

第二次习题课

助教：程开良

2025 年 10 月 21 日

1 书写规范

1.1 遵守的原则

1. 逻辑清晰：必要时应当注明相应的定理、命题或结论，逻辑表述上一定要清晰且准确。如，在推导过程中，添加“由定理 ... 知 ...”，“要证明 A，只需证明 B。”等字眼；
2. 语言规范：使用数学化的语言，避免口语化的描述。必要时可合理选用规范的逻辑符号或其他数学符号；
3. 切忌跳步：不能省略关键步骤。如无必要，不要使用“显然”“易证”“易得”等词语跳过一些关键步骤。更不要因为一些中间步骤难以证明，试图通过“显然”来蒙混过关；
4. 从模仿做起：对于格式规范的练习，最好的参照就是教材上的例题，应当仔细研究教材例题上数学语言的叙述方式，并根据自身情况进行适当的模仿和训练。

1.2 示例

1.2.1 $\epsilon - \delta$ 语言

设函数 $f(x) = kx + b$ (其中 k, b 为常数且 $k \neq 0$)，利用函数极限的定义证明 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = ka + b$.

思考过程：根据函数极限的 $\epsilon - \delta$ 定义，需验证：对任意 $\epsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - a| < \delta$ 时，恒有 $|f(x) - (ka + b)| < \epsilon$ 。

证明. 1. 首先化简目标不等式 $|f(x) - (ka + b)|$ ：

$$|f(x) - (ka + b)| = |kx + b - (ka + b)| = |kx - ka| = |k(x - a)| = |k| \cdot |x - a|.$$

2. 分析不等式关系:

要使 $|f(x) - (ka + b)| < \epsilon$, 即需 $|k| \cdot |x - a| < \epsilon$ 。由于 $k \neq 0$, 可得 $|x - a| < \frac{\epsilon}{|k|}$ 。

3. 确定 δ 的取值:

对任意给定的 $\epsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\epsilon}{|k|}$ (显然 $\delta > 0$)。

4. 验证逻辑链:

当 $0 < |x - a| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - (ka + b)| = |k| \cdot |x - a| < |k| \cdot \delta = |k| \cdot \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon$ 。

5. 得出结论:

综上, 由定义可知: $\lim_{x \rightarrow a}(kx + b) = ka + b$ 。

□

1.2.2 数学归纳法

Bernoulli 不等式:

设 $x \geq -1$, $n \geq 1$ 是正整数, 则有

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

证明. 用数学归纳法证明上述命题成立。

(1) 当 $n = 1$ 时, $(1 + x)^1 = 1 + x$, 即命题成立;

(2) 假设 $n = k (k \geq 1)$ 时, 命题成立, 即 $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, 下证: 结论对 $n = k + 1$ 也成立。

当 $n = k + 1$ 时, 由归纳假设知

$$(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x,$$

即 $n = k + 1$ 时, 命题也成立。

由 (1)(2) 及数学归纳法知, 结论对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立。

□

上述过程展示了规范的数学归纳法书写格式, 其中黑体加粗的四个步骤及归纳假设成立的推断过程一定不能省略。

1.2.3 定理的运用

根据不同定理所需的条件进行书写, 这里不再赘述。

2 知识复习

2.1 函数极限：从变化中寻找稳定

极限是分析学的起点，它描述了当自变量发生无限趋近的变化时，函数值是否趋向于某个确定的结果。它表达了“无穷中的确定性”，即在不断变化的过程中寻找恒定的关系，反映出一种“动态中的静态”。

函数极限的定义： 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义。若存在常数 A ，对任意 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $\delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，则称 $f(x)$ 在 x_0 处有极限 A ，记作 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

极限的等价刻画——海涅定理： 海涅定理（Heine 定理）揭示了极限的另一种本质形式：若对一切满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$ ，都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 。

这表明极限的存在与极限值的唯一性，不依赖于“连续逼近的路径”，而取决于“所有逼近方式的统一趋向”。换言之——极限的真意在于“无论怎样靠近，结果都不变”。

极限的判定条件——柯西极限准则： 柯西准则（Cauchy Criterion）强调极限存在的“内部一致性”：若对任意 $\varepsilon > 0$ ，存在 $\delta > 0$ ，使得当 x_1, x_2 均满足 $0 < |x_i - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ ，等价于 $f(x)$ 在 x_0 处存在极限。

