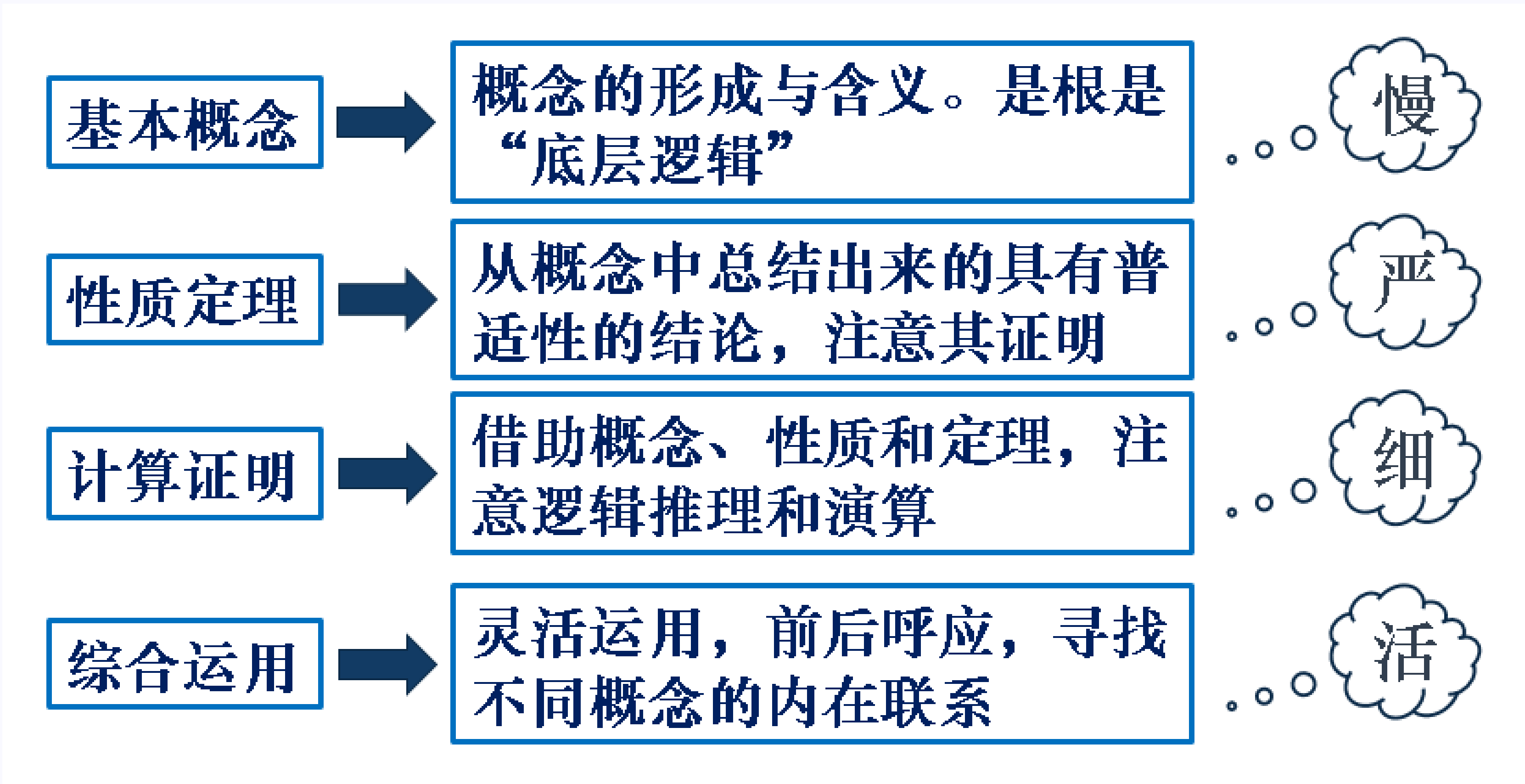
《数学分析》期末复习

（积分、方程与级数部分）

程 艺

一、总的建议

1、“从薄到厚、从厚到薄”,复习是从厚到薄的过程



2、利用 AI 帮助总结、解题. 提高复习效率. AI 是随时恭候的辅导老师

例 关于函数项级数收敛域一致收敛的区别

AI 给出两者定义的对比.几何解释, 核心区别的总结等内容

使用AI 要注意的几点:

1° AI 有时也会出错.要善于阅读和判断 AI 提供的信息.尤其在解题方面是否是最佳解答, 或是否合理使用条件,或擅自添加条件.

