第二次习题课讲义

袁懿

2025 年 10 月 15 日

1　作业题答案

2a.1 计算下列求和

(1) 计算 $\sum_{i=1}^{n}(3i+2)$（其中 n 为正整数）

答案： $\dfrac{3n^2+7n}{2}$

解答： 拆分求和式为等差数列求和：

$$\sum_{i=1}^{n}(3i+2)=3\sum_{i=1}^{n}i+\sum_{i=1}^{n}2$$

利用等差数列求和公式 $\sum_{i=1}^{n}i=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 及常数求和 $\sum_{i=1}^{n}2=2n$，代入得：

$$3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+2n=\frac{3n(n+1)+4n}{2}=\frac{3n^2+7n}{2}$$

(2) 计算 $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ i\text{ 为奇数}}}(3i+2)$

答案：

$$\begin{cases}\dfrac{3n^2+10n+7}{4} & \text{当}n\text{ 为奇数时}\\ \dfrac{3n^2+4n}{4} & \text{当}n\text{ 为偶数时}\end{cases}$$

(3) 计算 $\sum_{1\le i<2j\le 5}(i+2j)$

答案： 21

解答： 枚举满足 $1\le i<2j\le 5$ 的 (i,j) 组合：

当 $j=1$ 时，$2j=2$，则 $i<2$ 且 $i\ge 1$，即 $i=1$，项为 $1+2=3$；

当 $j=2$ 时，$2j=4$，则 $i<4$ 且 $i\ge 1$，即 $i=1,2,3$，项分别为 $1+4=5$、$2+4=6$、$3+4=7$；

当 $j=3$ 时，$2j=6>5$，不满足条件；求和得：$3+5+6+7=21$

Rmk: 这道题批改过程中，发现不少同学答案是 60，主要原因是把 $2j$ 当作整体取值 1，2，3，4，5，这

是错误的.

(4) 计算 $\prod_{i=1}^{10} 2^{2i+1}$

答案： 2^{120}

推导： 利用指数幂乘积性质 $\prod_{i=1}^{n} a^{b_i} = a^{\sum_{i=1}^{n} b_i}$，求指数和：

$$\sum_{i=1}^{10}(2i+1) = 2\sum_{i=1}^{10} i + \sum_{i=1}^{10} 1 = 2 \cdot \frac{10 \times 11}{2} + 10 = 110 + 10 = 120$$

2a 书上习题

1. 解下列线性方程组

(1)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \end{cases}$$

答案： 无解

(2)

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{cases}$$

答案： 根据选择的自由变量，不唯一，给出一解：

$x_1 = -8, x_2 = t, x_3 = 2t, x_4 = t - 3$

(3)

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3 \end{cases}$$

答案：根据选择的自由变量，不唯一，给出一解：

$$\begin{cases} x_1 = 0.6 - 1.5s - 0.1t \\ x_2 = s \\ x_3 = 0.2 + 0.8t \\ x_4 = t \end{cases}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

(5)

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

答案：无解

(7)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

答案：根据选择的自由变量，不唯一，给出一解：

$$\begin{cases} x_1 = \frac{7}{6}t \\ x_2 = \frac{5}{6}t \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{3}t \\ x_5 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

2. 当 a 为何值时，下列线性方程组有解？有解时求出它的通解

(1)

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_1-x_2-2x_3=-3 \\ ax_1-2x_2+2x_3=6 \end{cases}$$

解： 增广矩阵为:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

首先交换第 1 行和第 2 行:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ a & -2 & 2 & 6 \end{array}\right]$$

第 1 行乘以-3 加到第 2 行，第 1 行乘以-a 加到第 3 行:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 5 & 7 & 11 \\ 0 & a-2 & 2+2a & 6+3a \end{array}\right]$$

第 2 行除以 5:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & a-2 & 2+2a & 6+3a \end{array}\right]$$

第 2 行乘以 $(2-a)$ 加到第 3 行:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & \frac{24+3a}{5} & \frac{52+4a}{5} \end{array}\right]$$

