第三次习题课

陈天添　少年班学院 2023 级 3 班

2025 年 10 月 26 日

摘要

这是 2025.10.26 数学分析 (B1) 王建伟老师班第三次习题课，包含习题讲解，知识回顾与拓展习题。

目录

1 习题讲解

包含了 10.13 10.15 10.17 三次课的作业解答.

1.1 10 月 13 日作业解答

P70 习题 2.2.13

解：由 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续可知: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(a,b)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

现考虑 a 点的右极限. 取 $x_1,x_2\in(a,a+\delta)$. 则 $a<x_1<a+\delta$ 且 $a<x_2<a+\delta$. 因此, $|x_1-x_2|<(a+\delta)-a=\delta$. 根据一致连续的定义, 此时有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

因此, 函数 $f(x)$ 在 $(a,a+\delta)$ 上满足柯西收敛准则. 根据极限存在的柯西准则 (或利用 $\varepsilon-\delta$ 定义直接证明), $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在. 对于 $x\to b_-$ 的情况也类似.

Rmk: 一致连续是一个比较强的条件, 仔细想想和连续的 $\varepsilon-\delta$ 语言有何区别.

P71 习题 2.2.14

解：由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续可以得到: 对任意 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得当 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时, 有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

又因 $\{a_n\}$ 是正收敛数列 (即 $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在), 故 $\{a_n\}$ 是柯西数列. 因此, 对上述 $\delta>0$, 存在 $N\in\mathbb{N}^+$, 使得当 $n,m>N$ 时, 有 $|a_n-a_m|<\delta$.

因此, 对任意 $n,m>N$, 有 $|a_n-a_m|<\delta$. 结合 $f(x)$ 的一致连续性, 有 $|f(a_n)-f(a_m)|<\varepsilon$.

由柯西收敛准则知, 数列 $\{f(a_n)\}$ 收敛.

仅假设 $f(x)$ 连续时, 结论不成立.

例如, 设函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续.

设数列 $a_n=\frac{1}{(n+\frac{1}{2})\pi}$. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, 所以数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0.

但数列 $\{f(a_n)\}$ 为:

$$f(a_n)=\sin\left(\frac{1}{a_n}\right)=\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n.$$

数列 $f(a_n)=(-1)^n$ 是 $1,-1,1,-1,\ldots$ 不收敛.

Rmk: 1. Cauchy 收敛准则并不需要你事先知道收敛到哪里, 这点很有用.

2. 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续和 $\forall N$, 在 $(0,N)$ 上一致连续不一样.

P71 综合习题 2.3

解: 仅证明 (λ_1,λ_2) 内有一个零点, (λ_2,λ_3) 内的证明类似.

设函数 $f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$.

先证明存在 $x_1\in(\lambda_1,\lambda_2)$ 使得 $f(x_1)>0$.

考虑 x 接近 λ_1 的情况. 函数 $g(x)=\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在闭区间 $\left[\lambda_1,\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 上连续. 因此 $g(x)$ 有界, 即存在 $M_1>0$, 使得对任意 $x\in\left[\lambda_1,\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right]$ 有

$$\left|\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}\right|\leqslant M_1.$$

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_1^+}\frac{a_1}{x-\lambda_1}=+\infty$, 因此存在 $\delta_1\in\left(0,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)$ 有 $\frac{a_1}{x-\lambda_1}>M_1$. 因此, 存在 $x_1\in(\lambda_1,\lambda_1+\delta_1)\subset\left(\lambda_1,\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}\right)$, 使得

$$\begin{aligned}f(x_1)&=\frac{a_1}{x_1-\lambda_1}+\left(\frac{a_2}{x_1-\lambda_2}+\frac{a_3}{x_1-\lambda_3}\right)\\&>M_1+(-M_1)=0.\end{aligned}$$

即 $f(x_1)>0$.

再证明存在 $x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$ 使得 $f(x_2)<0$.

