

# 实验四：IIR 数字滤波器设计及软件实现

## 一、引言

IIR 数字滤波器，是指输入、输出均为数字信号，通过数值运算处理改变输入信号所含频率成分的相对比例，或者滤除某些频率成分的数字器件或程序。

按照不同的分类方法，可以分成经典滤波器和现代滤波器两大类，经典滤波器的特点是指在输入信号的有用频率成分和希望滤除信号的频率成分占有不同的频带的情况下滤出纯净信号，而现代滤波器的特点则是在输入信号的有用频率成分和希望滤除信号的频率成分存在混叠的情况下最大限度地恢复信号。

按照滤波特性及滤波频带范围来分类，又可以分为低通、高通、带通和带阻等滤波器，他们的理想幅频特性是还原相应频带的信号，消除其他频带的信号。因为理想滤波器的单位脉冲响应均是非因果且无限长的，这些理想滤波器是不可能实现的，又因为考虑到复杂性与成本问题，我们只能按照某些准则去逼近理想滤波器，允许通带不是完全水平，且阻带不是绝对衰减到零，在通带和阻带之间还存在着幅频特性单调下降的过渡带。

与 FIR 滤波器可以直接从频域设计频率响应然后通过傅里叶变换得到时域滤波器不同，IIR 滤波器无法从时域直接设计响应，而是通过经典模拟滤波器转换而来。几种经典模拟滤波器分别是巴特沃兹滤波器、切比雪夫 I 型和 II 型滤波器、椭圆滤波器。而这几种滤波器都是有参考表的，可以根据滤波器阶数直接确定模拟滤波器系数。

以上所得的模拟滤波器都是低通形式的，因此要采用一些方法将其转换为带通、带阻和高通滤波器。将上述转换后的不同形式的模拟滤波器转换成数字滤波器。转换的方法有冲激不变法、双线性变换法，最常用的是双线性变换法。

本文借助 MATLAB 信号处理工具箱，通过对三路 DSB 信号分离出目标调制信号，熟悉用双线性变换法设计 IIR 数字滤波器的原理与方法，学会调用 MATLAB 信号处理工具箱中滤波器设计函数，设计各种 IIR 数字滤波器，学会根据滤波需求确定滤波器指标参数，掌握 IIR 数字滤波器的 MATLAB 实现方法，通过观察滤波器输入输出信号的时域波形及其频谱，建立数字滤波的概念。

## 二、方法

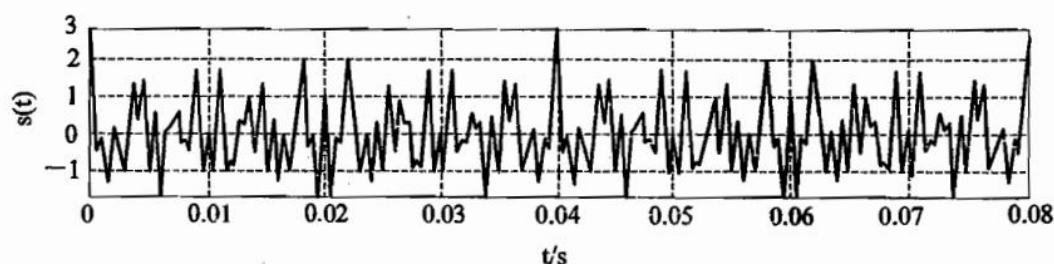
设计 IIR 数字滤波器一般采用间接法（脉冲响应不变法和双线性变换法），应用最广泛的是双线性变换法。基本设计过程是：①先将给定的数字滤波器的指标转换成过渡模拟

滤波器的指标；②设计过渡模拟滤波器；③将过渡模拟滤波器系统函数转换成数字滤波器的系统函数。MATLAB 信号处理工具箱中的各种 IIR 数字滤波器设计函数都是采用双线性变换法。第六章介绍的滤波器设计函数 `butter`、`cheby1`、`cheby2` 和 `ellip` 可以分别被调用来直接设计巴特沃斯、切比雪夫 1、切比雪夫 2 和椭圆模拟和数字滤波器，本实验要求读者调用如上函数直接设计 IIR 数字滤波器。

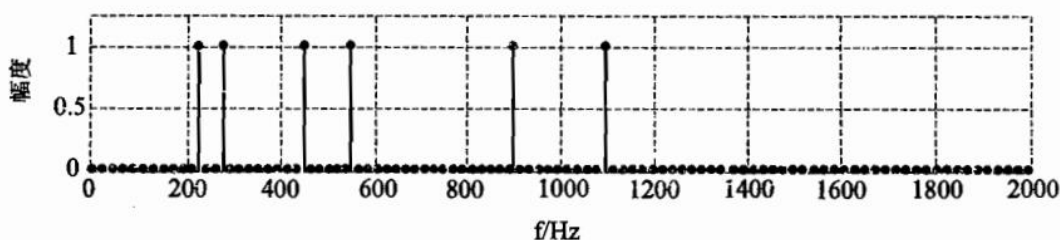
本实验的数字滤波器的 MATLAB 实现是指调用 MATLAB 信号处理工具箱函数 `filter` 对给定的输入信号  $x(n)$  进行滤波，得到滤波后的输出信号  $y(n)$ 。

### 三、实验内容及步骤

(1) 调用信号产生函数 `mstg` 产生由三路抑制载波调幅信号相加构成的复合信号  $st$ ，该函数还会自动绘图显示  $st$  的时域波形和幅频特性曲线，如图所示。由图可见，三路信号时域混叠无法在时域分离。但频域是分离的，所以可以通过滤波的方法在频域分离，这就是本实验的目的。



(a)  $s(t)$  的波形



(b)  $s(t)$  的频谱

(2) 要求将  $st$  中三路调幅信号分离，通过观察  $st$  的幅频特性曲线，分别确定可以分离  $st$  中三路抑制载波单频调幅信号的三个滤波器（低通滤波器、带通滤波器、高通滤波器）的通带截止频率和阻带截止频率。要求滤波器的通带最大衰减为 0.1dB, 阻带最小衰减为 60dB。抑制载波单频调幅信号的数学表示式为：

$$s(t) = \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_c t) = \frac{1}{2} [\cos(2\pi(f_c - f_0)t) + \cos(2\pi(f_c + f_0)t)]$$