化简第 3 行（乘以 5）:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{7}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 0 & 24+3a & 52+4a \end{array}\right]$$

方程组有解的条件是第 3 行不矛盾，即：

当 $24+3a\neq 0$ 时，有唯一解

当 $24+3a=0$ 且 $52+4a=0$ 时，有无穷多解

当 $24+3a=0$ 且 $52+4a\neq 0$ 时，无解

解 $24+3a=0$ 得 $a=-8$，此时 $52+4a=52-32=20\neq 0$，故无解

因此，当 $a\neq -8$ 时，方程组有唯一解, 回代求解：

由第 3 行：$(24+3a)x_3=52+4a$，得 $x_3=\dfrac{52+4a}{24+3a}$

由第 2 行：$x_2+\dfrac{7}{5}x_3=\dfrac{11}{5}$，得 $x_2=\dfrac{11}{5}-\dfrac{7}{5}\cdot\dfrac{52+4a}{24+3a}$

由第 1 行：$x_1-x_2-2x_3=-3$，得 $x_1=-3+x_2+2x_3$

化简后得唯一解：

$$x_1=\frac{4}{8+a},\quad x_2=\frac{a-20}{3(8+a)},\quad x_3=\frac{4(13+a)}{3(8+a)}$$

当 $a=-8$ 时，方程组无解.

(2)

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1 \\ -x_1+11x_2-x_3=3 \\ 3x_1-5x_2+7x_3=a \end{cases}$$

解： 增广矩阵为：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{array}\right]$$

第 1 行加到第 2 行，第 1 行乘以-3 加到第 3 行：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{array}\right]$$

第 2 行乘以-1 加到第 3 行：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{array}\right]$$

方程组有解的条件是第 3 行不矛盾，即 $a+1=0$，所以 $a=-1$

当 $a=-1$ 时，方程组有解, 回代求解：

由第 2 行：$7x_2+x_3=2$，令 $x_3=t$，则 $x_2=\dfrac{2-t}{7}$

由第 1 行：$x_1-4x_2+2x_3=-1$，代入得：

$$x_1=-1+4x_2-2x_3=-1+4\cdot\frac{2-t}{7}-2t=\frac{1-18t}{7}$$

通解为：

$$x_1=\frac{1-18t}{7},\quad x_2=\frac{2-t}{7},\quad x_3=t,\quad t\in\mathbb{R}$$

答案： 当 $a=-1$ 时有解，通解如上；当 $a\neq-1$ 时无解.

3. a 为何值时，下述线性方程组有唯一解？无解？

解： 增广矩阵为：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -a & 9 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \end{array}\right]$$

第 1 行乘以-1 加到第 2 行，第 1 行乘以-2 加到第 3 行：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

第 2 行乘以 3 加到第 3 行：

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & 18 \end{array}\right]$$

现在分析：当 $-3a-2\neq0$，即 $a\neq-\dfrac{2}{3}$ 时，方程组有唯一解

当 $-3a-2=0$ 且 $18\neq0$，即 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，方程组无解

因此：当 $a\neq-\dfrac{2}{3}$ 时，方程组有唯一解当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时，方程组无解

答案： 当 $a\neq-\dfrac{2}{3}$ 时有唯一解；当 $a=-\dfrac{2}{3}$ 时无解

5. 求三次多项式 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 满足

$$f(0)=1,\quad f(1)=2,\quad f'(0)=1,\quad f'(1)=-1$$

解： 由条件得:

$$\begin{cases} f(0) = d = 1 \\ f(1) = a + b + c + d = 2 \\ f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \Rightarrow f'(0) = c = 1 \\ f'(1) = 3a + 2b + c = -1 \end{cases}$$

解得: $a = -2, b = 2, c = 1, d = 1$，故:

$$f(x) = -2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

2b.1

考虑线性方程组:

