Résolution d'un système d'équations linéaires (Partie 2) : méthodes itératives

I- Introduction

Les méthodes itératives deviennent indispensables dès que la taille n du système est grande $n \geq 1000$, car les méthodes directes deviennent « trop lentes » dans ce cas.

De tels systèmes apparaissent, par exemple, dans les techniques de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles.

Les matrices des systèmes obtenus sont en général creuses. (C'est-à-dire qu'elles ont beaucoup de zéros)

Exemple : Approximation de la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} -u"(x) = f(x) & si\ x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On effectue une subdivision régulière de l'intervalle $[0,1]$ en $(n+1)$ intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ où $x_i = \frac{i}{n+1}$, $i = 0,1, \dots ,n+1$ et $x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n+1} = h$.

On note u_i la valeur approchée de la solution u au point x_i.

La formule de Taylor donne

$$u(x_{i+1}) = u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u"(x_i) + h^2\epsilon(h)$$

$$u(x_{i-1}) = u(x_i) - hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u"(x_i) + h^2\epsilon(h)$$

$u(x_{i+1})$, $u(x_{i-1})$ et $u(x_i)$ sont approchés respectivement par u_{i+1}, u_{i-1} et u_i.

On remplace, donc, $-u"(x_i)$ par $\frac{2u_i - u_{i-1} - u_{i+1}}{h^2}$ dans l'équation différentielle.

On obtient alors les n équations linéaires :

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = h^2 f(x_i)$$

Avec $$u_0 = 0\ ,\ u_{n+1} = 0\ \ et\ \ 1 \leq i \leq n.$$

Ce qui conduit à la résolution du système linéaire $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \ ,\ X = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} \quad et \quad B = h^2 \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

II- Notions de convergence.

Soit A une matrice inversible d'ordre n.

Pour résoudre le système $Ax = b$, on construit une suite de vecteurs (x^k) qui converge vers la solution x.

Ecrivons $A = M - N$ où M est une matrice facilement inversible (diagonale ou triangulaire par exemple).

La méthode itérative sera définie par la donnée de x^0 et le procédé

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b$$

Ou encore

$$x^{k+1} = Bx^k + C \qquad (*)$$

Avec

$$B = M^{-1}N \qquad et \qquad C = M^{-1}b$$

La matrice B est appelée « matrice d'itération »

Définition : on dit qu'une méthode itérative converge si la suite (x^k) tend vers la solution x du problème $Ax = b$, quelque soit le vecteur de départ x^0.

Proposition : la méthode itérative $(*)$ converge si et seulement si le rayon spectral de la matrice d'itération $\rho(B)$ vérifie $\rho(B) < 1$.

La convergence a lieu pour tout x^0 donné, vers la solution unique de $x = Bx + C$ qui est aussi solution unique de $Ax = b$.

III- Méthode de Jacobi

Pour résoudre le système $Ax = b$ on pose $A = D - E - F$ où : $D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \quad ; \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn-1} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ 0 & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & -a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$(M = D \quad ; \quad N = E + F)$

On construit une suite de vecteurs (x^k) à partir du schéma itératif :

$$\begin{cases} x^0 \; donné \; dans \; \mathbb{R}^n \\ Dx^{k+1} = (E + F)x^k + b \end{cases}$$

D'où

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^k\right) \quad , \quad pour \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

IV- Méthode de Gauss Seidel

Soit le système $AX = b$

$$A = M - N \quad avec \quad M = D - E \quad et \quad N = F$$

le schéma itératif s'écrit alors

$$(D-E)x^{k+1} = Fx^k + b$$

ce qui entraine pour $2 \leq i \leq n-1$

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{k})$$

Remarque

La méthode de Gauss-Seidel est plus intéressante en ce qui concerne la gestion de la mémoire. On peut écraser au fur et à mesure la valeur de x_i^k et ne stocker au cours des calculs qu'un seul vecteur de taille n, à savoir le vecteur $(x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_i^{k+1}, x_{i+1}^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$, au lieu de deux vecteurs pour la méthode de Jacobi.

Définition : On dit qu'une matrice A est à diagonale strictement dominante si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \qquad \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$$

Théorème : Si A est une matrice à diagonale strictement dominante, les méthodes de Jacobi et de Gauss-Seidel sont convergentes.