其中,  $\cos(2\pi f_c t)$  称为载波,  $f_c$  为载波频率,  $\cos(2\pi f_0 t)$  称为单频调制信号,  $f_0$  为调制正弦波信号频率, 且满足  $f_c > f_0$ 。由上式可见, 所谓抑制载波单频调幅信号, 就是 2 个正弦信号相乘, 它有 2 个频率成分: 和频  $f_c + f_0$  和差频  $f_c - f_0$ , 这 2 个频率成分关于载波频率  $f_c$  对称。所以, 1 路抑制载波单频调幅信号的频谱图是关于载波频率  $f_c$  对称的 2 根谱线, 其中没有载频成分, 故取名为抑制载波单频调幅信号。容易看出, 图中三路调幅信号的载波频率分别为 250Hz、500Hz、1000Hz。如果调制信号  $m(t)$  具有带限连续频谱, 无直流成分, 则  $s(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)$  就是一般的抑制载波调幅信号。其频谱图是关于载波频率  $f_c$  对称的 2 个边带 (上下边带), 在专业课通信原理中称为双边带抑制载波 (DSB-SC) 调幅信号, 简称双边带 (DSB) 信号。如果调制信号  $m(t)$  有直流成分, 则  $s(t) = m(t)\cos(2\pi f_c t)$  就是一般的双边带调幅信号。其频谱图是关于载波频率  $f_c$  对称的 2 个边带 (上下边带), 并包含载频成分。

(3) 编程序调用 MATLAB 滤波器设计函数 `ellipord` 和 `ellip` 分别设计这三个椭圆滤波器, 并绘图显示其幅频响应特性曲线。

(4) 调用滤波器实现函数 `filter`, 用三个滤波器分别对信号产生函数 `mstg` 产生的信号 `st` 进行滤波, 分离出 `st` 中的三路不同载波频率的调幅信号  $y_1(n)$ 、 $y_2(n)$  和  $y_3(n)$ , 并绘图显示  $y_1(n)$ 、 $y_2(n)$  和  $y_3(n)$  时域波形, 观察分离效果。

## 四、实验结果及结论分析

观察 `st` 幅频特性图可知, 三路调幅信号的载波频率分别为 250Hz、500Hz、1000Hz。带宽 (也可以由信号产生函数 `mstg` 清单看出) 分别为 50Hz、100Hz、200Hz。所以, 分离混合信号 `st` 中三路抑制载波单频调幅信号的三个滤波器 (低通滤波器、带通滤波器、高通滤波器) 的指标参数选取如下:

1. 对载波频率为 250Hz 的调幅信号, 可以用低通滤波器分离, 其指标为  
通带截止频率  $f_p=280\text{Hz}$ , 通带最大衰减  $\alpha_p=0.1\text{dB}$ ;  
阻带截止频率  $f_s=450\text{Hz}$ , 阻带最小衰减  $\alpha_s=60\text{dB}$ 。
2. 对载波频率为 500Hz 的调幅信号, 可以用带通滤波器分离, 其指标为

通带截止频率  $f_{pl}=440\text{Hz}$ ,  $f_{pu}=560\text{Hz}$ , 通带最大衰减  $\alpha_p=0.1\text{dB}$ ;

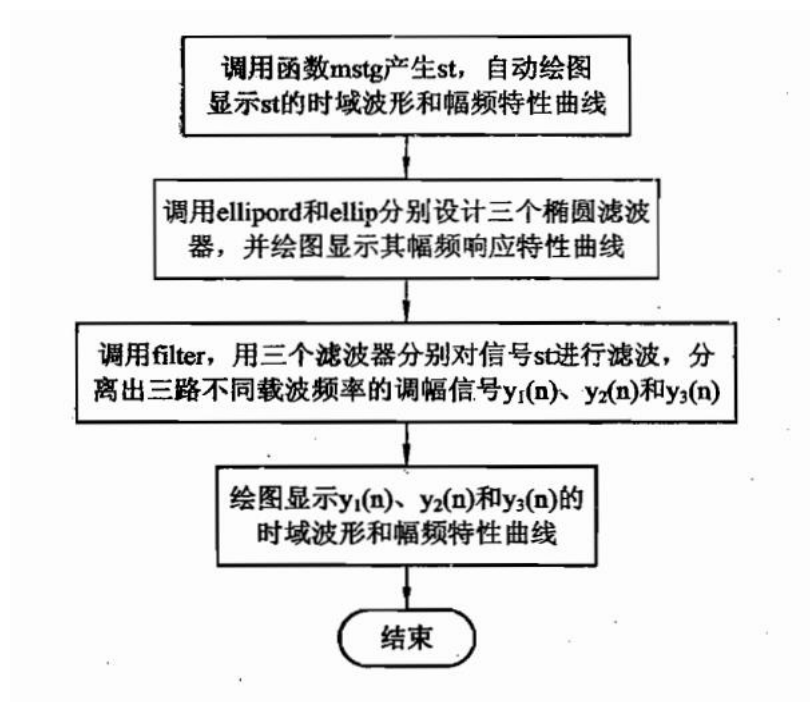
阻带截止频率  $f_{si}=275\text{Hz}$ ,  $f_{su}=900\text{Hz}$ , 阻带最小衰减  $\alpha_s=60\text{dB}$ 。

3.对载波频率为  $1000\text{Hz}$  的调幅信号, 可以用高通滤波器分离, 其指标为

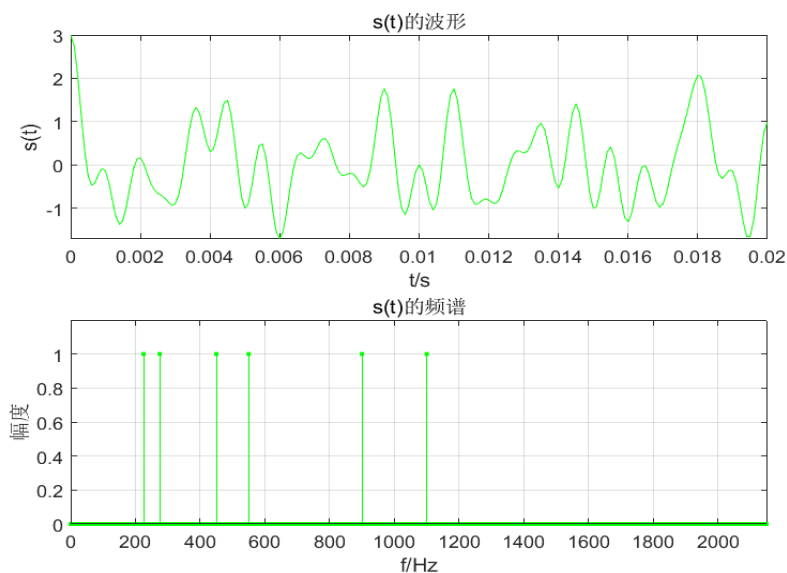
通带截止频率  $f_p=890\text{Hz}$ , 通带最大衰减  $\alpha_p=0.1\text{dB}$ ;

阻带截止频率  $f_s=550\text{Hz}$ , 阻带最小衰减  $\alpha_s=60\text{dB}$ 。

为了使滤波器阶数尽可能低, 每个滤波器的边界频率选择原则是尽量使滤波器过渡带宽尽可能宽。与信号产生函数 `mstg` 相同, 采样频率  $F_s=10\text{kHz}$ 。阶数相同时, 椭圆滤波器可以获得对理想滤波器幅频响应的最好逼近, 为了滤波器阶数最低, 选用椭圆滤波器。程序框图如下:



