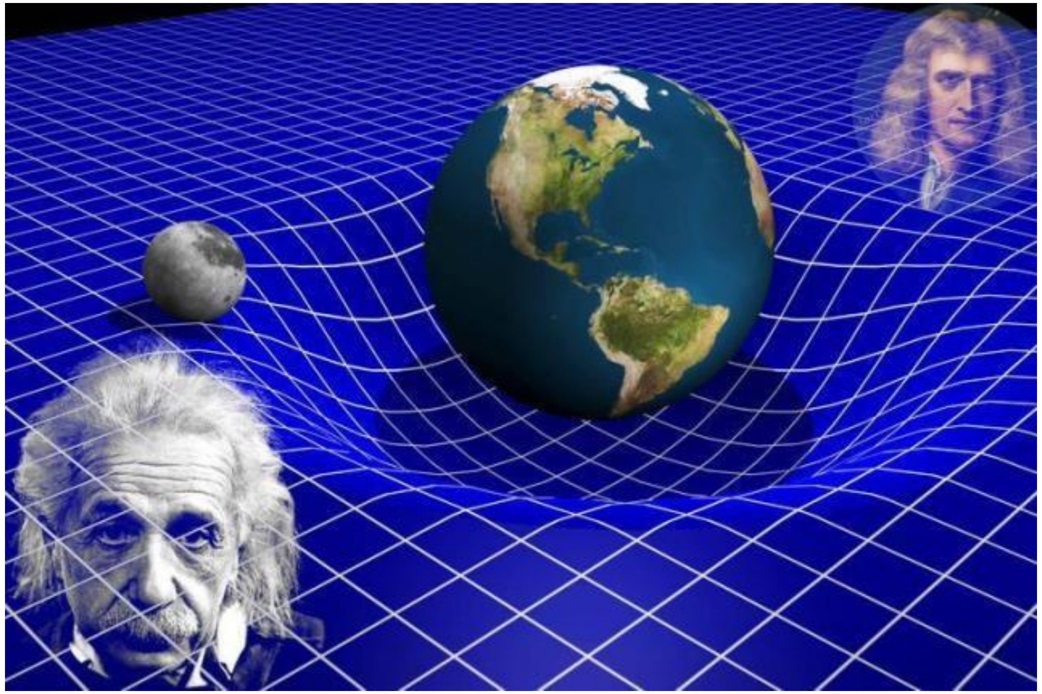
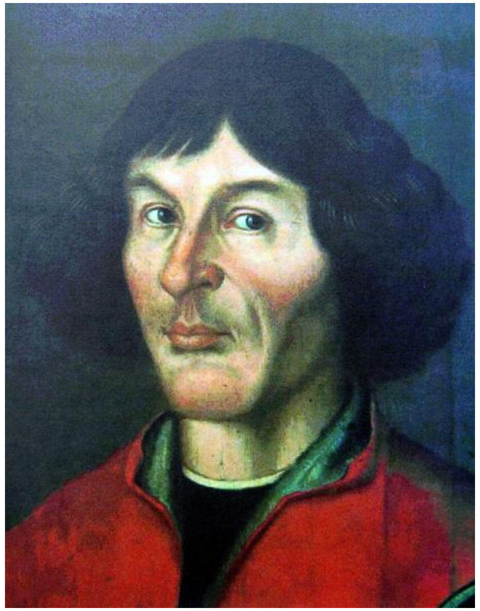
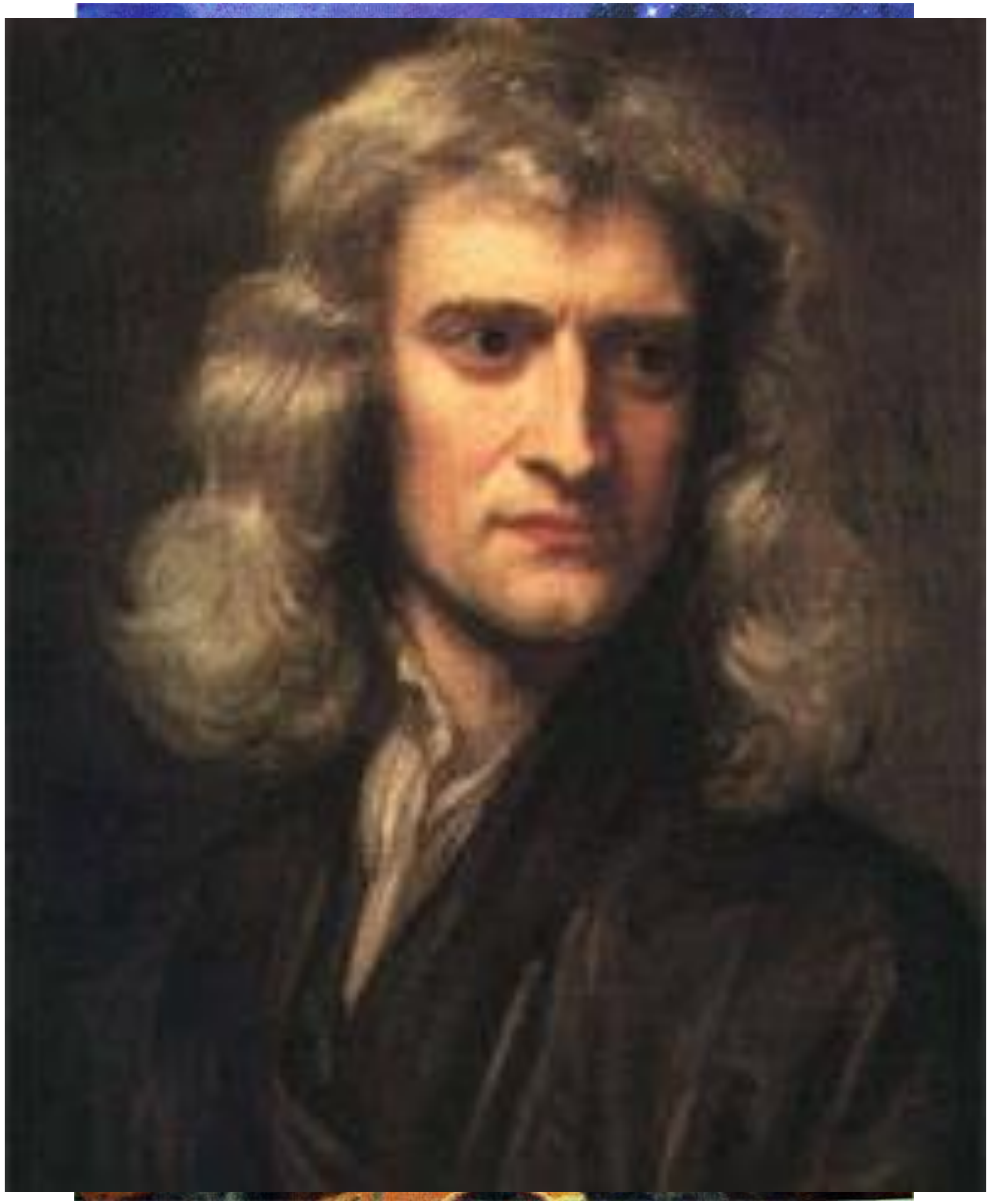
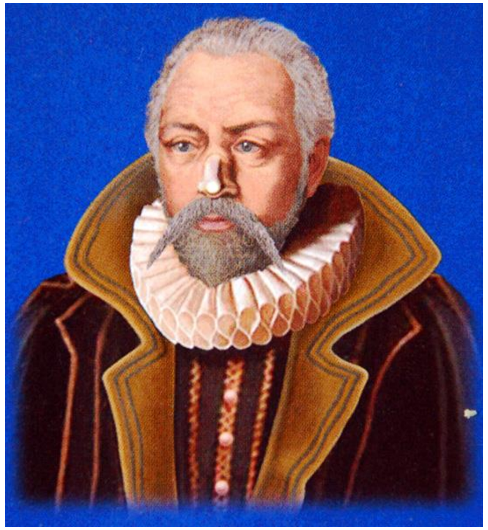
# 《力学A》第四章 万有引力

