11a12a12b 线性代数习题课讲义

韦宇桐

2025 年 12 月 9 日

11b

1. 判断线性变换

判断下面所定义的变换 $\mathscr{A}$，哪些是线性的，哪些不是线性的。

1. 在 $\mathbb{R}^2$ 中，$\mathscr{A}(x,y)^T=(x+y,x^2)^T$；
2. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\mathscr{A}(x,y,z)^T=(3x-2y+z,0,x+2y)^T$；
3. 在 $\mathbb{R}^3$ 中，$\mathscr{A}(x,y,z)^T=(x-y,z,x+1)^T$。

解：

1. 不是线性变换。因为 $(x+y,x^2)$ 中第二个分量 x^2 不是线性函数，例如取 $\alpha=(1,0)^T$，则 $\mathscr{A}(2\alpha)=(2,4)^T$，而 $2\mathscr{A}(\alpha)=2(1,1)^T=(2,2)^T$，两者不等。
2. 是线性变换。可以写成矩阵形式 $\mathscr{A}(x,y,z)^T=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$，所以是线性变换。
3. 不是线性变换。因为 $\mathscr{A}(0,0,0)^T=(0,0,1)^T\neq(0,0,0)^T$，线性变换必须将零向量映为零向量。

6. 平面对称变换

在三维几何空间的直角坐标系中，求关于平面 $x+2y+3z=0$ 的对称变换。

解: 平面法向量 $\vec{n}=(1,2,3)^T$。点 $(x,y,z)^T$ 关于平面的对称点 $(x',y',z')^T$ 满足下面的关系（由于 $(x,y,z)^T$ 沿着法方向移动两倍点到平面的距离得到 $(x',y',z')^T$）：

$$(x',y',z')^T=(x,y,z)^T-2\frac{x+2y+3z}{1^2+2^2+3^2}(1,2,3)^T=(x,y,z)^T-\frac{x+2y+3z}{7}(1,2,3)^T.$$

所以对称变换为：

$$\mathscr{A}(x,y,z)^T=\left(x-\frac{x+2y+3z}{7},\ y-\frac{2(x+2y+3z)}{7},\ z-\frac{3(x+2y+3z)}{7}\right)^T.$$

9. 拉伸与压缩变换

求 $\mathbb{R}^3$ 中如下线性变换 $\mathscr{A}$：沿方向 $(1,1,0)$ 拉伸 2 倍，沿方向 $(1,-1,1)$ 压缩 2 倍，沿方向 $(1,-1,-2)$ 拉伸 3 倍。

解: 设三个方向向量为 $\vec{v}_1=(1,1,0)^T,\vec{v}_2=(1,-1,1)^T,\vec{v}_3=(1,-1,-2)^T$。它们线性无关，构成 $\mathbb{R}^3$ 的一组基。在这组基下，变换矩阵为：

$$\Lambda=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

11. 像空间与核空间

给定 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}(x,y,z)^T=(2x+y-z,x+2y+z,4x+5y+z)^T$。求 $\mathscr{A}$ 的像空间与核空间的维数及一组基。

解: 变换矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\4&5&1\end{pmatrix}$。

1. 像空间：即 A 的列空间。对 A 进行行化简：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   秩为 2，所以像空间维数为 2。一组基可取为 A 的前两列：$(2,1,4)^T$ 和 $(1,2,5)^T$。

2. 核空间：即齐次线性方程组 $A\vec{x} = \vec{0}$ 的解空间。由行简化阶梯形得：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

   令 $x_3 = 1$，则 $x_2 = -1$，$x_1 = 1$。所以核空间维数为 1，一组基为 $(1,-1,1)^T$。

12. 投影变换不可逆

证明：从高维数组空间到低维数组空间的投影变换不是可逆变换。

证明： 设投影变换 $\mathscr{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$，且 $n > m$。由于 $\dim(\mathbb{R}^n) = n > m = \dim(\mathbb{R}^m)$，根据线性变换的性质，$\mathscr{A}$ 不可能是单射（因为核空间维数至少为 $n - m > 0$），从而不是一一映射，故不存在逆变换。

35. 判断线性变换

判断下面所定义的变换，哪些是线性的，哪些不是线性的。

1. 取定 $A, B \in M_n(F)$，对每个 $x \in M_n(F)$，$\mathscr{A}(x) = Ax - xB$；

2. 在线性空间 V 中，$\mathscr{A}(x) = \alpha$，其中 α 为 V 中一个固定的向量。

解：

1. 是线性变换。因为对于任意 $x, y \in M_n(F)$ 和 $k \in F$，有

$$\mathscr{A}(x+y) = A(x+y)-(x+y)B = Ax+Ay-xB-yB = (Ax-xB)+(Ay-yB) = \mathscr{A}(x)+\mathscr{A}(y$$

$$\mathscr{A}(kx) = A(kx) - (kx)B = k(Ax - xB) = k\mathscr{A}(x).$$

2. 不是线性变换（除非 $\alpha = 0$）。因为对于任意 $x \in V$，$\mathscr{A}(x) = \alpha$，则 $\mathscr{A}(0) = \alpha$，而线性变换必须满足 $\mathscr{A}(0) = 0$。当 $\alpha \neq 0$ 时，不满足此条件。

36. 求线性变换在指定基下的矩阵

求下列线性变换在所指定的基下的矩阵：

1. 在 $F_n[x]$ 中，$\mathscr{A}(P(x)) = P'(x)$，在基 $e_0 = 1, e_1 = x, \ldots, e_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ 下；

