**Слесарев Иван ПОИТ 5-2**

**Лабораторная работа 3. Метод ветвей и границ. Задача коммивояжера и методы её решения.**

**ЦЕЛЬ РАБОТЫ:** освоить общие принципы решения задач методом ветвей и границ, решить задачу о коммивояжере данным методом, сравнить полученное решение задачи с комбинаторным методом перестановок.

**Задание 1.** Сформулировать условие задачи коммивояжера с параметром. Для этого:

* принять элементы матрицы расстояний равными:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 22 | 32 |  | 11 |
| **2** | 11 |  | 26 | 57 | 73 |
| **3** | 13 | 33 |  | 86 | 60 |
| **4** | 28 | 47 | 44 |  | 33 |
| **5** | 82 | 77 | 52 | 24 |  |

**Задание 2.** Решить сформулированную задачу методом ветвей и границ.

1. Проводим редукцию строк (находим минимальное значение в строке и отнимаем его от каждого элемента данной строки, кроме значения INF)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **hi** |
| **1** |  | 11 | 21 |  | 0 | 11 |
| **2** | 0 |  | 15 | 46 | 62 | 11 |
| **3** | 0 | 20 |  | 73 | 47 | 13 |
| **4** | 0 | 19 | 16 |  | 5 | 28 |
| **5** | 58 | 53 | 28 | 0 |  | 24 |

Матрица 1

1. Проводим редукцию столбцов (находим минимальный элемент в столбце, учитывая нули, и отнимаем от каждого элемента данного столбца, кроме INF)

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **hi** |
| **1** |  | 0 | 6 |  | 0 | 11 |
| **2** | 0 |  | 0 | 46 | 62 | 11 |
| **3** | 0 | 9 |  | 73 | 47 | 13 |
| **4** | 0 | 8 | 1 |  | 5 | 28 |
| **5** | 58 | 42 | 13 | 0 |  | 24 |
| **hj** | 0 | 11 | 15 | 0 | 0 |  |

Матрица 2

1. Рассчитываем локальную нижнюю границу H1=Σhi +  Σhj = 11+11+13+28+24+0+11+15+0+0=113
2. Рассчитываем оценку каждого нулевого значения на позиции ij в матрице = сумма минимального элемента i-го стоблца и минимального элемента j-ой строки, Также каждая оценка будет штрафом к стоимости пути за невключение этого ребра в маршрут.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 0(8) | 6 |  | 0(5) |
| **2** | 0(0) |  | 0(1) | 46 | 62 |
| **3** | 0(9) | 9 |  | 73 | 47 |
| **4** | 0(1) | 8 | 1 |  | 5 |
| **5** | 58 | 42 | 13 | 0(59) |  |

Матрица 3

1. Выбираем из всех оценок наибольшую, чтобы избежать максимального удлинения маршрута, если не включить это ребро в маршрут.

В нашем случае выбираем 0(59)

1. На этом этапе решение начинает ветвиться:

ветвь 5-4, где мы включаем это ребро в маршрут

ветвь 5\*-4\*, где мы не включаем это ребро в маршрут

1. Проверим вариант с включением 5-4 в маршрут, то получаем матрицу без столбца 4 и строки 5, и в ячейке 4-5 значение INF

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** |  | 0 | 6 | 0 |
| **2** | 0 |  | 0 | 62 |
| **3** | 0 | 9 |  | 47 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | INF |

Матрица 4

1. Проводим редукцию строк, а затем столбцов в данной матрице (Матрица 4)

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** | **hi** |
| **1** |  | 0 | 6 | 0 | 0 |
| **2** | 0 |  | 0 | 62 | 0 |
| **3** | 0 | 9 |  | 47 | 0 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | INF | 0 |
| **hj** | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Матрица 5

1. Рассчитаем локальную нижнюю границу H2=H1 + Σhi +  Σhj ­= 113 + 0 = 113
2. Теперь рассмотрим ветвь решения 5\*-4\*, где мы не включаем ребро 5-4.

Если мы не включаем ветвь 5-4 то получаем штраф +59 к удлинению маршрута, то локальная нижняя граница H2=113 + 59 = 172

Матрица для этой ветви получится следующая:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
| **1** |  | 0 | 6 |  | 0 |
| **2** | 0 |  | 0 | 46 | 62 |
| **3** | 0 | 9 |  | 73 | 47 |
| **4** | 0 | 8 | 1 |  | 5 |
| **5** | 58 | 42 | 13 | INF |  |

Матрица 6

Так как ребро 5-4 мы не включаем в маршрут, ставим в этой ячейке значение INF.

1. Построим дерево для вариантов решения

Корень дерева решения

Н=113

5\*-4\*

172

Матрица 6

5-4

113

Матрица 5

1. Из всех НЕВЕТВЯЩИХСЯ вершин дерева выбираем вершину с минимальным весом. Но не забываем про другие вершины, так как они будут сравниваться в дальнейшем решении. Также каждая вершина содержит свою состояние матрицы смежности.

В нашем случае это будет вершина с весом 113 и Матрицей 5.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** |  | 0 | 6 | 0 |
| **2** | 0 |  | 0 | 62 |
| **3** | 0 | 9 |  | 47 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | INF |

Матрица 7

1. Проводим редукцию строк и столбцов. Рассчитываем локальную нижнюю границу

Н3=Н2 + Σhi +  Σhj = 113 + 0 = 113

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** | **hi** |
| **1** |  | 0 | 6 | 0 | 0 |
| **2** | 0 |  | 0 | 62 | 0 |
| **3** | 0 | 9 |  | 47 | 0 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | INF | 0 |
| **hj** | 0 | 0 | 0 | 0 |  |

Матрица 8

1. Оцениваем степени нулевых значений

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** |  | 0(8) | 6 | 0(47) |
| **2** | 0(0) |  | 0(1) | 62 |
| **3** | 0(9) | 9 |  | 47 |
| **4** | 0(1) | 8 | 1 | INF |

Матрица 9

Выбираем максимальную степень. Это 47. В итоге: если мы не включим в маршрут ребро 1-5 то получим штраф +47 к удлинению маршрута.

