# 补充讲义

日期: 2025 年 11 月 13 号

## 11 月 11 日内容

**命题 1.** 设 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m, \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k \in \mathbb{F}^n$. 则

$$\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} \sim \{\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k\} \quad \text{当且仅当} \quad \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_k \rangle.$$

*证明.* 根据定义直接验证. □

**命题 2.** $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 为 $\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m$ 的一个极大无关组当且仅当其 $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关且 $\langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle$.

*证明.* 根据极大无关组定义只需证明在 $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关假设下如下等价:

(1) 对任意 $\vec{a} \in \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} \setminus \{\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\}$, $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}, \vec{a}$ 线性相关.

(2) $\langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle$

因为 $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关, $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}, \vec{a}$ 线性相关当且仅当 $\vec{a} \in \langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle$. 从而 (1) 等价于

$$\text{对任意 } \vec{a} \in \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} \setminus \{\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\}, \vec{a} \in \langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle.$$

显然我们也有对任意 $\vec{a} \in \{\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\}$, $\vec{a} \in \langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle$. 因此上述命题等价于

$$\text{对任意 } \vec{a} \in \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\}, \vec{a} \in \langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle.$$

进一步的这等价于 $\langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle \subset \langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle$. 但显然 $\langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle \subset \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle$, 从而上述命题 (1) 等价于 (2). □

**定理 3.** 设 $\{\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\}$ 与 $\{\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_s}\}$ 是向量组 $\{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m\} \subset \mathbb{F}^n$ 的两组极大无关组, 则 $r = s$.

证明. 由命题2可知 $\langle \vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r} \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_m \rangle = \langle \vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_s} \rangle$. 从而再由命题1可知 $\{\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\} \sim \{\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_s}\}$. 从而我们可以将 $\{\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\}$ 中的每个向量写成 $\{\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_s}\}$ 中向量的线性组合的形式, 另一方面我们也可以将 $\{\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_s}\}$ 中的每个向量写成 $\{\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}\}$ 中向量的线性组合的形式. 具体的, 若令 $P_1 = (\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r})$, $P_2 = (\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_s})$ 分别为这两组向量作为列向量构成的矩阵, 则存在 $s \times r$ 阶矩阵 $A$ 和 $r \times s$ 阶矩阵 $B$ 使得

$$P_1 = P_2 A \quad \text{且} \quad P_2 = P_1 B.$$

将第二个等式代入第一个等式得

$$P_1 = P_2 A = P_1 B A.$$

类似的我们也有

$$P_2 = P_1 B = P_2 A B.$$

因为 $\vec{a}_{i_1}, \cdots, \vec{a}_{i_r}$ 线性无关, 根据线性无关的一个等价刻画我们知道线性方程组 $P_1 \vec{x} = \vec{0}$ 没有非零解, 即对任意 $\vec{x} \in \mathbb{F}^r$, 若 $P_1 \vec{x} = \vec{0}$, 则我们有 $\vec{x} = \vec{0}$. 另一方面由关系 $P_1 = P_1 B A$ 我们有对任意 $\vec{y} \in \mathbb{F}^r$,

$$P_1(\vec{y} - BA\vec{y}) = P_1\vec{y} - P_1 BA\vec{y} = P_1\vec{y} - P_1\vec{y} = \vec{0}.$$

从而有 $\vec{y} - BA\vec{y} = \vec{0}$, 即 $BA\vec{y} = \vec{y}$. 这一等式对任意 $\vec{y} \in \mathbb{F}^r$ 均成立. 特别的, 取遍 $\mathbb{F}^r$ 的所有自然基可知 $BA = I_r$. 类似的, 因为 $\vec{a}_{j_1}, \cdots, \vec{a}_{j_s}$ 线性无关, 可由关系 $P_2 = P_2 AB$ 推出 $AB = I_s$. 这两个关系说明 $A, B$ 互为对方在矩阵乘法下的逆. 因为只有方阵才存在这样的逆, 所以 $A, B$ 必须为方阵, 即 $r = s$. □

## 11 月 13 日内容

**命题 4.** [1] 若 $\{\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s\} \sim \{\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r\}$, 则 $r(\vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s) = r(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r)$.

证明. 由条件以及命题1可知

$$\langle \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s \rangle = \langle \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle.$$

令 $V$ 为上述子空间. 因为每个 $\vec{b}_i, \vec{a}_j$ 均是 $V$ 中的元素, 从而我们有

$$V = \langle \vec{b}_1, \cdots, \vec{b}_s, \vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_r \rangle.$$

[1] 这里我们直接证明课上命题 (iv), 从而在证明 (iii) 时可以应该这个结论.

取 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\}$ 的一个极大无关组 $\{\vec{b}_{j_1},\cdots,\vec{b}_{j_t}\}$, 以及 $\{\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 的一个极大无关组 $\{\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_k}\}$. 从而 $r(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)=t$, $r(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)=k$. 由命题2可知

$$\langle\vec{b}_{j_1},\cdots,\vec{b}_{j_t}\rangle=\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s\rangle=\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s,\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\rangle.$$

再由命题2可知 $\{\vec{b}_{j_1},\cdots,\vec{b}_{j_t}\}$ 是 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s,\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 的一个极大无关组. 类似的有

$$\langle\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_k}\rangle=\langle\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\rangle=\langle\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s,\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\rangle.$$

从而 $\{\vec{a}_{i_1},\cdots,\vec{a}_{i_k}\}$ 也是 $\{\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s,\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r\}$ 的一个极大无关组. 最后由定理3即知 $t=k$, 即 $r(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_s)=r(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_r)$. □