2° AI 在一题多解上还有待提高.

3° 善于和 AI 对话 , 提高精准性,防止出现答所非问,浪费时间.

4° AI 不是取代思考的工具. AI 可以总结, 搜索, 缺少顿悟!

3、同学之间多讨论, 多提问, 互帮互学. 也可以在班级群集体讨论

二、关于积分

1、积分的计算:

1° 利用换元或分部,将积分化为有理式、三角有理式等形式的积分, 求出原函数, 或利用 Newton-Leibniz 公式, 算出定积分.

2° 利用奇偶等对称性、或分解被积函数、分解积分区间、或将被积函数展开(有限区间)后逐项积分等方法, 计算积分.

例 1 计算 $I = \int \frac{\sin x \mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$ 令 $J = \int \frac{\cos x \mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x}$, 则

$$2I + 3J = \int \mathrm{d}x = x + C$$

$$-3I + 2J = \int \frac{(-3\sin x + 2\cos x)\mathrm{d}x}{2\sin x + 3\cos x} = \ln|2\sin x + 3\cos x| + C$$

解得 $I = \frac{1}{13}(2x - 3\ln|2\sin x + 3\cos x|) + C.$

例 2 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$

解 将积分区间分解为 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ 并对第二个积分换元$x\to -x$:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^x\cos x}{\mathrm{e}^x+1}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{e}^{-x}\cos x}{\mathrm{e}^{-x}+1}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=1.$$

例 3 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}$

解 将$[0,+\infty)$分解为$[0,1]$, $[1,+\infty)$并对第二个区间上积分换元 $x=\frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{2025})}+\int_0^1\frac{t^{2025}}{(1+t^2)(1+t^{2025})}\mathrm{d}t\\&=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

2、**变上限积分**:

1° 设 $f(x)$在$[a,b]$ 上可积, 则 $\varphi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 定义了$[a,b]$ 上函数.

$f(x)$ 可积 $\Longrightarrow \varphi(x)$ 连续. $f(x)$ 连续 $\Longrightarrow \varphi(x)$ 可导, 且 $\varphi'(x)=f(x)$.

因此连续函数的变上限积分就是它的一个原函数.

2° 函数$F(x)=\int_a^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t$是$\varphi(u)=\int_a^u f(t)\mathrm{d}t$和 $u=b(x)$复合, 因此

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(b(x))=\varphi'(b(x))b'(x)=f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

例 4 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{\tan x}\sin(t^2)\,dt$. 利用L'Hospital法则

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan^2 x)}{3x^2\cos^2 x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\tan^2 x)}{\tan^2 x}\frac{\tan^2 x}{x^2}\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{1}{3}$$

3、积分的证明:

1° 几个重要公式

Newton-Leibniz **公式**:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a),\ F'(x) = f(x).$$

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}f(t) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t.$$

积分中值定理: $f(x)$在$[a,b]$上连续, 则存在 $\xi \in [a,b]$,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi)$$

Cauchy-Schwarz **不等式**:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\, dx \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

返回 全屏 关闭 退出

例 5 设 $f(x)$在 $[a,b]$上连续可导, $f(a)=0$. 求证

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

证明 $f(x)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t, \quad x\in[a,b]$. 利用 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)^2=\left(\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\int_a^x 1^2\mathrm{d}t\int_a^x (f'(t))^2\mathrm{d}t$$

$$=(x-a)\int_a^x (f'(t))^2\mathrm{d}t\leqslant(x-a)\int_a^b (f'(t))^2\mathrm{d}t \quad x\in[a,b].$$

两边在 $[a,b]$ 上积分

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b (f'(x))^2\mathrm{d}x.$$

例 6 设 $f(x)$ 导函数连续, 证明:

$$|f((0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证明 对$0 < x < a$,由$f(0) = f(x) - \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$|f(0)| \leqslant |f(x)| + \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t \leqslant |f(x)| + \int_0^a |f'(t)|\mathrm{d}t$$

两边在$[0, a]$上积分 .

$$a|f((0)| \leqslant \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + a\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 7 设 $f(x)$在 $[a,b]$上单调增连续. 求证 $\int_a^b xf(x)\,dx \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

证明 令 $F(b)=\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, 则 $f(x)\leqslant f(b)$,

$$F'(b)=bf(b)-\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{a+b}{2}f(b)=\frac{b-a}{2}f(b)-\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant \frac{b-a}{2}f(b)-\frac{1}{2}(b-a)f(b)=0.$$

$\Longrightarrow F(b)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增. 所以 $F(b)\geqslant F(a)=0$.