考虑 x 接近 λ_2 的情况. 函数 $h(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在闭区间 $\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 上连续. 因此 $h(x)$ 有界, 即存在 $M_2>0$, 使得对任意 $x\in\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right]$ 有

$$\left|\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_3}{x-\lambda_3}\right|\leqslant M_2.$$

又由 $\lim\limits_{x\to\lambda_2^-}\frac{a_2}{x-\lambda_2}=-\infty$, 因此存在 $\delta_2\in\left(0,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{2}\right)$, 使得对任意 $x\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)$ 有 $\frac{a_2}{x-\lambda_2}<-M_2$. 因此, 存在 $x_2\in(\lambda_2-\delta_2,\lambda_2)\subset\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2},\lambda_2\right)$, 使得

$$\begin{aligned} f(x_2) &= \left(\frac{a_1}{x_2-\lambda_1}+\frac{a_3}{x_2-\lambda_3}\right)+\frac{a_2}{x_2-\lambda_2} \\ &< M_2+(-M_2)=0. \end{aligned}$$

即 $f(x_2)<0$.

综上, 存在 $x_1,x_2\in(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得 $f(x_1)>0$, $f(x_2)<0$. 由于 $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 上连续, 由介值定理知, 存在 $x_0\in(\min(x_1,x_2),\max(x_1,x_2))\subset(\lambda_1,\lambda_2)$, 使得 $f(x_0)=0$.

同时由于 $\frac{a_1}{x-\lambda_1}$, $\frac{a_2}{x-\lambda_2}$, $\frac{a_3}{x-\lambda_3}$ 在 (λ_1,λ_2) 上严格单调递减, 因此 $f(x)$ 在 (λ_1,λ_2) 上严格单调递减. 因此, 零点 x_0 唯一.

Rmk: 考虑使用零点存在定理, 对这三个分数的大小要有估计.

P71 综合习题 2.8

解: 我们给出每一问的解答.

(1) 首先证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续：设 $x_0\in[a,b]$，对任意 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{k}>0$，则对任意 $x\in[a,b]$ 且 $|x-x_0|<\delta$，有

$$|f(x)-f(x_0)|\leqslant k|x-x_0|<k\delta=k\frac{\varepsilon}{k}=\varepsilon.$$

因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。

设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续。且 $g(a)=f(a)-a\geqslant 0$，$g(b)=f(b)-b\leqslant 0$。故结合零点定理可推知，存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $g(x_0)=0$，即 $f(x_0)=x_0$。

唯一性证明：对任意 $x,y\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned} |g(x)-g(y)| &= |(f(x)-x)-(f(y)-y)| \\ &= |f(x)-f(y)-(x-y)| \\ &\geqslant ||x-y|-|f(x)-f(y)|| \quad (\text{由三角不等式}|A-B|\geqslant ||A|-|B||) \\ &\geqslant |x-y|-|f(x)-f(y)| \quad (\text{因为}|x-y|\geqslant|f(x)-f(y)|\text{ 不一定成立}) \end{aligned}$$

如果假设 $k<1$，则

$$|g(x)-g(y)|=|f(x)-f(y)-(x-y)|\geqslant|x-y|-|f(x)-f(y)|\geqslant|x-y|-k|x-y|=(1-k)|x-y|.$$

若存在 $x_1\neq x_0$ 使得 $f(x_1)=x_1$，则 $g(x_1)=0$。于是

$$(1-k)|x_1-x_0|\leqslant|g(x_1)-g(x_0)|=|0-0|=0.$$

因为 $k<1$，所以 $1-k>0$，故 $|x_1-x_0|\leqslant 0$，即 $x_1=x_0$。因此 x_0 唯一。

(2) 若 $x_2=x_1$. 则由 $f(x_1)=x_1$ 以及 (1) 中所述的唯一性，知 $x_2=x_1=x_0$，其中 x_0 是唯一的定点。则 $x_3=f(x_2)=f(x_0)=x_0$，依此类推，有 $x_n=x_0$ 对任意 $n\geqslant 1$ 成立。因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

若 $x_2=x_1$. 则由 $f(x_1)=x_1$ 以及 (1) 中所述的唯一性，知 $x_2=x_1=x_0$，其中 x_0 是唯一的定点。则 $x_3=f(x_2)=f(x_0)=x_0$，依此类推，有 $x_n=x_0$ 对任意 $n\geqslant 1$ 成立。因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.

(3) 取 $f(x)=x+\frac{1}{1+e^x}$ 满足条件.

Rmk: (1) 即为压缩映射原理.

