

Master IRIV

UE Traitement du signal

# Traitement du signal 1D

Enseignement : Sylvain GIOUX

Laboratoire ICUBE

[sgioux@unistra.fr](mailto:sgioux@unistra.fr)



## TABLE DES MATIERES

<b>1</b>	<b>GENERALITES SUR LES SIGNAUX</b>	<b>7</b>
1.1	LE SIGNAL	7
1.2	SIGNAUX ANALOGIQUES ET NUMERIQUES	7
1.2.1	Signal analogique	7
1.2.2	Signal numérique ou digital	7
1.3	ENERGIE ET PUISSANCE	7
1.3.1	Energie	7
1.3.2	Puissance	8
1.3.3	Energie et puissance moyenne finie	8
1.4	SIGNAUX EGAUX PRESQUE PARTOUT	8
1.5	SIGNAUX ORTHOGONAUX	9
1.6	BASES	9
1.7	NOTION DE DISTRIBUTION	9
1.7.1	Echelon unité	10
1.7.2	Impulsion de Dirac	11
1.7.3	Peigne de Dirac	11
<b>2</b>	<b>SERIES DE FOURIER</b>	<b>13</b>
2.1	COEFFICIENTS DE FOURIER	13
2.2	UN EXEMPLE : LA FONCTION RECTANGLE	13
2.3	COEFFICIENTS DE FOURIER COMPLEXES	14
2.4	QUELQUES EXEMPLES D'UTILISATION	15
2.4.1	Propriétés de parité	16
2.4.2	Fonction cosinus	16
2.4.3	Fonction sinus	17
2.4.4	Fonction rectangle	17
2.5	SERIES DE FOURIER DE QUELQUES FONCTIONS PERIODIQUES	18
<b>3</b>	<b>TRANSFORMATION DE FOURIER</b>	<b>19</b>
3.1	DEFINITION	19
3.2	CONDITIONS D'EXISTENCE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER	20
3.3	TRANSFORMEE DE FOURIER INVERSE	20
3.4	TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE	20
3.5	TRANSFORMEES DE FOURIER DE FONCTIONS SIMPLES	21
3.5.1	Fonction porte	21
3.5.2	Fonction exponentielle sur $t > 0$	22
3.5.3	Fonction constante	23
3.5.4	Fonctions périodiques	23
3.5.5	Distribution de Dirac	25
3.5.6	Autres fonctions utiles	26
<b>4</b>	<b>PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER</b>	<b>27</b>
4.1	LINEARITE	27
4.2	SIMILITUDE	27
4.3	TRANSLATION	28

<b>4.4</b>	<b>DERIVATION ET INTEGRATION</b>	<b>29</b>
4.4.1	Théorèmes	29
4.4.2	Application à la fonction porte	29
4.4.3	Primitive de la distribution de Dirac : la fonction échelon	30
<b>4.5</b>	<b>PARITE</b>	<b>31</b>
4.5.1	Fonctions réelles paires ou impaires	31
4.5.2	Fonctions réelles	31
<b>4.6</b>	<b>ENERGIE</b>	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>TRANSFORMEE DE FOURIER ET CONVOLUTION</b>	<b>33</b>
5.1	PRODUIT DE CONVOLUTION	33
5.2	THEOREME DE PLANCHEREL	34
5.3	REPOSE IMPULSIONNELLE, FONCTION DE TRANSFERT	35
<b>6</b>	<b>ECHANTILLONNAGE</b>	<b>37</b>
6.1	NUMERISATION SUR N BITS	37
6.2	SPECTRE D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE	37
6.3	THEOREME DE SHANNON	38
6.4	RESOLUTION SPECTRALE	39
<b>7</b>	<b>FILTRAGE TEMPOREL, FENETRAGE</b>	<b>41</b>
7.1	TEMPS DE MESURE FINI	41
7.2	MULTIPLICATION EXPONENTIELLE	42
7.3	COMPARAISON	43
7.4	FENETRES TEMPORELLES	44
<b>8</b>	<b>FILTRAGE FREQUENCIEL</b>	<b>47</b>
8.1	NOTIONS GENERALES	47
8.2	FILTRAGE ANALOGIQUE	47
8.3	FILTRES DIFFERENTIELS	48
8.4	FILTRE ANALOGIQUE D'ORDRE 1.	49
8.4.1	Réponse impulsionnelle et fonction de transfert du filtre RC	49
8.4.2	Calcul direct et transformée de Laplace	50
8.4.3	Gain et déphasage	51
8.4.4	Stabilité et pôles du filtre	52
<b>9</b>	<b>TRANSFORMEE EN Z</b>	<b>53</b>
9.1	DEFINITION	53
9.2	EXEMPLES	53
9.2.1	Série $s(n) = 1$ pour tout $n$	53
9.2.2	Série $s(n) = 2^n$ pour $n \leq 0$ et $s(n) = -1/2^n$ pour $n > 0$	54
9.3	PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN Z	55
9.4	INVERSION DE LA TRANSFORMEE EN Z	55
9.5	TRANSFORMEES EN Z DE SIGNAUX CAUSAUX	56
9.6	APPLICATION AU FILTRAGE NUMERIQUE	56
9.6.1	Caractérisation d'un filtre numérique	57

9.6.2	Propriétés des filtres numériques	57
<b>10</b>	<b>FILTRES NUMERIQUES</b>	<b>59</b>
<b>10.1</b>	<b>FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE</b>	<b>59</b>
10.1.1	Définition	59
10.1.2	Filtre à moyenne glissante	59
<b>10.2</b>	<b>FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE</b>	<b>60</b>
<b>10.3</b>	<b>CONSTRUCTION PRATIQUE D'UN FILTRE</b>	<b>61</b>
10.3.1	Gabarit du filtre	62
10.3.2	Caractéristiques associées	63
<b>11</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>65</b>



# **1 GENERALITES SUR LES SIGNAUX**

## **1.1 LE SIGNAL**

Définition : un signal est une grandeur physique qui évolue dans le temps. Cette grandeur peut être exprimée par un nombre réel ou complexe.

Par exemple, un signal sonore est une pression  $p$ , réelle, qui évolue dans le temps, noté  $p(t)$ .

Une grandeur peut être convertie en une grandeur électrique par un système de mesure composé en général d'un capteur et d'une électronique associée.

Dans l'exemple du son, un microphone et un préamplificateur associé convertissent le signal sonore  $p(t)$  en un signal électrique  $e(t)$ .

La qualité du système de mesure employé sera bien entendu parfaite si la relation  $e(t) = k.p(t)$  est vérifiée, avec  $k$  constant, quels que soit le temps  $t$  de la mesure (système stable) et l'amplitude de la pression  $p$  (système de dynamique infinie).

## **1.2 SIGNAUX ANALOGIQUES ET NUMERIQUES**

### **1.2.1 Signal analogique**

La façon dont évolue le temps rend compte de cette distinction. S'il varie de manière continue, le signal est représenté par une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$ , la durée de la mesure. Chacun des points  $t$  de l'intervalle  $I$  est un temps où le signal est défini et sa valeur égale à  $f(t)$ .

Le signal est dit analogique.

### **1.2.2 Signal numérique ou digital**

Si le temps varie de façon discontinue, selon une suite de valeurs  $t_1, t_2 \dots t_n$ , le signal est représenté par une suite de valeurs  $f(n)$ .

Le signal est alors dit numérique. On utilise également les termes de digital ou échantillonné.

Le plus souvent les instants  $t_n$  sont équidistants, l'intervalle entre deux temps successifs est appelé période d'échantillonnage. Le signal numérique est représenté par la suite  $f(n)$  et par la période d'échantillonnage.

## **1.3 ENERGIE ET PUISSANCE**

L'information que transmet un signal est portée par son énergie. Un appareil de mesure ne peut détecter une grandeur physique, un signal, que s'il transporte de l'énergie.

Un signal sonore transporte une énergie mécanique, un signal électrique une énergie électrique.

### **1.3.1 Energie**

L'énergie transportée par un signal analogique  $f$  entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  est égale à :

$$E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

L'énergie transportée par un signal numérique  $f$  entre les échantillons  $n_1$  et  $n_2$  est égale à :

$$E_{12} = \sum_{n_1}^{n_2} |f(p)|^2$$

Dans les expressions ci-dessus,  $|f(u)|$  représente le module de  $f(u)$ .

### 1.3.2 Puissance

La puissance moyenne d'un signal analogique  $f$  entre les temps  $t_1$  et  $t_2$  est égale à :

$$P_{12} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

Si l'intervalle de temps  $t_2 - t_1$  tend vers zéro, alors  $P$  tend vers  $|f(t)|^2$ , qui est appelée puissance instantanée du signal  $f$  à l'instant  $t$ .

La puissance moyenne d'un signal numérique  $f$  entre les échantillons  $n_1$  et  $n_2$  est égale à :

$$P_{12} = \frac{1}{n_2 - n_1} \sum_{n_1}^{n_2} |f(p)|^2$$

### 1.3.3 Energie et puissance moyenne finie

On dit qu'un signal a une énergie  $E$  finie si  $E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt$  est finie.

On dit qu'un signal a une puissance moyenne  $P$  finie si  $P = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 dt$  a une limite finie quand

$T$  tend vers  $+\infty$ . Un signal numérique a une puissance moyenne finie si  $P = \frac{1}{2n} \sum_{-n}^{+n} |f(p)|^2$  a une limite finie quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Un cas important est celui des signaux périodiques, de période  $T$ . L'énergie dissipée sur une période, quelle qu'elle soit, est égale à  $E = \int_0^T |f(t)|^2 dt$ . La puissance moyenne est égale à  $P = \frac{E}{T}$ . Bien entendu un tel signal est d'énergie infinie (sur une infinité de périodes) et de puissance moyenne  $P = \frac{E}{T}$ .

Considérons un signal défini par  $f(t) = A \cdot \cos(2\pi\nu_0 t)$ , de période  $T = 1/\nu_0$ . Son énergie sur une période  $T$  est égale à  $A^2 T/2$  et sa puissance moyenne est égale à  $A^2/2$ .

## 1.4 SIGNAUX EGAUX PRESQUE PARTOUT

Soient  $f$  et  $g$  2 signaux définis sur un intervalle de temps  $I = [t_1, t_2]$ , leur différence sur  $I$  est égale à:

$$\Delta_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |f(t) - g(t)| dt$$

L'énergie de leur différence est égale à :

$$E_{12} = \int_{t_1}^{t_2} |f(t) - g(t)|^2 dt$$

Cette différence et l'énergie de leur différence sont nulles si  $f(t) = g(t)$  "presque partout" sur  $I$ .

Si  $g(t)$  est un signal continu d'énergie finie sur  $I$ , on dira que :

- le signal  $f(t)$  est stable si  $\Delta_{12} = 0$ ,
- le signal  $f(t)$  est d'énergie finie si  $E_{12} = 0$ .



## 1.5 SIGNAUX ORTHOGONAUX

Le produit scalaire de deux signaux  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $[0, T]$  est défini par :

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T f(t)g(t)dt$$

Deux signaux sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul.

Un exemple important est celui des fonctions périodiques cosinus et sinus. Soient les signaux  $f_n(t) = \cos(2\pi n t/T)$  et  $g_m(t) = \sin(2\pi m t/T)$

On montre facilement les résultats suivants :

- $\langle f_n, g_m \rangle = 0, \forall n, m$  (même si  $n = m$ )
- $\langle f_n, f_m \rangle = 0$ , si  $n \neq m$  (idem pour  $g$ )
- $\langle f_n, f_n \rangle = \|f_n\|^2 = T/2$ , si  $n \neq 0$  (idem pour  $g$ )
- $\|f_0\|^2 = T, \|g_0\|^2 = 0$

## 1.6 BASES

On rappelle qu'un vecteur  $\vec{v}$  de  $R^3$ , est défini de manière unique dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  par ses composantes  $x, y$  et  $z$  selon la relation :

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Les vecteurs de la base sont orthogonaux ( $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$ ),

et de norme unitaire ( $\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|^2 = \|\vec{j}\|^2 = \|\vec{k}\|^2 = 1$ )

On peut donc écrire le vecteur  $\vec{v}$  à partir des vecteurs de la base :  $\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{i}) \cdot \vec{i} + (\vec{v} \cdot \vec{j}) \cdot \vec{j} + (\vec{v} \cdot \vec{k}) \cdot \vec{k}$ , relation qui permet de calculer les composantes  $x, y$  et  $z$  du vecteur.

De la même manière, on pourra écrire une fonction  $f$  dans une base orthonormée formée d'une suite de fonctions orthogonales 2 à 2 et de norme = 1. Une telle suite peut être constituée des fonctions :

$$f_0(t) = \sqrt{1/T}, f_n(t) = \sqrt{2/T} \cos(2n\pi t/T), g_m(t) = \sqrt{2/T} \sin(2m\pi t/T)$$

qui constituent bien une base orthonormée, selon les résultats du chapitre précédent.

## 1.7 NOTION DE DISTRIBUTION

Un signal numérique est constitué d'échantillons successifs, des impulsions, très brèves, mais qui transportent l'énergie du signal analogique qui a été échantillonné. Comment modéliser mathématiquement une telle impulsion, et une série d'impulsions ?

On peut imaginer un passage à la limite à partir d'une fonction nulle sauf sur un intervalle donné, que l'on ferait tendre vers une largeur nulle, tout en gardant constante son intégrale. Par exemple une

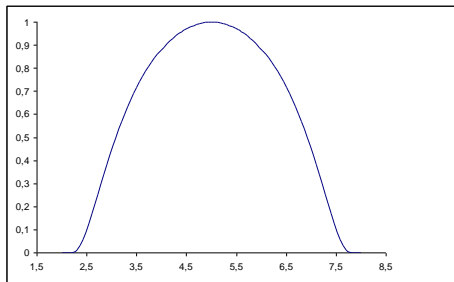
fonction  $f_n, n$  entier, définie par  $f_n(t) = n$  si  $0 \leq t \leq 1/n$ , sinon  $f_n = 0$ , avec  $n \rightarrow \infty$ . On aura  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = 1$

.

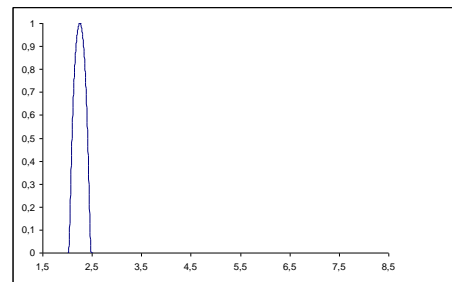
On peut imaginer un grand nombre de fonctions nulles en dehors d'un intervalle qui tend vers 0. Si une telle fonction  $\phi$  est infiniment dérivable sur  $R$  (ce qui n'était pas le cas de  $f_n$ ) cette fonction  $\phi$  est appelée fonction test.

Exemple : la fonction  $\varphi_1$  définie par  $\varphi_1(t) = \exp\left(\frac{t^2}{t^2 - 1}\right)$  pour  $t \in ]-1, 1[$  et par  $\varphi_1(t) = 0$  pour tous les autres  $t$ .  $\varphi_1$  est nulle en dehors de l'intervalle  $] -1, 1[$ , infiniment dérivable partout, y compris en  $-1$  et  $+1$ .

De la même manière on peut définir la fonction test  $\varphi_2$  par  $\varphi_2(t) = \exp\frac{(t - \frac{a+b}{2})^2}{(t-a)(t-b)}$  pour  $t \in ]a, b[$  et par  $\varphi_2(t) = 0$  pour tous les autres  $t$ .  $\varphi_2$  est nulle en dehors de l'intervalle  $]a, b[$ , infiniment dérivable partout, y compris en  $a$  et  $b$ . On peut alors faire tendre  $b$  vers  $a$ . On notera alors la fonction test  $\varphi(a)$ .



$a = 2, b = 8$



$a = 2, b = 2,2$

Figure 1 : exemples de fonctions test.

Soit  $f$  une fonction sommable (intégrable) sur tout segment. Il est alors possible de calculer le nombre  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$ . Il y a donc correspondance, pour la fonction test ( $\varphi$ ) considérée, entre cette fonction  $f$  et un nombre  $T_f(\varphi)$ .

$T_f$  est une application, elle est linéaire et continue sur l'ensemble des fonctions test. Ces propriétés ne sont pas vérifiées uniquement pour les fonctions sommables sur tout segment, mais caractéristiques des distributions que l'on peut définir ainsi :

On appellera distribution  $T$  une application linéaire et continue sur l'ensemble des fonctions tests qui associe à une fonction test  $\varphi$  un nombre réel  $T(\varphi)$  et vérifie les propriétés de linéarité.

$T$  est dite distribution régulière si il existe une fonction sommable  $f$  telle que  $T(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(t)dt$  pour toutes les fonctions test  $\varphi$ .

Une distribution qui n'est associée à aucune fonction est dite singulière.

### 1.7.1 Echelon unité

L'échelon unité  $Y$  est défini par :  $Y(t) = 1$  pour  $t \geq 0$ , et  $Y(t) = 0$  pour  $t < 0$ .

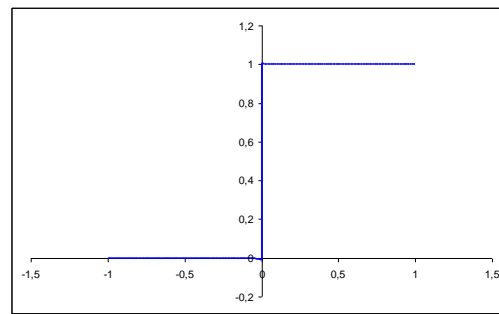


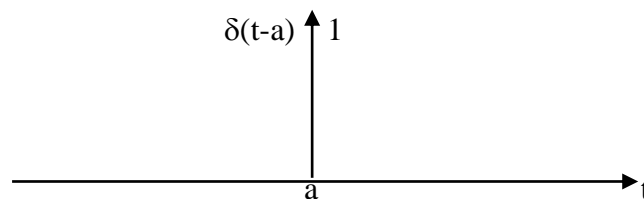
Figure 2 : la distribution échelon

Y définit une distribution  $T_Y$  par :  $T_Y = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(t)\varphi(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t)dt$ , pour toutes les fonctions test.

### 1.7.2 Impulsion de Dirac

Soit  $a$  un réel, la formule  $T(\varphi) = \varphi(a)$  définit une distribution. Cette distribution est appelée distribution ou impulsion de Dirac en  $a$ . Cette distribution est singulière.

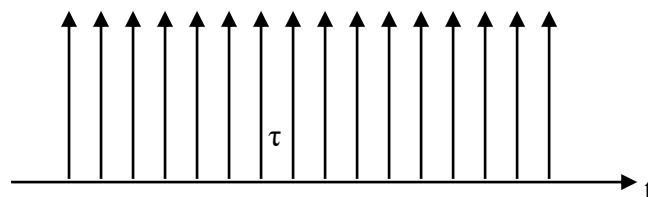
En physique on note souvent  $\delta(t-a) = \varphi(a)$ . Mais  $\delta(t)$  n'est pas une fonction. On représente  $\delta(t-a)$  par une flèche de longueur 1, à l'abscisse  $a$ , signifiant que si  $\delta(t-a)$  était une fonction, elle serait nulle partout sauf en  $a$  et que son intégrale est égale à 1.

Figure 3 : distribution ou impulsion de Dirac au temps  $t = a$ 

### 1.7.3 Peigne de Dirac

La distribution définie par  $T(\varphi) = \sum_n \varphi(n)$  est appelée peigne de Dirac. C'est la superposition de distributions de Dirac à toutes les abscisses entières. On la représente par la lettre cyrillique  $\text{III}$  (cha). Plus généralement, on se fixe un nombre  $\tau > 0$  et on définit la distribution  $T$  par  $T(\varphi) = \sum_n \varphi(n\tau)$ , peigne de Dirac d'écartement  $\tau$ .

Un signal numérique défini par la suite des valeurs  $f(n)$  peut être considéré comme une suite d'impulsions d'écartement  $\tau$ , période d'échantillonnage, et peut donc être représenté par une distribution  $T = \sum_n f(n)\delta(t - n\tau)$ .

Figure 4 : peigne de Dirac d'écartement  $\tau$ .



## 2 SERIES DE FOURIER

### 2.1 COEFFICIENTS DE FOURIER

Soit  $f$  une fonction périodique du temps, de période  $T$  :  $f$ , ou  $f(t)$ , peut être écrite sous forme d'une série de fonctions sinus et cosinus de périodes  $T, T/2, T/3, \dots, T/n \dots$ ,  $n$  étant un entier positif.

$f(t)$  est développée en série de FOURIER :

$$f(t) = a_0 + a_1 \cos(2\pi\nu_0 t) + b_1 \sin(2\pi\nu_0 t) + a_2 \cos(4\pi\nu_0 t) + b_2 \sin(4\pi\nu_0 t) + \dots \\ + a_n \cos(2n\pi\nu_0 t) + b_n \sin(2n\pi\nu_0 t)$$

ou en notation abrégée :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(2n\pi\nu_0 t) + b_n \sin(2n\pi\nu_0 t))$$

avec  $\nu_0 = \frac{1}{T}$  la fréquence fondamentale de  $f(t)$

Le développement est défini par les coefficients  $a_n$  et  $b_n$ . Ils sont exprimés par :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(2n\pi\nu_0 t) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(2n\pi\nu_0 t) dt$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \text{ est la valeur moyenne de } f(t) \text{ sur une période.}$$

### 2.2 UN EXEMPLE : LA FONCTION RECTANGLE

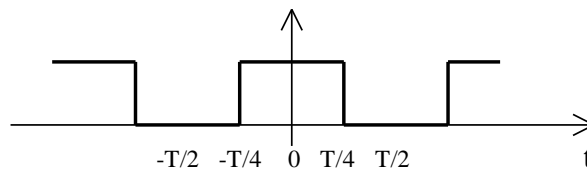


Figure 5 : la fonction rectangle de période  $T$

La distribution rectangle, que nous appellerons par abus de langage « fonction » rectangle de période  $T$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -T/2 < t < -T/4 \\ A & \text{si } -T/4 < t < T/4 \\ 0 & \text{si } T/4 < t < T/2 \end{cases}$$

La fréquence fondamentale de la fonction rectangle est  $\nu_0 = 1/T$ . C'est une fonction paire.

