13 සමීකරණ

මෙම පාඩම ඉගෙනීමෙන් ඔබට,
- පරිමේය සංගුණක සහිත සමගාමී සමීකරණ ගොඩනැගීමට හා විසඳීමට
- සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන්, වර්ග පූරණයෙන් හා සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට

හැකියාව ලැබෙනු ඇත.

සමගාමී සමීකරණ විසඳීම

සමගාමී සමීකරණ විසඳීම සම්බන්ධ ව ඔබ මීට පෙර ලබා ගත් දැනුම පුනරීක්ෂණය සඳහා පහත අභ්‍යාසයේ යෙදෙන්න.

පුනරීක්ෂණ අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් සමගාමී සමීකරණ විසඳන්න.

a. $6x + 2y = 1$
$4x - y = 3$

b. $a + 2b = 3$
$2a + 3b = 4$

c. $m - 4n = 6$
$3m + 2n = 4$

d. $9p - 2q = 13$
$7p - 3q = 0$

e. $2x + 3y = 12$
$3x - 4y = 1$

f. $3a + 12 = 2b$
$13 + 2a = 3b$

2. සරත් ළඟ රුපියල් දෙකේ හා රුපියල් පහේ කාසි 20ක් තිබේ. ඒවායේ මුළු වටිනාකම රුපියල් 55කි. සරත් ළඟ ඇති රුපියල් දෙකේ කාසි ගණන x ද රුපියල් පහේ කාසි ගණන y ද ලෙස සලකා,
(i) දී ඇති තොරතුරු දැක්වීමට සමීකරණ දෙකක් ලියන්න
(ii) එමගින්, සරත් ළඟ ඇති රුපියල් දෙකේ හා රුපියල් පහේ කාසි ගණන සොයන්න.

3. මාලනී හා නාලනී ළඟ යම් මුදල් ප්‍රමාණ ඇත. මාලනී ළඟත් නාලනී ළඟත් ඇති මුදල්වල ඓක්‍යයට රුපියල් 30ක් එකතු වූ විට මුළු මුදල රුපියල් 175ක් වේ. නාලනී ළඟ ඇත්තේ මාලනී ළඟ ඇති මුදලේ දෙගුණයට වඩා රුපියල් 95ක් අඩුවෙනි. මාලනී ළඟ ඇති මුදල රුපියල් x ද, නාලනී ළඟ ඇති මුදල රුපියල් y යැයි ද සලකා
(i) දී ඇති තොරතුරු භාවිත කොට සමීකරණ යුගලයක් ලියන්න
(ii) එමගින්, මාලනී ළඟත් නාලනී ළඟත් ඇති මුදල් වෙන වෙන ම සොයන්න.

4. ''පොත් 2ක් හා පෑනක් මිල දී ගැනීමට රුපියල් 65ක් වැය වේ. එවැනි පෑන් 2ක් මිල දී ගැනීමට වැය වන මුදලින් එවැනි පොතක් මිල දී ගත හැකි වේ.'' යන තොරතුරු ඇසුරෙන් සමගාමී සමීකරණ යුගලක් ගොඩනගා පොතක මිලත්, පෑනක මිලත් වෙන වෙන ම සොයන්න.

13.1 භාගමය සංගුණක සහිත සමගාමී සමීකරණ

සමගාමී සමීකරණ යුගලයක අඥාතවල සංගුණක නිඛිල වන විට දී එම සමගාමී සමීකරණ විසඳා අඥාතවල අගය සෙවීමට මින් පෙර අපි උගත්තෙමු. මෙතැන් සිට සංගුණක ලෙස භාග යෙදෙන සමගාමී සමීකරණ ගොඩනැගීම හා විසඳීම පිළිබඳ ව නිදසුන් ඇසුරෙන් විමසා බලමු.

නිදසුන 1

කමල් හා නිමල් ළඟ යම් මුදල් ප්‍රමාණයක් ඇත. කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{2}$ කට නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් එකතු කළ විට රුපියල් 20ක් ලැබේ. කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{4}$ ක් නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{6}$ කට සමාන නම්, දෙදෙනා ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න·

මෙම ගැටලුව සමගාමී සමීකරණ යුගලයක් ගොඩනගා විසඳන අයුරු සලකා බලමු.
කමල් ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණය රුපියල් x ද, නිමල් ළඟ ඇති මුදල් ප්‍රමාණය රුපියල් y ද ලෙස ගනිමු.