1.2 10 月 15 日作业解答

P92 习题 3.1.2

解:

(1) 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 和 $(1, +\infty)$ 上可导，故只需讨论 $x = 1$ 处的可导性。

由连续性得：

$$f(1) = \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow 1 = a + b.$$

由可导性得：

$$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 2 = a.$$

解得 $a = 2, b = -1.$

(2) 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上可导，故只需讨论 $x = 0$ 处的可导性。

由连续性得：

$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) \Rightarrow b = 0.$$

由可导性得：

$$f'_-(0) = f'_+(0) \Rightarrow 1 = a.$$

解得 $a = 1, b = 0.$

P92 习题 3.1.4

解:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h} &= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{h} \right] \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\alpha \cdot \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha h} + \beta \cdot \frac{f(x_0) - f(x_0 - \beta h)}{\beta h} \right] \\
&= \alpha f'(x_0) + \beta f'(x_0) \\
&= (\alpha + \beta) f'(x_0)
\end{aligned}$$

Rmk: 定义.

P92 习题 3.1.6 偶

解:

(2)

$$\begin{aligned}
y' &= (\sin x \tan x + \cot x)' \\
&= (\sin x \tan x)' + (\cot x)' \\
&= (\cos x \tan x + \sin x \sec^2 x) + (-\csc^2 x) \\
&= \cos x \frac{\sin x}{\cos x} + \sin x \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} \\
&= \sin x + \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \csc^2 x \\
&= \sin x + \sin x \sec^2 x - \csc^2 x
\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
y' &= \left(\frac{x}{1-\cos x}\right)' \\
&= \frac{(x)'(1-\cos x) - x(1-\cos x)'}{(1-\cos x)^2} \\
&= \frac{1\cdot(1-\cos x) - x(-(-\sin x))}{(1-\cos x)^2} \\
&= \frac{1-\cos x - x\sin x}{(1-\cos x)^2}
\end{aligned}$$

(6)

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{[(1+x^2)\ln x]'(\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\sin x+\cos x)'}{(\sin x+\cos x)^2} \\
&= \frac{[(1+x^2)'\cdot\ln x + (1+x^2)\cdot(\ln x)'](\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} \\
&= \frac{\left[2x\ln x + (1+x^2)\cdot\frac{1}{x}\right](\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2} \\
&= \frac{\left(2x\ln x + \frac{1}{x} + x\right)(\sin x+\cos x) - (1+x^2)\ln x(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}
\end{aligned}$$

(8)

$$\begin{aligned}
y' &= (x^3)'\tan x\ln x + x^3(\tan x)'\ln x + x^3\tan x(\ln x)' \\
&= (3x^2)\tan x\ln x + x^3(\sec^2 x)\ln x + x^3\tan x\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= 3x^2\tan x\ln x + x^3\sec^2 x\ln x + x^2\tan x \\
&= x^2(3\tan x\ln x + x\sec^2 x\ln x + \tan x)
\end{aligned}$$

P92 习题 3.1.7 3 的倍数

解:

(3)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\arccos\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{4x^2-4x+1}{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{3-(4x^2-4x+1)}{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{\frac{-4x^2+4x+2}{3}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{-4x^2+4x+2}} \\
&= -\frac{2}{\sqrt{2(-2x^2+2x+1)}} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{-2x^2+2x+1}}
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1+\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{d}{dx}(x+\sqrt{x})\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

(9)

$$
\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3 \\
&= 3\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right) \\
&= 3\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{(x^2-1)'(x^2+1)-(x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= 3\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{(2x)(x^2+1)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= 3\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2 \cdot \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2} \\
&= 3\frac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{4x}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{12x(x^2-1)^2}{(x^2+1)^4}
\end{aligned}
$$

(12)

$$
\begin{aligned}
y &= \ln\left[\left(\ln\left((\ln x)^3\right)\right)^2\right] \\
&= \ln\left[\left(3\ln(\ln x)\right)^2\right] \\
&= \ln\left[9(\ln(\ln x))^2\right] \\
&= \ln(9) + \ln\left[(\ln(\ln x))^2\right] \\
&= \ln(9) + 2\ln(\ln(\ln x)) \\
y' &= \frac{d}{dx}\left(\ln(9) + 2\ln(\ln(\ln x))\right) \\
&= 0 + 2 \cdot \frac{1}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{d}{dx}(\ln(\ln x)) \\
&= \frac{2}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) \\
&= \frac{2}{\ln(\ln x)} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{2}{x\ln x\ln(\ln x)}
\end{aligned}
$$

(15)

