Fliesskommazahlen für Schüler der Gymnasialstufe

amaximov

März 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Wie können Computer so viele unterschiedliche Dinge darstellen, wie Text, Bilder und Videos, wenn sie nur Nullen und Einser speichern können? Wir haben schon gesehen, wie Computer ganze Zahlen darstellen können und letzte Woche hatten wir angefangen zu sehen, wie Computer reelle Zahlen approximieren können. Die Grundidee, wie wir schon gesehen haben, ist im Grunde genommen die Exponentialschreibweise, die wir schon aus der Chemie und aus der Physik kennen. Der Unterschied ist, dass Computer meistens in Basis 2 arbeiten und schränken die Anzahl der möglichen Exponenten und signifikanten Stellen ein.

Um diese Einschränkungen sichtbar und anfassbar zu machen, werden wir folgende Analogie nutzen. Die Mantisse ist wie ein Wagen. Der Fahrer muss eine Eins sein. Der Wagen hat eine bestimmte Anzahl Sitzplätze. Die Zahlen, die da nicht reinpassen, werden nicht gespeichert. Der Wagen ist mobil und kann vom Universalkomma (alle wissen ja, dass im Zentrum vom Universum das Universalkomma steht, an welchem alle Zahlen dranhängen) zum Speicher gefahren werden. Aber damit man immer weiss, welche Zahl ursprünglich gemeint war, muss man auch wissen, wo der Wagen bezüglich dem Universalkomma stehen soll. Dazu ist ein Nagel zwischen dem Fahrersitz und dem ersten Passagiersitz eingehämmert und daran ist ein Seil gebunden. Dieser Seil hat zwei Enden: das negative Ende (nach links) und das positive Ende (nach rechts). Am Seil wird markiert, wie weit das Universalkomma ist.

Beispiel 1.1 *Wir werden jetzt zusammen die Zahl 6.5 darstellen.*

Am Universalkomma hängt die Zahl dran. Der Wagen mit 5 Plätze kommt. Der Fahrer ist die grösste Zahl. Das ist ja das wichtigste. Wenn wir nichts anderes von der Zahl wissen werden als das, was im Wagen steht, wollen wir die signifikanteste Stelle sicher im Wagen drin haben.

[Bild mit Wagen]

Wir verbinden das Universalkomma mit dem Nagel am Wagen und markieren die Stelle am Seil.

Jetzt können wir die Zahl speichern

[Bild im Speicher]

Im Computer wird das als Bitmuster gespeichert. Zuerst Vorzeichen, dann Exponent (Markierungen am Seil), dann Mantisse (die erste Eins ist eigentlich überflüssig).

Dank dem Seil kann man den Wagen wiederherstellen im Bezug auf das Universalkomma und wieder ausrechnen, was das für eine Zahl war.

Beispiel 1.2 *Nicht alle Zahlen lassen sich im Fliesskommazahlensystem genau darstellen. Manche müssen gerundet werden. Zum Beispiel, die Zahl 10.75 würde in Binär so aussehen (hängt am Universalkomma).*

[Bild mit Universalkomma]

Dann kommt der Wagen mit 5 Plätze. Die erste Eins und noch 4 Bits steigen ein. Das Seil wird entsprechend gebunden und markiert.

[Bild mit Wagen]

Die letzte Eins wird nicht gespeichert. Es gibt kein Platz. Sie geht verloren.

2 Fliesskommazahlen

2.1 Kleinste und grösste positive Zahlen

Die Länge vom Seil (die Anzahl der möglichen Exponenten) und die Sitzplätze im Wagen (die verfügbaren Bits in der Mantisse) sind endlich. Deswegen können wir nur eine endliche Anzahl von Zahlen darstellen. Dann gibt es unter den endlich vielen positiven Zahlen eine grösste und eine kleinste.

