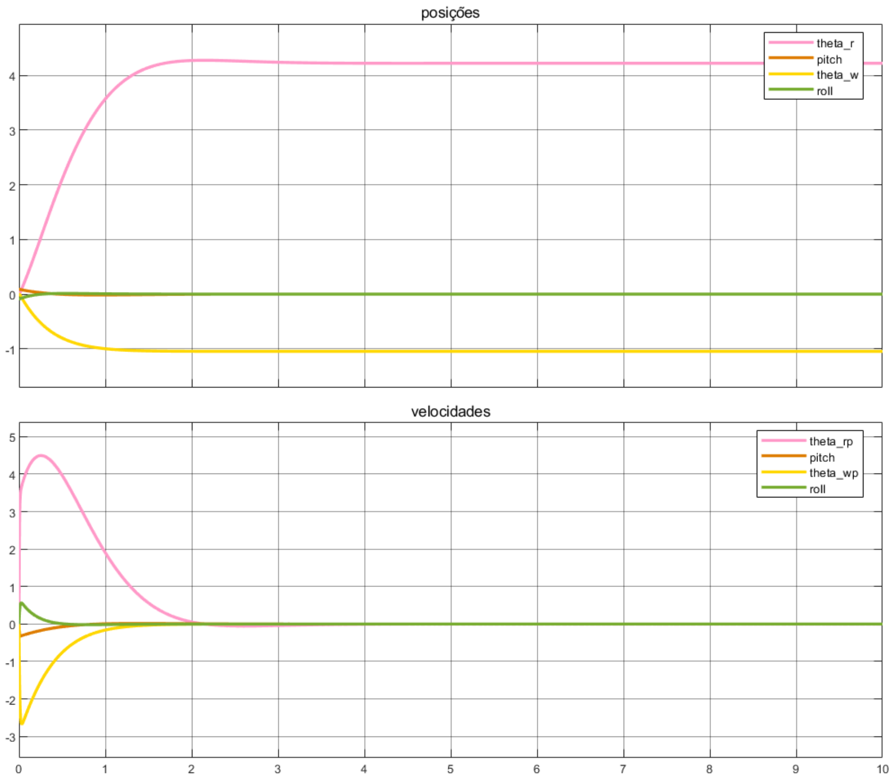

Figura 4 – Resultados da simulação com o controlador LQR.

2.3.2 PID em cascata

Devido à complexidade da planta, foi escolhido projetar uma série de controladores compensadores? PID em cascata para controlar o sistema. Para tal, primeiro foi necessário controlar a malha de velocidades para, por fim, poder controlar a malha de posições.

Começando com as velocidades, foram projetados controladores para um tempo de acomodação $T_s \leq 0.5s$. A partir da linearização do modelo simulado não-linear, foram encontradas as funções de transferência para cada variável de estado remanescente no vetor de estado x conforme (2.8):

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} \quad (2.8)$$

Com as funções de transferência para ambos os PWMs e todas as variáveis de estado, foi possível montar a matriz de transferência (2.9)

$$G = \begin{bmatrix} \frac{529.6s^2-1.103e04}{s^4+41.73s^3-21.96s^2-868.9s} & 0 \\ \frac{529.6s^2-1.103e04}{s^3+41.73s^2-21.96s-868.9} & 0 \\ \frac{-27.38s-1.399e-13}{s^3+41.73s^2-21.96s-868.9} & 0 \\ \frac{-27.38s^2-1.399e-13s}{s^3+41.73s^2-21.96s-868.9} & 0 \\ 0 & \frac{333.2s^2-2.959e-13s-9257}{s^4+44.91s^3-58.36s^2-1039s} \\ 0 & \frac{333.2s^2-2.959e-13s-9257}{s^3+44.91s^2-58.36s-1039} \\ 0 & \frac{-67.07s-1.496e-13}{s^3+44.91s^2-58.36s-1039} \\ 0 & \frac{-67.07s^2-1.496e-13s}{s^3+44.91s^2-58.36s-1039} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

de onde foi possível extrair as equações características das funções de transferência das rodas de inércia e de contato com o chão (2.10):

$$\begin{aligned} eq_1 &= s^3 + 41.73s^2 - 21.96s - 868.9 \\ eq_2 &= s^3 + 44.91s^2 - 58.36s - 1039 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Finalmente, foi possível iniciar o procedimento descrito por (NISE, 2022), esboçando os lugares geométricos das raízes de cada função e admitir certas hipóteses a respeito dos polos das funções.

