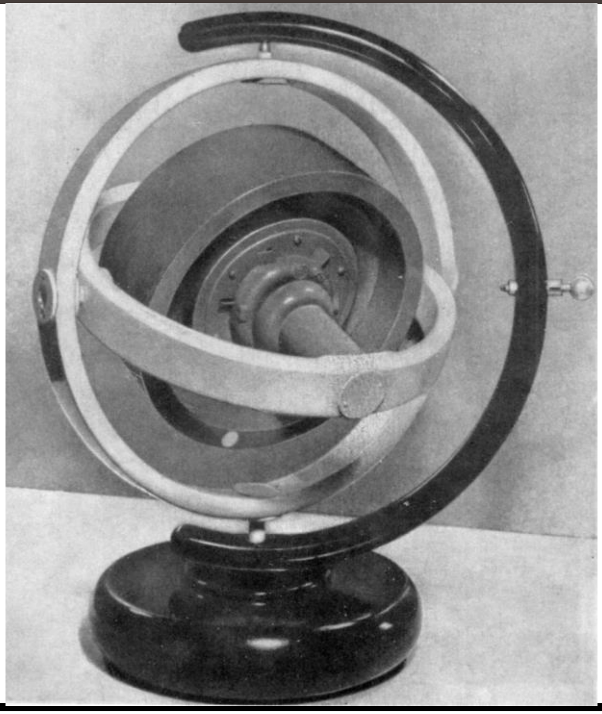
《力学A》第六章 刚体

2025 11 13

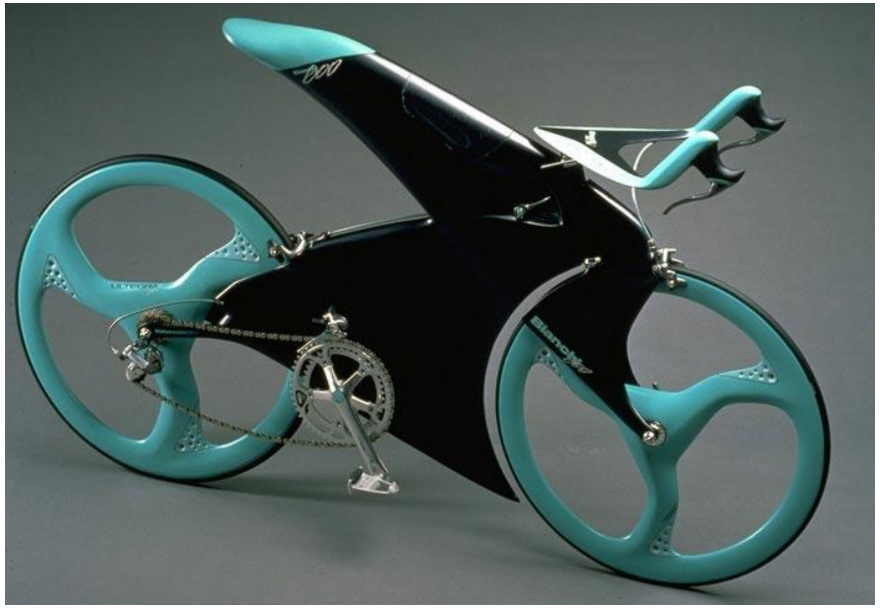


研究机械运动，只局限于质点是很不够的。物体是有形状和大小的，它可以作平动、转动，甚至更复杂的运动。一般固体在外力的作用下，形变并不显著，所以引入一个新的模型—— “刚体”。以刚体为研究对象，除了研究它的平动外，还要研究它的转动以及平动与转动的复合运动等。

质点 $\xrightarrow{\text{集合}}$ 质点系 $\xrightarrow{\text{约束}}$ 刚体

↑ 不讨论物体的大小和形状

↑ 讨论物体的“位形”



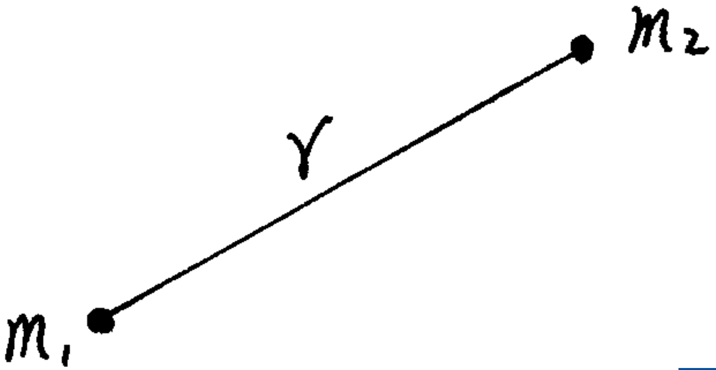
一、自由度与刚体

自由度就是描写体系几何位形所需的独立坐标的数目。

对于一质点在三维空间中的运动，需要三个独立坐标来描写它的位置。可以用笛卡尔坐标x, y, z，也可以用球坐标 r, θ, φ 。因此，质点是具有3个自由度的物理对象。

