1 作业参考答案

1.1 作业 13a

(p212.20) 设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的全部特征值为 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，证明

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}a_{ji}.$$

证明： 等式左边是矩阵 A^2 的迹，恰好等式右边是矩阵 A^2 的迹。

21. 判断以下矩阵 A,B 是否相似？请说明理由.

$$(1)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix};$$

$$(2)\quad A=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&3&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

(1) 解:$\operatorname{rank}(A-I)=1$, 而 $\operatorname{rank}(B-I)=2$, 故不相似.

(2) 解: $\operatorname{rank}\left((A-I)^2\right)=1$, 而 $\operatorname{rank}\left((B-I)^2\right)=0.$，故不相似.

22. 求三阶可逆方阵 P 使得 $P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

解: 取 P 为置换矩阵

$$P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

(注: 满足条件的 P 不唯一, 例如对任意非零常数 a,b,c, 矩阵 $P=\begin{pmatrix}0&0&a\\b&0&0\\0&c&0\end{pmatrix}$ 也满足要求.)

26. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件。

解： 矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}$ 的特征多项式为

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I)&=\begin{vmatrix}-\lambda&0&1\\x&1-\lambda&y\\1&0&-\lambda\end{vmatrix}\\&=-(\lambda-1)^2(\lambda+1).\end{aligned}$$

只需 $\dim(A-I)=3-2=1$，

发现

$$A-I=\begin{pmatrix}-1&0&1\\x&0&y\\1&0&-1\end{pmatrix}.$$

因此，A 有三个线性无关的特征向量当且仅当 $x+y=0$。

29. 判断下列矩阵 A 是否可对角化？若可以，试求变换矩阵 T，使得 $T^{-1}AT$ 为对角阵。

(1) $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&1&1\\2&2&0\end{pmatrix}$;

(2) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\4&-2&-8\\-4&0&-1\end{pmatrix}$;

(4) $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$.

(1) 解：矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\3&1&1\\2&2&0\end{pmatrix}$. 计算特征多项式：

$$\begin{aligned}|A-\lambda I|&=\begin{vmatrix}-2-\lambda&0&0\\3&1-\lambda&1\\2&2&-\lambda\end{vmatrix}\\&=(-2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+1).\end{aligned}$$

特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=2,\lambda_3=-1$ 互异，故 A 可对角化。之后的特征向量都按下述流程求解，不再赘述

- 对 $\lambda_1=-2$，解 $(A+2I)\boldsymbol{x}=0$:

$$A+2I=\begin{pmatrix}0&0&0\\3&3&1\\2&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}3&3&1\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$.

- 对 $\lambda_2=2$，解 $(A-2I)\boldsymbol{x}=0$:

$$A-2I=\begin{pmatrix}-4&0&0\\3&-1&1\\2&2&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

- 对 $\lambda_3=-1$，解 $(A+I)\boldsymbol{x}=0$:

$$A+I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\3&2&1\\2&2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得基础解系 $\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

令 $T=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&1&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$，则有

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(-2,2,-1).$$

(2) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&5\end{pmatrix}$. 计算特征多项式:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&1\\2&4-\lambda&-2\\-3&-3&5-\lambda\end{vmatrix}=-(6-\lambda)(\lambda-2)^2.$$

得特征值 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=2$（二重）。需检查二重特征值 $\lambda=2$ 的几何重数。

$$A-2I=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&2&-2\\-3&-3&3\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

其秩为 1，故解空间维数为 $3-1=2$，等于代数重数。因此 A 可对角化. 令 $T=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$，则有

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(6,2,2).$$

.

(3) 特征值 $\lambda_1=-2,\lambda_2=\lambda_3=1$（二重）。

$$A-I=\begin{pmatrix}2&0&1\\4&-3&-8\\-4&0&-2\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&-3&-10\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

其秩为 2，故解空间维数为 $3-2=1$，小于代数重数 2。因此 A 不可对角化。

（4）特征值 $\lambda_1=4,\lambda_2=\lambda_3=1$（二重）

$$A-I=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行变换}}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

其秩为 1，故解空间维数为 $3-1=2$，等于代数重数。因此 A 可对角化。令 $T=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则有

$$T^{-1}AT=\mathrm{diag}(4,1,1).$$

30. 设 A,B 均为 n 阶方阵, A 有 n 个互异的特征值且 $AB=BA$。证明 B 相似于对角阵。

证明： 设 A 的 n 个互异特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$，对应的特征向量分别为 $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$，即

$$A\mathbf{x}_i=\lambda_i\mathbf{x}_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

由于特征值互异，$\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_n$ 线性无关. 由条件 $AB=BA$，对任意 i，有

$$A(B\mathbf{x}_i)=B(A\mathbf{x}_i)=B(\lambda_i\mathbf{x}_i)=\lambda_i(B\mathbf{x}_i).$$

上式表明 $B\mathbf{x}_i$ 也是 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量。从而存在非零常数 μ_i 使得

$$B\mathbf{x}_i=\mu_i\mathbf{x}_i,\quad i=1,2,\ldots,n.$$

这说明 $\mathbf{x}_i$ 同时也是 B 的特征向量，对应特征值为 μ_i。从而 B 可相似对角化.