2025 10 23

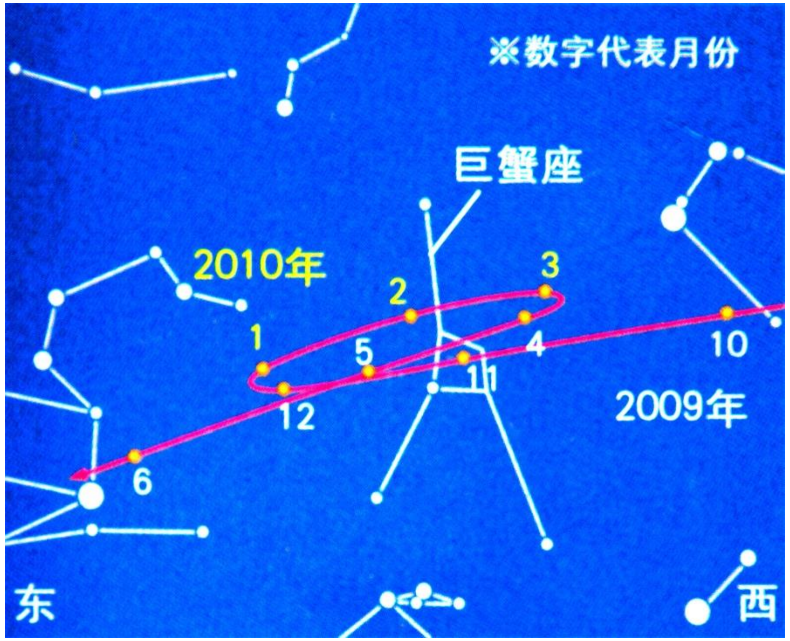




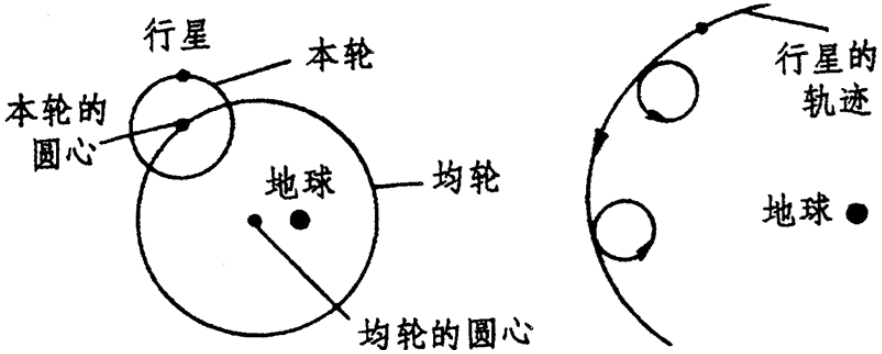




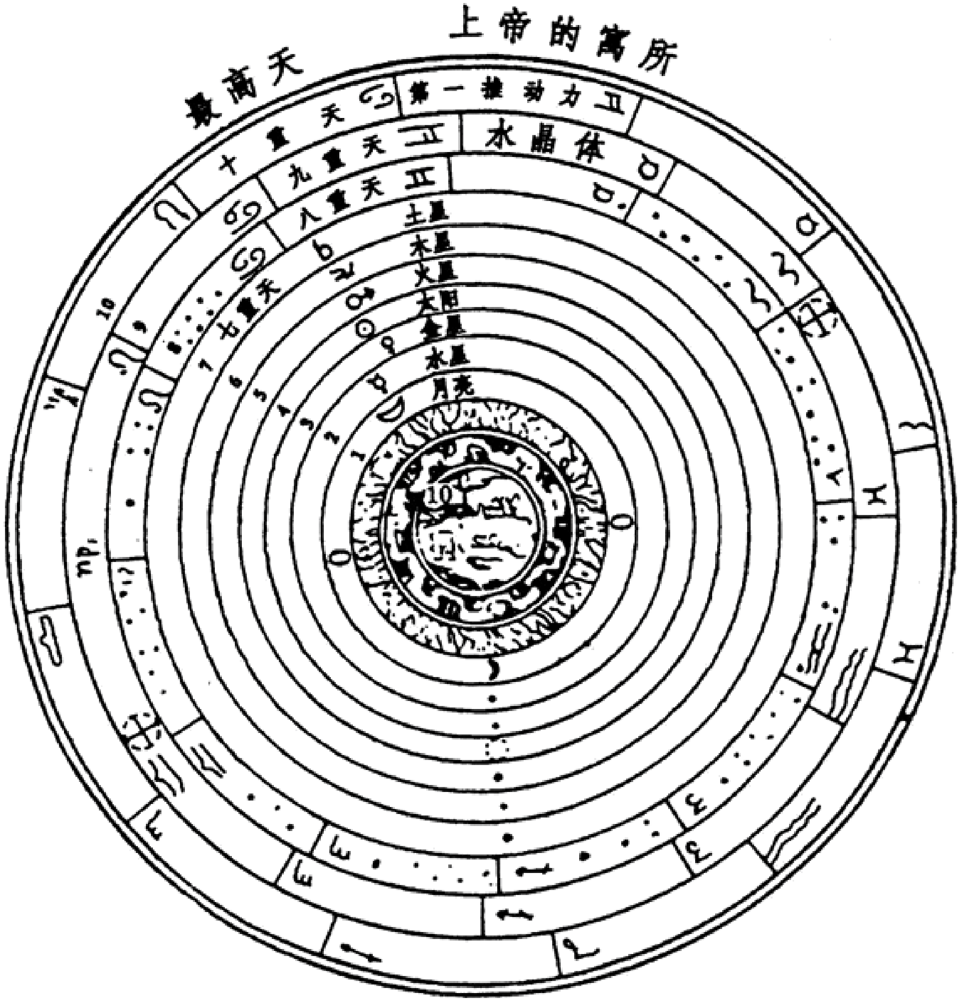
# 一、行星运动的描述




火星的退行

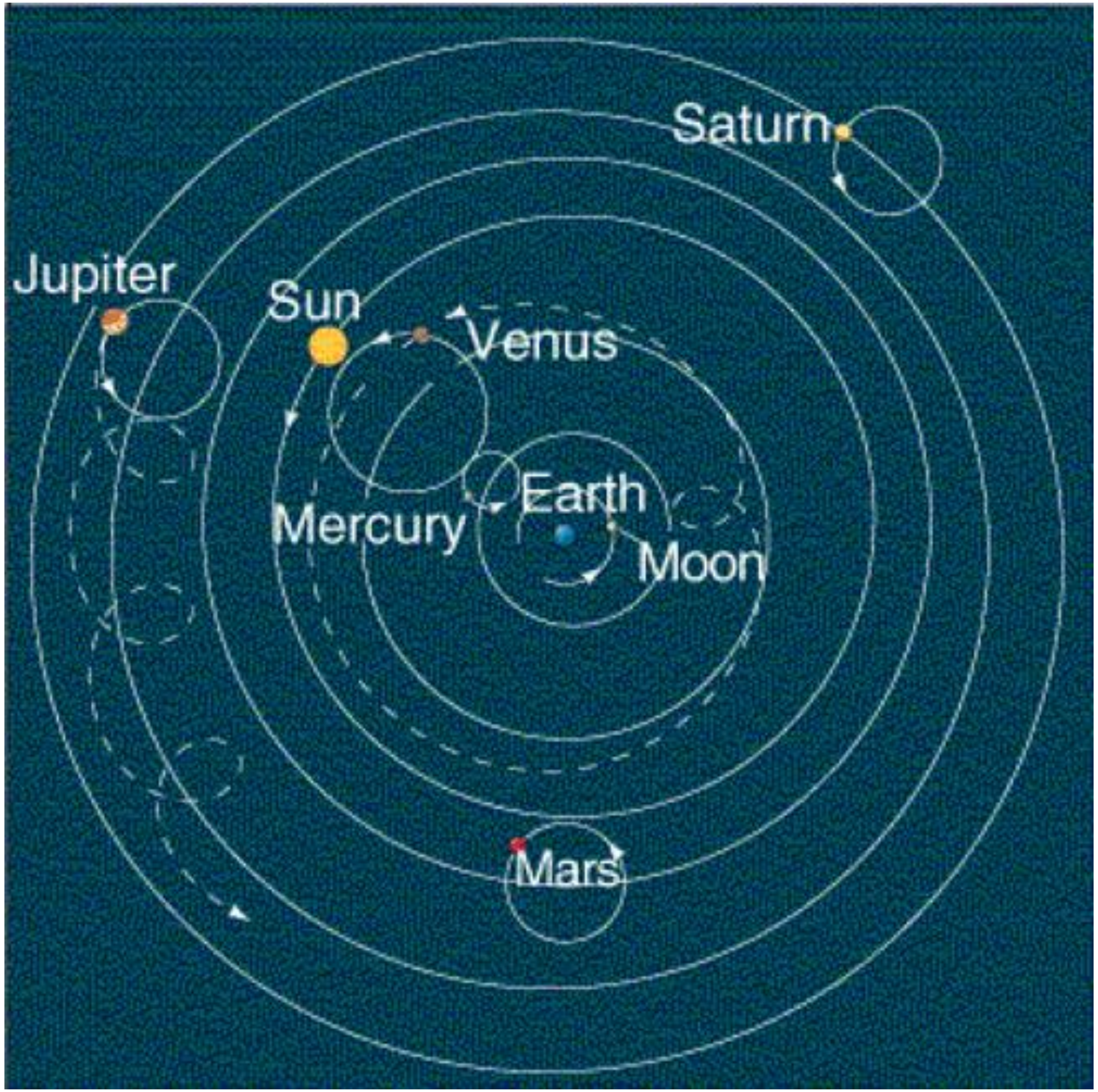



地心说对行星退行的解释

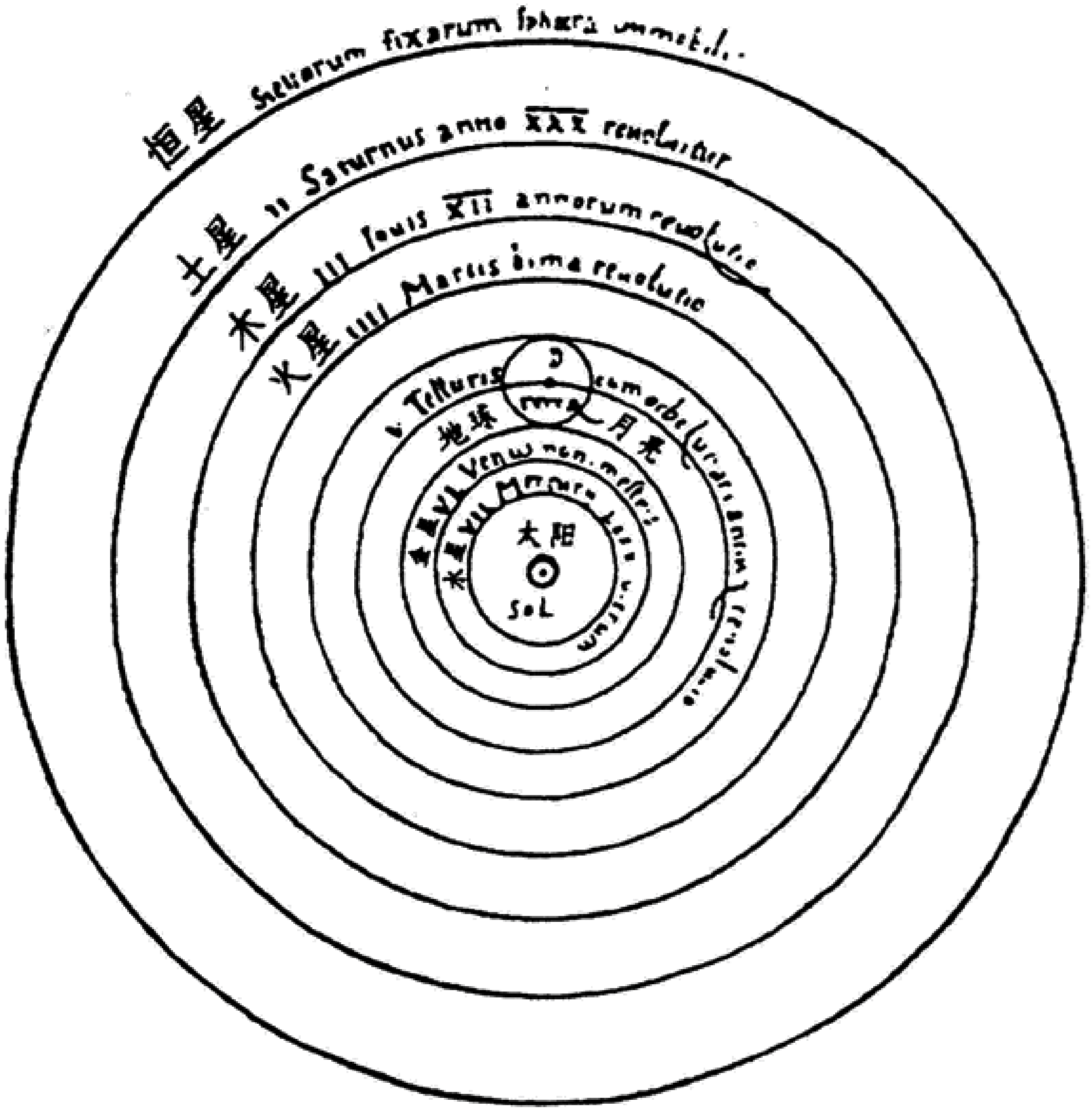


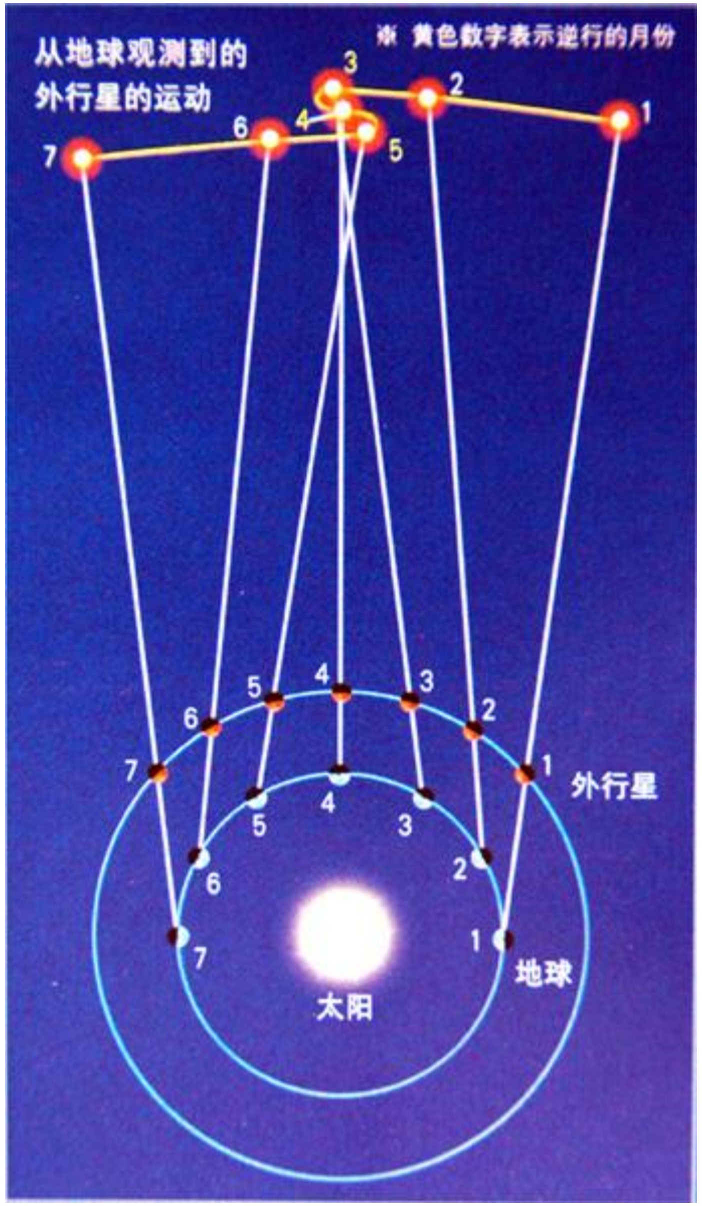

宇宙的地心体系

# 托勒密的地心体系简图



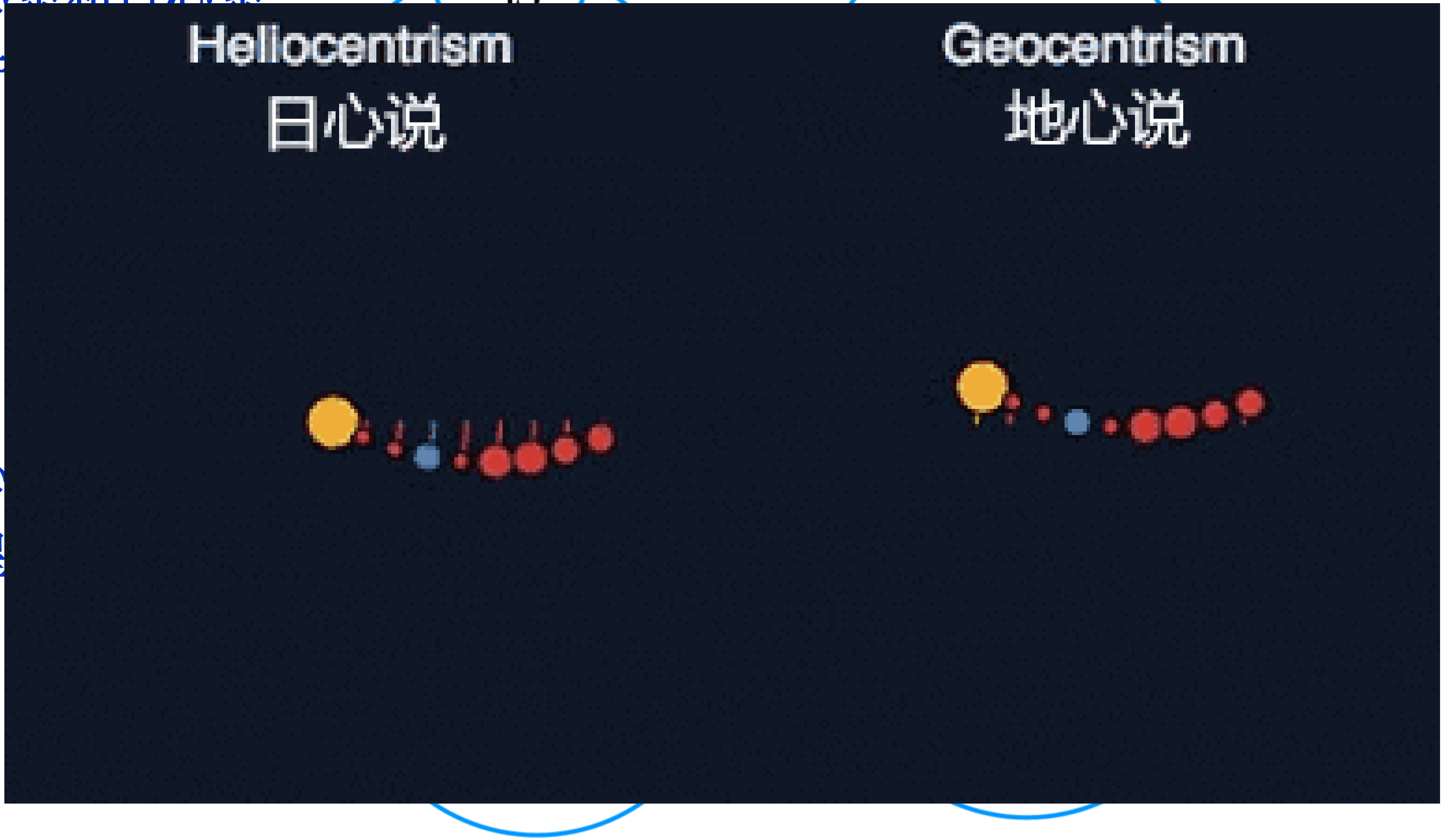
# 哥白尼的日心体系


恒星
土星
木星
火星
地球
月亮
金星
水星
太阳
Sol


从地球观测到的
外行星的运动
※ 黄色数字表示逆行的月份
外行星
地球
太阳

从地心系和日心系

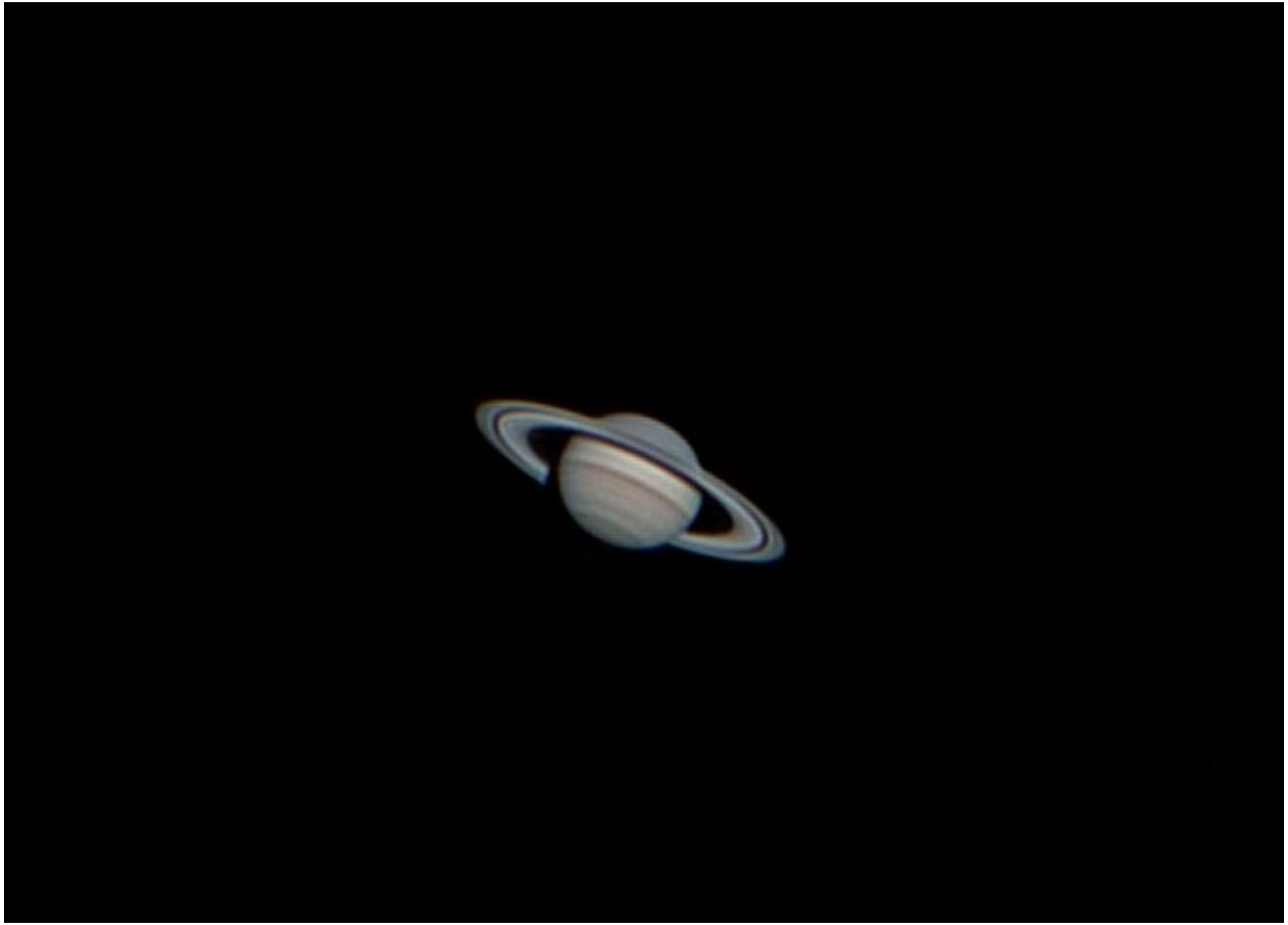
看内行


从地心

外行星

# 伽利略将他刚刚制作的望远镜指向木星，发现：



# 半个“巨人肩膀”耸立的时间线

1543年，哥白尼出版《天体运行论》，主张地球不是宇宙的中心，他的观点与教会的传统学说相左，受到迫害直至病逝。

1596年，开普勒发表《宇宙的秘密》，并在书中假定以太阳为中心的宇宙体系。

1600年，布鲁诺因支持哥白尼日心说被处以火刑。

1609年，开普勒出版《新天文学》，提出关于行星运动的理论，包含为后世所知的“开普勒三定律”中的前两条。

1610年，伽利略出版《星际使者》，指出木星周围的一系列卫星绕着太阳运行，而月球表面有山川和峡谷，银河是由成千上亿颗恒星组成。

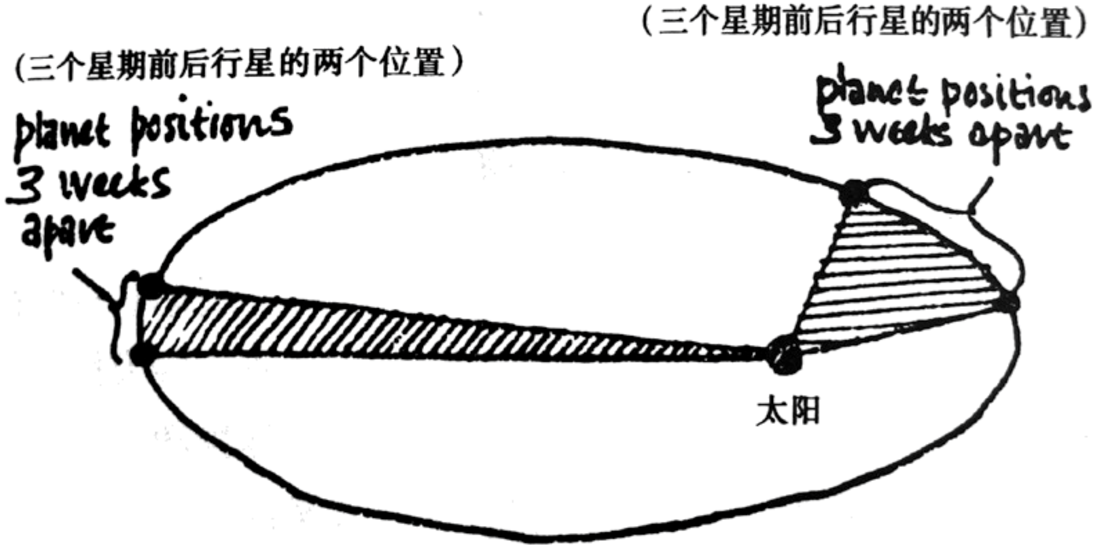
1613年，伽利略观测到太阳表面的太阳黑子。

1619年，开普勒出版《宇宙谐和论》，提出“开普勒三定律”中的最后一条定律

# 二、开普勒行星运动三定律

(1) 所有行星都沿着椭圆轨道运行，太阳则位于这些椭圆的一个焦点上。这称轨道定律。

(2) 任何行星到太阳的连线在相同的时间内扫过的面积相同。这称为面积定律。