Les coefficients  $b_n = 0 \forall n$ . En effet :

$$\forall t : \begin{cases} f(t) = f(-t) \\ \sin(2n\pi\nu_0 t) = -\sin(-2n\pi\nu_0 t) \end{cases} \text{ par conséquent } f(t) \sin(2n\pi\nu_0 t) \text{ est impaire et}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(2n\pi\nu_0 t) dt = 0$$

(A l'inverse, si  $f(t)$  est impaire, les coefficients  $a_n$  sont nuls.)

Les coefficients  $a_n$  du développement de la fonction rectangle se calculent par :

$$a_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos(2n\pi v_0 t) dt = \frac{A}{n\pi} [\sin(2n\pi v_0 t)]_{-T/4}^{T/4} = \frac{2A}{n\pi} \sin n\pi/2$$

Par conséquent :

$$a_n = 0 \text{ si } n \text{ est pair sauf pour } a_0 = (1/T) (AT/2) = A/2$$

$$a_n = 2A/n\pi \text{ pour } n = 1, 5, 9 \dots$$

$$a_n = -2A/n\pi \text{ pour } n = 3, 7, 11 \dots$$

Soit le développement en série de Fourier de la fonction rectangle  $f(t)$  :

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[ \cos(2\pi v_0 t) - \frac{\cos(6\pi v_0 t)}{3} + \frac{\cos(10\pi v_0 t)}{5} - \dots \right]$$

Le spectre est constitué de raies aux fréquences  $v_0$  : fréquence fondamentale et aux multiples impairs de cette fréquence (harmoniques).

### 2.3 COEFFICIENTS DE FOURIER COMPLEXES

A chaque valeur de  $n$  sont associés les coefficients réels  $a_n$  et  $b_n$ . On peut associer à  $n$  le nombre complexe  $F_n$  défini par  $2F_n = a_n - jb_n$  (avec  $j^2 = -1$ )

On a alors :

$$a_n - jb_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(2n\pi v_0 t) - j \sin(2n\pi v_0 t)] dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2n\pi v_0 t} dt$$

Le nombre complexe  $F_n$  a :

$$\text{- une amplitude : } F_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\text{- un argument ou phase : } \varphi_n = \text{tg}^{-1} \left( \frac{-b_n}{a_n} \right)$$

Après avoir défini le nombre complexe  $F_n$  en fonction des coefficients du développement en série de Fourier  $a_n$  et  $b_n$ , il est possible d'exprimer le développement en série de Fourier de  $f(t)$  en fonction des coefficients complexes  $F_n$  :

Calculons  $a_n + jb_n$  :

$$a_n + jb_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) [\cos(2n\pi v_0 t) + j \sin(2n\pi v_0 t)] dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{j2n\pi v_0 t} dt$$

On peut donc noter :  $a_n + jb_n = 2F_{-n}$  ( $n > 0$ )

Des relations  $2F_n = a_n - jb_n$  et  $2F_{-n} = a_n + jb_n$

$$\text{on déduit : } a_n = (F_n + F_{-n})$$

$$b_n = j(F_n - F_{-n})$$

La somme des 2 termes de degré  $n$ ,  $a_n \cos(n2\pi\nu_0 t) + b_n \sin(n2\pi\nu_0 t)$ , du développement en série de Fourier de la fonction  $f(t)$  s'écrit :

$$F_n [\cos(n2\pi\nu_0 t) + j \sin(n2\pi\nu_0 t)] + F_{-n} [\cos(n2\pi\nu_0 t) - j \sin(n2\pi\nu_0 t)]$$

ou 
$$F_n [\cos(n2\pi\nu_0 t) + j \sin(n2\pi\nu_0 t)] + F_{-n} [\cos(-n2\pi\nu_0 t) + j \sin(-n2\pi\nu_0 t)]$$

soit 
$$F_n e^{jn2\pi\nu_0 t} + F_{-n} e^{j(-n)2\pi\nu_0 t}$$

L'équation (1) de définition du développement en série de Fourier peut s'écrire :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n e^{j2n\pi\nu_0 t} + F_{-n} e^{-j2n\pi\nu_0 t}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j2n\pi\nu_0 t}$$

avec dans la dernière expression  $F_0 = a_0$

Nous utiliserons cette écriture comme relation de définition des séries de FOURIER, elle est en effet similaire à l'écriture de la transformation de Fourier utilisée par la suite. Soit la définition du développement en série de Fourier de la fonction périodique  $f(t)$  de période  $T$  et de fréquence  $\nu_0$  :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j2n\pi\nu_0 t} \quad \text{avec} \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2n\pi\nu_0 t} dt$$

La suite des nombres  $F_n$  constitue le développement en série de FOURIER de la fonction  $f(t)$  de fréquence fondamentale  $\nu_0$ .

On peut associer à la fréquence  $\nu$  :

le coefficient  $F_n$ , pour  $\nu = n \nu_0$ , ces fréquences sont appelées harmoniques,

la valeur 0 aux autres fréquences,

par une fonction  $F$  de la variable  $\nu$ .

L'ensemble des images  $F(\nu)$  constitue le spectre de  $f(t)$ . Ce spectre est en général complexe. La fonction  $F$  ou  $F(\nu)$  est une fonction complexe de la variable réelle  $\nu$ . On retiendra les faits importants suivants :

Le spectre d'une fonction périodique est discontinu :

Il est non nul aux fréquences  $\nu = n\nu_0$

$\nu_0$  est la fréquence fondamentale de  $f(t)$

Ses multiples  $n\nu_0$  sont les fréquences harmoniques de  $f(t)$ .

Au spectre  $F(\nu)$ , on peut associer :

un spectre d'amplitude  $F(\nu) = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ , un spectre de phase  $\varphi(\nu) = \text{tg}^{-1}(\frac{-b_n}{a_n})$

une partie réelle  $\text{Re}(F(\nu)) = \frac{a_n}{2}$ , une partie imaginaire  $\text{Im}(F(\nu)) = \frac{-b_n}{2}$

## 2.4 QUELQUES EXEMPLES D'UTILISATION

Les exemples suivants illustrent quelques propriétés des développements en série de Fourier de fonction simples.

### 2.4.1 Propriétés de parité

Si  $f(t)$  est paire : son spectre  $F(v)$  est réel :  $b_n = 0$  (voir I.2),  $F_n = a_n/2$  pour  $v = nv_0$

Si  $f(t)$  est impaire, son spectre  $F(v)$  est imaginaire.

### 2.4.2 Fonction cosinus

Soit  $f(t) = A \cos(2\pi v_0 t)$

$f(t)$  est paire, par conséquent  $b_n = 0$

$$\text{De plus : } a_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi v_0 t) \cos(2n\pi v_0 t) dt = 0 \quad \text{si } n \neq 1$$

$$a_1 = A$$

En effet,

$n$  étant un entier positif :

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos(\omega t) \cos(n\omega t) dt = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(n+1)\omega t + \cos(n-1)\omega t] dt$$

si  $n \neq 1$ :

$$a_n = A \left[ \frac{\sin(n+1)\omega t}{(n+1)\omega} + \frac{\sin(n-1)\omega t}{(n-1)\omega} \right]_{-T/2}^{T/2} = 0$$

si  $n = 1$ :

$$a_1 = A$$

Ce résultat, démontré pour la fonction cosinus, est également vrai pour la fonction sinus. Soit :

$$n \text{ étant un entier positif : } \int_{-T/2}^{T/2} \sin(\omega t) \sin(n\omega t) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 1 & \text{si } n = 1 \end{cases}$$

Le spectre de la fonction cosinus est donc constitué d'une raie unique à la fréquence  $v_0$

En utilisant la notation complexe :

$$A \cos(2\pi v_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j2n\pi v_0 t} \quad \text{avec} \quad F_n = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \cos(2\pi v_0 t) e^{-j2n\pi v_0 t} dt$$

Les coefficients complexes  $F_n$  se calculent comme précédemment en écrivant

$$e^{-j2n\pi v_0 t} = \cos(2n\pi v_0 t) - j \sin(2n\pi v_0 t)$$

On trouve :

$$F_n = 0 \quad \text{si } n \neq \pm 1 \qquad F_n = A/2 \quad \text{si } n = \pm 1$$



Ainsi, en notation complexe, le spectre de  $\cos 2\pi\nu_0 t$  est réel et constitué de deux fréquences (on dit aussi de 2 raies)  $\pm \nu_0$ .

Une fréquence négative  $-\nu_0$ , tout comme un temps négatif, n'a pas de signification physique absolue, mais seulement relative. Elle correspond à une fréquence inférieure à une origine (par exemple, lors de la modulation de fréquences autour de la fréquence de l'onde radio porteuse de l'information).

### 2.4.3 Fonction sinus

Soit  $f(t) = A \sin(2\pi\nu_0 t)$

$f(t)$  est impaire, par conséquent  $a_n = 0$

$$\text{De plus : } b_n = \frac{2A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi\nu_0 t) \sin(2n\pi\nu_0 t) dt = 0 \text{ si } n \neq 1$$

$$b_1 = A$$

comme démontré dans le paragraphe précédent.

Le spectre de la fonction sinus est donc constitué d'une raie unique à la fréquence  $\nu_0$ , comme le spectre de la fonction cosinus.

En utilisant la notation complexe :

$$A \sin(2\pi\nu_0 t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{j2n\pi\nu_0 t} \text{ avec } F_n = \frac{A}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(2\pi\nu_0 t) e^{-j2n\pi\nu_0 t} dt$$

Les coefficients complexes  $F_n$  se calculent comme précédemment. On trouve :

$$F_n = 0 \text{ si } n \neq \pm 1 \quad F_n = -jA/2 \text{ si } n = 1 \quad F_n = jA/2 \text{ si } n = -1$$

Ainsi, en notation complexe, le spectre de  $\sin 2\pi\nu_0 t$  est imaginaire pur et il est constitué de deux fréquences (on dit aussi de 2 raies)  $\pm \nu_0$ .

### 2.4.4 Fonction rectangle

La fonction rectangle (étudiée au I.2) de période  $T$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -T/2 < t < -T/4 \\ A & \text{si } -T/4 < t < T/4 \\ 0 & \text{si } T/4 < t < T/2 \end{cases}$$

a un développement en série de Fourier égal à :

$$f(t) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \left[ \cos(2\pi\nu_0 t) - \frac{\cos(6\pi\nu_0 t)}{3} + \frac{\cos(10\pi\nu_0 t)}{5} - \dots \right]$$

Avec la notation complexe, le spectre de la fonction rectangle est obtenu ainsi :

$$\text{en exprimant : } e^{-j2n\pi\nu_0 t} = \cos(2n\pi\nu_0 t) - j\sin(2n\pi\nu_0 t)$$

$$\text{On obtient : } F_n = \frac{A}{T} \int_{-T/4}^{T/4} \cos(2n\pi\nu_0 t) dt = \frac{A}{n\pi} \sin(n\pi/2)$$

$$F_n = 0 \text{ si } n \text{ est réel sauf } F_0 = A/2$$

$$F_n = A/n\pi \text{ si } n = 1, 5, 9 \dots -1, -5, -9 \dots F_n = -A/n\pi \text{ si } n = 3, 7, 11 \dots -3, -7, -11 \dots$$

Le spectre de  $f(t)$  est réel. Il est constitué de raies de fréquences 0 et  $\pm n\nu_0$  d'amplitude diminuant comme  $1/|n|$ .

## 2.5 SERIES DE FOURIER DE QUELQUES FONCTIONS PERIODIQUES

Développement en série de Fourier

Graphe de la fonction

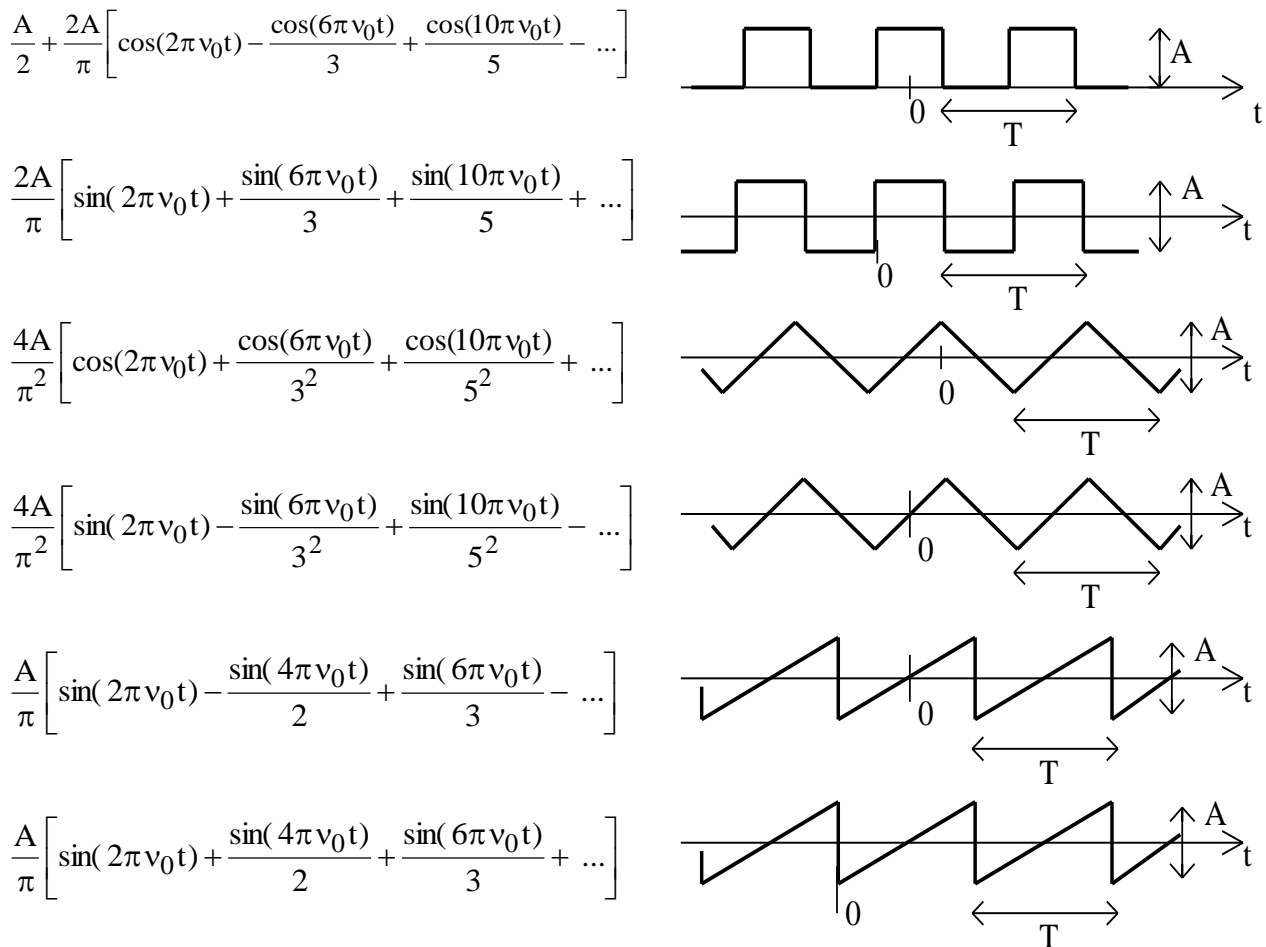


Figure 6 : développement etn série de Fourier de quelques fonctions périodiques simples

La figure 6 représente les graphes et les développements en série de Fourier de quelques fonctions périodiques simples : rectangle, triangle et créneau.

On notera les propriétés de parité, définies par l'origine de l'axe des temps, ainsi que la valeur moyenne de la fonction, non nulle sur la premier exemple, se traduisant par une raie de fréquence nulle sur le spectre (le coefficient  $a_0$  du développement).

### 3 TRANSFORMATION DE FOURIER

#### 3.1 DEFINITION

La transformation de FOURIER généralise l'analyse précédente à des fonctions non périodiques. Une fonction non périodique peut être considérée comme une fonction de période infinie ( $T \rightarrow \infty$ ). La fréquence fondamentale est nulle, de même que l'écart entre les différentes composantes du spectre ( $\nu_0 = 1/T \rightarrow 0$ ).

Le spectre d'une fonction non périodique est continu.

La transformée de FOURIER  $F(\nu)$  d'une fonction  $f(t)$  non périodique est définie, comme l'a été la série de FOURIER, par :

$$F(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

$F(\nu)$ , transformée de FOURIER de  $f(t)$  est aussi appelé par les physiciens le spectre de fréquences de  $f(t)$ .  $F(\nu)$  est défini par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

$F$  ( ou  $F(\nu)$  ) est une fonction, en général complexe, de la variable  $\nu$  :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt$$

$F(\nu)$  possède une partie réelle :

$$\text{Re}[F(\nu)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(2\pi\nu t) dt = A(\nu)$$

$F(\nu)$  possède une partie imaginaire :

$$\text{Im}[F(\nu)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\nu t) dt = B(\nu)$$

$F(\nu)$  a un module : spectre d'amplitude de  $f(t)$

$$|F(\nu)| = \sqrt{A^2(\nu) + B^2(\nu)}$$

$F(\nu)$  a un argument : spectre de phase de  $f(t)$

$$\varphi(\nu) = \text{tg}^{-1} \left( \frac{B(\nu)}{A(\nu)} \right)$$

Expressions reliées par

$$F(\nu) = A(\nu) + jB(\nu)$$

$$F(\nu) = |F(\nu)| e^{j\varphi(\nu)}$$

### 3.2 CONDITIONS D'EXISTENCE DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER

Soit une fonction  $f$  ou  $f(x)$  de la variable  $x$ ,  $x$  étant le temps, une position spatiale ou toute autre variable réelle.

$f(x)$ , définie sur  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels, admet une transformée de FOURIER  $F(s)$  si elle respecte les conditions suivantes: elle a un nombre fini de discontinuités, un nombre fini de branches infinies,

un nombre fini de maxima ou minima, son intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$  est finie,

Si  $f(x)$  est périodique, les trois premières conditions s'appliquent sur une période.

$x$  et  $s$  sont des variables associées par la transformation de Fourier. Elles ont physiquement des dimensions inverses l'une de l'autre. Des exemples de variables associées sont :

temps - fréquence :  $t$  et  $\nu$  qui s'expriment respectivement en s et  $s^{-1}$  (ou Hz) dans le système mksA.

position - fréquence spatiale :  $x$  et  $k_x$  qui s'expriment respectivement en m et  $m^{-1}$  dans ce système.

Ces conditions sont suffisantes mais pas nécessaires. Elles sont satisfaites pour toutes les fonctions ayant une signification physique. La condition d'existence de la transformée de Fourier ou du spectre ne se pose donc pas en pratique.

### 3.3 TRANSFORMEE DE FOURIER INVERSE

Soit  $f(x)$  admettant une transformée de FOURIER ( notation abrégée TF ou FT )  $F(s)$  :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-j2\pi s x} dx = \text{TF}[f(x)]$$

$$\text{On démontre que : } f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(s)e^{+j2\pi s x} ds = \text{TF}^{-1}[F(s)]$$

$f(x)$  est la transformée de FOURIER inverse ( notation  $\text{TF}^{-1}$  ) de  $F(s)$ .

On écrit ce résultat sous la forme condensée :

$$f(x) \Leftrightarrow F(s)$$

Les deux fonctions sont transformées de FOURIER l'une de l'autre. La connaissance de l'une permet de calculer l'autre. Il est équivalent de connaître l'évolution temporelle d'une fonction  $f(t)$  ( d'un signal électrique ) ou son spectre de fréquence  $F(\nu)$ .

### 3.4 TRANSFORMEE DE FOURIER DISCRETE

La transformation de Fourier s'applique à une fonction  $f(t)$ , c'est-à-dire à un signal continu ou analogique. S'il n'est pas possible de calculer la primitive de  $f(t)$ , ou si un signal ne peut être modélisé par une fonction, il est nécessaire de réaliser le calcul de son spectre de fréquence par une méthode numérique. Ce qui est similaire au calcul du spectre d'un signal numérique.

La transformée de Fourier s'applique alors à une suite  $f(n)$ . On parle de transformée de Fourier discrète.

Appliquée à une suite de  $N$  valeurs (ou  $N$  échantillons)  $f(n)$ , la transformée de Fourier discrète s'écrit:

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-j2\pi kn/N} \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1$$

C'est une suite de N nombres complexes.

La transformée de Fourier discrète inverse s'écrit :

$$f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) e^{j2\pi kn/N} \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1$$

En posant  $W = e^{-2\pi j/N}$ , les relations ci-dessous peuvent s'écrire :

$$F(k) = \sum_{n=0}^{N-1} f(n) W^{kn} \text{ et } f(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F(k) W^{-kn}$$

La transformée de Fourier discrète, exprimée par les relations ci-dessus, nécessite le calcul des N expressions  $F(k)$ , chacune d'elles exigeant N multiplications et N additions. Des algorithmes de calcul de transformée de Fourier rapide (FFT pour Fast Fourier Transform en anglais) ont été développés pour réduire le nombre d'opérations et ainsi le temps de calcul.

### 3.5 TRANSFORMEES DE FOURIER DE FONCTIONS SIMPLES

#### 3.5.1 Fonction porte

La distribution, ou par abus, fonction porte centrée sur l'origine, de largeur T et de hauteur unitaire est notée  $\Pi(t)$ . Elle est définie par :

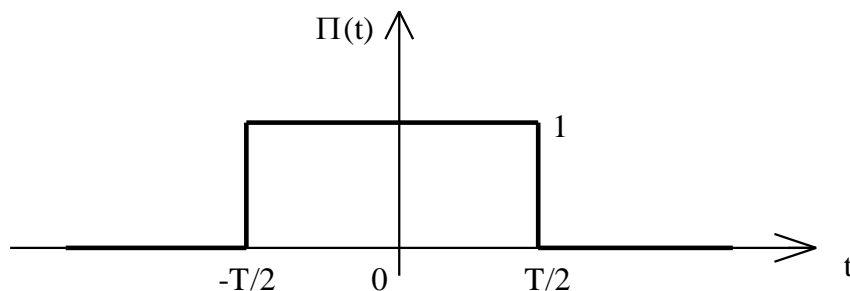


Figure 7 : distribution porte centrée

Sa transformée de Fourier est égale à :

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi jvt} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} e^{-2\pi jvt} dt = \left[ \frac{e^{-2\pi jvt}}{-2\pi jv} \right]_{-T/2}^{T/2} = \frac{e^{-\pi jvT} - e^{\pi jvT}}{-2\pi jv}$$

D'après la formule d'Euler :  $e^{j\pi vt} - e^{-j\pi vt} = 2j \sin(\pi vt)$ , la transformée de Fourier de la fonction porte est :

$$\Pi(t) \Leftrightarrow T \frac{\sin(\pi vT)}{\pi vT} = T \text{sinc}(\pi vT)$$

La fonction notée sinc est appelée fonction sinus cardinal, elle est définie sur R par :

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

La figure 8 représente la transformée de Fourier de la fonction porte centrée, de hauteur 1 unité et de largeur  $T = 2$  s. Cette transformée de Fourier est égale à  $2\text{sinc}(2\pi v)$ .