推广到由n个质点构成的多质点体系，一般说，如果要确定体系的几何位形，就要$3\times n$个坐标，即有$3n$个自由度。然而，在某些情况下，由于质点之间存在确定的关系，故这$3n$个坐标并不全是独立的。换言之，在质点体系中常存在着一些限制各质点自由运动的条件。

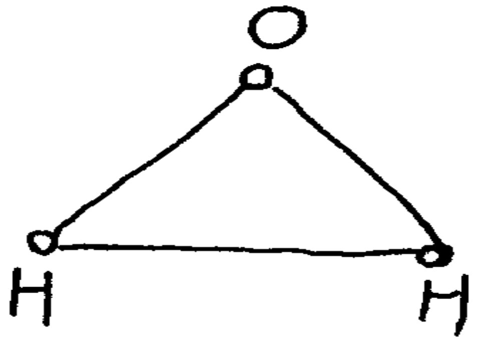
由两个质点构成的体系，一般要用6个坐标(x_1, y_1, z_1)，(x_2, y_2, z_2)表示。如果两质点之间的距离是固定的，其长度为r，则上述6个坐标之间有一个代数关系：



$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2$$

即只要知道了任何5个坐标值，由上式就完全确定了第6个坐标的值。因此，独立坐标的数目是6–1=5，此体系的自由度为5。

再如两个氢原子和一个氧原子组成的体系。若三个原子是完全自由的，则有9个自由度。如果化合成水分子，两两之间的距离固定，形成三角形，则描写三个原子位置的9个坐标应满足3个代数关系。此时该体系的独立坐标个数为9–3＝6，即有6个自由度。



由四个原子组成的分子，如NH_3，在化合之前，有3×4=12个自由度，化合成氨分子之后，形成四面体，两两原子之间的距离固定，共有6个代数关系，所以这体系的自由度为12–6=6。

再增加一个原子，且它与原来四个原子的距离也都固定，则增加3个坐标，但同时却增加了4个代数关系式。要注意，新增加的4个代数关系式并不是完全独立的。因此，整个体系的自由度仍然是6。

同理，我们可以推广到更多原子组成的分子，有结论：含有三个原子以上的分子，若原子不全处在一条直线上，则都有6个自由度。

把上述结论再作推广可以得到：**由任意多个质点所构成的体系，如果体系中所有质点之间的距离都是固定的，且不在一条直线上，则体系的自由度必定是6。这种多质点体系称为刚体**。

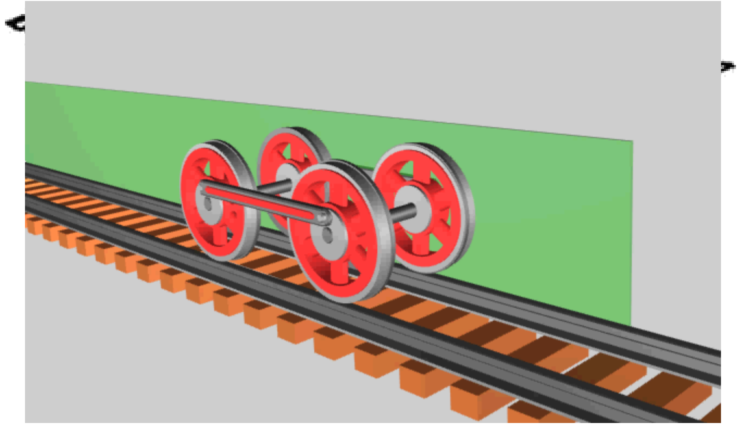
刚体：不变形的物体。

刚体具有6个自由度，即描写刚体的几何位形需要6个独立坐标。在某些条件下，确定刚体的位形可能不需要6个独立坐标。因此，刚体自由度数≤6。刚体自由度的具体个数随条件而定。