极限运算规律： 若 $\lim f(x) = A$ ， $\lim g(x) = B$ ，则

$$\lim(f \pm g) = A \pm B, \quad \lim(fg) = AB, \quad \lim \frac{f}{g} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0).$$

这些运算规则保证了极限结构在代数运算下的封闭性。它使“极限”成为分析体系的可运算对象，而非仅仅是直觉描述。

2.2 函数的连续性：极限与现实的契合

极限描述了“逼近时的趋势”，而连续性要求“趋势与现实相符”，即从“邻近”走向“贴合”。

函数连续性的定义： 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，指 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ 。

也就是说，函数在该点的极限存在，且与函数在该点的值一致。

常见结论：

- 初等函数（常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数）在定义域内皆连续；
- 连续函数的加、减、乘、复合仍连续；
- 间断点的分类与本质：
 - 可去间断点：左右极限存在且相等，但与函数值不符或函数未定义，只需“补上”即可连续；
 - 跳跃点：左右极限存在但不相等，即函数在该点“断裂”，表现为突变；
 - 第二类间断点（无穷间断点或震荡间断点）：单侧极限不存在，函数在该点附近完全失去规律。

2.3 闭区间上连续函数：局部平滑与整体连续的探究

当连续性不仅在一个点成立，而在整个闭区间 $[a, b]$ 上成立时，函数的“局部平滑”会积累成“整体的稳定”。这是从局部规律过渡到整体结构的关键一步。

零点定理（介值定理的特例）： 若 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续且 $f(a)f(b) < 0$ ，则存在 $\xi \in (a, b)$ 使得 $f(\xi) = 0$ 。该结果在根的存在性证明与数值方法（如二分法）中具有重要应用。

介值定理： 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续，若 y_0 在 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间（即 y_0 满足 $\min\{f(a), f(b)\} \leq y_0 \leq \max\{f(a), f(b)\}$ ），则存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = y_0$ 。

有界性定理： 设 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为在闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，则存在常数 $M > 0$ ，使得对一切 $x \in [a, b]$ 都有 $|f(x)| \leq M$ 。

最大最小值定理（极值存在定理）： 若 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数，则 f 在 $[a, b]$ 上必取到其上下确界，亦即存在 $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ ，使得

$$f(x_{\min}) = \min_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_{\max}) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

3 作业习题 (选讲)

P50T7: 求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{\alpha}{n^2} + \sin \frac{2\alpha}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n\alpha}{n^2} \right) = \frac{\alpha}{2}$

P50T14: 记函数 $y = f(x)$ 所表示的曲线为 C 。若动点沿曲线 C 无限远离原点时, 此动点与某一定直线的距离趋于零, 则称该直线为曲线 C 的一条渐近线。

(i) 垂直渐近线: 易知 (垂直于 x 轴的) 直线 $x = x_0$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty.$$

(ii) 水平渐近线: 易知 (平行于 x 轴的) 直线 $y = b$ 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{或} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

(iii) 斜渐近线: 请读者证明, 方程为 $y = ax + b (a \neq 0)$ 的直线 L 为曲线 C 的渐近线的充分必要条件是

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$$

或者

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax)$$

这里自然要假定所说的极限都存在。(提示: 以 $x \rightarrow +\infty$ 为例, 设曲线 C 及直线 L 上的横坐标为 x 的点分别为 M, N , 则 M 至 L 的距离是 $|MN|$ 的一个常数倍。因此, 直线 L 为曲线 C 的渐近线, 等价于 $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((f(x) - (ax + b))) = 0$, 由此易得所说的结果。)

求下列曲线的渐近线方程:

$$(1) y = x \ln \left(e + \frac{1}{x} \right); \quad (2) y = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

P62T17(7): 求极限: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$

4 进阶习题

补充 1 (提示: 与零点定理相关): 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$ 。求证: 对 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists x_n \in [0, 1]$, 使得 $f(x_n) = f(x_n + \frac{1}{n})$ 。