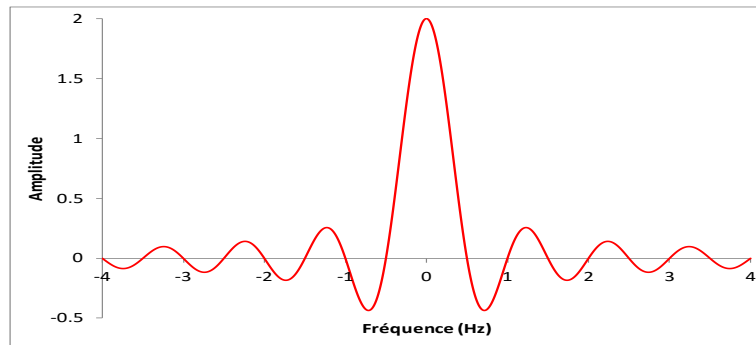


Figure 8 : la fonction sinus cardinal, TF de la porte centrée.

On notera que la fonction sinc est définie sur  $\mathbb{R}$  :  $\text{sinc}(0) = 1$  correspond à son maximum. Son graphe présente une succession de zéros (pour  $\pi v T = k\pi$  soit pour  $v = k/T$ ,  $k$  étant un entier positif ou négatif mais non nul). Entre chaque zéro, son graphe passe par des maxima et minima d'amplitude décroissantes lorsqu'on s'éloigne de l'origine.

Remarque : en optique, le phénomène de diffraction d'un faisceau lumineux réalise une transformation de Fourier. Ainsi la figure de diffraction par une fente de largeur  $L$ , qui se comporte comme une porte, est une distribution en sinus cardinal de l'amplitude du champ électrique dans le plan perpendiculaire à la fente.

### 3.5.2 Fonction exponentielle sur $t > 0$

La fonction  $f(t)$  est définie par :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau} & \text{si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est égale à :

$$F(v) = \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} e^{-2\pi j v t} dt = \int_0^{\infty} e^{(-2\pi j v - 1/\tau)t} dt = \left[ \frac{e^{-(2\pi j v + 1/\tau)t}}{-(2\pi j v + 1/\tau)} \right]_0^{\infty} = \frac{\tau}{1 + 2\pi j v \tau}$$

C'est une fonction complexe de la fréquence  $v$ . On l'appelle fonction de Lorentz :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-t/\tau} & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \Leftrightarrow F(v) = \frac{\tau}{1 + 2\pi j v \tau} = \frac{\tau(1 - 2\pi j v \tau)}{1 + (2\pi v \tau)^2}$$

Sa partie réelle est paire, elle est :

maximale pour  $v = 0$ , elle est alors égale à  $\tau$ ,

égale à  $\tau/2$  pour  $v = \pm 1/(2\pi\tau)$  : on dit que sa largeur à mi-hauteur est égale à  $1/\pi\tau$

Sa partie imaginaire est impaire, elle est :

égale à 0 pour  $v = 0$ .

minimale à  $v = + 1/(2\pi\tau)$  et maximale à  $v = - 1/(2\pi\tau)$ .

La figure 9 représente les parties réelle et imaginaire de la transformée de Fourier de la fonction exponentielle (sur  $t > 0$ ) de constante  $\tau = 1$  s et de hauteur initiale unitaire ( $f(t) = e^{-t}$  pour  $t \geq 0$ ).

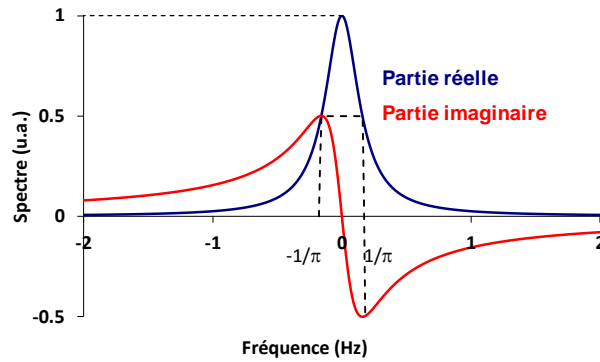


Figure 9 : parties réelles et imaginaires de la fonction de Lorentz.

### 3.5.3 Fonction constante

La fonction  $f(t) = 1$  a une intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$  infinie. Elle n'admet pas de transformée de Fourier.  $f$  peut être considérée comme la limite d'une fonction porte centrée de largeur  $T$  quand  $T \rightarrow \infty$ .

La TF de  $f(t)$  est la limite de  $F(\nu) = T \text{sinc}(\pi\nu T)$  quand  $T \rightarrow \infty$ . Par conséquent  $F(\nu) = 0$  sauf pour  $\nu = 0$ , fréquence où  $F(\nu) = T$ .

$$F(\nu) \begin{cases} = 0 & \text{si } \nu \neq 0 \\ \rightarrow \infty & \text{si } \nu = 0 \end{cases} \quad \text{Notation : } F(\nu) = \delta(\nu)$$

$$\boxed{f(t) = 1 \Leftrightarrow \delta(\nu)}$$

$\delta(\nu)$  est appelée distribution ou impulsion de DIRAC à la fréquence  $\nu = 0$ .

La distribution de DIRAC  $\delta(\nu)$  de la variable  $\nu$  est définie par :

- elle est nulle pour toutes les valeurs de  $\nu \neq 0$ ,
- elle est infinie pour  $\nu = 0$ ,
- son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1 :  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu)d\nu = 1$

### 3.5.4 Fonctions périodiques

On considérera des fonctions du temps de période  $T$ .

#### 3.5.4.1 Fonction cosinus

$$f(t) = \cos 2\pi\nu_0 t : \text{fonction cosinus de fréquence } \nu_0$$

Son spectre de fréquence a été calculé par le développement en série de Fourier : c'est une fonction périodique. Calculons sa transformée de Fourier :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu_0 t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

En écrivant  $e^{-j2\pi\nu t} = \cos(2\pi\nu t) - j\sin(2\pi\nu t)$ , on obtient :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu_0 t) \cos(2\pi\nu t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu_0 t) \sin(2\pi\nu t) dt$$

Comme démontré dans les paragraphes 3.1 et 3.2, et en considérant l'infini comme un nombre infini de périodes, nous avons :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu_0 t) \sin(2\pi\nu t) dt = 0 \quad \forall \nu$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\nu_0 t) \cos(2\pi\nu t) dt \begin{cases} = 0 & \forall \nu \neq \pm \nu_0 \\ \rightarrow +\infty & \text{si } \nu = \pm \nu_0 \end{cases} \quad \text{Notation : } \delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)$$

La transformée de Fourier de la fonction du temps cosinus de fréquence  $\nu_0$  est la somme de deux distributions de Dirac aux fréquences  $+\nu_0$ ,  $\delta(\nu - \nu_0)$  et  $-\nu_0$ ,  $\delta(\nu + \nu_0)$ .

Par soucis de normalisation, on pose  $\int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) d\nu = 1$ . Sachant que  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu) d\nu = 1$ , la transformée de Fourier de la fonction cosinus est donnée par :

$$\cos(2\pi\nu_0 t) \Leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

La transformée de FOURIER de  $\cos 2\pi\nu_0 t$  est réelle et paire.

$\delta(\nu - \nu_0)$  est la distribution de DIRAC à  $\nu = \nu_0$

$\delta(\nu + \nu_0)$  est la distribution de DIRAC à  $\nu = -\nu_0$

La distribution de DIRAC  $\delta(\nu - \nu_0)$  de la variable  $\nu$  est nulle pour  $\nu \neq \nu_0$ , elle est infinie pour  $\nu = \nu_0$ , son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1.

La fonction cosinus de fréquence 5, ( $f(t) = \cos(10\pi t)$ ), et son spectre de fréquence sont représentés sur la figure 10. On notera que ce spectre est réel et pair, propriétés liées au fait que la fonction cosinus est réelle et paire.

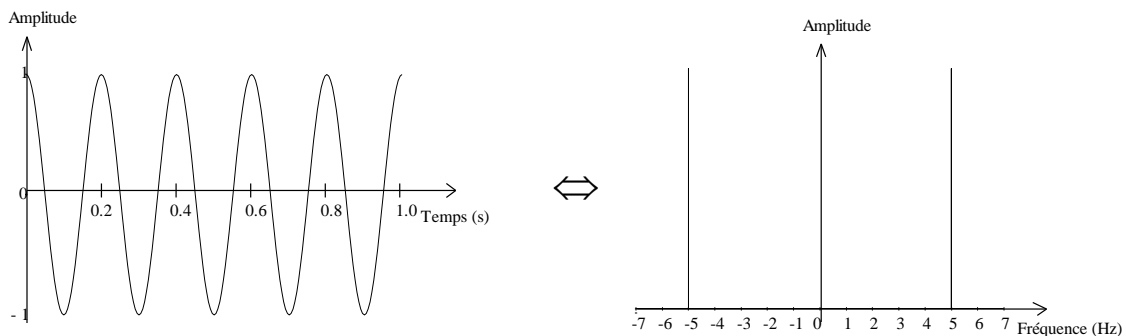


Figure 10 : fonction cosinus et son spectre de fréquence, réel et pair.

### 3.5.4.2 Fonction sinus

$f(t) = \sin 2\pi\nu_0 t$  : fonction sinus de fréquence  $\nu_0$

Sa transformée de Fourier est définie par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\nu_0 t) e^{-j2\pi\nu t} dt$$

De la même manière que pour la fonction cosinus, on démontre que :



$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\nu_0 t) \cos(2\pi\nu t) dt = 0 \quad \forall \nu$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi\nu_0 t) \sin(2\pi\nu t) dt \begin{cases} = 0 & \forall \nu \neq \pm \nu_0 \\ \rightarrow +\infty & \nu = +\nu_0 \quad \text{Notation : } \delta(\nu - \nu_0) \\ \rightarrow -\infty & \nu = -\nu_0 \quad \text{Notation : } \delta(\nu + \nu_0) \end{cases}$$

La transformée de Fourier de la fonction sinus du temps, égale à l'intégrale précédente multipliée par  $-j$  est égale à :  $\sin(2\pi\nu_0 t) \Leftrightarrow \frac{j}{2} [\delta(\nu + \nu_0) - \delta(\nu - \nu_0)]$

La transformée de FOURIER de  $\sin 2\pi\nu_0 t$  est imaginaire et impaire.

La fonction sinus de fréquence 2 ( $f(t) = \sin(4\pi t)$ ) et son spectre de fréquence sont représentés sur la figure 11. Par convention, un spectre imaginaire est représenté par un pointillé.

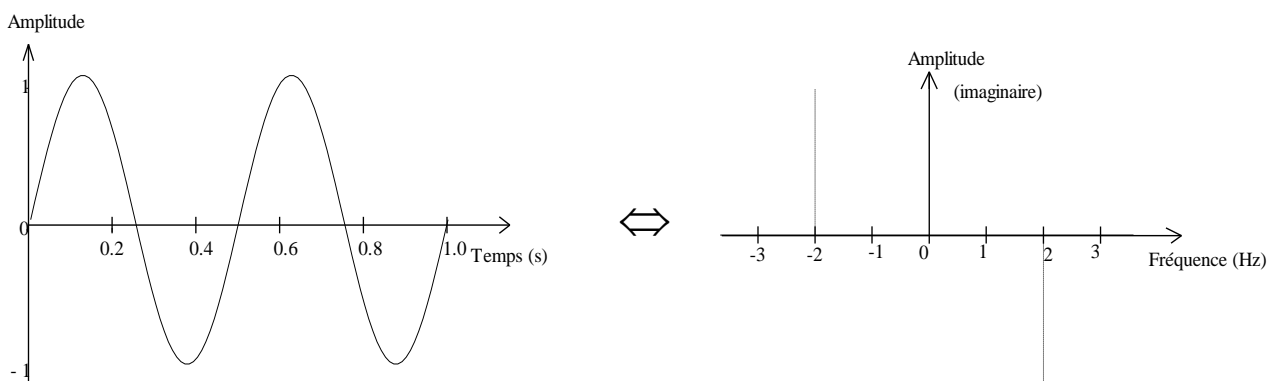


Figure 11 : fonction sinus et son spectre de fréquence, imaginaire et impair.

Les résultats obtenus pour les fonctions cosinus et sinus peuvent être généralisés à toutes les fonctions périodiques. En effet une fonction  $f(t)$  périodique de période  $T = 1/\nu_0$  peut être décomposée en série de FOURIER. Son spectre  $F(\nu)$  est une série de distributions de DIRAC aux fréquences  $\pm \nu_0$  et aux harmoniques  $n.\nu_0$  ( $n$  étant un entier positif ou négatif). Un spectre est en général complexe.

### 3.5.5 Distribution de Dirac

$$f(t) = \delta(t)$$

Rappelons ici la définition de la distribution ou impulsion de Dirac  $\delta(t)$  : elle est nulle pour toutes les valeurs de  $\nu \neq 0$ , elle est infinie pour  $\nu = 0$ , son intégrale sur  $\mathbb{R}$  est égale à 1 :  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\nu) d\nu = 1$

Sa transformée de Fourier est définie par :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-2\pi j \nu t} dt = e^{-2\pi j \nu 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = e^{-2\pi j \nu 0} = 1$$

En effet  $\delta(t) = 0$  si  $t \neq 0$  et  $e^{-2\pi j \nu t} = 1$  à  $t = 0$ .

$$\boxed{\delta(t) \Leftrightarrow 1}$$

Ce résultat était démontrable directement par utilisation de la transformée de Fourier inverse (Paragraphe II.3)

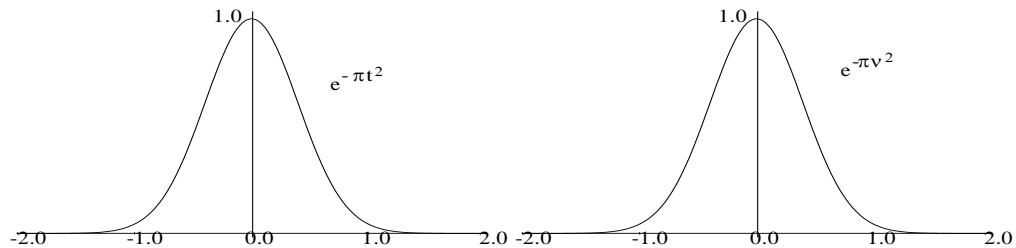
De manière plus générale, on démontre :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f(t)dt = f(0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = f(0)$$

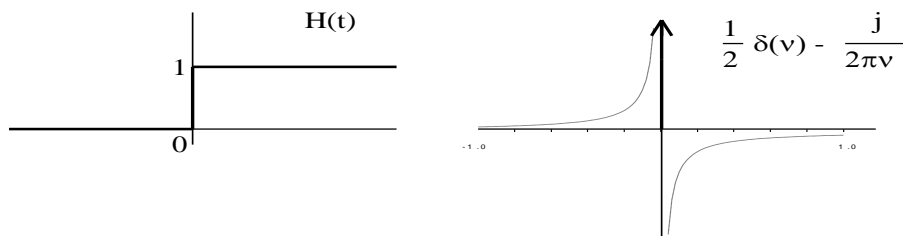
### 3.5.6 Autres fonctions utiles

La figure 12 représente quelques fonctions du temps  $f(t)$  et leurs transformées de Fourier.

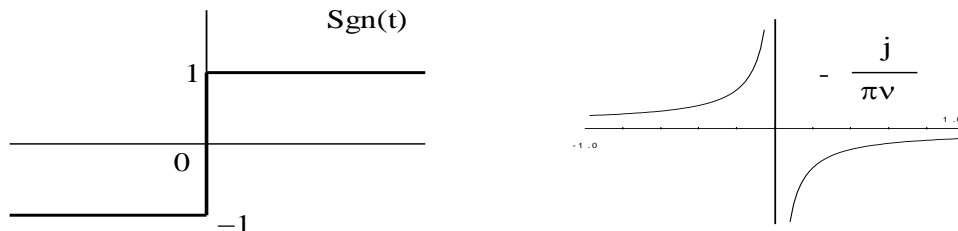
Distribution de Gauss :



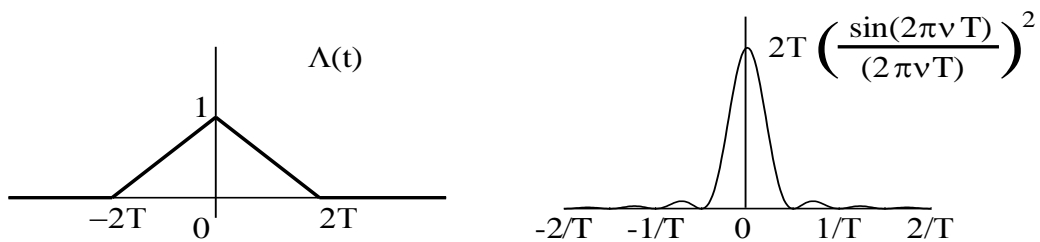
Fonction échelon :



Fonction signe :



Fonction triangle



Fonction peigne de Dirac ou sha

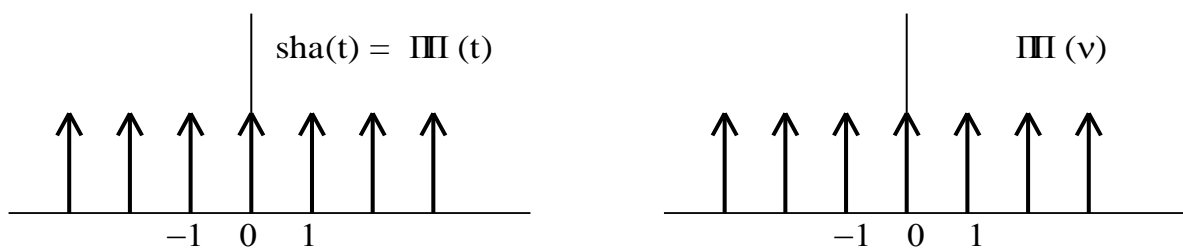


Figure 12 : quelques fonctions importantes et leurs transformées de Fourier.

## 4 PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE DE FOURIER

Soient  $f$  et  $g$  2 fonctions de la variable  $x$  et leurs transformées de FOURIER, les fonctions  $F$  et  $G$  de la variable  $s$ .

$$f(t) \Leftrightarrow F(v)$$

$$g(t) \Leftrightarrow G(v)$$

### 4.1 LINEARITE

Si  $a$  et  $b$  sont deux réels :

$$af(t) + bg(t) \Leftrightarrow aF(v) + bG(v)$$

La propriété de linéarité de la TF résulte des propriétés de linéarité de l'intégrale. Il est aisé de la démontrer :

$$\text{A partir de : } F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi jvt} dt \quad G(v) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi jvt} dt$$

On démontre que la transformée de Fourier de  $af(t) + bg(t)$  est égale à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a.f(t) + b.g(t))e^{-2\pi jvt} dt = a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi jvt} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-2\pi jvt} dt = a F(v) + b G(v)$$

Exemple d'application : transformée de Fourier d'une fonction porte de hauteur  $h$  ajoutée à une constante  $b$  :

$$h\Pi(t) + b \Leftrightarrow b\delta(v) + hT\text{sinc}(\pi vT)$$

$$f(t) \Leftrightarrow F(v)$$

### 4.2 SIMILITUDE

Cette propriété traduit un changement linéaire de variable ou d'échelle.

soit  $f(t) \Leftrightarrow F(v)$  et  $a$  un réel positif.

$$f(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{v}{a}\right)$$

La démonstration de cette propriété de similitude est effectuée en faisant apparaître la nouvelle variable d'intégration  $at$  dans l'expression de la transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-2\pi jvt} dt = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-2\pi j\left(\frac{v}{a}\right)at} d(at) = \frac{1}{a} F\left(\frac{v}{a}\right)$$

Exemple d'application : transformée de Fourier d'une porte centrée de largeur  $2T$  :

$$f(t) = 1 \text{ pour } -T < t < +T; f(t) = 0 \text{ partout ailleurs}$$

Soit la variable  $u = t/2$  (ce qui correspond au paramètre  $a = 1/2$ )  $f(u) = 1$  pour  $-T/2 < u < T/2$

$f(u)$  est une porte centrée de largeur  $T$  dont la transformée de Fourier est  $T\text{sinc}(\pi vT)$

La transformée de Fourier de  $f(t)$  est donc  $F(v) = 2T\text{sinc}(2\pi vT)$ .

(On peut également démontrer ce résultat à partir de la définition de la transformation de Fourier).

Les premiers 0 de  $F(v)$  se situent à  $v = \pm 1/2T$  : une dilatation de l'échelle des temps ( $a < 1$ ) correspond à une contraction de l'échelle des fréquences. Ce résultat est important : on constate en effet sur l'exemple de la fonction porte que plus la largeur de la porte est grande, plus le spectre de fréquences est étroit. A la limite, si la porte a une largeur infinie, la fonction porte se confond avec une constante : sa transformée de Fourier est une impulsion de Dirac : de largeur nulle.

### 4.3 TRANSLATION

Soit  $f(t) \Leftrightarrow F(v)$  et  $a$  un réel.

$$f(t - a) \Leftrightarrow e^{-j2\pi va} F(v)$$

La démonstration est la suivante :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-2\pi jvt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - a) e^{-2\pi jv(t-a)} e^{-2\pi jva} d(t - a) = e^{-2\pi jva} F(v)$$

Elle est réalisée en faisant apparaître la variable  $(t-a)$ . La transformée de Fourier de la fonction  $f(t - a)$  peut être comparée à la transformée de Fourier  $F(v)$  de  $f(t)$  :

Les modules des deux transformées sont égaux, en effet :  $|e^{-j2\pi va}| = 1$

Les phases diffèrent de  $\Delta\varphi = -2\pi va$ , la phase du nombre complexe  $e^{-j2\pi va}$

Une translation de la variable  $t$  d'une quantité  $a$  positive correspond à un retard et entraîne un déphasage négatif  $\Delta\varphi$  pour les fréquences  $v$ .