එවිට,

කමල් ළඟ ඇති මුදලෙන් $\frac{1}{2}$ ක් වන $\frac{1}{2}x$ හා නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් වන $\frac{1}{3}y$ එකතු කළ විට $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y$ ලැබේ. එය රුපියල් 20ට සමාන බැවින්

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 20$ ——— (1) ලෙස එක් සමීකරණයක් ලැබේ.

එලෙස ම, කමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{4}$ ක් නිමල් ළඟ ඇති මුදලින් $\frac{1}{6}$ කට සමාන නිසා

$\frac{1}{4}x = \frac{1}{6}y$ සමීකරණය ලැබේ.

එය $\frac{1}{4}x - \frac{1}{6}y = 0$ ——— (2) ලෙස ලිවිය හැකි වේ.

සංගුණක ලෙස භාග අඩංගු සමගාමී සමීකරණ විසඳීමේ දී ප්‍රථමයෙන් එම සංගුණක, නිඛිල බවට හරවා ගෙන, විසඳීම බොහෝ විට පහසු ය. ඒ අනුව (1) සමීකරණයේ සංගුණකවල හරයන්ගේ කුඩා පොදු ගුණාකාරයෙන් සමීකරණය ගුණ කිරීමෙන්, පහසුවෙන් සංගුණක නිඛිල බවට හරවා ගත හැකි ය.

එමනිසා, (1) සමීකරණය 2 හා 3 හි කු.පො.ගු. වන 6න් හා (2) සමීකරණය 4 හා 6 හි කු.පො.ගු. වන 12න් ගුණ කරමු.

(1) $\times$ 6න්; $6 \times \frac{1}{2}x + 6 \times \frac{1}{3}y = 6 \times 20$

$\therefore \quad 3x + 2y = 120$ ——— (3)

② × 12න්; $12 \times \frac{1}{4}x - 12 \times \frac{1}{6}y = 12 \times 0$

$$3x - 2y = 0 \quad \text{———} ④$$

දැන් ① හා ② සමීකරණ විසඳීම වෙනුවට, එයට තුල්‍ය වන ③ හා ④ විසඳීම කළ හැකි ය. එමනිසා, ③ හා ④ සමීකරණ විසඳමු.

③ + ④ $(3x + 2y) + (3x - 2y) = 120 + 0$

$$3x + 2y + 3x - 2y = 120$$

$$\frac{6x}{6} = \frac{120}{6}$$

$$x = 20$$

$x = 20$ ④ සමීකරණයෙහි ආදේශයෙන්

$$3 \times 20 - 2y = 0$$

$$2y = 60$$

$$y = 30$$

∴ කමල් ළඟ ඇති මුදල = රුපියල් 20
නිමල් ළඟ ඇති මුදල = රුපියල් 30

සටහන: මෙම ගැටලුවේ දී සංගුණක නිඛිල ආකාරයට හරවා ගත් පසු සමීකරණ එකතු කිරීමෙන් y ඉවත් කොට අපි x හි අගය සෙව්වෙමු. අවශ්‍ය නම් එක් අඥාතයක් උක්ත කර අනෙක් සමීකරණයේ ආදේශයෙන් ද පිළිතුර ලබා ගත හැකි ය. එවැනි නිදසුනක් දැන් විමසා බලමු.

නිදසුන 2 විසඳන්න:

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2 \quad \text{———} ①$$

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9 \quad \text{———} ②$$

මෙම සමීකරණ යුගලයෙන්, එක් අඥාතයක් උක්ත කර අනෙක් සමීකරණයට ආදේශ කොට විසඳමු.

මේ සඳහා $\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$

$$\frac{1}{6}a = -2 + \frac{1}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5}b$$ (දෙපස ම 6න් ගුණ කිරීමෙන්) ——— ③

මෙම a හි අගය ② සමීකරණයට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

$$\frac{1}{3}(-12 + \frac{6}{5}b) + \frac{1}{4}b = 9$$

$$-4 + \frac{2}{5}b + \frac{1}{4}b = 9$$

4හි හා 5 හි කු.පො.ගු. වන 20 පොදු හරය ලෙස සකසා ගෙන භාග සුළු කරමු.

$$\frac{8}{20}b + \frac{5}{20}b = 9 + 4$$

$$\frac{13}{20}b = 13$$

$$b = \frac{13 \times 20}{13}$$

$$b = 20$$

$b = 20$ ③ සමීකරණය ට ආදේශයෙන් (මෙහි දී ඕනෑ ම සමීකරණය ට ආදේශ කළ හැකි වේ.)

$$a = -12 + \frac{6}{5}b$$

$$a = -12 + \frac{6}{5} \times 20$$

$$a = -12 + 24$$

$$a = 12$$

එනම් විසඳුම් $a = 12$ හා $b = 20$ වේ.