证明. 记 $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$, 则

$$\sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(f\left(\frac{i+1}{n}\right) - f\left(\frac{i}{n}\right) \right) = f(1) - f(0) = 0.$$

故一定存在 $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $g(\frac{i_1}{n}) g(\frac{i_2}{n}) \leq 0$, 由零点定理知, 在 $\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}$ 之间存在 x_n , 使得 $g(x_n) = 0$, 即 $f(x_n + \frac{1}{n}) = f(x_n)$. \square

补充 2 (提示: 与介值定理相关): 设 $f(x), g(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 若存在 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset [a, b]$, 使得 $g(x_n) = f(x_{n+1}) (n \in \mathbb{N}^*)$, 求证: 一定存在 $x_0 \in [a, b]$, 使得 $f(x_0) = g(x_0)$ 。

证明. $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界. 令 $F(x) = g(x) - f(x)$, $F(x_n) = f(x_{n+1}) - f(x_n)$ 。由介值定理知, $\exists \xi_n \in [a, b]$, 使得

$$F(\xi_n) = \frac{F(x_1) + F(x_2) + \dots + F(x_n)}{n} = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_1)}{n}.$$

故 $\{\xi_n\}$ 中有子列 $\{\xi_{k_n}\}$, 使得 $\xi_{k_n} \rightarrow x_0 \in [a, b]$, 并有 $F(\xi_{k_n}) = \frac{f(x_{k_n+1}) - f(x_1)}{k_n}$. 令 $n \rightarrow \infty$, 得 $F(x_0) = 0$, 即 $f(x_0) = g(x_0)$. \square

补充 3 (提示: 与有界性定理相关): 设 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x)) = \infty$. 求证: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
 $f(x)$ 极限可不存在 (如振荡)

证明. 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \neq \infty$, 则 $\exists M > 0$ 和 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} \subset \mathbb{R}$, 当 $|x_n| \rightarrow +\infty$ 时, 满足 $|f(x_n)| \leq M$. 由 $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续知 $f(x)$ 在 $[-M, M]$ 上连续, 因而 $f(x)$ 在 $[-M, M]$ 上有界. 故 $|f(f(x_n))|$ 有界, 矛盾. \square

补充 4 (提示: 与最大最小值定理相关): 求证: 不存在 \mathbb{R} 上的连续函数, 使其任一函数值都恰好被取到两次。

证明. 反证: 若存在题设的函数 $f(x)$, 则 $\exists a < b$, 使得 $f(a) = f(b)$ 。由 $f(x)$ 的连续性知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中存在最大值 M 和最小值 m , 且 $\exists x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = M$ 或 $f(x_0) = m$ 成立。不妨设 $f(x_0) = M$ 。

若存在 $x_1 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) = f(x_1) = M$, 则 $\exists x_2, x_3 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $x_4 \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, 使得 $f(x_2) = f(x_3) = f(x_4)$, 这与题设矛盾。

所以存在唯一的 $x_0 \in \mathbb{R}$, 使得 $f(x_0) = M$ 成立, 亦与题设矛盾。综上, 不存在这样的函数 $f(x)$. \square

5 思考探究

探究 1: 连续函数是否一定把 Cauchy 数列映射成 Cauchy 数列?

反例: $f(x) = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$.

探究 2: 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义。探讨 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 x_0 处不同时连续, 那么 $fg(x)$ 在 x_0 处的连续性都有什么样的情况?

$f(x)$ 在 $x = x_0$	$g(x)$ 在 $x = x_0$	$fg(x)$ 在 $x = x_0$	示例
连续	不连续	连续	$f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$
连续	不连续	不连续	$f(x) = x, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$
不连续	不连续	连续	$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}, x_0 = 0$
不连续	不连续	不连续	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}, x_0 = 0$

探究 3: 设函数 $y = f(x)$ 与 $g(y)$ 分别在 x_0 和 y_0 的邻域内有定义, 且 $y_0 = f(x_0)$ 。探讨函数 $f(x)$ 在 x_0 处与 $g(y)$ 在 y_0 处不同时连续, 那么 $g \circ f(x)$ 在 x_0 处的连续性都有什么样的情况?