Tanto no caso da equação característica da roda de inércia, cujos polos são $[-41.7576 \;\; 4.5754 \;\; -4.5478]$, quanto no caso da equação característica da roda em contato com o chão, cujos polos são $[-45.6896 \;\; 5.1744 \;\; -4.3948]$, há nitidamente um par de polos mais dominantes. Os zeros se encontram muito próximos da origem e assim, não é possível concluir que eles se cancelem, invalidando a hipótese do item 2. Como a hipótese do item 2 do procedimento é rejeitada, se torna inviável fazer um controlador PID em cascata do sistema por meio deste procedimento.

Em seguida, para encontrar um controlador, foi usado o segundo método da regra de Ziegler-Nichols como ponto de partida para os valores das componentes proporcional, integral e derivativa, conforme (2.11) e (2.12):

$$\begin{aligned} K_p &= 0.6K_{cr} \\ T_i &= 0.5P_{cr} \\ T_d &= 0.125_{cr} \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \tag{2.12}$$

O segundo método foi usado pelo conhecimento do modelo matemático que rege o sistema, dado por (2.1), e assim, o controlador original foi estimado como sendo

$$\begin{aligned} K_p &= 12.49 \\ T_i &= 0.7500 \quad \text{ou} \quad G_c(s) = 12.49\left(1 + \tfrac{1}{0.7500s} + 0.1875s\right) \\ T_d &= 0.1875 \end{aligned} \tag{2.13}$$

Após o uso de *tuners* nativos do MATLAB®, ainda assim os zeros se fazem notáveis na resposta dos sistemas, conforme se pode ver na Figura 5.

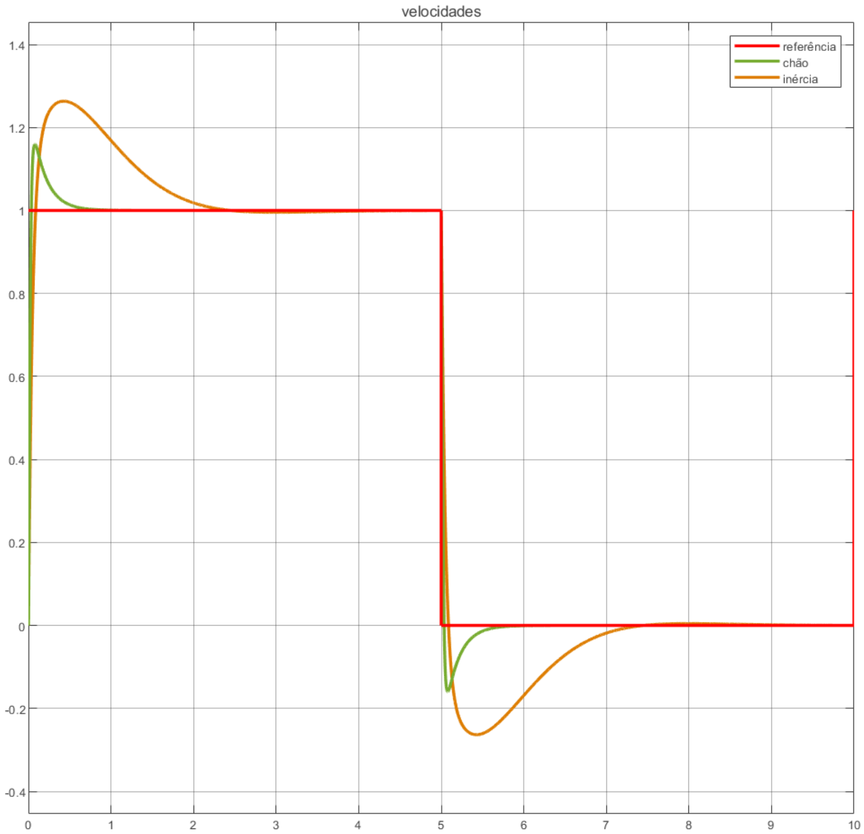

Figura 5 – Simulação em malha fechada de velocidades usando um controlador PID.

Mais um método foi experimentado para tentar obter os valores de K_p, T_i e T_d, adotando a técnica de espaço de estados do controle moderno. Primeiro, cada função de transferência foi descrita como um espaço de estados onde

$$\begin{aligned} x_1 = &\ \text{posições} & \dot{x_1} = &\ \text{velocidades} \\ x_2 = &\ \text{velocidades} & \dot{x_2} = &\ \text{acelerações} \\ x_3 = &\ \text{acelerações} & \dot{x_3} = & \end{aligned}$$

Em seguida, sabendo que a saída u pode ser descrita como

$$u = -Kx, \tag{2.14}$$

a fórmula de Ackermann (2.15)