ඉහත සමගාමී සමීකරණ යුගලයේ විසඳුම වන $a = 12$ හා $b = 20$ යන අගයන් එම සමීකරණවලට ආදේශ කිරීමෙන් එම විසඳුම සත්‍ය බව වටහා ගත හැකි වේ.

$a = 12$ හා $b = 20$ ① සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$$

වම් පැත්ත $= \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b$

$$= \frac{1}{6} \times 12 - \frac{1}{5} \times 20$$

$$= 2 - 4$$

$$= -2$$

එනම් වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

$\therefore \quad \frac{1}{6}a - \frac{1}{5}b = -2$ සමීකරණය, $a = 12$ හා $b = 20$ මගින් තෘප්ත වේ.

එමෙන් ම,

$a = 12$ හා $b = 20$ ② සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$$

$$\text{වම් පැත්ත} = \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b$$

$$= \frac{1}{3} \times 12 + \frac{1}{4} \times 20$$

$$= 4 + 5$$

$$= 9$$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

එනම් $\frac{1}{3}a + \frac{1}{4}b = 9$ සමීකරණයද $a = 12$ හා $b = 20$ මගින් තෘප්ත වේ.

මේ අනුව $a = 12$ හා $b = 20$ නිවැරදි විසඳුම බව පැහැදිලි ය.

නිදසුන 3 විසඳන්න:

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$$

$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$ ——— ①

$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4$ ——— ② ලෙස ගනිමු.

නිදසුන 1 හි පරිදි මෙම සමීකරණවල භාගමය සංගුණක, නිඛිල බවට පත් කර විසඳිය හැකි ය. තව ද, එක් විචල්‍යයක භාගමය සංගුණක සමාන කිරීමෙන් ද විසඳිය හැකි වේ. මේ සඳහා ② සමීකරණය 2න් ගුණ කිරීමෙන් n හි සංගුණක සමාන කර ගනිමු.

② $\times$ 2න් $\quad \frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n = 8$ ——— ③

දැන්, ① හා ② සමීකරණ වෙනුවට ① හා ③ සමීකරණ විසඳිය හැකි ය.

③ – ① න් $\left(\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n\right) - \left(\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n\right) = 8 - 1$

$$\frac{10}{6}m + \frac{2}{3}n - \frac{1}{2}m - \frac{2}{3}n = 7$$

$$\frac{10}{6}m - \frac{3}{6}m = 7$$

$$\frac{7}{6}m = 7$$

$$7m = 7 \times 6$$

$$m = 6$$

$m = 6$ ① ට ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$3 + \frac{2}{3}n = 1$$

$$\frac{2}{3}n = 1 - 3$$

$$\frac{2}{3}n = -2$$

$$2n = -6$$

$$n = -3$$

එනම්, විසඳුම $m = 6$ හා $n = -3$ වේ.

පෙර විසඳූ ගැටලුවේ මෙන් ම $m = 6$ හා $n = -3$ මුල් සමීකරණවල ආදේශ කර බැලීමෙන් පිළිතුරේ නිවැරදි බව සහතික කර ගත හැකි ය.

$m = 6$ හා $n = -3$ යන විසඳුම් ආදේශ කරමු.

$$\frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n = 1 \text{ ——— } ①$$

$$\text{වම් පැත්ත } = \frac{1}{2}m + \frac{2}{3}n$$
$$= \frac{1}{2} \times 6 + \frac{2}{3} \times (-3)$$
$$= 3 - 2$$
$$= \underline{\underline{1}}$$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

$$\frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n = 4 \text{ ——— } ②$$

$$\text{වම් පැත්ත } = \frac{5}{6}m + \frac{1}{3}n$$
$$= \frac{5}{6} \times 6 + \frac{1}{3} \times (-3)$$
$$= 5 - 1$$
$$= \underline{\underline{4}}$$

$\therefore$ වම් පැත්ත = දකුණු පැත්ත

ඒ අනුව, $m = 6$ හා $n = -3$ යන විසඳුම නිවැරදි ය.

13.1 අභ්‍යාසය

1. විසඳන්න.