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left((\tan x)^{\cot x}\right) \\
\ln y &= \cot x \cdot \ln(\tan x) \\
\frac{d}{dx}(\ln y) &= \frac{d}{dx}\left(\cot x \cdot \ln(\tan x)\right) \\
\frac{1}{y}y' &= (\cot x)' \cdot \ln(\tan x) + \cot x \cdot (\ln(\tan x))' \\
\frac{1}{y}y' &= (-\csc^2 x) \cdot \ln(\tan x) + \cot x \cdot \frac{1}{\tan x} \cdot (\tan x)' \\
\frac{1}{y}y' &= -\csc^2 x \ln(\tan x) + \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \sec^2 x \\
\frac{1}{y}y' &= -\csc^2 x \ln(\tan x) + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \\
\frac{1}{y}y' &= -\csc^2 x \ln(\tan x) + \frac{1}{\sin^2 x} \\
\frac{1}{y}y' &= -\csc^2 x \ln(\tan x) + \csc^2 x \\
\frac{1}{y}y' &= \csc^2 x(1 - \ln(\tan x)) \\
y' &= y\left[\csc^2 x(1 - \ln(\tan x))\right] \\
y' &= (\tan x)^{\cot x} \csc^2 x(1 - \ln(\tan x))
\end{aligned}
$$

(18)

$$
\begin{aligned}
\ln y &= \ln\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)^{1/2}\right) \\
&= \ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)
\end{aligned}
$$

两边同时对 x 求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{y}y' &= \frac{d}{dx}\left[\ln(1-\sqrt{x}) - \ln(1+\sqrt{x}) + \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] \\
&= \frac{1}{1-\sqrt{x}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1+x^2)} \cdot (2x) \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1-\sqrt{x}} + \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1+\sqrt{x}+1-\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}\right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2} \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{2}{1-x}\right) + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2}
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\begin{aligned}
y' &= y\left[-\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2}\right] \\
&= \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\sqrt{\frac{1+x}{1+x^2}}\left[-\frac{1}{\sqrt{x}(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} - \frac{x}{1+x^2}\right]
\end{aligned}
$$

Rmk: 你们作业好多啊...

P93 习题 3.1.10 偶

解:

(2) 令 $u=\sin^2 x, v=\cos^2 x$.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{d}{dx}f(u)+\frac{d}{dx}f(v)\\&=\frac{df}{du}\frac{du}{dx}+\frac{df}{dv}\frac{dv}{dx}\\&=f'(u)\cdot(2\sin x\cos x)+f'(v)\cdot(2\cos x(-\sin x))\\&=f'(\sin^2 x)\sin(2x)-f'(\cos^2 x)\sin(2x)\\&=\left[f'(\sin^2 x)-f'(\cos^2 x)\right]\sin(2x).\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin\left[f\left(\sin f(x)\right)\right]&=\cos\left[f\left(\sin f(x)\right)\right]\cdot\frac{d}{dx}f\left(\sin f(x)\right)\\&=\cos\left[f\left(\sin f(x)\right)\right]\cdot f'\left(\sin f(x)\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(\sin f(x)\right)\\&=\cos\left[f\left(\sin f(x)\right)\right]\cdot f'\left(\sin f(x)\right)\cdot\cos(f(x))\cdot\frac{d}{dx}f(x)\\&=f'(x)\cos(f(x))f'\left(\sin f(x)\right)\cos\left[f\left(\sin f(x)\right)\right].\end{aligned}$$

(6) 令 $u=f(e^x), v=e^{f(x)}, y=uv.\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}v+u\frac{dv}{dx}$. 分别计算:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx}&=\frac{d}{dx}f(e^x)=f'(e^x)\cdot(e^x)'=e^xf'(e^x).\\\frac{dv}{dx}&=\frac{d}{dx}e^{f(x)}=e^{f(x)}\cdot f'(x).\end{aligned}$$

代入知

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=(e^xf'(e^x))\cdot e^{f(x)}+f(e^x)\cdot\left(e^{f(x)}f'(x)\right)\\&=e^{f(x)}\left[e^xf'(e^x)+f(e^x)f'(x)\right].\end{aligned}$$

P93 习题 3.1.12 解:

(1) 当 $n=1$ 时,

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{h\to0^+}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to0^+}\sin\frac{1}{h}\\f'_-(0)&=\lim_{h\to0^-}\frac{h\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to0^-}\sin\frac{1}{h}\end{aligned}$$

显然, $f'_+(0)$ 与 $f'_-(0)$ 不存在, 因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处不可导.