2. 以四个线性无关的函数 $\alpha_1 = e^{ax}\cos bx, \alpha_2 = e^{ax}\sin bx, \alpha_3 = xe^{ax}\cos bx$, $\alpha_4 = xe^{ax}\sin bx$ 为基的四维空间中，线性变换为微分变换。

3. 给定 2 阶实方阵 A，求 2 阶实方阵构成的线性空间上的线性变换 $\mathscr{A}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} - \mathbf{x}A$ 在基

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

下的矩阵。

第一小问解：

1. 对基向量求导：$\mathscr{A}(e_k) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^k}{k!}\right) = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = e_{k-1}$，其中 $k = 0, 1, \ldots, n-1$，规定 $e_{-1} = 0$。

2. 所以变换矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}.$$

第二小问解：

1. 计算微分：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\alpha_1) &= ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx = a\alpha_1 - b\alpha_2, \\
\mathscr{A}(\alpha_2) &= ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx = b\alpha_1 + a\alpha_2, \\
\mathscr{A}(\alpha_3) &= e^{ax}\cos bx + axe^{ax}\cos bx - bxe^{ax}\sin bx = \alpha_1 + a\alpha_3 - b\alpha_4, \\
\mathscr{A}(\alpha_4) &= e^{ax}\sin bx + axe^{ax}\sin bx + bxe^{ax}\cos bx = \alpha_2 + b\alpha_3 + a\alpha_4.
\end{aligned}$$

2. 所以变换矩阵为：

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}.$$

第三小问解：

1. 对 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(e_1) &= Ae_1 - e_1A \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 \cdot e_1 - b \cdot e_2 + c \cdot e_3 + 0 \cdot e_4.
\end{aligned}$$

2. 对 $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(e_2) &= Ae_2 - e_2A \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} \\
&= -c \cdot e_1 + (a-d) \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 + c \cdot e_4.
\end{aligned}$$

3. 对 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(e_3) &= Ae_3 - e_3A \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} \\
&= b \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + (d-a) \cdot e_3 - b \cdot e_4.
\end{aligned}$$

4. 对 $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(e_4) &= Ae_4 - e_4A \\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \\
&= 0 \cdot e_1 + b \cdot e_2 - c \cdot e_3 + 0 \cdot e_4.
\end{aligned}$$

将以上四个结果按列排列，得到线性变换 $\mathscr{A}$ 在给定基下的矩阵为

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}.$$

其中，矩阵 M 的第 1、2、3、4 列分别对应 $\mathscr{A}(e_1)$、$\mathscr{A}(e_2)$、$\mathscr{A}(e_3)$、$\mathscr{A}(e_4)$ 在基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的坐标。

37. 求线性变换在自然基下的矩阵

在 $\mathbb{R}^3$ 中定义线性变换

$$\mathscr{A}(x, y, z)^T = (x + 2y, x - 3z, 2y - z)^T.$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)^T$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)^T$ 下的矩阵。

解： 计算变换在基下的像：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\mathbf{e}_1) &= (1, 1, 0)^T = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \\
\mathscr{A}(\mathbf{e}_2) &= (2, 0, 2)^T = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_3, \\
\mathscr{A}(\mathbf{e}_3) &= (0, -3, -1)^T = -3\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3.
\end{aligned}$$

所以矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

作业 1. 核是子空间

设 V,W 是数域 F 上的两个线性空间，$\mathcal{A}:V\to W$ 为从 V 到 W 的线性映射。证明 $\mathcal{A}$ 的核

$$\ker(\mathcal{A}):=\{\alpha\in V:\mathcal{A}(\alpha)=\theta_W\}$$

为 V 的子空间。这里 θ_W 是线性空间 W 中的零向量。

证明： 需要验证 $\ker(\mathcal{A})$ 对加法和数乘封闭。

1. 零向量：因为 $\mathcal{A}(\theta_V)=\theta_W$，所以 $\theta_V\in\ker(\mathcal{A})$。
2. 加法封闭：若 $\alpha,\beta\in\ker(\mathcal{A})$，则 $\mathcal{A}(\alpha+\beta)=\mathcal{A}(\alpha)+\mathcal{A}(\beta)=\theta_W+\theta_W=\theta_W$，所以 $\alpha+\beta\in\ker(\mathcal{A})$。
3. 数乘封闭：若 $\alpha\in\ker(\mathcal{A})$，$k\in F$，则 $\mathcal{A}(k\alpha)=k\mathcal{A}(\alpha)=k\theta_W=\theta_W$，所以 $k\alpha\in\ker(\mathcal{A})$。

因此，$\ker(\mathcal{A})$ 是 V 的子空间。

12a

14. 单位圆在线性变换下的像

给定 $\mathbb{R}^2$ 上的线性变换 $\mathscr{A}(x,y)^T=(3x+2y,2x+y)^T$ 将单位圆 C 映射为椭圆 C'。求椭圆 C' 的长短半轴方向与长度，以及椭圆的面积。

几何解释： 线性变换 A 将单位圆映射为一个椭圆。这是因为线性变换可以看作是对平面的拉伸、压缩和旋转的组合。单位圆是标准正交基下的

单位球，在线性变换下，其像是一个椭球（在二维情况下为椭圆），椭圆的轴长和方向由变换矩阵的性质决定。

解：

(貌似这题我写复杂了，大家对一下答案即可。)

设线性变换后的坐标为 $(u,v)^T$，即

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathscr{A}(x,y)^T = \begin{pmatrix} 3x+2y \\ 2x+y \end{pmatrix}.$$