①定轴转动　　　自由度为1；

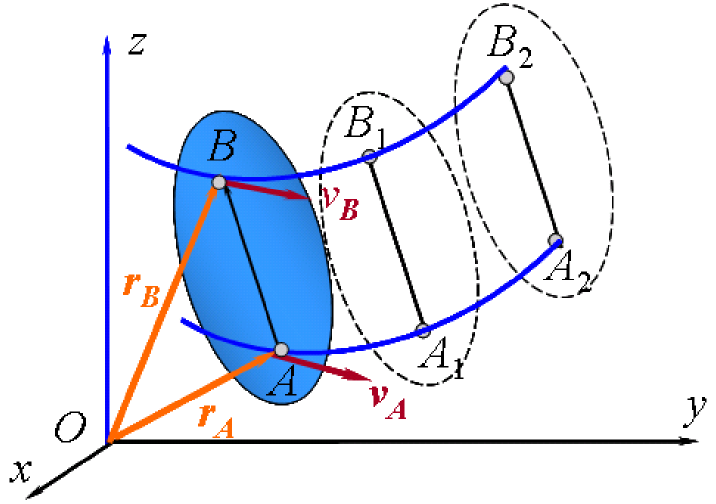
②平动　　　　　自由度为3；

③平面平行运动　自由度为3。



二、刚体的运动

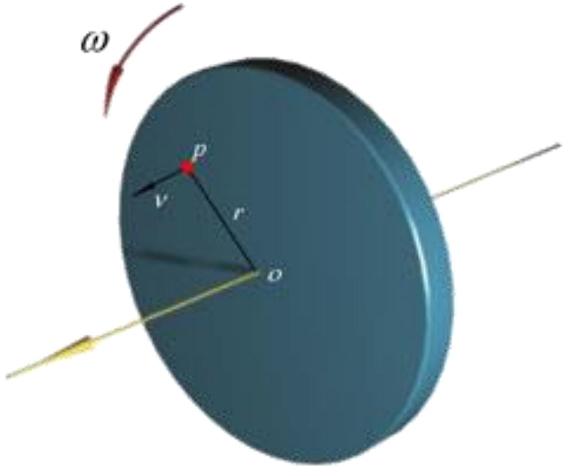
1. 平动和转动



(1)平动

在平动中，刚体中任何两点之间连线的方向保持不变；刚体中各点都具有同样的速度，并且运动轨迹的形状也都相同。**自由度为3**，与质点运动相似。

(2)定轴转动

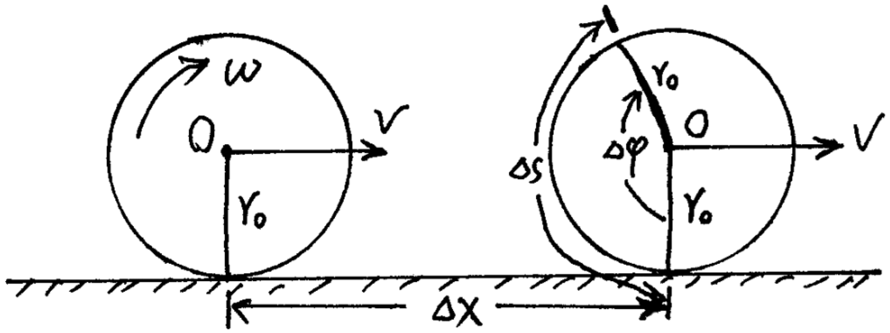


转动时，刚体中各质点的轨迹都是在垂直于转动轴的平面内的圆。**自由度为1**。

(3)刚体的任何运动都可以归结为平动和转动的叠加。

$$6=3+2+1$$

分析一下车轮在地面上沿直线的滚动。



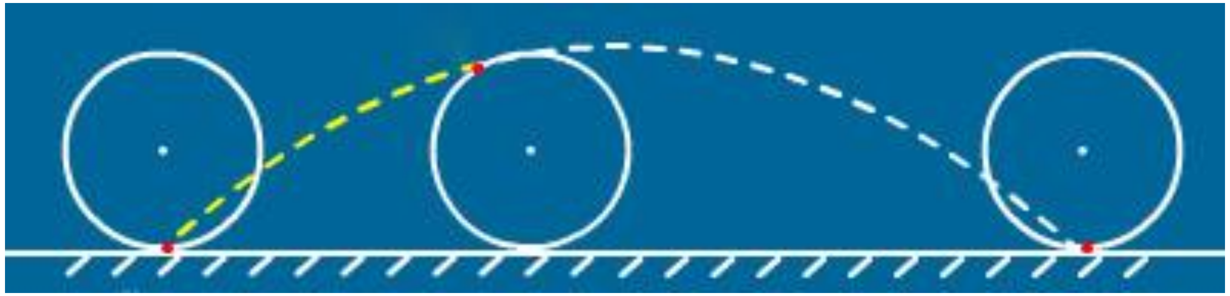
现在平动是一维的，转动轴的方向也是确定的，故转动也是一维的，所以仅需要两个独立坐标就可描写车轮的滚动问题。