(2) 当 $n=2$ 时,

$$\begin{aligned}f'_+(0)&=\lim_{h\to0^+}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to0^+}h\sin\frac{1}{h}=0\\f'_-(0)&=\lim_{h\to0^-}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to0^-}h\sin\frac{1}{h}=0\end{aligned}$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 对于 $x\neq 0$, $f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. 因此,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)$$

不存在, 故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处不连续.

(3) 当 $n\geq 3$ 时,

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^n\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}h^{n-1}\sin\frac{1}{h}=0$$
$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{h^n\sin\frac{1}{h}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}h^{n-1}\sin\frac{1}{h}=0$$

因此 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 且 $f'(0)=0$. 对于 $x\neq 0$, $f'(x)=\left(x^n\sin\frac{1}{x}\right)'=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}+x^n\left(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\right)=nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}$. 因此,

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right)=0$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

1.3 10 月 17 日作业解答

P93 3.1.14

解: 本题求解反函数的微商（即反函数的导数）。我们使用反函数求导法则：

如果函数 $y=f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，且 $f'(x)$ 存在且不为零，则其反函数的导数为：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

我们依次对每个函数求解：

(1) 首先，求 y 对 x 的导数（使用乘法法则）：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(xe^x)=(x)'e^x+x(e^x)'=1\cdot e^x+xe^x=e^x(1+x)$$

因此，反函数的微商为：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{e^x(1+x)}$$

(2) 首先，求 y 对 x 的导数（使用链式法则）：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{\frac{x^2+1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{x^2}{x^2+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2+1}$$

因此，反函数的微商为：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{-\frac{1}{x^2+1}}=-(x^2+1)$$

(3) 首先，求 y 对 x 的导数：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(2x^3-e^{-2x})=6x^2-(e^{-2x}\cdot(-2))=6x^2+2e^{-2x}$$

因此，反函数的微商为：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{6x^2+2e^{-2x}}$$

(4) 首先，求 y 对 x 的导数。我们注意到 y 的形式是反双曲正弦函数 $\operatorname{arsinh}(u)=\ln(u+\sqrt{u^2+1})$。令 $u=e^x$，则 $u^2=e^{2x}$。因此，$y=\operatorname{arsinh}(e^x)$。使用链式法则求导（$\frac{d}{du}\operatorname{arsinh}(u)=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$）：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}(\operatorname{arsinh}(e^x))=\frac{1}{\sqrt{(e^x)^2+1}}\cdot\frac{d}{dx}(e^x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\cdot e^x=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

因此，反函数的微商为：

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}}=\frac{\sqrt{1+e^{2x}}}{e^x}$$

P93 3.1.15

解：设 $f(x)$ 为偶函数, 则 $f(-x)=f(x)$, 则

$$f'(-x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为奇函数.

P93 3.1.16

解: 设 $f(x)$ 为周期为 T 的函数, 则 $f(x+T)=f(x)$, 则

$$f'(x+T)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x),$$

则 $f'(x)$ 为周期为 T 的函数.

P93 3.1.17

解:

(1)

$$P_n=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}\quad (x\neq 1)$$

(2)

$$Q_n=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}\quad (x\neq 1)$$

(3)

$$R_n=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{2(\cos x-1)}$$

P93 3.1.20

Rmk: 直接计算即可.

P93 3.1.21

解: 由题意, $P_n(x)=(x-x_0)^r Q_{n-r}(x)$, 则

$$P_n^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}[(x-x_0)^r]^{(i)}\cdot Q_{n-r}^{(k-i)}(x).$$

(a) 当 $k<r$ 时, $[(x-x_0)^r]^{(i)}=0$, 则 $P_n^{(k)}(x_0)=0$. (b) 当 $k=r$ 时, $[(x-x_0)^r]^{(r)}=r!$, 则 $P_n^{(r)}(x_0)=r!Q_{n-r}(x_0)\neq 0$.

2 知识回顾

本章的主题是单变量函数的微分学, 首先定义了导数的概念, 然后证明了导数所满足的一些性质, 在 3.2 节中介绍了微分的概念, 在数学分析 (B1) 涉及到的内容, 也就是一元微积分的部分, 看起来可微似乎等价于可导, 但是仍需注意其细小差别. 在 3.3 节, 我们引入了 Rolle 定理, Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理等一系列中值定理, 这揭示了如何通过导数反过来研究函数本身的性质, 需要注意的是, 中值定理的应用可能涉及到一些奇妙的变形技巧, 难度较高, 在期中考试中也有可能作为难题出现, 因此需要多积累经验和例子.