或分部积分, 并利用$f(x)$递增得: $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x f(x)\mathrm{d}t=(x-a)f(x)$.

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\mathrm{d}\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)=x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_a^b-\int_a^b\left(\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant b\int_a^b f(t)\mathrm{d}t-\int_a^b (x-a)f(x)\mathrm{d}x$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 8 设 $f(x)$ 在$[0, a]$ $(a > 0)$ 上有连续的导数.

(1) 若 $f(0) = 0$, 试证 $\int_0^a |f(x)||f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2\mathrm{d}x$.

(2) 若 $f(0) = f(a) = 0$, 试证 $\int_0^a |f(x)||f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{a}{4}\int_0^a |f'(x)|^2\mathrm{d}x$.

证明 令 $F(x) = \int_0^x |f'(t)|\mathrm{d}t$, $F'(x) = |f'(x)| \geqslant 0$.

(1) 由 $f(0) = 0$, $f(x) = \int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$, $|f(x)| \leqslant \int_0^x |f'(x)|\mathrm{d}x = F(x)$, 利用Cauchy-Schwarz不等式得

$$\int_0^a |f(x)||f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^a F(x)F'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F^2(a) = \frac{1}{2}\left(\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(\int_0^a 1^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^a |f'(x)|^2\mathrm{d}x\right) = \frac{a}{2}\int_0^a |f'(x)|^2\mathrm{d}x.$$

(2) 由 $f(0)=0, f(x)=\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x, F(x)=\int\limits_0^x |f'(x)|\mathrm{d}x$,

$$\int_0^{a/2} |f(x)||f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{a/2} F(x)F'(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}F^2\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_0^{a/2} |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{a}{4}\int_0^{a/2} |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

由 $f(a)=0, f(x)=\int_a^x f'(x)\mathrm{d}x, |f(x)| \leqslant \int_x^a |f'(x)|\mathrm{d}x = F(a)-F(x)$,

$$\int_{a/2}^{a} |f(x)||f'(x)|\mathrm{d}x \leqslant -\int_{a/2}^{a} (F(a)-F(x))(F(a)-F(x))'\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\left(F(a)-F\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{a/2}^{a} |f'(x)|\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \frac{a}{4}\int_{a/2}^{a} |f'(x)|^2\mathrm{d}x$$

两式相加, 即得(2) 的结果.

|◀ ▶| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

三、关于方程

1、**主要目的**: 求通解、特解、全部解, 以及满足初(边)值条件解.

2、**方法**: 分离变量、降阶、常数变易、待定系数、幂级数解法、观察法.

3、**二阶线性方程**:

1° 对解的存在唯一性的理解

2° 齐次方程的基本解组.

3° 非齐次方程特解和通解: 通解=特解+齐次方程基本解组的线性组合.

4° 常系数二阶线性方程: 齐次的基本解组(特征方程), 非齐次的特解.

对特殊非齐次项, 可采取待定系数求特解

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 9 求$y'-\frac{2}{x}y=2x^2$ 的通解.

解 齐次方程 $y'-\frac{2}{x}y=0$ 的通解为 $y=Cx^2$.

为求非齐次通解, 采取常数变易法, 令 $y(x)=C(x)x^2$, 代入非齐次方程

$$C'(x)x^2+2xC(x)-\frac{2}{x}C(x)x^2=2x^2, \Longrightarrow C(x)'-2=0$$

解得$C(x)=2x+C$, 因此通解为 $y=x^2(2x+C)$.

也可以采取观察（瞪眼）法.

设非齐次特解为 $y_0=a^3$, a 待定, 代入后得 $3ax^2-2ax^2=2x^2$, 所以特解为 $y_0=2x^3$, 因此通解为

$$y=Cx^2+2x^3.$$

||◄ ►|| ◄ ► 返回 全屏 关闭 退出

例 10 求 $y''-2y'-3y=-10\cos x$ 满足初(边)值条件$y(0)=0, y'(0)=1$ 的解.

第一步 求齐次 $y''-2y'-3y=0$的基本解组.

由特征方程 $\lambda^2-2\lambda-3=0$ 的根, 得基本解组 e^{3x}, e^{-x}.