1. 题中所给定信号  $s(t)$  及其频谱:

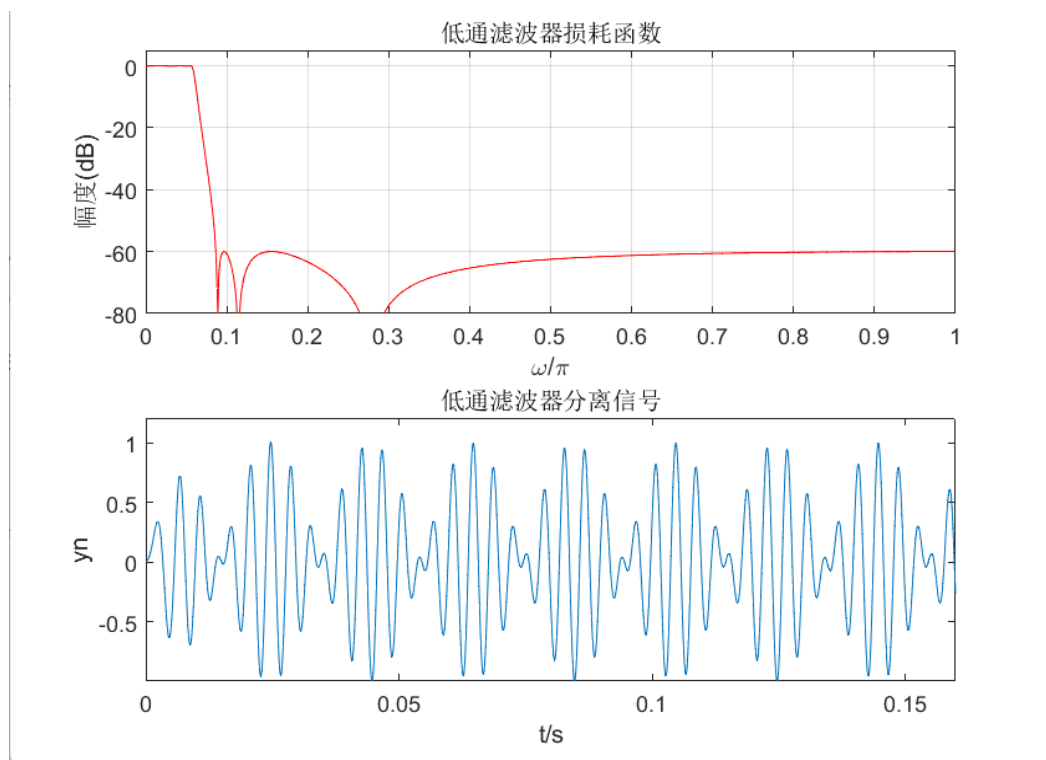


信号  $s_t$  的时域波形和频谱如图所示，这与题中所给波形一致。 $S_t$  包含三路 DSB 信号

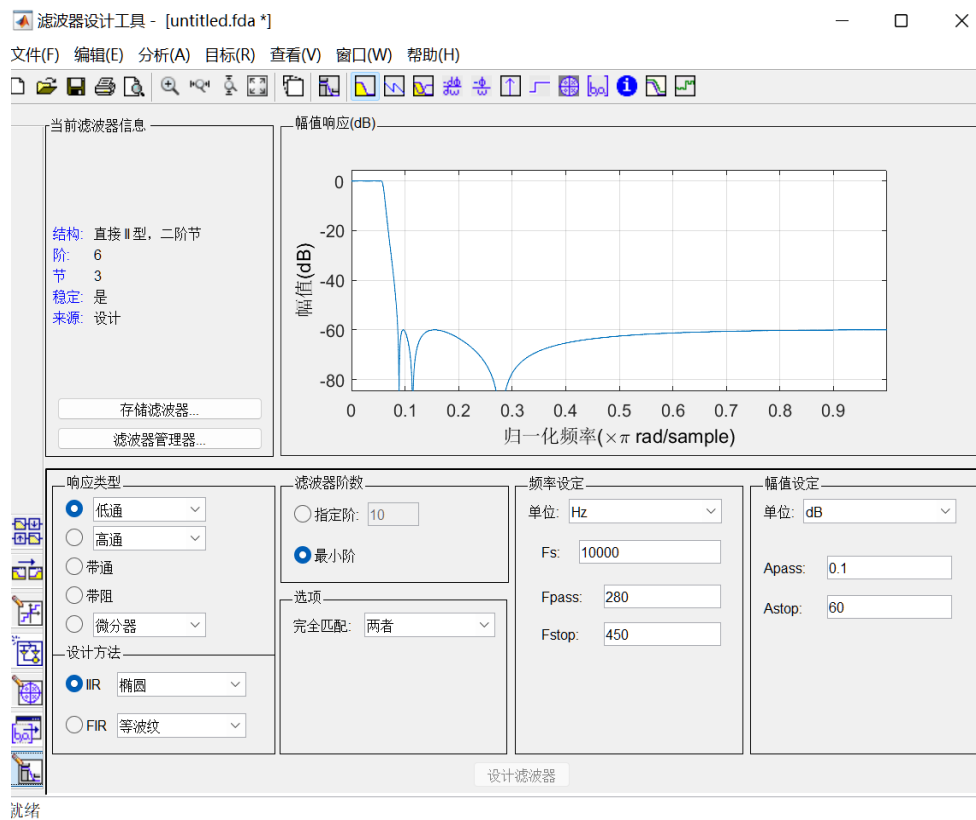
$$\cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 1000t) + \cos(2\pi 50t)\cos(2\pi 500t) + \cos(2\pi 25t)\cos(2\pi 250t)$$

它包含三对频率和差的分量，分别是 900Hz, 1100Hz, 450Hz, 550Hz, 225Hz, 275Hz，从  $s_t$  的频谱结果也可以很好地看出这一点，要分离的调制信号的调制频率分别为 100Hz, 500Hz, 25Hz。分别使用椭圆带通、高通、低通滤波器来分离出这三个信号，其中三种滤波器的技术指标选取前边已经给出。