(a) $\frac{3}{5}a + \frac{1}{3}b = 3$
$\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b = 8$

(b) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{2}y = 9$
$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 2$

(c) $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 4$
$\frac{1}{2}x - y = 1$

(d) $\frac{2}{7}p - \frac{1}{3}q = 5$
$\frac{1}{2}p - 1\frac{2}{3}q = 12$

(e) $\frac{m}{4} + \frac{5n}{3} = 36$
$\frac{3m}{8} - \frac{5n}{12} = -2$

(f) $\frac{2x}{3} + \frac{3y}{2} = -1$
$4x - 5y = 22$

2. පාසලක පැවති උත්සවයක, සංග්‍රහය සඳහා වැය වන මුදලින් $\frac{1}{2}$ ක්ද සැරසිලි සඳහා වැය වන මුදලින් $\frac{1}{3}$ ක් ද දැරීමට ආදිශිෂ්‍ය සංගමය විසින් එකඟ විය. ඒ අනුව ආදිශිෂ්‍ය සංගමයෙන් ලබාදුන් මුදල රුපියල් 20 000කි. සංග්‍රහ හා සැරසිලි සඳහා වැයවන ඉතිරි මුදල සුභ සාධක සංගමය මගින් දරන ලදි. ඒ අනුව සුභසාධක සංගමය රුපියල් 30 000ක් ලබා දුනි.

(i) සංග්‍රහ කටයුතු සඳහා වියදම් වූ මුදල රුපියල් x ද සැරසිලි සඳහා වියදම් වූ මුදල රුපියල් y ලෙස ද සලකා, මෙම තොරතුරු දැක්වීමට සමීකරණ යුගලයක් ලියන්න.

(ii) එම සමගාමී සමීකරණ යුගල විසඳා, සංග්‍රහ කටයුතු හා සැරසිලි සඳහා වියදම් වූ මුදල් ප්‍රමාණ වෙන වෙන ම සොයන්න.

13.2 සාධක භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක විසඳුම් (එනම්, මූල) සොයන ආකාරය මීට පෙර ඔබ උගෙන ඇත. එවැනි උදාහරණ කීපයක් පුනරීක්ෂණය කරමු.

නිදසුන 1

$x^2 - 5x + 6 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල සොයන්න.

$(x-2)(x-3) = 0$ (සාධක සෙවීමෙන්)

$\therefore x - 2 = 0$ හෝ $x - 3 = 0$ විය යුතු ය.

$\therefore x = 2$ හෝ $x = 3$

$\therefore x = 2$ හා $x = 3$ මෙම සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 2

$2x^2 + 3x - 9 = 0$ හි මූල සොයන්න.

$$2x^2 + 6x - 3x - 9 = 0$$
$$2x(x + 3) - 3(x + 3) = 0$$
$$(2x - 3)(x + 3) = 0 \text{ (සාධක සෙවීමෙන්)}$$
$2x - 3 = 0$ හෝ $x + 3 = 0$ විය යුතු ය.
$$x = \frac{3}{2} \text{ හෝ } x = -3$$

$x = 1\frac{1}{2}$ හා $x = -3$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

දැන් තරමක් සංකීර්ණ ගැටලුවක් විසඳමු.

නිදසුන 3

$\frac{3}{2x - 1} - \frac{2}{3x + 2} = 1$ හි මූල සොයන්න.

මෙහි වර්ගජ සමීකරණයක් පෙනෙන්නට නැත. එහෙත්, මෙම සමීකරණය භාග රහිත සමීකරණයකට හැරවූ විට වර්ගජ සමීකරණයක් ලැබේ. ඒ සඳහා, මුලින් ම, සමීකරණයේ වම්පස පොදු හරය සලකමු (මුළු සමීකරණයම $2x - 1$හි හා $3x + 2$ හි කුඩා පොදු ගුණාකාරයෙන් ගුණ කිරීමෙන් ද මෙය කළ හැකි ය).

$$\frac{3(3x + 2) - 2(2x - 1)}{(2x - 1)(3x + 2)} = 1 \text{ (වම් පස තනි භාගයක් ලෙස ලිවීමෙන්)}$$
$$3(3x + 2) - 2(2x - 1) = (2x - 1)(3x + 2) \text{ (හරස් ගුණිතයෙන්)}$$
$$9x + 6 - 4x + 2 = 6x^2 + 4x - 3x - 2 \text{ (ප්‍රසාරණය කිරීමෙන්)}$$
$$6x^2 - 4x - 10 = 0 \text{ (සුළු කිරීමෙන්)}$$
$$3x^2 - 2x - 5 = 0 \text{ (සමීකරණයේ සියලු පද 2න් බෙදීමෙන්)}$$
$$3x^2 - 5x + 3x - 5 = 0$$
$$x(3x - 5) + 1(3x - 5) = 0$$
$$(3x - 5)(x + 1) = 0$$
$\therefore$ $3x - 5 = 0$ හෝ $x + 1 = 0$ මෙම සමීකරණ
$$\therefore \quad x = \frac{5}{3} \text{ හෝ } x = -1$$
$$\therefore \quad x = 1\frac{2}{3} \text{ හෝ } x = -1$$
$\therefore$ $x = 1\frac{2}{3}$ හා $x = -1$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

නිදසුන් කීපයක් මගින් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම පුනරීක්ෂණය කළ අපි දැන් වර්ගජ සමීකරණ භාවිතයෙන් විසඳිය හැකි ගැටලුවක් පිළිබඳ ව විමසා බලමු.

