

作业 6b

提交日期: 2025 年 10 月 28 号

作业 1. 讲义习题三 (第 87 页): 18 (提示: 你需要用到讲义定理 2.3.1 并且注意到对任意方阵 A , 若对 A 进行任意初等行变换 (p. 53) 得到方阵 B , 则 $\det(A) = 0$ 当且仅当 $\det(B) = 0$).

作业 2. 令 A 为一 n 阶方阵.

(i) 利用课上关于伴随矩阵的定理证明

$$\det(A) \neq 0 \Rightarrow A \text{ 可逆}.$$

(ii) 利用作业 1 (即讲义 p. 87 习题 18) 证明

$$A \text{ 可逆} \Rightarrow \det(A) \neq 0.$$

从而再结合 (i) 我们有

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ 可逆}.$$

作业 3. (i) 补充课上命题证明的细节: 给定任意行列式不为 0 的 n 阶方阵 B , 考虑函数

$$\psi: M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \psi(A) = \det(B)^{-1} \det(AB).$$

证明 ψ 满足 a) 反对称性 b) 多重线性 c) 规范性 (定义见讲义 p. 76). ¹

¹因为这三条性质唯一决定行列式, 从而我们有 $\psi = \det$, 即

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad \forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C}) \text{ 且 } \det(B) \neq 0. \quad (1)$$

(ii) 给定 n 阶方阵 A, B , 利用作业 1(即讲义 p. 87 习题 18) 证明若 B 不可逆, 则 AB 也不可逆. 再结合注记中的结论(1) 证明

$$\det(AB) = \det(A) \det(B), \quad \forall A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C}). \quad (2)$$

(提示: 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$ 为 B 所对应线性方程组的非零解, 即 $B\vec{a} = \vec{0}$, 则 \vec{a} 也为 AB 所对应线性方程组的非零解.)

(iii) 给定 n 阶方阵 A , 利用结论(2)证明

$$A \text{ 可逆} \Leftrightarrow \text{存在同阶方阵 } X \text{ 使得 } AX = I_n \Leftrightarrow \text{存在同阶方阵 } X \text{ 使得 } XA = I_n.$$

(回忆由定义 A 可逆当且仅当存在同阶方阵 X 使得 $AX = XA = I_n$. 这个命题说明 A 只需要存在左逆或者右逆即可保证可逆.)