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a - 3 \\ x_1 + ax_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + ax_3 = -2 \end{cases}$$

(1) **解：** 增广矩阵为:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & a & 1 & -2 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right)$$

交换第 1 行和第 2 行:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -2 \\ a & 1 & 1 & a-3 \\ 1 & 1 & a & -2 \end{array}\right)$$

第 2 行减去 a 倍第 1 行，第 3 行减去第 1 行:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & a-3+2a \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a & 3a-3 \\ 0 & 1-a & a-1 & 0 \end{array}\right)$$

当 $a \neq 1$ 时，可以将第 2 行除以 $1-a$，第 3 行除以 $1-a$：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1+a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

交换第 2 行和第 3 行：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1+a & 1 & 3 \end{array}\right)$$

第 3 行减去 $(1+a)$ 倍第 2 行：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 3 \end{array}\right)$$

case1： $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$

此时 $2+a \neq 0$，系数矩阵满秩，方程组有唯一解：

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{3}{2+a} \\ x_2 = x_3 = \dfrac{3}{2+a} \\ x_1 = -2 - ax_2 - x_3 = -2 - (a+1)\dfrac{3}{2+a} \end{cases}$$

case2： $a = -2$

增广矩阵变为：

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right)$$

最后一行对应方程 $0 = 3$，矛盾，方程组无解.

case3： $a = 1$

直接代入原方程组：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -2 \end{cases}$$

令 $x_2 = s$，$x_3 = t$，则 $x_1 = -2 - s - t$，通解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{R}$$

(2) **证明：**计算系数矩阵的行列式：

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a(a^2 - 1) - (a - 1) + (1 - a) = a^3 - 3a + 2$$

因式分解得：

$$|A| = (a-1)^2(a+2)$$

当 $|A| \neq 0$，即 $a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时，系数矩阵可逆，方程组有唯一解.

当 $|A| = 0$，即 $a = 1$ 或 $a = -2$ 时，系数矩阵不可逆，方程组要么无解，要么有无穷多解.

2b 书上习题

6. 设二次曲线方程为：

$$G(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

代入点 $A(-2, -2), B(1, -1), C(2, 0), D(0, 2), E(-1, 1)$，得方程组：

$$\begin{cases} 4a - 8b + 4c - 2d - 2e + f = 0 \\ a - 2b + c + d - e + f = 0 \\ 4a + 0 + 0 + 2d + 0 + f = 0 \\ 0 + 0 + 4c + 0 + 2e + f = 0 \\ a - 2b + c - d + e + f = 0 \end{cases}$$

令 $f = 1$，解得：

$$a = -\frac{7}{24}, \quad b = \frac{5}{24}, \quad c = -\frac{7}{24}, \quad d = \frac{1}{12}, \quad e = \frac{1}{12}$$

故所求二次曲线为：

$$7x^2 - 10xy + 7y^2 - 2x - 2y - 24 = 0$$

Rmk:$f=0$ 时，有唯一解，曲线为零曲线，同时这道题可以给接下来第九题启示，曲线方程乘以任意非零常数曲线不变

7. 原方程组:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=2 \\ 2x_1+5x_2-2x_3+x_4=1 \\ 3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

齐次方程组（常数项为零）:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+4x_4=0 \\ 2x_1+5x_2-2x_3+x_4=0 \\ 3x_1+8x_2-x_3-2x_4=0 \end{cases}$$

齐次方程组通解:

$$\mathbf{x}=k_1\begin{pmatrix}11\\-4\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-18\\7\\0\\1\end{pmatrix}$$

非齐次方程组特解:

$$\mathbf{x}_0=\begin{pmatrix}8\\-3\\0\\0\end{pmatrix}$$

非齐次通解为 $\mathbf{x}_0$ 加齐次通解, 解集为齐次解空间的平移.