Beispiel 2.1 *Mantissenlänge: 5 Bits, Exponentenbereich: -3 bis 3.*
Wie konstruieren wir die grösste Zahl?
Was wäre die Mantisse? So gross wie möglich. 1.1111
Was wäre der Exponent? So gross wie möglich. 3
Wagen-Darstellung:
Bitmuster: 0 111 (1)1111
Mathematische Darstellung: $1.1111 \cdot 2^3$
Wert: 15.5

Beispiel 2.2 *Mantissenlänge: 5 Bits, Exponentenbereich: -3 bis 3.*
Wie konstruieren wir die kleinste Zahl?
Was wäre die Mantisse? So klein wie möglich, dennoch mit einer führenden Eins: 1.0000
Was wäre der Exponent? So klein wie möglich. -3
Wagen-Darstellung:
Bitmuster: 0 001 (1)0000
Mathematische Darstellung: $1.0000 \cdot 2^{-3}$
Wert: 1/8

Aufgabe 2.1 *Mantissenlänge: 3 Bits, Exponentenbereich: -1 bis 1. Finde die grösste und kleinste positive Zahlen in diesem Fliesskommasystem. Stelle sie als Bitmuster und in der Exponentialschreibweise dar (Wert im Dezimalsystem angeben). (Für den Exponentenbereich: 01 kodiert -1, 10 kodiert 0, 11 kodiert 1).*

Aufgabe 2.2 *Mantissenlänge: 4 Bits, Exponentenbereich: -1 bis 1, kodiert wie in der vorherigen Aufgabe. Finde die grösste und kleinste positive Zahlen (Werte im Dezimalsystem angeben). Stelle sie als Bitmuster und in der Exponentialschreibweise dar.*

Im Allgemeinen für einen Fliesskommasystem, wo die Mantisse m Bits lang ist und der Exponentenbereich von e_min bis e_max geht, findet man die grösste positive Zahl indem man in der Mantisse nur Einser schreibt, so dass diese so gross wie möglich wird: $1.11111\ldots111$ und den Exponenten so gross wie möglich wählt: e_max. Die grösste Zahl ist also:

$$1.1111111\ldots111 \cdot 2^{e_{max}}$$

Und hat den Bitmuster: 0 1111...11 (1)11111...11.

Die kleinste positive Zahl findet man, indem man die Mantisse so klein wie möglich wählt: $1.00000\ldots000$ und den Exponenten so klein wie möglich: e_min. Die kleinste Zahl ist also:

$$1.0000000\ldots000 \cdot 2^{e_{min}}$$

Und hat den Bitmuster: 0 0000...01 (1)000000...0.

2.2 Darstellbare Zahlen

In diesem Abschnitt werden wir ein Gefühl dafür bekommen, welche Zahlen sie darstellen lassen und welche nicht. Hier und in den folgenden Kapiteln, falls nicht speziell vermerkt, werden wir mit Mantissenlänge 5 und Exponentenbereich von -3 bis 3 arbeiten.

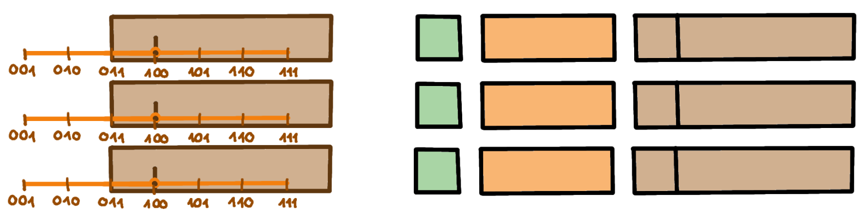
Beispiel 2.3 *Nehmen wir eine Zahl zwischen 1/8 und 15.5 (die kleinste und grösste darstellbare Zahlen in diesem Fliesskommasystem), zum Beispiel 10.25. Lässt sich diese Zahl darstellen?*

[Bild mit Wagen]

Diese Zahl lässt sich in gegebenem System nicht exakt darstellen, weil in der Mantisse gibt es Platz nur für 5 Bits, so geht die letzte 1 verloren.

Beispiel 2.4 *Wir werden jetzt die nächste und die vorherige darstellbare Zahl von 1 finden.*

[Bild mit Wagen]



Die nächste Zahl finden wir, indem wir in der Mantisse ganz rechts eine Eins setzen. Das ist die nächstgrösste Mantisse nach 1.0000. Der Exponent bleibt gleich. Die nächste Zahl ist also 1 + 1/16.

Die grösste Zahl kleiner als Eins finden wir, indem wir die Mantisse so gross wie möglich machen und den Exponenten um eins verkleinern. Die vorherige Zahl ist also 1 - 1/32.

