

# 实验二：时域采样与频域采样

## 一、引言

时域采样理论与频域采样理论是数字信号处理中的重要理论。要求掌握模拟信号采样前后频谱的变化，以及如何选择采样频率才能使采样后的信号不丢失信息；要求掌握频域采样会引起时域周期化的概念，以及频率域采样定理及其对频域采样点数选择的指导作用。

在实际工程项目中采样是将一个信号（即时间或空间上的连续函数）转换成一个数值序列（即时间或空间上的离散函数）。而在采样定理指出，如果信号是带限的，并且采样频率高于信号带宽的一倍，那么，原来的连续信号可以从采样样本中完全重建出来，带限信号变换的快慢受到它的最高频率分量的限制，也就是说它的离散时刻采样表现信号细节的能力是有限的。

采样定理是指，如果信号带宽小于采样频率（即奈奎斯特频率的二分之一），那么此时这些离散的采样点能够完“表示原信号，高于或处于奈奎斯特频率的频率分量会导致混叠现象。大多数应用都要求避免混叠，混叠问题的严重程度与这些混叠频率分量的相对强度有关。如果不能满足上述采样条件，采样后信号的频率就会重叠，即高于采样频率一半的频率成分将被重建成低于采样频率一半的信号。这种频谱的重叠导致的失真称为混叠，而重建出来的信号称为原信号的混叠替身，因为这两个信号有同样的样本值。一个频率正好是采样频率一半的弦波信号，通常会混叠成另一相同频率的波弦信号，但它的相位和幅度改变了。

本文借助 MATLAB 信号处理工具箱的智能函数 FFT 来计算离散傅里叶变换，通过对信号不同频率的采样来观察采样前后信号的混叠情况，在时域和频域上分别进行采样定理的验证，理解采样前后的频谱变化。

## 二、方法

时域采样定理的要点是：

(1)对模拟信号  $x_a(t)$  以  $T$  为周期进行时域等间隔理想采样，形成的采样信号的频谱  $X(j\Omega)$  是原模拟信号频谱  $X_a(j\Omega)$  以采样角频率  $\Omega_s = 2\pi / T_s$  为周期进行周期延拓，公式为：

$$\hat{X}_s(j\Omega) = FT[\hat{x}_s(t)] = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a(j\Omega - jn\Omega_s)$$

采样频率  $\Omega_s$  必须大于等于模拟信号最高频率的两倍以上，才能使采样信号的频谱不产生频谱混叠。

利用计算机计算上式并不方便，下面我们导出另外一个公式，以便使用计算机上进行实验。理想采样信号  $\hat{x}_a(t)$  和模拟信号  $x_a(t)$  之间的关系为：

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

对上式进行傅立叶变换，得到：

$$\begin{aligned} \hat{X}_a(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_a(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)] e^{-j\Omega t} dt \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \delta(t - nT) e^{-j\Omega t} dt \end{aligned}$$

在上式的积分号内只有当  $t=nT$  时，才有非零值，因此：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) e^{-j\Omega nT}$$

上式中，在数值上  $x_a(nT) = x(n)$ ，再将  $\omega = \Omega T$  代入，得到：

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

上式的右边就是序列的傅立叶变换  $X(e^{j\omega})$ ，即

$$\hat{X}_a(j\Omega) = X(e^{j\omega})|_{\omega=\Omega T}$$

上式说明理想采样信号的傅立叶变换可用相应的采样序列的傅立叶变换得到，只要将自变量  $\omega$  用  $\Omega T$  代替即可。

频域采样定理的要点是：

a) 对信号  $x(n)$  的频谱函数  $X(e^{j\omega})$  在  $[0, 2\pi]$  上等间隔采样  $N$  点，得到

$$X_N(k) = X(e^{j\omega})|_{\omega=2\pi k/N}, k=0,1,2,\dots,N-1$$

则  $N$  点 IDFT  $[X_N(k)]$  得到的序列就是原序列  $x(n)$  以  $N$  为周期延拓后的主值序列，公式为：

$$x_N(n) = \text{IDFT}[X_N(k)]_N = \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n+iN) \right] R_N(n)$$

b) 由上式可知，频域采样点数  $N$  必须大于等于时域离散信号的长度  $M$  (即  $N \geq M$ )，才能使时域不产生混叠，则  $N$  点 IDFT  $[X_N(k)]$  得到的序列  $x_N(n)$  就是原序列  $x(n)$ ，即  $x_N(n) = x(n)$ 。

