第八次习题课讲义

袁懿

2025 年 12 月 3 日

1　期中试题选讲

T7 设 $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$ 是参数.

考虑关于变量 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ 的线性方程组:

$$\begin{cases} c_1x_1 + 2c_2x_2 + 3x_3 + 2(c_3 + c_4)x_4 + 23x_5 = d_1 + d_2 - 1 \\ (c_1 - 5)x_1 + (c_5 + 3)x_2 + x_3 + c_3x_4 + (c_6 + 4)x_5 = d_1 - d_2 + 4 \\ c_7x_1 + 3x_2 + c_4x_4 + 6x_5 = d_3 - 3d_4 \\ (3c_7 - 2)x_1 + (c_2 + 3)x_2 + 2x_3 + d_1x_4 + d_2x_5 = d_3 \\ c_5x_2 + x_3 + (c_1 - c_2)x_4 + c_6x_5 = d_4 \end{cases}$$

已知 $\xi_1 = (-10, -7, -2, 4, 4)^T$, $\xi_2 = (7, -2, 5, 3, -3)^T$, $\xi_3 = (21, 0, 6, -1, -4)^T$ 都是上述线性方程组的解, 求上述线性方程组的通解.

解答:: 令 $\eta_1 = \xi_1 - \xi_3 = (-31, -7, -8, 5, 8)^T$, $\eta_2 = \xi_2 - \xi_3 = (-14, -2, -1, 4, 1)^T$.

令 V 表示对应齐次线性方程组的解空间.

则 $\eta_1, \eta_2 \in V$, 且注意到 η_1, η_2 线性无关，因此，$\dim V \geq 2$.

观察系数矩阵 A 的第 $2, 3, 5$ 行，第 $2, 3, 5$ 列的三阶子式为

$$\begin{vmatrix} c_5 + 3 & 1 & c_6 + 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ c_5 & 1 & c_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 6 \\ c_5 & 1 & c_6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

所以，系数矩阵 A 的秩满足 $\operatorname{rank}(A) \geq 3$，从而 $\dim V = 5 - \operatorname{rank}(A) \leq 2$.

综上，可得 $\dim V = 2$, 于是，题中线性方程组的通解为 $\xi_3 + k_1\eta_1 + k_2\eta_2$, k_1, k_2 为数域中任意数.

2 补充内容

以下所有内容我们都在有限维线性空间中考虑.

2.1 子空间的交与和

2.1.1 子空间的交

定理 1 (子空间交的封闭性)**.** 设 $W_i(i \in I)$ 是 F 上线性空间 V 的任意一组子空间,

$$U = \bigcap_{i \in I} W_i = \{\alpha \mid \alpha \in W_i, \forall i \in I\}$$

是这些子空间的交, 则 U 是 V 的子空间.

证明. 对任意 $u, v \in U, \lambda \in F$, u, v 含于 $\bigcap_{i \in I} W_i \Rightarrow u, v$ 含于每个 W_i。由于 W_i 是子空间, $u + v \in W_i, \lambda u \in W_i$。这又导致 $u + v$ 与 λu 含于 $U = \bigcap_{i \in I} W_i$, 这就证明了 U 是子空间. □

2.1.2 子空间的和

定义 1 (子空间的和)**.** 设 V 是 F 上线性空间, $W_1, \cdots, W_t$ 是 V 的子空间, 定义

$$W_1 + \cdots + W_t = \{\beta_1 + \cdots + \beta_t \mid \beta_i \in W_i, \forall 1 \leq i \leq t\}$$

称为子空间 $W_1, \cdots, W_t$ 的和.

命题 1 (子空间和的性质)**.** 设 V 是数域 F 上线性空间, $W_1, \cdots, W_t$ 是 V 的子空间, 则

1. $W_1 + \cdots + W_t$ 是子空间
2. $W_1 + \cdots + W_t$ 是包含 $W_1 \cup \cdots \cup W_t$ 的最小子空间
3. 取每个 $W_i (1 \leq i \leq t)$ 的一组基, 则 $M_1 \cup \cdots \cup M_t$ 生成的子空间等于 $W_1 + \cdots + W_t$
4. $\dim(W_1 + \cdots + W_t) \leq \dim W_1 + \cdots + \dim W_t$

证明. 记 $W = W_1 + \cdots + W_t, M = M_1 \cup \cdots \cup M_t$。

(1) 任取 $u = u_1 + \cdots + u_t \in W, v = v_1 + \cdots + v_t \in W, \lambda \in F$, 其中 $u_i, v_i \in W_i, \forall 1 \leq i \leq t$. 则

$$u + v = (u_1 + v_1) + \cdots + (u_t + v_t)$$

$$\lambda u = (\lambda u_1) + \cdots + (\lambda u_t)$$

对每个 $1 \leq i \leq t$, 由于 W_i 是子空间, $u_i, v_i \in W_i \Rightarrow u_i+v_i \in W_i$ 且 $\lambda u_i \in W_i$。这说明 $u+v \in W, \lambda u \in W$, 这证明了 W 是子空间.

(2) 对任意 $w \in W_1 \cup \cdots \cup W_t$, 存在 $1 \leq i \leq t$ 使 $w \in W_i$。对每个 $1 \leq j \leq t$, 当 $j \neq i$ 时取 $w_j = 0 \in W_j$, 当 $j = i$ 时取 $w = w_i \in W_i$, 则 $w = w_1 + \cdots + w_t \in W$, 这就说明了 W 包含 $W_1 \cup \cdots \cup W_t$

设 $U = V(W_1 \cup \cdots \cup W_t)$ 是 $W_1 \cup \cdots \cup W_t$ 生成的子空间, 也就是包含 $W_1 \cup \cdots \cup W_t$ 的最小子空间, 则 U 包含任何一组 $w_i \in W_i (1 \leq i \leq t)$ 之和 $w_1 + \cdots + w_t$, 也就是包含 W, 由 W 是子空间知 $W = U$

(3) 每个 $W_i (1 \leq i \leq t)$ 是 M_i 的线性组合, 因而 $W_1 \cup \cdots \cup W_t$ 是 $M = M_1 \cup \cdots \cup M_t$ 的线性组合。而 W 是 $W_1 \cup \cdots \cup W_t$ 的线性组合, 因此 W 是 M 的线性组合, 等于 M 生成的子空间

(4) W 由 M 生成, 其维数 $\dim W$ 不超过 M 所含向量个数 $|M|$, 每个 M_i 所含向量个数 $|M_i| = \dim W_i$, 因此 $\dim W \leq |M_1| + \cdots + |M_t| = \dim W_1 + \cdots + \dim W_t$. □

2.1.3 子空间和的维数公式

定理 2 (维数公式). 设 W_1, W_2 是 V 的子空间, 则

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

证明. 取 $W_1 \cap W_2$ 的一组基 $M_0 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r\}$, 扩充为 W_1 的一组基 $M_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m\}$, 又将 M_0 扩充为 W_2 的一组基 $M_2 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s\}$。则

$$M = M_1 \cup M_2 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m, \beta_{r+1}, \cdots, \beta_s\}$$

生成 $W_1 + W_2$, 所含元素个数

$$|M| = |M_1| + |M_2| - |M_0| = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = m + s - r$$

证明 M 线性无关, 是 $W_1 + W_2$ 的一组基.

