Chapitre II

Résolution d'un système d'équations linéaires (Partie 1) : méthodes directes

I- Introduction

Soit $n, p \geq 1$ des entiers. Un **système linéaire** $n \times p$ est un ensemble de *n* équations linéaires à *p* inconnues de la forme :

$$(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

Les **coefficients** a_{ij} et les **seconds membres** b_i sont des éléments donnés de $\mathbb{R}$. Les **inconnues** $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont à chercher dans $\mathbb{R}$.
Une **solution** de (S) est un p-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ qui vérifie simultanément les *n* équations de (S). Résoudre (S) signifie chercher toutes les solutions.
Un système est impossible, ou incompatible, s'il n'admet pas de solution. Un système est possible, ou compatible, s'il admet une ou plusieurs solutions.
Deux systèmes sont **équivalents** s'ils admettent les mêmes solutions.

Écriture matricielle

Si on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ $\quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$

le système (S) est équivalent à l'écriture matricielle $AX = b$.

Dans ce chapitre on suppose que A est une matrice carrée $(n = p)$ et $\det(A) \neq 0$. Alors le système (S) admet une solution unique.

Les formules de Cramer nous donnent la solution d'un tel système. Mais il est impossible d'utiliser ces formules pour des systèmes de grande taille. Car cette méthode nécessite un nombre important d'opérations, ce qui conduit à des temps de calcul impraticables pour des systèmes d'ordre élevé.
C'est pour cette raison que l'on propose deux types de méthodes de résolution :

- Les méthodes directes qui déterminent explicitement la solution après un nombre fini d'opérations arithmétiques.
- Les méthodes itératives qui consistent à générer une suite qui converge vers la solution du système.

En pratique, on utilise les méthodes directes pour des systèmes de dimension peu élevée ($n \leq 100$). Pour de très grands systèmes qui peuvent par exemple apparaitre en économie ou pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles, on préfère les méthodes itératives (Voir chapitre III).

II- Méthode de Gauss

C'est l'une des méthodes les plus employées pour résoudre des systèmes linéaires. Elle consiste à annuler, par étapes, colonne par colonne les coefficients sous-diagonaux de la matrice par combinaison des lignes avec une ligne de référence ou ligne pivot ; afin de remplacer le système (S) par un système triangulaire équivalent.

Exemple : On considère le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 & E_1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 & E_2 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 & E_3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 & E_4 \end{cases}$$

Qui s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ou sous forme dite augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & \vdots & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & \vdots & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

1ère étape : on utilise la ligne L_1, appelée ligne pivot, pour éliminer les coefficients a_{21}, a_{31} et a_{41}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & \vdots & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix}$$

2ème étape : la ligne L_2 est la ligne pivot, elle est utilisée pour éliminer les coefficients a_{32} et a_{42}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & \vdots & -13 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{matrix}$$

Que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 3x_3 + 13x_4 = 13 \\ -13x_4 = -13 \end{cases}$$

on se ramène ainsi à un système triangulaire que l'on peut résoudre facilement par remontée triangulaire.

On trouve $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 2, 0, 1)$

Dans le cas général, soit le système sous forme augmentée

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & \vdots & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & \vdots & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{matrix}$$

Etape 1 : Puisque A est inversible, quitte à échanger la première ligne de la matrice avec une autre, on peut supposer que ${a_{11}}^{(1)} \neq 0$. Le nombre ${a_{11}}^{(1)}$ est le premier **pivot** de l'élimination de Gauss.

$$\begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} & {a_{12}}^{(1)} & \cdots & {a_{1n}}^{(1)} & \vdots & {b_1}^{(1)} \\ 0 & {a_{22}}^{(2)} & \cdots & {a_{2n}}^{(2)} & & {b_2}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & {a_{n2}}^{(2)} & \cdots & {a_{nn}}^{(2)} & \vdots & {b_n}^{(2)} \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \dfrac{{a_{21}}^{(1)}}{{a_{11}}^{(1)}} L_1 \\ \vdots \\ L_n \leftarrow L_n - \dfrac{{a_{n1}}^{(1)}}{{a_{11}}^{(1)}} L_1 \end{matrix}$$

Etape $(k-1)$ ${a_{k-1\,k-1}}^{(k-1)}$ est le pivot de l'élimination de Gauss.