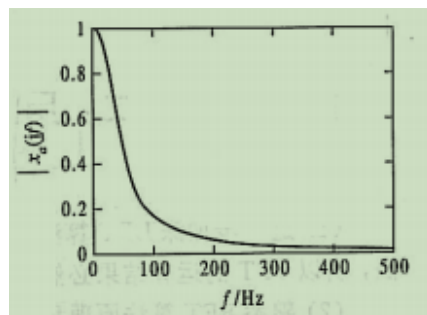
如果  $N > M$ ,  $x_N(n)$  比原序列尾部多  $N-M$  个零点; 如果  $N < M$ , 则  $x_N(n) = \text{IDFT}[X_N(k)]$  发生了时域混叠失真, 而且  $x_N(n)$  的长度  $N$  也比  $x(n)$  的长度  $M$  短, 因此  $x_N(n)$  与  $x(n)$  不同。

在数字信号处理的应用中, 只要涉及时域或者频域采样, 都必须服从这两个采样理论的要点。对比上面叙述的时域采样原理和频域采样原理, 得到一个有用的结论, 这两个采样理论具有对偶性: “时域采样频谱周期延拓, 频域采样时域信号周期延拓”。因此放在一起进行实验。

### 三、实验内容及步骤

(1) 时域采样理论的验证。

给定模拟信号  $x_a(t) = Ae^{-at} \sin(\Omega_0 t) u(t)$ , 式中,  $A=444.128$ ,  $a=50\sqrt{2}\pi$ ,  $\Omega_0=50\sqrt{2}\pi \text{ rad/s}$ , 它的幅频特性曲线如图所示。现用 DFT(FFT) 求该模拟信号的幅频特性, 以验证时域采样理论。



按照  $x_a(t)$  的幅频特性曲线, 选取三种采样频率, 即  $F_s=1\text{kHz}$ ,  $300\text{Hz}$ ,  $200\text{Hz}$ 。观测时间选  $T_p=64\text{ms}$ 。

为使用 DFT, 首先用下面公式产生时域离散信号, 对三种采样频率, 采样序列按顺序用  $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$  表示。

$$x(n) = x_a(nT) = Ae^{-anT} \sin(\Omega_0 nT) u(nT)$$

因为采样频率不同, 得到的  $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$  的长度也不相同, 长度用公式  $N = T_p \times F_s$  计算。选择 FFT 的变换点数为  $M=64$ , 序列长度不够 64 的尾部加零。

$$X(k) = \text{FFT}[x(n)], k = 0, 1, 2, 3, \dots, M-1$$

其中,  $k$  代表的频率为

$$\omega_k = \frac{2\pi}{M} k$$

要求：编写实验程序，计算  $x_1(n), x_2(n), x_3(n)$  的幅频特性，并绘图显示。观察分析频谱混叠失真。

(2) 频域采样理论的验证。

给定信号如下：

$$x(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 13 \\ 27-n & 14 \leq n \leq 26 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

编写程序分别对频谱函数  $X(e^{j\omega}) = FT[x(n)]$ ，在区间  $[0, 2\pi]$  上等间隔采样 32 点和 16 点，得到  $X_{32}(k)$  和  $X_{16}(k)$ ：

$$X_{32}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{32}k}, k = 0, 1, 2, \dots, 31$$

$$X_{16}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{16}k}, k = 0, 1, 2, \dots, 15$$

再分别对  $X_{32}(k)$  和  $X_{16}(k)$  进行 32 点和 16 点 IDFT，得到  $x_{32}(n)$  和  $x_{16}(n)$ ：