设

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + \cdots + x_m\alpha_m + y_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + y_s\beta_s = 0$$

其中 $x_i, y_j \in F (1 \leq i \leq m, r+1 \leq j \leq s)$.

移项得

$$x_1\alpha_1 + \cdots + x_r\alpha_r + \cdots + x_m\alpha_m = -y_{r+1}\beta_{r+1} - \cdots - y_s\beta_s$$

将等式左边的向量记为 α, 右边的向量记为 β。则 α 是 M_1 的线性组合, 含于 W_1, β 是 M_2 的线性组

合，含于 W_2。等式说明 $\alpha=\beta$ 同时含于 W_1 与 W_2，因而 $\alpha=\beta\in W_1\cap W_2$。$\beta$ 应是 $W_1\cap W_2$ 的基 M_0 的线性组合，即：存在 $y_i\in F(1\leq i\leq r)$ 使

$$y_1\alpha_1+\cdots+y_r\alpha_r=\beta=-y_{r+1}\beta_{r+1}-\cdots-y_s\beta_s$$

即

$$y_1\alpha_1+\cdots+y_r\alpha_r+y_{r+1}\beta_{r+1}+\cdots+y_s\beta_s=0$$

由于 $M_2=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_s\}$ 是 W_2 的基，上式仅当所有的 $y_i=0(1\leq i\leq s)$ 时成立。代入得

$$x_1\alpha_1+\cdots+x_r\alpha_r+\cdots+x_m\alpha_m=0$$

而 $M_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 是 W_1 的基，上式仅当所有的 $x_i=0(1\leq i\leq m)$ 时成立.
这就说明了 M 线性无关，确实是 W_1+W_2 的基, 从而

$$\dim(W_1+W_2)=m+s-r=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

□

推论 1. 设 W_1,W_2 是 V 的子空间，则

$$\dim(W_1\cap W_2)\geq\dim W_1+\dim W_2-\dim V$$

特别，当 $\dim W_1+\dim W_2>\dim V$ 时有 $W_1\cap W_2\neq 0$.

推论 2. $\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2\Leftrightarrow W_1\cap W_2=0$.

2.1.4 子空间的直和

定义 2 (直和)**.** 设 $W_1,\cdots,W_t$ 是线性空间 V 的子空间，$W=W_1+\cdots+W_t$。如果 W 中每个向量 w 的分解式

$$w=w_1+\cdots+w_t,\quad w_i\in W_i,\forall 1\leq i\leq t$$

是唯一的，就称 W 为 $W_1,\cdots,W_t$ 的直和，记为 $W_1\oplus\cdots\oplus W_t$。

定理 3 (直和的等价条件)**.** $W_1+\cdots+W_t$ 是直和的充分必要条件是：

$$w_1+\cdots+w_t=0\quad(w_i\in W_i,\forall 1\leq i\leq t)\Longleftrightarrow w_1=\cdots=w_t=0$$

证明. 显然，零向量可以分解为 $0 = u_1 + \cdots + u_t$，其中每个 $u_i = 0 \in W_i, \forall 1 \le i \le t$。如果 $W_1 + \cdots + W_t$ 是直和，则由零向量的分解式的唯一性知条件成立，必要性得证.

现在设条件成立，求证 $W_1 + \cdots + W_t$ 是直和, 设 $w \in W_1 + \cdots + W_t$ 有两个分解式

$$w = w_1 + \cdots + w_t, \quad w = u_1 + \cdots + u_t$$

其中 $w_i, u_i \in W_i, \forall 1 \le i \le t$。将两个分解式相减得

$$0 = (w_1 - u_1) + \cdots + (w_t - u_t)$$

其中 $w_i - u_i \in W_i (\forall 1 \le i \le t)$. 由于假定了条件成立，上式成立仅当 $w_i - u_i = 0$ 即 $w_i = u_i$ 对所有 $1 \le i \le t$ 成立，这就证明了写法 $w = w_1 + \cdots + w_t$ 的唯一性，$W_1 + \cdots + W_t$ 是直和. □

定理 4 (两个子空间的直和条件). $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2 \Longleftrightarrow W_1 \cap W_2 = 0$

证明. 先设 $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$. 任取 $w \in W_1 \cap W_2$，则 $0 = w + (-w)$ 且 $w \in W_1, -w \in W_2$. 由零向量分解的唯一性得 $w = 0$，可见 $W_1 \cap W_2 = 0$.

再设 $W_1 \cap W_2 = 0$。设 $0 = w_1 + w_2 (w_1 \in W_1, w_2 \in W_2)$, 则 $w_1 = -w_2 \in W_1 \cap W_2 = 0$, 从而 $w_1 = w_2 = 0$. 这说明了 $W_1 + W_2$ 是直和. □

定理 5 (有限维空间的直和条件). 设 $W_1, \cdots, W_t$ 是数域 F 上有限维向量空间 V 的子空间, 则

$$W_1 + \cdots + W_t = W_1 \oplus \cdots \oplus W_t \Leftrightarrow \dim(W_1 + \cdots + W_t) = \dim W_1 + \cdots + \dim W_t$$

各 W_i 的基 $M_i (1 \le i \le t)$ 中的向量共同组成的集合就是 $W_1 + \cdots + W_t$ 的一组基.

证明. 取每个子空间 W_i 的一组基 $M_i = \{w_{i1}, \cdots, w_{id_i}\} (1 \le i \le t)$，其中 $d_i = \dim W_i$, 则所有的 M_i 中的基向量组成的集合

$$M = \{w_{ij} \mid 1 \le i \le t, 1 \le j \le d_i\}$$

生成 $W = W_1 + \cdots + W_t$,M 包含的向量个数 $d = d_1 + \cdots + d_t = \dim W_1 + \cdots + \dim W_t$.

