Résolution numérique des équations $f(x) = 0$

I- Introduction

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue donnée. On cherche numériquement les racines (ou zéros) réelles de f. C'est-à-dire les solutions de l'équation $f(x) = 0$. L'existence et la localisation des solutions utilisent soit le graphe de f, soit le théorème des valeurs intermédiaires.

Rappel : (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$ et si $f(a).f(b) < 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$. Si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$ la racine est unique sur $]a, b[$.

II- Méthode de dichotomie ou de la bissection

(dicho = deux / tomie = coupe)

Ce mot explique clairement le principe de la méthode.

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On cherche $p \in \mathbb{R}$ tel que $f(p) = 0$.

On suppose qu'on a localisé par tâtonnement un intervalle $[a, b]$ dans lequel f change de signe, c'est-à-dire $f(a).f(b) < 0$.

Nous commençons par poser $a_1 = a$ et $b_1 = b$ et $p_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$.

- Si $f(p_1) = 0$ alors la racine cherchée est $p_1 = p$.
- Sinon $f(p_1)$ est de même signe que $f(a_1)$ ou $f(p_1)$
    - Si $f(a)f(p_1) < 0$ alors $p \in [a_1, p_1]$ et on pose $a_2 = a_1$ et $b_2 = p_1$
    - Si $f(b)f(p_1) < 0$ alors $p \in [p_1, b_1]$ et on pose $a_2 = p_1$ et $b_2 = b_1$.

On répète le processus dans $[a_2, b_2]$ ce qui donne l'algorithme suivant :

Algorithme de dichotomie

But : étant donné une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés on cherche une approximation de p qui vérifie $f(p) = 0$.

Entrées : a, b les extrémités de l'intervalle.

ε la précision désirée (la tolérance)

N_0 le nombre maximum d'itérations.

Sorties : valeur approchée de la solution p ou message de non aboutissement.

Etape 1 : poser $N = 1$

Etape 2 : tant que $\leq N_0$, faire les étapes 3 à 6.

Etape 3 : poser $p = \frac{a+b}{2}$

Etape 4 : si $f(p) = 0$ ou $\frac{b-a}{2} < \varepsilon$, alors imprimer p , aller à l'étape 8. ($|p - p_n| \leq \frac{b_n-a_n}{2} < \varepsilon$)

Etape 5 : poser $N = N + 1$

Etape 6 : si $f(a).f(p) < 0$ alors poser $b = p$

Sinon poser $a = p$.

Etape 7 : imprimer « Après N_0 itérations l'approximation obtenue est p et l'erreur maximale est $\frac{b-a}{2}$ »

Etape 8 : fin.

Remarque :

Un avantage de la méthode de dichotomie est qu'elle est toujours convergente (si on ne fixe pas N_0)

Un inconvénient est qu'elle converge lentement. C'est-à-dire que le nombre d'itérations N peut devenir très grand avant que $|p - p_n| < \varepsilon$.

Théorème : soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a).f(b) < 0$ alors l'algorithme de dichotomie génère une suite (p_n) approchant p $(f(p) = 0)$ telle que $|p - p_n| < \frac{b-a}{2^n}$.

Remarque :

- $|p - p_n|$ s'appelle l'erreur de la méthode.
- $\frac{b-a}{2^n}$ ne représente qu'une borne supérieure de l'erreur, c'est-à-dire qu'en général l'erreur est plus petite.

III- Méthode de Newton.

Soit $f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction assez régulière telle que $f(a).f(b) < 0$ et $f'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$.

On construit une suite (x_n) telle que x_{n+1} est l'intersection de la tangente à la courbe représentative de f au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses.

On génère ainsi une suite (x_n) définie par :

$$\boxed{\begin{array}{c} x_0 \in [a, b] \ donné \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{array}}$$

Si x_0 est bien choisi, la suite (x_n) converge vers p (vérifiant $f(p) = 0$).

La méthode de Newton n'est pas toujours convergente, donc on doit fixer le nombre maximal d'itérations N_0.

Algorithme de Newton

But : trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Entrées : une approximation initiale p_0.

ε la précision désirée

N_0 le nombre maximum d'itérations.

Sorties : valeur approchée de la solution p ou message d'échec.

Etape 1 : poser $N = 1$

Etape 2 : tant que $\leq N_0$, faire les étapes 3 à 6.

Etape 3 : poser $p = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$

Etape 4 : si $|p - p_0| < \varepsilon$), alors imprimer p , aller à l'étape 8.

Etape 5 : poser $N = N + 1$

Etape 6 : poser $p_0 = p$.

Etape 7 : imprimer « La méthode a échoué après N_0 itérations »

Etape 8 : fin.

IV- Méthode de la sécante

La méthode de Newton nécessite le calcul des dérivées $f'(x_n)$. C'est un inconvénient dans la pratique où l'on ne dispose pas toujours d'expression analytique pour la fonction f. Une solution simple est fournie par la méthode de la sécante dans laquelle on remplace le calcul de $f'(x_n)$ par l'approximation $f'(x_n) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$

Ainsi au lieu d'utiliser la tangente au point $(x_n, f(x_n))$ nous allons utiliser la sécante passant par les points d'abscisses x_n et x_{n-1} pour en déduire x_{n+1}. Ce dernier est obtenu comme intersection de la sécante passant par les points d'abscisses x_n et x_{n-1} et l'axe des abscisses.