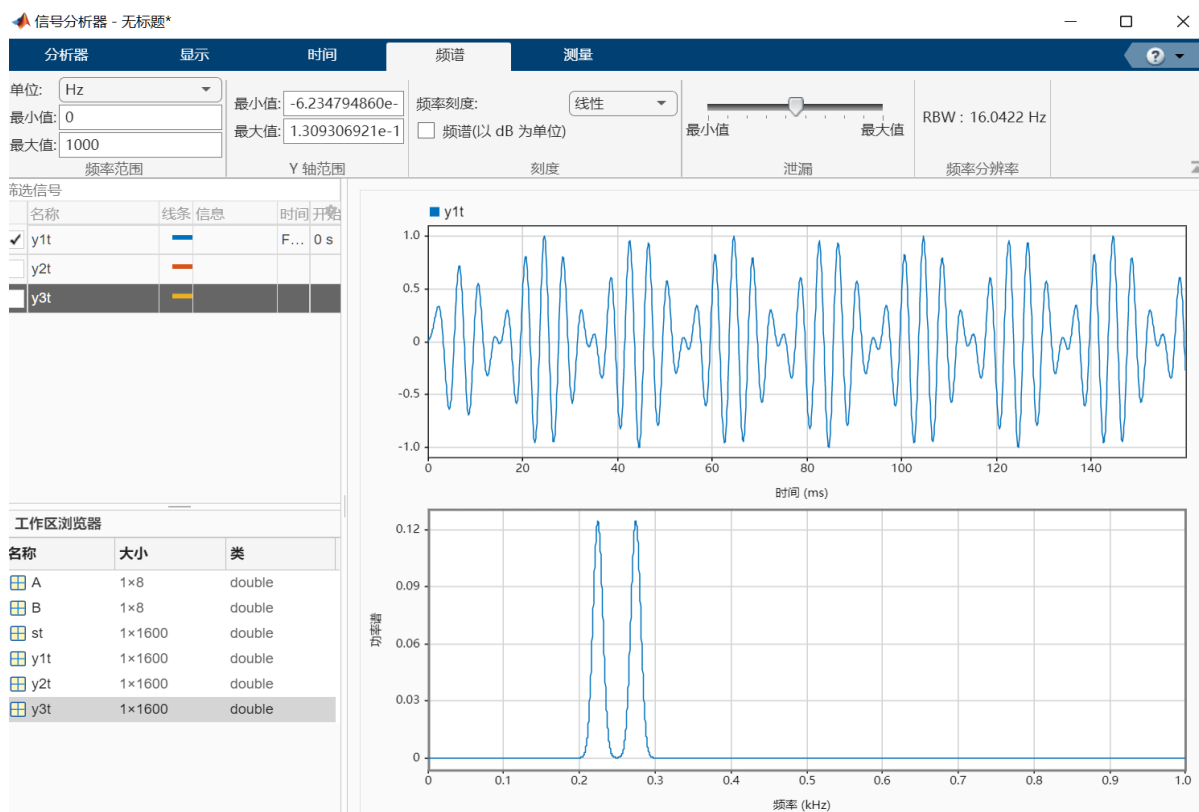
2. 实验中得到的椭圆低通滤波器损耗函数及分离出的信号  $y_{1n}$  如图所示：



在 MATLAB 中调用 `ellipord` 函数计算椭圆滤波器阶数  $N$  和通带截止频率  $\omega_p$ ，再调用 `ellip` 函数计算椭圆数字滤波器系统函数系数向量  $B$  和  $A$ ，最后通过 `filter` 函数对原始信号  $s_t$  进行滤波处理都得到期望的信号  $y_{1t}$ 。通带截止频率  $f_p=280\text{Hz}$ ，阻带截止频率  $f_s=450\text{Hz}$ ，即通带截止频率在  $0.056\pi$  附近，阻带截止频率在  $0.09\pi$  附近，满足设计要求。

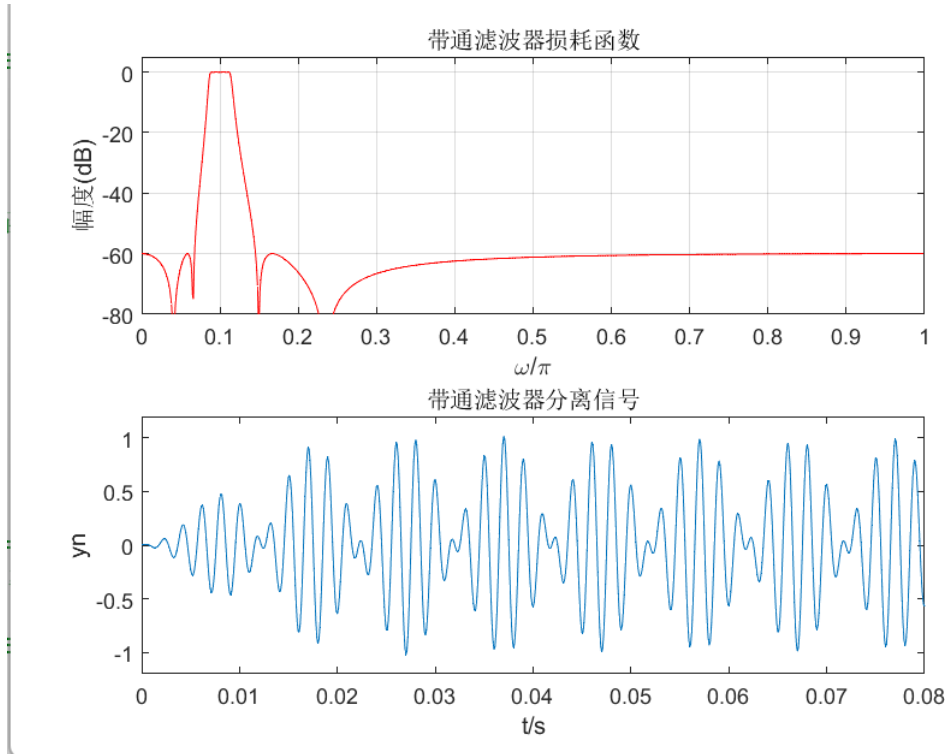


我们在 MATLAB 中调用 Filter Designer Tool 进行椭圆滤波器设计，输入设计指标得到直接 II 型的三节椭圆低通滤波器，与实验中调用函数计算得到的滤波器损耗函数曲线类似。对分离出的第三路调幅信号做频谱分析