纯滚动，就是车轮前进的Δx就等于车轮滚过的弧长 Δs，即 $\Delta x = \Delta s$ 。

又因为$\Delta s = r_0 \Delta\varphi$， 所以 $\Delta x = r_0 \Delta\varphi$

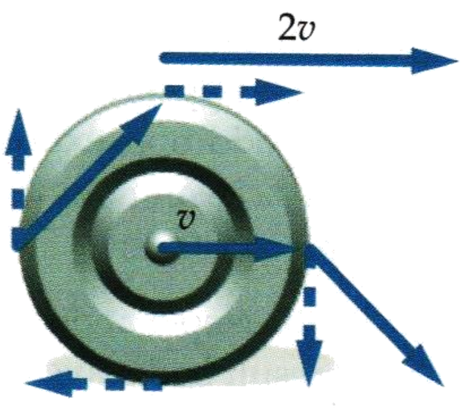
不难断定，在滚动中只有车轮中心O的运动轨迹是直线，其它各点的轨迹都是曲线，即所谓**旋转轮线**。

我们选O作为基点，如果车轮在时间Δt内位移为Δx，则O点的速度为



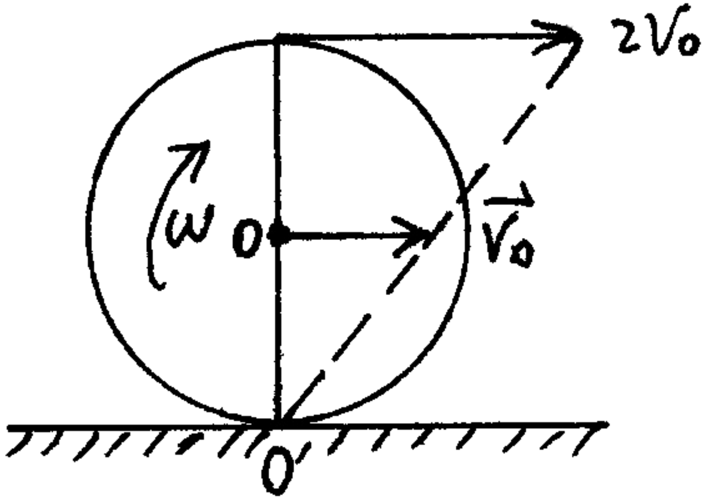
$$\upsilon_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = r_0 \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = r_0 \omega$$ 这就是车轮的平动速度。

车轮的运动分解为以 O 点为基点的平动，其速度为υ_0，以及绕 O 点的转动，其角速度为ω。车轮上任何一点的速度都是这两种运动速度的合成。

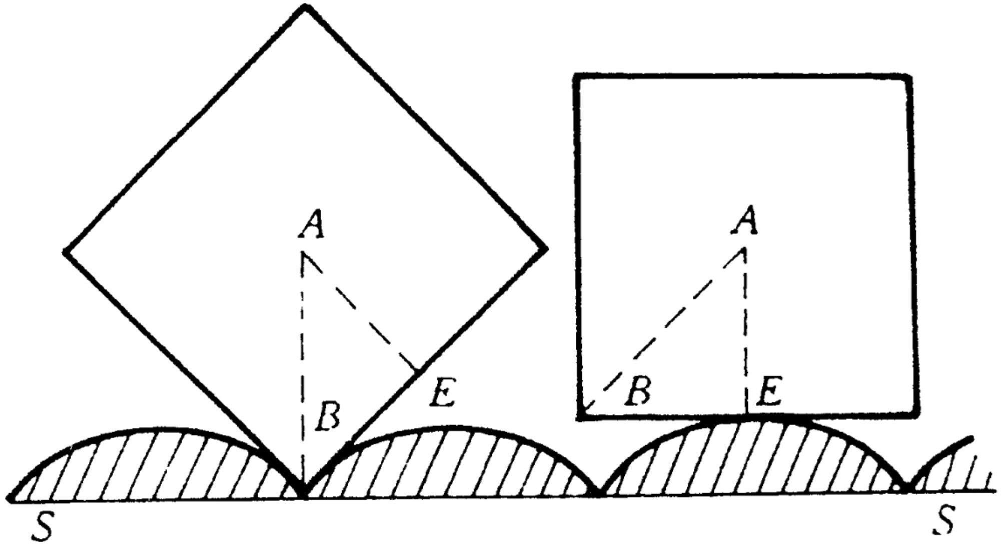


现在求车轮垂直于地面的直径上各点的速度。

高于 O 点的各点，平动速度方向与转动速度方向一致。所以合速度为 $\upsilon=\upsilon_0+r\omega$，其中 r 为该点与 O 点的距离。对低于 O 的各点，转动速度方向与平动速度方向相反，所以合速度为 $\upsilon=\upsilon_0-r\omega$ 。

