

# 第二次习题课

助教：程开良

2025 年 10 月 21 日

## 1 书写规范

### 1.1 遵守的原则

- 逻辑清晰：必要时应当注明相应的定理、命题或结论，逻辑表述上一定要清晰且准确。如，在推导过程中，添加“由定理 … 知 …”，“要证明 A，只需证明 B。”等字眼；
- 语言规范：使用数学化的语言，避免口语化的描述。必要时可合理选用规范的逻辑符号或其他数学符号；
- 切忌跳步：不能省略关键步骤。如无必要，不要使用“显然”“易证”“易得”等词语跳过一些关键步骤。更不要因为一些中间步骤难以证明，试图通过“显然”来蒙混过关；
- 从模仿做起：对于格式规范的练习，最好的参照就是教材上的例题，应当仔细研究教材例题上数学语言的叙述方式，并根据自身情况进行适当的模仿和训练。

### 1.2 示例

#### 1.2.1 $\epsilon - \delta$ 语言

设函数  $f(x) = kx + b$  (其中  $k, b$  为常数且  $k \neq 0$ )，利用函数极限的定义证明  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ka + b$ .

**思考过程：**根据函数极限的  $\epsilon - \delta$  定义，需验证：对任意  $\epsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得当  $0 < |x - a| < \delta$  时，恒有  $|f(x) - (ka + b)| < \epsilon$ 。

证明. 1. 首先化简目标不等式  $|f(x) - (ka + b)|$ :

$$|f(x) - (ka + b)| = |kx + b - (ka + b)| = |kx - ka| = |k(x - a)| = |k| \cdot |x - a|.$$

## 2. 分析不等式关系:

要使  $|f(x) - (ka + b)| < \epsilon$ , 即需  $|k| \cdot |x - a| < \epsilon$ 。由于  $k \neq 0$ , 可得  $|x - a| < \frac{\epsilon}{|k|}$ .

## 3. 确定 $\delta$ 的取值:

对任意给定的  $\epsilon > 0$ , 取  $\delta = \frac{\epsilon}{|k|}$  (显然  $\delta > 0$ )。

## 4. 验证逻辑链:

当  $0 < |x - a| < \delta$  时, 有  $|f(x) - (ka + b)| = |k| \cdot |x - a| < |k| \cdot \delta = |k| \cdot \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon$ .

## 5. 得出结论:

综上, 由定义可知:  $\lim_{x \rightarrow a} (kx + b) = ka + b$ .

□

## 1.2.2 数学归纳法

### Bernoulli 不等式:

设  $x \geq -1$ ,  $n \geq 1$  是正整数, 则有

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

证明. 用数学归纳法证明上述命题成立。

(1) 当  $n = 1$  时,  $(1 + x)^1 = 1 + x$ , 即命题成立;

(2) 假设  $n = k$  ( $k \geq 1$ ) 时, 命题成立, 即  $(1 + x)^k \geq 1 + kx$ , 下证: 结论对  $n = k + 1$  也成立。

当  $n = k + 1$  时, 由归纳假设知

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x,$$

即  $n = k + 1$  时, 命题也成立。

由 (1)(2) 及数学归纳法知, 结论对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  成立。 □

上述过程展示了规范的数学归纳法书写格式, 其中黑体加粗的四个步骤及归纳假设成立的推断过程一定不能省略。

## 1.2.3 定理的运用

根据不同定理所需的条件进行书写, 这里不再赘述。

## 2 知识复习

### 2.1 函数极限：从变化中寻找稳定

极限是分析学的起点，它描述了当自变量发生无限趋近的变化时，函数值是否趋向于某个确定的结果。它表达了“无穷中的确定性”，即在不断变化的过程中寻找恒定的关系，反映出一种“动态中的静态”。

**函数极限的定义：**设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  的某去心邻域内有定义。若存在常数  $A$ ，对任意  $\varepsilon > 0$ ，都存在  $\delta > 0$ ，使得当  $0 < |x - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称  $f(x)$  在  $x_0$  处有极限  $A$ ，记作  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

**极限的等价刻画——海涅定理：**海涅定理 (Heine 定理) 揭示了极限的另一种本质形式：若对一切满足  $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$  且  $x \neq x_0$  的数列  $\{x_n\}$ ，都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ，则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