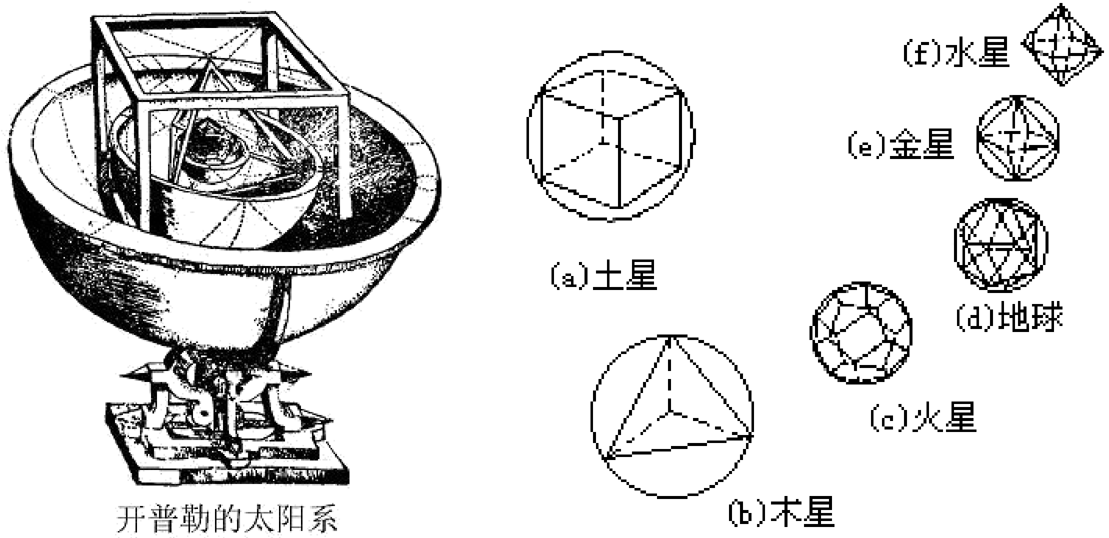



(3) 任何行星绕太阳运动的周期的平方与该行星的椭圆轨道的半长轴的立方成正比，即 $T \propto r^{3/2}$，**T**是行星运动的周期；***r*** 是椭圆轨道的半长轴。这称为周期定律。

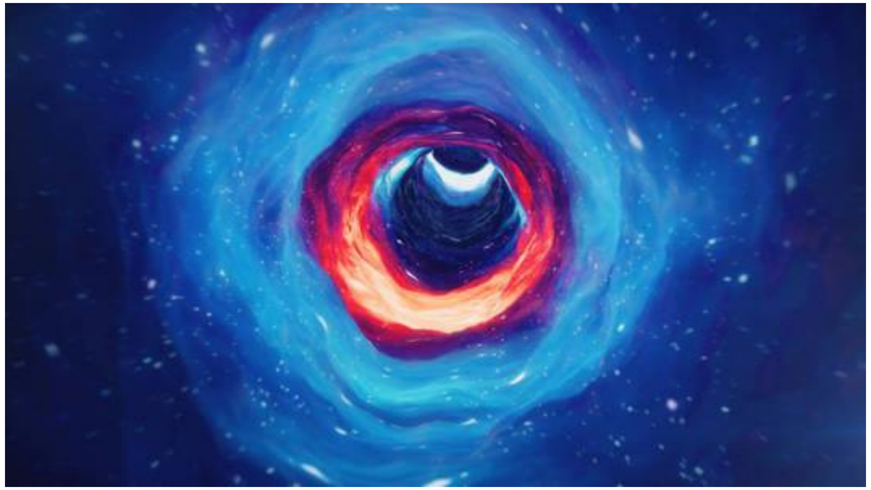
## 观测数据得到的定律→模型？

**开普勒：**

从几何对称性出发解释不同行星轨道半长轴的关系



开普勒的太阳系



**笛卡尔：**

存在以太作用在行星上，类似涡旋的形式使其绕太阳转动

**胡克：**

行星的运动是太阳吸引力的缘故，并且在圆轨道下力的大小与到太阳距离的平方成反比


根据行星运动的开普勒定律，牛顿得出了万有引力定律（完整的体系）

# 三、万有引力定律及其建立

具有质量$m_1$和$m_2$且相隔距离 $r$ 的任意两个质点之间的力是沿着连接两质点的直线而作用的吸引力，其大小为：

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

式中$G$是对所有的质点对都具有相同数值的普适常数。

这就是牛顿的万有引力定律。

**在牛顿之前，已有物体之间存在引力的观念，也有太阳的引力决定行星运动的观念。但是怎样定量地描写引力？太阳引力如何决定行星的运动？等等，都是不清楚的。**

牛顿首先把他的动力学基本方程作为力的定义，来研究导致开普勒三定律的力应是怎样的。

为了简便，把行星轨道看作圆形。这样，根据面积定律，行星应作匀速圆周运动，只有向心加速度$a=\frac{\upsilon^2}{r}$，其中$\upsilon$是行星的速率，$r$是圆轨道的半径。

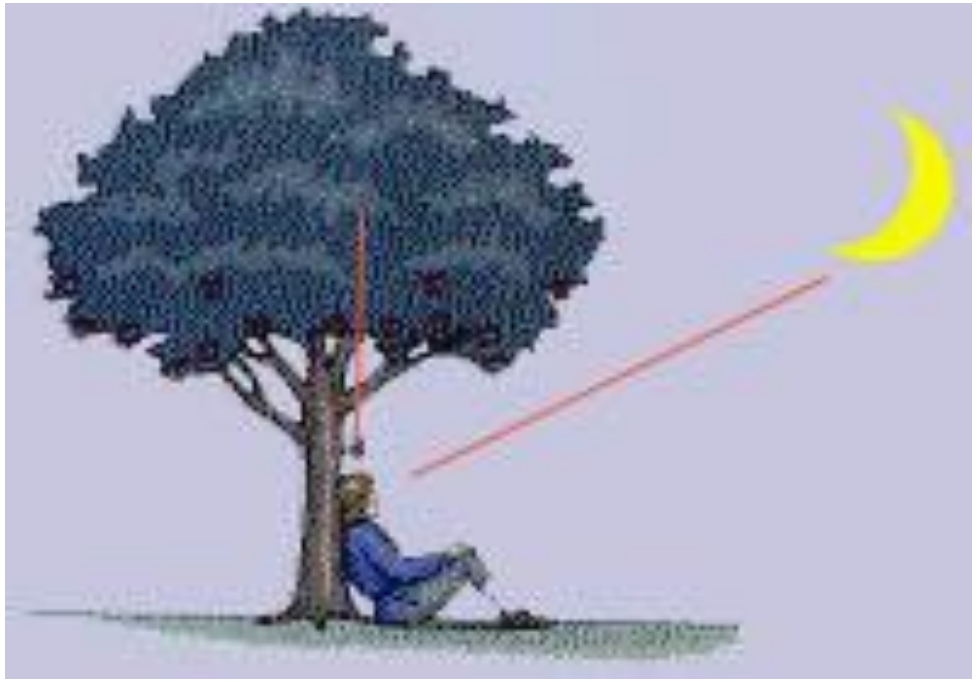
根据开普勒第三定律 $T\propto r^{3/2}$ ，又 $\upsilon=\frac{2\pi r}{T}$ ，故 $\upsilon\propto\frac{r}{r^{3/2}}=\frac{1}{r^{1/2}}$

代入 $a=\frac{\upsilon^2}{r}$ ，得 $a\propto\frac{1}{r^2}$ ，或 $F=ma\propto\frac{m}{r^2}$