$\dim W = d = \dim W_1 + \cdots + \dim W_t \iff M$ 线性无关，是 W 的一组基.

设

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} w_{ij} = 0$$

其中所有的 $x_{ij} \in F$。对每个 $1 \le i \le t$，记 $\beta_i = \sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} w_{ij} \in W_i$，则上式成为

$$\beta_1 + \cdots + \beta_t = 0$$

先设 W 是 $W_1, \cdots, W_t$ 的直和, 则上式成立仅当所有的 $\beta_i = 0 (1 \le i \le t)$. 即

$$\sum_{j=1}^{d_i} x_{ij} w_{ij} = 0,$$

再由 $M_i = \{w_{i1}, \cdots, w_{id_i}\}$ 线性无关知道所有的 $x_{ij} = 0$, 这就证明了 M 线性无关，是 W 的基, 从而

$$\dim W = d = \dim W_1 + \cdots + \dim W_t$$

反过来，设 $\dim W = d$ 成立，则 M 线性无关, 如果有 $w_i \in W_i (1 \le i \le t)$ 使

$$w_1 + \cdots + w_t = 0$$

将每个 $w_i \in W_i$ 写成 M_i 的线性组合

$$w_i = \sum_{j=1}^{d_i} y_{ij} w_{ij}$$

上式成为

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{j=1}^{d_i} y_{ij} w_{ij} = 0$$

M 线性无关迫使所有的 $y_{ij} = 0$ 从而所有的 $w_i = 0$, 这证明了 $W = W_1 + \cdots + W_t$ 是直和。 □

2.1.5 补空间

定义 3 (补空间)**.** *设 W 是 V 的子空间, 如果 V 的子空间 U 满足条件 $W \oplus U = V$，就称 U 是 W 在 V 中的补空间.*

命题 2 (补空间的等价条件)**.** *设 W, U 是 V 的子空间，则以下命题等价:*

1. *U 是 W 在 V 中的补*
2. *$\dim W + \dim U = \dim V$ 且 $W \cap U = 0$*
3. *W 的基与 U 的基的并集是 V 的基*

定义 4 (正交补). W 的**正交补**定义为

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \langle v, w \rangle = 0, \ \forall w \in W\}.$$

定理 6. 正交补存在且唯一.

证明. 在有限维情形，可直接取 W 的一组标准正交基并扩充为 V 的标准正交基，则扩充的基向量张成的子空间即为 $W^{\perp}$，得到正交直和分解.
设 U 是 V 的另一个子空间，满足

$$V = W \oplus U \quad 且 \quad \forall w \in W, \ u \in U, \ \langle w, u \rangle = 0.$$

下证 $U = W^{\perp}$.

- $U \subseteq W^{\perp}$：对任意 $u \in U$，由条件 $u \perp W$，故 $u \in W^{\perp}$。
- $W^{\perp} \subseteq U$：对任意 $v \in W^{\perp}$，由直和分解存在唯一 $w \in W$、$u \in U$ 使得 $v = w + u$, 由于 $v \perp W$，有

$$0 = \langle v, w \rangle = \langle w, w \rangle + \langle u, w \rangle = \langle w, w \rangle.$$

故 $w = 0$，从而 $v = u \in U$. □

2.1.6 例题

1. 设 π_1 是建立了空间直角坐标系的 3 维几何空间 $\mathbb{R}^3$ 中过点 $(0,0,0),(1,-1,0),(1,2,-3)$ 的平面，π_2 是过点 $(0,0,0),(1,-1,-1),(2,3,1)$ 的平面，求这两个平面的交集 $\pi_1 \cap \pi_2$.

2. 给定 $\mathbb{F}^4$ 的子空间 W_1 的基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 和子空间 W_2 的基 $\{\beta_1, \beta_2\}$，其中

$$\begin{cases} \alpha_1 = (1,1,0,0), \\ \alpha_2 = (0,1,1,0), \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 = (1,2,3,4), \\ \beta_2 = (0,1,2,2) \end{cases}$$

   分别求 $W_1 + W_2$，$W_1 \cap W_2$ 的维数并各求出一组基.

3. 设 W_1, W_2 分别是数域 F 上齐次线性方程组 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 与 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间。求证：$F^n = W_1 \oplus W_2$.

4. 设 $F[x]$ 是以数域 F 为系数范围，x 为字母的全体一元多项式 $f(x)$ 组成的 F 上的线性空间，求证：

(1) $S=\{f(x)\in F[x]\mid f(-x)=f(x)\}$ 和 $K=\{f(x)\mid f(-x)=-f(x)\}$ 都是 $F[x]$ 的子空间.

(2) $F[x]=S\oplus K$.

5. 举出满足下面条件的例子：子空间 $W_1,\cdots,W_n$ 的两两的交是 0，但 $W_1+\cdots+W_n$ 不是直和.

2.1.7 例题解答

T1 解答. 用 3 维几何空间中坐标为 (x,y,z) 的点表示 $\mathbb{R}^3$ 中的向量 (x,y,z)，则 π_1 是向量 $\alpha_1=(1,-1,0),\alpha_2=(1,2,-3)$ 生成的子空间，π_2 是 $\beta_1=(1,-1,-1)$ 与 $\beta_2=(2,3,1)$ 生成的子空间.

$\alpha\in\pi_1\cap\pi_2\Leftrightarrow\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2(x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{R})$

条件 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$，即

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2-y_1\beta_1-y_2\beta_2=0$$

将 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的坐标代入得

$$x_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}-y_1\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}-y_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

这是以 x_1,x_2,y_1,y_2 为未知数的线性方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2-y_1-2y_2=0\\-x_1+2x_2+y_1-3y_2=0\\-3x_2+y_1-y_2=0\end{cases}$$

所以 $(x_1,x_2,y_1,y_2)=t\left(\dfrac{19}{3},\dfrac{5}{3},6,1\right)$

将 $x_1=\dfrac{19}{3}t,x_2=\dfrac{5}{3}t$ 代入得

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\frac{19}{3}t(1,-1,0)+\frac{5}{3}t(1,2,-3)=t(8,-3,-5)$$

因此 $\pi_1\cap\pi_2=\{t(8,-3,-5)\mid t\in\mathbb{R}\}$ 是 $(8,-3,-5)$ 生成的 1 维子空间，图像是过原点和点 $(8,-3,-5)$ 的直线。 $\square$

T2 解答. 先求 W_1+W_2 的基, 将 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 组成矩阵的行向量:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&2&3&4\\0&1&2&2\end{pmatrix}$$