记变换矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，则上式可写为

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

单位圆 C 的方程为

$$x^2+y^2=1.$$

为了得到椭圆 C' 的方程，需要从变换式中解出 $(x,y)^T$ 用 $(u,v)^T$ 表示。由 $(u,v)^T = A(x,y)^T$，可得

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

计算 A 的逆矩阵：

$$A^{-1} = \frac{1}{3\cdot 1 - 2\cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

于是

$$x = -u+2v, \quad y = 2u-3v.$$

将 x,y 的表达式代入单位圆方程 $x^2+y^2=1$，得

$$(-u+2v)^2 + (2u-3v)^2 = 1.$$

展开整理：

$$
\begin{aligned}
(-u+2v)^2+(2u-3v)^2 &= (u^2-4uv+4v^2)+(4u^2-12uv+9v^2)\\
&= 5u^2-16uv+13v^2=1.
\end{aligned}
$$

所以椭圆 C' 的方程为

$$
5u^2-16uv+13v^2=1. \tag{1}
$$

为了求出椭圆的长短半轴，将方程 (1) 写成二次型形式：

$$
\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=1.
$$

记对称矩阵 $M=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ -8 & 13 \end{pmatrix}$。

我们需要将 M 正交对角化，即找到旋转矩阵 R（满足 $R^TR=I$，$\det(R)=1$）和对角矩阵 Λ，使得 $M=R\Lambda R^T$。这样，椭圆的方程可以化为标准形式。

步骤 1：求 M 的特征值和特征向量

计算 M 的特征值，解特征方程 $\det(M-\lambda I)=0$：

$$
\det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -8 \\ -8 & 13-\lambda \end{pmatrix}=(5-\lambda)(13-\lambda)-64=\lambda^2-18\lambda+1=0.
$$

解得

$$
\lambda_1=9+4\sqrt{5},\quad \lambda_2=9-4\sqrt{5}.
$$

对于 $\lambda_1=9+4\sqrt{5}$，解 $(M-\lambda_1 I)\mathbf{x}=0$：

$$
\begin{pmatrix} 5-\lambda_1 & -8 \\ -8 & 13-\lambda_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4-4\sqrt{5} & -8 \\ -8 & 4-4\sqrt{5} \end{pmatrix}.
$$

由第一行方程 $(-4-4\sqrt{5})x_1-8x_2=0$, 取 $x_1=1$, 则 $x_2=-\frac{4+4\sqrt{5}}{8}=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。所以特征向量为 $\mathbf{v}_1=\left(1,\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^T$。

对于 $\lambda_2 = 9 - 4\sqrt{5}$，解 $(M - \lambda_2 I)\mathbf{x} = 0$：

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda_2 & -8 \\ -8 & 13-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+4\sqrt{5} & -8 \\ -8 & 4+4\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

由第一行方程 $(-4+4\sqrt{5})x_1 - 8x_2 = 0$，取 $x_1 = 1$，则 $x_2 = \frac{4\sqrt{5}-4}{8} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$。所以特征向量为 $\mathbf{v}_2 = \left(1, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^T$。

步骤 2：构造正交矩阵 R

已经计算得 M 的特征值：

$$\lambda_1 = 9 + 4\sqrt{5}, \quad \lambda_2 = 9 - 4\sqrt{5}.$$

及对应的特征向量为：

$$\mathbf{v}_1 = \left(1, \quad -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^T, \quad \mathbf{v}_2 = \left(1, \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^T.$$

这两个特征向量正交。将它们单位化，得到标准正交基：

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}.$$

由于 $\mathbf{e}_1$ 和 $\mathbf{e}_2$ 正交，可以构造正交矩阵 $R = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$,R 为旋转矩阵。

步骤 3：将椭圆方程化为标准形式

由 $M = R\Lambda R^T$，其中 $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$。代入椭圆方程：

$$\mathbf{y}^T R\Lambda R^T \mathbf{y} = 1, \quad \mathbf{y} = (u, v)^T.$$

作正交变换 $\mathbf{y}' = R^T\mathbf{y}$，即 $\mathbf{y} = R\mathbf{y}'$，则方程化为标准形式：

$$\mathbf{y}'^T \Lambda \mathbf{y}' = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 u'^2 + \lambda_2 v'^2 = 1.$$

由于 $\lambda_2 < \lambda_1$，椭圆长轴在 v' 方向，短轴在 u' 方向。半长轴和半短轴分别为：

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{5}+2, \quad b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{9-4\sqrt{5}} = \sqrt{5}-2.$$

长轴方向为 $\mathbf{e}_2$ 的方向，即向量 $(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2})^T$ 的方向；短轴方向为 $\mathbf{e}_1$ 的方向，即向量 $(1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2})^T$ 的方向。

椭圆面积为：

$$S = \pi ab = \pi\sqrt{81-80} = \pi.$$

总结：椭圆 C' 的长半轴长度为 $\sqrt{5}+2$，方向沿 $(1, \frac{\sqrt{5}-1}{2})^T$；短半轴长度为 $\sqrt{5}-2$，方向沿 $(1, -\frac{1+\sqrt{5}}{2})^T$；椭圆面积为 π。

38. 求线性变换在给定基下的矩阵

设 $\mathbb{R}^3$ 中的线性变换 $\mathscr{A}$ 将

$$\alpha_1 = (0,0,1)^T, \quad \alpha_2 = (0,1,1)^T, \quad \alpha_3 = (1,1,1)^T$$

变换到

$$\beta_1 = (2,3,5)^T, \quad \beta_2 = (1,0,0)^T, \quad \beta_3 = (0,1,-1)^T.$$

求 $\mathscr{A}$ 在自然基和 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵。

解：设

$$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

已知 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的像为 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，即