On notera que le déphasage introduit augmente avec la fréquence.

Deux signaux décalés selon  $t$  d'une quantité  $a$  telle que le produit  $av = 1$  ont des spectres déphasés de  $\Delta\varphi = 2\pi$ , donc des spectres identiques.

Considérons deux exemples d'application de la propriété de translation.

1° Calculons la transformée de Fourier d'une impulsion de DIRAC au temps  $t = t_0$   $\delta(t - t_0)$  :

$$F(v) \Leftrightarrow \delta(t - t_0)$$

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-2\pi jvt} dt = e^{-2\pi jvt_0}$$

Résultat obtenu en utilisant la relation du paragraphe III.3.

Par conséquent, en exprimant l'exponentielle imaginaire :

$$\delta(t - t_0) \Leftrightarrow \cos(2\pi vt_0) - j\sin((2\pi vt_0))$$

On a démontré au paragraphe 4.5 que la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac au temps  $t = 0$  est la fonction constante  $F(v) = 1$ .

On trouve ici que la transformée de Fourier d'une impulsion de Dirac au temps  $t_0$  non nul est complexe, c'est une fonction de la variable  $v$  de fréquence  $t_0$ .

2° Recherchons maintenant la transformée de Fourier d'une porte non centrée définie par :

$f(t)$  est une fonction porte de largeur  $T$ , décentrée de  $T/2$  et de hauteur 1. Sa transformée de Fourier est égale à :

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(t - T/2) e^{-2\pi j v t} dt = \int_0^T \Pi(t - T/2) e^{-2\pi j v (t - T/2)} e^{-\pi j v T} d(t - T/2) = e^{-\pi j v T} T \text{sinc}(\pi v T)$$

Autre écriture :

$$F(v) = T \frac{\sin(\pi v T)}{\pi v T} |\cos(\pi v T) - j \sin(\pi v T)|$$

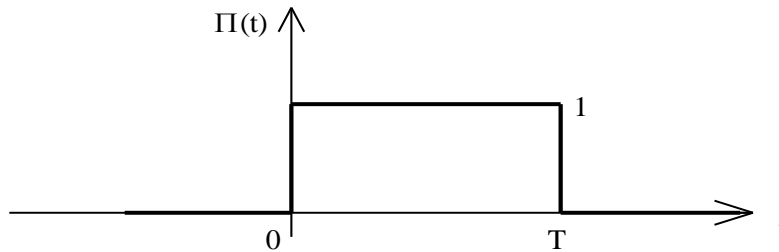


Figure 13 : fonction porte non centrée

et en explicitant les produits des fonctions trigonométriques :

$$F(v) = \left[ \frac{\sin(2\pi v T)}{2\pi v} - j \frac{1 - \cos(2\pi v T)}{2\pi v} \right] = T \left[ \text{sinc}(2\pi v T) - j \frac{1 - \cos(2\pi v T)}{2\pi v T} \right]$$

Ainsi exprimée la transformée de Fourier de la fonction porte de hauteur 1, et de largeur T centrée sur T/2 est complexe. Sa partie réelle est un sinus cardinal de fréquence double de celle de la porte centrée de même largeur. Voir également le paragraphe relatif au filtrage temporel.

## 4.4 DERIVATION ET INTEGRATION

### 4.4.1 Théorèmes

Soit :  $f(t) \Leftrightarrow F(v)$ . On démontre les théorèmes suivants :

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow 2\pi j v F(v) \qquad \int f(t) dt \Leftrightarrow \frac{-j}{2\pi v} F(v) + \lambda \delta(v)$$

### 4.4.2 Application à la fonction porte

Soit  $f(t)$  la fonction porte centrée de largeur T :  $f(t) \Leftrightarrow \frac{\sin(\pi v T)}{\pi v}$

Il est possible de calculer les transformées de Fourier des fonctions dérivées et intégrales de  $f(t)$  par application des théorèmes ci-dessus, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{df(t)}{dt} &\Leftrightarrow 2\pi j v \frac{\sin(\pi v T)}{\pi v} = 2j \sin(\pi v T) \\ \int f(t) dt &\Leftrightarrow \frac{1}{2\pi j v} \frac{\sin(\pi v T)}{\pi v} + \lambda \delta(t) = -j \frac{\sin(\pi v T)}{\pi^2 v^2} + \lambda \delta(t) \end{aligned}$$

Ces résultats peuvent être obtenus par calcul des fonctions dérivées et intégrales et utilisation de la définition de la transformation de Fourier :

La fonction porte est constante, sa dérivée est nulle en tout point sauf aux instants  $\pm T/2$ . La dérivée y est alors infinie, elle peut s'écrire comme la somme de deux impulsions de Dirac :

$$\frac{df(t)}{dt} = \delta(t - T/2) - \delta(t + T/2)$$

La transformée de Fourier d'une distribution de Dirac au temps  $t_0$  non nul a été calculée au paragraphe 5.3 : on obtient le résultat :

$$\frac{df(t)}{dt} \Leftrightarrow \cos(\pi v(-T)) - j \sin(\pi v(-T)) \Big| - \Big| \cos(\pi vT) - j \sin(\pi vT) \Big| = 2j \sin(\pi vT)$$

La fonction  $F(t)$  primitive de la fonction porte est définie par :

$$F(t) = \int f(t)dt \begin{cases} = 0 + C & \text{sur } [-\infty, -T/2] \\ = t + C' & \text{sur } [-T/2, T/2] \\ = C'' & \text{sur } [T/2, \infty] \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier est donc égale à :

$$\int_{-\infty}^{-T/2} C e^{-2\pi j v t} dt + \int_{-T/2}^{T/2} (t + C') e^{-2\pi j v t} dt + \int_{T/2}^{\infty} C'' e^{-2\pi j v t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-2\pi j v t} dt + \int_{-T/2}^{T/2} t e^{-2\pi j v t} dt$$

La première intégrale est la transformée de Fourier d'une constante : impulsion de Dirac. La seconde se calcule par parties, en remplaçant l'exponentielle imaginaire par sa forme trigonométrique.

Le résultat de ce calcul permet d'exprimer :

$$\int f(t)dt \Leftrightarrow -j \frac{\sin(\pi vT)}{\pi^2 v^2} + \lambda \delta(v)$$

#### 4.4.3 Primitive de la distribution de Dirac : la fonction échelon

$$f(t) = \delta(t) \Leftrightarrow F(v) = 1$$

Par définition de la distribution de Dirac ( $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$ )

$$H(t) = \int f(t)dt = \begin{cases} 0 & \text{sur } [-\infty, 0] \\ 1 & \text{sur } [0, \infty] \end{cases}$$

Auquel on adjoint la valeur  $H(0) = 1/2$  pour que la fonction  $H$  soit définie sur  $\mathbb{R}$ .  $H(t)$  est appelée la fonction échelon : sa transformée de Fourier est égale à :

$$H(t) \Leftrightarrow \frac{-j}{2\pi v} + \lambda \delta(v)$$

Remarque :  $\int_{-\infty}^{\infty} H(t)dt$  n'est pas finie :  $H(t)$  n'admet donc théoriquement pas de transformée de Fourier.

En pratique, on ne peut réaliser une grandeur constante sur un temps ou un domaine spatial infini, mais une grandeur qui décroît très lentement vers 0 ou une fonction porte dont la largeur devient très grande. Ces fonctions admettent chacune une transformée de FOURIER dont la limite est le transformée de Fourier de la fonction échelon.

Considérons  $H(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} (e^{-t/\tau}) + \lambda$  quand  $\tau \rightarrow \infty$ , on peut écrire sa transformée de Fourier :

$$H(t) \Leftrightarrow \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau(1 - 2\pi j v \tau)}{1 + (2\pi v \tau)^2} + \lambda \delta(v) = \frac{-j}{2\pi v} + \lambda \delta(v)$$

La constante d'intégration  $\lambda$  est déterminée par normalisation du résultat. Soit la transformée de Fourier de la fonction échelon.

$$H(t) \Leftrightarrow = \frac{-j}{2\pi v} + \frac{\delta(v)}{2}$$

Les graphes de la fonction  $H(t)$  et de sa transformée de Fourier sont représentés sur la figure 12.

## 4.5 PARITE

### 4.5.1 Fonctions réelles paires ou impaires

Soit  $f(t)$  une fonction réelle et paire : sa transformée de Fourier  $F(v)$  est réelle et paire.

Si  $f(t)$  est réelle et impaire :  $F(v)$  est imaginaire et impaire.

La démonstration pour  $f(t)$  paire est donnée ci-dessous :

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi jvt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi vt)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(2\pi vt)dt$$

$f$  et  $\cos$  étant 2 fonctions paires de la variable  $t$ , le produit des deux est également pair.

$f$  et  $\sin$  étant paire et impaire, le produit des deux est impair.

On obtient ainsi d'une part :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(2\pi vt)dt = 2 \int_0^{\infty} f(t)\cos(2\pi vt)dt$$

$\cos$  est une fonction paire de la variable  $t$  : l'intégrale ci-dessus est une fonction de  $v$  qui est également paire.  $F(v)$  a donc une partie réelle paire.

D'autre part :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(2\pi vt)dt = \lim_{v_0 \rightarrow \infty} \int_{-v_0}^{v_0} f(t)\sin(2\pi vt)dt = 0$$

$F(v)$  possède une partie imaginaire nulle. La démonstration est similaire pour  $f(t)$  impaire : la partie réelle de sa transformée de Fourier est nulle.

### 4.5.2 Fonctions réelles

Une fonction  $f$  réelle d'une variable réelle  $t$  peut s'écrire sous la forme de la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$$f(t) = E(t) + O(t) \text{ avec } E(t) \text{ paire et } O(t) \text{ impaire,}$$

Il suffit de définir :

$$E(t) = 1/2(f(t) + f(-t)) : E(t) \text{ est paire}$$

$$O(t) = 1/2(f(t) - f(-t)) : O(t) \text{ est impaire.}$$

Ecrivons que la transformée de Fourier de  $f(t)$ , notée  $F(s)$ , est la somme des transformées de Fourier de  $E(t)$  et de  $O(t)$  (linéarité de la transformation de Fourier) :

$$F(v) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)e^{-2\pi jvt} dt + \int_{-\infty}^{\infty} O(t)e^{-2\pi jvt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)\cos(2\pi vt)dt - j \int_{-\infty}^{\infty} O(t)\sin(2\pi vt)dt$$

$F(\nu)$  est la somme de deux termes : le premier est réel et pair, le second est imaginaire et impair. Ces termes sont respectivement appelés transformées cosinus et sinus de la fonction  $f(t)$ .

La transformée de Fourier d'une fonction réelle est généralement complexe. Sa partie réelle est paire, elle est également appelée transformée cosinus. Sa partie imaginaire est impaire, on l'appelle transformée sinus.

Dans le cas de fonctions de variables complexes : il est possible d'établir les résultats suivants :

Si  $f(t)$  est imaginaire et paire :  $F(\nu)$  est imaginaire et paire.

Si  $f(t)$  est imaginaire et impaire :  $F(\nu)$  est réelle et impaire.

Par conséquent, si  $f(t)$  est complexe de partie réelle paire et de partie imaginaire impaire, sa transformée de Fourier  $F(\nu)$  est réelle.  $f(t)$  est dite hermitique.

#### 4.6 ENERGIE

Un signal  $f(t)$ , réel ou complexe, possède un spectre  $F(\nu)$  qui est en général complexe. La fonction  $|F(\nu)|^2$  est appelée la **densité spectrale d'énergie** de  $f(t)$  ou plus simplement son **spectre d'énergie**. La notation  $|z|$  représente le module du nombre complexe  $z$ .

Si  $f(t)$  est un signal d'énergie finie, la fonction  $k$  du temps  $\tau$  définie par :

$$k(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t + \tau) dt$$

est appelée fonction d'autocorrélation de  $f(t)$ .

On démontre que la transformée de Fourier  $K(\nu)$  de  $k(t)$  est égale au spectre d'énergie de  $f(t)$  :

$$K(\nu) = |F(\nu)|^2$$

Une fonction périodique n'est pas d'énergie finie. Soit  $f(t)$  de période  $T$  et de puissance moyenne  $P$ .

La fonction d'autocorrélation de  $f(t)$  est alors définie par  $k(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) f(t + \tau) dt$ . Sa transformée

de Fourier  $K(\nu)$  est appelée son spectre de puissance.

L'énergie de  $f(t)$  sur une période est  $E = P.T$ .

Il est possible de calculer l'énergie d'un signal dans le temps :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt$$

Il est également possible de calculer cette énergie sur son spectre de puissance :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\nu)|^2 d\nu$$

L'égalité entre ces deux résultats résulte des propriétés du produit de convolution (paragraphe suivant) et porte le nom de théorème de Parseval.

Des résultats similaires sont obtenus pour des signaux numériques.



## 5 TRANSFORMEE DE FOURIER ET CONVOLUTION

En mesure physique et traitement de l'information, les fonctions du temps sont des signaux électriques et leurs transformées de Fourier sont leurs spectres de fréquence. En imagerie optique, médicale ou en cristallographie, les signaux acquis dépendront de fréquences spatiales et leurs transformées de Fourier seront des fonctions de l'espace, des images ou des figures de diffraction. Ces notions sont aujourd'hui très employées dans tous les domaines, et bien entendu en médecine, de par les progrès des technologies numériques. Quelques exemples d'utilisation sont présentés dans ce paragraphe.

### 5.1 PRODUIT DE CONVOLUTION

Le produit de convolution de 2 fonctions  $f$  et  $g$  est défini par la relation :

$$h(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau$$

La figure 14 donne une représentation graphique du produit de convolution  $f(t)*g(t)$  :

La figure 14.a représente les graphes des fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$ . Dans cet exemple, il faut noter que  $f(t) \neq 0$  pour  $0 < t < 0,25$  s et que  $g(t) \neq 0$  pour  $0 < t < 0,5$  s.

Pour calculer  $h(t)$ , il faut réaliser  $g(t - \tau)$ , c'est à dire retourner le graphe de  $g$  autour de l'axe vertical (et ainsi obtenir  $g(-\tau)$ ), puis le translater de  $t$ . La figure 14.b représente  $g(-\tau)$  et  $g(t-\tau)$  pour 4 valeurs de  $t$  : 0, 0,25, 0,5 et 0,75s. On constate graphiquement que  $g(t-\tau)$  et  $f(\tau)$  peuvent être simultanément différents de 0 seulement pour  $t = 0,25$  et  $t = 0,5$  s.

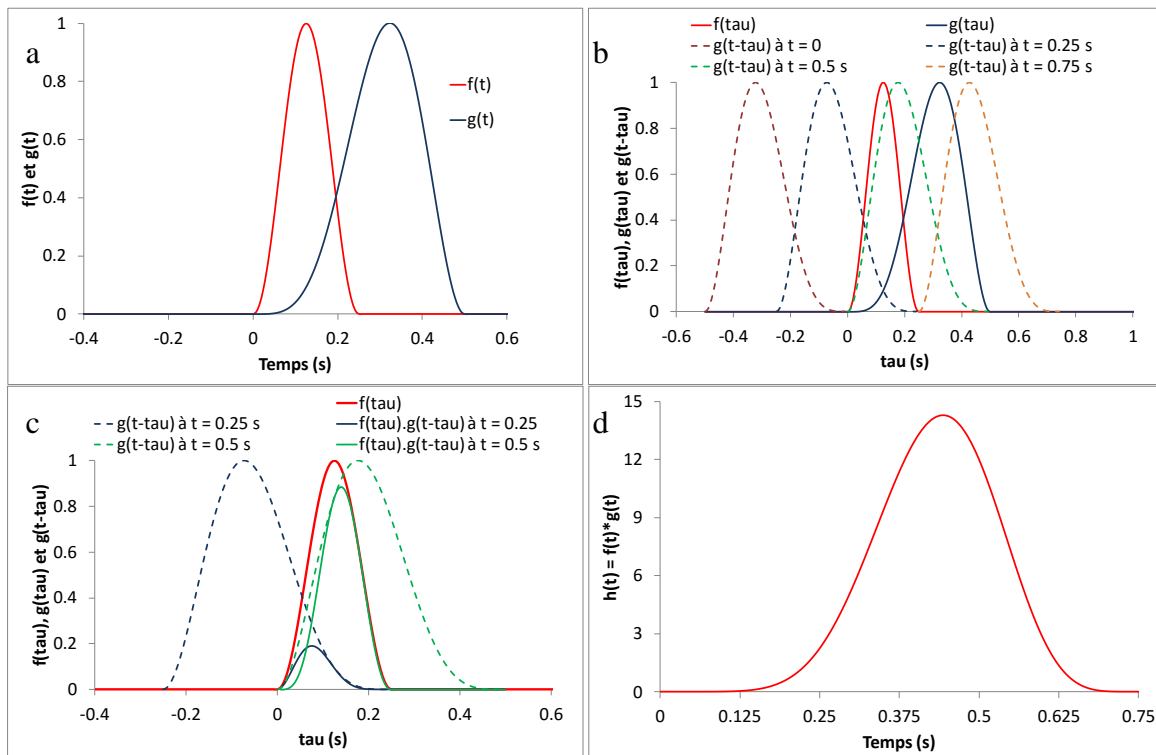


Figure 14 : illustration du produit de convolution  $f(t)*g(t)$

Il faut ensuite calculer le produit de  $f(\tau)$  par  $g(t - \tau)$  pour chaque valeur de  $\tau$ . Ce produit est représenté sur la figure 14.c, pour les seules valeurs de  $t = 0,25$  et  $0,5$  s. Pour  $t = 0$  et  $t = 0,75$  s, ce produit est nul car au moins un des termes du produit est nul, quel que soit  $\tau$ .

Il faut enfin calculer l'intégrale de ce produit  $f(\tau).g(t - \tau)$  pour  $\tau$  variant sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$ , cette intégrale est  $h(t)$ , le produit de convolution à cet instant  $t$ . Ces produits représentent les aires sous les courbes des produits  $f(\tau).g(t - \tau)$ , représentés à  $t = 0,25$  et à  $0,5$  s. On trouve respectivement les valeurs relatives de 2,2 et 12,0 unités. La figure 14.d représente le graphe du produit de convolution  $h(t)$  en fonction de  $t$  en faisant varier  $t$  de manière continue. On notera qu'il est non nul de  $t = 0$  à  $t = 0,75$  s, cet intervalle de 0,75s est la somme des domaines sur lesquels  $f(t)$  et  $g(t)$  sont non nuls.

Signification physique du produit de convolution : la convolution décrit l'action d'un instrument de mesure qui ne peut détecter des variations infinitésimales ou infiniment brèves du phénomène observé. L'exemple illustré par la figure 14 montre qu'un signal d'entrée  $g(t)$  de durée 0,5 s, convolué par une fonction  $f(t)$  de 0,25 s caractéristique de l'appareil de mesure, se traduit par une sortie de l'appareil qui dure 0,75s. Une entrée  $g(t)$  très courte se traduirait par une sortie de durée égale à  $f(t)$ ,

Par exemple, l'image d'un objet ponctuel par un instrument d'optique est une tache de diffraction : la résolution de l'image n'est pas infinie. De même, une impulsion électrique infiniment brève à l'entrée d'un instrument, amplificateur par exemple, en sort sous forme d'un signal de durée finie : l'amplificateur a une bande passante finie.

La sortie ( image  $i(x)$  ou signal temporel  $s(t)$  ) peut s'écrire sous la forme du produit de convolution de l'entrée ( objet  $o(x)$  ou signal  $e(t)$  ) par une fonction caractéristique de l'instrument (appareil d'imagerie  $h(x)$  ou instrument électronique  $h(t)$  ) :

$$i(x) = o(x) * h(x) \quad \text{ou} \quad s(t) = e(t) * h(t)$$

## 5.2 THEOREME DE PLANCHEREL

Le théorème de Plancherel exprimé ci-dessous associe transformation de Fourier et produit de convolution. Il s'énonce ainsi :

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier et s'écrit :

$$\boxed{h(t) = f(t) * g(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(v) = F(v) G(v)}$$

La démonstration du théorème de Plancherel est simple. Considérons la transformée de Fourier du produit de convolution, elle est égale à :

$$H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \right] e^{-2\pi jvt} dt$$

Elle s'écrit également :

$$H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau e^{-2\pi jvt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-2\pi jvt} dt \right] d\tau$$

Le terme entre crochet est égal à la transformée de Fourier de la fonction  $g(t)$  translatée de  $\tau$ . Elle est, selon le paragraphe 5.3, égale à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)e^{-2\pi jvt} dt = G(v)e^{-2\pi jv\tau}$$

Ce qui permet d'écrire finalement :

$$H(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)G(v)e^{-2\pi jv\tau} d\tau = G(v) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-2\pi jv\tau} d\tau = G(v)F(v)$$

De la même manière on démontre que la transformée de Fourier du produit de 2 fonctions est égal au produit de convolution des transformées de Fourier :

$$h(t) = f(t)g(t) \quad \Leftrightarrow \quad H(v) = F(v) * G(v)$$

### 5.3 REPONSE IMPULSIONNELLE, FONCTION DE TRANSFERT

Utilisons le produit de convolution  $s(t) = e(t) * h(t)$  dans le cas particulier où  $e(t) = \delta(t)$ . Nous calculons le signal de sortie d'un appareil caractérisé par  $h(t)$  qui reçoit à l'entrée une impulsion de Dirac.  $s(t)$  est égale à :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) h(t - \tau) d\tau = h(t)$$

par définition de la distribution de DIRAC. Le produit  $\delta(\tau)h(t - \tau)$  est en effet nul pour  $t \neq \tau$ . Et la

fonction de Dirac est normalisée :  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$

$s(t)$  est égal à  $h(t)$ . La fonction  $h(t)$  est appelée **réponse impulsionnelle** de l'appareil : c'est le signal de sortie lorsqu'une impulsion de Dirac est appliquée à l'entrée.

Spectres des signaux : de l'égalité précédente et par application du théorème de Plancherel, on obtient les relations :

$$s(t) = e(t) * h(t) \quad \Leftrightarrow \quad S(v) = E(v) H(v)$$

Le spectre du signal de sortie est égal au spectre du signal d'entrée multiplié par la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle de l'appareil.