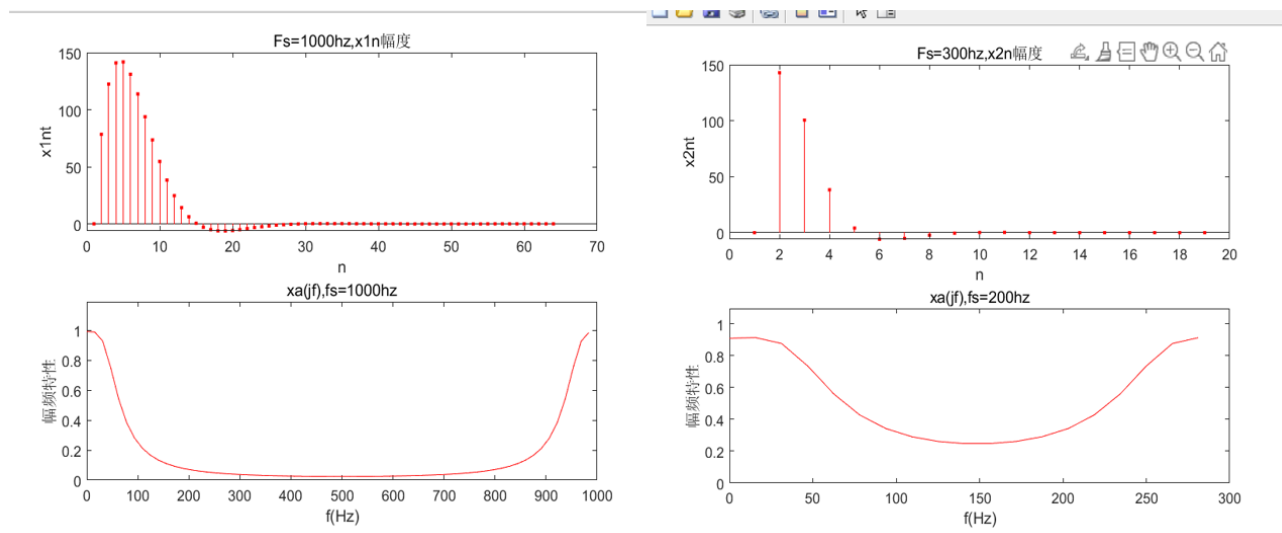
$$x_{32}(n) = \text{IFFT}[X_{32}(k)]_{32}, n = 0, 1, 2, \dots, 31$$

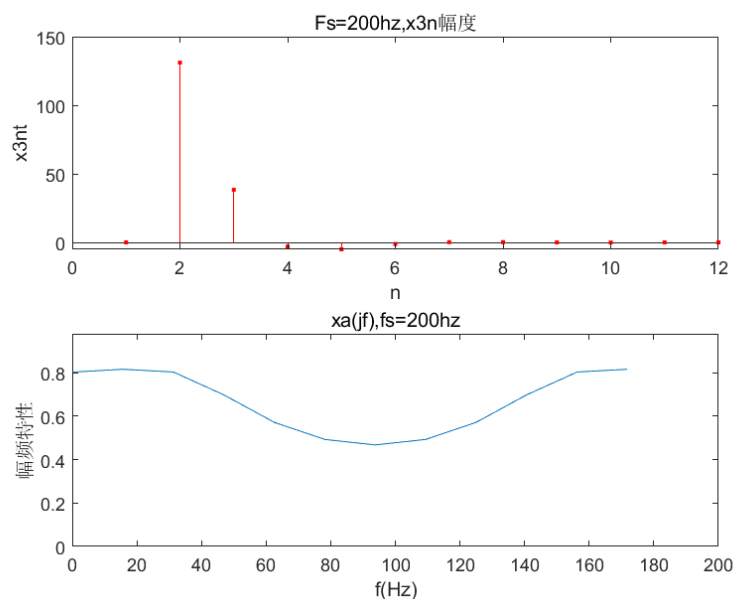
$$x_{16}(n) = \text{IFFT}[X_{16}(k)]_{16}, n = 0, 1, 2, \dots, 15$$

分别画出  $X(e^{j\omega})$ 、 $X_{32}(k)$  和  $X_{16}(k)$  的幅度谱，并绘图显示  $x(n)$ 、 $x_{32}(n)$  和  $x_{16}(n)$  的波形，进行对比和分析，验证总结频域采样理论。