作业一设 $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ 有 n 个两两不同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n\in\mathbb{F}$,则 A 与 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 在 $\mathbb{F}$ 上相似。

证明: 设 $P=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n)$,其中 $\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ 是 λ_i 对应的特征向量,$i=1,2,\ldots,n$。下面证明 P 是可逆方阵。

设 $\boldsymbol{x}=(x_i)\in\mathbb{F}^{n\times 1}$ 是线性方程组 $P\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解，即满足

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

对任意 $k\in\mathbb{N}$，有

$$A^k\sum_{i=1}^{n}x_i\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^kx_i\boldsymbol{\alpha}_i=\mathbf{0}.$$

于是，对 $k=0,1,\ldots,n-1$，可得

$$(x_1\boldsymbol{\alpha}_1,x_2\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,x_n\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{n-1}\\1&\lambda_2&\cdots&\lambda_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&\lambda_n&\cdots&\lambda_n^{n-1}\end{pmatrix}=O.$$

由于 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ 两两不同，n 阶 Vandermonde 矩阵 (λ_i^{j-1}) 是可逆方阵。从而有

$$(x_1\boldsymbol{\alpha}_1,x_2\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,x_n\boldsymbol{\alpha}_n)=O\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{x}=\mathbf{0}.$$

由线性方程组 $P\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解集结构，知 P 是可逆方阵。因此,

$$A=P\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)P^{-1}$$

与 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ 在 $\mathbb{F}$ 上相似。

设 $A\in F^{n\times n}$ 的所有特征值都属于 F。A 可以在 F 上相似于对角方阵的充分必要条件是每个特征值的几何重数等于代数重数。

证明: (充分性) 设 $\varphi_A(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\lambda_i)^{n_i}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 两两不同。设 $\{\alpha_j\mid s_{i-1}+1\leqslant j\leqslant s_i\}$ 是线性方程组 $(\lambda_iI-A)x=0$ 的一个基础解系,$s_0=0,s_i=n_1+\cdots+n_i$,$1\leqslant i\leqslant k$。易知 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ 满足

$$AP=P\operatorname{diag}(\lambda_1I_{n_1},\lambda_2I_{n_2},\ldots,\lambda_kI_{n_k}).$$

假设 $Px=0$，同前一个命题的证明，可得

$$\sum_{j=s_{i-1}+1}^{s_i} x_j\alpha_j = 0, \quad \forall i.$$

故 $x=0$。因此，P 是可逆方阵，A 与 $\operatorname{diag}(\lambda_1 I_{n_1}, \lambda_2 I_{n_2}, \ldots, \lambda_k I_{n_k})$ 相似。

(必要性) 设 A 与 $B=\operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ 在 F 上相似。几何重数和代数重数都是相似不变量。容易验证，B 的每个特征值 b 的几何重数等于代数重数。

1.2 作业 13b

31. 设 n 阶方阵 A 满足 $A^2=I$，证明 A 相似于 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix}$，其中 $0 \le r \le n$。

证明： 由于 $A^2=I$，于是 A 的极小多项式 $m(x)$ 整除 $x^2-1=(x-1)(x+1)$。从而 A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2=1$，因而只能是 1 或 -1。因为 x^2-1 无重根，所以 $m(x)$ 也无重根，故 A 可对角化。于是存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{pmatrix},$$

其中 r 是特征值 1 的代数重数（也是几何重数），显然 $0 \le r \le n$。

32. 设 A 为 3 阶实方阵，且 A 不实相似于上三角阵，则 A 一定复相似于对角阵？

证明： 是的！

首先，若 A 的特征值全是实数，则 A 可相似于上三角阵, 故 A 必有非实复特征值。

由于 A 是实矩阵，其特征多项式是实系数三次多项式，因此它至少有一个实根。设 A 的特征值为 $\lambda \in \mathbb{R}$ 和 $\alpha \pm \beta i$（其中 $\beta \neq 0$）。显然，这三个特征值互不相同,，则 A 一定复相似于对角阵。

