补充讲义

日期: 2025 年 10 月 14 号

定理 1. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 且 $B=(b_{ij})_{n\times m}$. 则 $\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$.

证明. 设 $AB=(c_{ij})_{m\times m}$, $BA=(d_{ij})_{n\times n}$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB)&=\sum_{i=1}^{m}c_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\\&=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}b_{ki}a_{ik}=\sum_{k=1}^{n}d_{kk}\\&=\mathrm{tr}(BA).\end{aligned}$$

这里第三个等式我们交换求和顺序. 命题得证. □

定理 2. 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$. 对 A 的行和列分别作划分

$$m=m_1+m_2+\cdots+m_r\ (m_j\geq 1),\quad n=n_1+n_2+\cdots+n_s\ (n_j\geq 1)$$

得到分块矩阵 $A=(A_{ij})_{r\times s}$. 类似的, 对 B 的的行和列分别作划分

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_s\ (n_j\geq 1),\qquad p=p_1+p_2+\cdots+p_t\ (p_j\geq 1)$$

得到分块矩阵 $B=(B_{ij})_{s\times t}$. 则

$$AB=(C_{ij})_{r\times t},\quad \text{其中 } C_{ij}=\sum_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}\ (1\leq i\leq r,\ 1\leq j\leq t).$$

证明. 令 $C=(C_{ij})_{r\times t}$. 我们要证明 $AB=C$. 即要证对任意 $1\leq u\leq m, 1\leq v\leq p$, C 的第 (u,v) 元素等于 $\sum_{k=1}^{n}a_{uk}b_{kv}$. 取 $1\leq i_0\leq r$ 使得

$$n_1+\cdots+n_{i_0-1}<u\leq n_1+\cdots+n_{i_0}.$$

因为 $1\leq u\leq m$, $m=m_1+\cdots+m_r$ 且 $m_1,\cdots m_r\geq 1$, 从而 i_0 存在且唯一. 类似的, 取 $1\leq j_0\leq t$ 使得

$$p_1+\cdots+p_{j_0-1}<v\leq p_1+\cdots+p_{j_0}.$$

则 C 的第 (u,v) 元素 (记为 c_{uv}) 位于 $C=(C_{ij})_{r\times t}$ 的第 (i_0,j_0) 分块矩阵中, 具体的, c_{uv} 是 $C_{i_0j_0}$ 的第 (u',v') 元素, 其中 $u'=u-(n_1+\cdots+n_{i_0-1})$, $v'=v-(p_1+\cdots+p_{j_0-1})$. 从而我们有

$$c_{uv}=(C_{i_0j_0})_{u'v'}=(\sum_{k=1}^{s}A_{i_0k}B_{kj_0})_{u'v'}=\sum_{k=1}^{s}(A_{i_0k}B_{kj_0})_{u'v'}.$$

注意到, 对任意 $1\leq k\leq s$, A_{i_0k} 的第 u' 行为 $(a_{u,n_1+\cdots+n_{k-1}+1},\cdots,a_{u,n_1+\cdots+n_{k-1}+n_k})$; B_{k,j_0} 的第 v' 列为 $(b_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1,v},\cdots,b_{n_1+\cdots+n_{k-1}+n_k,v})^T$. 从而

$$(A_{i_0k}B_{kj_0})_{u'v'}=\sum_{\ell=1}^{n_k}a_{u,n_1+\cdots+n_{k-1}+\ell}b_{n_1+\cdots+n_{k-1}+\ell,v}.$$

从而

$$c_{uv}=\sum_{k=1}^{s}(A_{i_0k}B_{kj_0})_{u'v'}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{n_k}a_{u,n_1+\cdots+n_{k-1}+\ell}b_{n_1+\cdots+n_{k-1}+\ell,v}.$$

注意到因为 $n=n_1+\cdots n_s$,

$$\{n_1+\cdots+n_{k-1}+\ell:1\leq k\leq s,\ 1\leq\ell\leq n_k\}=\{1,2,\cdots,n\}.$$

从而

$$c_{uv}=\sum_{k=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{n_k}a_{u,n_1+\cdots n_{k-1}+\ell}b_{n_1+\cdots n_{k-1}+\ell,v}=\sum_{k=1}^{n}a_{uk}b_{kv}=(AB)_{uv}.$$

命题得证. $\square$