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

设 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ 下的矩阵为 A，则

$$(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)A,$$

即

$$A = P^{-1}(\beta_1, \beta_2, \beta_3).$$

1. 计算 P^{-1}： 由 $P=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，通过求解线性方程组或利用伴随矩阵，得

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

2. 计算 A：

$$A=P^{-1}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}.$$

3. 计算在自然基下的矩阵 B： 在自然基下，$\mathscr{A}$ 的矩阵 B 满足 $B=PAP^{-1}$(注意，这个地方容易搞混，请仔细对照定理 6.4.5)。

先计算 PA:

$$PA=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}.$$

然后

$$B=(PA)P^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&0\\3&0&1\\5&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-3&3\\-1&-5&5\end{pmatrix}.$$

因此，$\mathscr{A}$ 在基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&-1&1\\2&1&0\end{pmatrix},$$

在自然基下的矩阵为

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

注意，这里用到了书上定理 6.4.5，这个定理很重要，而且容易搞混

[定理 6.4.5] 设线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的两组基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 下的矩阵分别为 A 和 B。设基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 的过渡矩阵为 T，即

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)T.$$

则

$$B = T^{-1}AT.$$

即矩阵 A 与 B 相似。

39. 基变换下的矩阵

设线性变换 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1 = (1, -1), \alpha_2 = (1, 1)$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1 = (2, 0), \beta_2 = (-1, 1)$ 下的矩阵。

解： 设从基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 到基 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 的过渡矩阵为 P，即 $(\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2)P$。计算得 $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$。设 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 下的矩阵为 B，则 $B = P^{-1}AP$，其中 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。计算 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，于是

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

40. 基变换下的矩阵（两种情况）

设 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$$

求 $\mathscr{A}$ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的矩阵:

1. $\beta_1 = \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1, \beta_3 = \alpha_2$;

2. $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_2 - \alpha_3$.

解:

1. 过渡矩阵 P 满足 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$,由条件知 $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$。

   则 $\mathscr{A}$ 在基 $\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ 下的矩阵为 $B = P^{-1}AP$。计算 $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

   所以

   $$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. 过渡矩阵 P 满足 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)P$,由条件知 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$。

则 $B=P^{-1}AP$。计算 $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$，所以

$$B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&4&6\\1&1&8\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}$$

即 $B=\begin{pmatrix}1&5&-1\\\frac{1}{2}&\frac{9}{2}&-\frac{7}{2}\\-\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$。

41. 线性变换在不同基下的矩阵

在 $\mathbb{R}^3$ 中给定两组基：

$$\alpha_1=(1,0,1)^T,\quad \alpha_2=(2,1,0)^T,\quad \alpha_3=(1,1,1)^T;$$

$$\beta_1=(2,3,1)^T,\quad \beta_2=(7,9,5)^T,\quad \beta_3=(3,4,3)^T.$$

定义线性变换 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i\ (i=1,2,3)$。

(1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵；

(2) 求 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵。

解： (1) 设 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的矩阵为 A，即

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A.$$

由已知条件，$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，所以

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A.$$

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$，$Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}$，则 $Q=PA$，于是 $A=P^{-1}Q$。

计算 P^{-1}：

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\-1&0&1\\1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

于是

$$A=P^{-1}Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3&-1\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&8&4\end{pmatrix}.$$

(2) 设 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵为 B。由基变换关系，从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵为 T，满足 $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)T$。由 (1) 知 $T=A$。根据定理 6.4.5，$B=T^{-1}AT$。因为 $T=A$，所以

$$B=A^{-1}AA=A.$$

因此 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵也是

$$B=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3&-1\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&8&4\end{pmatrix}.$$

验证：可以验证 $PA=Q$，即

$$\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}&-3&-1\\\frac{1}{2}&1&0\\\frac{5}{2}&8&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7&3\\3&9&4\\1&5&3\end{pmatrix},$$

成立。所以 A 正确。

42. 幂零变换的矩阵表示

设 V 为 n 维线性空间，$\mathscr{A}: V \to V$ 为线性变换。若存在 $\alpha \in V$，使得 $\mathscr{A}^{n-1}\alpha \neq 0$，但是 $\mathscr{A}^n(\alpha) = 0$，证明：$\mathscr{A}$ 在某组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

证明： 考虑向量组 $\alpha, \mathscr{A}\alpha, \mathscr{A}^2\alpha, \ldots, \mathscr{A}^{n-1}\alpha$。我们证明它们线性无关，从而构成 V 的一组基。

假设存在常数 $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$，使得

$$k_0\alpha + k_1\mathscr{A}\alpha + k_2\mathscr{A}^2\alpha + \cdots + k_{n-1}\mathscr{A}^{n-1}\alpha = 0.$$

用 $\mathscr{A}^{n-1}$ 作用上式，由于 $\mathscr{A}^n\alpha = 0$，更高次幂也为零，得

$$k_0\mathscr{A}^{n-1}\alpha = 0.$$

因为 $\mathscr{A}^{n-1}\alpha \neq 0$，所以 $k_0 = 0$。然后依次用 $\mathscr{A}^{n-2}, \ldots, \mathscr{A}^0$ 作用，可得 $k_1 = 0, k_2 = 0, \ldots, k_{n-1} = 0$。因此这 n 个向量线性无关，是 V 的一组基。