නිදසුන 4

අනුයාත නිඛිල දෙකක ගුණිතය 12 වේ. එම සංඛ්‍යා යුගල සොයන්න.

මෙම ගැටලුව විසඳීම සඳහා වර්ගජ සමීකරණයක් යොදා ගන්නා ආකාරය විමසා බලමු. අනුයාත සංඛ්‍යා දෙකෙන් කුඩා සංඛ්‍යාව x ලෙස ගනිමු. එවිට, අනෙක් සංඛ්‍යාව $x+1$ වේ. ඒ අනුව,
අනුයාත සංඛ්‍යා යුගලය x හා $(x+1)$ ලෙස ගත හැකි ය.
මෙම සංඛ්‍යා දෙකේ ගුණිතය 12 බැවින්

$x \times (x+1) = 12$ ලෙස ලිවිය හැකි වේ.

$\therefore \; x^2 + x - 12 = 0$

මෙහි වම් පස සාධක සෙවූ විට,

$(x-3)\,(x+4) = 0$ වේ.

$\therefore \; x - 3 = 0$ හෝ $x + 4 = 0$ විය යුතු ය.

$\therefore \; x = 3$ හෝ $x = -4$

$x = 3$ හා $x = -4$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම වේ.
$x = 3$ විට අනුයාත සංඛ්‍යාව $(x+1) = 3 + 1 = 4$ වේ.
$x = -4$ විට අනුයාත සංඛ්‍යාව $(x+1) = -4 + 1 = -3$ වේ.

මේ අනුව ගුණිතය 12 වන අනුයාත නිඛිල සංඛ්‍යා යුගල දෙකක් ඇති අතර, ඒවා "3, 4" හා "– 3, – 4" වේ.

ඉහත $x^2 + x - 12 = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ විසඳුම් එම සමීකරණයට ආදේශ කර, එම විසඳුම් සත්‍ය බව වටහා ගත හැකි වේ.

$x^2 + x - 12 = 0$

$x = 3$ සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$
\begin{aligned}
\text{ව.පැ.} &= x^2 + x - 12\\
&= 3^2 + 3 - 12\\
&= 9 + 3 - 12\\
&= 12 - 12\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ව.පැ. = ද.පැ.

$x = -4$ සමීකරණයේ වම් පැත්තට ආදේශ කරමු.

$$
\begin{aligned}
\text{ව.පැ.} &= x^2 + x - 12\\
&= (-4)^2 + (-4) - 12\\
&= 16 - 4 - 12\\
&= 16 - 16\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\therefore$ ව.පැ. = ද.පැ.

මේ අනුව $x^2 + x - 12 = 0$ සමීකරණයේ විසඳුම් 3 හා -4 බව සනාථ වේ.

නිදසුන 5

සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමක දිග එහි පළලට වඩා මීටර 5ක් දිගින් වැඩි වේ. එහි වර්ගඵලය වර්ගමීටර 150 කි.

(i) ඉඩමේ පළල මීටර x ලෙස ගෙන ඉඩමේ දිග සඳහා ප්‍රකාශනයක් x ඇසුරෙන් ලියන්න.

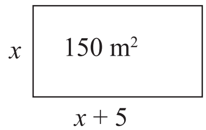
(ii) x අඩංගු සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(iii) එම සමීකරණය විසඳා, ඉඩමේ දිග හා පළල සොයන්න.

(i) පළල මීටර x ලෙස ගනිමු. එවිට,

දිග $= x + 5$ වේ. (සියලු මිනුම් මීටරවලින් දක්වා ඇත)

(ii) මෙම දත්ත රූපසටහනකින් නිරූපණය කළ විට වඩාත් පැහැදිලි වේ.



$$\text{වර්ගඵලය} = \text{දිග} \times \text{පළල}$$
$$= (x + 5) \times x$$
$$x\,(x + 5) = 150$$

මෙය අවශ්‍ය සමීකරණය යි.

(iii) ඉහත සමීකරණය විසඳමු.

$$x\,(x + 5) = 150$$
$$x^2 + 5x - 150 = 0$$
$$(x - 10)\,(x + 15) = 0$$
$$\therefore\ x - 10 = 0 \ \text{හෝ}\ x + 15 = 0$$
$$\therefore\ x = +10 \ \text{හෝ}\ x = -15$$

$\therefore\ x = +\,10$ හා $x = -\,15$ මෙම සමීකරණයේ මූල වේ.