这表明极限的存在与极限值的唯一性，不依赖于“连续逼近的路径”，而取决于“所有逼近方式的统一趋向”。换言之——极限的真意在于“无论怎样靠近，结果都不变”。

**极限的判定条件——柯西极限准则：**柯西准则 (Cauchy Criterion) 强调极限存在的“内部一致性”：若对任意  $\varepsilon > 0$ ，存在  $\delta > 0$ ，使得当  $x_1, x_2$  均满足  $0 < |x_i - x_0| < \delta$  时，有  $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ，等价于  $f(x)$  在  $x_0$  处存在极限。

**极限运算规律：**若  $\lim f(x) = A$ ,  $\lim g(x) = B$ , 则

$$\lim(f \pm g) = A \pm B, \quad \lim(fg) = AB, \quad \lim \frac{f}{g} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

这些运算规则保证了极限结构在代数运算下的封闭性。它使“极限”成为分析体系的可运算对象，而非仅仅是直觉描述。

### 2.2 函数的连续性：极限与现实的契合

极限描述了“逼近时的趋势”，而连续性要求“趋势与现实相符”，即从“邻近”走向“贴合”。

**函数连续性的定义：**函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处连续，指  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

也就是说，函数在该点的极限存在，且与函数在该点的值一致。

常见结论：

- 初等函数（常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）在定义域内皆连续；
- 连续函数的加、减、乘、复合仍连续；
- 间断点的分类与本质：
  - 可去间断点：左右极限存在且相等，但与函数值不符或函数未定义，只需“补上”即可连续；
  - 跳跃点：左右极限存在但不相等，即函数在该点“断裂”，表现为突变；
  - 第二类间断点（无穷间断点或震荡间断点）：单侧极限不存在，函数在该点附近完全失去规律。

### 2.3 闭区间上连续函数：局部平滑与整体连续的探究

当连续性不仅在一个点成立，而在整个闭区间  $[a, b]$  上成立时，函数的“局部平滑”会积累成“整体的稳定”。这是从局部规律过渡到整体结构的关键一步。

**零点定理（介值定理的特例）：**若  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  连续且  $f(a)f(b) < 0$ ，则存在  $\xi \in (a, b)$  使得  $f(\xi) = 0$ 。该结果在根的存在性证明与数值方法（如二分法）中具有重要应用。

**介值定理：**设  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  连续，若  $y_0$  在  $f(a)$  与  $f(b)$  之间（即  $y_0$  满足  $\min\{f(a), f(b)\} \leq y_0 \leq \max\{f(a), f(b)\}$ ），则存在  $\xi \in [a, b]$  使得  $f(\xi) = y_0$ 。

**有界性定理：**设  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  为在闭区间  $[a, b]$  上的连续函数，则存在常数  $M > 0$ ，使得对一切  $x \in [a, b]$  都有  $|f(x)| \leq M$ 。

**最大最小值定理（极值存在定理）：**若  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  是连续函数，则  $f$  在  $[a, b]$  上必取到其上下确界，亦即存在  $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ ，使得

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_{\max}) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

### 3 作业习题 (选讲)

P50T7: 求证:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2}) = \frac{\alpha}{2}$

P50T14: 记函数  $y = f(x)$  所表示的曲线为  $C$ 。若动点沿曲线  $C$  无限远离原点时, 此动点与某一定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线  $C$  的一条渐近线。

(i) 垂直渐近线: 易知 (垂直于  $x$  轴的) 直线  $x = x_0$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线: 易知 (平行于  $x$  轴的) 直线  $y = b$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线: 请读者证明, 方程为  $y = ax + b(a \neq 0)$  的直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

或者

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$$

这里自然要假定所说的极限都存在。(提示: 以  $x \rightarrow +\infty$  为例, 设曲线  $C$  及直线  $L$  上的横坐标为  $x$  的点分别为  $M, N$ , 则  $M$  至  $L$  的距离是  $|MN|$  的一个常数倍。因此, 直线  $L$  为曲线  $C$  的渐近线, 等价于  $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f(x) - (ax + b))) = 0$ , 由此易得所说的结果。)

求下列曲线的渐近线方程:

$$(1) y = x \ln(e + \frac{1}{x}); \quad (2) y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