$$\begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} & {a_{12}}^{(1)} & \cdots & & {a_{1n}}^{(1)} & \vdots & {b_1}^{(1)} \\ 0 & {a_{22}}^{(2)} & \cdots & & {a_{2n}}^{(2)} & & {b_2}^{(2)} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & {a_{kk}}^{(k)} & \cdots & {a_{kn}}^{(k)} & \vdots & {b_k}^{(k)} \\ 0 & 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & {a_{nk}}^{(k)} & & {a_{nn}}^{(k)} & & {b_n}^{(k)} \end{pmatrix}$$

A terme on se ramène à la matrice équivalente :

$$\begin{pmatrix} {a_{11}}^{(1)} & {a_{12}}^{(1)} & \cdots & & {a_{1n}}^{(1)} & \vdots & {b_1}^{(1)} \\ 0 & {a_{22}}^{(2)} & \cdots & & {a_{2n}}^{(2)} & & {b_2}^{(2)} \\ 0 & \ddots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & {a_{nn}}^{(n)} & \vdots & {b_n}^{(n)} \end{pmatrix}$$

Et on résout le système triangulaire ainsi obtenu.

Remarque : Si un pivot ${a_{kk}}^{(k)}$ est nul, on change de ligne (pivotage partiel). En pratique, il faut éviter de prendre des pivots "trop" petits.

Exercice : Résoudre, par la méthode de Gauss, le système suivant

$$\begin{cases} 2x + 6y + 10z & = 0 \\ x + 3y + 3z & = 2 \\ 3x + 14y + 28z & = -8 \end{cases}$$

III- Factorisation LU

La méthode de Gauss revient à décomposer la matrice A du système en un produit de deux matrices triangulaires l'une inférieure L et l'autre supérieure U.

$$A = LU$$

Dans l'exemple précédent :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{pmatrix} \quad et \ \ A = LU$$

D'une manière générale, le principe de détermination des matrices L et U repose sur l'élimination de Gauss dans laquelle on ne fait pas de permutations de lignes.

$L = (l_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $\qquad U = (u_{ij})_{1\le i,j\le n}$

$$l_{ij} = \begin{cases} \dfrac{a_{ij}^{(j)}}{a_{jj}^{(j)}} & si \quad 1 \le j \le i \le n \\ 1 & si \quad 1 \le j = i \le n \\ 0 & si \quad 1 \le i < j \le n \end{cases} \quad et \quad u_{ij} = \begin{cases} 0 & si \quad 1 \le j < i \le n \\ a_{ij}^{(i)} & si \quad 1 \le i \le j \le n \end{cases}$$

Application de la factorisation LU.

Si l'on doit résoudre souvent un système où seul le membre de droite change, on a intérêt à effectuer la réduction à la forme triangulaire une fois pour toutes.

En effet si $A = LU$

$$AX = B \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} LZ = B & (2) \\ UX = Z & (3) \end{cases}$$

Dans ce cas $AX = LUX = LZ = B$

Les systèmes (2) et (3) étant triangulaires, la résolution ne nécessite que l'exécution d'une remontée et d'une descente triangulaire.

Dans l'exemple précédent $AX = B \quad (1)$

$$LZ = B \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Z_1 = 4 \\ 2Z_1 + Z_2 = 1 \\ 3Z_1 + 4Z_2 + Z_3 = -3 \\ -Z_1 - 3Z_2 + Z_4 = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Z = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 13 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$UX = Z \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -13x_1 = -13 \\ 3x_3 + 13x_4 = 13 \\ -x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad X = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Exercice : Résoudre le système suivant par la méthode LU. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

IV- Méthode de Gauss-Jordan

La méthode de Gauss-Jordan consiste à transformer un système linéaire en un système diagonal équivalent.

