

线性代数习题课讲义

韦宇桐

作业 4、5a、5b

1 第四次作业

问题 1 (10). A, B 都是 n 阶对称方阵，且 $AB = BA$ ，证明 AB 也是对称方阵。

证明：由 $A^T = A$, $B^T = B$ 及 $AB = BA$, 有

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB,$$

故 $(AB)^T = AB$, 即 AB 是对称方阵。

问题 2 (14). 设 A_1, A_2, \dots, A_k 都是 n 阶可逆方阵。证明： $(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$ 。

证明：由矩阵逆的性质，有

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)(A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}) = I_n,$$

其中 I_n 为 n 阶单位矩阵。同理可得

$$(A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1})(A_1 A_2 \cdots A_k) = I_n.$$

故 $(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}$ 。

注：这里有普遍错误

上述方法是最为标准的方法，即按定义验证“左逆”、“右逆”，由此说明“逆”。不少同学直接取逆，但没有说明逆的存在性。例如：

典型错误：

证明. 我们知道对于任意可逆矩阵 B 和 C , 有 $(BC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}$. 将此性质递归应用于 $A_1 A_2 \cdots A_k$, 即可得：

$$(A_1 A_2 \cdots A_k)^{-1} = A_k^{-1}(A_1 A_2 \cdots A_{k-1})^{-1} \cdots = A_k^{-1} \cdots A_2^{-1} A_1^{-1}.$$

□

题目本身一个隐含意思就是要证明若干个可逆矩阵相乘仍然是一个可逆矩阵。上述证明直接用到了 $(A_1 A_2 \cdots A_{k-1})^{-1}$ 存在这件事，所以是不对的。

另外还有一些同学只验证了一边，用到下面的事实：如果矩阵 P 可逆，且 $PA = I$ ，则 A 是 P 的逆。所以就只验证了“右逆”，但这里犯的错误同样是默认了“若干个可逆矩阵相乘仍然是一个可逆矩阵”。包括后面的 16 题也是一样的，不能只验证一边。同学们初学的时候建议按照逆的定义，严格地去验证“左逆”和“右逆”，由此说明逆。

问题 3 (16). 已知 $I - 2A - 3A^2 + 4A^3 + 5A^4 - 6A^5 = O$ 。证明 $I - A$ 可逆，并求出逆。

证明. 由

$$I = (I - A)(2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4)$$

以及

$$I = (2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4)(I - A)$$

所以 $(I - A)^{-1} = 2I - 3A^2 + A^3 + 6A^4$ 。 \square

问题 4 (18). 证明： $(A_1 A_2 \cdots A_k)^T = A_k^T \cdots A_2^T A_1^T$ (假设矩阵乘法有意义)。

由矩阵转置的性质，对于两个矩阵，有 $(AB)^T = B^T A^T$ 。递归应用此性质，即得结论。

问题 5 (20). 证明：不存在 n 阶复方阵满足 $AB - BA = I$ 。

取迹。

问题 6 (作业 1). 设 A 为 n 阶方阵且满足 $\text{tr}(A \bar{A}^T) = 0$ 。

证明：由迹的定义， $\text{tr}(A \bar{A}^T) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2$ 。由于 $|a_{ij}|^2 \geq 0$ ，且和为 0，故所有 $a_{ij} = 0$ ，即 $A = 0$ 。

问题 7 (作业 2). 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

计算 $\text{tr}(A^k)$ ，其中 k 为任意正整数。

提示：利用等式 $\text{tr}(B) = \text{tr}(PBP^{-1})$ ，其中 B, P 为同阶方阵且 P 可逆。

解答

令

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix},$$

则 $A = PBP^{-1}$ 。

因此，

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB^k P^{-1},$$

$$\text{tr}(A^k) = \text{tr}(PB^k P^{-1}) = \text{tr}(B^k) = \text{tr} \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k \end{pmatrix} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

2 第五次作业

矩阵性质证明

问题 8 (21). 证明: 可逆上(下)三角、准对角、对称、反对称方阵的逆矩阵仍然分别是上(下)三角、准对角、对称、反对称的。

证明. 1. 上三角矩阵的证明

用数学归纳法证明。

取可逆上三角方阵 $A_n = (a_{ij})_{n \times n}$, 所有 $i > j$ 有 $a_{ij} = 0$ 。

设 $A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & B \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$, 其中:

$$\bullet \quad B = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad A_{n-1} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ 为 } (n-1) \text{ 阶上三角方阵}$$