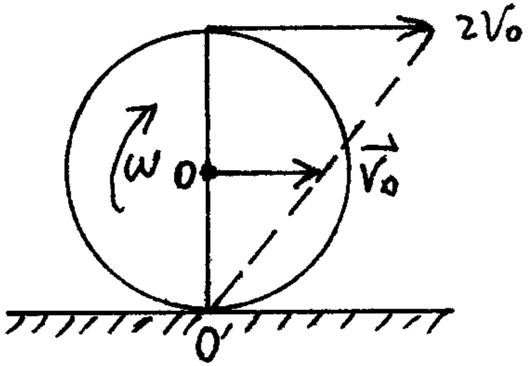


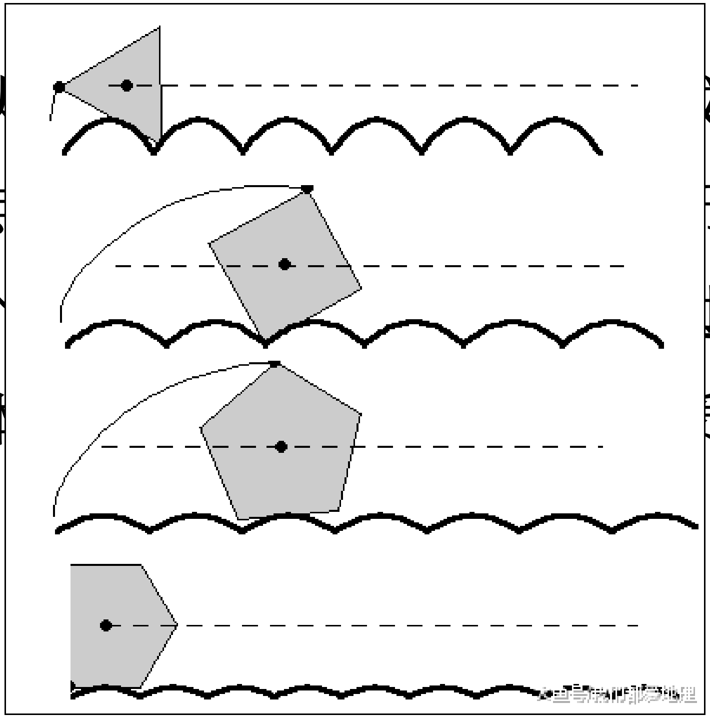
车轮的最高点速度最大，比车轮中心速度高一倍。车轮与地面接触处速度为零。也就是说，在纯滚动的运动中，车轮与地面相接触处，总是相对静止的。

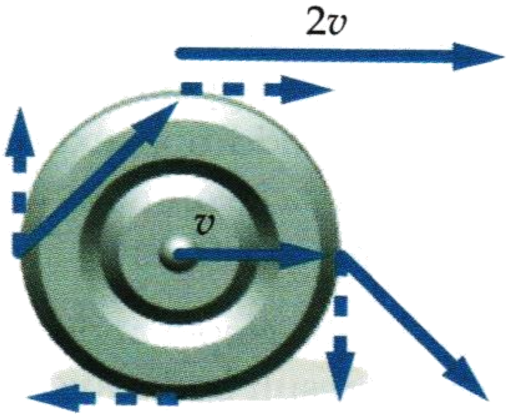


谁说轮子必须是圆的？

方轮在链轨上滚动。*A*、*B*、*E* 标出不同时刻方轮位置。与坦克或推土机有关。



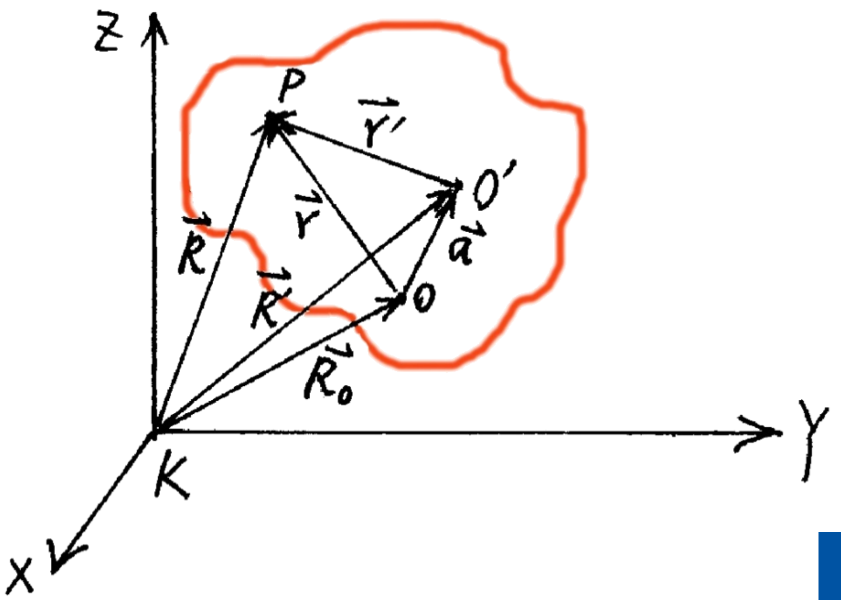
也可以是绕O′点(车轮与
地面接触点 于车轮平面的转动
轴，绕这个 过O点或O′点的轴
来说，刚体 质可以称为**角速度**
的绝对性。