现在求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵。计算：

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\alpha) &= 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \mathscr{A}\alpha + 0 \cdot \mathscr{A}^2\alpha + \cdots + 0 \cdot \mathscr{A}^{n-1}\alpha, \\
\mathscr{A}(\mathscr{A}\alpha) &= 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \mathscr{A}\alpha + 1 \cdot \mathscr{A}^2\alpha + \cdots + 0 \cdot \mathscr{A}^{n-1}\alpha, \\
&\vdots \\
\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-2}\alpha) &= 0 \cdot \alpha + 0 \cdot \mathscr{A}\alpha + \cdots + 0 \cdot \mathscr{A}^{n-2}\alpha + 1 \cdot \mathscr{A}^{n-1}\alpha, \\
\mathscr{A}(\mathscr{A}^{n-1}\alpha) &= \mathscr{A}^n\alpha = 0.
\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

但注意题目中给出的矩阵是上次对角线为 1，其余为 0。而上面得到的矩阵是次对角线下方为 1，即通常的 Jordan 块。实际上，如果调整基的次序为 $\mathscr{A}^{n-1}\alpha, \mathscr{A}^{n-2}\alpha, \dots, \alpha$（即倒序），则矩阵变为上次对角线为 1 的形式。具体地，取新基为：

$$\varepsilon_1 = \mathscr{A}^{n-1}\alpha, \quad \varepsilon_2 = \mathscr{A}^{n-2}\alpha, \quad \dots, \quad \varepsilon_n = \alpha.$$

则

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\varepsilon_1) &= \mathscr{A}^n\alpha = 0, \\ \mathscr{A}(\varepsilon_2) &= \mathscr{A}^{n-1}\alpha = \varepsilon_1, \\ \mathscr{A}(\varepsilon_3) &= \mathscr{A}^{n-2}\alpha = \varepsilon_2, \\ &\vdots \\ \mathscr{A}(\varepsilon_n) &= \mathscr{A}\alpha = \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

于是 $\mathscr{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix},$$

即主对角线上方第一条对角线全为 1，其余为 0。这正是题目所要求的形式。

因此，结论得证。

作业 1. 线性映射与基变换

设 V,W 是数域 F 上的两个线性空间，$\mathcal{A}:V\to W$ 为从 V 到 W 的线性映射。向量组 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 与 $\{\alpha_1',\cdots,\alpha_n'\}$ 满足关系

$$(\alpha_1',\cdots,\alpha_n')=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$$

其中 $P=(p_{ij})$ 为一 $n\times n$ 阶矩阵。证明

$$(\mathcal{A}(\alpha_1'),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n'))=(\mathcal{A}(\alpha_1),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n))P.$$

证明： 由已知 $(\alpha_1',\cdots,\alpha_n')=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)P$，即

$$\alpha_j'=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_i,\quad j=1,\ldots,n.$$

由于 $\mathcal{A}$ 是线性映射，有

$$\mathcal{A}(\alpha_j')=\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\alpha_i\right)=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}\mathcal{A}(\alpha_i),\quad j=1,\ldots,n.$$

写成矩阵形式即为

$$(\mathcal{A}(\alpha_1'),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n'))=(\mathcal{A}(\alpha_1),\cdots,\mathcal{A}(\alpha_n))P.$$

12b

13. 求下列矩阵的全部特征值和特征向量（只做 (2)(3)(4)(6)）

(2) $A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$

解： 特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \lambda-\cos\theta\end{vmatrix}=(\lambda-\cos\theta)^2+\sin^2\theta=\lambda^2-2\lambda\cos\theta+1.$$

特征值 $\lambda_{1,2} = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$。

对于 $\lambda_1 = e^{i\theta}$，解 $(e^{i\theta}I - A)x = 0$：

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & e^{i\theta} - \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\sin\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & i\sin\theta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

特征向量 $k\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$，$k \neq 0$。

对于 $\lambda_2 = e^{-i\theta}$，类似得特征向量 $k\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$，$k \neq 0$。

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

解： 特征多项式

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1).$$

特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$，$\lambda_3 = -1$。

对于 $\lambda = 1$，解 $(I - A)x = 0$：

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

特征向量 $k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_1, k_2$ 不全为零。

对于 $\lambda = -1$，解 $(-I - A)x = 0$：

$$-I - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

特征向量 $k\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$，$k\neq 0$。

(4) $A=\begin{pmatrix}3&-2&1\\2&-2&2\\3&-6&5\end{pmatrix}$

解： 特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&2&-1\\-2&\lambda+2&-2\\-3&6&\lambda-5\end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-2)^3.$$

特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=2$。

对于 $\lambda=2$，解 $(2I-A)x=0$：

$$2I-A=\begin{pmatrix}-1&2&-1\\-2&4&-2\\-3&6&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

特征向量 $k_1\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 不全为零。

(6) $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$

解： 通过“观察”和“尝试”，发现 $\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ 为 2 的两个线性无关的特征向量。再计算 A 的行列式为 -8, 迹为 4，得到另外两个特征值为

$\sqrt{2}$ 和 $-\sqrt{2}$。经过计算，$\sqrt{2}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$，$-\sqrt{2}$ 对应的特征向量为 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$

16. 多项式矩阵的特征值

设 A 为方阵，$f(\lambda)$ 为多项式。证明：如果 λ_0 是 A 的特征值，则 $f(\lambda_0)$ 是 $f(A)$ 的特征值；且如果 x 是属于 λ_0 的特征向量，则 x 也是矩阵 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

证明： 设 $f(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$，则 $f(A) = a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I$。

