第四次习题课

1　定义定理

1.1　定理

我们先简单总结以下几个关于可导函数极限相关定理及其条件:

定理名称	$f(x),g(x)$ 条件	结论
Fermat 定理	$f(x)$ 连续, 在 x_0 处是局部极值点, 且在这一点导函数存在	$f'(x_0)=0$
Rolle 定理	$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$	$\exists\xi\in(a,b)$,$f'(\xi)=0$
Lagrange 中值	$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导	$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$
Cauchy 中值	$f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导且 $g(b)\neq g(a)$; $f'(x),g'(x)\neq 0$	$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$
Darboux 定理	$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导	对介于 $f'_+(a),f'_-(b)$ 中任意一个值 η, 总存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\eta$
L'Hospital	$f(x),g(x)$ 在 x_0 附近可导,$g'(x)$ 存在且不为 0, 满足 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$	若 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l$, 那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$

1.2　定义

单调性, 极值点

凸性:$f(x)$ 连续, 且满足 $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$.

等价定义:$f''(x)\geq 0$ 或者在凸性区间内 $f(x)\geq f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

拐点: 类似极值点定义

(注:$f'(x_0)=0$ 不一定是极值点,$f''(x_0)$=0 不一定是拐点)

参数方程的导数: 设 $x = x(t), y = y(t)$, 那么有:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''x' - x''y'}{(x')^3}$$

曲率:

$$\kappa = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

参数方程形式:

$$\kappa = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))}$$

2 问题较多的习题

1(P106.4(4)) 当 $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ 时有 $\frac{\beta-\alpha}{cos^2\alpha} < \tan\beta - \tan\alpha < \frac{\beta-\alpha}{cos^2\beta}$.
Pf. 由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi \in (\alpha, \beta)$ 使得 $(\tan)'(\xi) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{\beta-\alpha}$, 再由 $\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}$ 和 ξ, α, β 的关系即得.
2(P106.12) 证明: 对所有实数 x, y,$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|^2$ 都成立, 证明:$f(x)$ 恒为常数.
Pf. 对任意 $\epsilon > 0$, 存在 δ 使得对任意 $|x - y| < \delta$ 使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, 这说明 $f(x)$ 一致连续自然连续, 再证 $f'(x) = 0$ 即可证明.
3(P107.17) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有二阶导数,$f(0) = f'(0), f(1) = f'(1)$, 求证: 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $f(\xi) = f''(\xi)$.
Pf. 构造 $g(x) = (f(x) - f'(x))e^x, g(0) = g(1) = 0$, 存在 $\xi \in (0, 1)$ 使得 $g'(\xi) = 0$, 即 $f(\xi) = f''(\xi)$.

3 补充习题

1(不动点定理) 设函数 $f(x)$ 定义在区间 $[a, b]$ 上连续, 且值域也在 $[a, b]$ 中, 则:
(1) 对给定的 $0 < k < 1$, 任意 $x, y \in [a, b]$ 有 $|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$, 证明 $f(x)$ 存在唯一不动点.

(2) 任意 $x,y\in[a,b]$ 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 证明 $f(x)$ 存在唯一不动点.
(3) 更改条件: 当连续函数定义域在实轴上, 对给定的 $0<k<1$, 对任意 x,y 有 $|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$, 证明 $f(x)$ 存在唯一不动点.
(4) 更改条件: 当连续函数定义域在实轴上, 对任意 x,y 有 $|f(x)-f(y)|<|x-y|$, 若值域有界是否存在不动点；若值域无界是否存在不动点, 证明或者举例否定你的结论.
更进一步, 对所有 $k\in(0,1)$ 都有 $kx-f(x)$ 是单调递增的.
Pf.(1)(2): 令 $g(x)=f(x)-x$, 若在 a,b 两点处 $g(x)=0$, 那么结束证明；则 $g(a),g(b)\neq 0$ 由于 $f(x)$ 的值域限制, 那么 $g(a)>0,g(b)<0$, 由连续性即得存在不动点, 唯一性反证即可.
(3). 给定一个有限的 x, 自然 $f(x)$ 也有限, 构造数列 $a_n=f^n(x)$(n 个 $f(x)$ 的复合) 那么我们有 $|a_{n+1}-a_n|=|f(a_n)-f(a_{n-1})|\le k|a_n-a_{n-1}|\le\cdots\le k^{n-1}|a_2-a_1|$, 由此可证 $\{a_n\}$ 是一列 Cauchy 列, 收敛到一点 a_0, 那么由连续性和极限定义,$a_0=f(a_0)$, 不动点存在. 唯一性也由定义出来.
(4). 前一问是可行的,$g(-\infty)>0,g(+\infty)<0$,第二问不可行, 例:$f(x)=\sqrt{x^2+1},|f'(x)|<1$. 最后的单调递增用定义证即可.