(4)角速度的绝对性

这个结果具有普遍性。一般来说，刚体的运动都可以分解为平动及转动。选定刚体上某个*O*作为基点，刚体的平动就是整个刚体跟随基点O的运动，刚体的转动就是围绕通过*O*点的轴的运动。这时，刚体的平动速度依赖于对基点*O*的选择。选择不同的基点，平动速度就不同；而转动角速度则与基点的选择无关，不管选择在刚体上任意一点*O*，角速度矢量的方向及大小都不变。在这个意义上，我们说**刚体的角速度具有绝对性**。

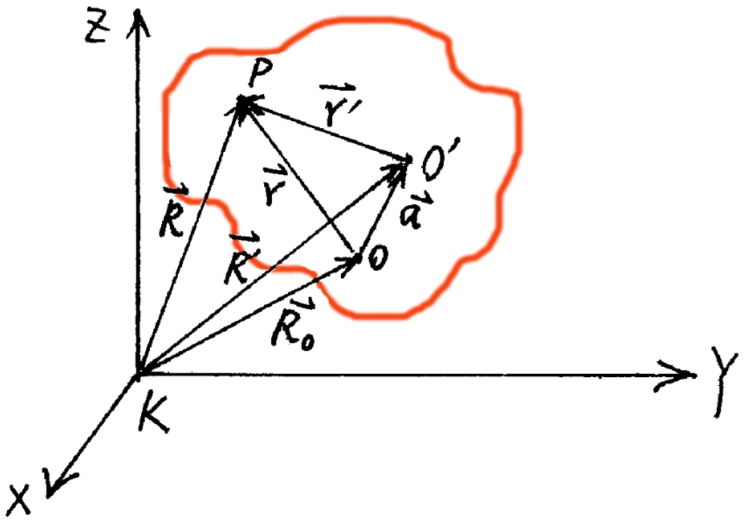
现在来证明上述的论断。如图所示，一个刚体相对于坐标系*K*的位形，*O*及*P*是刚体上的两点。它们的位置矢量分别是$\vec{R}_0$及$\vec{R}$。显然，*O*及*P*相对于*K*的速度分别为 $\vec{V}=\dfrac{d\vec{R}_0}{dt}$，$\vec{\upsilon}=\dfrac{d\vec{R}}{dt}$



另一方面，P相对于O点的位置矢量为$\vec{r}$，P相对于O的速度为

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

若选择O为基点，则P相对于O的速度可以表示成



$$\vec{v}' = \vec{\omega}\times\vec{r}$$

其中$\vec{\omega}$是刚体绕过O点的轴的角速度。由运动学的速度合成，可知

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}' = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