L'équation de la sécante s'écrit : $y = f(x_n) + (x - x_n).\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}$

Alors, en posant $= 0$, $(x = x_{n+1})$ on déduit

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}}$$

Algorithme de la sécante

But : trouver une approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Entrées : deux approximations initiales p_0 et p_1.

ε la précision désirée

N_0 le nombre maximum d'itérations.

Sorties : valeur approchée de la solution p ou un message d'échec.

Etape 1 : poser $N = 1$

$q_0 = f(p_0)$

$q_1 = f(p_1)$

Etape 2 : tant que $\leq N_0$, faire les étapes 3 à 6.

Etape 3 : poser $p = p_1 - q_1.\frac{p_1-p_0}{q_1-q_0}$

Etape 4 : si $|p - p_1| < \varepsilon)$, alors imprimer p , aller à l'étape 8.

Etape 5 : poser $N = N + 1$

Etape 6 : poser $p_0 = p_1$, $q_0 = q_1$, $p_1 = p$, $q_1 = f(p)$

Etape 7 : imprimer « La méthode a échoué après N_0 itérations »

Etape 8 : fin.

V- Méthode du point fixe

On remarque que la méthode de Newton peut s'interpréter comme

$x_{n+1} = g(x_n)$ où $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Si g est continue et $x_n \longrightarrow c$, on déduit que $c = g(c)$. On dit que c est un point fixe de g.

On ramène $f(x) = 0$ à une équation de la forme $x = g(x)$ d'une infinité de façons.

Exemple : l'équation $x^2 - 3 = 0$ est équivalente à

$x = \frac{3}{x}$ ou $x = x^2 + x - 3$ ou $x = \alpha(x^2 - 3) + x$

Algorithme du point fixe

But : trouver une approximation de la solution de l'équation $g(x) = x$.

Entrées : une approximation initiale p_0.

ε la précision désirée

N_0 le nombre maximum d'itérations.

Sorties : valeur approchée de la solution p ou un message d'échec.

Etape 1 : poser $N = 1$

Etape 2 : tant que N $\leq N_0$, faire les étapes 3 à 6.

Etape 3 : poser $p = g(p_0)$

Etape 4 : si $|p - p_0| < \varepsilon$), alors imprimer p , aller à l'étape 8.

Etape 5 : poser $N = N + 1$

Etape 6 : poser $p_0 = p$

Etape 7 : imprimer « La méthode a échoué après N_0 itérations »

Etape 8 : fin.

VI- **Convergence et ordre de convergence**

Définition : (Application contractante)

On dit qu'une application $g: [a, b] \longrightarrow [a, b]$ est contractante, ou que c'est une contraction s'il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall x, y \in [a, b]$, $|g(x) - g(y)| \leq k|x - y|$

k est le facteur de contraction.

Dans le cas où g est dérivable, la condition de contraction se ramène à la condition suivante sur la dérivée .

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [a, b]$$

Théorème : soit l'application $g: [a, b] \longrightarrow [a, b]$ continue et contractante. Alors $g(x) = x$ admet une solution unique dans $[a, b]$ et la suite (x_n) définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a, b] \\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$$

converge vers cette solution.

Ordre de convergence

La convergence de l'itération $x_{n+1} = g(x_n)$ vers le point fixe c $(c = g(c))$ peut se faire plus ou moins vite.

Définition Soit une suite (x_n) convergeant vers . on pose $e_n = x_n - c$.

- Si $\left(\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right|\right)$ converge, on dit que la suite (x_n) converge linéairement vers c ou encore que la méthode est du premier ordre
- Si $\left(\left|\frac{e_{n+1}}{(e_n)^k}\right|\right)$ converge, on dit alors que la convergence est d'ordre k.

Dans le cas où la fonction g est suffisamment dérivable, l'application de la formule de Taylor au voisinage de la racine c donne :

$$x_{n+1} - c = g(x_n) - g(c) = (x_n - c)g'(c) + \frac{(x_n - c)^2}{2} g''(c) + O((x_n - c)^3)$$

- **Méthodes d'ordre 1 :**

Si $g'(c) \neq 0$, la limite du rapport des écarts est : $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{e_{n+1}}{e_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-c}{x_n-c}\right| = |g'(c)|$

L'écart au pas $n+1$ est donc du même ordre que l'écart au pas n. Le facteur de réduction d'erreur est asymptotiquement donné par $|g'(c)|$. Plus petite sera la valeur $|g'(c)|$, plus vite se fera la convergence.

- **Méthodes d'ordre 2 :**

Si $g'(c) = 0$, l'écart au pas $n+1$ est un infiniment petit d'ordre supérieur ou égal à 2 par rapport à l'erreur au pas n.

On obtient : $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}-c}{(x_n-c)^2}\right| = \frac{1}{2}g"(c)$

La convergence est dite quadratique (ou d'ordre 2). La réduction du nombre d'itérations est spectaculaire. A partir d'une erreur de 0,1, on obtient 10^{-8} en trois itérations.

Exemple :

la méthode de Newton pour résoudre l'équation $f(x) = 0$ est une méthode du type point fixe avec $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Si c est une racine simple de $f(x) = 0$, alors $f'(c) \neq 0$ et il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de c tel que pour tout $x_0 \in \mathcal{V}$, la suite (x_n) converge vers c et la convergence est quadratique.

En effet : $g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f"(x)}{(f'(x))^2} \Rightarrow g'(c) = 0$

Ainsi, la méthode de Newton converge et la convergence est d'ordre 2.