එහෙත් x මගින් දිගක් නිරූපණය වන බැවින් එය සෘණ විය නොහැකි ය.

එබැවින් $x = 10$ අගය පමණක් ගැළපේ.

ඒ අනුව සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමේ පළල $= 10$ m ද

සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ඉඩමේ දිග $= 15$ m ද වේ.

ඉහත x සඳහා ලැබුණු අගය දෙක ආදේශයෙන් $x\,(x + 5) = 150$ හි විසඳුම් 10 හා -15 බව සනාථ කළ හැකි ය.

$$\text{ව.පැ.} = x\,(x + 5)$$
$$= 10\,(10 + 5)$$
$$= 10 \times 15$$
$$= 150$$
$$\therefore\ \text{ව.පැ.} = \text{ද.පැ.}$$

මෙලෙස ම, $x = -15$ ද විසඳුමක් බව සනාථ කළ හැකි ය.

13.2 අභ්‍යාසය

1. පහත සඳහන් එක් එක් වර්ගජ සමීකරණය විසඳන්න.

(a) $x(x+5)=0$ **(b)** $\frac{3}{4}x(x+1)=0$ **(c)** $(x-4)(x+3)=0$

(d) $x^2-2x=0$ **(e)** $\frac{x^2}{2}=3x$ **(f)** $x^2+7x+12=0$

(g) $(x-2)(2x+3)=x^2+2x+4$ **(h)** $\frac{4}{x}+\frac{3}{x+1}=3$

(i) $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x+1}=1$ **(j)** $x^2-4=0$

2. පහත සඳහන් එක් එක් වර්ගජ සමීකරණය සාධක දැනුම භාවිතයෙන් විසඳන්න.

($\sqrt{2}=1.41$, $\sqrt{3}=1.73$ හා $\sqrt{5}=2.23$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2-12=0$ **(b)** $x^2-21=11$ **(c)** $x^2+17=37$

3. යම් සංඛ්‍යාවක වර්ගයෙන්, එම සංඛ්‍යාවේ දෙගුණය අඩු කළ විට පිළිතුර 15 වේ. එම සංඛ්‍යාව සොයන්න.

4. අනුයාත ඉරට්ට සංඛ්‍යා දෙකක ගුණිතය 120 වේ. සංඛ්‍යා දෙක සොයන්න.

5. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර ආස්තරයක දිග, එහි පළලට වඩා සෙන්ටිමීටර 3කින් විශාල ය. එම ආස්තරයේ වර්ගඵලය වර්ග සෙන්ටිමීටර 88 කි. ආස්තරයේ දිගත් පළලත් සොයන්න.

6. සෘජුකෝණාස්‍රාකාර තණ පිටියක දිග 32 m හා පළල 20 m ද වන අතර, එය වටා පිටතින් ඒකාකාර පළලින් යුතු පාරක් ඇත. පාරේ වර්ගඵලය 285 m^2ක් වේ.

(i) පාරේ පළල මීටර x ලෙස ගෙන, දී ඇති තොරතුරු ඇසුරෙන් x අඩංගු සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.

(ii) එම සමීකරණය විසඳීමෙන් පාරේ පළල සොයන්න.

7. සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක කර්ණයේ දිග සෙන්ටිමීටර $(2x+1)$ වේ. අනෙක් පාද දෙකේ දිග පිළිවෙළින් සෙන්ටිමීටර x හා සෙන්ටිමීටර $(x+7)$ වේ. x හි අගය සොයා, ත්‍රිකෝණයේ පාදවල දිග සොයන්න.

8. $-7, -5, -3, -1, \ldots$ යන සමාන්තර ශ්‍රේඪියේ මුල් පද n ගණනක ඓක්‍යය 105 වේ. ශ්‍රේඪි පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන්

(i) n හි වර්ගජ සමීකරණයක් ගොඩනගන්න.
(ii) ඉහත සමීකරණය විසඳීමෙන් පද ගණන සොයන්න.

13.3 වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමේ දී අදාළ ප්‍රකාශනය සාධකවලට වෙන් කිරීමෙන් විසඳුම් සොයන අයුරු අපි දුටුවෙමු. එහෙත් $x^2 + 3x + 5 = 0$, $2x^2 - 5x - 1 = 0$ වැනි වර්ගජ සමීකරණ, සාධක සෙවීම මගින් විසඳීම පහසු නො වේ. එබඳු සමීකරණවල මූල ලබා ගැනීම සඳහා වෙනත් ක්‍රමයක් යොදා ගැනීම පහසු ය. එක් ක්‍රමයක් නම්, ප්‍රකාශනය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස සකස් කර විසඳීම යි. මෙය වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම නම් වේ.