由于 A_n 可逆, 故 $a_{11} \neq 0$ 且 A_{n-1} 可逆。

直接计算得 (Schur 公式):

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & -\frac{1}{a_{11}} B A_{n-1}^{-1} \\ 0 & A_{n-1}^{-1} \end{pmatrix}$$

归纳假设: 假设对于 $(n-1)$ 阶可逆上三角方阵, 其逆矩阵仍为上三角矩阵。

因此 A_n^{-1} 为上三角矩阵。

下三角矩阵的情况证明类似, 只需相应调整分块方式。

2. 准对角矩阵的证明

设 $A = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_k)$ 为可逆准对角矩阵, 其中每个 A_i 都是方阵。

设 $B = A^{-1}$ 。由于 $AB = BA = I$, 且矩阵乘法在准对角矩阵上是分块进行的, 有:

$$AB = \text{diag}(A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_k B_k) = I$$

$$BA = \text{diag}(B_1 A_1, B_2 A_2, \dots, B_k A_k) = I$$

因此 $A_i B_i = B_i A_i = I$, 即 $B_i = A_i^{-1}$, 所以:

$$B = \text{diag}(A_1^{-1}, A_2^{-1}, \dots, A_k^{-1})$$

也是准对角矩阵。

3. 对称矩阵的证明

设 A 为可逆对称矩阵, 即 $A^T = A$ 。

由于 A 可逆, A^{-1} 存在。考虑:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = A^{-1}$$

因此 A^{-1} 也是对称矩阵。

4. 反对称矩阵的证明

设 A 为可逆反对称矩阵, 即 $A^T = -A$ 。

由于 A 可逆, A^{-1} 存在。考虑:

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1} = (-A)^{-1} = -A^{-1}$$

因此 A^{-1} 也是反对称矩阵。 \square

矩阵计算问题

分块矩阵幂次和逆的计算

问题 9 (30). $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 计算 A^n 及 A^{-1} 。

将矩阵 A 分块为:

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ I & B \end{pmatrix}$$

其中 $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

1. 计算 A^n

对于形如 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ I & B \end{pmatrix}$ 的矩阵, 其幂次公式为:

$$A^n = \begin{pmatrix} B^n & 0 \\ nB^{n-1} & B^n \end{pmatrix}$$

计算 B^n :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + N, \quad \text{其中 } N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由于 $N^2 = 0$, 根据二项式定理:

$$B^n = (I + N)^n = I + nN = \begin{pmatrix} 1 & -n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此:

$$A^n = \begin{pmatrix} B^n & 0 \\ nB^{n-1} & B^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ n & -n(n-1) & 1 & -n \\ 0 & n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. 计算 A^{-1}

对于形如 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ I & B \end{pmatrix}$ 的矩阵, B 可逆, 其逆矩阵公式 (Schur 公式) 为:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -B^{-2} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

计算 B^{-1} :

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

计算 B^{-2} :

$$B^{-2} = (B^{-1})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & 0 \\ -B^{-2} & B^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

问题 10 (31). 设 A, B 为同阶方阵, 且满足 $AB = BA$ 。计算

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}^n$$

由于 $AB = BA$, 我们可以使用二项式定理的思想来计算该分块矩阵的幂。

设 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ O & A \end{pmatrix}$, 将其分解为:

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}$$

记 $D = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}$ 。

由于 $AB = BA$, 易验证 $DN = ND$, 即 D 与 N 可交换。

且 $N^2 = \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix}$

根据二项式定理 (由于 D 与 N 可交换):

$$M^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k$$

由于 $N^2 = 0$, 当 $k \geq 2$ 时 $N^k = 0$, 所以:

$$M^n = D^n + nD^{n-1}N$$

计算各项:

$$\begin{aligned} D^n &= \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A^n & O \\ O & A^n \end{pmatrix} \\ D^{n-1}N &= \begin{pmatrix} A^{n-1} & O \\ O & A^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A^{n-1}B \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此:

$$M^n = \begin{pmatrix} A^n & O \\ O & A^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} O & A^{n-1}B \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^n & nA^{n-1}B \\ O & A^n \end{pmatrix}$$

问题 11 (32). 设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^3 = I_n$ 。计算

$$\begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}^{2024}$$

令 $M = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix}$, 其中 O 是 n 阶零矩阵, I_n 是 n 阶单位矩阵。