若 $Ax = \lambda_0 x$，则 $A^k x = \lambda_0^k x$（归纳法）。于是

$$f(A)x = (a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I)x = (a_n\lambda_0^n + a_{n-1}\lambda_0^{n-1} + \cdots + a_1\lambda_0 + a_0)x = f(\lambda_0)x.$$

所以 x 是 $f(A)$ 的属于特征值 $f(\lambda_0)$ 的特征向量。

17. 特征多项式应用

设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-2)$。求方阵 $3A+2I$ 的特征值与行列式。

解： 由已知，A 的特征值为 $1, 1, 2$。

设 $f(\lambda) = 3\lambda + 2$，则 $3A + 2I = f(A)$。由 16 题结论，$f(A)$ 的特征值为 $f(1) = 5$，$f(1) = 5$，$f(2) = 8$。

所以 $3A+2I$ 的特征值为 $5, 5, 8$，行列式 $\det(3A+2I) = 5\times5\times8 = 200$。

18. 特殊矩阵的特征值

(1) 若 $A^2 = I$，证明：A 的特征值只能是 ± 1。

证明： 设 λ 是 A 的特征值，x 为对应的特征向量，则 $Ax = \lambda x$。两边左乘 A 得 $A^2 x = \lambda A x = \lambda^2 x$。又 $A^2 = I$，所以 $Ix = x = \lambda^2 x$，即 $(\lambda^2 - 1)x = 0$。因 $x \neq 0$，故 $\lambda^2 = 1$，$\lambda = \pm 1$。

(2) 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^T = -A$，证明 A 的特征值为零或纯虚数。

证明： 设 λ 是 A 的特征值，x 为对应的特征向量，则 $Ax = \lambda x$。两边取共轭转置（注意 A 是实矩阵，$A^T = -A$）：$x^H A^H = \bar{\lambda} x^H$。由于 A 是实矩阵，$A^H = A^T = -A$，所以 $x^H(-A) = \bar{\lambda} x^H$，即 $-x^H A = \bar{\lambda} x^H$。右乘 x 得 $-x^H A x = \bar{\lambda} x^H x$。但 $x^H A x = \lambda x^H x$，代入得 $-\lambda x^H x = \bar{\lambda} x^H x$。因 $x^H x > 0$，故 $-\lambda = \bar{\lambda}$，即 $\lambda + \bar{\lambda} = 0$，所以 $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$，即 λ 为零或纯虚数。

19. 特征向量的线性组合

设 λ_1, λ_2 是方阵 A 的两个不同的特征值，$\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量。证明：$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量。

证明：（反证法）假设 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的属于特征值 μ 的特征向量，则

$$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \mu(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2).$$

另一方面，$A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = A\mathbf{x}_1 + A\mathbf{x}_2 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$。于是

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = \mu \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2.$$

即 $(\lambda_1 - \mu)\mathbf{x}_1 + (\lambda_2 - \mu)\mathbf{x}_2 = 0$。由于 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 属于不同特征值，故线性无关。所以 $\lambda_1 - \mu = 0$ 且 $\lambda_2 - \mu = 0$，得 $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$，与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾。因此假设不成立，$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量。

注：这里用到了一件事：不同特征值对应的特征向量是线性无关的，证明见书上引理 6.3.1。进一步地，如果每一个特征值都对应“足够多”的特征向量，那么矩阵可对角化。

23. 矩阵相似性

设 A, B 为同阶方阵，且 A 可逆。证明：AB 与 BA 相似。

证明： 因为 A 可逆，所以 A^{-1} 存在。考虑

$$A^{-1}(AB)A = (A^{-1}A)BA = I \cdot BA = BA.$$

即存在可逆矩阵 A 使得 $A^{-1}(AB)A = BA$，故 AB 与 BA 相似。

25. 相似矩阵的性质

设方阵 A 与 B 相似，证明：(1) 对每个正整数 k，A^k 相似于 B^k；(2) 对每个多项式 f，$f(A)$ 相似于 $f(B)$。

证明： 因为 A 与 B 相似，存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^{-1}AP$。(1) 对任意正整数 k，有

$$B^k = (P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP.$$

所以 A^k 与 B^k 相似。

(2) 设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$，则

$$f(B) = a_nB^n + a_{n-1}B^{n-1} + \cdots + a_1B + a_0I.$$

由 (1) 知 $B^k = P^{-1}A^kP$，故

$$\begin{aligned} f(B) &= a_nP^{-1}A^nP + a_{n-1}P^{-1}A^{n-1}P + \cdots + a_1P^{-1}AP + a_0I \\ &= P^{-1}(a_nA^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I)P = P^{-1}f(A)P. \end{aligned}$$

所以 $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似。

44. 多项式空间上的线性变换的特征值与特征向量

设 V 为次数不超过 2 的多项式构成的线性空间,线性变换 $\mathscr{A} : V \longrightarrow V$ 满足

$$\mathscr{A}(1) = x^2 + x + 3, \quad \mathscr{A}(x) = 2x + 1, \quad \mathscr{A}(x^2) = 2x^2 + 3.$$

求 $\mathscr{A}$ 的特征值和特征向量。

解： 取 V 的一组基 $\{1, x, x^2\}$。计算 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵表示：

$$\mathscr{A}(1) = x^2 + x + 3 = 3 \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot x^2,$$

$$\mathscr{A}(x) = 2x + 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2,$$

$$\mathscr{A}(x^2) = 2x^2 + 3 = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x + 2 \cdot x^2.$$

所以 $\mathscr{A}$ 在基 $\{1, x, x^2\}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