Aufgabe 2.3 *Finde den nächstkleinsten und nächstgrössten darstellbaren Nachbar von den folgenden Zahlen. Schreibe die Werte im Dezimalsystem auf und* *stelle sie als Bitmuster und in der Exponentialschreibweise dar. Sind alle Nachbarn gleich entfernt?*

(a) 2

(b) 3

(c) 4

Kontrollfragen :

1. Kann man im Fliesskommazahlensystem alle reelle Zahlen darstellen?
2. Gibt es eine grösste Zahl im Fliesskommazahlensystem? Falls nein, warum? Falls ja, wie findet man sie?
3. Gibt es eine kleinste Zahl im Fliesskommazahlensystem? Falls nein, warum? Falls ja, wie findet man sie?
4. Warum kann man nicht alle Zahlen zwischen f_min und f_max darstellen? Gib ein Beispiel von einer Zahl, die sich nicht im System mit Mantissenlänge 3 und Exponentenbereich von -1 bis 1 darstellen lässt.
5. Sind alle Zahlen im Fliesskommazahlensystem gleichverteilt oder gibt es kleinere und grössere Löcher? Falls es Löcher gibt, wie sind sie verteilt? Wo sind sie grösser, wo sind sie kleiner?

3 Addition

Man kann Zahlen nicht nur speichern, sondern auch damit rechnen. In diesem Kapitel werden wir die Addition kennenlernen.

Beispiel 3.1 *In diesem Beispiel rechnen wir 1/8 + 1/4.*

Beispiel 3.2 *In diesem Beispiel rechnen wir 2 + 3.*

Aufgabe 3.1 *Rechne folgende Summen aus. Die Mantissenlänge beträgt 5 Bits, der Exponent geht von -3 bis 3.*

(a) 5/8 + 3/4

(b) 10 + 2.25

(c) 17/16 + 2

Die Addition im Fliesskommazahlensystem ist wie gewöhnlich kommutativ, weil wir immer die kleinste Zahl so verschieben, dass der "Wagen" unter dem "Wagen" der grösseren Zahl liegt und dann die Bits in den "Wagen' zusammen addieren. In der folgenden Aufgabe werden wir prüfen, ob sie auch assoziativ ist.

Lernaufgabe : Wir werden jetzt herausfinden, ob die Addition bei den Fliesskommazahlen assoziativ ist. Dazu berechnen wir zweimal die gleiche Summe. Einmal als: 1/8 + 2/8 + 3/8 + 4/8 + 5/8 + 6/8 + 7/8 + 8/8 und einmal als: 8/8 + 7/8 + 6/8 + 5/8 + 4/8 + 3/8 + 2/8 + 1/8. Welchen Resultat erwartest du? Sind die zwei Summen gleich oder unterschiedlich? Ist Addition assoziativ? Nimm dir Zeit und rechne die zwei Summen tatsächlich aus bevor du weiter liest.

Nein, die Addition im Fliesskommazahlensystem ist nicht assoziativ, weil man nur Zahlen zusammen rechnen kann, die innerhalb der Mantissenlänge liegen.

Aufgabe 3.2 *Betrachten wir die Summe* $1/8 + 1/8 + 1/8 + \cdots + 1/8$*. Bei den reellen Zahlen können wir mit solchen Summen auf beliebig grossen Zahlen kommen. Bei den Fliesskommazahlen kann das nicht gehen, weil, wie wir im vorherigen Kapitel gesehen haben, es eine grösste Fliesskommazahl gibt. Aber können wir diese Zahl auch tatsächlich erreichen?*

In einem Fliesskommazahlensystem mit Mantissenlänge 5 *und Exponentenbereich von* -3 *bis* 3*, was ist die grösste Zahl, die wir erreichen können, wenn wir beliebig viele* $1/8$ *zusammen rechnen? Wie viele Summanden brauchen wir, um diese Zahl zu erreichen?*

Teste dich selber

Aufgabe 3.3 *Beantworte folgende Fragen:*

(a) *frage grage*

1. Warum muss man den "Wagen verschieben" wenn man zwei unterschiedlich grosse Zahlen zusammen addiert?

2. Gregory behauptet, dass "der Wagen bei der Summe dort stehen bleibt, wo er bei der grösseren Zahl steht". Hat er Recht? Argumentiere.

3. Hannah behauptet, dass die Addition bei den Fliesskommazahlen nicht kommutativ und nicht assoziativ ist. Hat sie recht? Argumentiere.