计算 M 的低次幂以观察规律:

$$M^2 = \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

$$M^3 = M^2 \cdot M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A \\ A^2 & O \end{pmatrix}$$

$$M^4 = M^3 \cdot M = \begin{pmatrix} O & A \\ A^2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^2 & O \\ O & A^2 \end{pmatrix}$$

$$M^5 = M^4 \cdot M = \begin{pmatrix} A^2 & O \\ O & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A^2 \\ A^3 & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A^2 \\ I_n & O \end{pmatrix} \quad (\text{因为 } A^3 = I_n)$$

$$M^6 = M^5 \cdot M = \begin{pmatrix} O & A^2 \\ I_n & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & I_n \\ A & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^3 & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O \\ O & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$$

我们发现 $M^6 = I_{2n}$, 即 M 的阶为 6。

计算 2024 除以 6 的余数:

$$2024 \div 6 = 337 \times 6 + 2 \Rightarrow 2024 \equiv 2 \pmod{6}$$

因此:

$$M^{2024} = M^2 = \begin{pmatrix} A & O \\ O & A \end{pmatrix}$$

问题 12 (33). 设 $A \in F^{m \times m}, B \in F^{n \times n}, C \in F^{n \times m}$, 且 A, B 可逆。求分块矩阵

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}$$

的逆。

由 Schur 公式 (本质上都是设出其逆, 然后解方程; 或者用打洞的想法), 得其逆为:

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}$$

注: 书上例子 4.3.3 很重要

同学们写作业的时候会发现经常需要计算一个二阶分块矩阵的逆。我将其摘到这里, 方便同学们查阅。理解即可。

设分块矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

其中 A_1, A_4 都是方阵。

当 A_1 是可逆方阵时, 有矩阵乘积分解 (Schur 公式):

$$A = \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_3A_1^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_4 - A_3A_1^{-1}A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

式中 $S = A_4 - A_3A_1^{-1}A_2$ 称为 A_1 的 Schur 补。

求行列式, 有: $\det A = \det A_1 \det S$

特别地, 如果 $A_1A_3 = A_3A_1$, 则: $\det A = \det(A_1A_4 - A_3A_2)$

另外, A 是可逆方阵当且仅当 S 是可逆方阵。此时, 有

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -A_1^{-1}A_2 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0 \\ 0 & S^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -A_3A_1^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^{-1} + A_1^{-1}A_2S^{-1}A_3A_1^{-1} & -A_1^{-1}A_2S^{-1} \\ -S^{-1}A_3A_1^{-1} & S^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

问题 13 (36). 求逆:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_1 \\ 0 & \cdots & A_2 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

由于每个 A_i 可逆，反对角分块矩阵的逆矩阵为：

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & A_k^{-1} \\ 0 & \cdots & A_{k-1}^{-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(可以先通过解方程猜出来是这个，然后再用定义验证。)

行列式计算

问题 14 (1). 计算下列行列式：

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

解答：该行列式的值为 -40 。

(3)

$$\begin{vmatrix} x+a & x+b & x+c \\ y+a & y+b & y+c \\ z+a & z+b & z+c \end{vmatrix}$$

解答：该行列式的值为 0 。

(4)

$$\begin{vmatrix} & & a_{1n} \\ & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解答：从上到下按行展开。该行列式的值为

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n a_{i,n+1-i}$$

其中 $\prod_{i=1}^n a_{i,n+1-i}$ 表示反对角线上元素的乘积，即 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 。

(6)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix}$$

解答：

$$\begin{aligned} \text{原式} &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_3 & 0 & 0 \\ d_2 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & c_3 & 0 & 0 \\ d_1 & d_3 & d_4 & 0 \\ e_1 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} \\ &= (a_1 b_2 - a_2 b_1) \begin{vmatrix} c_3 & 0 & 0 \\ d_3 & d_4 & 0 \\ e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)(c_3 d_4 e_5) \end{aligned}$$

或用课本例 4.2.15 的方法，准上（下）三角矩阵的 \det 等于对角的子方阵 \det 的乘积。

问题 15. 2. 将行列式

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & x-2 \end{vmatrix}$$

展开为关于 x 的多项式。

使用递推关系：设 D_n 为 n 阶行列式，其中主对角线元素为 $x-2$ ，次对角线元素为 1。递推公式为 $D_n = (x-2)D_{n-1} - D_{n-2}$ ，基况为 $D_1 = x-2$ ， $D_2 = (x-2)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$ 。计算得：

$$D_3 = (x-2)D_2 - D_1 = (x-2)(x^2 - 4x + 3) - (x-2) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4,$$

$$D_4 = (x-2)D_3 - D_2 = (x-2)(x^3 - 6x^2 + 10x - 4) - (x^2 - 4x + 3) = x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5.$$