求 A 的特征值和特征向量。特征多项式：

$$\begin{aligned} |\lambda I - A| &= \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & -3 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 2)(\lambda^2 - 5\lambda + 2). \end{aligned}$$

特征值：$\lambda_1 = 2$，$\lambda_2 = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$，$\lambda_3 = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$。

对于 $\lambda = 2$，解 $(2I - A)x = 0$：

$$2I - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

得特征向量 $k\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$，对应多项式 $-3x + x^2$，即 $x^2 - 3x$。

对于 $\lambda = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$，对应多项式 $2x^2 + 2x + 1 + \sqrt{17}$

对于 $\lambda = \frac{5-\sqrt{17}}{2}$，对应多项式 $2x^2 + 2x + 1 - \sqrt{17}$。

45. 转置变换的特征值与特征向量

设 $V = F^{n\times n}$。(1) 证明：V 的变换 $\mathscr{A}: x \to x^T$ 是线性变换；(2) 求 $\mathscr{A}$ 的特征值与特征向量。$\mathscr{A}$ 是否可对角化?

解： (1) 对任意 $A, B \in V$，$k \in F$，有 $\mathscr{A}(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = \mathscr{A}(A) + \mathscr{A}(B)$，$\mathscr{A}(kA) = (kA)^T = kA^T = k\mathscr{A}(A)$，所以 $\mathscr{A}$ 是线性变换。

(2) 考虑 $\mathscr{A}^2$：$\mathscr{A}^2(x) = \mathscr{A}(x^T) = (x^T)^T = x$，即 $\mathscr{A}^2 = I$。所以 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^2 = I$，其最小多项式整除 $\lambda^2 - 1$，特征值只可能是 ± 1。

设 $\mathscr{A}(x) = \lambda x$，即 $x^T = \lambda x$。两边转置得 $x = \lambda x^T = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$，所以 $(\lambda^2 - 1)x = 0$。因 $x \neq 0$，故 $\lambda = \pm 1$。

对于 $\lambda = 1$，方程 $x^T = x$，即 x 是对称矩阵。所以特征子空间由所有对称矩阵组成，维数为 $\frac{n(n+1)}{2}$。

对于 $\lambda = -1$，方程 $x^T = -x$，即 x 是反对称矩阵。所以特征子空间由所有反对称矩阵组成，维数为 $\frac{n(n-1)}{2}$。

由于对称矩阵和反对称矩阵的和可以表示任意矩阵（实际上任意矩阵可分解为对称与反对称之和），且两个特征子空间的维数之和为 $\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2 = \dim V$，所以 $\mathscr{A}$ 可对角化。

补充内容：通过特征值，我们还可以知道什么信息？

谱半径

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 n 阶复数方阵 A 的所有特征值。$\rho(A) = \max_{1\le i\le n} |\lambda_i|$ 称为 A 的谱半径。证明：$\lim\limits_{k\to+\infty} A^k = O$(零矩阵)的充分必要条件是 $\rho(A) < 1$。

证明：

必要性： 假设 $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = O$。设 λ 是 A 的任一特征值，对应的特征向量为 $x \neq 0$，则 $A^k x = \lambda^k x$。两边取极限得 $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda^k x = 0$。由于 $x \neq 0$，必有 $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda^k = 0$，从而 $|\lambda| < 1$。由 λ 的任意性，得 $\rho(A) < 1$。

充分性： 设 $\rho(A) < 1$。由若尔当标准型理论，存在可逆矩阵 P 使得 $A = PJP^{-1}$，其中 $J = \text{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_m)$ 是若尔当标准型，每个若尔当块 J_i 形如

$$J_i = \lambda_i I_{n_i} + N_{n_i},$$

这里 λ_i 是特征值，N_{n_i} 是幂零矩阵（只有上次对角线为 1，其余为 0）。则 $A^k = PJ^kP^{-1}$，且 $J^k = \text{diag}(J_1^k, J_2^k, \ldots, J_m^k)$。对每个若尔当块，

$$J_i^k = (\lambda_i I + N)^k = \sum_{t=0}^{n_i-1} \binom{k}{t} \lambda_i^{k-t} N^t,$$

当 $k \geq n_i - 1$ 时成立。由于 $|\lambda_i| \leq \rho(A) < 1$，故 $\lambda_i^{k-t} \to 0$。并且：

- $\binom{k}{t}$：这是关于 k 的 t 次多项式。当 t 固定时，$\binom{k}{t} = \frac{k(k-1)\cdots(k-t+1)}{t!}$ 随 k 多项式增长（增长阶为 k^t）。

- λ_i^{k-t}：由于 $|\lambda_i| < 1$，这以指数速度衰减（即 $|\lambda_i|^{k-t}$ 趋于 0）。

由指数衰减快于多项式增长，有 $J_i^k \to 0$ 当 $k \to \infty$。从而 $J^k \to O$，进而 $A^k \to O$。

注记：Gelfand 公式（谱半径公式）

设 A 是复数域上的 $n \times n$ 矩阵，$\rho(A)$ 表示 A 的谱半径，即 A 的所有特征值模的最大值。则对任意矩阵范数 $\|\cdot\|$，有

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

这个公式称为 Gelfand 公式（也称为谱半径公式）。它表明，矩阵的谱半径可以通过矩阵幂的范数的极限来计算。

但是我们还没有定义什么是矩阵范数，自然难以理解上面的公式。简单地说，范数是用来衡量矩阵的”大小”的，通过计算矩阵的范数，我们可以知道矩阵离零矩阵“有多远”。并且，这个矩阵的范数有很多种。例如：