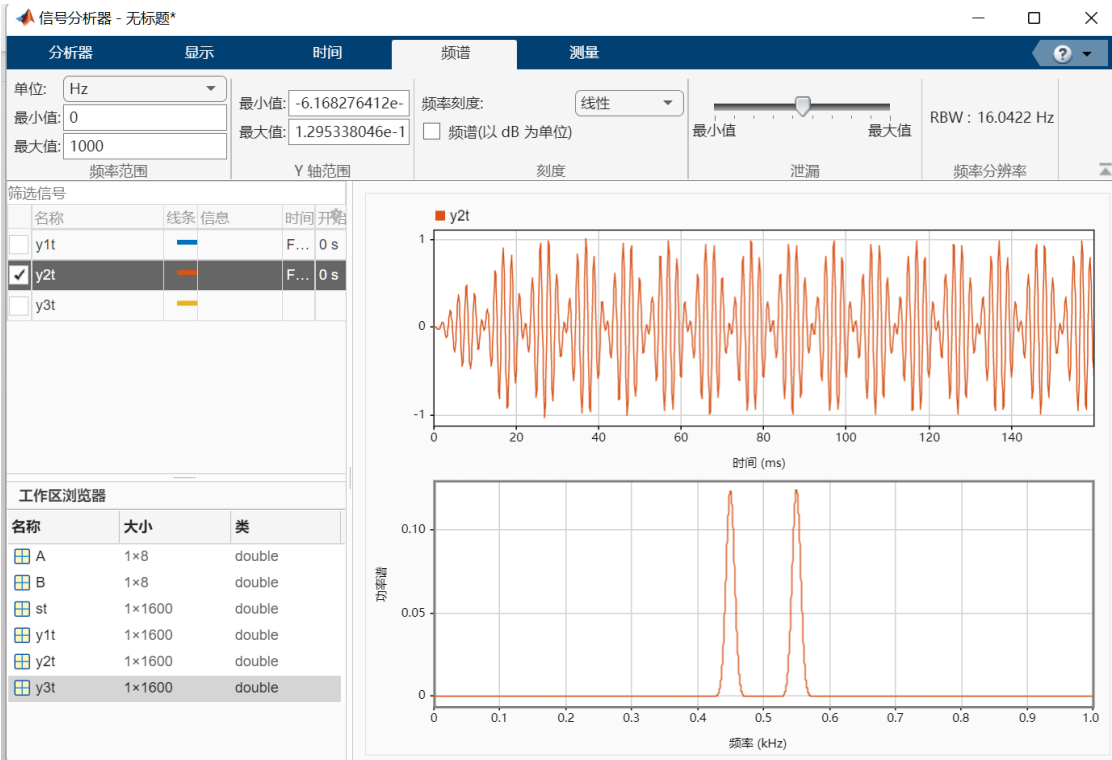


从谱分析中可以看出，y1t 集中在以载频 250Hz 为中心的 225Hz 分量和 275Hz 分量，较好地分离出了低频的第三路调幅信号，滤波器设计效果较好。

3. 实验中得到的椭圆带通滤波器损耗函数及分离出的信号 y2n 如图所示：

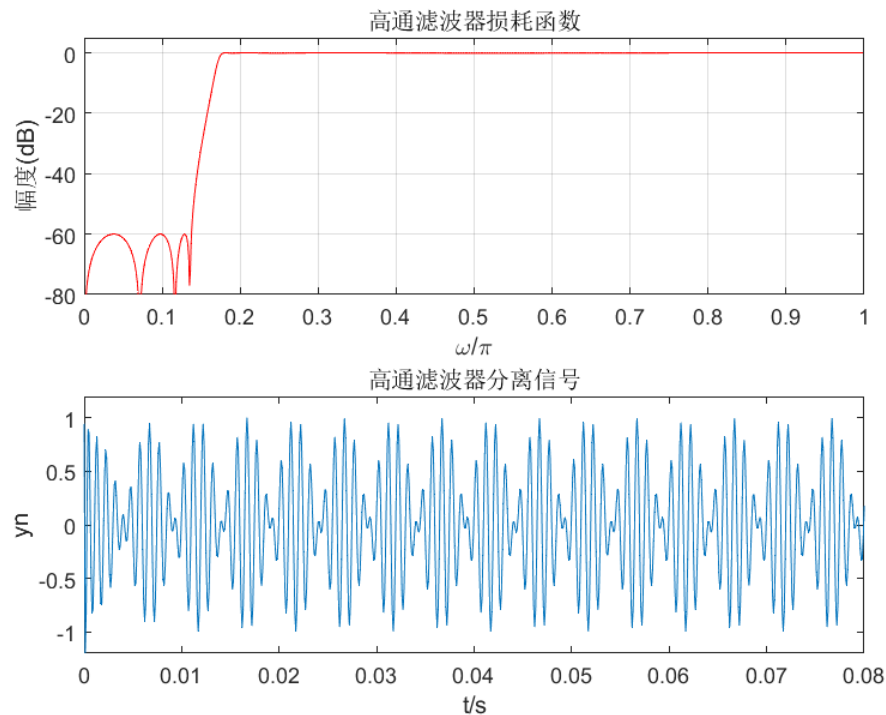


带通滤波器参量：通带上下截至频率分别为 560Hz 和 440Hz，阻带上下截至频率分别为 900Hz 和 275Hz, 椭圆带通滤波器的设计符合预期要求，同样在 MATLAB 中调用信号分析工具箱对分离出的第二路调幅信号做频谱分析：

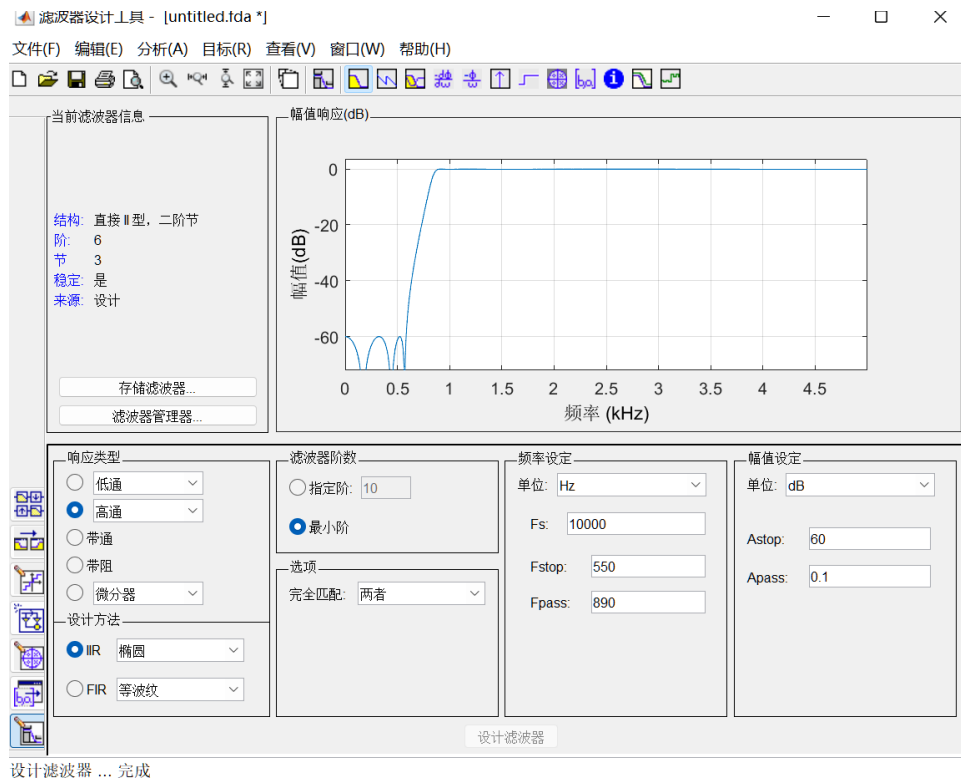


分离出的信号  $y_{2t}$  以载频 500Hz 为中心，在 450Hz 和 550Hz 附近能量占比最大，符合第二路信号的频谱特点，设计的椭圆带通滤波器很好地完成了第二路中频段调频信号的分离，其他频率段干扰较小。

