第一次习题课

定义定理:$\epsilon-\delta$ 语言, 单调有对应界数列收敛, 闭区间套定理, 列紧性定理, 两面夹,Cauchy 收敛准则,Stolz 定理.

需要注意的问题:

一. $\lim\limits_{x\to\infty}$ 需要同时说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}$ 两种情况.

二. 分类讨论得遍历所有情况.eg.P25.14 很多同学只讨论了 $a<b$, 缺乏 $a=b$.

三. 题目中说了按定义证明一定要按定义!!! 考试时如果不按要求一律 0 分, 其它题就算用超纲方法对的也会给分.

问题较多的习题:

(P25.16) 证明: $\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$.

Pf. 不妨设 a_1 是最大的那个数, 一方面 $a_1\le\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}$, 另一方面,$\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le a_1\sqrt[n]{m}$, 由两面夹即可得.

(P25.19) 设 $a_n\le a\le b_n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n-b_n=0$, 求证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=a$.

$0\le|a_n-a|=a-a_n\le b_n-a_n$ 再用两边夹能证 $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-a|=0$, 自然有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$; 另一边同理.

(P26.21)$\{a_n\},\{b_n\}$ 是正数列, 满足 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\frac{b_{n+1}}{b_n}$, 求证: 若 $\{b_n\}$ 收敛, 那么 $\{a_n\}$ 收敛.

Pf. 交换位置可得 $0\le\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\le\frac{a_n}{b_n}$, 由单调性以及有上界可得 $\frac{a_n}{b_n}$ 收敛, 最后由 $a_n=\frac{a_n}{b_n}b_n$ 可得 $\{a_n\}$ 收敛.

(P53.12)$a_n\to a\in\mathbb{R}$,$\{b_n\}$ 是正数列,$c_n=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}$. 求证: (1)$\{c_n\}$ 收敛;(2) 若 $b_1+b_2+\cdots+b_n\to\infty$, 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

Pf.(2) 由 Stolz 易得.

(1) 若 $b_1+b_2+\cdots+b_n$ 有限, 因其单调递增且有上界, 那么它收

敛, 由于 $\{a_n\}$ 收敛, 那么 $\{a_n\}$ 有界. 则 c_n 的分子是 Cauchy 列: $|a_nb_n+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|\le M|b_n+\cdots+b_{n+p}|$ 所以 c_n 的分子分母都是收敛的, 那么 $\{c_n\}$ 收敛.

(P53.15) 证明: 函数 $f(x)$ 在 $x\to x_{0^-}$ 时有极限 l 的充分必要条件是: 对于任意一个以 x_0 为极限的严格递增数列 $\{a_n\}, a_n<x_0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=l$.

Pf. 必要性由定义易得, 只证充分性. 若 $f(x)$ 没有极限, 那么对任意的 ϵ,δ 均存在某个 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 都有 $|f(x)-l|>\epsilon$. 现取定 ϵ, 首先令 $\delta_1=1$, 存在 $x_1\in(x_0-1,x_0)$ 使得 $|f(x_1)-l|>\epsilon$.

依次构造 $\delta_n=\min\{\frac{1}{n},x_0-x_{n-1}\}, n\ge 2$, 存在 $x_n\in(x_0-\delta_n,x_0)$ 使得 $|f(x_n)-l|>\epsilon$. 此时构造出一列严格增列 $\{x_n\}$ 逼近 x_0, 此时应有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$, 但 $|f(x_n)-l|>\epsilon$ 矛盾, 充分性得证.

补充习题:

(P27.25 拓展)$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{2n}}=1$.

Pf. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n^2}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}^2-a_n^2}{2}=1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2a_n^2}=1$.

(敛散性判断) 判断以下几项哪些条件能判断敛散性:

(1) 对任意 ϵ 存在 n 使得对任意 $N>n$ 时有 $|a_N-a_n|<\epsilon$.

(2) 对任意 n,p 有 $|x_{n+p}-x_n|\le\frac{p}{n}$.

(3) 对任意 n,p 有 $|x_{n+p}-x_n|\le\frac{p}{n^2}$.

解答: (1),(3) 能判断, 证明和反例自己思考.