При включении 1-5 матрица будет выглядеть так:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0 |  | 0 |
| **3** | 0 | 9 |  |
| **4** | 0 | 8 | 1 |

Матрица 10

При невключении 1\*-5\* получим матрицу и удлинение маршрута 172+47= 219

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **5** |
| **1** |  | 0 | 6 | INF |
| **2** | 0 |  | 0 | 62 |
| **3** | 0 | 9 |  | 47 |
| **4** | 0 | 8 | 1 | INF |

Матрица 11

1. Получим следующее дерево:

Корень дерева решения

Н=113

5-4

113

Матрица 5

5\*-4\*

172

Матрица 6

1\*-5\*

219

Матрица 11

1-5

113

Матрица 10

1. Выбираем вершину с наименьшим весом: 113 и матрица 10.

Проводим редукцию строк, а затем столбцов.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** | **hi** |
| **2** | 0 |  | 0 | 0 |
| **3** | 0 | 1 |  | 0 |
| **4** | 0 | 0 | 1 | 0 |
| **hj** | 0 | 8 | 0 |  |

Матрица 12

1. Рассчитываем локальную нижнюю границу: H4=H3+ Σhi +  Σhj = 113 + 8 = 121

Оцениваем нулевые значения:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0(0) |  | 0(1) |
| **3** | 0(1) | 1 |  |
| **4** | 0(1) | 0(2) | 1 |

Матрица 13

Выбираем максимальную оценку. Это 2. Значит если мы не включим ребро 4-2 в маршрут то получим штраф к удлинению маршрута +2.

Тогда если мы включим ребро 4-2 то получим матрицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **3** |
| **2** | 0(0) | 0(1) |
| **3** | 0(1) |  |

Матрица 14

Если не включим ребро 4\*-2\* то маршрут увеличиться до 121 + 2 = 123 и получим матрицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **2** | **3** |
| **2** | 0(0) |  | 0(1) |
| **3** | 0(1) | 1 |  |
| **4** | 0(1) | INF | 1 |

Матрица 15

1. Достроим дерево:

Корень дерева решения

Н=113

5\*-4\*

172

Матрица 6

5-4

113

Матрица 5

1\*-5\*

219

Матрица 11

1-5

113

Матрица 10

4\*-2\*

123

Матрица 15

4-2

121

Матрица 14

1. Выбираем минимальную вершину с матрицей 14 и весом 121.

Проводим редукцию строк и столбцов(ничего не изменится тк остались нули),

Проводим оценку нулевых значений(везде будет 0 тк везде нули).

Локальная нижняя граница никак не изменится Н5=Н4+0 = 121

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **3** |
| **2** | 0(0) | 0(0) |
| **3** | 0(0) |  |

Матрица 16

Так как оценки везде равны ,то выбираем любое ребро, Пусть это будет ребро 2-1

В нашем случаем неважно возьмем мы его или нет(вообще это можно сказать про все оставшиеся ребра).

1. Включаем ребро 2-1 в маршрут и получаем матрицу:

|  |  |
| --- | --- |
| **Город** | **3** |
| **3** |  |

Матрица 17

Если не включаем то получим следующую матрицу:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **3** |
| **2** | INF | 0(0) |
| **3** | 0(0) |  |

Матрица 18

.В обоих случаях у нас остается вершина 3

1. Конечный вид дерева:

Корень дерева решения

Н=113

5\*-4\*

172

Матрица 6

5-4

113

Матрица 5

1\*-5\*

219

Матрица 11

1-5

113

Матрица 10

4\*-2\*

123

Матрица 15

4-2

121

Матрица 14

2-1

121

Матрица 17

2\*-1\*

121

Матрица 18

1. Так как в матрице 17 остается только вершина 3, то выберем другую ветвь с невключением и выберем матрицу 18.

Проведем редукцию столбцов и строк , но ничего не изменится.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **3** | **hi** |
| **2** | INF | 0(0) | 0 |
| **3** | 0(0) |  | 0 |
| **hj** | 0 | 0 |  |

Матрица 19

1. Далее проводим оценку нулевых значений и в нашем случае уже учитываем INF так как оно единственное

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Город** | **1** | **3** |
| **2** | INF | 0(INF) |
| **3** | 0(INF) |  |

Матрица 20

Из ребер 2-3 и 3-1 можем выбрать любое так как их оценки одинаковы. Выберем ребро 2-3. Локальная нижняя граница останется такой же 121.

1. Дерево примет вид:

Корень дерева решения

Н=113

5\*-4\*

172

Матрица 6

5-4

113

Матрица 5

1\*-5\*

219

Матрица 11

1-5

113

Матрица 10

4\*-2\*

123

Матрица 15

4-2

121

Матрица 14

2\*-1\*

121

Матрица 18

2-1

121

Матрица 17

3-1

121

Матрица 22

2-3

121

Матрица 21

3-3

тупик

121

Матрица 18

2-3

121

Матрица 21

3-1

121

Матрица 22

1. Получим матрицу:

|  |  |
| --- | --- |
| **Город** | **1** |
| **3** | 0(INF) |

Матрица 21

В матрице осталось единственное ребро 3-1 так что добавляем его в маршрут

1. Так как в матрице не осталось элементов то алгоритм можно считать завершенным.

По итогу получаем конечный маршрут 1-5-4-2-3-1 или 3-1-5-4-2-3. Оба маршрута будут иметь стоимость 121.