用初等行变换化为行最简形:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\1&2&3&4\\0&1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(1)}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&1&3&4\\0&1&2&2\end{pmatrix}\xrightarrow{(3)-(2),(4)-(2)}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&2&4\\0&0&1&2\end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{(4)-\frac{1}{2}(3)}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}(3)}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

非零行对应的原向量 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 线性无关，所以 W_1+W_2 的维数为 3，一组基为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1\}$.
由维数公式:

$$\dim(W_1\cap W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1+W_2)=2+2-3=1$$

求 $W_1\cap W_2$ 的基：设 $\gamma\in W_1\cap W_2$，则存在 x_1,x_2,y_1,y_2 使得

$$\gamma=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_1\beta_1+y_2\beta_2$$

即

$$x_1(1,1,0,0)+x_2(0,1,1,0)=y_1(1,2,3,4)+y_2(0,1,2,2)$$

比较分量得:

$$\begin{cases}x_1=y_1\\x_1+x_2=2y_1+y_2\\x_2=3y_1+2y_2\\0=4y_1+2y_2\end{cases}$$

所以 $\gamma = \alpha_1 - \alpha_2 = (1,1,0,0) - (0,1,1,0) = (1,0,-1,0)$

因此 $W_1 \cap W_2$ 的维数为 1，一组基为 $\{(1,0,-1,0)\}$. □

T3 解答. 先求两个子空间的维数：

W_1 是 $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ 的解空间，系数矩阵的秩为 1，所以 $\dim W_1 = n-1$.

W_2 是 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 的解空间，即所有分量相等的向量组成的空间，所以 $\dim W_2 = 1$.

验证 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$：设 $\alpha = (a, a, \cdots, a) \in W_1 \cap W_2$，则 $\alpha \in W_1$ 满足 $a + a + \cdots + a = na = 0$，所以 $a = 0$，即 $\alpha = 0$.

由维数公式：

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = (n-1) + 1 - 0 = n = \dim F^n$$

所以 $W_1 + W_2 = F^n$，且 $W_1 \cap W_2 = 0$，因此 $F^n = W_1 \oplus W_2$. □

T4 解答. (1) 验证线性空间的八条性质.

(2) 对任意 $f(x) \in F[x]$，定义

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

则 $f_e(-x) = f_e(x)$，所以 $f_e(x) \in S$；$f_o(-x) = -f_o(x)$，所以 $f_o(x) \in K$.

且 $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$，所以 $F[x] = S + K$.

验证 $S \cap K = 0$：设 $f(x) \in S \cap K$，则 $f(-x) = f(x)$ 且 $f(-x) = -f(x)$，所以 $f(x) = -f(x)$，即 $f(x) = 0$.

因此 $F[x] = S \oplus K$. □

T5 解答. 在 $\mathbb{R}^2$ 中取三个不同的 1 维子空间：

$$W_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad W_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\}, \quad W_3 = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

则任意两个子空间的交都是 $\{0\}$，但 $W_1 + W_2 + W_3 = \mathbb{R}^2$，而 $\dim(W_1 + W_2 + W_3) = 2 < 1 + 1 + 1 = 3$，所以不是直和.

具体来说，零向量 $0 = (0,0)$ 可以有不同的表示：

$$0 = (1,0) + (0,1) + (-1,-1) = (1,0) \in W_1, (0,1) \in W_2, (-1,-1) \in W_3$$

且这三个向量都不为零，所以分解不唯一. □

2.2 象与核

定义 5 (象与核)**.** *设 V 和 U 是数域 F 上的线性空间，$A: V \to U$ 是一个线性映射.*

1. *象（Image）：$\operatorname{Im} A = A(V) = \{A(\alpha) \mid \alpha \in V\}$，它是 U 的子集.*

2. *核（Kernel）：$\operatorname{Ker} A = A^{-1}(0) = \{\alpha \in V \mid A(\alpha) = 0\}$，它是 V 的子集.*

定理 7. *$\operatorname{Im} A$ 是 U 的子空间，$\operatorname{Ker} A$ 是 V 的子空间.*

证明. 先证 $\operatorname{Im} A$ 是 U 的子空间：

1. 零元：因为 $A(0_V) = 0_U$，所以 $0_U \in \operatorname{Im} A$.

2. 加法封闭：任取 $u_1, u_2 \in \operatorname{Im} A$，存在 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ 使得 $A(\alpha_1) = u_1, A(\alpha_2) = u_2$. 于是

$$u_1 + u_2 = A(\alpha_1) + A(\alpha_2) = A(\alpha_1 + \alpha_2) \in \operatorname{Im} A.$$

3. 数乘封闭：任取 $u \in \operatorname{Im} A$，$k \in F$，存在 $\alpha \in V$ 使 $A(\alpha) = u$，则

$$ku = kA(\alpha) = A(k\alpha) \in \operatorname{Im} A.$$

所以 $\operatorname{Im} A$ 是 U 的子空间.
再证 $\operatorname{Ker} A$ 是 V 的子空间：

1. 零元：$A(0_V) = 0_U$，故 $0_V \in \operatorname{Ker} A$.

2. 加法封闭：任取 $\alpha_1, \alpha_2 \in \operatorname{Ker} A$，则 $A(\alpha_1) = 0, A(\alpha_2) = 0$，于是

$$A(\alpha_1 + \alpha_2) = A(\alpha_1) + A(\alpha_2) = 0 + 0 = 0,$$

   故 $\alpha_1 + \alpha_2 \in \operatorname{Ker} A$.

3. 数乘封闭：任取 $\alpha \in \operatorname{Ker} A$，$k \in F$，则 $A(k\alpha) = kA(\alpha) = k \cdot 0 = 0$，故 $k\alpha \in \operatorname{Ker} A$.

所以 $\operatorname{Ker} A$ 是 V 的子空间. □

取定 V 的一组基 $M = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$，$U$ 的一组基 $S = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$. 设线性映射 A 在这两组基下的矩阵为 $A \in F^{m \times n}$，即对任意 $\alpha \in V$，若 α 在基 M 下的坐标向量为 X，则 $A(\alpha)$ 在基 S 下的坐标向量为 AX. 于是有：

- $\operatorname{Im} A = \{AX \mid X \in F^{n \times 1}\}$，它由矩阵 A 的列向量的全体线性组合生成，即 A 的列空间.

- $\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rank} A$（矩阵 A 的秩）.
- $\operatorname{Ker} A = \{X \in F^{n\times 1} \mid AX = 0\}$，即齐次线性方程组 $AX = 0$ 的解空间.
- $\dim \operatorname{Ker} A = n - \operatorname{rank} A$.