3. 实验中得到的椭圆高通滤波器损耗函数及分离出的信号  $y_{3n}$  如图所示：

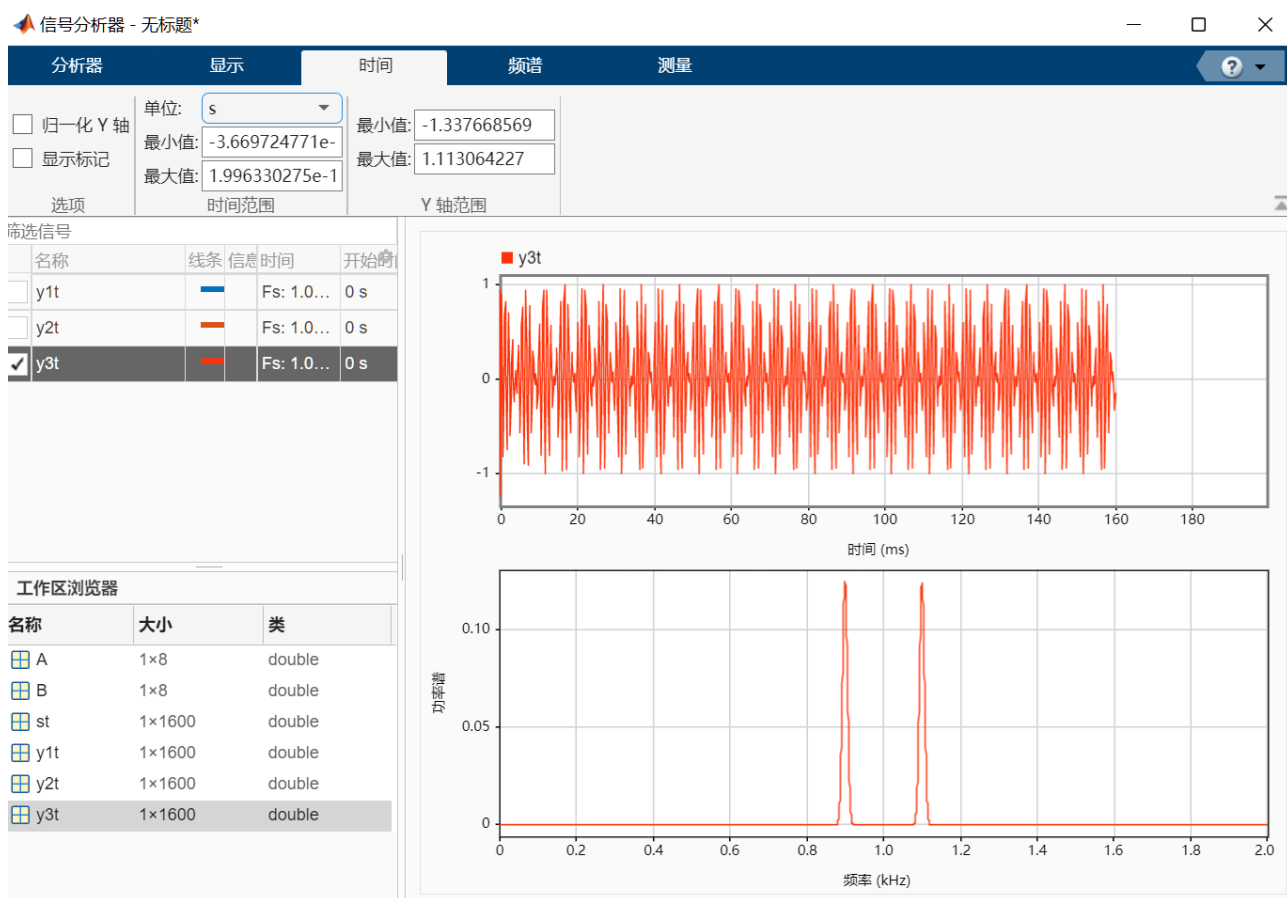


高通滤波器参数：通带截止频率 890Hz，阻带截止频率 550Hz。调用 Filter Designer 设计的滤波器如下：





使用 Filter Designer 得到六阶直接 II 型椭圆高通滤波器，我们使用 MATLAB 的函数计算得到了七阶椭圆高通滤波器，通带和阻带截止频率满足要求，对分离出的信号 y3t 分析如下：



分离出的信号 y3t 以载频 1000Hz 为中心，信号能量集中在 900Hz 和 1100Hz，是第一路 DSB 信号  $\cos(2\pi 100t)\cos(2\pi 1000t)$  的频谱结果，该椭圆高通滤波器很好的完成了高频段 900Hz 和 1100Hz 信号的分离，滤波效果较好。

## 五、讨论

(1) 请阅读信号产生函数 `mstg`，确定三路调幅信号的载波频率和调制信号频率。

第一路 DSB 信号：载波频率 1000Hz，调制信号频率 100Hz。

第二路 DSB 信号：载波频率 500Hz，调制信号频率 50Hz。

第三路 DSB 信号：载波频率 250Hz，调制信号频率 25Hz。

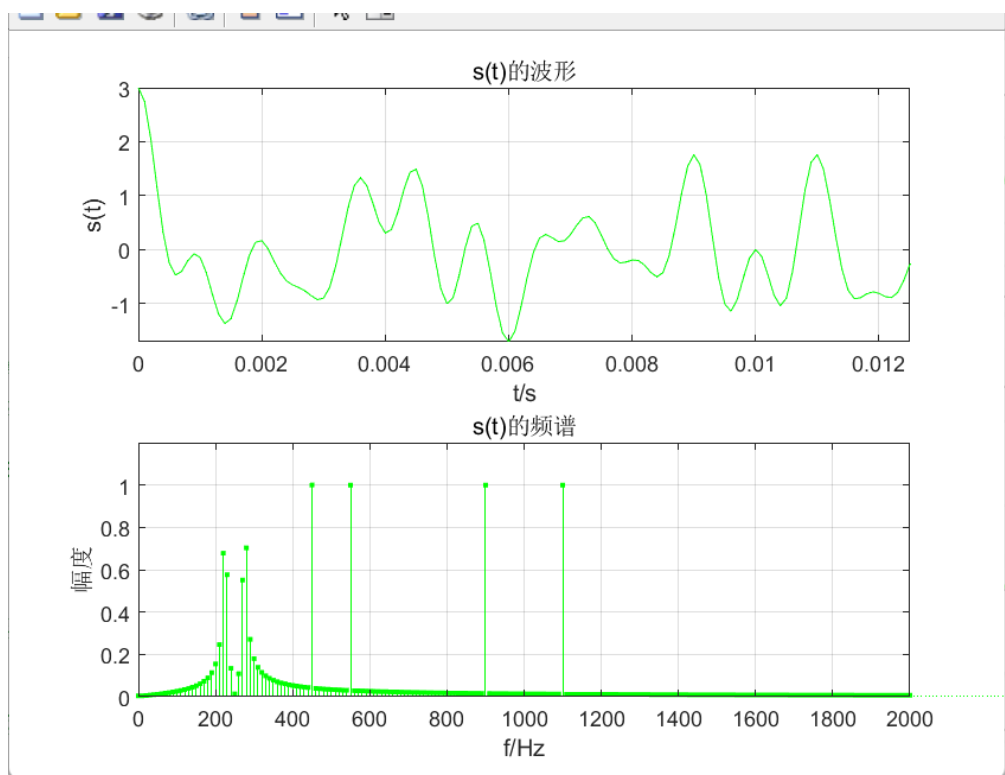
(2) 信号产生函数 `mstg` 中采样点数  $N=1600$ ，对 `st` 进行  $N$  点 FFT 可以得到 6 根理想谱线。如果取  $N=1000$ ，可否得到 6 根理想谱线？为什么？ $N=2000$  呢？请改变函数 `mstg` 中采样点数  $N$  的值，观察频谱图验证你的判断是否正确。