(Frobenius 范数):

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^H A)}.$$

利用 Gelfand 公式，上面的补充题是显然的。

线性代数中的不变量总结

在矩阵和线性变换的讨论中，某些量或性质在特定变换下保持不变，这些量或性质称为不变量。掌握这些不变量对理解矩阵的等价、相似、合同等关系至关重要。这里整理的内容，或许有的还没学到，或许有的以后也不会学到，放在这里的目的是方便大家查阅，不作要求。同学们在学习到具体的变换时（比如后面的正交相似变换），要特别地留意这些“不变量”。

1. 矩阵的相抵（等价）关系

矩阵 A 与 B 称为相抵（或等价），如果存在可逆矩阵 P 和 Q，使得 $B = PAQ$。

不变量:

1. **秩**: 相抵矩阵具有相同的秩，即 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B)$。
2. **行列式因子**: A 和 B 有相同的行列式因子。
3. **不变因子**: A 和 B 有相同的不变因子。
4. **初等因子**: A 和 B 有相同的初等因子（在复数域上）。

标准形: 任一矩阵 A 都相抵于形如 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵，其中 $r = \operatorname{rank}(A)$。

2. 矩阵的相似关系

矩阵 A 与 B 称为相似，如果存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^{-1}AP$。

不变量：

1. **特征多项式**：$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - B)$。
2. **特征值**：A 和 B 有相同的特征值（包括重数）。
3. **行列式**：$\det(A) = \det(B)$，即所有特征值的乘积。
4. **迹**：$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$，即所有特征值之和。
5. **秩**：$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$。
6. **最小多项式**：A 和 B 有相同的最小多项式。
7. **初等因子**：A 和 B 有相同的初等因子（在复数域上）。
8. **若尔当标准形**（在代数闭域上）：A 和 B 有相同的若尔当标准形（不计若尔当块的顺序）。

注意：相似变换保持线性变换的所有固有性质，如特征值、特征向量、可对角化性等。

3. 矩阵的合同关系

矩阵 A 与 B 称为合同，如果存在可逆矩阵 P，使得 $B = P^{T}AP$（在实数域或复数域上讨论，通常 P 为实可逆矩阵）。

不变量（对实对称矩阵）：

1. **秩**：$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$。
2. **正惯性指数**：A 和 B 有相同的正惯性指数（西尔维斯特惯性定律）。
3. **负惯性指数**：A 和 B 有相同的负惯性指数。

4. **符号差**：A 和 B 有相同的符号差（正惯性指数减负惯性指数）。

标准形：实对称矩阵 A 合同于对角矩阵 $\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0)$，其中 1 的个数为正惯性指数，$-1$ 的个数为负惯性指数。

4. 矩阵的正交相似关系

矩阵 A 与 B 称为正交相似，如果存在正交矩阵 Q（满足 $Q^TQ=I$），使得 $B=Q^TAQ$。

不变量：正交相似既是相似也是合同，因此保持相似和合同的所有不变量。此外，正交相似还保持：

1. 矩阵的 Frobenius 范数：$\|A\|_F=\|B\|_F$。
2. 矩阵的谱范数（最大奇异值）。

注意：实对称矩阵必可正交相似于对角矩阵。

5. 矩阵的酉相似关系

矩阵 A 与 B 称为酉相似，如果存在酉矩阵 U（满足 $U^HU=I$），使得 $B=U^HAU$。

不变量：酉相似保持：

1. 特征值。
2. 奇异值。
3. 矩阵的 Frobenius 范数。
4. 矩阵的谱范数。

标准形：任意复矩阵 A 可酉相似于上三角矩阵（舒尔定理）；正规矩阵（满足 $A^HA=AA^H$）可酉相似于对角矩阵。

6. 线性变换的不变量

设 $\mathscr{A}: V \to V$ 是线性空间 V 上的线性变换。取 V 的两组基 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 和 $\beta_1, \ldots, \beta_n$，$\mathscr{A}$ 在这两组基下的矩阵分别为 A 和 B，则 A 与 B 相似。因此，线性变换的不变量就是其矩阵表示在相似变换下的不变量，包括：

1. 特征多项式、最小多项式、特征值、行列式、迹。
2. 秩、零度（核的维数）。
3. 若尔当标准形、有理标准形。

7. 二次型的不变量

二次型 $f(x) = x^T Ax$（A 对称）在可逆线性替换 $x = Py$ 下化为 $y^T(P^T AP)y$，因此合同变换下的不变量即为二次型的不变量：

1. 秩、正惯性指数、负惯性指数、符号差。
2. 正定性、负定性、半正定性等（由惯性指数决定）。

8. 初等变换下的不变量

1. **行列式**：在矩阵的某行（列）乘以非零常数、交换两行（列）、将某行（列）的倍数加到另一行（列）时，行列式的值会相应变化，但**不为零的性质**保持不变。特别地，对可逆矩阵施行初等行（列）变换，行列式保持非零。
2. **秩**：初等变换不改变矩阵的秩。
3. **行空间**：初等行变换不改变矩阵的行空间。
4. **列空间**：初等列变换不改变矩阵的列空间。
5. **解空间**：对线性方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵做初等行变换，方程组的解空间不变。

总结

不变量是矩阵分类和化简的重要工具。掌握这些不变量，可以帮助我们判断两个矩阵是否属于同一等价类，以及如何将它们化为标准形。在解决具体问题时，应根据变换类型（相抵、相似、合同等）选择合适的不变量进行分析。