定理 8 (维数公式)**.** 设 $A : V \to U$ 是线性映射，$\dim V = n$，则

$$\dim V = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A.$$

证明. 设 $\dim \operatorname{Ker} A = k$，取 $\operatorname{Ker} A$ 的一组基 $\{u_1, \dots, u_k\}$，将其扩充为 V 的一组基：

$$M_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, u_1, \dots, u_k\},$$

其中 $r + k = n$。下证 $\{A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_r)\}$ 是 $\operatorname{Im} A$ 的一组基.

先证线性无关：设 $c_1A(\alpha_1) + \cdots + c_rA(\alpha_r) = 0$，则

$$A(c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r) = 0,$$

故 $c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r \in \operatorname{Ker} A$. 于是存在 $d_1, \dots, d_k$ 使得

$$c_1\alpha_1 + \cdots + c_r\alpha_r = d_1u_1 + \cdots + d_ku_k.$$

由 M_1 的线性无关性得 $c_1 = \cdots = c_r = d_1 = \cdots = d_k = 0$，所以 $\{A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_r)\}$ 线性无关.

再证生成 $\operatorname{Im} A$：任取 $v \in \operatorname{Im} A$，存在 $\alpha \in V$ 使得 $v = A(\alpha)$. 将 α 用基 M_1 线性表示：

$$\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1u_1 + \cdots + b_ku_k,$$

则

$$v = A(\alpha) = a_1A(\alpha_1) + \cdots + a_rA(\alpha_r) + 0,$$

所以 v 可由 $\{A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_r)\}$ 线性表示.

因此 $\dim \operatorname{Im} A = r$，从而

$$\dim V = r + k = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Ker} A.$$

□

推论 3. 行空间相同当且仅当零空间相同.

证明. 易见行空间与零空间正交

$$dimR(A) + dimKer(A) = dimC(A) + dimKer(A) = dimIm(A) + dimKer(A) = n$$

故行空间是列空间的正交补，且正交补唯一. □

从上述证明过程中，我们得到 V 的基 $M_1 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, u_1, \dots, u_k\}$，并将 $\{A(\alpha_1), \dots, A(\alpha_r)\}$ 扩充为 U 的基 S_1. 则线性映射 A 在基 M_1 和 S_1 下的矩阵为

$$D = \begin{pmatrix} I^{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $I^{(r)}$ 是 r 阶单位矩阵.

定理 9 (矩阵相抵标准形)**.** 任何矩阵 $A \in F^{m\times n}$ 都相抵于上述形如 D 的矩阵，即存在可逆矩阵 $P \in F^{m\times m}$ 和 $Q \in F^{n\times n}$，使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I^{(r)} & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

其中 $r = \operatorname{rank} A$.

证明. 设线性映射 $A : V \to U$ 在两组基 M 和 S 下的矩阵为 A. 由上述几何模型的构造，存在 V 的新基 M_1 和 U 的新基 S_1，使得 A 在这两组新基下的矩阵为 D。设从基 M 到 M_1 的过渡矩阵为 Q（即 $M_1 = MQ$），从基 S 到 S_1 的过渡矩阵为 P^{-1}（即 $S_1 = SP^{-1}$），则矩阵 A 与 D 满足

$$D = PAQ.$$

由于过渡矩阵可逆，故 P 和 Q 可逆，从而 A 相抵于 D. □

2.2.1 例题

T1： 设 $R_n[x]$ 是次数不超过 n 的实系数多项式及零多项式组成的线性空间,$R_n[x]$ 上的变换 $D : f(x) \mapsto f'(x)$ 将每个多项式映到它的导数.

(1) 求 D 的象和核及其维数，并验证 $\dim \operatorname{Ker} D + \dim \operatorname{Im} D = n$ 成立.

(2) $R_n[x]$ 是否等于 D 的象与核的直和？为什么？

解答： (1) $\operatorname{Ker} D = \{f(x) \in R_n[x] \mid Df(x) = 0\} = \mathbb{R}$,

$\operatorname{Im} D = \{Df(x) \mid f(x) \in R_n[x]\} = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} \mid a_i \in \mathbb{R}, \forall 0 \le i \le n-2\} = R_{n-1}[x].$

它们的维数分别为 $\dim \operatorname{Ker} D = \dim \mathbb{R} = 1$, $\dim \operatorname{Im} D = \dim R_{n-1}[x] = n-1$.

$\dim \operatorname{Ker} D + \dim \operatorname{Im} D = 1 + (n-1) = n$ 成立.

(2) $\operatorname{Im} D \cap \operatorname{Ker} D = R_{n-1}[x] \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \neq 0$,

$\operatorname{Im} D + \operatorname{Ker} D = R_{n-1}[x] + \mathbb{R} = R_{n-1}[x] \neq R_n[x]$.

D 的象与核 $\operatorname{Im} D$ 与 $\operatorname{Ker} D$ 之和既不是直和，也不等于 $R_n[x]$，因此 $R_n[x]$ 不是 D 的象与核之和.

T2： 设 $A: V \to U$ 是有限维线性空间之间的线性映射，W 是 V 的子空间, 求证：

$$\dim A(W) \geq \dim W - \dim V + \operatorname{rank} A.$$

证明： 线性映射 A 的象和核满足维数定理

$$\dim \operatorname{Ker} A = \dim V - \dim \operatorname{Im} A = \dim V - \operatorname{rank} A. \tag{1}$$

定义 W 到 U 的映射 $A|_W: W \to U, w \mapsto A(w)$，称为 A 在 W 上的限制,$A|_W$ 的象和核同样满足维数定理

$$\dim \operatorname{Ker} A|_W = \dim W - \dim \operatorname{Im} A|_W,$$

其中 $\operatorname{Im} A|_W = A(W)$，且 $\operatorname{Ker} A|_W = \operatorname{Ker} A \cap W \subseteq \operatorname{Ker} A$. 因此

$$\dim \operatorname{Ker} A \geq \dim \operatorname{Ker} A|_W = \dim W - \dim A(W).$$

将 (1) 代入得 $\dim V - \operatorname{rank} A \geq \dim W - \dim A(W)$，整理即得

$$\dim A(W) \geq \dim W - \dim V + \operatorname{rank} A.$$

T3： 设 A 是有限维线性空间 V 的线性变换, 求证：

$$\operatorname{rank} A - \operatorname{rank} A^2 = \dim(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A).$$

证明： 考虑 A 在 $\operatorname{Im} A$ 上的限制 $A|_{\operatorname{Im} A}: \operatorname{Im} A \to V, \alpha \mapsto A(\alpha)$. 则

$$\dim \operatorname{Ker} A|_{\operatorname{Im} A} = \dim \operatorname{Im} A - \dim \operatorname{Im} A|_{\operatorname{Im} A} \tag{1}$$

其中 $\operatorname{Ker} A|_{\operatorname{Im} A} = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A$，$\dim \operatorname{Im} A = \operatorname{rank} A$. 而 $\operatorname{Im} A|_{\operatorname{Im} A} = A(A(V)) = A^2(V)$，因此 $\dim \operatorname{Im} A|_{\operatorname{Im} A} = \dim A^2(V) = \operatorname{rank} A^2$. 代入 (1) 得

$$\dim(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A) = \operatorname{rank} A - \operatorname{rank} A^2$$

如所欲证.