因此，行列式展开为 $x^4 - 8x^3 + 21x^2 - 20x + 5$ 。

问题 16. 5. 证明：

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$$

直接算就行了

问题 17. 8. 在平面直角系中， $A=(0,0)$ ， $B=(3,-1)$ ， $C=(2,1)$ ， $D=(1,1)$ 。求四边形 $ABCD$ 的面积。

四边形 $ABCD$ 的面积为 3

问题 18. 9. 在三维空间直角坐标系中，已知点 A, B, C, D 的坐标分别是 $(1,1,0), (3,1,2), (0,1,3), (2,2,4)$ 。求四面体 $ABCD$ 的体积及各个面的面积。

体积为 $\frac{4}{3}$ ，面面积分别为 $4, \sqrt{11}, \frac{\sqrt{59}}{2}, \frac{\sqrt{35}}{2}$ 。

问题 19. 10. 设二阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的行列式非零。 $A : x' = a_{11}x + a_{12}y, y' = a_{21}x + a_{22}y$ 是坐标平面 \mathbb{R}^2 到坐标平面 \mathbb{R}^2 的变换。证明： A 将单位正方形映射为平行四边形，且平行四边形的面积为 $|\det(A)|$ 。

证明. 设单位正方形的四个顶点为：

$$O(0, 0), \quad P(1, 0), \quad Q(0, 1), \quad R(1, 1)$$

在变换 A 作用下，各点映射为：

$$\begin{aligned} O' &= (0, 0) \\ P' &= (a_{11}, a_{21}) \\ R' &= (a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22}) \end{aligned}$$

向量 $\overrightarrow{O'P'} = (a_{11}, a_{21})$, $\overrightarrow{O'R'} = (a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$ 。

由于 $\det(A) \neq 0$, 向量 $\overrightarrow{O'P'}$ 与 $\overrightarrow{O'R'}$ 线性无关，故 $O'P'R'$ 构成平行四边形。

平行四边形面积为：

$$\text{面积} = \left| \overrightarrow{O'P'} \times \overrightarrow{O'R'} \right| = |a_{11}(a_{21} + a_{22}) - a_{21}(a_{11} + a_{12})| = |a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}| = |\det(A)|$$

因此， A 将单位正方形映射为平行四边形，且面积为 $|\det(A)|$ 。 \square

分块矩阵行列式

问题 20 (作业 1). 设 A, B 为两个方阵。利用行列式定义证明：

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$$

进一步的，设 A_1, \dots, A_r 为 r 个方阵，证明：

$$\det \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix} = \prod_{i=1}^r \det(A_i)$$

(提示：可以对 A 的阶数用归纳法。)

证明. (1) 设 $A \in F^{n \times n}, B \in F^{m \times m}$ 。当 $A \in F^{1 \times 1}$ 时，

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$$

显然成立。

考虑当 $A \in F^{(n-1) \times (n-1)}$ ($n \geq 2$) 时上式成立，与 $A \in F^{n \times n}$ 时，

$$\det \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det \begin{pmatrix} A_{1j} & O \\ O & B \end{pmatrix}$$

(其中 A_{1j} 为 A 删去第 1 行第 j 列的矩阵, 显然有 $A_{1j} \in F^{(n-1) \times (n-1)}$)

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} a_{1j} \det(A_{1j}) \det(B) = \det(A) \det(B)$$

即上式始终成立。后面的过程归纳即可。 \square

3 补充内容

问题 1

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times m$ 矩阵, $n \geq m$, $\lambda \neq 0$ 。证明:

$$\det(\lambda I_n - BA) = \lambda^{n-m} \det(\lambda I_m - AB).$$

证明

考虑分块矩阵

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}.$$

计算 $\det(M)$: 一方面,

$$\det(M) = \det(\lambda I_m) \det(I_n - B(\lambda I_m)^{-1}A) = \lambda^m \det\left(I_n - \frac{1}{\lambda}BA\right) = \lambda^{m-n} \det(\lambda I_n - BA).$$

另一方面,

$$\det(M) = \det(I_n) \det(\lambda I_m - AB) = \det(\lambda I_m - AB).$$

比较两式, 即得所求恒等式。

问题 2

计算 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & a & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a \end{pmatrix}$$

