作业 8a

提交日期: 2025 年 11 月 11 号

讲义习题四 (第 132 页): 49, 50 (49 题提示: 考虑矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} AB & \\ & I_n \end{smallmatrix}\right)$, 尝试通过分块矩阵的初等行列变换将其约化为 $\left(\begin{smallmatrix} -B & I_n \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ 或类似形式.)
讲义习题五 (第 172-173 页): 1, 2, 3, 4

作业 1. 给定 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \vec{b} \in \mathbb{F}^n$, 证明 $\vec{b} + \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle$ 为 $\mathbb{F}^n$ 的子空间当且仅当 $\vec{b} \in \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle$, 其中

$$\vec{b} + \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle := \left\{ \vec{b} + \lambda_1 \vec{a}_1 + \cdots + \lambda_m \vec{a}_m : \lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{F} \right\}.$$

作业 2. 给定 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \in \mathbb{F}^n$, 令 $A = (\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m) \in \mathrm{M}_{n \times m}(\mathbb{F})$ 为 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 作为列向量构成的 $n \times m$ 阶矩阵. 证明 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 线性相关当且仅当 *(齐次)* 线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 存在非零解.