වර්ග පූරණයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීමට පෙර $x^2 + bx$ ප්‍රකාශනයක් වර්ගායිතයක් එනම්, පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ප්‍රකාශ කිරීම ඉගෙන ගත් ආකාරය සිහිපත් කරමු.

ඒ සඳහා පහත ක්‍රියාකාරකමෙහි යෙදෙන්න.

ක්‍රියාකාරකම

පහත සඳහන් ප්‍රකාශන පූර්ණ වර්ගයක් බවට පත් කිරීමට එකතු කළ යුතු නියත පදය ලියා ඒවා වර්ගායිත ලෙස සකසන්න (පළමු කොටස සාදා ඇත).

a. $x^2 + 6x + 9 \quad = (x + 3)^2$

b. $x^2 + 8x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$

c. $x^2 - 14x + \ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots$

d. $x^2 + 3x + \ldots \quad = \ldots\ldots\ldots\ldots$

e. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 8x + \ldots$

f. $(x + \ldots)^2 = x^2 + 2ax + \ldots$

g. $(x + b)^2 = x^2 + \ldots x + b^2$

h. $(x + m)^2 = x^2 + \ldots x + m^2$

මුලින් ම, සාධක භාවිතයෙන් ද විසඳිය හැකි වර්ගජ සමීකරණයක් වර්ග පූරණයෙන් විසඳන අයුරු සලකා බලමු.

නිදසුන 1

$x^2 + 2x - 3 = 0$ වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$
$$x^2 + 2x = 3$$

වම් පැත්ත පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලිවීම සඳහා x හි සංගුණකයෙන් බාගයෙහි වර්ගය වන $+1$ එකතු කරමු. එවිට දකුණු පසට ද $+1$ එකතු කළ යුතු වේ.

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$$
$$(x + 1)^2 = 4$$

එමනිසා

$$x + 1 = \pm\sqrt{4}$$
$$x + 1 = \pm 2$$
$$x = \pm 2 - 1$$

එනම්, $x = +2 - 1$ හෝ $x = -2 - 1$

$x = 1$ හෝ $x = -3$

ඒ අනුව ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් $x = 1$ හා $x = -3$ වේ.

දැන් තවත් නිදසුනක් සලකමු.

නිදසුන 2

$x^2 - 4x + 1 = 0$ සමීකරණය වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$
$$x^2 - 4x = -1$$
$$x^2 - 4x + 4 = -1 + 4$$
$$(x-2)^2 = 3$$
$$\therefore \quad x - 2 = \pm\sqrt{3}$$
$$x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$x = 2 + \sqrt{3}$ හෝ $x = 2 - \sqrt{3}$ වේ.

$\sqrt{3}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 1.73 දී ඇතැයි ගනිමු.

$x = 2 + 1.73$ හෝ $x = 2 - 1.73$ විය යුතු ය.

$x = 3.73$ හෝ $x = 0.27$

$x = 3.73$ හා $x = 0.27$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 3

$2x^2 + 6x - 5 = 0$ විසඳා මූල සොයන්න.

මෙම සමීකරණය පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස දැක්වීමේ දී x හි සංගුණකය 1 ලෙස සකසා ගැනීමෙන් වඩාත් පහසු වේ. සමීකරණය 2න් බෙදීමෙන් වර්ග පදයේ සංගුණකය 1 ලෙස පිළියෙල කර ගත හැකි ය.

$$2x^2 + 6x - 5 = 0$$
$$x^2 + 3x - \frac{5}{2} = 0$$
$$x^2 + 3x = \frac{5}{2}$$
$$x^2 + 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+10 + 9}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{+19}{4}$$
$$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{19}}{2}$$
$$x = \frac{+\sqrt{19} - 3}{2} \text{ හෝ } x = \frac{-\sqrt{19} - 3}{2}$$

$\sqrt{19}$ සඳහා ආසන්න අගයක් ලෙස 4.36 දී ඇතැයි ගනිමු.

$$x = \frac{4.36 - 3}{2} \text{ හෝ } x = \frac{-4.36 - 3}{2}$$

$x = 0.68$ හෝ $x = -3.68$

$x = 0.68$ හා $x = -3.68$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

13.3 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන වර්ගජ සමීකරණ වර්ග පූරණයෙන් විසඳන්න.