Rmk: 对一般线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 及其齐次形式 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$:

若 $\mathbf{x}_p$ 是非齐次方程的特解，$\mathbf{x}_h$ 是齐次方程的通解，则非齐次方程的通解为 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_p+\mathbf{x}_h$

Pf: 我们需要证明两个集合的互相包含关系:

(1)$x_p+S_h\subseteq S$

任取 $x\in x_p+S_h$，则存在 $x_h\in S_h$ 使得 $x=x_p+x_h$

计算:

$$Ax=A(x_p+x_h)=Ax_p+Ax_h=b+0=b$$

所以 x 满足 $Ax=b$，即 $x\in S$

因此，$x_p+S_h\subseteq S$.

(2) $S\subseteq x_p+S_h$

任取 $x\in S$，即 $Ax=b$

令 $x_h=x-x_p$，则：

$$Ax_h=A(x-x_p)=Ax-Ax_p=b-b=0$$

所以 $x_h\in S_h$，且 $x=x_p+x_h\in x_p+S_h$

因此，$S\subseteq x_p+S_h$.

解集结构：非齐次方程的解集是齐次解空间的一个仿射平移

唯一性：当且仅当齐次方程只有零解时，非齐次方程至多有一个解

8. 设食物 A、B、C、D 的用量分别为 x_1,x_2,x_3,x_4 千克，列线性方程组：

$$\begin{cases}5x_1+4x_2+7x_3+10x_4=100\\20x_1+25x_2+10x_3+5x_4=200\\2x_1+2x_2+10x_3+6x_4=50\end{cases}$$

构造增广矩阵并作初等行变换：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}5&4&7&10&100\\20&25&10&5&200\\2&2&10&6&50\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}2&2&10&6&50\\20&25&10&5&200\\5&4&7&10&100\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}1&1&5&3&25\\20&25&10&5&200\\5&4&7&10&100\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2-20r_1,\ r_3-5r_1}\begin{pmatrix}1&1&5&3&25\\0&5&-90&-55&-300\\0&-1&-18&-5&-25\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\times(-1),\ r_2\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&5&3&25\\0&1&18&5&25\\0&0&-180&-80&-425\end{pmatrix}$$

由第三行得 $-180x_3-80x_4=-425$，即 $180x_3+80x_4=425$ 结合 $x_2=25-18x_3-5x_4$ 和 $x_1=13x_3+2x_4$，要求 $x_1,x_2,x_3,x_4\geq 0$，但无满足条件的非负解

故不能适量配备上述四种食品满足兽医的建议.

9. 考虑一般三次代数曲线方程：

$$C(x,y)=ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j=0$$

设给定 9 个点坐标为 $(x_k, y_k), k = 1, \ldots, 9$, 将每个点代入曲线方程，得到 9 个线性方程组成的齐次方程组

这是九个方程，十个未知数的**齐次方程**，故必有解且有无穷多个解

但是!!! 任意一个曲线方程乘以非零常数曲线均不变，所以当方程解有形式

$$\begin{cases} a = tA \\ b = tB \\ \ldots\ldots \\ i = tI \\ j = tJ \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

曲线存在且唯一，如此形式是否存在呢，其实不难发现上面第七题的五元曲线就是该种情况，即解有一个自由度，用后面的话讲就是：

$rank(A) = 9$，曲线存在且唯一；

$rank(A) < 9$, 曲线存在且不唯一.

(此处 A 为系数矩阵)

Rmk: 这道题错误率非常高，但其实不少同学意识到了该齐次方程存在无数个解，而忽略这道题归根结底是考虑曲线的存在性与唯一性.

3a.1

设 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $B : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ 为线性映射。验证 $A \circ B$ 保持数乘：

$$A \circ B(\lambda \vec{a}) = A(B(\lambda \vec{a})) = A(\lambda B(\vec{a})) = \lambda A(B(\vec{a})) = \lambda A \circ B(\vec{a}),$$

其中第二步由 B 的线性性（保持数乘）得到，第三步由 A 的线性性得到.