Aufgabe 3.4 *Die Ameisenkönigin möchte ausrechnen, wie viele Ameisen braucht sie, um* 10 *Reiskörnchen zu transportieren. Sie weiss, dass eine Ameise allein* 1/4 *Reiskorn transportiert. Die Ameisenkönigin hat dazu folgendes Programm geschrieben.*

```
def nof_ameisen():
    sum = 0.0
    i = 0
    while node != 10.0:
      i += 1
       sum += 0.25
    return i
```

Listing 1: Programm von der Ameisenkönigin

Die Ameisencomputer arbeiten mit Fliesskommazahlen mit Mantissenlänge 5 *und Exponenten zwischen* -3 *und* 3*. Kann die Ameisenkönigin mit diesem Programm die gewünschte Anzahl Ameisen herausfinden? Falls ja, wie viele Ameisen braucht sie, um 10 Reiskörnchen zu transportieren laut diesem Programm? Falls nein, was ist die maximale Summe, die das Programm erreichen kann?*

4 Zusammenfassung

Wir haben gesehen, wie man im Computer reelle Zahlen approximiert. Da wir eine endliche Darstellung verwenden, gibt es eine endliche Anzahl Zahlen, die wir darstellen können. Es gibt eine grösste und eine kleinste positive Zahl.

Die grösste positive Zahl kriegen wir, wenn wir in der Mantisse nur Einser schreiben und den Exponent so weit wie möglich hochdrehen. Die kleinste positive Zahl kriegen wir, wenn wir in der Mantisse eine führende Eins schreiben und sonst nur Nullen und den kleinstmöglichen Exponenten wählen.

Wir haben gesehen, dass der kleinste Abstand zwischen zwei darstellbaren Zahlen wächst, wenn die Zahlen wachsen.

Wir haben gelernt, wie man zwei Zahlen zusammen addiert. Wir haben gesehen, dass zwei darstellbare Zahlen sich nicht immer exakt addieren lassen. Wir haben auch gesehen, dass es einen Unterschied macht, in welcher Reihenfolge man Berechnungen ausführt. Die Addition ist bei Fliesskommazahlen kommutativ aber nicht assoziativ.

Die Fliesskommazahlen sind eine mächtige Darstellung, die mit wenig Bits sehr unterschiedliche Zahlen speichern kann. Das hat aber auch seine Grenzen. Wir müssen in Kauf nehmen, dass die Resultate der Berechnungen nicht immer 100% genau sind.

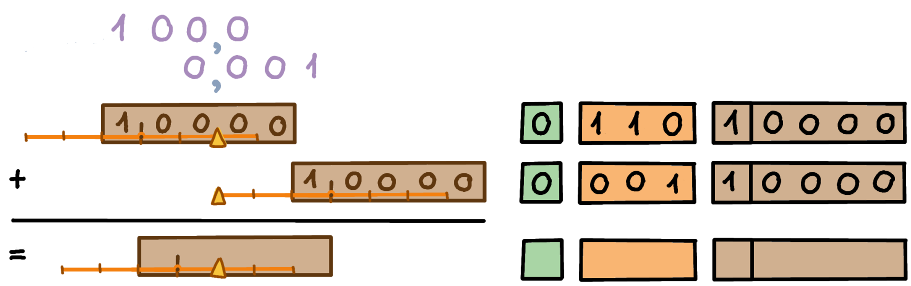
5 Beispiellösungen

5.1 Fliesskommazahlen

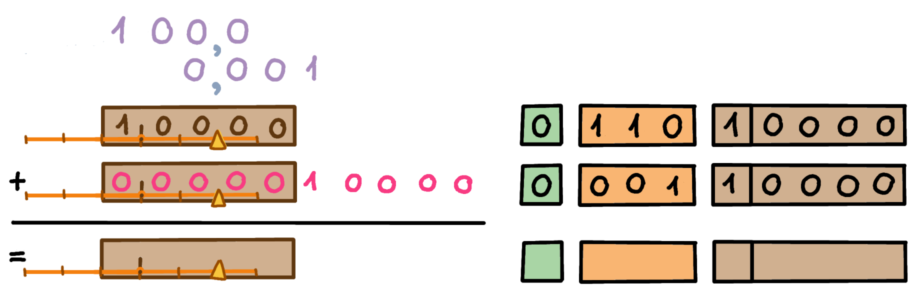
5.2 Addition

Aufgabe 3.2 Die maximale Zahl, die wir erreichen können, wenn wir $1/8 + 1/8 + \cdots + 1/8$ zusammen rechnen, ist 4.0.