Exemple : $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases}$

Sous forme augmentée $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \vdots & 7 \\ 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & & 2 \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & \frac{17}{3} \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ $(1ère\ étape\ de\ l'éliminationde\ Gauss)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & \frac{9}{7} & \frac{48}{7} \\ 0 & \frac{7}{3} & \frac{1}{3} & \frac{17}{3} \\ 0 & 0 & \frac{15}{21} & \frac{15}{7} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{(-2)}{\frac{7}{3}} L_2 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - \frac{\frac{(-1)}{3}}{\frac{7}{3}} L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 0 & \frac{147}{49} \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 & \frac{14}{3} \\ 0 & 0 & \frac{15}{21} & \frac{15}{7} \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \frac{\frac{9}{7}}{\frac{15}{21}} L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{15}{21}} L_3 \\ L_3 \end{array}$$

Donc la solution est $(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 3)$

Pour un système d'ordre quelconque, on cherche par un procédé d'élimination similaire à celui développé sur l'exemple, à obtenir un système diagonal équivalent.

IV- Méthode de Cholesky

La méthode de Cholesky est une alternative à l'élimination de Gauss qui s'applique aux matrices symétriques et définies positives.

Définitions :

- Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite symétrique si elle est égale à sa transposée. i.e $A^T = A$.
- Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite définie positive si pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ non nul on a $X^T A X > 0$.

Propriétés :

- Une matrice définie positive est inversible.
- Si $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est définie positive, alors $a_{ii} > 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$.

Théorème : (Caractérisation des matrices symétriques définies positives)

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est symétrique définie positive si et seulement si il existe une matrice $L = (l_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire inférieure inversible telle que $A = LL^T$. De plus, si pour tout $= 1, 2, \ldots, n$ $l_{ii} \geq 0$, alors L est unique.

Remarque : si L est triangulaire inférieure, alors L^T est triangulaire supérieure de sorte que la factorisation de Cholesky $A = LL^T$ peut être vue comme un cas particulier de la factorisation LU de la matrice A. Cependant l'algorithme de Cholesky requiert presque deux fois moins d'opérations à virgule flottante que celui calculant la factorisation LU via l'élimination de Gauss. Par conséquent, il est conseillé de l'utiliser lorsque A est réelle symétrique et définie positive.

Cas où $n = 4$

$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ $\qquad L = (l_{ij})_{1 \le i,j \le 4} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ $\qquad A = LL^T$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{pmatrix}$$

- $a_{11} = {l_{11}}^2$ d'où $l_{11} = \sqrt{a_{11}}$
  $a_{21} = l_{21}l_{11}$ d'où $l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}}$
  $a_{31} = l_{31}l_{11}$ d'où $l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}}$
  $a_{41} = l_{41}l_{11}$ d'où $l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}}$
- $a_{22} = {l_{21}}^2 + {l_{22}}^2$ d'où $l_{22} = \sqrt{a_{22} - {l_{21}}^2}$
  $a_{32} = l_{31}l_{21} + l_{32}l_{22}$ d'où $l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21})$
  $a_{42} = l_{41}l_{21} + l_{42}l_{22}$ d'où $l_{42} = \frac{1}{l_{22}}(a_{42} - l_{41}l_{21})$
- $a_{33} = {l_{31}}^2 + {l_{32}}^2 + {l_{33}}^2$ d'où $l_{33} = \sqrt{a_{33} - ({l_{31}}^2 + {l_{32}}^2)}$
  $a_{43} = l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32} + l_{43}l_{33}$ d'où $l_{43} = \frac{1}{l_{33}}(a_{43} - (l_{41}l_{31} + l_{42}l_{32})$
- $a_{44} = {l_{41}}^2 + {l_{42}}^2 + {l_{43}}^2 + {l_{44}}^2$ d'où $l_{44} = \sqrt{a_{44} - ({l_{41}}^2 + {l_{42}}^2 + {l_{43}}^2)}$

Cas général

$A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $L = (l_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ $A = LL^T$

L'identification des termes de A et de LL^T conduit à :

$$\begin{cases} a_{j1} = l_{j1}l_{11} & pour \quad j = 1, \dots, n \\ a_{j2} = l_{j1}l_{21} + l_{j2}l_{22} & pour \quad j = 2, \dots, n \\ a_{j3} = l_{j1}l_{31} + l_{j2}l_{32} + l_{j3}l_{33} & pour \quad j = 3, \dots, n \\ \dots\dots \end{cases}$$

En choisissant la détermination positive des racines carrées, on obtient :

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} {l_{ik}}^2} & pour \quad i = 2, \dots, n \\ l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}l_{jk}\right) & pour \quad i < j \end{cases}$$

La résolution du système $AX = B$ équivaut alors à ($LY = B \quad et \quad L^TX = Y$)