按照 FFT 对信号谱分析的理论，周期信号的频谱是离散谱，只有用整数倍周期的长度作 FFT，得到的离散谱才能代表周期信号的频谱，否则将在频域上观测到频谱泄露现象，严重时将无法分辨出原有信号的频率成分。

对于三路 DSB 信号叠加的周期信号 `st` 采样后的离散周期信号成分：

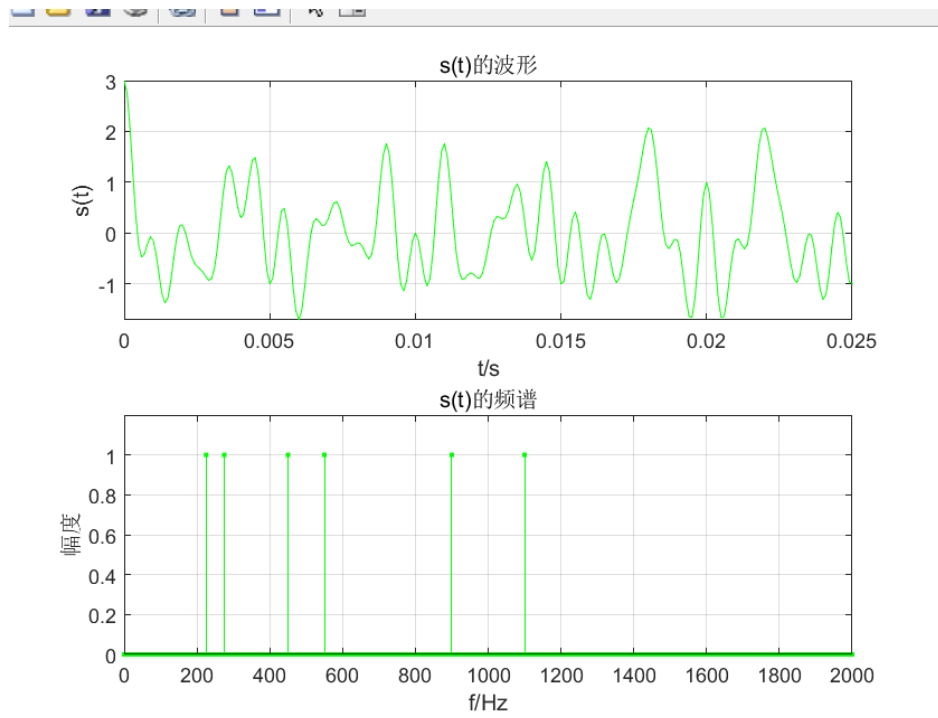
$\cos\left(\frac{2\pi}{100}n\right)\cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right)$ 、 $\cos\left(\frac{2\pi}{200}n\right)\cos\left(\frac{2\pi}{20}n\right)$ 、 $\cos\left(\frac{2\pi}{400}n\right)\cos\left(\frac{2\pi}{40}n\right)$ 。其最小周期点数  $N=400$ ，当采样点数或者做 FFT 的点数为 400 的整数倍时，才能得到正确的频谱反映 `st` 信号的频率成分。

1.  $N=1000$  时 `st` 的时域波形及频谱如下：



由图可见，当采样点数  $N=1000$  时，已不满足整数倍周期的要求，此时还能分辨出  $900\text{Hz}$ ， $1100\text{Hz}$ ， $450\text{Hz}$ ， $550\text{Hz}$  的频率成分，但  $100\text{Hz}$  附近频谱泄露现象以及十分明显，引起谱间串扰，不容易分辨出原有的频谱成分。

2.  $N=2000$  时  $s(t)$  的时域波形及频谱如下：



由图可见， $N=2000$  是周期的 5 倍，此时域波形与  $N=1600$  时基本相同，得到的频谱结果与  $N=1600$  点时完全一致，没有可观测的频谱泄露现象出现，可以分辨出完全正确的  $s(t)$  原信号的频率成分。

(3) 修改信号产生函数 `mstg`，给每路调幅信号加入载波成分，产生调幅 (AM) 信号，重复本实验，观察 AM 信号与抑制载波调幅信号的时域波形及其频谱的差别。