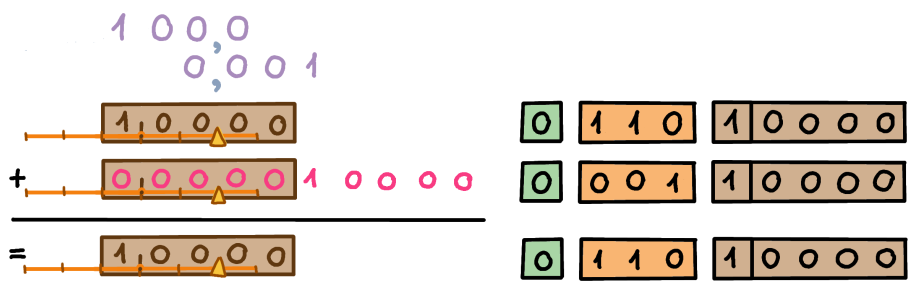
Zum einen, wenn wir die 4.0 erreicht haben, kommen wir nicht mehr weiter. Das sehen wir, wenn wir $4.0 + 1/8$ ausrechnen. Wie gewöhnlich schreiben wir zuerst die Summanden untereinander.



Wenn wir den Kasten von 1/8 unter den Kasten von 4.0 verschieben, sehen wir, dass alle signifikanten Stellen von 1/8 verloren gehen, auch die führende Eins.



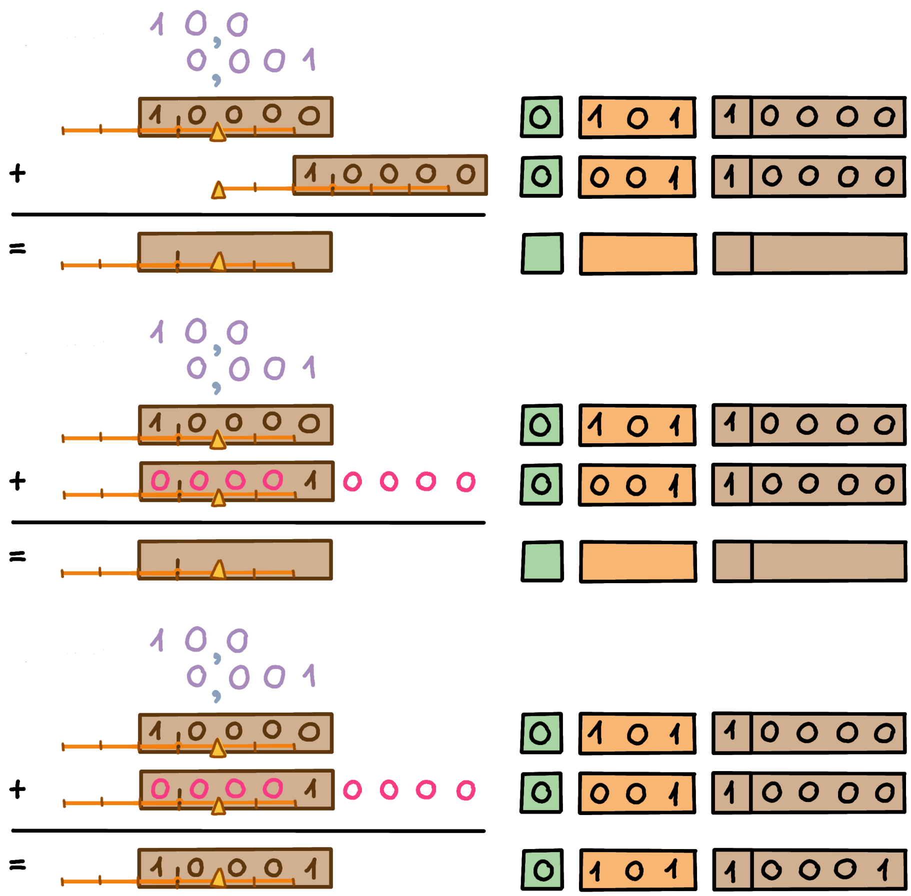
Deswegen, wenn wir $4.0 + 1/8$ ausrechnen, kriegen wir 4.0.



