作业 6a

提交日期: 2025 年 10 月 28 号

讲义习题三 (第 85-86 页): 3, 4, 6, 7, 11, 12 (提示: 可以先考虑交换相邻位置的对换), 13

作业 1. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. *课上我们利用行列式的行展开公式证明了如下行列式的显性表达式:*

$$\det(A)=\sum_{(j_1,\cdots,j_n)\in S_n}(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}.$$

由此等式直接证明

$$\det(A)=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in S_n}(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}a_{i_11}\cdots a_{i_nn}.$$

(提示: 对每个排列 $(j_1,\cdots,j_n)$, 存在另一个排列 $(i_1,\cdots,i_n)$ 使得 $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}=a_{i_11}\cdots a_{i_nn}$. 并且 $(i_1,\cdots,i_n)$ 与 $(j_1,\cdots j_n)$ 满足: 将如下 $2\times n$ 矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n\end{pmatrix}$$

通过列对换使得第二行变为顺序排列 $(1,2,\cdots,n)$ 后, 第一行即变为 $(i_1,\cdots,i_n)$. 由此证明 $(-1)^{\tau(j_1,\cdots,j_n)}=(-1)^{\tau(i_1,\cdots,i_n)}$.)

作业 2. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$. 证明

$$\det(A^T)=\det(A).$$

(提示: 你可以通过行列式的行列展开公式或者行列式的显性表达式证明这个结论.)