补充讲义

日期: 2025 年 10 月 16 号

定理 1 (行列式可按任意行展开)**.** 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 则对任意 $1\le i\le n$ 有

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}. \tag{1}$$

证明. 用归纳法. 结论对 $n=1$ 显然成立. 设结论对任意 $n-1$ 阶方阵成立, 要证结论对任意 n 阶方阵也成立. 若 $i=1$, 则等式(1)即为定义. 不妨设 $i\ge 2$. 首先引入如下记号: 对任意 $1\le i_1<i_2\le n$, $1\le j_1<j_2\le n$, 令 $M\left(\begin{smallmatrix} i_1 & i_2\\ j_1 & j_2\end{smallmatrix}\right)$ 为从 A 中删去第 i_1,i_2 行, 第 j_1,j_2 列所得的 $(n-2)$ 阶子方阵的行列式.

下面开始证明. 由定义有

$$\det(A)=\sum_{j_1=1}^{n}(-1)^{j_1+1}a_{1j_1}M_{1j_1}.$$

对任意 $1\le j_1\le n$, 由归纳假设将 M_{1j_1} 所对应的 $n-1$ 阶方阵按第 $i-1$ 行展开得

$$\begin{aligned}M_{1j_1}&=\sum_{j_2=1}^{j_1-1}(-1)^{i-1+j_2}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_2 & j_1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{j_2=j_1+1}^{n}(-1)^{i-1+j_2-1}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_1 & j_2\end{smallmatrix}\right)\\ &=\sum_{j_2=1}^{j_1-1}(-1)^{i+j_2-1}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_2 & j_1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{j_2=j_1+1}^{n}(-1)^{i+j_2}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_1 & j_2\end{smallmatrix}\right).\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\det(A)&=\sum_{j_1=1}^{n}(-1)^{j_1+1}a_{1j_1}\left(\sum_{j_2=1}^{j_1-1}(-1)^{i+j_2-1}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_2 & j_1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{j_2=j_1+1}^{n}(-1)^{i+j_2}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_1 & j_2\end{smallmatrix}\right)\right)\\ &=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=1}^{j_1-1}(-1)^{i+j_1+j_2}a_{1j_1}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_2 & j_1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{j_2=j_1+1}^{n}(-1)^{i+j_1+j_2+1}a_{1j_1}a_{ij_2}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_1 & j_2\end{smallmatrix}\right).\end{aligned}$$

交换求和顺序得

$$\det(A)=\sum_{j_2=1}^{n}(-1)^{i+j_2}a_{ij_2}\left(\sum_{j_1=j_2+1}^{n}(-1)^{j_1}a_{1j_1}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_2 & j_1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{j_1=1}^{j_2-1}(-1)^{j_1+1}a_{1j_1}M\left(\begin{smallmatrix} 1 & i\\ j_1 & j_2\end{smallmatrix}\right)\right).$$

注意到上述括号里的求和为将余子式 M_{ij_2} 所对应的 $n-1$ 阶方阵按第一行展开计算行列式所得到的公式, 从而由行列式定义可知该求和等于 M_{ij_2}. 即

$$\det(A) = \sum_{j_2=1}^{n} (-1)^{i+j_2} a_{ij_2} M_{ij_2} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

即为所要证等式. $\square$