2.1 导数

Definition 2.1.1 (导数)**.** *若*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

存在, 则定义其为函数在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 若换为 $x\to x_0^+, x_0^-$, 则相应地定义为右/左导数.

Rmk: 1. 由于导数是由极限定义的, 其反映的是局部的性质. 2. 由定义式可以看到, 分母部分显然趋于 0, 那么分子也要趋于 0, 否则极限不存在, 这也说明了求导 $\Rightarrow$ 连续.

Proposition 2.1.2. *导数满足如下性质*

1. $(f\pm g)'=f'\pm g'$.
2. $(fg)'=f'g+fg'$.
3. $\frac{f}{g}'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$.
4. $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$. *(复合函数求导, $\circ$ 代表复合)*

一些常用计算导数的方法:

1. 直接展开计算, 注意熟记初等函数的导数.
2. 利用反函数求导.
3. 形如 $e^{f(x)}$ 或 $f(x)^{g(x)}$ 等指数类型求导时, 注意到 $(e^{f(x)})'=e^{f(x)}f'(x)$, 因此可以先求 $f'(x)$.
4. 求高阶导数时, 尝试寻找递推公式. 找到一个对较低阶导数成立的等式, 然后对两侧求 n 次导数.
5. 隐函数求导. 若 x,y 满足 $F(x,y(x))=0$, 对这个式子两侧求导即可得到 $\frac{dy}{dx}$.

2.2 微分

Definition 2.2.1. 若

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad \Delta x \to 0$$

则称 f 在 x 可微, 称 $A\Delta x$ 为 f 在 x 处的微分.

Rmk: 1. 一元情况下, 可微等价于可导. 2. 可以从定义看到, 微分就是函数在某点的线性化. 线性函数? 矩阵? 线性算子? 导子? 留待探索.

2.3 中值定理

Theorem 2.3.1 (Fermat). $x_0 \in I$ 为区间 I 的内点处取到局部极值, 且在该点可导, 那么 $f'(x_0) = 0$.

Theorem 2.3.2 (Rolle). f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, $f(a) = f(b)$, 那么 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = 0$

Theorem 2.3.3 (Lagrange). f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 那么 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Theorem 2.3.4. f, g 在 $[a,b]$ 上连续, $g(x) \neq 0$, f, g 在 (a,b) 内可导, 那么 $\exists \xi \in (a,b)$ 使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Proposition 2.3.5. 一些常见的构造

1. $f'(x) + \lambda f(x) = 0$, 构造 $g(x) = e^{\lambda x} f(x)$. 特别地, 对于 $\lambda = \pm 1$, $f'(x) \pm f(x) = 0$, 构造 $g(x) = e^{\pm x} f(x)$.

2. $f''(x) - f(x) = 0$, 构造 *(1)* $g(x) = e^{x}(f'(x) - f(x))$; *(2)* $g(x) = e^{-x}(f'(x) + f(x))$.

3. $f''(x) + f(x) = 0$, 构造 *(1)* $g(x) = f^2(x) + f'^2(x)$; *(2)* $g(x) = f(x)\sin x + f'(x)\cos x$.

4. $xf'(x) + \alpha f(x) = 0$, 构造 $g(x) = x^{\alpha} f(x)$.

5. $xf(x) + f'(x) = 0$, 构造 $g(x) = e^{\frac{x^2}{2}} f(x)$.

6. $f'(x) - \lambda(f(x) - x) = 1$, 构造 $g(x) = (f(x) - x)e^{-\lambda x}$.

Theorem 2.3.6 (Darboux). $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 对 $\forall \lambda$ 在 $f'(a), f'(b)$ 之间, 均 $\exists \xi \in [a,b]$ 使得 $f'(\xi) = \lambda$

Rmk: 这说明导函数具有介值性，但它并不需要导函数连续!

3 补充习题

Example 3.0.1. $y = \arcsin x$, 计算 $f^{(n)}(0)$.