其中$m$是行星的质量。取比例系数为$\alpha$，则得$F=m\frac{\alpha}{r^2}$

显然 $\alpha$ 应取决于太阳的性质。由此牛顿得到第一个重要结果：如果太阳引力是行星运动的原因，则这种力应和 $r$ 的平方成反比。

进一步，牛顿认为这种引力是万有的、普适的、统一的，即所有物体之间都存在这种引力作用，称之为万有引力。**这一步是关键性的。**




“这使牛顿想到：两种力可能有着相同的起源。这一事实，距今已有几百年了，这在今天已经成为老生常谈了，以致我们很难想象出当时牛顿的魄力与胆识。为了把行星绕太阳或月亮绕地球的运动，想象为一个‘降落’过程，就像石头从手中扔出去后的降落一样，遵从着相同的规律和在相同的力的作用下，这需要多么惊心的想象力啊！”

——玻恩(M. Born, 1882 ~ 1970)

可怜今夕月，向何处，去悠悠？是别有人间，那边才见，光影东头？是天外。空汗漫，但长风浩浩送中秋？飞镜无根谁系？姮娥不嫁谁留？

谓经海底问无由，恍惚使人愁。怕万里长鲸，纵横触破，玉殿琼楼。虾蟆故堪浴水，问云何玉兔解沉浮？若道都齐无恙，云何渐渐如钩？

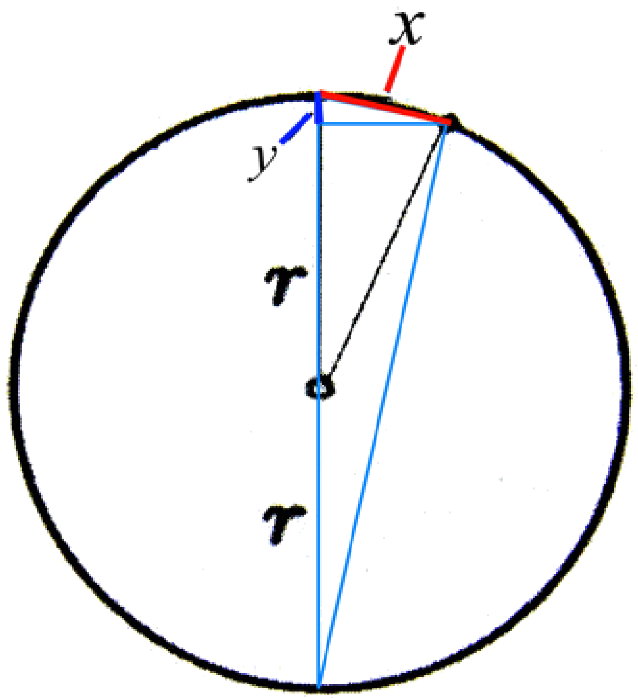
——辛弃疾《木兰花慢·可怜今夕月》

地球拉住人的力与地球拉住月球的力属同一种力，它们都与距离的平方成反比。苹果从树上自由下落，在第一秒钟内落下4.9米。那么在同样的时间内月球落下多远？由于月球没有靠近地球，月球落向地球了吗？

如果没有力作用在月球上，按惯性定律，月球将沿直线离去，可是，月球沿一圆周运动，它偏离了直线落向地球了。

现在讨论一秒钟内月球落向地球的距离。

$$\frac{y}{x}=\frac{x}{2r} \qquad y=\frac{x^2}{2r}$$




$r \approx 3.84\times10^5$km，$x \approx 1.02\times10^3$m，

所以，$y \approx 1.36\times10^{-3}$m，即 1/20 时。

$$\frac{6400\text{km}}{3.84\times10^5\text{km}}=\frac{1}{60} \qquad \frac{1.36\times10^{-3}\text{m}}{4.9\text{m}}\approx\frac{1}{3600}$$

既然引力是普适的，那么地球和月球之间也应当存在这类力。地球对月球的引力可以写为 $F_{地\to月}=m_{月}\dfrac{\alpha'}{r^2}$

反过来，月球对地球的引力为 $F_{月\to地}=m_{地}\dfrac{\alpha''}{r^2}$

其中 $\alpha'$和$\alpha''$是分别和地球及月球有关的常数。

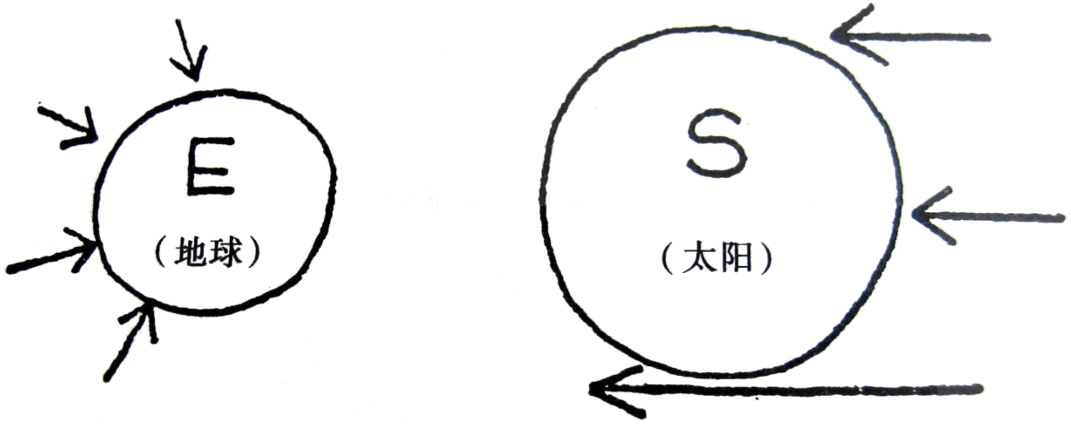
根据牛顿第三定律，$F_{地\to月}$与$F_{月\to地}$大小相等，即 $\dfrac{\alpha'}{\alpha''}=\dfrac{m_{地}}{m_{月}}$

因此，其解为 $\alpha'=Gm_{地}$，$\alpha''=Gm_{月}$

这样，前面两式可以统一为

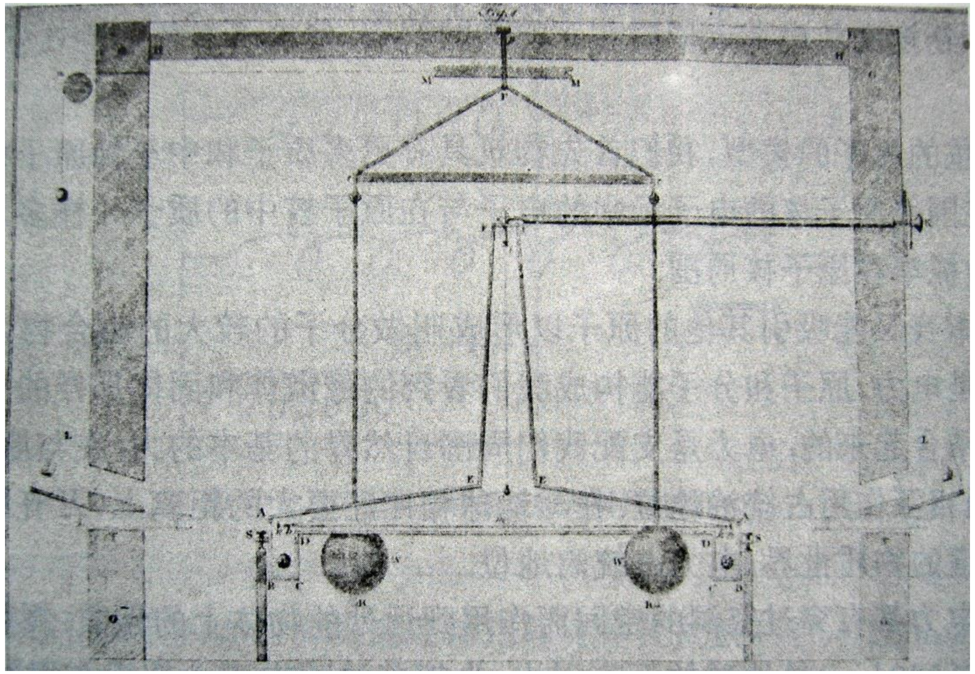
$$F=G\frac{m_{地}m_{月}}{r^2}$$

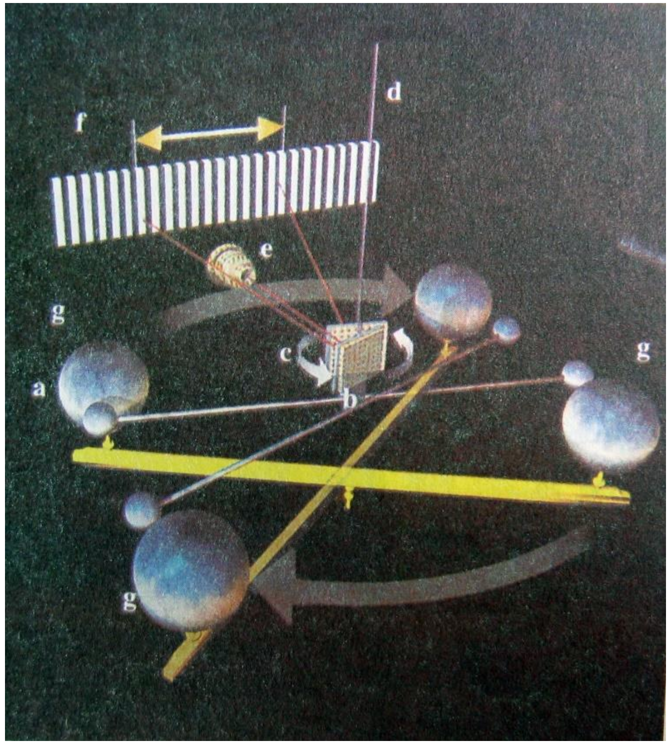
这就是牛顿的**万有引力定律**。



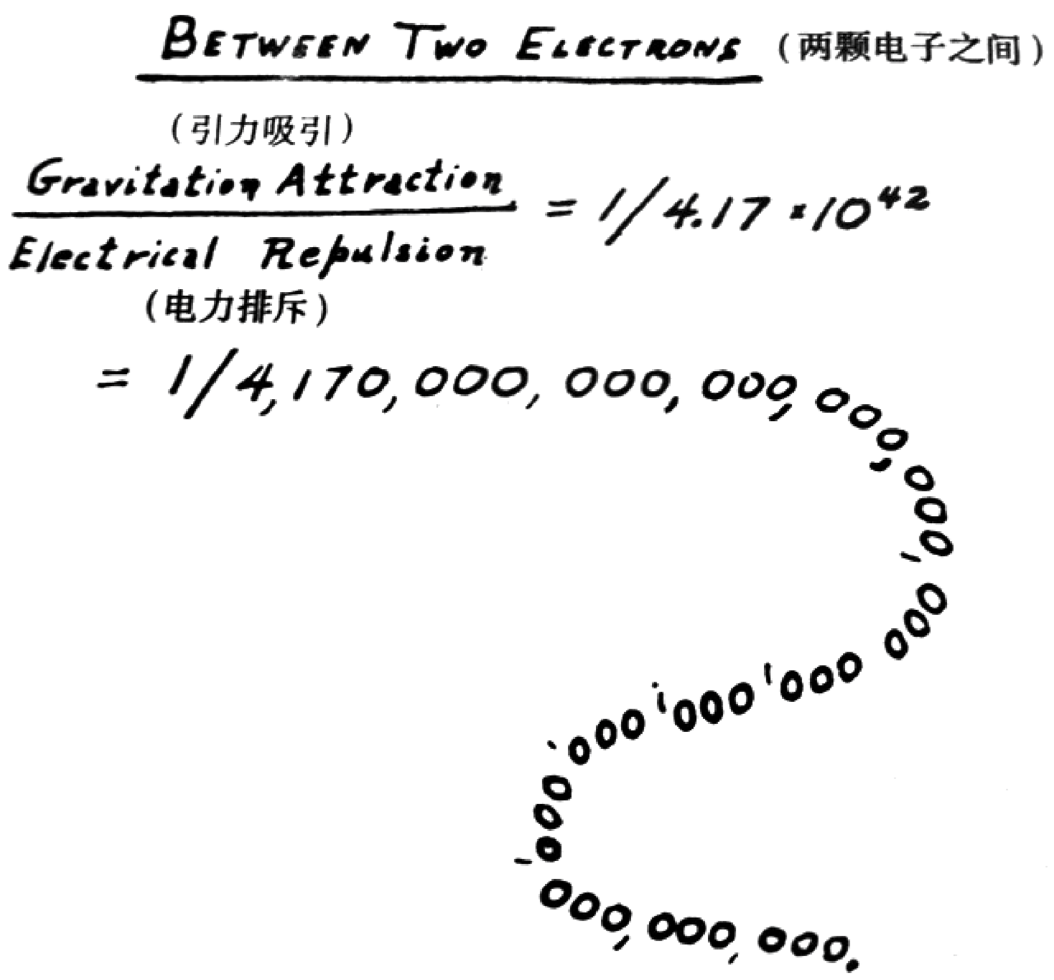
## 四、万有引力常数$G$

为了确定万有引力常数$G$的数值，要测量两个已知质量的物体之间的引力。1798年卡文迪许作了第一个精确的测量，用的是扭秤法。后人又用多种方法(包括天平法、扭秤周期法、扭秤共振法等)进行过测量。二百多年来，测量的结果在$6.658\times10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$到$6.754\times10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$之间，最新的结果是$6.674\times10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$





从卡文迪许第一个实验以来，已有二百多年了，但关于*G*值的实验精度进步不大。这是目前测得最不精确的一个物理常数。原因是实验很难做，一方面引力是四种基本相互作用中**最弱的一种**；另一方面，引力是万有的，不能屏蔽，这就意味着干扰很多，不容易排除。



## 五、引力的几何性(惯性质量与引力质量)

为什么只考虑地球对月球的作用，就能得到非常正确的结果呢？原因在于太阳对月球的作用效果与太阳对地球的**作用效果是完全一样的**。

“作用效果完全一样”，用数学语言来说，就是在方程

$$m_{月}\frac{\upsilon^2{}_{月}}{r}=G\frac{m_{月}M_{日}}{r^2}, \qquad m_{地}\frac{\upsilon^2{}_{地}}{r}=G\frac{m_{地}M_{日}}{r^2}$$

中，$\upsilon_{月}$和$\upsilon_{地}$相等；其中 $m_{月}, m_{地}, \upsilon_{月}, \upsilon_{地}$分别是月球和地球的质量与速度，$m_{日}$是太阳的质量，$r$ 是地球到太阳的距离。