2(中值定理补充习题)

2.1(Rolle 定理的一个推广) 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续, 在 $(a,+\infty)$ 上可导, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(a)$. 证明: 存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$
Pf. 若 $f(x)$ 恒为常数则显然, 假设 $f(x)$ 不恒为常数, 存在 $b\in[a,\infty)$ 使得 $f(b)\neq f(a)$, 由对称性不妨设 $f(b)>f(a)$, 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=f(a)$, 存在 $M>a$ 使得对 $x>M$,$|f(x)-f(a)|\le\frac{f(b)-f(a)}{2}$ 所以 $f(x)$ 在 $[a,M]$ 上连续加上端点不可能是极大值点, 那么在 $[a,M]$ 中一定有最大值点, 再由处处可导可得存在 $\xi\in(a,+\infty)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

2.2(构造函数的题)

(1) 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导,$g'(x)$ 在 (a,b) 中无零点, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$$

Pf. 构造 $F(x)=(f(x)-f(a))(g(b)-g(x))$, 那么 $F(a)=F(b)=0$, 由 Rolle 定理, 存在 $\xi\in(a,b), F'(\xi)=0$, 而 $F'(\xi)=f'(\xi)(g(b)-g(\xi))-g'(\xi)(f(\xi)-f(a))$ 即得.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续,(a,b) 可微且 $f'(x)$ 无零点, 证明: 存在 $\xi,\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{e^b-e^a}{b-a}e^{-\eta}$.

Pf. 由 Cauchy 中值定理,$\exists\eta\in(a,b)$ 使得 $\frac{f'(\eta)}{e^\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{e^b-e^a}$,$\exists\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, 两式相除即得.

3(关于洛必达不可用情形): 以下几种情形均不可用洛必达:

1. 不是 $\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty}$ 型: 比如 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x+1}$.
2. 上下导数至比不存在型: 比如 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$.

4(参数方程求二阶导例子):

$$\begin{cases} x(t) &= e^t sint \\ y(t) &= e^t cost \end{cases}$$

我们有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{y-x}{y+x}, \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{y''x'-x''y'}{(x')^3}=-2\frac{x^2+y^2}{(x+y)^3}$$

5(洛必达补充):

$x_0\in(0,\frac{\pi}{2}), x_n=sin(x_{n-1})$, 证明:$\sqrt{n}x_n$ 收敛.

Pf. 在之前作业证明过 $\{x_n\}$ 单调递减且趋于 0, 那么由 stolz 定理,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} nx_n^2 &= \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{x_n^2 sin^2 x_n}{x_n^2-sin^2x_n} \\ &= \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^2-sin^2x} \\ &= 3.\end{aligned}$$

6(凸函数补充):

(1) 琴生不等式:$f(x)$ 是凸函数, 对任意 $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 证明: 对任意 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 有 $f(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.
Pf. 归纳证明:$n=2$ 时是凸函数定义, 假设不等式对 $n \leq k$ 成立, 那么 $n=k+1$ 时:
$f(\sum\limits_{i=1}^{k+1} \lambda_i x_i) \leq \lambda_{k+1} f(x_i) + (1-\lambda_{k+1}) f(\sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\lambda_i x_i}{1-\lambda_{k+1}})$.
对后一项用 k 项琴声可得结论.
(2)$Hölder$ **不等式**: 对 $x_i, y_i > 0, p, q > 1$ 满足:$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 证明:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}$$

考虑函数 $f(x) = x^p$, 它是一个在 $\{x > 0\}$ 上的凸函数, 那么令

$$\lambda_i = \frac{y_i^q}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}, u_i = x_i y_i^{1-q}$$

使用琴生不等式有:

$$(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q})^p \leq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^q}$$

(3)Bernoulli 不等式:$f(x) = (1+x)^\alpha$ 定义在 $(-1, +\infty)$ 上, 证明:

$$(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x, 0 < \alpha < 1,$$
$$(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x, \alpha < 0 \text{或} \alpha > 1.$$

Pf.$f''(x) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$, 当 $0 < \alpha < 1$ 时 $f(x)$ 是凹函数,$y = 1 + \alpha x$ 是它在点 $(0,1)$ 处的切线, 由此证明. 另外一个方向同理.