如果不选O作为基点，而选O'点，O'点的坐标为$\vec{R}'$，P相对于O'点的位置矢量为$\vec{r}'$，类似地可以推得

$$\boxed{\vec{v} = \vec{V}' + \vec{\omega}'\times\vec{r}'}$$

其中，$\vec{V}' = d\vec{R}'/dt$是O'相对于坐标系K的速度；$\vec{\omega}'$是刚体绕过点O'的轴的角速度。

如果O'相对于O的位矢为$\vec{a}$，则有 $\boxed{\vec{r} = \vec{a} + \vec{r}'}$

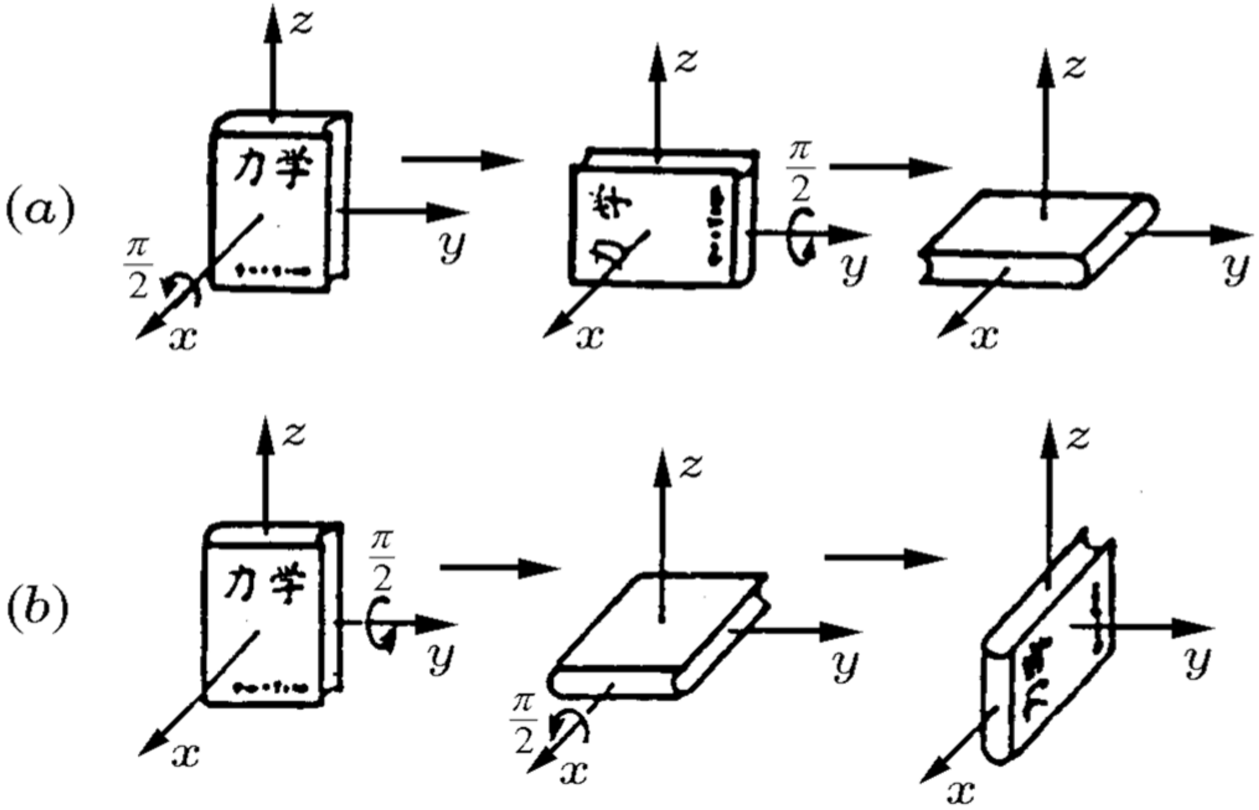
$$\boxed{\vec{\omega} = \vec{\omega}'}$$

代入前面一式，得到 $\vec{v} = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{a} + \vec{\omega}\times\vec{r}' \boxed{= \vec{V}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'}$

而$\vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{a}$正是$O'$点相对于坐标系$K$的速度，即 $\vec{V}' = \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{a}$

角速度矢量

有大小和方向的物理量不一定是矢量。矢量的重要特征是应满足要求的加法法则。



① 有限大角位移不是矢量

② 无限小角位移是矢量

③ (瞬时)角速度只与无限小的角位移相联系，因此是矢量。

2. 刚体质心的运动

(1)质心的运动（质心运动定理）

设系统内含N个存在相互作用的质点，第 i 个质点的位置为$\vec{r}_i$ ，质量为m_i，所受外力为$\vec{f}_i^{\,外}$，受到系统内第 j 个质点的作用力为$\vec{f}_{ji}$，则第 i 个质点的动力学方程为：

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\vec{f}_i^{\,外}+\sum_{j=1}^{N}\vec{f}_{ji}\qquad i=1,2,3,\cdots,N$$

令 $j=i$ 时，$\vec{f}_{ji}=0$，即质点自身的作用力为零。两边对 i 求和

$$\sum_i\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\sum_i\vec{f}_i^{\,外}+\sum_i\sum_j\vec{f}_{ji}$$

右边第二项：

$$\sum_i\sum_j\vec{f}_{ji}=\frac{1}{2}\sum_i\sum_j(\vec{f}_{ji}+\vec{f}_{ij})=0$$

再令 $\vec{P}=\sum_i\vec{p}_i$，$\sum_i\vec{f}_i^{\,外}=\vec{F}^{\,外}$ ，则有 $\vec{F}^{\,外}=\dfrac{d\vec{P}}{dt}$

质点系动力学方程

上述结论可以直接推得质心运动定理。设系统中各质点在某个参照系中的位置分别为 $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots \vec{r}_N$。我们常常用一个特定的位置，称为质心，来表示此系统的位置。质心位矢定义为：