应当注意，两方程中等式两边质量的物理含义并不相同。

左边反映物体惯性的大小，所以称为**惯性质量**。

右边反映物体之间引力的大小，所以称为**引力质量**。

为了清楚起见，把前式改写为

$$(m_{月})_{惯}\frac{\upsilon^2_{月}}{r}=G\frac{(m_{月})_{引}M_{日}}{r^2},\qquad (m_{地})_{惯}\frac{\upsilon^2_{地}}{r}=G\frac{(m_{地})_{引}M_{日}}{r^2}$$

要求 $\upsilon_{月}=\upsilon_{地}$ ，等价于 $\dfrac{(m_{月})_{惯}}{(m_{月})_{引}}=\dfrac{(m_{地})_{惯}}{(m_{地})_{引}}$

这就是我们处理地月相互关系时可以忽略太阳作用的根据。

把上述的论证推广，得到对任何物体 **A** 都有 $\dfrac{(m_A)_{惯}}{(m_A)_{引}}=\dfrac{(m_{地})_{惯}}{(m_{地})_{引}}$

因此，任一物体的惯性质量与引力质量之比都应等于一普适常数，即

$$\frac{m_{惯}}{m_{引}}=普适常数$$

显然，只要单位选择适当，总可以使这个普适常数为 1。

存在普适常数是引力所具有的一个基本性质，即**引力的几何性**。

开普勒第三定律说，任何行星的运动周期的平方与其椭圆轨道半长轴的三次方成正比。它只涉及**时间量**和**空间量**，即仅仅涉及几何量，而并没有涉及行星本身的任何物性。运动学只涉及几何量，动力学则应当涉及物性。因为动力学是研究物体之间的相互作用力如何使物体产生运动，而相互作用力一般是和物性有关的。但开普勒第三定律中却不含物性，这就是引力几何性的一个反映。

从动力学方程很容易看到这个特点，在万有引力情况下，有

$$F = ma = G\frac{mM}{r^2} \quad \text{可得} \quad a = G\frac{M}{r^2}$$

因为引力质量和惯性质量相同，故二者从方程中消去了。这样，在上述方程中就不含有运动物体本身的物性，而只是一种几何的关系式。**其它力没有这种性质。**

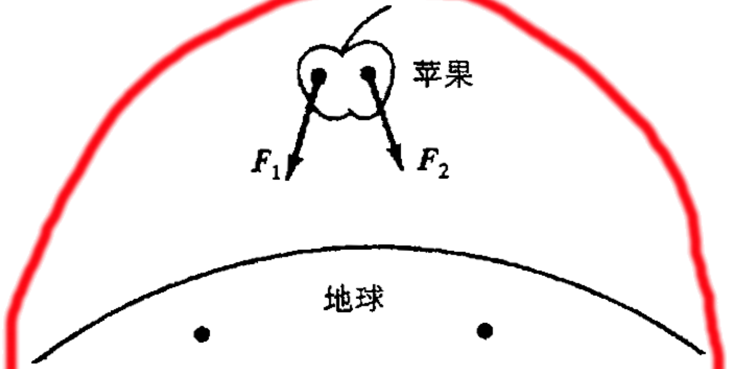
广义相对论：空间弯曲

# 六、引力的计算

## 1. 多质点体系的引力作用

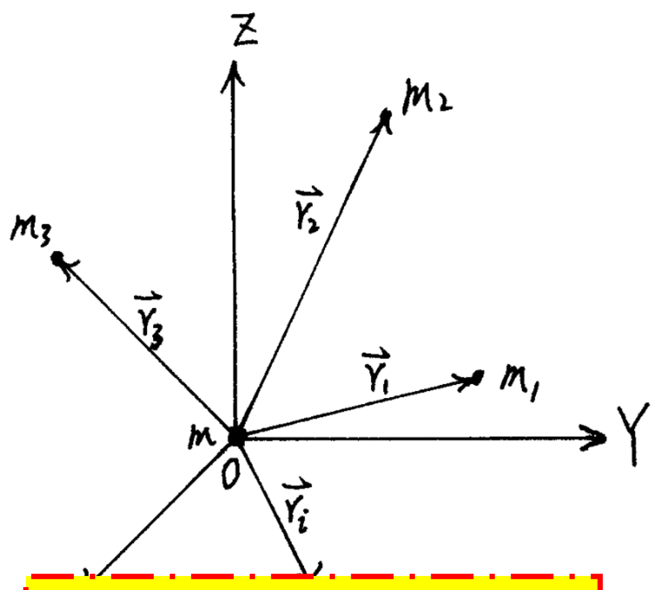
牛顿的万有引力定律公式是对两个**质点**而言的。牛顿在发展引力理论过程中，重要的一步是把月球运动和落体运动统一起来。在这个分析中，一个关键的问题是牛顿认为地球表面落体运动的加速度可以写为：$g=G\frac{M_{地}}{R^2}$，其中**R**是地球半径。

这里有一个很大的疑问，为什么能把地球和落体间的距离看为**R**？如果说在讨论月球运动时，把地球和月球看作质点是一个足够好的近似，那么讨论落体运动时，把地球看作质点显然是不合理的。为了研究这个问题，我们必须讨论一下多质点体系的引力问题。



计算苹果上的引力

现在我们先来讨论一种简单情况。在原点有一质量为**m**的质点，空间分布着质量分别为$m_1$，$m_2$，$m_3$，……，$m_i$的若干个质点，它们的位置矢量分别为 $\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,\cdots\cdots\vec{r}_i$。为了求质点 **m** 所受到的引力，必须把引力公式作些推广。根据引力公式可知：




引力的线性叠加性

第一个质点对**m**的引力为 $$\vec{F}_1=G\frac{mm_1}{r_1{}^2}\cdot\frac{\vec{r}_1}{r_1}$$

第二个质点对**m**的引力为 $$\vec{F}_2=G\frac{mm_2}{r_2{}^2}\cdot\frac{\vec{r}_2}{r_2}$$

…… ……

第***i*** 个质点对**m**的引力为 $$\vec{F}_i=G\frac{mm_i}{r_i{}^2}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

因此，可以自然地认为，**m**所受到的总力为

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots\cdots+\vec{F}_i$$

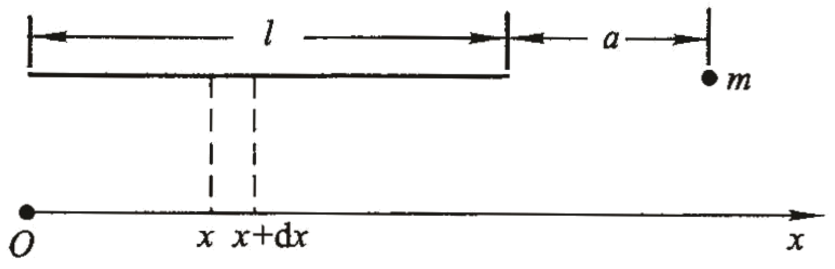
$$=\sum_I G\frac{mm_i}{r_i{}^2}\cdot\frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

## 2. 连续体的万有引力

“微元”

**以均质细杆对质点的引力为例。**

细杆质量为**M**，长为**l**，距细杆的一端 **a** 处有一质量为**m**的质点，计算细杆对质点**m**的引力。




把细杆分成许多小段(微元)，每一小段可看作质点。细杆上 **x** 至**x+dx** 的一小段可看作质量为 $Mdx/l$ 的质点，对质点**m**的引力为

$$dF = -\frac{GMmdx}{l(l-x+a)^2}$$

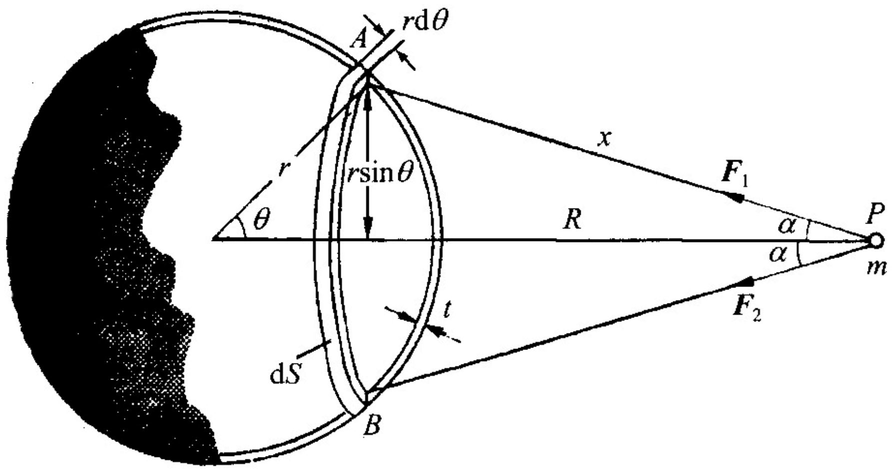
求合力只需计算代数和

$$F = \int dF = -\int_0^l \frac{GMmdx}{l(l-x+a)^2} = -\frac{GMm}{l}\frac{1}{l-x+a}\Bigg|_0^l = -\frac{GMm}{l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{l+a}\right)$$

结果是 $F = -GMm/a(l+a)$ 。

## 3.均匀球壳的万有引力

考虑一密度均匀的球壳，它的厚度 $t$ 比它的半径 $r$ 小得多。我们要求出它对球壳外一质量为 $m$ 的质点 $P$ 的引力。




设在球壳 $A$ 点处的一小块对 $m$ 的引力为 $\vec{F}_1$，由球壳的对称性，可以找到与 $A$ 相对的 $B$ 点，该处的一小块对 $m$ 的引力为 $\vec{F}_2$。通过把球壳分成这样一对一对的小块，所有作用在 $m$ 上的力的竖直分量都成对地相互抵消了，只需考虑水平分量。

考虑球壳上一环带，它长为 $2\pi(r\sin\theta)$，宽为 $rd\theta$，厚为 $t$。因此，它的体积为 $dV=2\pi tr^2\sin\theta d\theta$ 。设密度为 $\rho$，则环带的质量为 $dM=\rho dV=2\pi t\rho r^2\sin\theta d\theta$ 。

$dM$ 对位于 $P$ 点处的质量 $m$ 所施的力是水平的，其值为

$$dF = G\frac{mdM}{x^2}\cos\alpha = 2\pi tG\rho mr^2\frac{\sin\theta\, d\theta}{x^2}\cos\alpha$$

其中 x、$\alpha$ 和 $\theta$ 之间满足关系

$$\boxed{\cos\alpha} = \frac{R - r\cos\theta}{x}$$

再根据余弦定理 $x^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$

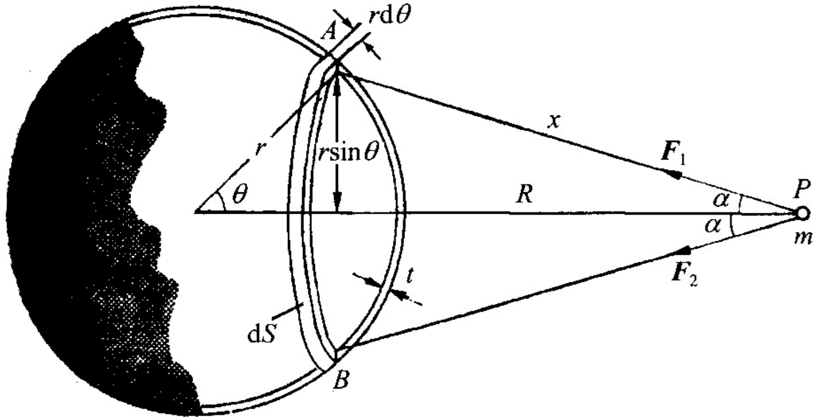
即 $$\boxed{r\cos\theta} = \frac{R^2 + r^2 - x^2}{2R}$$

又，对余弦定理进行微分，得 $2xdx = 2Rr\sin\theta\, d\theta$

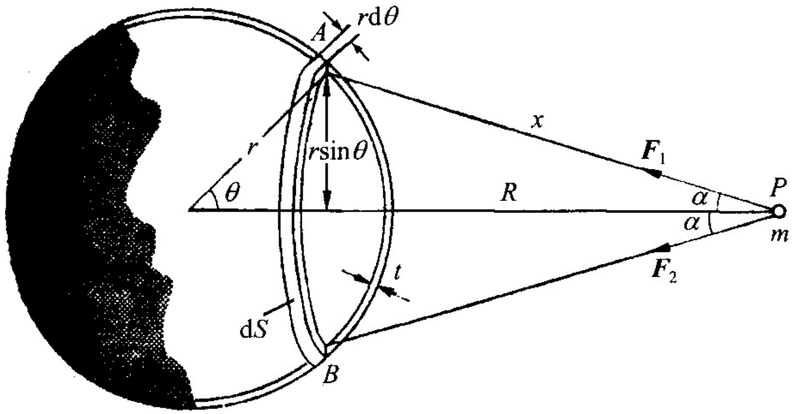
即 $$\boxed{\sin\theta\, d\theta} = \frac{x}{Rr}dx$$

消去 $\theta$ 与 $\alpha$，得 $$dF = (\frac{\pi Gt\rho mr}{R^2})(\frac{R^2 - r^2}{x^2} + 1)dx$$

这就是环带ds的物质作用在质点m上的引力。



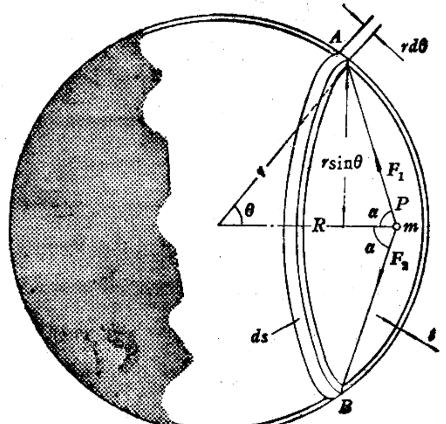
整个球壳的作用即为前式对所有环带求和，亦即对变量x求遍及整个球壳的积分。因为x的范围是从最小值***R-r***到最大值***R+r***，




$$\int_{R-r}^{R+r}\left(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1\right)dx = 4r$$