$H(v)$  est appelée **fonction de transfert** de l'appareil.

La fonction de transfert est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle.

Un appareil de mesure pourra indifféremment être décrit par sa réponse impulsionnelle ou par sa fonction de transfert. Sans même connaître son organisation, ces caractéristiques permettent de décrire son effet sur un signal d'entrée et de calculer la sortie correspondante.

L'opération inverse, permettant de recalculer l'entrée d'un instrument  $e(t)$  à partir de la connaissance de la sortie  $s(t)$  et de réponse impulsionnelle  $h(t)$ , s'appelle déconvolution. Cette opération est très intéressante car  $s(t)$  est le résultat de la mesure avec l'appareil. Cette mesure diffère de la réalité  $e(t)$  de la grandeur observée. Cette déconvolution est généralement complexe et ne peut d'effectuer simplement. On parle de problème inverse. La résolution de tels problèmes fait appel à des méthodes d'optimisation qui doivent être adaptées au domaine d'application considéré.



## **6 ECHANTILLONNAGE**

Un signal analogique est échantillonné, donc converti en signal numérique, dans la plupart des instruments actuels. Le signal est échantillonné par un convertisseur analogique – numérique (ADC = Analog to Digital Converter) à des instants séparés de la période d'échantillonnage  $T_e$  avant stockage dans des mémoires numériques en vue de traitement informatique ultérieur.

L'opération d'échantillonnage a des conséquences sur la connaissance du signal, et par conséquent sur celle de son spectre de fréquences.

### **6.1 NUMERISATION SUR N BITS**

Le nombre de bits  $N$  détermine la résolution du signal numérique. Un ADC fonctionne généralement entre  $-10\text{ V}$  et  $+10\text{ V}$  ou entre  $0$  et  $+10\text{ V}$ . Le signal analogique doit bien entendu rester dans l'intervalle correspondant.

Soit un signal analogique variant entre  $-10\text{ V}$  et  $+10\text{ V}$ , son intervalle de variations possibles est de  $20\text{ V}$ .

Il est échantillonné sur  $N$  bits, ce qui signifie qu'il est enregistré sous forme d'un nombre écrit en binaire sur  $N$  bits, ce qui correspond à  $2^N$  valeurs possibles différentes.

Notation décimale	Ecriture binaire sur 2 bits
0	00
1	01
2	10
3	11

L'exemple ci-dessus d'un signal échantillonné sur 2 bits montre qu'il ne peut prendre que 4 valeurs possibles différentes. Si le signal varie sur  $20\text{ V}$ , la résolution sera donc de  $5\text{ V}$  (on assignera par exemple le nombre 0 à toutes les valeurs du signal comprises entre  $-10\text{ V}$  et  $-5\text{ V}$ , le nombre 1 aux signaux de  $-5$  à  $0\text{ V}$ , le nombre 2 pour les signaux de  $0$  à  $+5\text{ V}$  et le nombre 3 pour les signaux de  $5$  à  $+10\text{ V}$ .).

Dans le cas plus réaliste d'un signal échantillonné sur 16 bits, la résolution d'un signal sera égale à  $20/2^{16} = 20/65536 = 305\text{ }\mu\text{V}$ .

Une mesure a en pratique un temps limité, c'est-à-dire non infini, appelé temps d'acquisition  $T_{acq}$ . Ce temps d'acquisition ou de mesure est égal au temps d'échantillonnage multiplié par le nombre d'échantillons réalisés  $N_e$  moins 1 :

$$T_{acq} = (N_e - 1) \cdot T_e.$$

Le nombre d'échantillons réalisés durant l'acquisition détermine la quantité d'information acquise. Le calcul du spectre d'un signal échantillonné ne pourra pas faire apparaître plus d'information. Par conséquent, il ne sera pas possible de connaître plus de  $N_e$  points sur le spectre du signal.

### **6.2 SPECTRE D'UN SIGNAL ECHANTILLONNE**

La période d'échantillonnage détermine la fréquence maximale du signal  $e(t)$ , observable sur le signal échantillonné. Toute information à une fréquence supérieure sera perdue ou déformée lors de l'échantillonnage. L'analyse de FOURIER de l'opération d'échantillonnage permet d'expliquer ce résultat.

Considérons un échantillonnage sur une durée infinie. Si cette durée est finie, nous réalisons en plus un filtrage temporel, traité ci-dessus. Le signal échantillonné  $\hat{e}(t)$  est égal au produit du signal

analogique  $e(t)$  multiplié par 1 lors de l'échantillonnage, tous les  $T_e$  et par 0 à tous les autres temps, c'est-à-dire par un peigne de Dirac  $\mathbf{u}(t/T_e)$  :  $\hat{e}(t) = e(t) \cdot \mathbf{u}(t/T_e)$ .

La transformée de Fourier de  $\mathbf{u}(t)$ , peigne de Dirac de période unité, est  $\mathbf{u}(v)$  (voir figure 8), par application du théorème de similitude  $\mathbf{u}(t/T_e)$  admet pour transformée de Fourier  $\mathbf{u}(vT_e)$ . C'est un peigne de Dirac aux fréquences  $n/T_e = nv_e$ .  $v_e = 1/T_e$  est la fréquence d'échantillonnage.

Le spectre du signal échantillonné  $\hat{E}(v)$  est, selon le théorème de Plancherel :

$$\hat{E}(v) = E(v) * \mathbf{u}(vT_e) = E(v) * \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(v - nv_e) = \sum_{-\infty}^{+\infty} E(v) * \delta(v - nv_e) = \sum_{-\infty}^{+\infty} E(v - nv_e)$$

Le spectre du signal échantillonné  $\hat{E}(v)$  est égal au spectre du signal analogique  $E(v)$  périodisé : répété sur l'axe des fréquences tous les  $v_e = 1/T_e$ .

### 6.3 THEOREME DE SHANNON

Considérons le spectre  $\hat{E}(v)$  du signal numérisé  $\hat{e}(t)$ . Si le spectre  $E(v)$  du signal analogique  $e(t)$  s'étend de  $-v_s$  à  $+v_s$ , le spectre  $\hat{E}(v)$  s'étendra sur  $\pm v_s$ , pour  $n = 0$ , sur  $v_e \pm v_s$ , pour  $n = 1$ , sur  $2v_e \pm v_s$ , pour  $n = 2$  ...

Deux cas se présentent :

- si  $v_e > 2v_s$ , les différentes périodes du spectre  $\hat{E}(v)$  sont séparées. Le spectre  $\hat{E}(v)$  sur  $\pm v_s$ , est identique au spectre  $E(v)$ . Il suffira de calculer le spectre du signal échantillonné sur l'intervalle  $\pm v_e/2 = [-v_e/2, +v_e/2]$  qui contient  $\pm v_s$  pour connaître le spectre du signal analogique.

- si  $v_e < 2v_s$ , les différentes périodes du spectre  $\hat{E}(v)$  se superposent. Ce phénomène est appelé repliement spectral. Il est très important d'éviter son apparition. Pour cela, on doit échantillonner un signal avec une fréquence  $v_e$  supérieure au double de la fréquence maximale  $v_s$  contenue dans le spectre du signal analogique. Il est également possible de filtrer spectralement le signal analogique avant son échantillonnage, avec un filtre passe bas qui élimine les fréquences supérieures à  $v_e/2$ . Ce filtre est dit anti-repliement (aliasing).

Le théorème de Shannon peut s'exprimer ainsi : Soit un signal  $e(t)$  dont la transformée de Fourier  $E(v)$  est nulle en dehors de l'intervalle  $[-v_s, +v_s]$ , il doit être échantillonné avec une fréquence minimale égale à  $2v_s$  pour connaître  $e(t)$ . Cette fréquence  $2v_s$  est dite fréquence de Shannon (ou de Nyquist).

Afin de ne pas faire apparaître le phénomène de périodisation du spectre des signaux échantillonnés, ceux-ci sont calculés sur un intervalle de largeur  $v_e$ , soit  $[0, +v_e]$  soit  $[-v_e/2, +v_e/2]$ .

Un exemple de repliement spectral est donné ci-dessous. Le signal temporel  $e(t)$  est nul pour tous les temps négatifs, pour  $t > 0$ , il est composé de trois fonctions cosinus de fréquences 5, 8 et 11 Hz d'amplitudes respectives 4, 2 et 3, multipliées par un filtre exponentiel de constante de temps égale à 1 s. (Figure 15)

Soit  $e(t) = (4\cos(10\pi t) + 2\cos(16\pi t) + 3\cos(22\pi t)) \cdot \exp(-t) \cdot H(t)$  avec  $H(t)$  la fonction échelon unitaire.

Sa transformée de Fourier est complexe, sa partie réelle est paire et composée de raies de Lorentz. On ne représentera que la partie positive du spectre, qui est la somme de 3 raies lorentziennes de même largeur centrées sur les fréquences 5, 8 et 11 Hz (Figure 16).

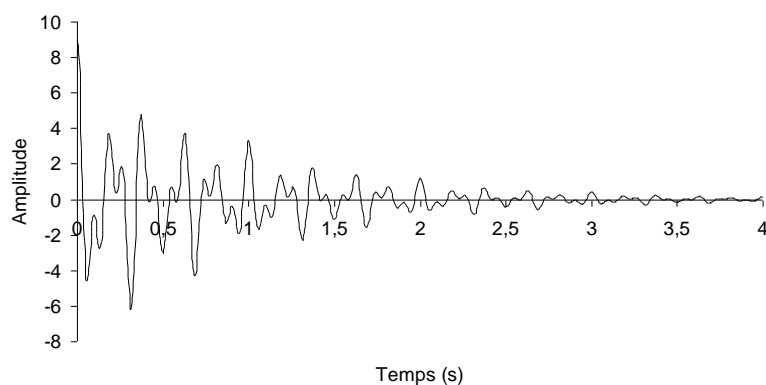


Figure 15 : signal temporel composé de trois cosinus filtrés par une exponentielle.

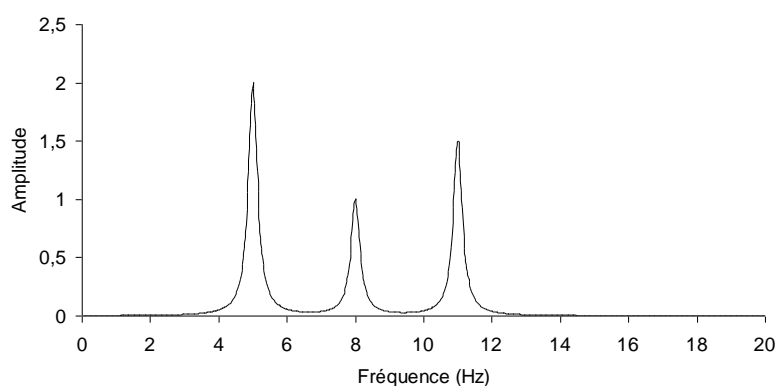


Figure 16 : spectre du signal temporel continu (non échantillonné).

Si le signal est échantillonné à la fréquence de 20 Hz, on observe un repliement des raies aux fréquences 9, 12 et 15 Hz (respectivement  $20 - 11$ ,  $20 - 8$  et  $20 - 5$ ) sur la partie positive et réelle du spectre du signal échantillonné (Figure 17).

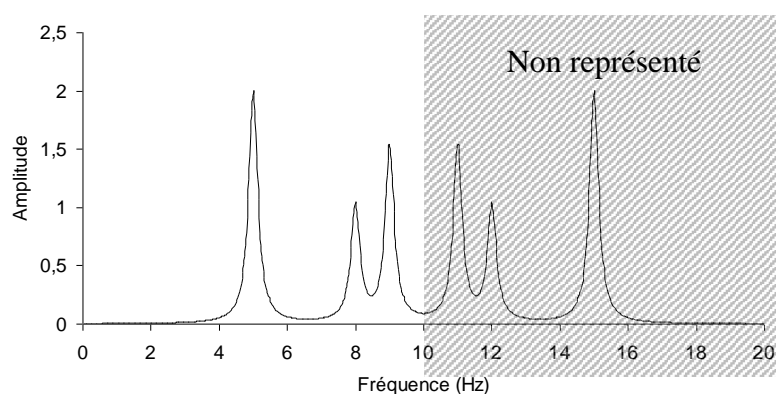


Figure 17 : spectre du signal temporel échantillonné.

La raie à 9 Hz sera représentée sur le spectre calculé sur l'intervalle  $[-10 \text{ Hz}, +10 \text{ Hz}]$ , pas la raie à 11 Hz. Le spectre du signal échantillonné est donc erroné et différent du spectre du signal analogique.

## 6.4 RESOLUTION SPECTRALE

Rappelons que si le temps de mesure est fini, le nombre d'échantillons mesurés  $N_e = T_{\text{acq}}/T_e + 1$  est égal au nombre de points de calcul du spectre. La résolution spectrale, c'est-à-dire la différence de fréquences entre deux points successifs du spectre sera donc égale à :

$$\Delta v = v_e / (N_e - 1) = 1 / T_{\text{acq}}.$$

Pour conclure, considérons un signal  $e(t)$  échantillonné à la fréquence  $v_e$ , sur  $N$  bits et un intervalle de tension  $\Delta V$ , pendant une acquisition de durée  $T_{\text{acq}}$  correspondant à un nombre d'échantillons  $N_e = v_e \cdot T_{\text{acq}} + 1$ .

$e(t)$  est connu à  $N_e$  temps, avec une résolution temporelle  $1/v_e$  et une résolution en tension  $\frac{\Delta V}{2^N}$ .

Son spectre est connu à  $N_e$  fréquences, avec une résolution spatiale  $1/T_{\text{acq}}$ , sur une largeur spectrale  $v_e/2$ . Ce spectre n'est correct que si  $v_e$  est supérieure ou égale à la fréquence de Shannon.



## **7 FILTRAGE TEMPOREL, FENETRAGE**

### **7.1 TEMPS DE MESURE FINI**

Soit  $f(t) = e(t)$  le signal à l'entrée d'un appareil de mesure parfait, c'est à dire de bande passante infinie. Le signal de sortie  $s(t)$  est égal à  $Ae(t)$ ,  $A$  étant l'amplification de l'appareil. Si la mesure de  $e(t)$  est réalisée sur une durée  $T$  finie : le temps de mesure, on ne connaît pas exactement le signal  $e(t)$  et le calcul de son spectre sera imprécis, voire erroné.

A cause de  $T$  fini, on peut écrire :

$$\begin{aligned} s(t) &= A e(t) \text{ pour } 0 < t < T \\ s(t) &= 0 \text{ pour } t < 0 \text{ et } t > T \end{aligned}$$

$s(t)$  est égal à :

$$s(t) = A e(t) \Pi(t-T/2)$$

Avec  $\Pi(t-T/2)$  la fonction porte centrée sur  $T/2$ . Son spectre a été calculé au paragraphe 5.3. Il est donné par :

$$\Pi(t-T/2) \Leftrightarrow T \operatorname{sinc}(\pi \nu T) e^{-j\pi \nu T}$$

En écrivant  $E(\nu)$  et  $S(\nu)$  les transformées de Fourier respectives de  $e(t)$  et  $s(t)$ , on obtient par application du théorème de Plancherel :

$$S(\nu) = A E(\nu) * T \operatorname{sinc}(\pi \nu T) e^{-j\pi \nu T}$$

Les spectres  $E(\nu)$  et  $S(\nu)$  sont différents, ils ne seront égaux que si :

- $\operatorname{sinc}(\pi \nu T) e^{-j\pi \nu T} \rightarrow \delta(\nu) : \text{c'est à dire si } T \rightarrow \infty$
- $e(t) = 0 \quad \forall t > T$

Mesurer un signal  $e(t)$  pendant une durée finie  $T$  ne permet en général pas d'en connaître le spectre  $E(\nu)$ . Le spectre mesuré est le spectre recherché convolué par un sinus cardinal. On parle de filtrage temporel.

Exemple :

$$e(t) = E_0 \cos 2\pi \nu_0 t \qquad E(\nu) = \frac{E_0}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

$$S(\nu) = A E(\nu) * T \operatorname{sinc}(\pi \nu T) e^{-j\pi \nu T} = \frac{AE_0}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] * T \operatorname{sinc}(\pi \nu T) e^{-j\pi \nu T}$$

$$S(\nu) = \frac{AE_0}{2} T \left[ \operatorname{sinc}(\pi(\nu - \nu_0)T) e^{-j\pi(\nu - \nu_0)T} + \operatorname{sinc}(\pi(\nu + \nu_0)T) e^{-j\pi(\nu + \nu_0)T} \right]$$

La transformée de FOURIER d'une fonction cosinus filtrée temporellement par une porte de durée  $T$  est égale à la somme de 2 sinus cardinaux centrés aux fréquences de la fonction cosinus, soit  $\pm \nu_0$ . La largeur des raies est inversement proportionnelle à  $T$  et le spectre est déphasé. Les graphiques sont présentés au paragraphe suivant.

Application numérique : Quelle est la largeur du spectre d'une impulsion électrique carrée de durée  $T$  de la fonction cosinus de fréquence  $\nu_0$  avec  $\nu_0 = 10000$  Hz et  $T = 50$  ms et 1 ms ?

Réponse : Le spectre est constitué de 2 raies identiques à  $\pm \nu_0$ . Soit la raie à  $\nu_0$ , d'équation :

$$\frac{E_0}{2} T \operatorname{sinc}(\pi(\nu - \nu_0)T) e^{-j\pi(\nu - \nu_0)T}$$

Son amplitude est égale à :  $\frac{E_0}{2} T \operatorname{sinc}(\pi(\nu - \nu_0)T)$  :

elle est maximale à  $\nu = \nu_0$ , elle est alors égale à  $E_0 T/2$ ,

elle est nulle si  $\pi(\nu - \nu_0)T = \pm \pi$ , c'est à dire aux fréquences :  $\nu = \nu_0 \pm 1/T$  : sa largeur à mi-hauteur est égale à  $2/T$ .

$T = 50$  ms : largeur 40 Hz : Le spectre est constitué de 2 raies étroites : 2 sinus cardinaux à  $\pm 10000$  Hz de largeur 40 Hz.

$T = 1$  ms : largeur 2000 Hz : Le spectre est constitué de 2 raies larges : 2 sinus cardinaux à  $\pm 10000$  Hz de largeur 2000 Hz.

## 7.2 MULTIPLICATION EXPONENTIELLE

Soit  $f(t) = e(t)$  le signal à l'entrée de l'appareil de mesure. Le signal de sortie est égal à  $A e(t)$ , amplification par un amplificateur idéal, multiplié par une fonction exponentielle décroissante réalisant un filtrage temporel.

$$s(t) = A e(t) e^{-t/\tau}$$

En écrivant  $E(\nu)$  et  $S(\nu)$  les transformées de Fourier respectives de  $e(t)$  et  $s(t)$ , on obtient par application du théorème de Plancherel :

$$S(\nu) = A E(\nu) * \frac{\tau(1 - 2\pi j\nu\tau)}{1 + (2\pi\nu\tau)^2}$$

Les spectres  $E(\nu)$  et  $S(\nu)$  sont différents, ils ne seront égaux que si :

$$- \frac{\tau(1 - 2\pi j\nu\tau)}{1 + (2\pi\nu\tau)^2} \rightarrow \delta(\nu) : \text{c'est à dire si } \tau \rightarrow \infty$$

Exemple :

$$e(t) = E_0 \cos 2\pi\nu_0 t \quad E(\nu) = \frac{E_0}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)]$$

$$S(\nu) = \frac{AE_0}{2} [\delta(\nu - \nu_0) + \delta(\nu + \nu_0)] * \frac{\tau(1 - 2\pi j\nu\tau)}{1 + (2\pi\nu\tau)^2}$$

$$S(\nu) = \frac{AE_0}{2} \left[ \frac{\tau(1 - 2\pi j(\nu - \nu_0)\tau)}{1 + (2\pi(\nu - \nu_0)\tau)^2} + \frac{\tau(1 - 2\pi j(\nu + \nu_0)\tau)}{1 + (2\pi(\nu + \nu_0)\tau)^2} \right]$$

La transformée de FOURIER d'une fonction cosinus filtrée temporellement par une exponentielle décroissante de constante de temps  $\tau$  est égale à la somme de 2 lorentziennes aux fréquences de la fonction cosinus ( $\pm \nu_0$ ) La largeur des raies à mi - hauteur est égale à  $1/\pi\tau$ .

Application numérique : Le signal d'entrée est une fonction cosinus de fréquence  $\nu_0 = 10000$  Hz, l'exponentielle a une constante de temps  $\tau = 50$  ms. Le spectre du signal de sortie est constitué de 2 raies étroites lorentziennes à  $\pm 10000$  Hz de largeur à mi-hauteur égale à  $1/\pi\tau = 6,3$  Hz.

Si la constante de temps est égale à 1 ms, le spectre est constitué de 2 raies lorentziennes larges à  $\pm 10000$  Hz de largeur  $1/\pi\tau = 318$  Hz.

Remarque : si le temps de mesure  $T$  est  $\gg \tau$  : le signal filtré par l'exponentielle est nul à la fin de la période de mesure : son spectre ne sera pas modifié par la durée finie de l'expérience. Dans le cas calculé précédemment pour  $\tau = 50$  ms, on a  $e^{-t/\tau} = 1/100$  pour  $t/\tau = 2\ln 10 \approx 4,6$ , c'est à dire à  $t = 230$  ms.

### 7.3 COMPARAISON

Il est intéressant de comparer les filtrages temporels par les fonctions porte et exponentielle. Soit la fonction cosinus d'amplitude 5 et de fréquence 5 Hz :  $e(t) = 5\cos 10\pi t$ .

Considérons les filtres :

- exponentiel de constante de temps 0,5 s :  $\text{expo}(t) = 6 e^{-2t}$  pour  $t > 0$  et  $= 0$  pour  $t < 0$
- porte de durée 3 s :  $\text{porte}(t) = 3$  pour  $0 < t < 3$ ,  $= 0$  pour  $t < 0$  et  $t > 3$ .

La figure 18 A représente les graphes de ces deux filtres.