在 x_0 处, 既可找到逼近 x_0 的无理数数列, 又可找到有理数数列, 二者极限不同 \Rightarrow 不连续

$f(x)$ 在 $x = x_0$	$g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$	$g \circ f(x)$ 在 $x = x_0$	示例
连续 ✓	不连续 ✓	连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 互质且 } q > 0 \\ 0 & x \text{ 为无理数或 } x = 0 \end{cases}, g(y) = \begin{cases} 1 & y \text{ 为有理数} \\ 0 & y \text{ 为无理数} \end{cases}, x_0 = 0$
连续 ✓	不连续 ✓	不连续 ✓	$f(x) = x^2, g(y) = \begin{cases} y & y \leq 1 \\ 3y - 5 & y > 1 \end{cases}, x_0 = 1$
不连续 ✓	连续 ✓	连续 ✓	$f(x) = \operatorname{sgn}(x), g(y) = y(1 - y^2), x_0 = 0$
不连续 ✓	连续 ✓	不连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ 为有理数} \\ 0 & x \text{ 为无理数} \end{cases}, g(y) = y, x_0 = 0$
不连续 ✓	不连续 ✓	连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, p, q \text{ 互质且 } q > 0 \\ 1 & x \text{ 为无理数或 } x = 0 \end{cases}, g(y) = \begin{cases} 1 & y \text{ 为有理数} \\ 0 & y \text{ 为无理数} \end{cases}, x_0 = 0$
不连续 ✓	不连续 ✓	不连续 ✓	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}, g(y) = \operatorname{sgn}(y), x_0 = 0$

6 上周作业答案或提示

6.1 第 50 页

T6 答案: $\frac{\sin x}{x}$ 。

提示: 讨论 $\sin \frac{x}{2^m} \neq 0$, $\sin \frac{x}{2^m} = 0, x \neq 0$ 和 $\sin \frac{x}{2^m} = 0, x = 0$ 三种情况, 再合并结果。

T7 提示:

$$\sum_{k=1}^n \sin k\theta = \begin{cases} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}, & \sin \frac{\theta}{2} \neq 0; \\ 0, & \sin \frac{\theta}{2} = 0. \end{cases}$$
$$\sin \frac{\theta}{2} \sin k\theta = \frac{1}{2} \left(\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) \theta - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) \theta \right).$$

T9 答案: (2) 4; (4) e^2 。

T10 答案: (2) 0; (4) $+\infty$ 。

T11 答案: (2) $-\infty$; (4) $+\infty$ 。

T14 答案: (1) $x = -\frac{1}{e}, y = x + \frac{1}{e}$; (2) $x = 1, y = 3x + 1$ 。注意: (iii) 有个证明题。

6.2 第 52 页

T18 答案: (2) a ; (4) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; (6) 1。

6.3 第 62 页

T6 答案: (2) 跳跃点 (第一类间断点); (4) 跳跃点 (第一类间断点); (6) 连续, 无间断点。

T8 提示: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \neq f(0)$ 。

T10 提示: 考虑连续性的定义, 取 $\epsilon = 1$ 。

T14 提示: 考虑证明 $f(x) \equiv f(0), \forall x \in \mathbb{R}$ 。

T17 答案: (1) $\frac{1}{4}$; (3) $\frac{1}{40}$; (5) $\frac{1}{8}$; (7) 0;

6.4 第 70 页

T2 提示：令 $f(x) = x - a \sin x - b$ ，考虑 $f(0)$ 与 $f(a+b)$ 。注意：最好说明一下 $\forall x > a+b$ ，有 $f(x) > 0$ 恒成立。

T3 提示：令 $g(x) = f(x) - x$ ，考虑 $g(a)$ 与 $g(b)$ 。

T5 提示：令 $h(x) = f(x) - g(x)$ ，考虑 $h(a)$ 与 $h(b)$ 。

T6 提示：令 $g(x) = f(x) - f(x+a)$ ，考虑 $g(0)$ 与 $g(a)$ 。