✓ **补充 1**: $\{a_n\}$ 收敛,$\{b_n\}$ 发散, 求 $\{a_n+b_n\}$,$\{a_nb_n\}$ 敛散性.

Pf.$\{a_n+b_n\}$ 显然发散, 但 $\{a_nb_n\}$ 敛散性无法确定 (两个都可以举例子).

a $\quad \frac{a+b}{2}$ $\quad \frac{\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}}{2}$

b $\quad \sqrt{ab}$、 $\quad \sqrt{\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}}$.

$a_n > b_n$.

$> b_{n+1} > b_n$.

$a_n > a_{n+1}$.

$a_n : s$

$b_n : t$.

$s = \frac{s+t}{2}$ $\quad s = t$.

$a_0 > a_1 > \cdots > a_n > b_n > b_{n-1} > \cdots > b_0$.

补充 2：$0 < b < a, a_0 = a, b_0 = b, a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$，求 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 敛散性以及它两极限关系.

Pf. 由平均值不等式可得 $a_n \geq b_n$, 所以我们有 $a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} \leq a_{n-1}, b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}} \geq b_{n-1}$, 即 $b \leq b_1 \leq \cdots \leq b_n \leq a_n \leq \cdots \leq a_1 \leq a$, 可得 $\{a_n\}$,$\{b_n\}$ 收敛, 进一步可得收敛到的值相等.

补充 3：γ 常数：令 $c_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \ln n$, 我们证 $\{c_n\}$ 收敛.

Pf.$\{c_n\}$ 单调递减：$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} < 0$.

$\{c_n\}$ 有下界：由 $\ln n = \ln\frac{n}{n-1} + \ln\frac{n-1}{n-2} + \cdots + \ln 2$以及 $\ln(1+x) \leq x$ 可得 $c_n \geq 0$ 有下界. 所以 $\{c_n\}$ 收敛.

补充 4：*stirling* 特殊情况：$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

Pf. 取对数, 左边变为 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\ln n - \ln 2 - \ln 3 - \cdots - \ln n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln(n+1) - n\ln n$, 再由$\frac{1}{n+1} \leq \ln(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ 两面夹即得.

P5. 3 易证.

作业简答

4. $\frac{1}{4}$, $\frac{125}{333}$, $\frac{122}{27}$

7. 欲证 $|a+b|<|1+ab|$，两边平方:

$$a^2+b^2<1+a^2b^2 \Leftrightarrow (1-a^2)(1-b^2)>0$$

P25. 1. (2) $\forall \varepsilon>0$, 取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$, $n\geq N$ 时 $|\frac{\sin n}{n}|\leq|\frac{1}{n}|<\varepsilon$

(4) ---- .. $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$ - — — - — — -

4. $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $n\geq N$ 时 $|a_n-a|<\varepsilon$.

对相同 N, $||a_n|-|a||\leq|a_n-a|<\varepsilon$.

反例: $a_n=(-1)^n$. 反之: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$. $\forall\varepsilon$, $\exists N$, $n\geq N$ 时 $||a_n|-0|<\varepsilon$.

即 $|a_n|<\varepsilon$.

5. $M=0$ 显然.

$M\neq0$ 时: $\forall\frac{\varepsilon}{M}$, $\exists N$. $|a_n|\leq\frac{\varepsilon}{M}$, $|a_nb_n|\leq\frac{\varepsilon}{M}\cdot M=\varepsilon$.

6 $\forall\varepsilon$, $\exists N_1$. $|a_{2n+1}-a|<\varepsilon$.

$\exists N_2$ $|a_{2n}-a|<\varepsilon$.

$\Rightarrow N=\max\{2N_1+1,2N_2\}$. $\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$.

7. (1) 奇列 $\to-1$ 偶列 $\to1$

(2) 奇列 $\to4$. 偶列 $\to6$

8 (1) $\lim=\frac{4+5\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}}{3+2\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{4}{3}$, (3) $=\frac{1\times4}{2\times3}\cdot\frac{2\times5}{3\times4}\cdots\times\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}=\frac{n+2}{3n}\to\frac{1}{3}$

(5). $a_n=\frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}\to\frac{1}{1-q}$

14. $a=b$ 时 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$: $|a_n-a|<\varepsilon$

N_2: $|b_n-a|<\varepsilon$.