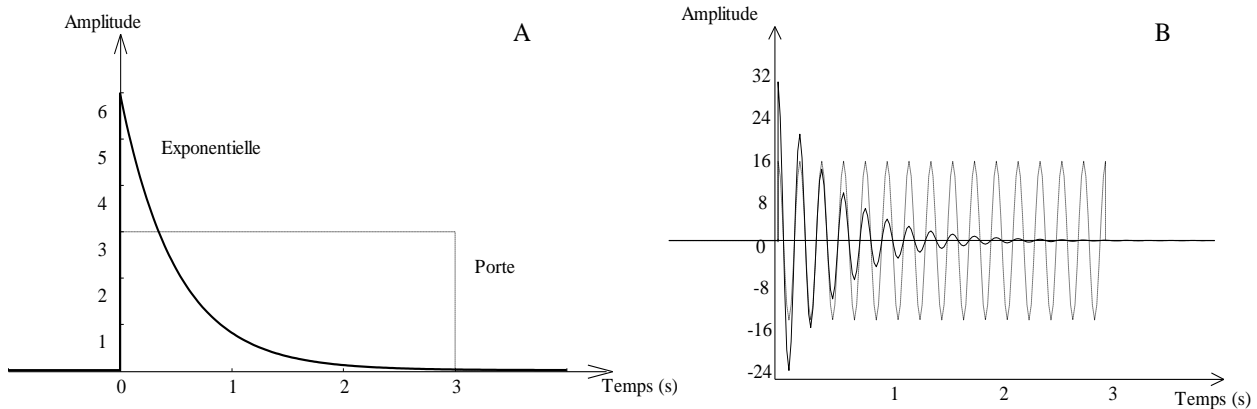


Figure 18 : filtres temporels exp et porte, et multiplication d'une fonction cosinus par ces filtres.

Les fonctions cosinus non filtrée et filtrées sont respectivement :

$$e(t) = 5\cos 10\pi t$$

$$e(t) \text{ expo}(t) = 30 \cos(10\pi t) e^{-2t} \text{ pour } t > 0$$

$$e(t) \text{ porte}(t) = 15\cos 10\pi t \text{ pour } 0 < t < 3 ; = 0 \text{ ailleurs}$$

Les graphes de ces fonctions sont représentés sur la figure 18 B.

Les transformées de FOURIER des filtres sont :

$$\text{expo}(t) \Leftrightarrow 3 \frac{1 - j\pi\nu}{1 + (\pi\nu)^2}$$

$$\text{porte}(t) \Leftrightarrow 9 \text{ sinc}(3\pi\nu) e^{-j3\pi\nu} = 3 \frac{\sin(3\pi\nu)}{\pi\nu} e^{-j3\pi\nu}$$

Les parties réelles des spectres des deux filtres sont représentées figure 19A, les parties imaginaires figure 19 B.

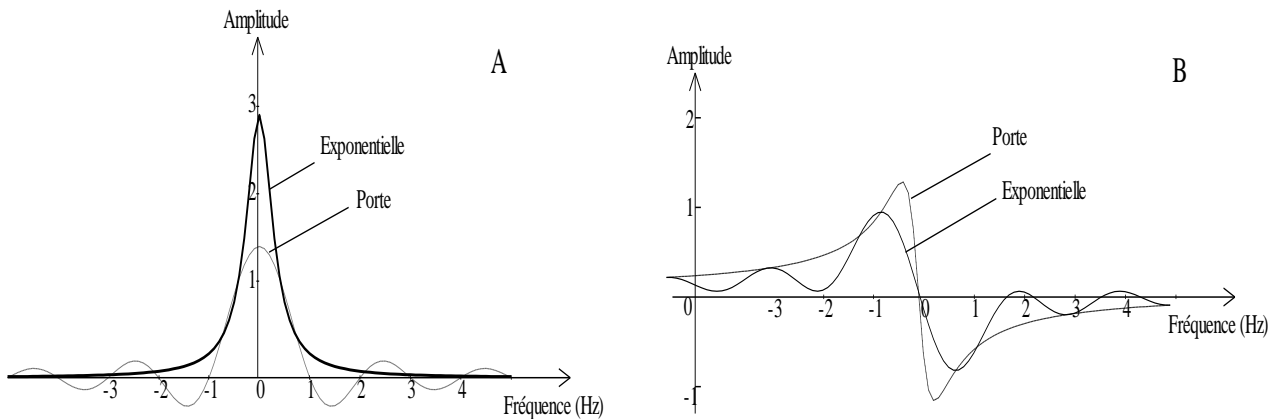


Figure 19 : spectre des filtres temporels exp et porte.

Les spectres des fonctions cosinus filtrée et non filtrée sont égaux à :

$$e(t) \Leftrightarrow 2,5(\delta(v-5) + \delta(v+5))$$

$$e(t)\text{expo}(t) \Leftrightarrow 7,5(\delta(v-5) + \delta(v+5)) \frac{1 - j\pi v}{1 + (\pi v)^2}$$

$$e(t)\text{porte}(t) \Leftrightarrow 9 * 2,5(\delta(v-5) + \delta(v+5)) \text{sinc}(3\pi v) e^{-j3\pi v} = 7,5(\delta(v-5) + \delta(v+5)) \frac{\sin(3\pi v)}{\pi v} e^{-j3\pi v}.$$

Les parties réelles des spectres des fonctions filtrées et non filtrées sont représentées figure 20A, les parties imaginaires sur la figure 20B.

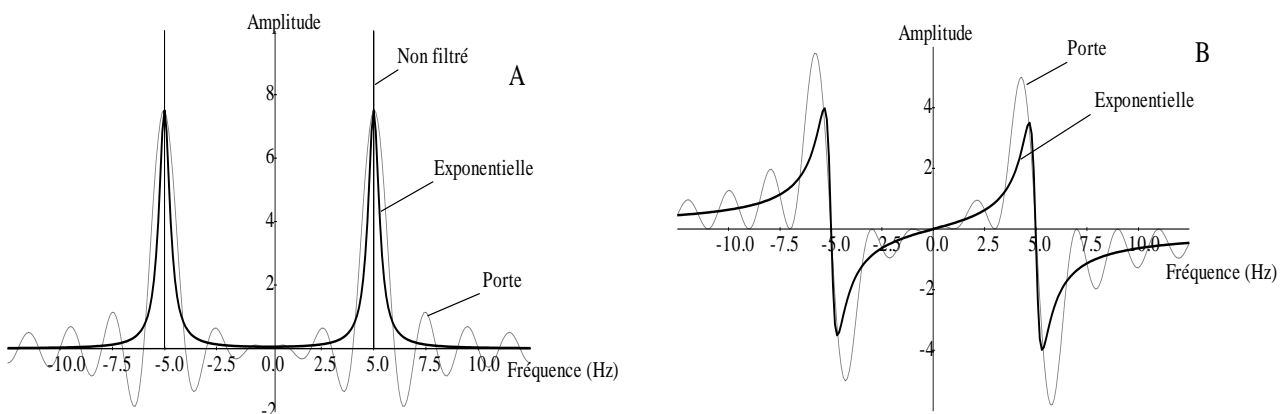


Figure 20 : spectre de la fonction cosinus filtrée par une fonction exp et une porte.

## 7.4 FENETRES TEMPORELLES

La limitation du temps de mesure s'exprime mathématiquement par la multiplication du signal par une fonction porte de largeur T. Cette détermination incomplète du signal se traduit par des erreurs de calcul de son spectre. Ces erreurs apparaissent comme des oscillations de part et d'autre de la (des) fréquence(s) réelle(s) du signal, avec une périodicité d'oscillations (en fréquence) égale à  $1/T$ . Ces oscillations du spectre sont appelées phénomène de Gibbs.

Pour éviter ce phénomène, on doit multiplier le signal par une fonction nulle en dehors de la durée de mesure et qui tend, ainsi que ses dérivées, vers 0 aux limites de cette période de mesure.

La fonction exponentielle décroissante peut s'appliquer à tous les signaux qui débutent à un instant pris comme origine. C'est un cas fréquemment rencontré en pratique, lorsque le signal résulte d'une excitation : impulsion RF en RMN, impulsion lumineuse en optique ...

Mais si le signal peut être non nul avant le début de la mesure, il convient de multiplier le signal mesuré par une fonction nulle en dehors de la période de mesure et qui tend vers 0, ainsi que ses dérivées, quand le temps s'approche des deux limites de la mesure (début et fin).

Une telle fonction est appelée fenêtre ou fonction d'apodisation. Les plus courantes sont symétriques par rapport au temps de mesure médian. Nous nous limiterons à la présentation des fenêtres de Hamming et de Hann (parfois appelée Hanning), définies par les équations ci-dessous dans lesquelles  $T$  est la période de mesure :

$$\text{Hann}(t) = (1 - \cos(2\pi t/T))/2$$

$$\text{Hamming}(t) = 0,54 - 0,46.\cos(2\pi t/T)$$

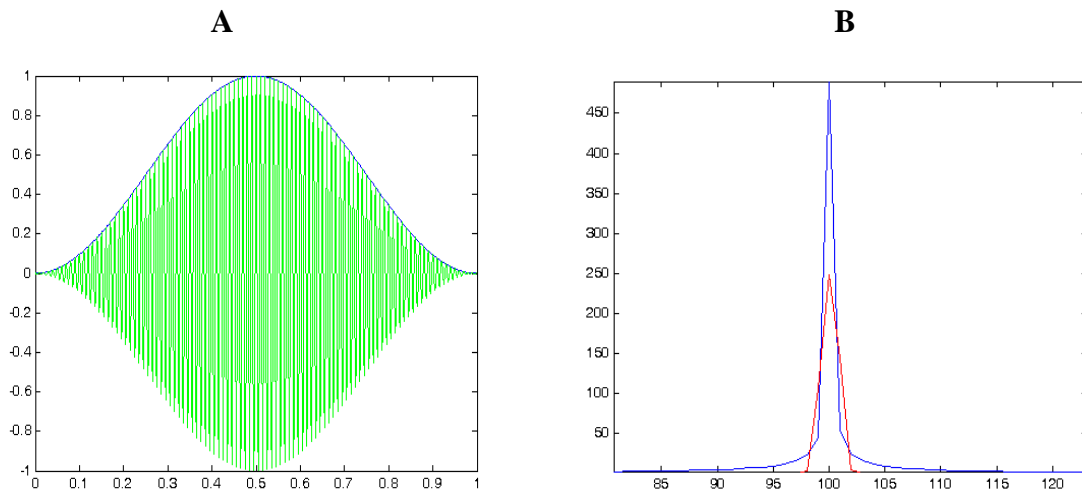


Figure 21 : fenêtre de Hann et résultat de son application sur le spectre d'une fonction cosinus.

La figure 21A représente une fenêtre de Hann et une fonction cosinus de fréquence 100 Hz multipliée par cette fenêtre. La période de mesure est égale à 1s. La figure 21B représente les spectres (valeur absolue) de la fonction cosinus acquise sur 1s (en bleu) et de cette fonction cosinus multipliée par une fenêtre de Hann avant calcul de sa transformée de Fourier (en rouge). On notera la suppression du pied de la raie spectrale (apodisation).

Pour comprendre ce résultat, il faut considérer le spectre de la fenêtre de Hahn. Pour simplifier les calculs, on considèrera le temps origine au milieu de la période de mesure. Sa transformée de Fourier  $F(\nu)$  se calcule aisément :

$$F(\nu) = \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} (1 - \cos 2\pi t/T) e^{-2\pi j \nu t} dt$$

Il faut pour cela utiliser la formule d'Euler, on obtient alors :

$$F(\nu) = \frac{1}{4} \int_{-T/2}^{T/2} (2 - e^{2\pi j t/T} - e^{-2\pi j t/T}) e^{-2\pi j \nu t} dt = \frac{1}{4} \int_{-T/2}^{T/2} (2e^{-2\pi j \nu t} - e^{-2\pi j t(\nu - \frac{1}{T})} - e^{-2\pi j t(\nu + \frac{1}{T})}) dt$$

Il en résulte que  $F(\nu)$  est la somme de 3 transformées de Fourier de fonctions porte de largeur  $T$  : une porte centrée de hauteur relative 2 et deux portes décalées en fréquence de  $1/T$  et  $-1/T$  et de hauteur relative 1. Le spectre est donc réel et égal à la somme de 3 sinus cardinaux centrés sur les fréquences 0,  $-1/T$  et  $+1/T$ . La figure 22, gauche, présente les trois composantes du spectre d'une fenêtre de Hahn de 50 ms. La partie droite de la figure présente la somme de ces 3 composantes (en bleu), et pour comparaison, le spectre d'une fonction porte centrée (en rouge) de la même durée.

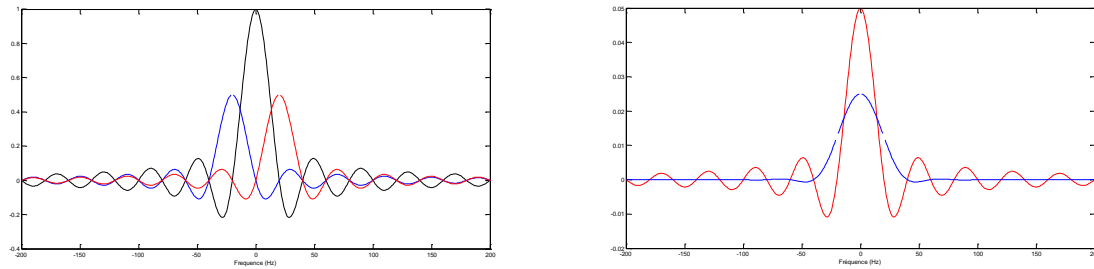


Figure 22 Spectre des composantes d'une fenêtre de Hahn (gauche) et de la fenêtre de Hahn comparée à une porte de même durée.

Il existe de nombreuses autres fenêtres (voir par exemple l'assistant wintool de Matlab Processing Toolbox). La comparaison de ces fenêtres peut se faire par exemple par le calcul, ou la représentation graphique, de leurs TF.

A titre d'exemple la figure 23 représente une fenêtre de Hahn (bleu) et une fenêtre de Kaiser, en rouge, ( $\beta = 10$ ) et leurs spectres respectifs à droite.

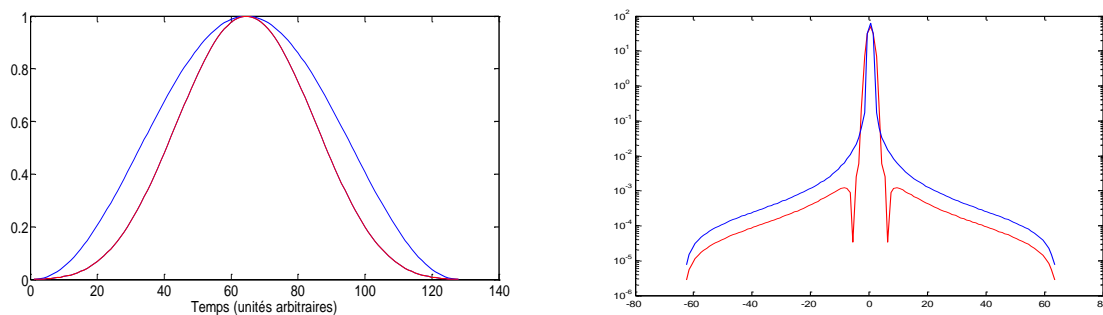


Figure 23 Fenêtres de Hahn (bleu) et Keiser (rouge)

L'effet d'un fenêtrage dans le temps sur le spectre du signal mesuré (multiplication du signal d'entrée  $e(t)$  par la fenêtre  $f(t)$ ) nécessite de calculer le produit de convolution des TF du signal  $E(v)$  et de la fenêtre  $F(v)$ .

Dans le cas simple où  $e(t)$  est une fonction périodique, dont le spectre est une succession de distribution de Dirac (à la fréquence fondamentale et ses harmoniques), le spectre de la fonction après fenêtrage sera donc simplement le spectre de la fenêtre transposé aux différentes fréquences (fondamental et harmoniques) de la fonction périodique.

## **8 FILTRAGE FREQUENCIEL**

### **8.1 NOTIONS GENERALES**

Un filtrage fréquentiel permet de supprimer certaines fréquences présentes dans le spectre d'un signal. Un filtre est caractérisé par sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ , ou par sa fonction de transfert  $H(v)$ , transformée de FOURIER de  $h(t)$ .

On peut décrire, ou réaliser, un tel filtrage ainsi. Il consiste à multiplier le spectre du signal d'entrée  $E(v)$  par la fonction  $H(v)$  de filtrage désirée. Le signal filtré  $S(v)$  s'écrit, par application du théorème de Plancherel, :

$$s(t) = e(t) * h(t) \quad \Leftrightarrow \quad S(v) = E(v) H(v)$$

La valeur absolue  $|H(v)|$  détermine le gain en amplitude du filtre, défini par  $G = 20 \cdot \log(|H(v)|)$ , son déphasage est l'argument  $\text{Arg}(H(v))$ .

On distingue les filtres :

passe bas	$H(v) = 0 \quad v > v_2$
passe haut	$H(v) = 0 \quad v < v_1$
passe bande	$H(v) = 0 \quad v < v_1 \text{ et } v > v_2$
coupe bande	$H(v) = 0 \quad v_1 < v < v_2$

Remarque : tous les filtres réalisables ont une réponse impulsionnelle  $h(t) = 0$  si  $t < 0$  (On ne peut agir sur le signal à l'instant  $\tau$  avant cet instant). On parle de filtre causal. Donc  $h(t)$  n'est pas paire, son spectre possède une partie imaginaire et sa phase diffère de 0 :  $H(v) = |H(v)|e^{-j\varphi(v)}$  avec  $\varphi(v) \neq 0$ . Tout filtrage fréquentiel déphase le signal.

### **8.2 FILTRAGE ANALOGIQUE**

Si  $e(t)$  est un signal, alors  $s(t)$  l'est aussi, selon  $s(t) = e(t) * h(t)$ . En général  $h(t)$  est nulle pour  $t < 0$  : filtre causal. Si  $e(t) = 0$  pour  $t < 0$ , l'entrée est causale, alors il en est de même pour  $s(t)$ . Le produit de convolution peut alors s'écrire :

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_0^{\infty} e(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{pour } t \geq 0$$

et  $s(t) = 0$  pour  $t < 0$

Un filtre est linéaire s'il possède les propriétés suivantes :

- superposition : si à deux entrées  $e_1(t)$  et  $e_2(t)$  correspondent deux sorties  $s_1(t)$  et  $s_2(t)$ , alors la sortie correspondant à  $a \cdot e_1(t) + b \cdot e_2(t)$  est  $a \cdot s_1(t) + b \cdot s_2(t)$
- invariance : si à une entrée  $e(t)$  correspond une sortie  $s(t)$ , alors la sortie correspondant à  $e(t-\tau)$  est  $s(t-\tau)$
- continuité : si une suite d'entrées  $e(n)$  a pour limite  $e(t)$ , les sorties  $s(n)$  ont pour limite  $s(t)$ , la sortie correspondant à  $e(t)$ .

On peut comparer les spectres des signaux d'entrée  $E(v)$  et de sortie  $S(v) = E(v) \cdot H(v)$  et définir le filtre par sa fonction de transfert  $H(v)$ .

On appelle gain en amplitude du filtre la fonction de la fréquence définie par :

$$G(v) = 20 \log(|H(v)|)$$

log étant la fonction logarithme décimal. Le gain est un nombre, il est exprimé en dB (décibel).

Le déphasage du filtre est défini par  $\Phi(v) = \text{Arg}(H(v))$ .

Les représentations graphiques de  $G(v)$  et de  $\Phi(v)$  caractérisent un filtre (ou tout autre appareil réel (analogique) ou virtuel (numérique)). On utilise généralement une échelle logarithmique pour les fréquences.

Un filtre est stable, si à toute entrée  $e(t)$  bornée, c'est-à-dire inférieure à une certaine valeur  $\text{Max}(e)$ , correspond une sortie bornée donc inférieure à une valeur  $\text{Max}(s)$ . La stabilité est liée au signal d'entrée. Un filtre peut être stable pour certains signaux et instable pour d'autres. Un filtre stable et causal est dit **réalisable**.

### 8.3 FILTRES DIFFERENTIELS

Un filtre analogique est généralement gouverné par une équation différentielle.

Par exemple, le filtre RC d'ordre 1 est gouverné par une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (voir développement dans le paragraphe suivant).

$$\text{RC} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

De manière plus générale, on appelle filtre différentiel d'ordre  $n$  un filtre causal qui fait correspondre une entrée  $e(t)$  et une sortie  $s(t)$  par la relation :

$$\sum_{r=0}^n b_r s^{(r)} = \sum_{q=0}^m a_q e^{(q)}$$

Les exposants  $(r)$  et  $(q)$  signifient dérivées d'ordre  $r$  et  $q$ .

En calculant les transformées de Fourier des 2 termes de l'équation de définition du filtre, et en appliquant le théorème de dérivation (paragraphe 5.4), on obtient :

$$\sum_{r=0}^n b_r (2\pi j v)^r S(v) = \sum_{q=0}^m a_q (2\pi j v)^q E(v)$$

La fonction de transfert du filtre s'écrit donc :

$$H(v) = \frac{S(v)}{E(v)} = \frac{\sum_{q=0}^m a_q (2\pi j v)^q}{\sum_{r=0}^n b_r (2\pi j v)^r} = \frac{P(v)}{Q(v)}$$

Elle peut s'exprimer comme le rapport de 2 polynômes.

En utilisant le théorème de convolution  $s^{(r)} = \delta^{(r)} \otimes s$ , appliqué à  $s(t)$  et à  $e(t)$ , et en appelant  $V$  la distribution telle que  $V \otimes \sum_{r=0}^n b_r \delta^{(r)} = \delta$ , on obtient :

$$s(t) = (V \otimes \sum_{q=0}^m a_q \delta^{(q)}) \otimes e(t)$$



On démontre que la réponse impulsionnelle du filtre d'ordre  $n$ ,  $(V \otimes \sum_{q=0}^m a_q \delta^{(q)})$  est de la forme

$$h(t) = \sum_0^{m-n} \alpha_r \delta^{(r)} + \sum_k P_k(t) e^{\lambda_k t} Y(t)$$

$Y(t)$  est la fonction échelon,  $P_k(t)$  sont les termes d'un polynôme et  $\lambda_k$  sont les pôles de  $H(v)$ , c'est-à-dire les racines de son dénominateur  $Q(v)$ . Les conséquences de ces résultats sont les suivantes :

Un filtre causal est défini par une fonction de transfert  $H(v) = P(v)/Q(v)$ . Ce filtre est stable et réalisable si :

- Le degré de  $P$  est inférieur au degré de  $Q$
- Tous les  $\lambda$ , racines de  $Q$ , ont des parties réelles négatives.