故合力为 $$F=\int_{R-r}^{R+r}dF = G\frac{(4\pi r^2\rho t)m}{R^2}=G\frac{Mm}{R^2}$$

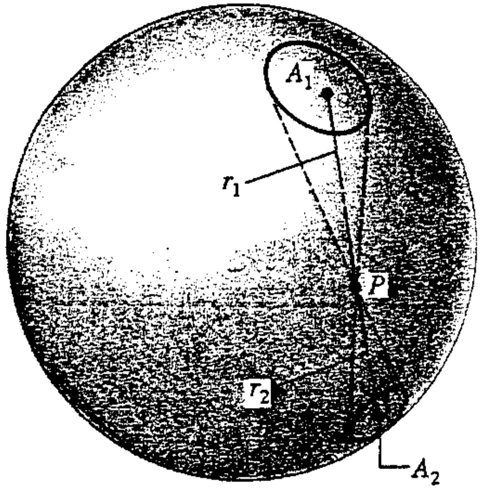
这个结果表明：**一个密度均匀的球壳对球壳外一质点的引力，等效于它的所有质量都集中于它的中心时的引力。**



对球壳内部的引力

$$\int_{r-R}^{r+R}\left(\frac{R^2-r^2}{x^2}+1\right)dx=0$$

**球壳对内部任一质点的引力为零。**



球壳内点质量上力的确定

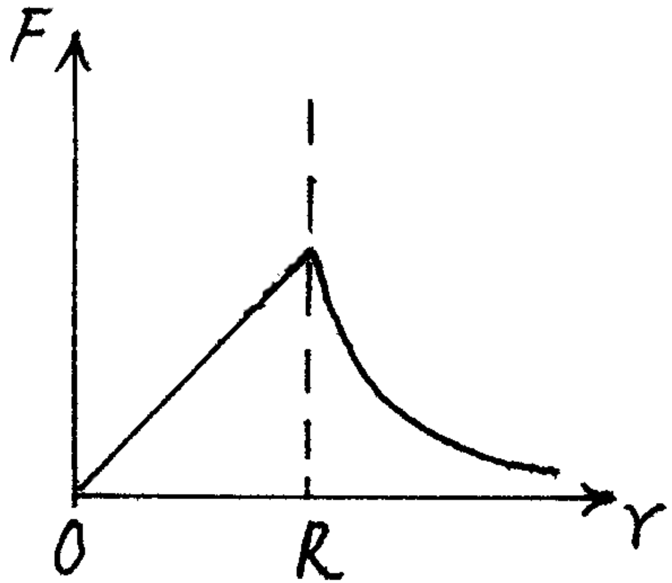
**这个结果非常有意义。**

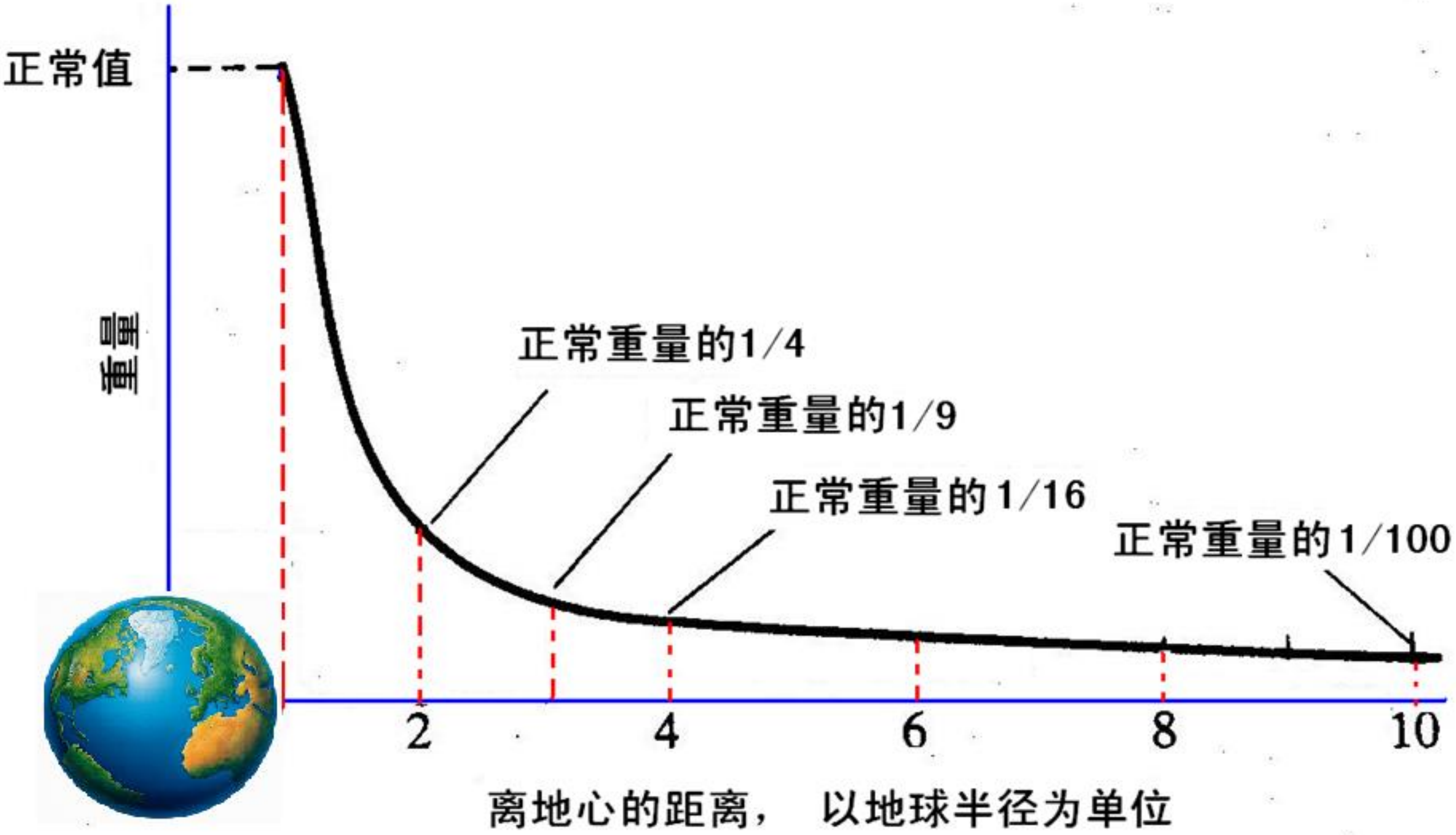
## 4.均匀球体的万有引力

对于半径为***R***，密度为$\rho$ 的均匀球体，可以推出万有引力公式：

$$F = G\frac{4}{3}\pi R^3 \rho m / r^2 = G\frac{m\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{r^2}, \quad \boldsymbol{r > R}$$

$$F = G\frac{4}{3}\pi r^3 \rho m / r^2 = Gm\frac{4}{3}\pi r \rho, \quad \boldsymbol{r < R}$$




正常值
重量
正常重量的1/4
正常重量的1/9
正常重量的1/16
正常重量的1/100
2
4
6
8
10
离地心的距离，以地球半径为单位

## 七、重力加速度的变化

根据万有引力定律，显然重力加速度 **g** 应随高度而改变，亦即随离地球中心的距离而改变。

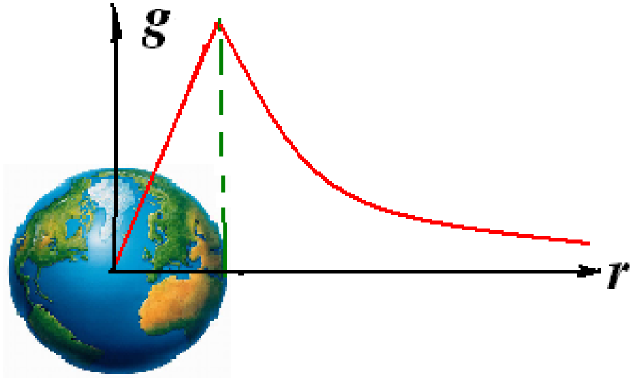
将 $F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ 的两边微分，得 $dF=-2G\dfrac{m_1m_2}{r^3}dr$