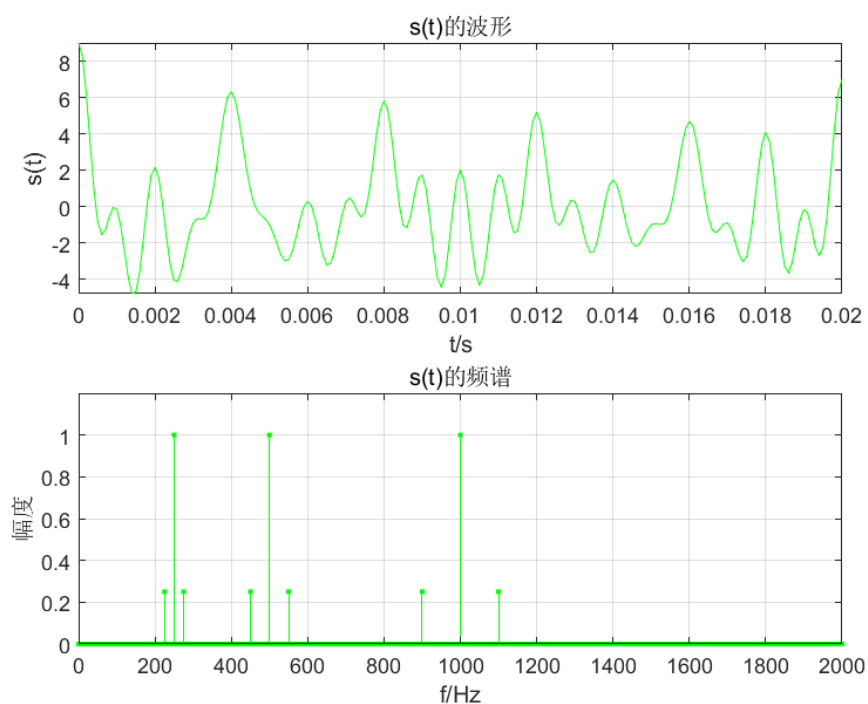
对三路 DSB 信号的调制信号都加上幅度为 2 的直流偏置，如图：

$$S_{AM}(t) = [A_0 + m(t)]\cos(\omega_c t)$$

```
xt1=(cos(2*pi*fm1*t)+2).*cos(2*pi*fc1*t);%产生第1路调幅信号
xt2=(cos(2*pi*fm2*t)+2).*cos(2*pi*fc2*t);%产生第2路调幅信号
xt3=(cos(2*pi*fm3*t)+2).*cos(2*pi*fc3*t);%产生第3路调幅信号
st=xt1+xt2+xt3;%三路调幅信号相加
```

按照通信原理的理论，这将产生三路 AM 信号， $s(t)$  信号将变为三路调幅信号的叠加，其信号频谱上将出现载频信号的频谱。

新的  $s(t)$  信号时域波形及其频谱如下图所示：



从图中可以看出，相较于 DSB 信号的频谱，AM 信号的频谱图中出现了三个载频成分，即 1000Hz，500Hz，250Hz 处的冲激。其时域信号被添加了直流偏置，整体信号被抬升到直流基准。

## 六、附录

主函数代码 Part1	Part2
<p>此代码中包含三个自定义函数在下页附录中给出</p> <pre> clear;clc Fs=10000; T=1/Fs;%采样频率 st=mstg; %低通滤波器设计与实现 fp=280; fs=450; wp=2*fp/Fs; ws=2*fs/Fs; rp=0.1;rs=60;%OF 指标(低通滤波器的通、阻带边界频) %调用 ellipord 计算椭圆 DF; 阶数 N 和通带截止频率 wp [N,wp]=ellipord(wp,ws,rp,rs); %调用 ellip 计算椭圆带通 DF 系统函数系数向量 B 和 A [B,A]=ellip(N,rp,rs,wp); y1t=filter(B,A,st);%滤波器软件实现 %低通滤波器设计与实现绘图部分 figure;subplot(2,1,1); myplot(B,A);%调用绘图函数 myplot 绘制损耗函数曲线 title("低通滤波器损耗函数") %yt='y_1(t)'; subplot(2,1,2);tplot(y1t,T);%调用绘图函数 tplot 绘制滤波器输出波形 title("低通滤波器分离信号")  %带通滤波器设计与实现 fpl=440;fpu=560;fsl=275;fsu=900; wp=[2*fpl/Fs,2*fpu/Fs];ws=[2*fsl/Fs,2*fsu/Fs];rp=0.1;rs=60; %调用 ellipord 计算椭圆 DF 阶数 N 和通带截止频率 wp [N,wp]=ellipord(wp,ws,rp,rs); </pre>	<pre> %调用 ellip 计算椭圆带通 DF 系统函数系数向量 B 和 A [B,A]=ellip(N,rp,rs,wp); y2t=filter(B,A,st);%滤波器软件实现 figure subplot(2,1,1) myplot(B,A);%调用绘图函数 myplot 绘制损耗函数曲线 title("带通滤波器损耗函数") yt='y_2(t)'; subplot(2,1,2) tplot(y2t,T) title("带通滤波器分离信号") axis([0,0.08,-1.2,1.2])  %高通滤波器设计与实现 fp=890;fs=600; wp=2*fp/Fs;ws=2*fs/Fs;rp=0.1;rs=60;%OF 指标 %调用 ellipord 计算椭圆 DF 阶数 N 和通带截止频率 wp [N,wp]=ellipord(wp,ws,rp,rs); %调用 ellip 计算椭圆带通 DF 系统函数系数向量 B 和 A [B,A]=ellip(N,rp,rs,wp,'high'); y3t=filter(B,A,st);%滤波器软件实现 figure subplot(2,1,1) myplot(B,A);%调用绘图函数 myplot 绘制损耗函数曲线 title("高通滤波器损耗函数") yt='y_3(t)'; subplot(2,1,2) tplot(y3t,T) title("高通滤波器分离信号") axis([0,0.08,-1.2,1.2]) </pre>

函数代码 Part1	Part2
<pre> function tplot(xn,T) n=0:length(xn)-1; t=n*T; plot(t,xn); xlabel('t/s'); ylabel('yn'); axis([0,t(end),min(xn),1.2*max(xn)]); end  function myplot(B,A) [H,W]=freqz(B,A,1000); m=abs(H); plot(W/pi,20*log10(m/max(m)),'r'); grid on; xlabel('\omega/\pi'); ylabel('幅度(dB)') axis([0,1,-80,5]); %title('损耗函数曲线'); end </pre>	<pre> function st=mstg %产生信号序列向量 st,并显示 st 的时域波形和频谱 %st=mstg 返回三路调幅信号相加形成的混合信号，长 度 N=1600 N=1600; Fs=10000;T=1/Fs;Tp=N*T;%采样频率 Fs=10kHz, Tp 为采样时间 t=0:T:(N-1)*T;k=0:N-1;f=k/Tp; fc1=Fs/10;%第 1 路调幅信号的载波频率 fc1=1000Hz, fm1=fc1/10;%第 1 路调幅信号的调制信号频率 fm1=100Hz fc2=Fs/20;%第 2 路调幅信号的载波频率 fc2=500Hz fm2=fc2/10;%第 2 路调幅信号的调制信号频率 fm2=50Hz fc3=Fs/40;%第 3 路调幅信号的载波频率 fc3=250Hz, fm3=fc3/10;%第 3 路调幅信号的调制信号频率 fm3=25Hz xt1=cos(2*pi*fm1*t).*cos(2*pi*fc1*t);%产生第 1 路调 幅信号 xt2=cos(2*pi*fm2*t).*cos(2*pi*fc2*t);%产生第 2 路调 幅信号 xt3=cos(2*pi*fm3*t).*cos(2*pi*fc3*t);%产生第 3 路调 幅信号 st=xt1+xt2+xt3;%三路调幅信号相加 fxt=fft(st,N);%计算信号 st 的频谱 subplot(2,1,1) plot(t,st,'g'); grid on; xlabel('t/s');ylabel('s(t)'); axis([0,Tp/8,min(st),max(st)]) title('s(t)的波形') subplot(2,1,2) stem(f,abs(fxt)/max(abs(fxt)),'.g'); grid on title('s(t)的频谱') axis([0,Fs/5,0,1.2]); xlabel('f/Hz');ylabel('幅度') end </pre>