## 8.4 FILTRE ANALOGIQUE D'ORDRE 1.

Cet exemple a pour but de mettre en pratique les notions mathématiques étudiées sur un exemple de filtrage analogique. Ce filtre est cependant très peu performant et ne sera pas utilisé en pratique, surtout en traitement numérique du signal.

Le filtre d'ordre 1 est composé d'une cellule RC, résistance – condensateur (Figure 24).

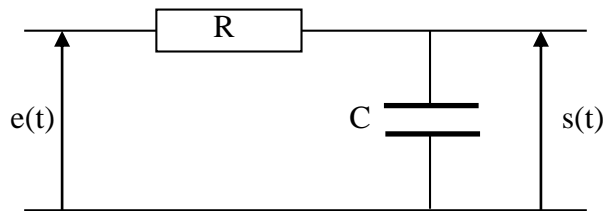


Figure 24 Filtre RC passe bas d'ordre 1

### 8.4.1 Réponse impulsionnelle et fonction de transfert du filtre RC

La tension d'entrée  $e(t)$  est égale à la somme de la ddp aux bornes de la résistance,  $Ri$  ( $i$  est le courant qui traverse la résistance) et de la tension de sortie  $s(t)$ :

$$e(t) = Ri(t) + s(t)$$

L'intensité  $i$  du courant est égale à la dérivée  $dq/dt$  de la charge et la tension de sortie  $s(t)$  est la tension aux bornes du condensateur de capacité  $C$ . Soit :

$$R.i(t) = R.dq(t)/dt \quad \text{et} \quad s(t) = q(t)/C \quad \text{ou encore} \quad q(t) = C.s(t) \quad \text{et} \quad dq(t)/dt = C.ds(t)/dt$$

La tension d'entrée  $e(t)$  s'écrit alors :

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \quad \{1\}$$

Cette équation différentielle du 1<sup>o</sup> ordre peut se résoudre facilement. La solution générale de l'équation sans second membre (en posant  $e(t) = 0$ ) est égale à :

$$s_h(t) = K \exp(-t/RC)$$

$K$  est une constante d'intégration qui est déterminée par les conditions initiales.

En considérant que  $e(t)$  est une impulsion de Dirac à  $t = 0$ , le signal d'entrée est bien nul pour  $t > 0$  et le signal de sortie est exprimé par l'expression ci-dessus. Il s'agit en ce cas de la réponse

impulsionnelle du filtre.  $K$  est la tension de sortie à  $t = 0$ . Pour calculer  $K$ , il faut considérer que le Dirac est la limite d'une impulsion de durée  $\tau$  et de hauteur  $1/\tau$  (donc de surface 1) quand  $\tau$  tend vers 0.

Pendant cette impulsion, l'entrée est constante (égale à  $1/\tau$ ) et une solution particulière de l'équation différentielle {1} est  $s(t) = 1/\tau$ . La solution générale de {1} pendant l'impulsion d'entrée est égale à :

$$s(t) = 1/\tau + K' \exp(-t/RC)$$

A  $t = 0$ , début de l'impulsion, la sortie  $s(t)$  était nulle. Soit  $K' = -1/\tau$  et la solution générale de {1} pendant l'impulsion est égale à :

$$s(t) = \frac{1}{\tau} (1 - e^{-t/RC})$$

A la fin de l'impulsion (au temps  $\tau$ ) la sortie est donc égale à  $s(\tau) = \frac{1}{\tau} (1 - e^{-\tau/RC})$ .

Faisons tendre  $\tau$  vers 0, le terme  $e^{-\tau/RC}$  tend vers  $(1 - \tau/RC)$  et  $s(t)$  tend vers  $1/RC$ . C'est la tension initiale  $K$  après le Dirac. On obtient alors la réponse impulsionnelle du filtre d'ordre 1 :

$$h(t) = \exp(-t/RC)/RC$$

Ainsi, à une entrée qui varie instantanément (Dirac), le filtre associe un signal qui décroît exponentiellement avec la constante de temps  $RC$ .

Sa fonction de transfert  $H(v)$  est égale à la transformée de Fourier de  $h(t)$ . Nous savons qu'il s'agit d'une fonction lorentzienne (voir paragraphe 4.2) :

La réponse impulsionnelle  $h(t) = \frac{e^{-t/RC}}{RC}$  à  $t > 0$  et  $h(t) = 0$  à  $t < 0$  admet comme transformée de Fourier la fonction de transfert  $H(v)$  égale à  $\frac{1}{RC} \cdot \frac{RC}{1 + 2\pi jvRC}$ . (paragraphe 4.2). Soit

$$H(v) = \frac{1}{1 + 2\pi jvRC}$$

### 8.4.2 Calcul direct et transformée de Laplace

On peut retrouver directement, et plus facilement, ce résultat à partir de l'équation différentielle caractéristique du filtre RC

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

Calculons les TF de chacun de ses termes. En notant  $E(v)$  et  $S(v)$  les TF respectives de  $e(t)$  et de  $s(t)$  et en utilisant le théorème de dérivation, on obtient

$$RC(2\pi jv)S(v) + S(v) = E(v)$$

La fonction de transfert du filtre est égale au rapport des TF de la sortie et de l'entrée soit :

$$H(v) = \frac{S(v)}{E(v)} = \frac{1}{1 + 2\pi jvRC}$$

On retrouve le résultat obtenu par résolution de l'équation différentielle pour une entrée égale à une impulsion de Dirac  $h(t)$ . Pour retrouver la solution de l'équation différentielle, il reste à calculer la transformée de Fourier inverse de  $H(v)$ . Sachant que  $H(v)$  est une fonction de Lorentz, transformée de Fourier d'une fonction exponentielle décroissante,  $h(t)$  est une telle fonction de constante de temps  $RC$ , pour  $t > 0$  ; nulle pour  $t < 0$ .

Il convient de noter que cette méthode de résolution d'une équation différentielle par calcul de TF et de  $TF^{-1}$  peut être très efficace. En mathématiques et traitement du signal, on utilise très souvent une méthode basée sur la transformée de Laplace  $F(p)$  d'une fonction  $f(t)$  plutôt que sa transformée de Fourier.  $F(p)$  est définie par :

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$$

$p$  étant une variable complexe. La transformée de Laplace est en quelque sorte une généralisation de la transformée de Fourier appliquée aux fonctions causales, nulles pour  $t < 0$ . La variable purement imaginaire  $2\pi j\nu$  est étendue à une variable complexe  $p$ .

### 8.4.3 Gain et déphasage

Connaissant sa fonction de transfert  $H(\nu)$ , on peut calculer et représenter graphiquement le gain  $G(\nu)$  et le déphasage  $\Phi(\nu)$  du filtre RC d'ordre 1.

Le gain est égal à  $G = 20 \cdot \log(|H(\nu)|) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(2\pi\nu RC)^2}}\right) = -10 \cdot \log(1 + (2\pi\nu RC)^2)$

La phase est égale à  $\Phi(\nu) = \text{tg}^{-1}(-2\pi\nu RC)$

La figure 25 représente le gain et le déphasage d'un filtre RC d'ordre 1 caractérisé par le produit  $2\pi RC = 10^{-3}$  s.

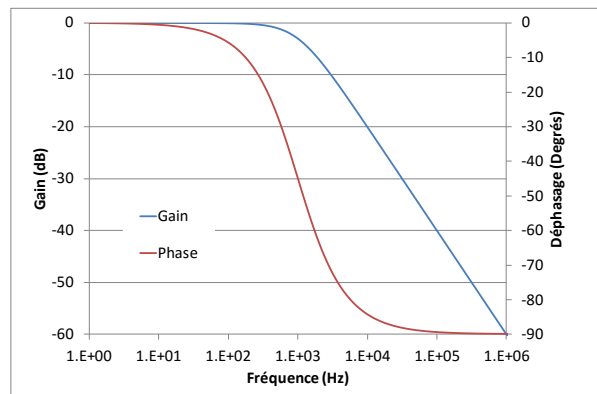


Figure 25 : Caractéristiques du filtre d'ordre 1.

On note que le gain et le déphasage sont nuls à basse fréquence. Le déphasage tend vers  $-90^\circ$  à haute fréquence. Le gain décroît linéairement à haute fréquence. Il s'agit d'un filtre passe bas. Le produit  $RC$  détermine sa fréquence de coupure, limite entre bande passante et bande rejetée. Cette fréquence  $\nu_c$  est généralement définie à 3 dB (gain = -3 dB). Calculons cette fréquence :

$$G = -10 \cdot \log(1 + (2\pi\nu_c RC)^2) = -3$$

Soit  $\log(1 + (2\pi\nu_c RC)^2) = 0,3$  ou  $1 + (2\pi\nu_c RC)^2 = e^{0,3} \approx 2$  ou  $2\pi\nu_c RC \approx 1$ .

Le filtre représenté a donc une fréquence de coupure égale à 1000 Hz. A cette fréquence, son déphasage est de  $-45^\circ$ .

Dans la bande passante, ce filtre a un gain proche de 0 dB. Ce qui signifie que  $|H(\nu)| = 1$  et que la tension de sortie est égale à la tension d'entrée. A haute fréquence,  $\nu \gg \nu_c$ , le gain tend vers  $G = -10 \cdot \log((2\pi\nu RC)^2) = -20 \log(2\pi\nu RC)$ . Représenté avec une échelle des fréquences logarithmique,  $G$  tend vers une droite et diminue de 20 dB à chaque fois que la fréquence est multipliée par 10. On parle de filtre à 20 dB par décade.

Pour augmenter cette pente et ainsi atténuer plus fortement des signaux en dehors de la bande passante, il est nécessaire d'associer plusieurs filtres RC, et ainsi de réaliser des filtres d'ordre

supérieur à 1. Plus l'ordre d'un filtre sera élevé, plus rapide (en fréquence) sera son atténuation (-20 dB par décade et par ordre), mais plus son déphasage sera important (-90° par ordre en dehors de la BP).

#### 8.4.4 Stabilité et pôles du filtre

Considérons une entrée  $e(t)$  périodique de fréquence  $\nu_0$ ,  $e(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)$ . La sortie du filtre peut être calculée en résolvant son équation différentielle :

$$RC \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t) \quad \{1\}$$

Il est plus facile de travailler avec des fonctions exponentielles et on va utiliser la formule d'Euler :

$$\cos a = \frac{e^{ja} + e^{-ja}}{2}$$

pour remplacer le second membre de  $\{1\}$  par  $Ae^{2\pi j\nu_0 t}$ , en ne conservant que le signal de fréquence  $\nu_0$  positive. On négligera (pour signification physique) le terme de fréquence négative.

En généralisant, le second membre peut s'écrire  $Ae^{pt}$ , avec  $p$  un nombre complexe. Il est facile de trouver une solution à  $\{1\}$ , en effet une sortie  $s(t)$  de la forme  $Be^{pt}$  vérifie  $\{1\}$ . Sa dérivée s'écrit alors  $p.s(t)$  et l'équation devient :

$$Be^{pt}(RCp + 1) = Ae^{pt}$$

Cette solution est vérifiée, quel que soit  $t$ , si  $B = A/(1+RCp)$ . La tension de sortie sera donc périodique de fréquence  $\nu_0$  et égale à  $s(t) = A\cos(2\pi\nu_0 t)/(1+RCp)$ . Le rapport entre tensions de sortie et d'entrée, en fonction de  $p$ , est l'équivalent de la fonction de transfert  $H(\nu)$  et sera noté  $H(p)$  et encore appelé fonction de transfert.

La fonction de transfert du filtre d'ordre 1 a un dénominateur  $Q(p) = 1 + RCp$ . Il est nul (et donc  $H(p)$  et la sortie du filtre tendent vers l'infini) pour  $p_0 = -1/RC$ .  $p_0$  est le pôle du filtre RC. La figure 26 situe ce pôle dans le plan complexe ( $p$  est un complexe).

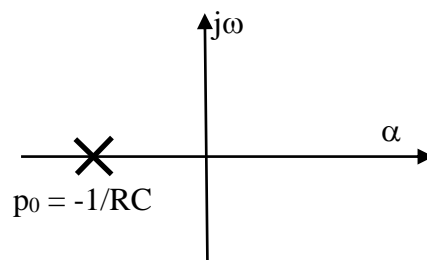


Figure 26 : pôle du filtre RC d'ordre 1

Ce pôle a bien une partie réelle négative, cela signifie qu'il n'existe aucune fréquence réelle (positive) pour laquelle la fonction de transfert de ce filtre tend vers l'infini. Ce filtre est donc stable.

En général, un filtre d'ordre  $n$  a une fonction de transfert dont le dénominateur est un polynôme de degré  $n$ . Ce polynôme admet  $n$  racines, la plupart du temps complexes. Le filtre a donc  $n$  pôles qui doivent tous avoir une partie réelle négative pour assurer la stabilité de ce filtre.

Le filtrage numérique fait appel à ces mêmes notions de réponse impulsionnelle, de fonction de transfert et de pôles. Il utilise la transformée en  $z$ , plutôt que la transformée de Fourier ou la transformée de Laplace. Le paragraphe suivant présente quelques notions élémentaires sur cette transformée en  $z$ . Ces notions seront illustrées par la conception et la caractérisation de filtres numériques.

## 9 TRANSFORMEE EN Z

### 9.1 DEFINITION

Soit un signal numérique  $s$  défini par la suite  $s(n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(t) \cdot \delta(t - nT_e) = s(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) = s(t) \cdot \mathbf{\Delta}(t/T_e)$ .  $\delta(t - nT_e)$  représente une distribution de Dirac au temps  $nT_e$ , multiple de la période d'échantillonnage  $T_e$ .  $\mathbf{\Delta}(t/T_e)$  est un peigne de Dirac d'intervalle  $T_e$ .

Sous la forme  $s(n)$ , la variable  $n$  représente le temps discrétisé.

La transformation en  $Z$  est une application qui transforme la série (suite infinie)  $s(n)$  (définie sur les entiers relatifs) en une fonction  $S$  d'une variable complexe nommée  $z$ , telle que :

$$S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) \cdot z^{-n}$$

La variable complexe  $z$  ne représente rien de particulier. Lorsqu'on travaille sur  $s(n)$  on dit que l'on est dans le domaine temporel, lorsqu'on travaille sur  $S(z)$  le domaine est appelé fréquentiel par analogie avec la transformée de Fourier discrète. En effet cette dernière n'est autre qu'un cas particulier de transformée en  $z$ , celui pour lequel  $z = e^{j2\pi kT}$ , c'est-à-dire un nombre complexe de module unité.

Si  $s(n) = 0, \forall n < 0$ , on parle de signal causal. C'est la cas pratique d'un signal échantillonné depuis un instant pris comme origine des temps.

Le domaine de convergence est le sous-ensemble des nombres complexes sur lequel la série  $S(z)$  converge. Autrement dit, le domaine de convergence de la transformée en  $z$  de la suite  $s(n)$  est l'ensemble:

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n) z^{-n} \text{ existe} \right\}$$

On l'appelle également couronne de convergence. En effet, en posant  $z = \rho e^{j\theta}$ , on obtient:

$$|S(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s(n)| \rho^{-n}$$

Le domaine de convergence est compris dans une couronne :

- de petit rayon  $r$ , du côté des  $n$  négatifs,  $r < z$ ,
- de grand rayon  $R$ , du côté des  $n$  positifs,  $z < R$ .

### 9.2 EXEMPLES

#### 9.2.1 Série $s(n) = 1$ pour tout $n$

Considérons les  $n$  positifs ou nul (les seuls existant dans le cas d'un échantillonnage réel commençant à  $n = 0$ ). On a dans ce cas  $s(n) = 1$  pour tout  $n \geq 0$ ,  $s(n) = 0$  si  $n < 0$ .

Sa transformée en  $z$  s'écrit  $S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$  en posant  $u = 1/z$ .

Cette série n'a pas de limite si  $|u| \geq 1$ . Elle converge si  $|u| < 1$ , soit  $|z| > 1$ , et a pour limite  $\frac{1}{1-u} = \frac{z}{z-1}$ . Sa couronne de convergence est donc limitée par  $r = 1$  et  $R = +\infty$ .

Note : Tout signal  $s(n)$  causal possède une couronne de convergence avec  $R = +\infty$ .

Considérons maintenant les  $n$  négatifs  $s(n) = 1$  pour tout  $n < 0$ ,  $s(n) = 0$  si  $n \geq 0$ .

Sa transformée en  $z$  s'écrit  $S_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^{-n} = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n$  en posant  $m = -n$ .

Cette série converge si  $|z| < 1$  et a pour limite  $\frac{1}{1-z}$ . Sa couronne de convergence est limitée par  $r = 0$  et  $R = 1$ .

Par conséquent  $S(z)$  existe pour  $|z| > 1$  si  $n$  est  $\geq 0$  et pour  $|z| < 1$  si  $n$  est  $< 0$ . Donc  $S(z)$  n'existe pas.

### 9.2.2 Série $s(n) = 2^n$ pour $n \leq 0$ et $s(n) = -1/2^n$ pour $n > 0$

On a  $S_+(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} s(n).z^{-n} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2z}\right)^n = 1 - \frac{1}{2z} \left(1 + \frac{1}{2z} + \dots + \left(\frac{1}{2z}\right)^n + \dots\right) = 1 + \frac{1}{1-2z}$

Son domaine de convergence correspond donc à  $|z| > \frac{1}{2}$

On a  $S_-(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} s(-n).z^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n = \frac{z}{2} \left(1 + \frac{z}{2} + \dots + \left(\frac{z}{2}\right)^n + \dots\right) = \frac{z}{2-z}$

Son domaine de convergence correspond donc à  $|z| < 2$

La couronne de convergence de cette série  $s(n) = 2^n$  est donc définie par :  $\frac{1}{2} < |z| < 2$ . Elle est représentée sur la figure 27.

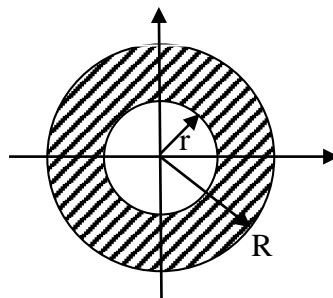


Figure 27 Couronne de convergence de la transformée en  $z$ .

Sur ce domaine, sa transformée en Z s'écrit  $S(z) = 1 + \frac{1}{1-2z} + \frac{z}{2-z} = \frac{1}{1-2z} + \frac{2}{2-z}$

### 9.3 PROPRIETES DE LA TRANSFORMEE EN Z

En notant  $\mathcal{Z}(s(n)) = S(z)$  la transformée en z de s(n), les propriétés de la transformée en z s'écrivent :

- linéarité :

$$\mathcal{Z}(a.s_1(n) + b.s_2(n)) = a. \mathcal{Z}(s_1(n)) + b. \mathcal{Z}(s_2(n))$$

- décalage temporel: le décalage temporel d'un signal de  $k$  échantillons se traduit par la multiplication de sa transformée en z par  $z^{-k}$  :

$$\mathcal{Z}(s(n-k)) = z^{-k}. \mathcal{Z}(s(n))$$

- convolution : la transformée en z d'un produit de convolution est le produit des transformées en z :

$$\mathcal{Z}(x(n) \otimes y(n)) = \mathcal{Z}(x(n)).\mathcal{Z}(y(n))$$

- dérivation : multiplication de la variable d'évolution :

$$\text{À l'ordre 1 : } \mathcal{Z}(n.s(n)) = -z. \frac{dS(z)}{dz}$$

$$\text{À l'ordre k : } \mathcal{Z}(n^k.s(n)) = -z^k. \frac{d^k S(z)}{dz^k}$$

On notera à ce stade la similitude avec les propriétés de la transformée de Fourier.

### 9.4 INVERSION DE LA TRANSFORMEE EN Z

Soit  $S(z)$  la transformée en z de s(n) définie dans la couronne  $r < |z| < R$ . En notant  $z = \rho.e^{j\theta}$ , on a :

$$s(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\rho e^{j\theta})^n S(\rho e^{j\theta}) d\theta$$

Cette relation de définition n'est pas facile à utiliser.

En pratique, la transformée en z d'un signal numérique s(n) sera caractérisée par une fraction rationnelle, (équivalence avec un filtre caractérisé par une fonction de transfert de ce type).

$S(z)$  est une fraction rationnelle, on peut la décomposer et la développer en série.

Exemple : Soit s(n) un signal causal de transformée en z égale à  $S(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + z + 1}{z^3 - z^2 - 8z + 12}$ . Cette

fonction est définie pour tout z tel que  $|z| > r$ , r étant le plus grand module des racines du dénominateur de  $S(z)$ .

On cherche les premiers termes de la série s(n) sachant que  $S(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s(n).z^{-n}$ .

Après division du numérateur et du dénominateur par  $z^3$ , on obtient  $S(z) = \frac{1 + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3}}{1 - \frac{1}{z} - \frac{8}{z^2} + \frac{12}{z^3}}$ . La

division des polynômes permet d'obtenir les premiers termes de  $S(z)$  :

$$S(z) = 1 + \frac{3}{z} + \frac{12}{z^2} + \frac{25}{z^3} + \dots = 1 + 3z^{-1} + 12z^{-2} + 25z^{-3} \dots$$

On déduit de la définition de la transformée en  $z$  les premiers termes de  $s(n)$  :

$$s(0) = 1 ; s(1) = 3 ; s(2) = 12 ; s(3) = 25 \dots$$

## 9.5 TRANSFORMEES EN Z DE SIGNAUX CAUSAUX

Le tableau ci-dessous regroupe quelques transformées en  $z$  et leur couronne de convergence (dont la limite supérieure est bien entendu infinie).

$s(n)$	$S(z)$	$r$
$s(k) = k, s(n) = 0 \ \forall n \neq k$	$z^{-k}$	0
1	$\frac{z}{z-1}$	1
N	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
$s(n) = 1 \ \forall n \geq k ; = 0 \ \forall n < k$	$\frac{z}{z-1} z^{-k}$	1
$a^n \ (a > 0)$	$\frac{z}{z-a}$	a
$n.a^{n-1} \ (a > 0)$	$\frac{z}{(z-a)^2}$	a

## 9.6 APPLICATION AU FILTRAGE NUMERIQUE

Un filtre numérique qui associe un signal échantillonné (entrée)  $e(n)$  à un signal filtré (sortie)  $s(n)$  est un système de convolution :

$$s(n) = h(n) \otimes e(n)$$

La transformée en  $z$  de la réponse impulsionnelle  $h(n)$  s'appelle fonction de transfert en  $z$  du filtre numérique  $H(z)$ .