两式相除，得 $\dfrac{dF}{F}=-2\dfrac{dr}{r}$

**F** 相对变化为 **r** 相对变化的两倍；负号表示引力随距离增大而减小。

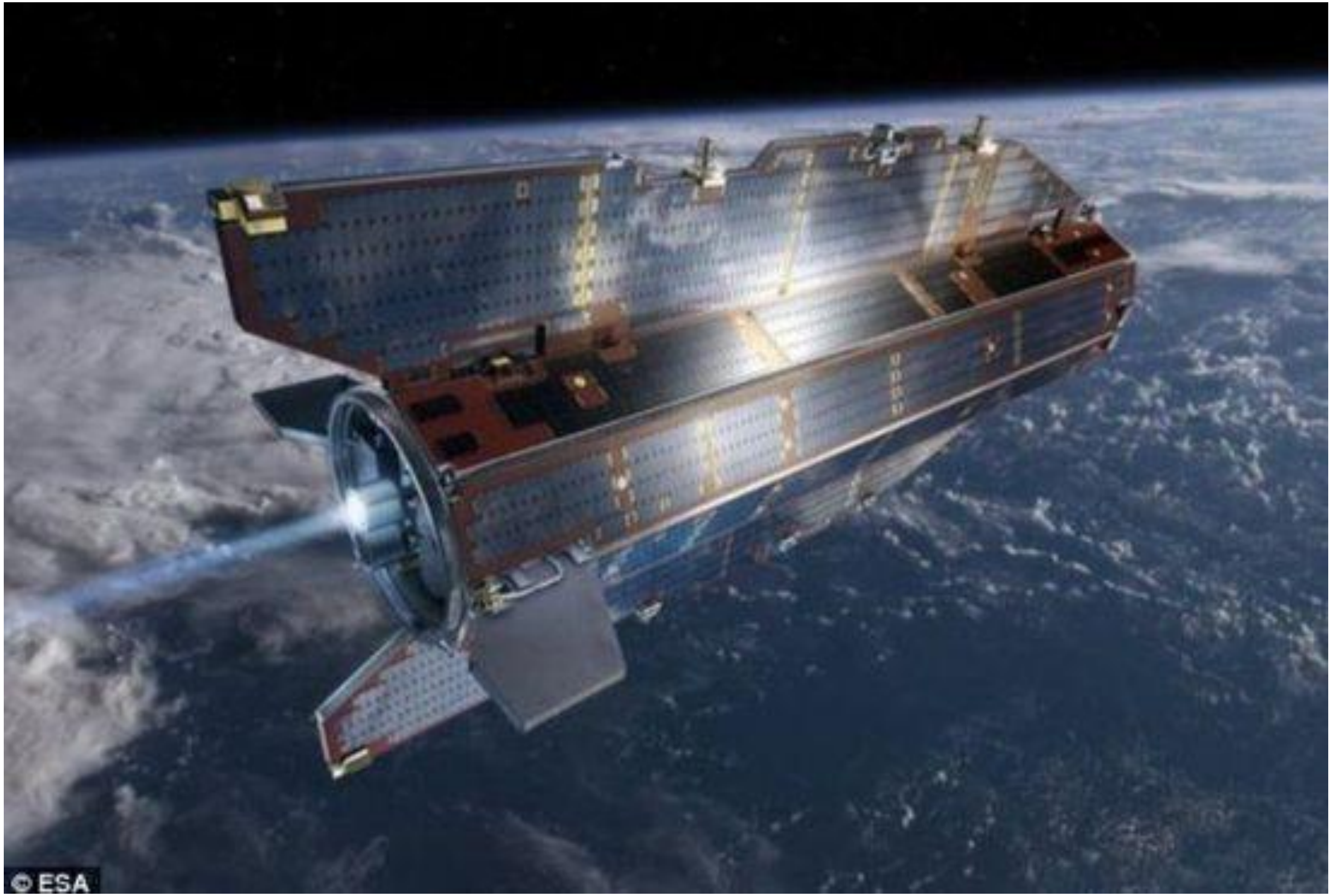
若设**m**为物体的质量，则地球对物体的引力大小为$F=mg$，

同样求微商，得到：$\dfrac{dF}{F}=\dfrac{dg}{g}=-2\dfrac{dr}{r}$




在地球内部 **g** 值也变小，深度越大 **g** 值越小，在地心处重力加速度为 **0**。

# 卫星激光测轨




GOCE卫星在2009年发射升空，用来了解地球重力场的分布

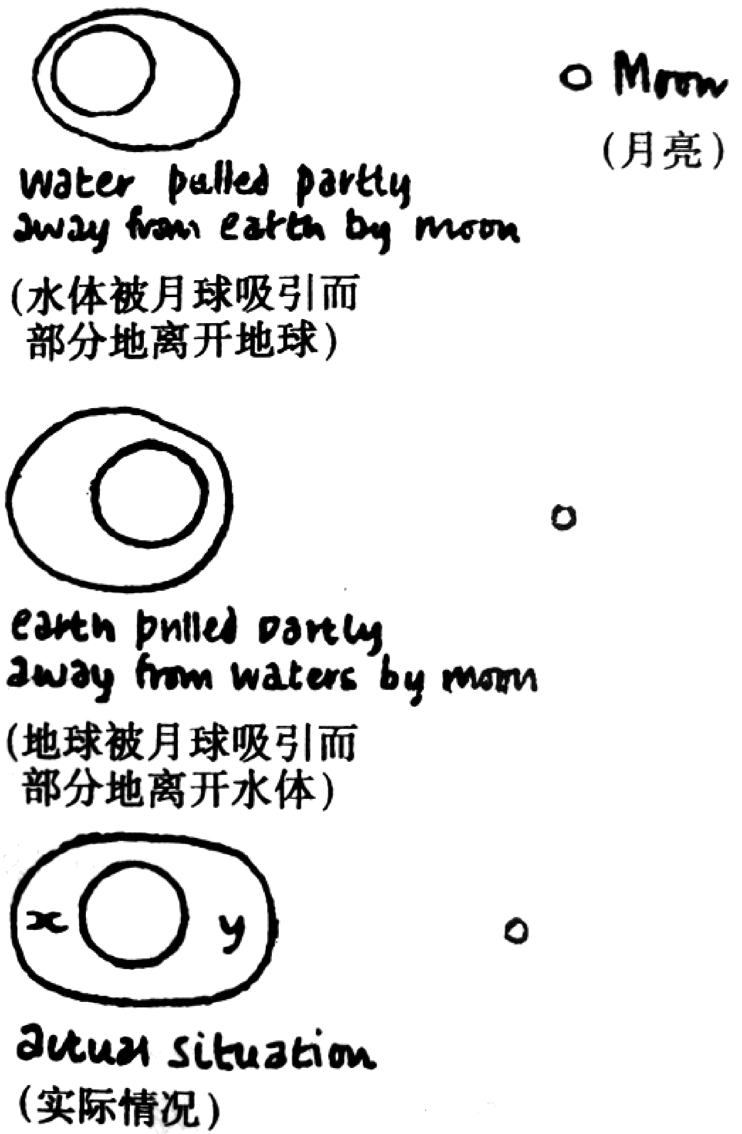
## 八、引力场

引力是两个质点彼此间施以作用力。如果愿意的话，可把这种作用看作两个质点之间的直接相互作用。这种观点称为**超距作用**。

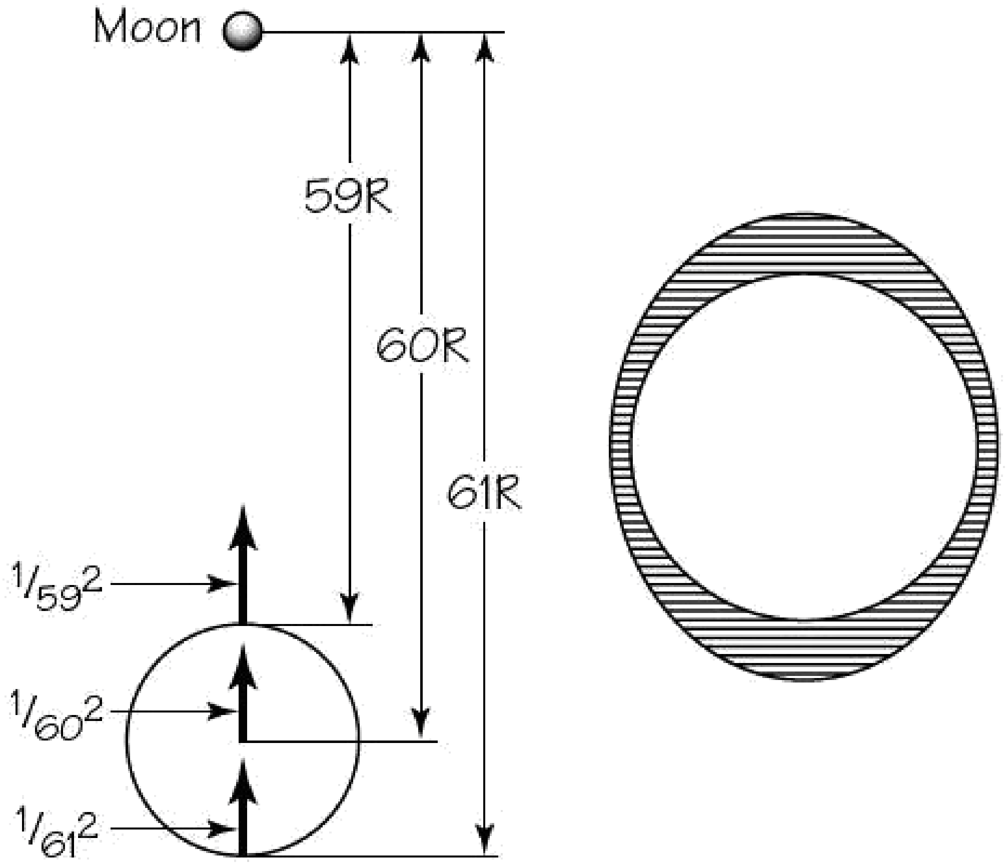
另一种观点是场的概念，即认为质点以某种方式改变它周围的空间，从而建立起一个**引力场**。这个场作用于场内其它任何质点，即对它们施加吸引力。因此，在我们考虑质点间的作用力时，场起了居间的作用。按照这种观点，我们将问题分为两个部分：第一，必须确定由给定的质点分布所建立起来的场；第二，必须计算出场对放在场中的其它质点所施的力。

引力场是**矢量场**的一个例子。在矢量场中，每一点都联系着一个矢量。引力场由物质的固定分布所产生的，因此它又是**稳定场**的一个例子，因为在任何给定地点场值不随时间而改变。

# 月球和太阳哪个对地球上潮汐现象的贡献大？为什么？

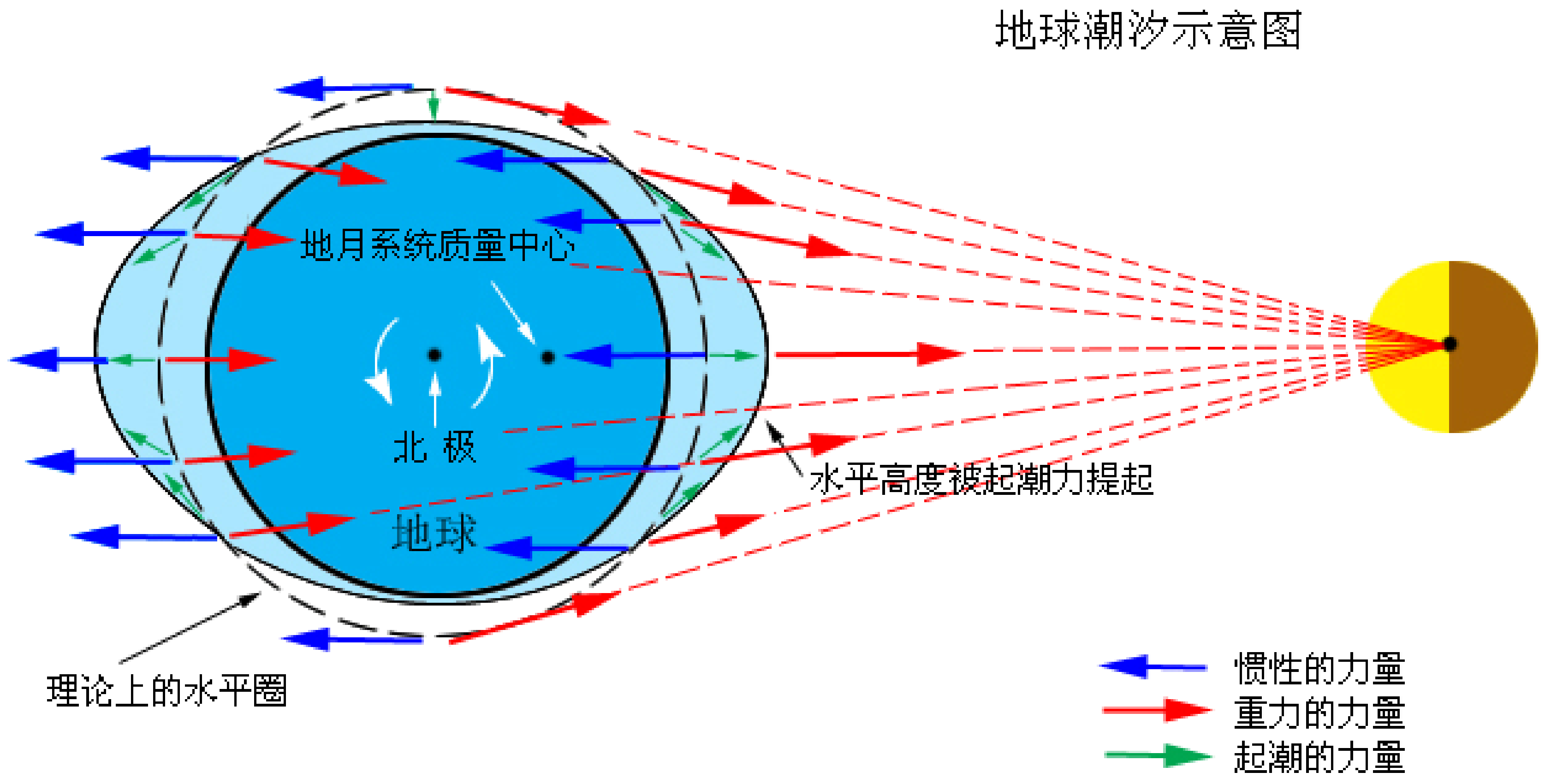



月球对朝向它的那部分水面的引力大，对背向它的那部分水面的引力小，这一引力的“差”造成了一天两次的潮汐。



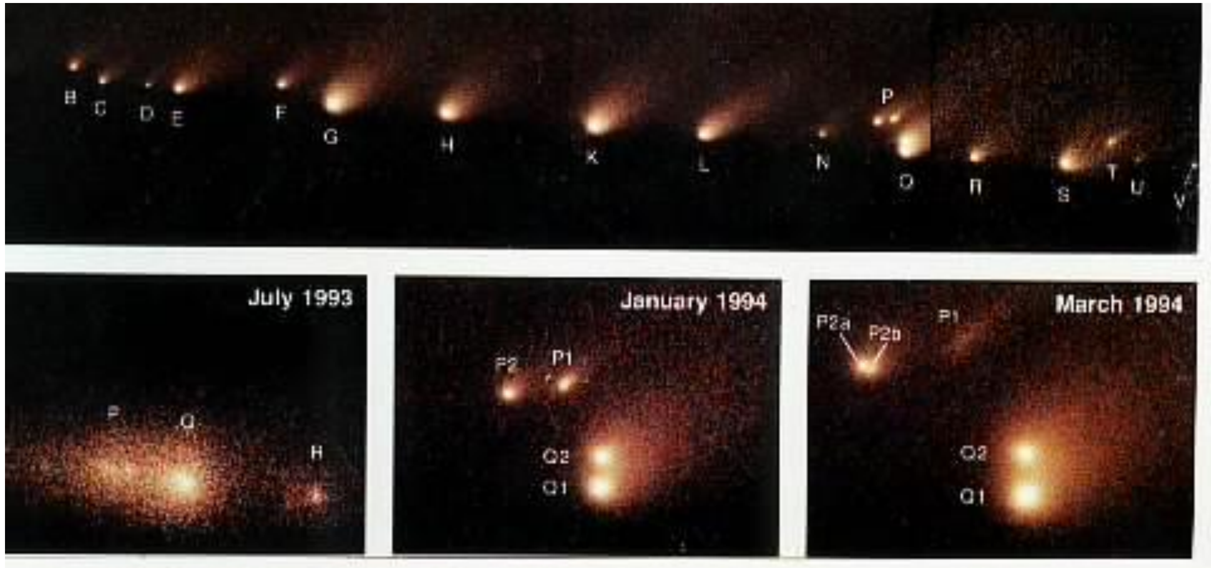
对于“场”描述来说，物理量随着空间位置的改变而发生的变化可以用“梯度”来描写。

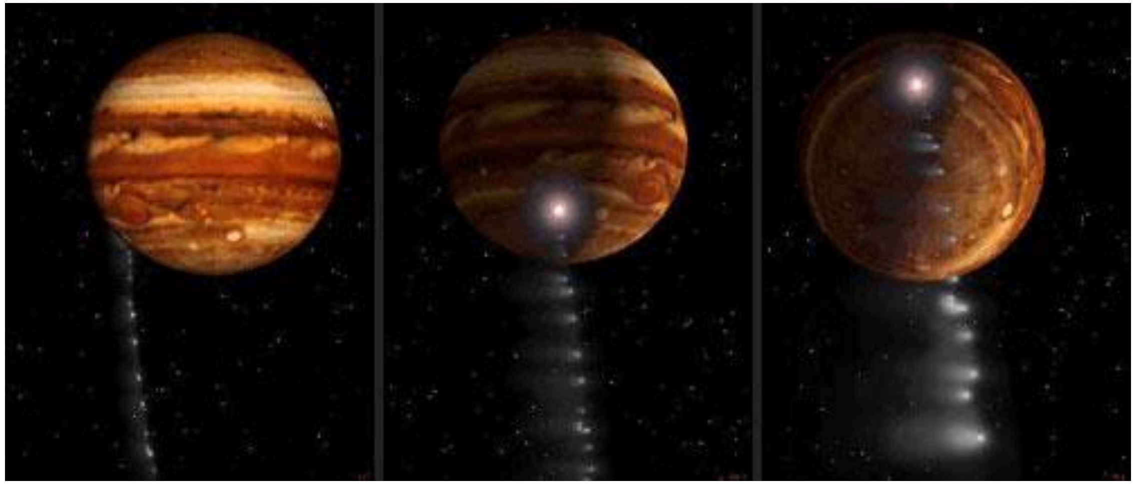
引力 $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$ 的梯度为 $\nabla F = -2G\dfrac{m_1 m_2}{r^3}$ ，其大小与 $\boldsymbol{r}$ 的三次方成反比。距离越小，梯度越大，引力作用的空间变化越剧烈，差异也就越大。显然，月球对地球上潮汐现象的贡献比太阳大。