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = C\,\frac{\mathrm{Adj}(sI - A)}{\det(sI - A)}\,B, \tag{2.15}$$

pode ser usada para encontrar a matriz K de *feedback* de malha fechada, tendo como polos desejados $[-10 \quad -5+5i \quad -5-5i]$. Usando o comando *acker* no MATLAB®, foram obtidos os valores de K_p, T_i e T_d. Assim, uma nova matriz de transferência pode ser feita composta dos compensadores para cada variável de estado no vetor x_R:

$$\begin{bmatrix} \frac{-0.7696s^2+0.1161s+0.4911}{s} & 0 \\ \frac{[31.00s^2-4.676s-19.79}{s} & 0 \\ \frac{[31.00s^2-4.676s-19.79}{s} & 0 \\ 0 & \frac{0.1144s^2+0.0099s+0.0589}{s} \\ 0 & \frac{-15.79s^4-710.44s^3+860.1s^2+16480s+1352}{s^4+44.91s^3-58.36s^2-1039s} \\ 0 & \frac{-15.79s^2-1.366s-8.125}{s} \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

No entanto, não foi possível estabilizar a planta com os compensadores projetados.

2.3.3 Controlador por norma $\mathcal{H}_2$

problemas pra vicky do futuro meu deus do céu

CONCLUSÃO

fazer um bichinho desses é difícil pacarai mds que erro mas ele é tão fofo que eu nem me arrependo s2 monociclo

REFERÊNCIAS

GEIST, A. R. et al. The wheelbot: A jumping reaction wheel unicycle. *IEEE Robotics and Automation Letters*, v. 7, n. 4, p. 9683–9690, 2022. Citado na página 8.

GEROMEL, J. C.; KOROGUI, R. H. Robustez. In: _____. *Controle Linear de Sistemas Dinâmicos*. 2. ed. [S.l.]: Blucher, 2019. p. 279–300. Citado na página 11.

GUO, L.; HE, K.; SONG, Y. Design of the sliding mode controller for a kind of unicycle robot. *2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*, p. 1432–1437, 2016. Citado na página 8.

HESPANHA, J. P. Vi: Lqr/lqg optimal control. In: _____. *Linear Systems Theory*. 2. ed. [S.l.]: Princeton University Press, 2009. p. 191–196. Citado na página 10.

HO, M.-T.; RIZAL, Y.; CHEN, Y.-L. Balance control of a unicycle robot. In: *2014 IEEE 23rd International Symposium on Industrial Electronics (ISIE)*. [S.l.: s.n.], 2014. p. 1186–1191. Citado na página 8.

KALMAN, R. E. A new approach to linear filtering and prediction problems. *Transactions of the ASME - Journal of Basic Engineering*, v. 82, n. Series D, p. 35–45, 1960. Citado na página 9.

MORIN, D. *Chapter 6: The Lagrangian Method*. [S.l.]: Harvard Edu, 2007. <https://scholar.harvard.edu/files/david-morin/files/cmchap6.pdf>. Citado na página 10.

MURATA, T. *Development of the unicycle-riding robot*. 2013. <https://corporate.murata.com/newsroom/news/company/csrtopic/2008/0923>. Citado na página 8.

NEVES, G. P. das. *Modeling, construction and control of a self-balancing unicycle*. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP), 2017. Disponível em: <https://bv.fapesp.br/pt/dissertacoes-teses/140601/modelagem-desenvolvimento-e-controle-de-um-monociclo-auto-e>. Citado 5 vezes nas páginas 8, 9, 11, 13 e 14.

NEVES, G. P. das; ANGÉLICO, B. A.; AGULHARI, C. M. Robust $\mathcal{H}_2$ controller with parametric uncertainties applied to a reaction wheel unicycle. *International Journal of Control*, Taylor & Francis, v. 93, n. 10, p. 2431–2441, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 10 e 15.

NISE, N. S. 8.7 projeto da resposta transitória atravpes do ajuste de ganho. In: _____. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 7. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, Inc, 2022. p. 338–342. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 17.

OGATA, K. 10-8 quadratic optimal regulator system. In: _____. *Modern Control Engineering*. 5. ed. [S.l.]: Pearson, 2010. p. 793–806. Citado na página 10.

RUAN, X. et al. Lateral stabilization of a single wheel robot applying electromagnetic force. In: *Proceedings of the 10th World Congress on Intelligent Control and Automation*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 3675–3680. Citado na página 8.

SHEN, J.; HONG, D. Omburo: A novel unicycle robot with active omnidirectional wheel. In: *2020 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. [S.l.: s.n.], 2020. p. 8237–8243. Citado na página 8.