33. 设 n 阶复方阵 A 的全部特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$，$f(\lambda)$ 为多项式。证明：$f(A)$ 的全部特征值为 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \ldots, f(\lambda_n)$，由此

$$\det(f(A)) = f(\lambda_1)f(\lambda_2)\ldots f(\lambda_n).$$

证明： 由于 A 是复方阵，由复矩阵的三角化定理，存在可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 T 是上三角矩阵，主对角线元素为 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$。

对任意多项式 $f(\lambda)$，由于 $A=PTP^{-1}$，且 $A^k=PT^kP^{-1}$，可得

$$f(A)=P\,f(T)\,P^{-1}.$$

因为 T 是上三角矩阵,可验证 $f(T)$ 也是上三角矩阵,且其主对角线元素为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_n)$，故 $f(A)$ 的全部特征值即为 $f(\lambda_1),f(\lambda_2),\ldots,f(\lambda_n)$。

又矩阵的行列式等于其全部特征值的乘积，因此

$$\det(f(A))=f(\lambda_1)f(\lambda_2)\cdots f(\lambda_n).$$

34. 设三阶方阵 A 的特征多项式为 $p_A(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$，求多项式矩阵 $A^3-2A+3I$ 的特征值与行列式。

解： A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1$（二重）和 $\lambda_3=2$（一重）。

由 33 题立得 $A^3-2A+3I$ 的特征值为 $2,2,7$，其行列式为所有特征值的乘积：

$$\det(A^3-2A+3I)=2\times2\times7=28.$$

46. 求下列矩阵的若当标准形：

$$(1)\begin{pmatrix}2&-2&3\\1&1&1\\1&3&-1\end{pmatrix}\qquad(3)\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

解：

(1) 特征多项式：

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&3\\1&1-\lambda&1\\1&3&-1-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=-(\lambda+2)(\lambda-1)(\lambda-3).$$

特征值为 $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=3$，互不相同，故 A 可对角化，其若当标准形为

$$J_A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{pmatrix}.$$

(3) 设 $B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$，这是一个上三角矩阵，特征值全为 1。令 $N=B-I$，计算 N 的幂. $\operatorname{rank}(N)=3,\ \operatorname{rank}(N^2)=2,\ \operatorname{rank}(N^3)=1,\ \operatorname{rank}(N^4)=0$。故 B 的若当标准

形由一个 4 阶若当块组成:

$$J_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

请一定要学习书上例子 6.5.5!!!!!!!!!!!!!!

47. 设 $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 10 & -4 & 5 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$，求方阵 T，使 $T^{-1}AT$ 为若当标准形。

解: 先求 A 的特征多项式:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 3 \\ 10 & -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4 & 6-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$（二重），$\lambda_3 = 2$（一重）。$rank(A-I) = 2$, 于是，若当标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

从而根据例子 6.5.5 得到变换矩阵 $T = (v_2, v_3, v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 15 \\ 3 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, 满足 $T^{-1}AT = J$。

48 设方阵 A 满足 $A^2 = A$。用矩阵的若当标准型证明：$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{rank}(A)$。

证明: 由于 $A^2 = A$，A 是幂等矩阵。设 $J = P^{-1}AP$ 为 A 的若当标准型，其中 P 可逆，J 为若当形矩阵。由 $A^2 = A$ 得

$$J^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP = J.$$

考虑 J 中的任意一个若当块 J_i，其形式为

$$J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{pmatrix},$$

其中 λ_i 是 A 的特征值。由 $J^2 = J$ 知每个若当块满足 $J_i^2 = J_i$。若 J_i 的阶数 $k \geq 2$，则计算 J_i^2 可知其主对角线上方第一条对角线上的元素为 $2\lambda_i$，而 J_i 对应位置的元素为 1，故 $J_i^2 = J_i$ 成立当且仅当 $k = 1$。因此，所有若当块均为一阶块，即 J 为对角矩阵。

进一步，由 $J_i^2 = J_i$ 且 J_i 为一阶块，有 $\lambda_i^2 = \lambda_i$，故 $\lambda_i = 0$ 或 1。于是 J 形如

$$J = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0),$$

其中 1 的个数等于特征值 1 的代数重数。

在 J 中，迹 $\operatorname{Tr}(J)$ 等于对角线元素之和，即 1 的个数；而秩 $\operatorname{rank}(J)$ 等于非零特征值的个数，也即 1 的个数。由于迹和秩在相似变换下不变，故

$$\operatorname{Tr}(A) = \operatorname{Tr}(J) = \operatorname{rank}(J) = \operatorname{rank}(A).$$

(Rmk) 事实上能够直接看出最小多项式无重根，从而可以相似对角化，且特征值为 1 或 0.