T4:A 为 n 阶方阵, 证明:

$$rank(A) + rank(I_n - A) = n \Rightarrow A = A^2$$

解答： 考虑线性变换 $A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$，其中 $\mathbb{F}$ 是数域，记 $V = \mathbb{F}^n$.

由条件知 $\dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Im}(I - A) = n$.

易见

$$\operatorname{Im}(A) \cap \operatorname{Im}(I - A) = \{0\}.$$

现在考虑乘积 $A(I - A) = A - A^2$，对任意向量 $v \in V$，令 $w = A(I - A)v$.

一方面，$w = A\big((I - A)v\big) \in \operatorname{Im}(A)$. 另一方面，$w = (I - A)(Av) \in \operatorname{Im}(I - A)$. 因此，$w \in \operatorname{Im}(A) \cap \operatorname{Im}(I - A) = \{0\}$，从而 $w = 0$. 由 v 的任意性知 $A(I - A)v = 0$ 对所有 $v \in V$ 成立，故 $A(I - A) = 0$，即

$$A - A^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad A = A^2.$$

2.3 同构与同态 *

2.3.1 同构与同态的基本概念

定义 6 (同构映射)**.** 设 V_1, V_2 是数域 F 上两个线性空间, 如果存在一一映射 $\sigma: V_1 \to V_2$, 满足条件:

1. $\sigma(\alpha+\beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V_1$
2. $\sigma(\lambda\alpha) = \lambda\sigma(\alpha), \quad \forall \alpha \in V_1, \lambda \in F$

就称线性空间 V_1 与 V_2 同构, 称 σ 是 V_1 到 V_2 的同构映射.

定义 7 (同态映射)**.** 设 V_1, V_2 是数域 F 上两个线性空间, 如果存在映射 $\varphi: V_1 \to V_2$, 满足条件:

1. $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta), \quad \forall \alpha, \beta \in V_1$
2. $\varphi(\lambda\alpha) = \lambda\varphi(\alpha), \quad \forall \alpha \in V_1, \lambda \in F$

就称 φ 是 V_1 到 V_2 的同态映射.

注: 同态与同构的区别就在于映射 φ 是否为双射.

2.3.2 基本性质与定理

命题 3 (同构映射的基本性质)**.** 设 $\sigma: V_1 \to V_2$ 是 F 上线性空间之间的同构映射, 则:

1. σ 将 V_1 的零向量 θ_1 映到 V_2 的零向量 θ_2
2. σ 将每个 α 的负向量映到 $\sigma(\alpha)$ 的负向量: $\sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$
3. V_1 的子集合 S 线性相关（无关）$\Leftrightarrow \sigma(S)$ 线性相关（无关）
4. M 是 V_1 的基 $\Leftrightarrow \sigma(M)$ 是 V_2 的基
5. 同构的空间维数相等: 如果 V_1 是有限维线性空间, 则 $\dim V_1 = \dim V_2$

证明. 1. $\sigma(\theta_1) = \sigma(\theta_1 + \theta_1) = \sigma(\theta_1) + \sigma(\theta_1) \Rightarrow \sigma(\theta_1) = \theta_2$

2. $\alpha + (-\alpha) = \theta_1 \Rightarrow \sigma(\alpha) + \sigma(-\alpha) = \sigma(\alpha + (-\alpha)) = \sigma(\theta_1) = \theta_2 \Rightarrow \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$

3. 如果 S 线性相关, 则 S 含有有限子集 $S_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$ 线性相关, 存在不全为 0 的 $\lambda_1, \cdots, \lambda_k \in F$ 使 $\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k\alpha_k = 0$, 从而

$$\lambda_1\sigma(\alpha_1) + \cdots + \lambda_k\sigma(\alpha_k) = \sigma(\lambda_1\alpha_1 + \cdots + \lambda_k\alpha_k) = \sigma(0_1) = 0_2$$

这说明 $\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_k)$ 线性相关, 从而 $\sigma(S)$ 线性相关, 反过来, $\sigma(S)$ 线性相关 $\Rightarrow \sigma^{-1}\sigma(S) = S$ 线性相关.

4. M 是 V_1 的基 $\Leftrightarrow \begin{cases} M \text{ 线性无关} \\ V_1 \text{ 是} M \text{ 的线性组合} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma(M) \text{ 线性无关} \\ \sigma(V_1) \text{ 是} \sigma(M) \text{ 的线性组合} \end{cases}$
$\Leftrightarrow \sigma(M)$ 是 V_2（也就是 $\sigma(V_1)$）的基.

5. 设 $\dim V_1 = n$，$M = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 是 V_1 的基, 则 $\sigma(M) = \{\sigma(\alpha_1), \cdots, \sigma(\alpha_n)\}$ 是 V_2 的基。因此 $\dim V_2 = n = \dim V_1$.

□

命题 4 (同态映射的基本性质). 设 $\varphi : V_1 \to V_2$ 是 F 上线性空间之间的同态映射，则：

1. φ 将 V_1 的零向量 θ_1 映到 V_2 的零向量 θ_2

2. φ 将每个 α 的负向量映到 $\varphi(\alpha)$ 的负向量：$\varphi(-\alpha) = -\varphi(\alpha)$

3. V_1 的子集合 S 线性相关 $\Rightarrow \varphi(S)$ 线性相关

证明. 与同构映射的证明类似. □

定理 10 (有限维线性空间的同构定理). 同一数域 F 上同一维数 n 的任何两个线性空间相互同构.