3a.2

定义 $\varphi : \mathbb{C} \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 为

$$\varphi(a + bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

单射:

设 $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$，即

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}.$$

比较元素得 $a_1 = a_2$，$b_1 = b_2$，故 $z_1 = z_2$，因此 φ 是单射.

保加法

设 $z_1 = a_1 + b_1 i$，$z_2 = a_2 + b_2 i$，则

$$\varphi(z_1 + z_2) = \varphi((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix},$$

$$\varphi(z_1) + \varphi(z_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{pmatrix}.$$

故 $\varphi(z_1 + z_2) = \varphi(z_1) + \varphi(z_2)$.

保乘法

设 $z_1 = a_1 + b_1 i$，$z_2 = a_2 + b_2 i$，则

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i,$$

$$\varphi(z_1 z_2) = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

另一方面，

$$\varphi(z_1)\varphi(z_2) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + a_2 b_1 \\ -(a_1 b_2 + a_2 b_1) & a_1 a_2 - b_1 b_2 \end{pmatrix}.$$

故 $\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$.

Rmk: 利用此结论我们可以计算矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ 的 n 次幂：

设该矩阵对应的复数为 $z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，其中 $r = \sqrt{a^2 + b^2}$，$\theta = \arg(a + bi)$

根据 De Moivre 公式，$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$，因此对应的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}^n = \varphi(z^n) = \begin{pmatrix} r^n\cos n\theta & r^n\sin n\theta \\ -r^n\sin n\theta & r^n\cos n\theta \end{pmatrix}.$$

例如，考虑复数 $z=1+i$，对应的矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$。其极坐标形式为 $z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$，则

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^n=(\sqrt{2})^n\begin{pmatrix}\cos\frac{n\pi}{4} & \sin\frac{n\pi}{4}\\ -\sin\frac{n\pi}{4} & \cos\frac{n\pi}{4}\end{pmatrix}.$$

更严谨的，我们可以用数学归纳法证明这个结论, 易证，留作练习

3a 书上习题

2. 证明：每个方阵都可以表示为一个对称阵与一个反对称阵之和的形式. 设 A 为 n 阶方阵。定义

$$S=\frac{A+A^T}{2},\quad T=\frac{A-A^T}{2}.$$

则 S 对称（$S^T=S$），T 反对称（$T^T=-T$），且

$$A=S+T.$$

故得证.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}-3 & -1 & -2\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 4 & -1 & -4\\ 4 & 3 & -3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -4 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, 计算 AB, BC, ABC, B^2, AC, CA

计算如下:

$$AB=\begin{pmatrix}-18 & -11 & 16\\ 30 & 11 & -26\end{pmatrix},$$

$$BC=\begin{pmatrix}-4 & 8\\ 12 & 11\\ -5 & 13\end{pmatrix},$$

$$ABC=\begin{pmatrix}10 & -61\\ 12 & 93\end{pmatrix},$$

$$B^2=\begin{pmatrix}4 & -4 & -6\\ -12 & -3 & 8\\ 8 & -4 & -11\end{pmatrix},$$

$$AC = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -15 & -4 \end{pmatrix},$$

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 13 & 7 & 12 \\ 1 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. 计算 $\begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^n \\ 1 & z & z^2 & \cdots & z^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}$

结果为:

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=0}^n a_k x^k & \sum_{k=0}^n b_k x^k & \sum_{k=0}^n c_k x^k \\ \sum_{k=0}^n a_k y^k & \sum_{k=0}^n b_k y^k & \sum_{k=0}^n c_k y^k \\ \sum_{k=0}^n a_k z^k & \sum_{k=0}^n b_k z^k & \sum_{k=0}^n c_k z^k \end{pmatrix}.$$

5. 计算 $(x_1, x_2, \cdots, x_m) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$

结果为:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j.$$

3b.1 验证矩阵乘法满足如下性质:

(1) (左分配律): $(A+B)C = AC + BC$.

(2) (右分配律): $A(B+C) = AB + AC$.

这里 A, B, C 是使运算有意义的矩阵.