第二步 求非齐次特解和通解, 令 $y_0(x)=a\sin x+b\cos x$ $(a,b$ 待定$)$. 代入方程比较$\sin x, \cos x$系数得 $a=1, b=2$. 特解: $y_0(x)=\sin x+2\cos x$

因此通解为 $y(x)=\sin x+2\cos x+C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{-x}$,

第三步 求满足初(边)值条件的解. 由

$$y(0)=2+C_1+C_2=0, y'(0)=1+3C_1-C_2=1$$

解得$C_1=-\dfrac{1}{2}$, $C_2=-\dfrac{3}{2}$, 所以满足初(边)值条件的解为

$$y(x)=\sin x+2\cos x-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{3x}-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

四、关于级数

1、**一般概念**：级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛 $\Longleftrightarrow$ 部分和数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 收敛.

主要目的: **通过对通项 a_n 的认识**, **研究级数收敛性**.

1° Cauchy **收敛准则（充分必要条件）** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛等价于

任给 $\varepsilon > 0$, 存在 N, 对任意 $n > N$ 和任意 p, 有

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon,$$

2° **收敛必要条件（不满足必发散）**: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2、**判别法**：正项级数判别法, 一般级数（含交错级数）判别法.

3、**特性**：正项级数:收敛$\Longleftrightarrow$部分和有界;

一般级数: 绝对收敛与条件收敛. 绝对收敛保持有限求和所有性质.

2、**函数项级数**: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$, $\left(S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)\right)$ $x\in I$

1° **逐点收敛** 关注的是级数在每个单独点的行为. 对每个单独点 $x\in I$, 代入后 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u(x)$ 就是数项级数.即

$\forall x\in I$, $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当$n>N$ 时$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$.

2° **一致收敛** 关注的是级数在整个区域 I 上的整体行为, 即要求

$\forall\varepsilon>0, \exists N>0$, 当$n>N$ 时, $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$, 对$\forall x\in I$ 成立.

因此等价于$\sup\limits_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\leqslant\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|=0$.

3° **一致收敛必要条件** $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in I}|u_n(x)|=0$.

4° **一致收敛判别法** 特别是Weierstrass 判别法

5° **一致收敛性质** 一致收敛保证了和函数连续、可积、可导性质,其中积分和求导可逐项进行,连续和可导可放宽到 内闭一致

3、**幂级数** $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 或更一般$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$

1° **收敛半径:** 存在分界线$(-R,R)$, 在内部收敛, **而且绝对收敛**, 在外部发散, 在端点待验证. **任何方法只要找到这样的R(可以是无穷)即可**.

方法一 因为在$(-R,R)$内绝对收敛, 因此可通过正项级数判别法可求出收敛半径.其中,如果关于系数的下列极限存在就直接给出收敛半径.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=L,\ 或\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=L,\ 则\ R=\frac{1}{L}.$$

方法二 将幂级数分解成幂级数的和或(Cauchy)乘积,取最小半径.

收敛区域 $I=(-R,R)+$ 可能的端点(验证)

2° **性质:** 在收敛半径$(-R,R)$内绝对收敛、内闭一致收敛.如果在端点收敛, 连续、可积可延伸到端点.积分、求导均可逐项进行.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

4、**函数$f(x)$的Taylor展开以及求幂级数和函数$S(x)$**

1° 在哪里展开, 展开后在什么区域相等.

2° 利用幂级数可逐项积分和求导性质, 在收敛区域范围内求出和函数.

5、Stirling **公式**：记住结果.

例 11 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}\right)$ 的收敛性.

解: 因为$\frac{1}{n}>\sin\frac{1}{n}$, $\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}>0$, 所以是正项级数.

$$\ln\frac{1}{n}-\ln\sin\frac{1}{n}=\ln\frac{1}{n}-\ln\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\sim\frac{1}{6n^2},$$ 所以收敛.

例 12 设$u_n>0, n\geqslant 1$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$, 判断 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 敛散性, 如收敛是否是绝对收敛?

解 由条件$\frac{1}{u_n}\sim\frac{1}{n}$, 推出 $\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\sim\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\sim\frac{2}{n}\ (n\to\infty)$

所以级数不是绝对收敛的.

考虑级数的部分和

$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$$
$$=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$, 所以级数收敛, 因此是条件收敛的.

例 13 设 $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}$, 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛.

证明 $\forall 1>\varepsilon>0$, $u_n=\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}+\int_{\varepsilon}^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}$

其中 $\int_0^{\varepsilon}\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}<\varepsilon\ (n\geqslant 1)$,

在 $x\in[\varepsilon,1]$上, $1+\sin x\geqslant 1+\sin\varepsilon>1$,

$$0<\int_{\varepsilon}^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}\leqslant\int_{\varepsilon}^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin\varepsilon)^n}<\frac{1}{(1+\sin\varepsilon)^n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\exists N>0$, 当 $n>N$ 时 $0<\int_{\varepsilon}^1\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}<\varepsilon$, 即 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

由 $(1+\sin x)^n<(1+\sin x)^{n+1}$, u_n 递减, 因此 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛.