Egal wie viele 1/8 rechnen wir zusammen, bleiben wir immer bei 4.0.

Jetzt bleibt uns zu zeigen, dass wir die 4.0 auch tatsächlich erreichen können. Das Problem bei der 4.0 ist, dass alle signifikanten Stellen von 1/8 verloren gehen. Das passiert, weil der Unterschied zwischen dem Exponenten von 4.0 und dem Exponenten von 1/8 die ganze Mantissenlänge beträgt. Das passiert bei einem kleineren Exponenten nicht. Zum Beispiel, wenn wir 2.0+1/8 ausrechnen, sehen wir, dass das Ergebnis wie erwartet 17/8 ist.

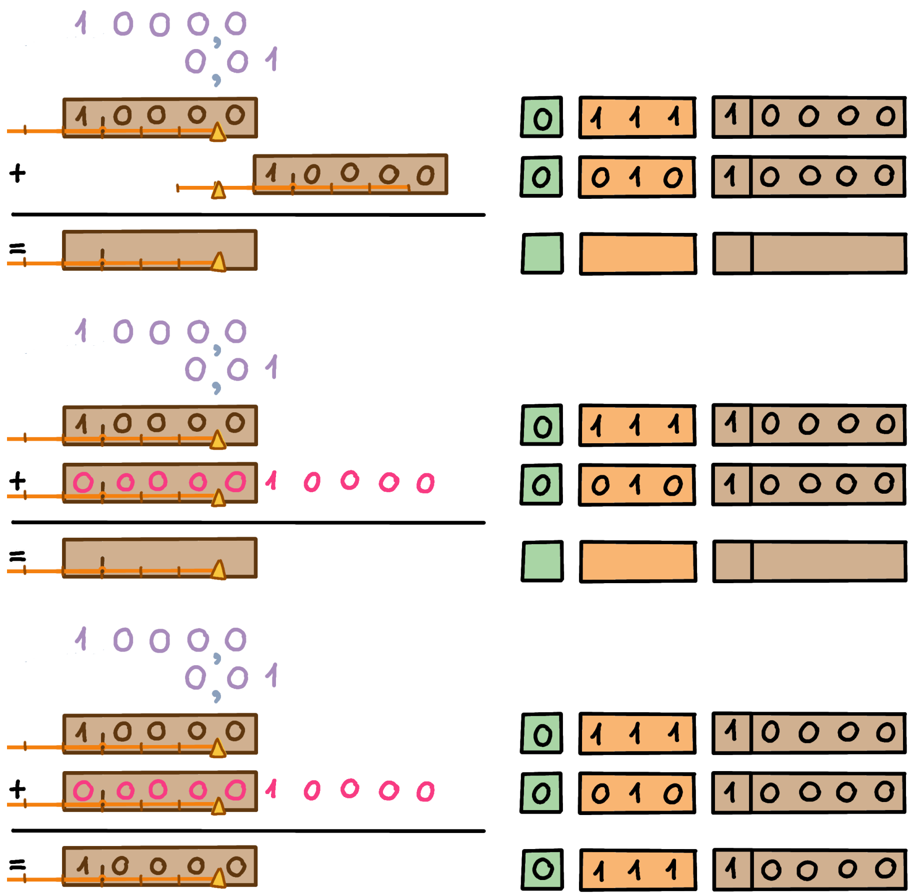
Um zu zeigen, dass das Problem erst bei $4.0 + 1/8$ auftritt, rechnen wir $2.0 + 1/8$. Das Ergebnis ist wie erwartet 17/8.



Wir erreichen also die 4.0 nach 32 Summanden und kommen dann nicht mehr weiter.

Aufgabe 3.3

Aufgabe 3.4 Nein, das Programm der Ameisenkönigin wird unendlich lange laufen und die Anzahl Ameisen, die es braucht, um 10 Reiskörnchen zu transportieren, nie ausgeben. Das Problem ist analog zu dem, was wir in Aufgabe 3.2 gesehen haben. Das Programm läuft wie erwartet bis wir die 8.0 erreichen. Wenn wir aber 1/4 dazu rechnen, dann verlieren wir alle signifikanten Stellen von 1/4 und die 8.0 bleibt unverändert.



1 0 0 0,0
0,0 1
1,0 0 0 0
+
=
0 | 1 1 1 | 1 0 0 0 0
0 | 0 1 0 | 1 0 0 0 0