Pf:

(1) 左分配律：$(A+B)C = AC + BC$ 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{m\times n}$，$C = (c_{jk})_{n\times p}$. 计算 $(A+B)C$ 的 (i,k) 元：

$$\sum_{j=1}^{n} (A+B)_{ij} c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk}$$

计算 $AC + BC$ 的 (i,k) 元：AC 的 (i,k) 元为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{jk}$，$BC$ 的 (i,k) 元为 $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{jk}$，两者相加与上式相等。故 $(A+B)C = AC + BC$，左分配律成立

(2) 右分配律：$A(B+C)=AB+AC$ 设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{jk})_{n\times p}$，$C=(c_{jk})_{n\times p}$

计算 $A(B+C)$ 的 (i,k) 元：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(B+C)_{jk}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk}+c_{jk})=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}+\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$$

计算 $AB+AC$ 的 (i,k) 元：AB 的 (i,k) 元为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}$，$AC$ 的 (i,k) 元为 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk}$，两者相加与上式相等.

故 $A(B+C)=AB+AC$，右分配律成立.

3b 书上习题

6(1). 求满足 $A^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 的 2 阶实方阵 A

解答：设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则

$$A^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+bd\\ ac+cd & bc+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

解得：

$$a^2+bc=0,\quad ab+bd=1,\quad ac+cd=1,\quad bc+d^2=0.$$

无实数解.

6(3).$A^3=I$ 且 $A\neq I$ 的 2 阶实方阵 A.

解答：取

$$A=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{3} & -\sin\frac{2\pi}{3}\\ \sin\frac{2\pi}{3} & \cos\frac{2\pi}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

则 $A^3=I$，且 $A\neq I$.

7(2). 计算 $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^k$

解答：详见 **3a.2**, 设 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，$\theta=\arctan\frac{b}{a}$，则

$$\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}^k=r^k\begin{pmatrix}\cos k\theta & \sin k\theta\\ -\sin k\theta & \cos k\theta\end{pmatrix}.$$

7(3). 计算 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^k$

解答： 令 $M = I + N$，其中

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = 0.$$

则

$$M^k = I + kN + \frac{k(k-1)}{2} N^2.$$

7(4). 计算 $\begin{pmatrix} a & 1 & & \\ & a & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & a \end{pmatrix}^k$.

解答： 将矩阵 A 分解为数量矩阵与幂零矩阵的和：

设 I 为 n 阶单位矩阵，J 为幂零矩阵：

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n\times n}$$

则 A 可表示为：

$$A = aI + J$$

其中 J 是幂零矩阵，满足 $J^m = 0$（当 $m \geq n$ 时，更高次幂为零矩阵）

由于数量矩阵 aI 与 J 可交换（即 $(aI)J = J(aI)$），根据二项式定理，对 $(aI+J)^k$ 展开：

$$(aI + J)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (aI)^{k-i} J^i$$

因为 J 是幂零矩阵（$J^n=0$），所以当 $i\geq n$ 时，$J^i=0$，展开式可截断为前 n 项：

$$(aI+J)^k=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k}{i}(aI)^{k-i}J^i$$

又因为 $(aI)^{k-i}=a^{k-i}I^{k-i}=a^{k-i}I$（单位矩阵的任意次幂仍为自身），代入后得：

$$(aI+J)^k=\sum_{i=0}^{n-1}\binom{k}{i}a^{k-i}J^i$$

幂零 J 的幂次 J^i 具有规律：第 i 条“上对角线”元素为 1，其余位置为 0（当 $i<n$ 时）。将 J^i 代入上式，最终得到 A^k：

$$A^k=\begin{pmatrix} a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \binom{k}{2}a^{k-2} & \cdots & \binom{k}{n-1}a^{k-(n-1)} \\ & a^k & \binom{k}{1}a^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-2}a^{k-(n-2)} \\ & & a^k & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \binom{k}{1}a^{k-1} \\ & & & & a^k \end{pmatrix}$$

7(5). 计算 $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^k$.