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$$

这是一个以每个质点的质量为权重的平均位矢。对于整个质点系，有 $\vec{F}^{外} = M\ddot{\vec{R}}$ ，

其中 $\boldsymbol{M}$ 为系统总质量，即 $M = \sum_i m_i$

即，系统质心的运动行为好像一个质点的运动行为，此质点的质量等于系统的总质量，作用在此质点的力等于系统所受到的总外力。这个结论就是系统的**质心运动定理**。

(2)刚体质心的确定

对质量连续分布的物体，其质心位矢可用积分表示：

质量微元Δ**m**→**dm**

体积微元Δ**v**→**dv**

$$\vec{R}_{CM}=\frac{\int \vec{r}dm}{\int dm}=\frac{\int \rho\vec{r}dv}{\int \rho dv}$$

其中 ρ 为物体密度。

这个质心位矢表达式是一个矢量式，实际上是三个式子，在 ***x, y, z*** 三个方向每个方向一个：

$$X_{CM}=\frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}=\frac{\int xdm}{\int dm}\qquad Y_{CM}=\frac{\int ydm}{\int dm}\qquad Z_{CM}=\frac{\int zdm}{\int dm}$$

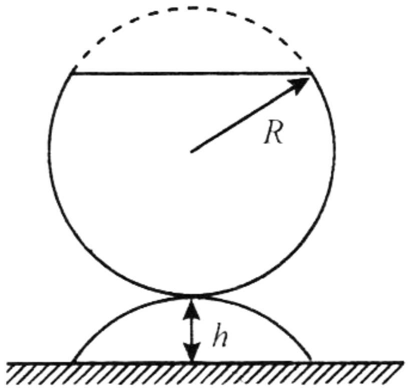
假设一个物体由***A***、***B***两部分组成，质心***x***方向表达式（***y, z***方向也同样）可写为

$$X_{CM}=\frac{\int xdm}{\int dm}=\frac{\int_A xdm+\int_B xdm}{\int_A dm+\int_B dm}=\frac{\int_A xdm+\int_B xdm}{m_A+m_B}$$

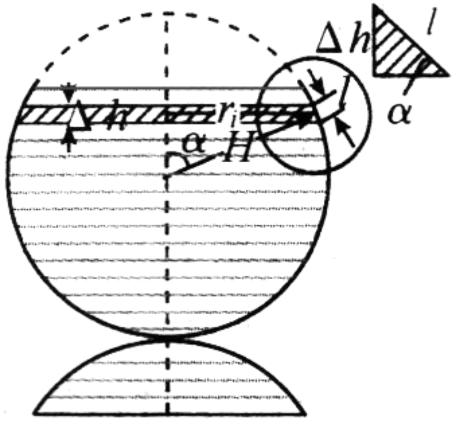
$$=\frac{\left[\frac{\int_A xdm}{m_A}\right]m_A+\left[\frac{\int_B xdm}{m_B}\right]m_B}{m_A+m_B}=\frac{(X_{CM})_A m_A+(X_{CM})_B m_B}{m_A+m_B}$$

其中 $m_A=\int_A dm,\quad m_B=\int_B dm$ 。此式表示物体质心可以这样求：先分别求出 ***A*, *B*** 两部分的质心 $(X_{CM})_A$ 和 $(X_{CM})_B$ 以及每部分的总质量m_A和m_B，然后把这两部分作为位置在各自质心处，质量分别为m_A和m_B的两质点，再求其质心，此质心即为整个物体的质心。假设物体由三部分或更多部分组成可以仿此求出整个物体的质心。**对于物体中挖去一部分的形状，可以用密度取负值的方法求解。**

[例题] 一酒杯是将半径为 **R** 的均匀薄壁玻璃球壳分成两部分后又粘结在一起做成的，如图。设酒杯的脚高为***h***，求酒杯质心的位置。



[解] 采用“微元法”，将酒杯分成一个个高为**Δ*h***的**倾斜**环带，显然整个酒杯的质心就是这些环带拼在一起的质心。



每个小环带的质心为其对应的圆环的中心，环带的面积为

$$S_i = 2\pi r_i l = 2\pi R\sin\alpha \cdot \frac{\Delta h}{\sin\alpha} = 2\pi R\Delta h$$

质量为 $m_i = 2\pi R\Delta h \cdot \rho$

即所有环带微元的质量只取决于其高度 **Δ*h***。所以，酒杯的质心可以看成是质量沿长为 **2R** 的竖直线段均匀分布的质点系的质心，即沿对称轴距离杯底高度 **R** 处。