P62T17(7): 求极限:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

## 4 进阶习题

**补充 1 (提示: 与零点定理相关):** 设  $f(x)$  在  $[0, 1]$  上连续, 且  $f(0) = f(1)$ 。求证: 对  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\exists x_n \in [0, 1]$ , 使得  $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$ 。

证明. 记  $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ , 则

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right)\right) = f(1) - f(0) = 0.$$

故一定存在  $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$ , 使得  $g\left(\frac{i_1}{n}\right) g\left(\frac{i_2}{n}\right) \leq 0$ , 由零点定理知, 在  $\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}$  之间存在  $x_n$ , 使得  $g(x_n) = 0$ , 即  $f(x_n + \frac{1}{n}) = f(x_n)$ .  $\square$

**补充 2 (提示: 与介值定理相关):** 设  $f(x), g(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 若存在  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset [a, b]$ , 使得  $g(x_n) = f(x_{n+1}) (n \in \mathbb{N}^*)$ , 求证: 一定存在  $x_0 \in [a, b]$ , 使得  $f(x_0) = g(x_0)$ .

证明.  $f(x)$  在  $[a, b]$  上有界。令  $F(x) = g(x) - f(x)$ ,  $F(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n)$ 。由介值定理知,  $\exists \xi_n \in [a, b]$ , 使得

$$F(\xi_n) = \frac{F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n)}{n} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_1)}{n}.$$

故  $\{\xi_n\}$  中有子列  $\{\xi_{k_n}\}$ , 使得  $\xi_{k_n} \rightarrow x_0 \in [a, b]$ , 并有  $F(\xi_{k_n}) = \frac{f(x_{k_n+1}) - f(x_1)}{k_n}$ 。令  $n \rightarrow \infty$ , 得  $F(x_0) = 0$ , 即  $f(x_0) = g(x_0)$ .  $\square$

**补充 3 (提示: 与有界性定理相关):** 设  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续, 且  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$ 。求证:  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ 。  
若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \neq \infty$ , 则  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = f(\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)) = f(l) \neq \infty$

证明. 若  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty$ , 则  $\exists M > 0$  和  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$ , 当  $|x_n| \rightarrow +\infty$  时, 满足  $|f(x_n)| \leq M$ 。由  $f(x)$  在  $\mathbb{R}$  上连续知  $f(x)$  在  $[-M, M]$  上连续, 因而  $f(x)$  在  $[-M, M]$  上有界。故  $|f(f(x_n))|$  有界, 矛盾。 $\square$

**补充 4 (提示: 与最大最小值定理相关):** 求证: 不存在  $\mathbb{R}$  上的连续函数, 使其任一函数值都恰好被取到两次。

证明. 反证: 若存在题设的函数  $f(x)$ , 则  $\exists a < b$ , 使得  $f(a) = f(b)$ 。由  $f(x)$  的连续性知  $f(x)$  在  $[a, b]$  中存在最大值  $M$  和最小值  $m$ , 且  $\exists x_0 \in (a, b)$ , 使得  $f(x_0) = M$  或  $f(x_0) = m$  成立。不妨设  $f(x_0) = M$ 。

若存在  $x_1 \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(x_0) = f(x_1) = M$ , 则  $\exists x_2, x_3 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $x_4 \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ , 使得  $f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$ , 这与题设矛盾。

所以存在唯一的  $x_0 \in \mathbb{R}$ , 使得  $f(x_0) = M$  成立, 亦与题设矛盾。综上, 不存在这样的函数  $f(x)$ 。 $\square$

## 5 思考探究

**探究 1:** 连续函数是否一定把 Cauchy 数列映射成 Cauchy 数列?

反例:  $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

**探究 2:** 设函数  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x_0$  的邻域内有定义。探讨  $f(x)$  与  $g(x)$  在  $x_0$  处不同时连续, 那么  $fg(x)$  在  $x_0$  处的连续性都有什么样的情况?