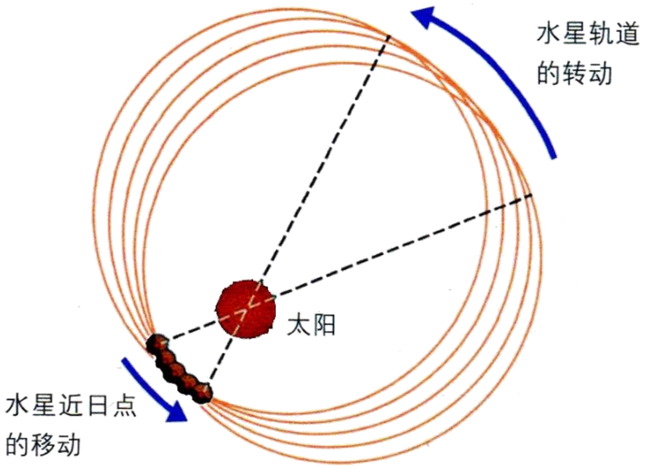

小行星在接近大天体时，距离大天体近的部位受到的引力大，距离大天体较远的部位受到的引力小，这一引力的“差”将其撕裂。

# 1994年7月16日至22日，苏梅克-列维9号彗星断裂成21个碎块（其中最大的一块宽约4公里），以每秒60公里的速度撞向木星



# 九、牛顿万有引力定律的适用范围



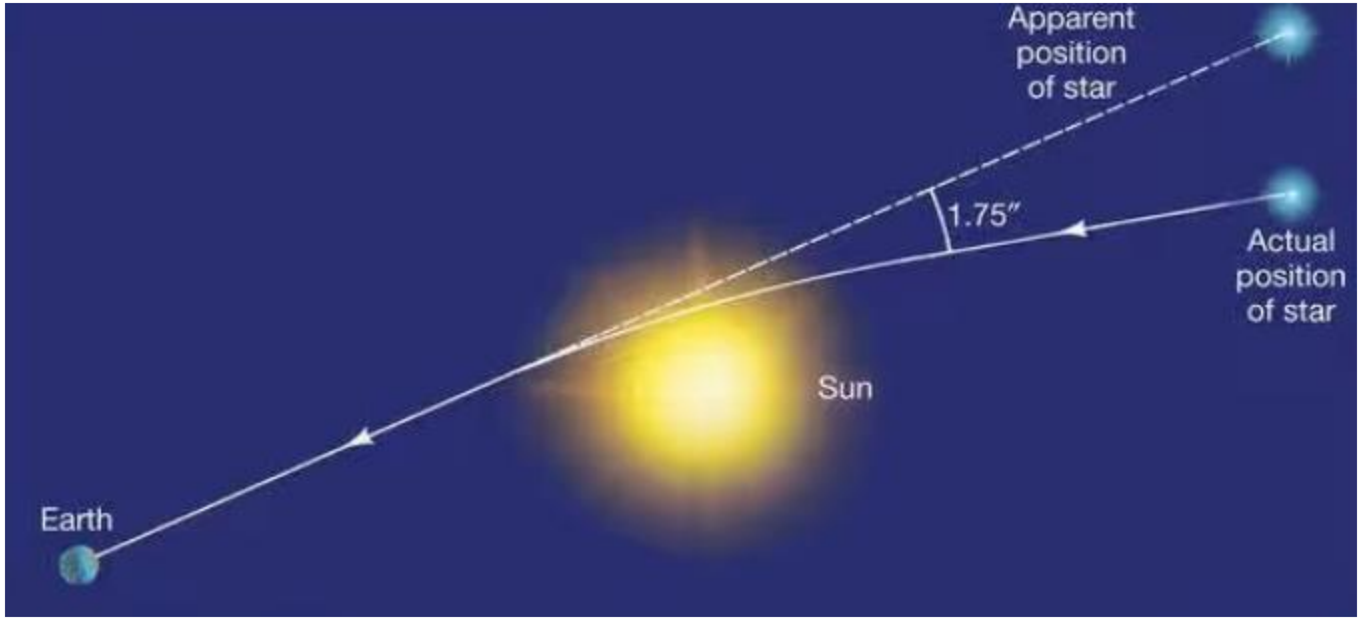

水星在近日点的移动速度比理论值大，即**水星轨道有进动**，近日点移动的速度比根据牛顿引力理论得到的(扣除水星质量由于运动而产生狭义相对论性增大的效果)快42.9″/世纪。这种现象用万有引力定律无法解释，而根据广义相对论计算的结果轨道旋进值是43.0 ″/世纪，在观测误差范围内。

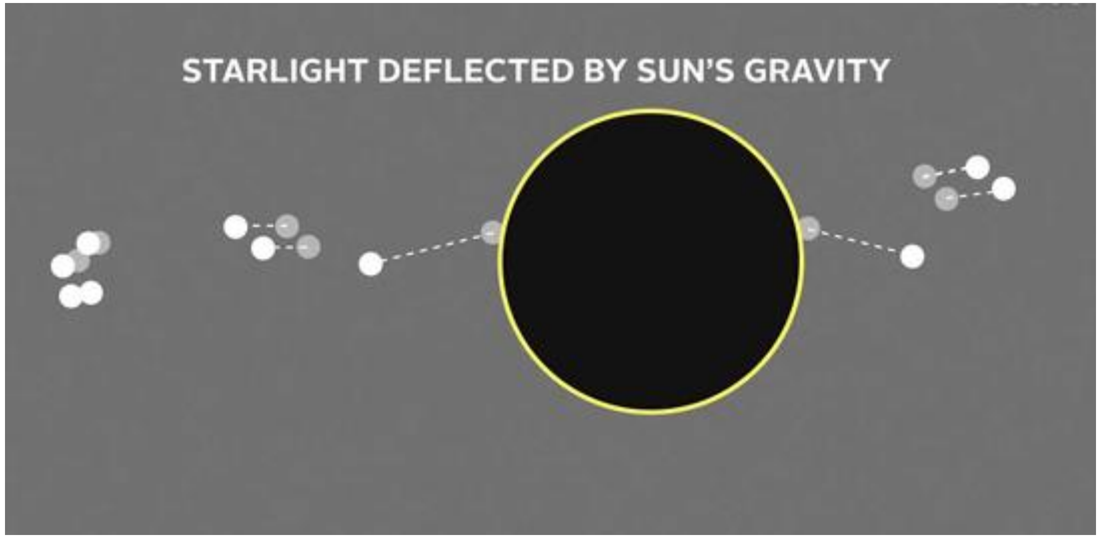
按照牛顿的观点，**引力效应是瞬时发生的**。这意味着物体以无限大的速度发出信号。爱因斯坦把相对论引入引力理论，提出种种论证，指出**任何信号速度均不能超过光速**，牛顿引力定律有错误。

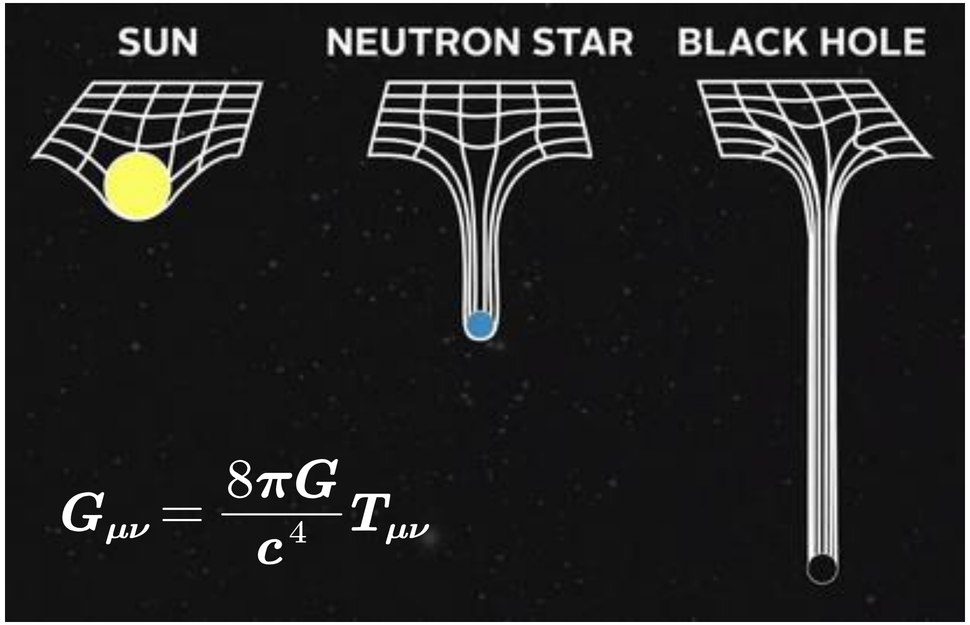
广义相对论还能较好地解释**谱线的红移和光线在太阳引力作用下的偏转**等现象。这表明广义相对论的引力理论比经典的引力理论进了一步。

爱因斯坦相对论告诉我们，凡有能量的东西必有质量，它将以引力形式被其他质量所吸引。光，有能量，必有质量。当光束经过太阳附近时，因受太阳吸引，光线将被弯曲。

（爱丁顿首次观测，精度存疑）





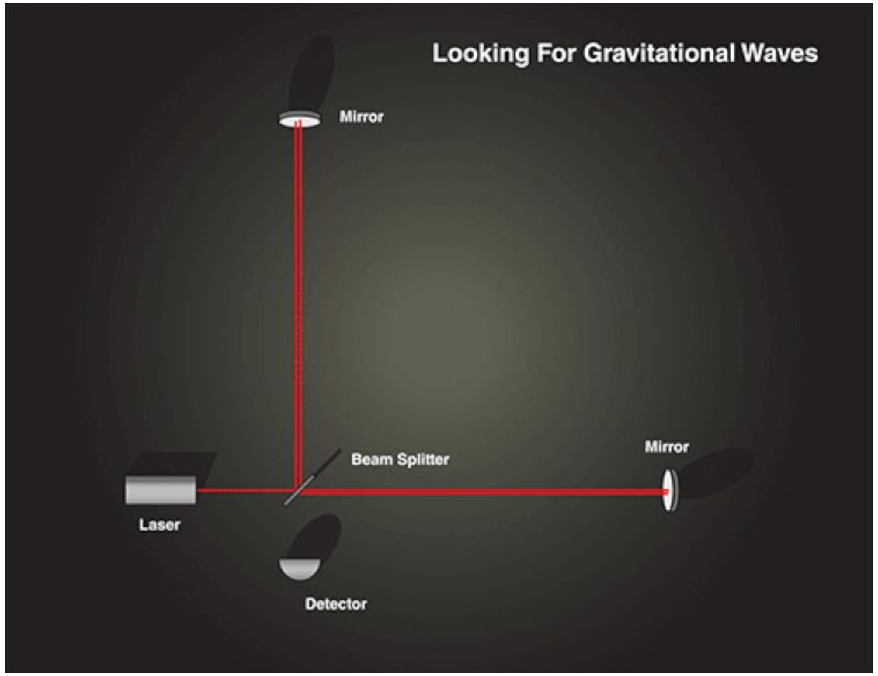

时空扭曲可视化直观实验

**牛顿引力：** 质量产生引力，引力决定物体运动状态

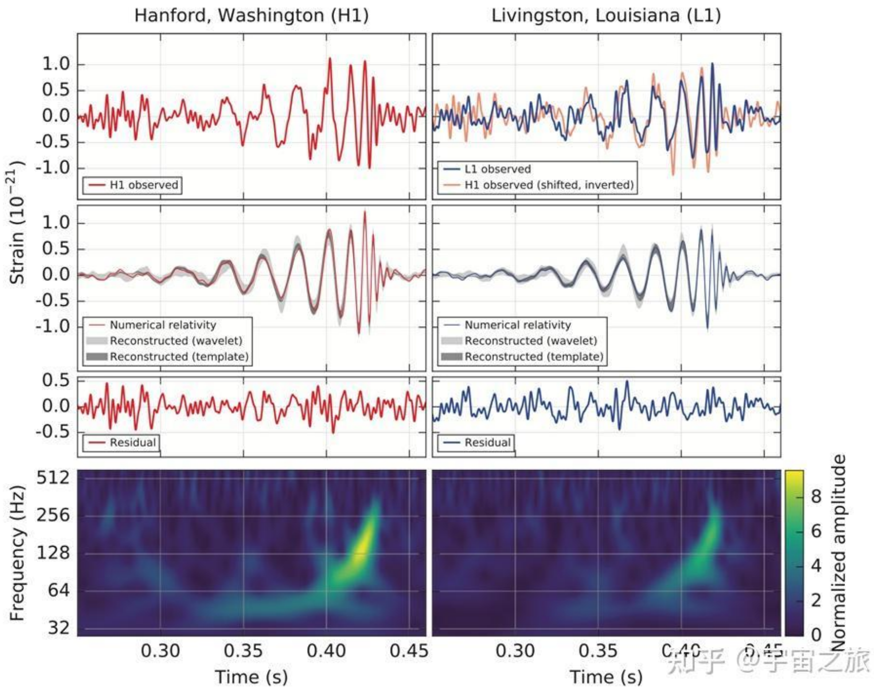
**广义相对论：** 质量决定时空度规，物体沿最短路径运动

电磁场具有动量和能量且能传播电磁波。这使人联想万有引力场也是物理实在，能传播引力波。广义相对论预言存在引力波，也有许多人努力探测它，目前已得到初步结果。

（2015，LIGO, The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory）

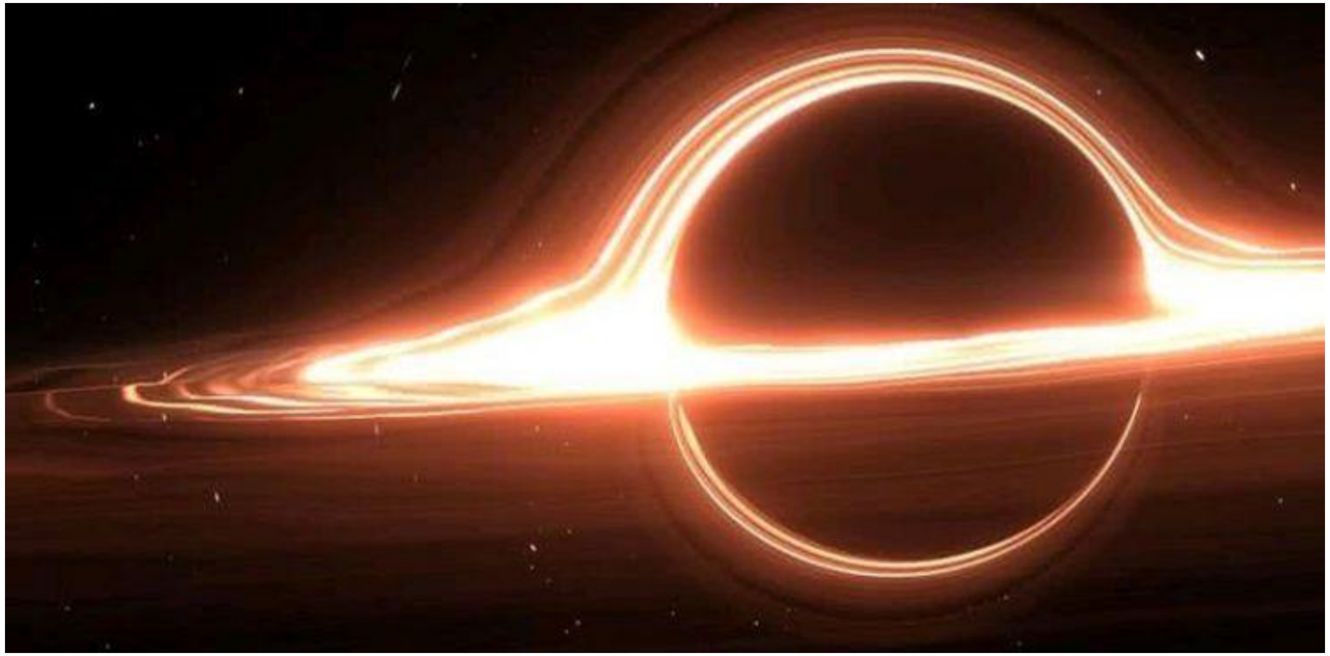







电磁波传播 以 光子 为媒介 引力传播 引力子? To be continued。。。

# 谢谢！



## [随堂小测验]

一个人站在半圆形的山顶上（人的身高相对于山的半径R忽略），水平扔一小球，忽略空气阻力，请问初速度至少多少球不会碰到山坡?