($\sqrt{2} = 1.41$, $\sqrt{3} = 1.73$, $\sqrt{5} = 2.23$, $\sqrt{6} = 2.44$, $\sqrt{13} = 3.6$, $\sqrt{17} = 4.12$, හා $\sqrt{57} = 7.54$ ලෙස ගන්න)

(a) $x^2 - 2x - 4 = 0$ **(b)** $x^2 + 8x - 2 = 0$ **(c)** $x^2 - 6x = 4$

(d) $x^2 + 4x - 8 = 0$ **(e)** $x(x + 8) = 8$ **(f)** $x^2 + x = 4$

(g) $2x^2 + 5x = 4$ **(h)** $3x^2 = 3x + \frac{1}{2}$ **(i)** $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{2x+3} = 1$

13.4 සූත්‍රය භාවිතයෙන් වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණයක් විසඳීම සඳහා වඩාත් පහසු ක්‍රමයක් වන්නේ සූත්‍රය භාවිත කිරීම යි. මුලින් ම, මූල ලබා දෙන සූත්‍රය ලබා ගන්නා ආකාරය සලකා බලමු. ඇත්ත වශයෙන් ම, මෙහි දී සිදු කරන්නේ $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණය වර්ග පූරණයෙන් විසඳීම යි.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx = -c$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a} \quad (a \text{ මගින් බෙදීමෙන්}) \ (a \neq 0)$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \quad (\text{දෙපසට } \frac{b}{a} \text{ න් අඩක වර්ගය එකතු කිරීමෙන්})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad (\text{වම් පස පූර්ණ වර්ගයක් ලෙස ලියා, දකුණු පස පද සැකසීමෙන්})$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (\text{දකුණු පස පොදු හරයක් ලෙස ලිවීමෙන්})$$

එමනිසා, $$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (පොදු හරයක් සහිත ව ලිවීමෙන්)

මේ අනුව
$ax^2 + bx + c = 0$ ආකාරයේ වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම සඳහා

$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ යන සූත්‍රය භාවිත කළ හැකි වේ. මෙහි ධන හා සෘණ අගයන් දෙකට අනුරූප ව x සඳහා අගයන් (මූල) දෙකක් ලැබේ.
මෙහි a යනු x^2 පදයේ සංගුණකය ද, b යනු x පදයේ සංගුණකය ද, c යනු නියත පදය ද වේ.

නිදසුන 1

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳන්න.

$2x^2 + 7x + 3 = 0$ සමීකරණයෙහි,
$a = 2, b = 7, c = 3$ ආදේශයෙන්

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$= \frac{-7 \pm 5}{4}$$

$x = \frac{-7 + 5}{4}$ හෝ $x = \frac{-7 - 5}{4}$

$x = -\frac{1}{2}$ හෝ $x = -3$

$x = -\frac{1}{2}$ හා $x = -3$ ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම් වේ.

නිදසුන 2

$4x^2 - 7x + 2 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳා මූල සොයන්න. $\sqrt{17} = 4.12$ ලෙස ගන්න.

$$4x^2 - 7x + 2 = 0$$

මෙහි $a = 4, b = -7, c = 2$ ලෙස ගත හැකි ය. ($ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයට අනුව)

ඒ අනුව, $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 4 \times 2}}{2 \times 4}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 32}}{8}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{17}}{8}$$ ($\sqrt{17} = 4.12$ ලෙස දී ඇති නිසා)

$$= \frac{7 \pm 4.12}{8}$$

$x = \frac{7 + 4.12}{8}$ හෝ $x = \frac{7 - 4.12}{8}$

$x = \frac{11.12}{8}$ හෝ $x = \frac{2.88}{8}$

$x = 1.39$ හෝ $x = 0.36$

$x = 1.39$ හා $x = 0.36$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.

නිදසුන 3

$x^2 + 2x - 1 = 0$ සමීකරණය සූත්‍රය භාවිතයෙන් විසඳා, මූල දෙවන දශමස්ථානයට නිවැරදි ව සොයන්න ($\sqrt{2} = 1.414$ ලෙස ගන්න).

$a = 1, b = 2, c = -1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2 \times 1.414}{2}$$

$$= \frac{-2 \pm 2.828}{2}$$

$x = \dfrac{-2 + 2.828}{2}$ හෝ $x = \dfrac{-2 - 2.828}{2}$

$= \dfrac{0.828}{2}$ $\qquad x = \dfrac{-4.828}{2}$

$x = 0.414$ හෝ $x = -2.414$

$x = 0.41$ හා $x = -2.41$ ඉහත සමීකරණයේ මූල වේ.