$f(x)$ 在 $x = x_0$	$g(x)$ 在 $x = x_0$	$fg(x)$ 在 $x = x_0$	示例
连续	不连续	连续	$f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$
连续	不连续	不连续	$f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$
不连续	不连续	连续	$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$
不连续	不连续	不连续	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$

**探究 3:** 设函数  $y = f(x)$  与  $g(y)$  分别在  $x_0$  和  $y_0$  的邻域内有定义, 且  $y_0 = f(x_0)$ 。探讨函数  $f(x)$  在  $x_0$  处与  $g(y)$  在  $y_0$  处不同时连续, 那么  $g \circ f(x)$  在  $x_0$  处的连续性都有什么样的情况?

在 0 处, 既可找到逼近 0 的无理数数列, 又可找到有理数数列, 二者极限不同  $\Rightarrow$  不连续

$f(x)$ 在 $x = x_0$	$g(x)$ 在 $y_0 = f(x_0)$	$g \circ f(x)$ 在 $x = x_0$	示例
连续 ✓	不连续 ✓	连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 互质且 } q > 0 \\ 0 & x \text{ 为无理数或 } x = 0 \end{cases}, g(y) = \begin{cases} 1 & y \text{ 为有理数} \\ 0 & y \text{ 为无理数} \end{cases}, x_0 = 0$
连续 ✓	不连续 ✓	不连续 ✓	$f(x) = x^2, g(y) = \begin{cases} y & y \leq 1 \\ 3y - 5 & y > 1 \end{cases}, x_0 = 1$
不连续 ✓	连续 ✓	连续 ✓	$f(x) = \text{sgn}(x), g(y) = y(1 - y^2), x_0 = 0$
不连续 ✓	连续 ✓	不连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}, g(y) = y, x_0 = 0$
不连续 ✓	不连续 ✓	连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 互质且 } q > 0 \\ 1 & x \text{ 为无理数或 } x = 0 \end{cases}, g(y) = \begin{cases} 1 & y \text{ 为有理数} \\ 0 & y \text{ 为无理数} \end{cases}, x_0 = 0$
不连续 ✓	不连续 ✓	不连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, g(y) = \text{sgn}(y), x_0 = 0$

## 6 上周作业答案或提示

### 6.1 第 50 页

**T6** 答案:  $\frac{\sin x}{x}$ 。

提示: 讨论  $\sin \frac{x}{2^m} \neq 0$ ,  $\sin \frac{x}{2^m} = 0, x \neq 0$  和  $\sin \frac{x}{2^m} = 0, x = 0$  三种情况, 再合并结果。

**T7** 提示:

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} \neq 0; \\ 0, & \sin \frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$
$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left( \cos \left( k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \theta \right).$$

**T9** 答案: (2) 4; (4)  $e^2$ 。

**T10** 答案: (2) 0; (4)  $+\infty$ 。

**T11** 答案: (2)  $-\infty$ ; (4)  $+\infty$ 。

**T14** 答案: (1)  $x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}$ ; (2)  $x = 1, y = 3x + 1$ 。注意: (iii) 有个证明题。

### 6.2 第 52 页

**T18** 答案: (2)  $a$ ; (4)  $\frac{\sqrt{2}}{8}$ ; (6) 1。

### 6.3 第 62 页

**T6** 答案: (2) 跳跃点 (第一类间断点); (4) 跳跃点 (第一类间断点); (6) 连续, 无间断点。

**T8** 提示:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$ 。

**T10** 提示: 考虑连续性的定义, 取  $\epsilon = 1$ 。

**T14** 提示: 考虑证明  $f(x) \equiv f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ 。

**T17** 答案: (1)  $\frac{1}{4}$ ; (3)  $\frac{1}{40}$ ; (5)  $\frac{1}{8}$ ; (7) 0;

## 6.4 第 70 页

**T2** 提示: 令  $f(x) = x - a \sin x - b$ , 考虑  $f(0)$  与  $f(a+b)$ 。注意: 最好说明一下  $\forall x > a+b$ , 有  $f(x) > 0$  恒成立。

**T3** 提示: 令  $g(x) = f(x) - x$ , 考虑  $g(a)$  与  $g(b)$ 。

**T5** 提示: 令  $h(x) = f(x) - g(x)$ , 考虑  $h(a)$  与  $h(b)$ 。

**T6** 提示: 令  $g(x) = f(x) - f(x+a)$ , 考虑  $g(0)$  与  $g(a)$ 。