Pour qu'un filtre numérique soit stable, il faut et il suffit que la couronne de convergence de  $H(z)$  contienne le cercle unité.

Pour qu'un filtre soit réalisable, il faut que  $\forall n < 0, h(n) = 0$ . Un filtre réalisable sera stable si les pôles (zéros du dénominateur) de  $H(z)$  sont situés à l'intérieur du disque unité.



### 9.6.1 Caractérisation d'un filtre numérique

Nous avons montré au chapitre 9 qu'un filtre différentiel correspond à une équation différentielle. De même, un filtre numérique vérifie une équation aux différences linéaire à coefficients constants. L'équivalent du filtre RC d'ordre 1 numérique est défini par :

$$RC \frac{s(n) - s(n-1)}{T} + s(n) = e(n)$$

$RC/T$  est un coefficient sans dimension. De manière générale on notera :

$$\sum_{k=0}^q b_k s(n-k) = \sum_{j=0}^p a_j e(n-1) \text{ et } b_0 = 1$$

La fonction de transfert du filtre se calcule à partir des transformées en  $z$  des deux membres. En utilisant la propriété du décalage temporel, on obtient :

$$\left( \sum_{k=0}^q b_k z^{-k} \right) S(z) = \left( \sum_{j=0}^p a_j z^{-1} \right) E(z)$$

La fonction de transfert du filtre est donc la fraction rationnelle :

$$H(z) = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{\sum_{j=0}^p a_j z^{-1}}{\sum_{k=0}^q b_k z^{-k}}$$

Un filtre numérique sera défini par les séries des coefficients  $a_j$  et  $b_k$ . Le degré  $q$  du polynôme au dénominateur de sa fonction de transfert en  $z$  définit l'ordre du filtre.

La réponse impulsionnelle du filtre s'obtient par inversion de la transformée en  $z$ . Les coefficients  $h(n)$  d'un filtre réalisable sont :

- $h(n) = 0$  pour  $n < 0$ ,  $h(0) = a_0$
- $h(n) = a_n - \sum_{k=1}^n b_k h(n-k)$ , avec  $a_n = 0$  pour  $n > p$  et  $b_k = 0$  pour  $k > q$

On a alors :

$$s(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k) e(n-k)$$

### 9.6.2 Propriétés des filtres numériques

Toutes les propriétés énoncées pour les filtres analogiques peuvent être transposées aux filtres numériques.

Un filtre numérique est défini par un produit de convolution :

$$s(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n-k) e(k)$$

La réponse impulsionnelle  $h$  est la sortie du filtre correspondant à une entrée  $E$  telle que  $E(0) = 1$ ,  $E(n) = 0 \forall n \neq 0$ .

Le filtre est causal si  $s(n) = \sum_0^{\infty} h(n-k)e(k)$ .

Le filtre est stable si  $\sum_{-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$

$H(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} h(n)z^{-n}$ , transformée en  $z$  de  $h$ , est la fonction de transfert en  $z$  du filtre.

Le filtre est stable si  $|z| = 1$  est dans la couronne de convergence.

Le filtre est causal si  $\exists r$ ,  $H$  converge pour  $|z| > r$ .

Le filtre est donc réalisable si  $\exists r < 1$ ,  $H$  converge pour  $|z| > r$ .

On démontre les propriétés suivantes :

Un filtre défini par la fonction de transfert en  $z$   $H(v) = P(v)/Q(v)$  est causal et stable si :

- Le degré de  $P$  est inférieur ou égal au degré de  $Q$
- Les racines de  $Q$  sont dans le disque  $|z| < 1$

## **10 FILTRES NUMERIQUES**

On classe les filtres numériques en deux grandes catégories : les filtres FIR et les filtres IIR.

### **10.1 FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE FINIE**

#### **10.1.1 Définition**

Les filtres FIR, (Finite Impulse Response) sont des filtres à réponse impulsionnelle finie. Ce type de filtre est dit fini car sa réponse impulsionnelle est limitée dans le temps :

$$h(n) = \sum_{k=n_1}^{n_2} b(k)\delta(n - k)$$

$b(k)$  sont les coefficients (en nombre fini) du filter,  $n_1$  et  $n_2$  étant deux entiers.

La sortie  $s(n)$  d'un filtre FIR pourra donc s'écrire en fonction des entrées  $e(n)$  selon une relation du type

$$s(n) = \sum_{m=n_1}^{n_2} b(m).e(n - m)$$

Un filtre FIR est non récursif, c'est-à-dire que la sortie dépend uniquement de l'entrée du signal, pas des sorties précédentes. Il n'y a pas de contre-réaction.

#### **10.1.2 Filtre à moyenne glissante**

Un exemple de filtre FIR simple est une moyenne glissante ou mobile. Considérons l'exemple suivant :

$$h(n) = (\delta(n-2) + \delta(n-1) + \delta(n))/3$$

La réponse impulsionnelle est limitée à 3 points. Ce filtre transforme une mesure  $e(n)$  en la moyenne de trois mesures successives, la  $n^{\text{eme}}$ , et ses 2 précédentes:

$$s(n) = (e(n-2) + e(n-1) + e(n))/3$$

On peut calculer la fonction de transfert en  $z$  de ce filtre :

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n).z^{-n} = (z^{-2} + z^{-1} + 1)/3 = (z^2 + z + 1)/3z^2$$

Le dénominateur de  $H(z)$  est nul pour  $z = 0$ .  $z = 0$  est le pôle de  $H(z)$ . On note que  $H(z)$  possède 2 zéros (du numérateur), la sortie  $y$  est nulle. Ces racines sont :

$$\frac{-1 \pm j\sqrt{3}}{2} = e^{\pm j\frac{2\pi}{3}}$$

Pour comprendre le comportement en fréquence de ce filtre, on peut calculer la transformée de Fourier de sa réponse impulsionnelle en considérant celle-ci comme la somme de 3 impulsions de Dirac aux temps 0,  $-T_e$  et  $-2T_e$ ,  $T_e$  étant la période d'échantillonnage du signal.

$$h(t) = (\delta(-2T_e) + \delta(-T_e) + \delta(0))/3$$

Sa fonction de transfert est la somme des TF de ces 3 distributions de Dirac. Avec le théorème de translation, on trouve :

$$H(v) = (e^{-4\pi jvT_e} + e^{-2\pi jvT_e} + 1)/3 = e^{-2\pi jvT_e}(e^{-2\pi jvT_e} + e^{2\pi jvT_e} + 1)/3$$

En utilisant la formule d'Euler,  $H(v)$  peut s'écrire simplement :  $H(v) = e^{-2\pi jvT_e}(1 + 2\cos 2\pi vT_e)/3$

Son module  $|H(v)|$  est représenté sur la figure 28.

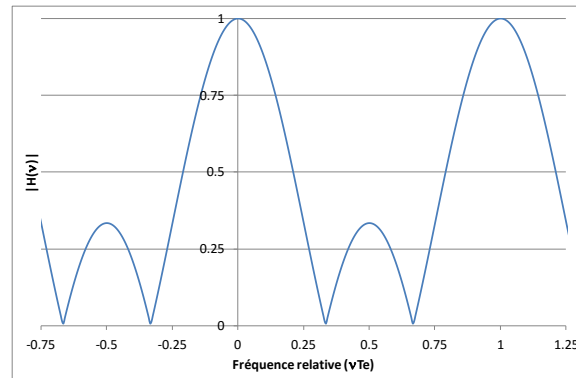


Figure 28 Fonction de transfert du filtre de moyenne glissante étudié.

Ce graphe est périodique. Il est maximum à la fréquence nulle. Il s'agit bien d'un filtre passe bas. Il convient de n'observer que les fréquences comprises entre  $-v_e/2$  et  $+v_e/2$  (périodisation du signal échantillonné à la fréquence  $v_e = 1/T_e$ ).

On observe que ce filtre laisse passer les hautes fréquences (proches de  $v_e/2$ ) et n'est pas très sélectif, sauf à deux fréquences très particulières, pour laquelle sa fonction de transfert est nulle (pour  $\cos 2\pi vT_e = -1/2$ ) soit pour les fréquences  $v = \pm v_e/3$ . Ces deux fréquences (dont une seule positive) correspondent aux zéros de la fonction de transfert en  $z$  calculés précédemment.

On notera également que son déphasage, égal à  $-2\pi vT_e$ , aurait pu être rendu nul en considérant la moyenne centrée sur la mesure  $n$ , des trois mesures successives, la  $n^{\text{ème}}$ , sa précédente et la suivante.

Pour obtenir des filtres à moyenne glissante plus sélectif, on pourra calculer la moyenne sur plus de 3 échantillons et appliquer des coefficients de pondération différents sur chacune de ces mesures. On obtient ainsi une nouvelle réponse impulsionnelle et par conséquent une nouvelle fonction de transfert et une nouvelle fonction de transfert en  $z$ . Inversement, en définissant une fonction de transfert (en fixant par exemple les fréquences pour lesquelles elle sera nulle et où il y aura réjection totale du bruit), on pourra calculer la réponse impulsionnelle du filtre RIF et traiter directement les signaux temporels au cours de leur acquisition.

## 10.2 FILTRES A REPONSE IMPULSIONNELLE INFINIE

Les filtres de la seconde famille, les filtres IIR, (Infinite Impulse Response) ont une réponse impulsionnelle infinie, c'est-à-dire possèdent une série infinie de coefficients  $h(n)$ . On montre que ce type de filtre est récursif, c'est-à-dire que la sortie du filtre dépend à la fois du signal d'entrée et du signal de sortie, il possède ainsi une boucle de contre-réaction ("feedback").

La sortie d'un filtre IIR pourra s'écrire généralement en fonction des entrées et sorties précédentes (cas d'un filtre causal) par :

$$s(n) = \sum_{p=0}^{N_0} A_p e(n-p) + \sum_{q=1}^{N_1} B_q s(n-q)$$

$s(n)$  dépend des entrées  $e(n)$  de  $n-N_0$  à  $n$  mais aussi des sorties précédentes, soit de  $n-N_1$  à  $n-1$ .

La transformée en  $z$  de ce filtre est une fraction rationnelle de  $z$ .

Considérons le filtre RC d'ordre 1 défini par :  $RC \frac{s(n) - s(n-1)}{T} + s(n) = e(n)$  (paragraphe 10.6)

On peut écrire l'expression précédente sous la forme

$$s(n) = \alpha s(n-1) + \beta e(n)$$

Avec dans ce cas  $\alpha = \frac{RC/T}{1+RC/T}$  et  $\beta = 1$ . On notera que  $\alpha < 1$ .

En fixant  $s(0) = \beta e(0)$  et en considérant le filtre causal ( $n > 0$ ) on a ainsi:

$$s(1) = \beta(e(1) + \alpha e(0)), \quad s(2) = \beta(e(2) + \alpha e(1) + \alpha^2 e(0)), \dots$$

$$s(n) = \beta \left( \sum_{p=0}^n \alpha^p e(n-p) \right) = \sum_{p=0}^n h(p) e(n-p) \quad \text{avec } h(p) = \beta \alpha^p \text{ pour tout } p > 0. \text{ C'est bien un filtre IIR}$$

car  $s(n)$  dépend de toutes les entrées précédentes et donc d'un nombre  $n$  qui ne cesse de croître au fur et à mesure des enregistrements, au contraire des fenêtres glissantes étudiées auparavant.

La transformée en  $z$  de ce filtre peut s'exprimer ainsi :

$$H(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \beta \alpha^p \frac{1}{z^p} = \beta \left( 1 + \frac{\alpha}{z} + \dots + \frac{\alpha^p}{z^p} + \dots \right)$$

Cette série converge vers  $\frac{\beta z}{z - \alpha}$  pour tout  $z$  tel que  $|z| > |\alpha|$ . Ce filtre sera stable si  $|\alpha| < 1$ , ce qui est toujours le cas, de par son expression (voir exemple ci-dessus).

Le filtre RC analogique d'ordre 1 a été étudié en détail. Nous avons montré qu'il est très faiblement sélectif et qu'en pratique on réalisera des filtres d'ordre supérieur à 1.

Les filtres IIR sont principalement les versions numériques des filtres analogiques traditionnels : Butterworth, Tchebychev ... Nous présenterons ci après une démarche utilisant l'outil fdatoool de Matlab Processing Toolbox pour calculer et implémenter un filtre numérique.

### 10.3 CONSTRUCTION PRATIQUE D'UN FILTRE

Une réalisation pratique doit résulter de l'analyse de l'expérimentation réalisée. Elle devra en particulier tenir compte de la fréquence d'échantillonnage (filtre anti-repliement ?), de la gamme de

fréquence des signaux utiles (bande passante) et des bruits à filtrer (bruits haute fréquence, fluctuations lentes dues à des dérives) et de signaux parasites éventuels (50 ou 100 Hz ?). L'amplitude relative des signaux utiles et de la densité spectrale du bruit vont également déterminer le taux de réjection en dehors de la bande passante et la raideur du filtre.

Cette analyse conduit à la définition d'un gabarit.

### 10.3.1 Gabarit du filtre

L'analyse expérimentale conduit à la définition du gabarit du filtre à réaliser. La figure 29 présente le gabarit d'un filtre passe bande.

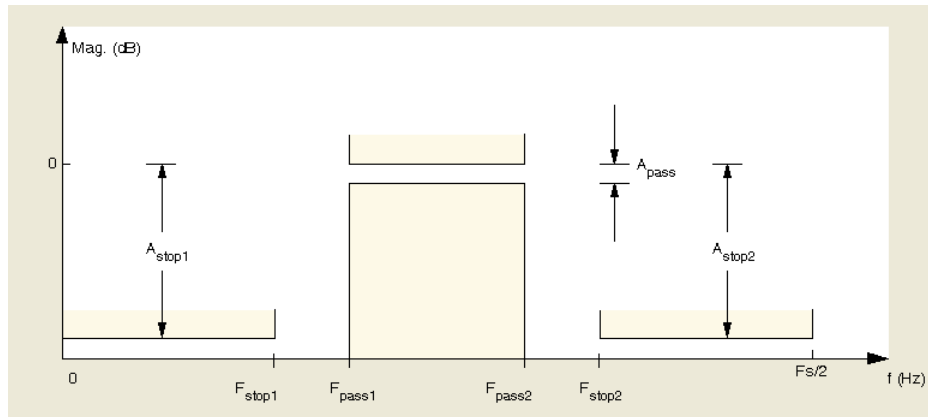


Figure 29. Gabarit d'un filtre passe bande.

Les caractéristiques du gabarit sont :

Les fréquences limites de la bande passante ( $F_{pass1}$  et  $F_{pass2}$ )

Les oscillations du gain acceptées dans la bande passante ( $A_{pass}$ )

Les fréquences limites des bandes coupées ( $F_{stop1}$  et  $F_{stop2}$ )

Les taux de réjection minima dans les bandes coupées ( $A_{stop1}$  et  $A_{stop2}$ )

Les coefficients du filtre numériques seront calculés en fonction de la fréquence d'échantillonnage.

La figure suivante présente un cas d'application à un enregistrement sonore. La fréquence d'échantillonnage est de 48.000 Hz et on souhaite conserver les signaux dans la bande passante (100-12.000 Hz) et rejeter les bruits en dehors de cette bande de fréquence, avec une réjection supérieure à 60 dB pour les fréquences supérieures à 24.000 Hz et inférieures à 20 Hz. Le filtre choisi est un filtre IIR de type Butterworth (faibles oscillations dans la bande passante).

Response Type	Filter Order	Frequency Specifications	Magnitude Specifications
<input type="radio"/> Lowpass <input type="radio"/> Highpass <input checked="" type="radio"/> Bandpass <input type="radio"/> Bandstop <input type="radio"/> Differentiator	<input type="radio"/> Specify order: <input type="text" value="1"/> <input checked="" type="radio"/> Minimum order	Units: <input type="text" value="Hz"/> Fs: <input type="text" value="48000"/> Fstop1: <input type="text" value="20"/> Fpass1: <input type="text" value="100"/> Fpass2: <input type="text" value="12000"/> Fstop2: <input type="text" value="24000"/>	Units: <input type="text" value="dB"/> Astop1: <input type="text" value="60"/> Apass: <input type="text" value="1"/> Astop2: <input type="text" value="60"/>
Design Method <input checked="" type="radio"/> IIR <input type="text" value="Butterworth"/> <input type="radio"/> FIR <input type="text" value="Equiripple"/>	Options Match exactly: <input type="text" value="passband"/>		

Figure 30 : Spécifications du filtre passe bande demandées.

### 10.3.2 Caractéristiques associées

L'assistant fdatoool de Matlab calcule le filtre correspondant. L'ordre minimum de ce filtre est égal à 10.

La figure suivante présente le gain (à gauche) et le déphasage (en radians) du filtre calculé. A noter que la coupure haute est très rapide, par addition d'un filtre antirepliement.

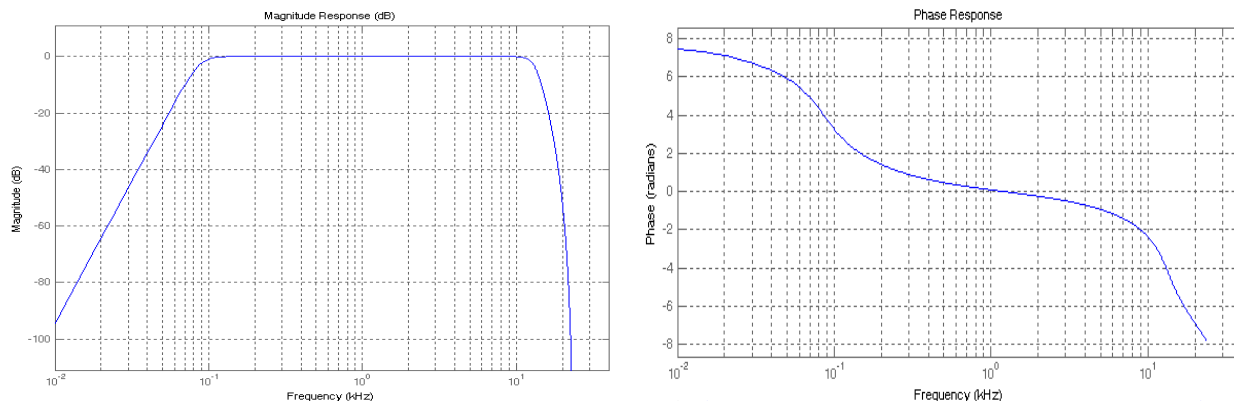


Figure 31 : Gain et déphasage du filtre d'ordre 10 calculé.

Les coefficients de la fonction de transfert en z du filtre de Butterworth d'ordre 10 calculé sont fournis par le logiciel et sont donnés ci après. Les coefficients du numérateur sont écrits de  $b(0)$  à  $b(10)$ . Les coefficients du dénominateur sont notés de  $a(0)$  à  $a(10)$ .

b: 1 0 -5 0 10 0 -10 0 5 0 -1

a: 1.0000 -4.5585 8.5403 -9.1057 7.1224 -4.7494 2.2507 -0.5989 0.1479 -0.0453 -0.0035

La réponse impulsionnelle et le lieu des pôles et des zéros du filtre sont présentés dans les figures ci après.

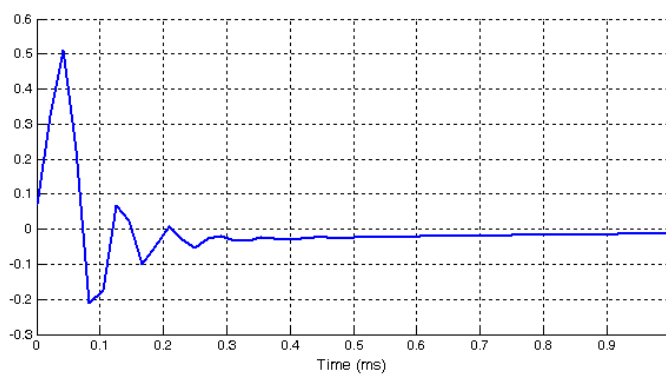


Figure 32 : Réponse impulsionnelle du filtre d'ordre 10 calculé.

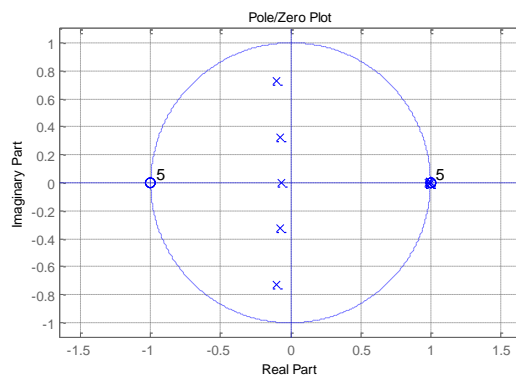


Figure 33 : Lieux des pôles (o) et des zéros (x) du filtre d'ordre 10 calculé.

On notera que les pôles ont tous des parties réelles négatives, garantissant la stabilité de ce filtre.

Le filtre réalisé et caractérisé par ces coefficients  $a$  et  $b$  peut être stocké et utilisé (fonction Matlab *filter* de syntaxe *filter(b,a,sig)*).  $b$  est le vecteur des coefficients du numérateur,  $a$  du dénominateur, de la fonction de transfert en  $z$  du filtre,  $sig$  est le vecteur signal à traiter. Un traitement en ligne d'un signal en cours d'acquisition est bien entendu possible. Des logiciels tels que Labview (National Instrument) permettent d'implémenter des filtres numériques (par exemple calculés avec Matlab) puis de représenter, stocker ... des données acquises sur de très nombreux équipements scientifiques, via des programmes pilote pour Labview fournis par la plupart des constructeurs d'équipement de mesure.



## **11 BIBLIOGRAPHIE**

- 1) H. Reinhard, Eléments de mathématiques du signal. Tome 1 – signaux déterministes. Dunod,
- 2) C. Gasquet, P. Witomski, Analyse de Fourier et applications. Dunod.
- 3) F. Cohen Tenoudji, Analyse des signaux analogiques et numériques, Ellipses.
- 4) The Wathworks, Signal Processing Toolbox User's Guide.