解答： 令 $N=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $N^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$N^3=0$，

$$(I+N)^k=I+kN+\frac{k(k-1)}{2}N^2.$$

7(6). 计算 $\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}^k$.

解答： 设 $u=(a_1,\ldots,a_n)^T$，$v=(b_1,\ldots,b_n)$，则 $A=uv$，$A^k=(vu)^{k-1}A=(\sum a_ib_i)^{k-1}A$.

8(2).$f(x)=x^2-4x+4$，$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，求 $f(A)$.

解答:

$$A^2=\begin{pmatrix}4&4&4\\0&4&3\\0&0&1\end{pmatrix},\quad f(A)=A^2-4A+4I=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

9. 设 A 为 n 阶实对称方阵且 $A^2=O$，证明：$A=O$

证明: 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$$

则有

$$A^2=AA^\top=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n a_{1i}^2&\sum_{i=1}^n a_{1i}a_{2i}&\cdots&\sum_{i=1}^n a_{1i}a_{ni}\\\sum_{i=1}^n a_{2i}a_{1i}&\sum_{i=1}^n a_{2i}^2&\cdots&\sum_{i=1}^n a_{2i}a_{ni}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\sum_{i=1}^n a_{ni}a_{1i}&\sum_{i=1}^n a_{ni}a_{2i}&\cdots&\sum_{i=1}^n a_{ni}^2\end{pmatrix}$$

考察对角元即可得到 $a_{ij}=0$（$\forall i,j=1,2,\cdots,n$），即 $A=O$

11. 证明：两个 n 阶上（下）三角方阵的乘积仍是上（下）三角

证明: 设 A,B 为上三角，则 $(AB)_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}$。当 $i>j$ 时，$a_{ik}=0$（$k<i$）或 $b_{kj}=0$（$k\geq i>j$），故 $(AB)_{ij}=0$.

12. 证明：与任意 n 阶方阵都乘法可交换的方阵一定是数量阵

证明: 设 A 与所有矩阵可交换，取 E_{ij}（仅 (i,j) 为 1, 其余元均为 0），由 $AE_{ij}=E_{ij}A$ 得 A 为数量阵.

15. 设方阵 A 满足 $A^k=O$，证明：$I+A$ 可逆，并求 $(I+A)^{-1}$

证明: $(I+A)(I-A+A^2-\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1})=I$，故

$$(I+A)^{-1}=I-A+A^2-\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1}.$$

Rmk: 对于一般的矩阵，后面会学到，如果

$$\rho(A)=max\{|A\text{的特征值}|\}<1$$

则 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$,$\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^k$ 收敛，且

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{-1}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-A)^k = (I+A)^{-1}$$

2 补充题

1. 计算

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^k$$

解答： 注意到

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

⇒ n×1 · 1×n

⇓

1×n · n×1 ⇒ 1×1

变为常数

因此

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right]^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

其中

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = -1$$

故

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}^n = (-1)^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

2. 设

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

其中 $a_i \neq a_j$，当 $i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$。证明：与 A 可交换的矩阵只能是对角阵

证明： 设

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

与 A 可交换

计算得：

$$AB = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_1b_{12} & \cdots & a_1b_{1n} \\ a_2b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_2b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_{n1} & a_nb_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} a_1b_{11} & a_2b_{12} & \cdots & a_nb_{1n} \\ a_1b_{21} & a_2b_{22} & \cdots & a_nb_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_{n1} & a_2b_{n2} & \cdots & a_nb_{nn} \end{pmatrix}$$

由 $AB = BA$，得到

$$a_i b_{ij} = a_j b_{ij}, \quad \forall i, j = 1, 2, \cdots, n$$

又由 $a_i \neq a_j$（当 $i \neq j$），可知 $b_{ij} = 0$。即 B 是对角阵

3. 设 A, B 都是 $n \times n$ 对称矩阵，证明：AB 也是对称矩阵 $\iff$ A, B 可交换

证明： $(\Rightarrow)$

$$(AB)^T = AB \Rightarrow B^T A^T = AB$$

又 A, B 是对称阵，即 $A^T = A, B^T = B$，所以

$$BA = AB$$

$(\Leftarrow)$

$$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

4. 判断：类似于牛顿二项式定理，我们有：对于 $n \times n$ 阶矩阵 A, B

$$(A + B)^k = \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} A^k B^{k-i}$$

答案： 错误, 当 $AB = BA$ 等式成立.