解: 直接计算很难总结出规律. 关键是寻找递推关系. 首先有

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

将其改写为

$$y'\sqrt{1-x^2}=1$$

两侧求导知

$$y''\sqrt{1-x^2}-y'\cdot\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=0.$$

$$(1-x^2)y''-xy'=0,$$

然后用 Leibniz 公式得到

$$y^{(n+2)}(1-x^2)+ny^{(n+1)}(-2x)+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n)}(-2)-(xy^{(n+1)}+ny^{(n)})=0.$$

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0.$$

代入 $x=0$, 容易计算得到

$$y^{(2k)}(x)=0$$

$$y^{(2k+1)}(x)=((2k+1)!!)^2$$

Example 3.0.2. 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, $f(a)=f(b)=0$. 证明: 对每个 $x\in(a,b)$, $\exists\xi\in(a,b)$, 使得

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

解: $\forall x\in(a,b)$, 构造

$$g(t)=f(t)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(t-a)(t-b)$$

$g(t)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可微.

$$g(a)=f(a)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(a-a)(a-b)=0,$$

$$g(b)=f(b)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(b-a)(b-b)=0,$$

$$g(x)=f(x)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}(x-a)(x-b)=0.$$

根据罗尔定理, 存在 $c_1\in(a,x),c_2\in(x,b)$ 使得

$$g'(c_1)=0,\quad g'(c_2)=0.$$

对 $g'(t)$ 在 $[c_1,c_2]$ 上应用罗尔定理, $\exists\xi\in(c_1,c_2)\subset(a,b)$,

$$g''(\xi)=0.$$

$$g''(t)=f''(t)-\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}\cdot 2.$$

$$g''(\xi)=f''(\xi)-\frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}=0.$$

即

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b).$$

证毕.

Example 3.0.3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微且满足 $f(0)=0$ 及 $|f'(x)|\leq|f(x)|, x\in[0,1]$. 求证: 在 $[0,1]$ 上, $f(x)\equiv 0$.

解:

记

$$g(x)=(e^{-x}f(x))^2,$$

则

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{-x}f(x)\cdot(e^{-x}f(x))' \\ &= 2e^{-x}f(x)\cdot(e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)) \\ &= 2e^{-2x}(f(x)f'(x)-f(x)^2) \end{aligned}$$

因为 $|f'(x)|\leq|f(x)|$, 所以 $f(x)f'(x)\leq|f(x)||f'(x)|\leq|f(x)|^2=f(x)^2$. 因此

$$g'(x)=2e^{-2x}(f(x)f'(x)-f(x)^2)\leq 0.$$

所以 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减. 又因为 $f(0)=0$, 所以 $g(0)=(e^{-0}f(0))^2=0$. 故对任意 $x\in[0,1]$, 有 $g(x)\leq g(0)=0$. 而从 $g(x)$ 的定义可知 $g(x)=(e^{-x}f(x))^2\geq 0$. 因此, 在 $[0,1]$ 上, $g(x)\equiv 0$. 从而 $f(x)\equiv 0$.

Example 3.0.4. 设函数 f 在点 a 处二阶可导, 且 $f''(a)\neq 0$, 则在 h 充分小时, 成立 $f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$, 而且其中的 θ 具有性质 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=1/2$.

解:

由于存在 $f''(a)$, 因此至少在 a 的一个邻域上 f 可微. 当 h 充分小时, 可在区间 $[a,a+h](h>0)$ 或 $[a+h,a](h<0)$ 上用 *Lagrange* 中值定理, 得到

$$f(a+h)-f(a)=f'(a+\theta h)h$$

其中 $0<\theta<1$.

考虑分式

$$I=\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h^2}$$

若令 $F(x)=f(a+x)-f(a)-f'(a)x, G(x)=x^2$, 则上式的分子为 $F(h)-F(0)$, 分母为 $G(h)-G(0)$, 用 *Cauchy* 中值定理, 存在 $\eta\in(0,h)$ 或 $(h,0)$, 使得

$$I=\frac{f'(a+\eta)-f'(a)}{2\eta}.$$

联立得

$$I=\frac{f'(a+\theta h)h-f'(a)h}{h^2}=\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{h}.$$

令以上两个表达式相等, 并写成

$$\theta\cdot\left(\frac{f'(a+\theta h)-f'(a)}{\theta h}\right)=\frac{f'(a+\eta)-f'(a)}{2\eta}.$$

由于 $0<\theta<1$, η 在 a 和 $a+h$ 之间, 而且有条件 $f''(a)\neq 0$, 因此在上式两边令 $h\to 0$, 就可以得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h)=1/2$. □