证明. 设 V_1, V_2 是同一数域 F 上的 n 维空间。则它们各存在一组基 $M_1 = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ 和 $M_2 = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$。每个 $\alpha \in V_1$ 可以唯一地写成 M_1 的线性组合

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n$$

定义

$$\sigma_1(\alpha) = (x_1, \cdots, x_n) \in F^n, \quad \varphi(x_1, \cdots, x_n) = x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n$$

则 $\sigma_1 : V_1 \to F^n, \alpha \mapsto \sigma_1(\alpha)$ 与 $\varphi : F^n \to V_2, X \mapsto \varphi(X)$ 都是线性空间的同构映射
定义 $\sigma : V_1 \to V_2, \alpha \mapsto \varphi(\sigma_1(\alpha))$，则 σ 是 V_1 到 V_2 的一一映射, 且对任意 $\alpha, \beta \in V_1$ 及 $\lambda \in F$，有

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha+\beta) &= \varphi(\sigma_1(\alpha+\beta)) = \varphi(\sigma_1(\alpha)+\sigma_1(\beta)) \\ &= \varphi(\sigma_1(\alpha)) + \varphi(\sigma_1(\beta)) = \sigma(\alpha)+\sigma(\beta) \\ \sigma(\lambda\alpha) &= \varphi(\sigma_1(\lambda\alpha)) = \varphi(\lambda\sigma_1(\alpha)) = \lambda\varphi(\sigma_1(\alpha)) = \lambda\sigma(\alpha) \end{aligned}$$

这说明 $\sigma : V_1 \to V_2$ 是同构映射，V_1 与 V_2 同构. □

2.3.3 例题

1. 设 V 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间，已知 V 中的向量组 u_1, u_2, u_3 线性无关. 判断向量组 $u_1+u_2, u_2+u_3, u_3+u_1$ 是线性相关还是线性无关.

2. 设 V 是 F 上有限维线性空间，$M_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$ 是 V 的一组基，$M_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3\}$ 是 V 的另一组基. 已知 β_1,β_2,β_3 在 M_1 下的坐标分别是 $(1,1,-1)$，$(1,-1,1)$，$(-1,1,1)$。$\alpha\in V$ 在 M_1 下的坐标是 $(1,3,5)$, 求 α 在 M_2 下的坐标.

3. 设 $S_2=\{v_1,\cdots,v_s\}$ 是 $S_1=\{u_1,\cdots,u_r\}$ 的线性组合，并且 $s>r$, 求证：S_2 线性相关.

4. 将复数集合 $\mathbb{C}$ 看成实数域上的线性空间 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$，求 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 与实数域上 2 维数组空间 $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{R}\}$ 之间的同构映射 σ，将 $1+i, 1-i$ 分别映到 $(1,0),(0,1)$.

5. 设 $\mathbb{R}^*$ 是所有的正实数组成的集合。对任意 $a,b\in\mathbb{R}^*$ 定义 $a\oplus b=ab$（实数 a,b 按通常乘法的乘积），对任意 $a\in\mathbb{R}^*$ 和 $\lambda\in\mathbb{R}$ 定义 $\lambda * a=a^\lambda$.

   (1) 求证：$\mathbb{R}^*$ 按上述定义的加法 $\oplus$ 和数乘 $*$ 成为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

   (2) 求证：通常的线性空间 $\mathbb{R}$ 与按上述方式定义的线性空间 $\mathbb{R}^*$ 同构，并给出这两个空间之间的全部同构映射.

6. 设 V 是由复数组成的无穷数列 $\{a_n\}=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 的全集组成的集合，定义 V 中任意两个数列的加法 $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$ 及任意数列与任意复数的乘法 $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$ 之后成为复数域 $\mathbb{C}$ 上线性空间.

   (1) 求证：V 中满足条件 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(\forall n\geq 3)$ 的全体数列 $\{a_n\}$ 组成 V 的子空间 W。W 的维数是多少?

   (2) 对任意 $(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2$，定义 $\sigma(a_1,a_2)=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\in W$。求证：$\sigma$ 是 $\mathbb{C}^2$ 到 W 的同构映射;

   (3) 求证：W 中存在一组由等比数列组成的基 M;

   (4) 设数列 $\{F_n\}$ 满足条件 $F_1=F_2=1$ 且 $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$。求 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标，并由此求出 $\{F_n\}$ 的通项公式.

2.3.4 例题解答

T1 解答. 设 $W=V(u_1,u_2,u_3)$，则 $\{u_1,u_2,u_3\}$ 是 W 的一组基，将 W 中每个向量 α 在这组基下的坐标记作 $\sigma(\alpha)$，则 $\sigma: W\to\mathbb{R}^3$ 是线性空间之间的同构映射.

向量 $a_1=u_1+u_2, a_2=u_2+u_3, a_3=u_3+u_1$ 含于 W，在上述基下的坐标分别为

$$\sigma(a_1)=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \sigma(a_2)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\quad \sigma(a_3)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

解关于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 的方程组

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

即解方程组：

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$，可见 $\sigma(a_1),\sigma(a_2),\sigma(a_3)$ 线性无关，从而 $u_1+u_2, u_2+u_3, u_3+u_1$ 线性无关. □

T2 解答. 设 α 在 M_2 下的坐标为 (x,y,z)，则

$$\alpha=x\beta_1+y\beta_2+z\beta_3$$

将 V 中每个向量 β 在 M_1 下的坐标记作 $\sigma(\beta)$，则 $\sigma:V\to F^3$ 是线性空间之间的同构映射。在等式两边用 σ 作用，得到

$$\sigma(\alpha)=x\sigma(\beta_1)+y\sigma(\beta_2)+z\sigma(\beta_3)$$

即

$$\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

写成方程组形式：

$$\begin{cases}x+y-z=1\\ x-y+z=3\\ -x+y+z=5\end{cases}$$

解此线性方程组:

$$\begin{aligned}(1)+(2):\quad & 2x=4\Rightarrow x=2\\(1)+(3):\quad & 2y=6\Rightarrow y=3\\(1):\quad & 2+3-z=1\Rightarrow z=4\end{aligned}$$

所以 $(x,y,z)=(2,3,4)$，即 α 在 M_2 下的坐标为 $(2,3,4)$. □

T3 解答. 对每个 $X=(x_1,\cdots,x_r)\in F^r$，定义 $f(X)=x_1u_1+\cdots+x_ru_r$, 则 $f:F^r\to span(S_1)$ 是同态映射. 由于 v_j 是 $u_1,\cdots,u_r$ 的线性组合，存在 $X_j\in F^r$ 使得 $f(X_j)=v_j$ $(1\le j\le s)$.
由于 $s>r$，F^r 中 s 个数组向量 $X_1,\cdots,X_s$ 线性相关，存在不全为零的 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s\in F$ 使得

$$\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_sX_s=0$$

由于 f 是同态映射，有

$$\begin{aligned}\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_sv_s&=\lambda_1f(X_1)+\cdots+\lambda_sf(X_s)\\&=f(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_sX_s)=f(0)=0\end{aligned}$$