5. 证明：线性组合的传递性：如果方程组 II 是方程组 I 的线性组合，方程组 III 是方程组 II 的线性组合，则方程组 III 是方程组 I 的线性组合.

证明: 设方程组 I 由方程 $\boxed{a}_1, \cdots, \boxed{a}_m$ 组成，方程组 II 由方程 $\boxed{b}_1, \cdots, \boxed{b}_n$ 组成，方程组 III 由方程 $\boxed{c}_1, \cdots, \boxed{c}_p$ 组成.

方程组 II 是 I 的线性组合 ⇒ 每个

$$\boxed{b}_i = b_{i1}\boxed{a}_1 + \cdots + b_{im}\boxed{a}_m \quad (\forall\ 1 \leqslant i \leqslant n)$$

其中 $b_{i1}, \cdots, b_{im}$ 是某 m 个常数.

方程组 III 是 II 的线性组合 ⇒ 每个

$$\boxed{c}_k = c_{k1}\boxed{b}_1 + \cdots + c_{kn}\boxed{b}_n \quad (\forall\ 1 \leqslant k \leqslant p)$$

其中 $c_{k1}, \cdots, c_{kn}$ 是某 n 个常数.

将上述第一个等式代入第二个等式，得到

$$\boxed{c}_k = c_{k1}(b_{11}\boxed{a}_1 + \cdots + b_{1m}\boxed{a}_m) + \cdots + c_{kn}(b_{n1}\boxed{a}_1 + \cdots + b_{nm}\boxed{a}_m) = \lambda_{k1}\boxed{a}_1 + \cdots + \lambda_{km}\boxed{a}_m$$

其中每个 $\lambda_{kj} = c_{k1}b_{1j} + \cdots + c_{kn}b_{nj}$ 是常数. 这证明了方程组 III 中每个方程 $\boxed{c}_k$ 是方程组 I 的线性组合. 从而方程组 III 是方程组 I 的线性组合.

6.$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{2025}$，求 A

解答: $A^3 = I$,$2025 mod 3 \equiv 0$, 故:

$$A = I$$

7. 设 $n \geqslant 2$, 是否存在一个方阵 $\boldsymbol{A} \in F^{n\times n}$, 使 $F^{n\times n}$ 中所有的方阵都可以写成 $\boldsymbol{A}$ 的多项式的形式 $a_0\boldsymbol{I} + a_1\boldsymbol{A} + \cdots + a_m\boldsymbol{A}^m$（$m$ 为任意正整数, $a_0, a_1, \cdots, a_m \in F$）？并说明理由.

解答: 不存在这样的方阵 $\boldsymbol{A}$.

如果存在这样的 $\boldsymbol{A}$, 则任意两个方阵 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ 都可以分别写成 $\boldsymbol{A}$ 的两个多项式 $f_1(\boldsymbol{A}), f_2(\boldsymbol{A})$, 从而 $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ 可交换. 但当 $n \geqslant 2$ 时 $F^{n\times n}$ 存在不交换的方阵, 例如 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{12}$ 不交换: $\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{E}_{12} = \boldsymbol{E}_{12} \neq \boldsymbol{O} = \boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{E}_{11}$, 它们就不能写成同一个方阵 $\boldsymbol{A}$ 的多项式.

$f_1(A)f_2(A) = f_2(A)f_1(A) \Rightarrow B_1B_2 = B_2B_1$