作业 13a

提交日期: 2025 年 12 月 18 号

讲义习题六 (第 212-214 页): 20, 21, 22, 26, 29, 30 (提示: 尝试找 A, B 特征向量之间的关系)

作业 1 (选做题)**.** 设方阵 A 的特征多项式为

$$p_A(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}(x-\lambda_2)^{n_2}\cdots(x-\lambda_s)^{n_s}$$

从而 $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 为 A 的所有特征值. 我们在课上定义了 n_i 为特征值 λ_i 的**代数重数**. 并且定义了 $m_i := \dim V_A(\lambda_i)$ 为 λ_i 的**几何重数**. 我们课上证明了对任意 $1 \leq i \leq s$, $m_i \leq n_i$. 证明 A 可对角化当且仅当 $m_i = n_i$ 对任意 $1 \leq i \leq s$ 成立. *(提示: "$\Rightarrow$" 是相对容易的一个方向, 要证 "$\Leftarrow$", 设 $m_i = n_i$ 对任意 $1 \leq i \leq s$ 成立. 取 $V_A(\lambda_i)$ 的一组基 $\{\vec{x}_{i1}, \cdots, \vec{x}_{in_i}\}$. 只需说明 $\{\vec{x}_{11}, \cdots, \vec{x}_{1n_1}, \cdots, \vec{x}_{s1}, \cdots, \vec{x}_{sn_s}\}$ 线性无关. 设 $\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\vec{x}_{ij} = \vec{0}$. 要证 $a_{11} = \cdots = a_{sn_s} = 0$. 类似于课上的证明, 利用范德蒙行列式说明对任意 $1 \leq i \leq s$, $\sum_{j=1}^{n_i} a_{ij}\vec{x}_{ij} = \vec{0}$.)*