这证明了 $v_1,\cdots,v_s$ 线性相关. □

T4 解答. 设 $\sigma:\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}^2$ 为线性映射, 由于 $\{1,i\}$ 是 $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ 的一组基，设

$$\sigma(1)=(a,b),\quad \sigma(i)=(c,d)$$

由条件:

$$\begin{aligned}\sigma(1+i)=\sigma(1)+\sigma(i)=(a+c,b+d)=(1,0)\\\sigma(1-i)=\sigma(1)-\sigma(i)=(a-c,b-d)=(0,1)\end{aligned}$$

解方程组：

$$\begin{cases} a+c=1 \\ b+d=0 \\ a-c=0 \\ b-d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}, \quad c=\dfrac{1}{2} \\ b=\dfrac{1}{2}, \quad d=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

所以同构映射为：

$$\sigma(a+bi)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}\right)$$

□

T5 解答. 验证线性空间的 8 条公理：

1. 加法交换律：$a\oplus b=ab=ba=b\oplus a$
2. 加法结合律：$(a\oplus b)\oplus c=(ab)c=a(bc)=a\oplus(b\oplus c)$
3. 零向量存在：$1\in\mathbb{R}^*$，且 $a\oplus 1=a\cdot 1=a$
4. 负向量存在：对任意 $a\in\mathbb{R}^*$，$\dfrac{1}{a}\in\mathbb{R}^*$，且 $a\oplus\dfrac{1}{a}=a\cdot\dfrac{1}{a}=1$
5. 数乘结合律：$\lambda*(\mu*a)=\lambda*(a^{\mu})=(a^{\mu})^{\lambda}=a^{\lambda\mu}=(\lambda\mu)*a$
6. 数乘单位元：$1*a=a^1=a$
7. 分配律 1：$(\lambda+\mu)*a=a^{\lambda+\mu}=a^{\lambda}a^{\mu}=(\lambda*a)\oplus(\mu*a)$
8. 分配律 2：$\lambda*(a\oplus b)=\lambda*(ab)=(ab)^{\lambda}=a^{\lambda}b^{\lambda}=(\lambda*a)\oplus(\lambda*b)$

所以 $\mathbb{R}^*$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间. 定义映射 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$，$\varphi(x)=c^x$，其中 $c>0$ 且 $c\neq 1$.

验证 φ 是同构映射：

$$\varphi(x+y)=c^{x+y}=c^xc^y=\varphi(x)\oplus\varphi(y)$$
$$\varphi(\lambda x)=c^{\lambda x}=(c^x)^{\lambda}=\lambda*\varphi(x)$$

φ 是双射，因为指数函数 c^x 在 $c>0,c\neq 1$ 时是单调函数，值域为 $(0,+\infty)$.

所以对任意 $c>0,c\neq 1$，映射 $x\mapsto c^x$ 都是 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^*$ 的同构映射.

这些就是全部的同构映射，因为线性空间的同构由基的映射唯一确定，而 $\mathbb{R}$ 的基只有一个元素（比如 1），它必须映射到 $\mathbb{R}^*$ 的某个非零向量，即某个正实数 $c\neq 1$. □

T6 解答. (1)

1. 零数列满足递推关系，所以 $0\in W$
2. 如果 $\{a_n\},\{b_n\}\in W$，则 $(a+b)_n=a_n+b_n=(a_{n-1}+a_{n-2})+(b_{n-1}+b_{n-2})=(a+b)_{n-1}+(a+b)_{n-2}$，

所以 $\{a_n+b_n\}\in W$

3. 如果 $\{a_n\}\in W$，$\lambda\in\mathbb{C}$，则 $(\lambda a)_n=\lambda a_n=\lambda(a_{n-1}+a_{n-2})=(\lambda a)_{n-1}+(\lambda a)_{n-2}$，所以 $\{\lambda a_n\}\in W$

所以 W 是 V 的子空间.

W 的维数是 2，因为每个数列由前两项 a_1,a_2 唯一确定.

(2)

1. 线性性:

$$\sigma((a_1,a_2)+(b_1,b_2))=\sigma(a_1+b_1,a_2+b_2)=\{a_n+b_n\}=\sigma(a_1,a_2)+\sigma(b_1,b_2)$$

$$\sigma(\lambda(a_1,a_2))=\sigma(\lambda a_1,\lambda a_2)=\{\lambda a_n\}=\lambda\sigma(a_1,a_2)$$

2. 单射: 如果 $\sigma(a_1,a_2)=\sigma(b_1,b_2)$，则 $\{a_n\}=\{b_n\}$，特别地 $a_1=b_1,a_2=b_2$ 3. 满射: 对任意 $\{a_n\}\in W$，取 $(a_1,a_2)\in\mathbb{C}^2$，则 $\sigma(a_1,a_2)=\{a_n\}$ 所以 σ 是 $\mathbb{C}^2$ 到 W 的同构映射.

(3)

设等比数列 $\{q^{n-1}\}$ 满足递推关系 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，则

$$q^{n-1}=q^{n-2}+q^{n-3}\Rightarrow q^2=q+1\Rightarrow q^2-q-1=0$$

解得 $q=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。记

$$q_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad q_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

则 $\{q_1^{n-1}\},\{q_2^{n-1}\}\in W$，且它们线性无关(因为比值 $q_1/q_2\neq 1$)，所以构成 W 的一组基 $M=\{\{q_1^{n-1}\},\{q_2^{n-1}\}\}$.

(4)

设 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标为 (A,B)，即

$$F_n=Aq_1^{n-1}+Bq_2^{n-1}\quad(n\geq 1)$$

由初始条件:

$$n=1:\quad A+B=1$$

$$n=2:\quad Aq_1+Bq_2=1$$

代入 $q_1=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, q_2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ A\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}+B\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=1 \end{cases}$$

解得:

$$A=\frac{1}{\sqrt{5}}q_1, \quad B=-\frac{1}{\sqrt{5}}q_2$$

所以 $\{F_n\}$ 在基 M 下的坐标为 $\left(\dfrac{q_1}{\sqrt{5}},-\dfrac{q_2}{\sqrt{5}}\right)$. 通项公式为:

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1^n-q_2^n\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$\square$