作业简答 (10 月 20 日-10 月 24 日)

P106

2. 用 Rolle 取 $\xi \in (1,2), F'(\xi)=0$, 再通过计算得到 $F'(1)=0$, 再用一次 Rolle.

4.(2)$\ln(1+x)-\ln 1=\frac{1}{1+\xi}x, 0<\xi<x$.

5. 计算可得两边相减导数为 0.

7. 不妨设 $x_1<x_2$, 则 $2|f(x_1)-f(x_2)| \le |f(0)-f(x_1)|+|f(x_1)-f(x_2)|+|f(x_2)-f(1)|<1$.

9. 存在 $\xi \in (a,b), f(\xi) \neq f(a)$, 由对称性不妨 $f(\xi)>f(a)$, 再用 Cauchy/Lagrange 中值.

15. 直接求导 $(\frac{f(x)}{x})'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$, 注意到 $\frac{f(x)}{x}=f'(\xi)<f'(x)$ 即得.(注意:$f''(x)$ 不一定存在)

17. 构造函数 $g(x)=e^x(f(x)-f'(x)), g(0)=g(1)=0, \exists\xi, g'(\xi)=0=e^{\xi}(f(\xi)-f''(\xi))$.

20.(2)$g(x)=\tan x-x+\frac{x^3}{3}$, 求导可得 $g'(x)=\tan^2 x+x^2>0, g(0)=0$

(4)$g(x)=(1+x)\ln(1+x)-\arctan x$, 求导可得在 $x>0$ 时有 $g'(x)=\ln(1+x)+\frac{x^2}{1+x^2}>0, g(0)=0$

(6)$g(x)=x+\frac{\sin 2x}{6}-\frac{4}{3}\sin x$, 求导可得 $g'(x)=\frac{2}{3}(cosx-1)^2, g(0)=0, \frac{4}{3}$ 不能更大的原因: 更大以后导数在 0 附近小于 0.

(8)$g(x)=x^{a-1}+x^{a+1}$, 求导可得 $g'(x)=(a-1)x^{a-2}+(a+1)x^a$ 在 $(0,1)$ 上先减后增, 最小值在 $x=\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}$ 处取到.

P115

1.(2) 洛两次 $\frac{mn(n-m)}{2}$ (4)$-\frac{1}{6}$ (6) α

(8)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(a+x)^x-a^x}{x^2} &= \lim_{x\to 0} a^x\frac{(1+\frac{x}{a})^x-1}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{x}{a})^x(\ln(1+\frac{x}{a})+\frac{x}{x+a})}{2x} \\ &= \frac{1}{a}\end{aligned}$$

(10)0

(12)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}\ln x\ln(1-x) &= \lim_{x\to 0^+}\ln x\ln(1-x)\\ &= \lim_{x\to 0^+}-x\ln x\\ &= \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}\\ &= 0\end{aligned}$$

(14)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e})^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to 0}e^{\frac{ln(1+x)-x}{x^2}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x)-x}{x^2}}\\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}\\ &= e^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

(16)$\arcsin x^3\sim x^3, 1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}, e^{x^2}-1\sim x^2, \tan x\sim x$, 答案为 2.

(18)$\arctan x^2\sim x^2, \sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}=\frac{1+x\sin x-\cos x}{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}\sim\frac{3}{4}x^2$, 答案为 $\frac{4}{3}$.

(20)0.

2.(1)$\{x_n\}$ 单调递减有下界再证极限为 0.

(2) 由 stolz,$\frac{1}{x_n}$ 单调递增且趋于 $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{x_nf(x_n)}{x_n-f(x_n)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xf(x)}{x-f(x)}$, 用两次洛必达可得上式为 $-\frac{2}{f''(0)}$.