$\Rightarrow\exists N$. $\begin{cases}|a_n-a|<\varepsilon\\|b_n-a|<\varepsilon\end{cases}$

$$\Rightarrow c_n=\frac{a_n+b_n}{2}+\frac{|a_n-b_n|}{2}\to a$$

$$d_n=\frac{a_n+b_n}{2}-\frac{|a_n-b_n|}{2}\to a.$$

$a<b$ 时 $\forall 0<\varepsilon<\frac{b-a}{2}$. $\exists N$, $\begin{cases}|a_n-a|<\varepsilon\\|b_n-b|<\varepsilon.\end{cases}$ $b_n-a_n>b-a-2\varepsilon>0$.

$$\begin{cases}\lim c_n=\lim b_n=b\\\lim d_n=\lim a_n=a.\end{cases}$$

$a>b$ 同理.

15. 2. $0 \le (n+1)^k - n^k = n^k\left((1+\frac{1}{n})^k - 1\right) < n^k\left((1+\frac{1}{n}) - 1\right) = n^{1-k} \to 0$. 极限为0.

3. 原式 $= 2^{\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}} = 2^{1-\frac{1}{2^n}} \to 2$

5. $\sqrt[n]{\cos^2 1} \le$ 原式 $\le \sqrt[n]{n}$ 极限为1.

$\sqrt[n]{\cos^2 1} \to 1$，$\sqrt[n]{n} \to 1$

17 1: a_n单减有下界

3. $|a_{n+p} - a_n| = |\alpha_{n+1} q^{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p} q^{n+p}|$

$= q^{n+1} |\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_{n+p} q^{p-1}|$

$\le \frac{M \cdot q^{n+1}}{1-q}$. 取N大即可.

18 1: stolz: $\frac{n}{c^n} = \frac{1}{c^n - c^{n-1}} = 0$.

2. a_n单减有下界 + $x = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) \Rightarrow x = \sqrt{a}$.

22. 2. $a_n = \left(\frac{n-3}{n-2}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n+1}} = \frac{1}{\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^{n-3}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n-2}{n-3}\right)^3}$

$\Rightarrow \frac{1}{e}$

4. $a_n = \left[\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{n^3}\right]^2 \Rightarrow e^2$

23. $\forall M > 0$. $\exists N$. $|a_n| > \frac{M}{b}$. $|a_n b_n| \ge b \cdot \frac{M}{b} = M$.

24. $\sqrt[n]{n!} > \left[\left[\frac{n}{2}\right]^{\frac{n}{2}}\right]^{\frac{1}{n}} > \left[\frac{n}{2}\right]^{\frac{1}{2}}$，发散.

$n\sin\frac{n\pi}{2}$: 奇数列无界.偶数列0:不发散也不收敛.

25. $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2 \Rightarrow a_n^2 > 2n-1$，$a_n > \sqrt{2n-1}$

P50 1 (2) $\left|\frac{x-1}{x+1} - 1\right| = \left|\frac{2}{x+1}\right| < \varepsilon \Leftarrow |x| > \frac{2}{\varepsilon} + 1$

(4). $\forall \varepsilon$, $\delta = \varepsilon^q$ ⋯ ⸺ ⸺

2. (2) $\frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + \cdots + 1 \to n$.

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} = \frac{(3+\frac{6}{x})^{70}}{(5-\frac{1}{x})^{70}} \cdot \frac{(8-\frac{5}{x})^{20}}{(5-\frac{1}{x})^{20}} \Rightarrow \frac{3^{70} 8^{20}}{5^{90}}$

4. $f(x)$有极限 l 时，$\exists N$，$x>N$，$|f(x)-l|<\varepsilon$

$a_n \to +\infty$：$\exists N_1$，$n>N_1$ $a_n>N$ $\Rightarrow$ $|f(a_n)-l|<\varepsilon$.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=l$

5. (1) 左极限 -1，右极限 0. 不存在极限

(2) 左极限 -1，右极限 1，不存在极限.

(3) 左极限 = 右极限 = 1. 极限存在，为 1.

(4) 左极限 0，右极限不存在，不存在极限.