的行列式。

$$\lambda = (a-1)I_n + J$$

$$\begin{aligned} \text{令 } A &= (J^n)^T \quad B = J^n \\ AB &= n \quad BA = J \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a-1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & a-1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1-a.$$

11 $\det(\lambda I_n - J)$ = $\lambda^m \det(\lambda - n)$

解答

矩阵 A 可以写为:

$$A = (a - 1)I_n + J,$$

其中 I_n 是 n 阶单位矩阵, J 是所有元素均为 1 的 n 阶矩阵。

令 $A = \mathbf{1}_n^T$ (全 1 行向量), $B = \mathbf{1}_n$ (全 1 列向量), 则 $AB = n$, $BA = J_n$ (全 1 矩阵)。

由第一题结论 ($m = 1$):

$$\det(\lambda I_n - J_n) = \lambda^{n-1}(\lambda - n).$$

矩阵 $M = (a - 1)I_n + J_n$ 。令 $\lambda = 1 - a$, 则:

$$\det(\lambda I_n - J_n) = \det(-M) = (-1)^n \det(M).$$

代入上式:

$$(-1)^n \det(M) = (1 - a)^{n-1}(1 - a - n).$$

解得:

$$\det(M) = (-1)^n(1 - a)^{n-1}(1 - a - n) = (a - 1)^{n-1}(a + n - 1).$$

问题 3

设 A 是 m 阶方阵, B 是 n 阶方阵。证明:

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m,$$

其中 \otimes 表示矩阵的张量积 (Kronecker 积)。

证明

首先, 回忆张量积的定义: 如果 A 是 $m \times m$ 矩阵, B 是 $n \times n$ 矩阵, 则 $A \otimes B$ 是 $mn \times mn$ 的块矩阵, 其第 (i, j) 块是 $a_{ij}B$ 。

考虑两个特殊矩阵:

- $A \otimes I_n$: 其行列式 (留作思考) 为

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \swarrow & \cdots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & \cdots & a_{mn}B \end{pmatrix} \quad \text{一般 } A \otimes B \neq B \otimes A$$

$$\det(A \otimes I_n) = (\det A)^n.$$

- $I_m \otimes B$: 这是一个块矩阵, 其对角块都是 B , 因此其行列式为

$$\left(\begin{array}{cccc} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{array} \right) \det(aI) \det(bI) \det(cI) \det(dI) = (\det B)^m.$$

现在, 注意到张量积满足以下性质:

$$a \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ c & 0 & d \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & c & d \end{vmatrix}$$

$$A \otimes B = (A \otimes I_n)(I_m \otimes B),$$

$$ad - abcd \neq abc + bd.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}I_n & a_{12}I_n & \cdots & a_{1n}I_n \\ \vdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}I_n & a_{m2}I_n & \cdots & a_{mn}I_n \end{pmatrix}$$

因此，计算行列式：

$$\det(A \otimes B) = \det((A \otimes I_n)(I_m \otimes B)).$$

所以

$$\det(A \otimes B) = \det(A \otimes I_n) \cdot \det(I_m \otimes B) = (\det A)^n (\det B)^m.$$

这就完成了证明。

问题 4

设 A, B 为 $n \times n$ 矩阵，证明：

$$\text{tr}([A, B]^2) = 2 \text{tr}(A^2 B^2) - 2 \text{tr}((AB)^2)$$

其中 $[A, B] = AB - BA$ 是换位子。

解答

直接计算：

$$[A, B]^2 = (AB - BA)^2 = ABAB - ABBA - BAAB + BABA$$

取迹：

$$\text{tr}([A, B]^2) = \text{tr}(ABAB) - \text{tr}(ABBA) - \text{tr}(BAAB) + \text{tr}(BABA)$$

利用迹的循环性质 $\text{tr}(XYZ) = \text{tr}(ZXY)$ ：

$$\text{tr}(ABAB) = \text{tr}((AB)^2)$$

$$\text{tr}(ABBA) = \text{tr}(BAAB) = \text{tr}(A^2 B^2)$$

$$\text{tr}(BABA) = \text{tr}((AB)^2)$$

因此：

$$\text{tr}([A, B]^2) = \text{tr}((AB)^2) - \text{tr}(A^2 B^2) - \text{tr}(A^2 B^2) + \text{tr}((AB)^2) = 2 \text{tr}((AB)^2) - 2 \text{tr}(A^2 B^2)$$