再由$1+\sin x \leqslant 1+x\ (x\in[0,1])$, 推出

$$u_n \geqslant \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^n} = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) > \frac{1}{2(n-1)}\ (n\geqslant 2)$$

其中 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散, 推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散, 因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛.

注 本题可直接利用不等式 $x\geqslant \sin x\geqslant \frac{2}{\pi}$,得

$$\frac{1}{(1+x)^n} \leqslant \frac{1}{(1+\sin x)^n} \leqslant \frac{1}{\left(1+\frac{2}{\pi}x\right)^n}$$

两边积分直接得到 $u_n \sim \frac{1}{n-1}$, 因此极限为零, 单调减, 条件收敛.

但第一种做法具有一般性

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 14 讨论$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right)$ 在$(0,1)$ 上收敛性、一致收敛性及和函数的连续性.

解 对$x \in (0,1)$, $\ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right) \sim \frac{1}{1+n^2x} \sim \frac{1}{n^2x}$ 因此收敛.但是

$$\sup_{0<x<1} \ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right) \geqslant \ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right)\Big|_{x=\frac{1}{n^2}} = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \nrightarrow 0$$

所以在$(0,1)$内不一致收敛.

$\forall\delta > 0$, 对 $x \in [\delta,1)$,

$$0 < \ln\left(1+\frac{1}{1+n^2x}\right) < \frac{1}{1+n^2x} < \frac{1}{n^2\delta},$$

由Weierstrass判别法, 级数在$[\delta,1)$ 内一致收敛, 即在$(0,1)$上内闭一致收敛. 所以级数在$(0,1)$ 上连续.

返回 全屏 关闭 退出

例 15 将 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 在$x_0=-4$的Taylor 幂级数, 并指出展开式成立范围.

解 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{2+x}=\dfrac{1}{2\left(1-\dfrac{x+4}{2}\right)}-\dfrac{1}{3\left(1-\dfrac{x+4}{3}\right)}$ 所以

$$f(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

上式两个幂级数收敛区域分别为$\left|\dfrac{x+4}{2}\right|<1$, $\left|\dfrac{x+4}{3}\right|<1$, 即

$$-6<x<-2 \text{ 和 } -7<x<-1$$

公共部分为$(-6-2)$.

||◀ ▶|| ◀ ▶ 返回 全屏 关闭 退出

例 16 求$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$ 的收敛区域以及和函数$S(x)$.

解 因为幂级数在收敛半径内收敛绝对收敛, 因此用正项级数判别法得

$$\left|\frac{(-1)^n}{(n+1)(2n+1)}x^{2n+2}\right|\Big/\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}\right|=\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)}x^2\to x^2,$$

收敛半径$R=1$, 当 $x=\pm 1$ 时也收敛, 因此收敛区域为 $[-1,1]$.求导得

$$S'(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\ S''(x)=2\sum_{n=1}^{+\infty}(-x^2)^{n-1}=\frac{2}{1+x^2},\ (|x|<1)$$

对$x\in(-1,1)$,在$[0,x]$上$S(0)=0$, $S'(0)=0$, 因此 $S'(x)=2\arctan x$,

$$S(x)=\int_0^x 2\arctan t dt=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{tdt}{1+t^2}=2x\arctan x-\ln(1+x^2)$$

其中$x\in(-1,1)$. 因为和函数在$[-1,1]$ 上连续, 所以

$$S(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}=2x\arctan x-\ln(1+x^2)\ x\in[-1,1]$$

例 17 求$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛区域, 并求和函数.

解: $\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\frac{1}{(n+1)\left(1+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}\to 1\ (n\to\infty)$

当 $x=\pm 1$通项极限不为零, 因此发散, 收敛区域为 $(-1,1)$. 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1),\ \text{系数}\ \tilde{a}_n=\frac{1}{n}\ (n\geqslant 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x},\quad x\in(-1,1),\ \text{系数}\ \tilde{b}_n=1\ (n\geqslant 0)$$

利用级数乘法, $c_n=\sum_{k=1}^{n}\tilde{a}_k\tilde{b}_{n-k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, 所以在$(-1,1)$ 内

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=-\frac{\ln(1-x)}{1-x}.$$


谢谢