## 四、实验结果及结论分析

### 1. 问题(1)时域采样定理验证的结果分析



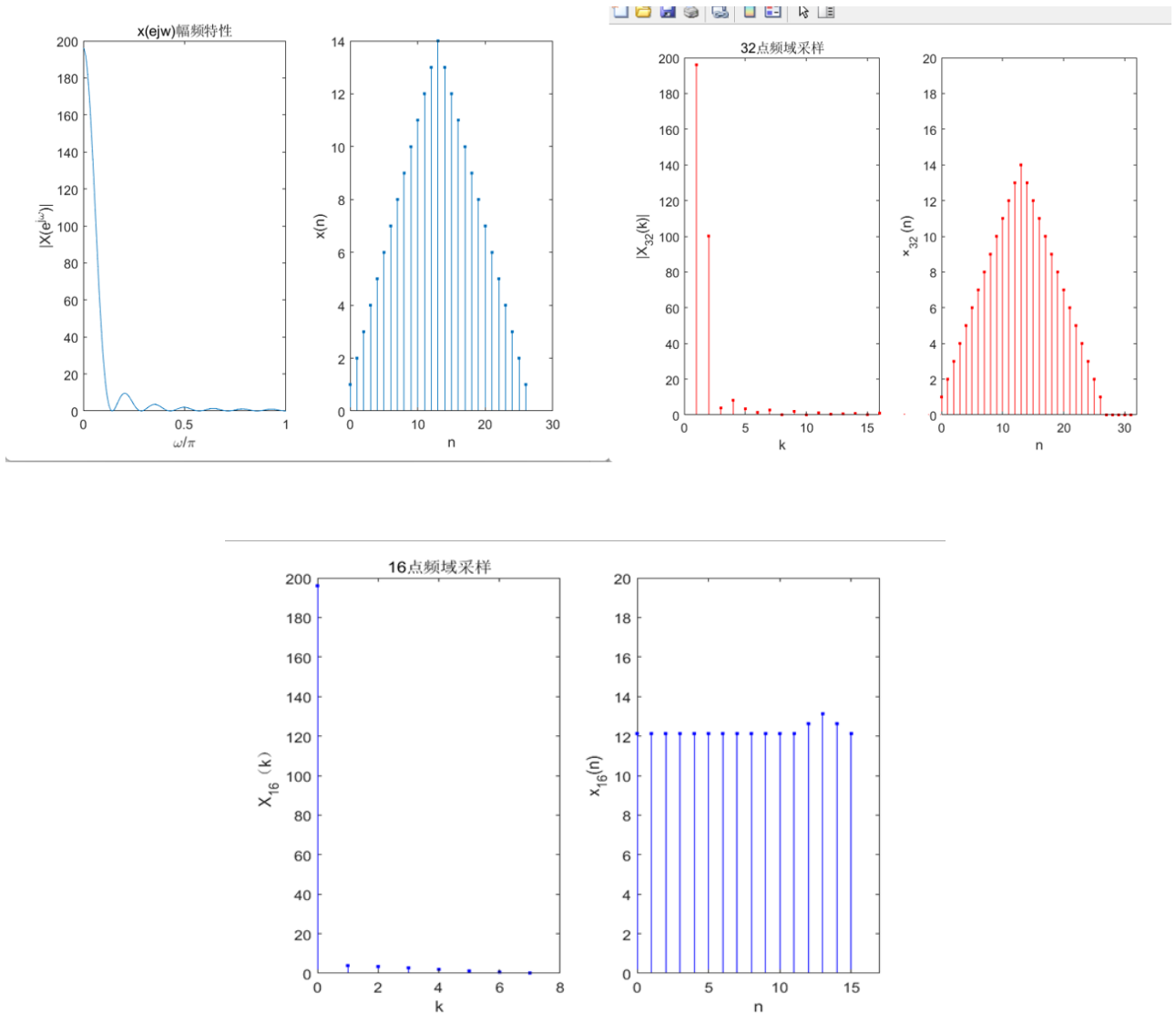


实验结果如图所示，其中  $x1nt$ ,  $x2nt$ ,  $x3nt$  分别为模拟信号  $x_a(t)$  在三种采样频率下产生的离散的抽样信号在时域上的波形，由于计算机无法直接对连续的模拟信号进行变换求解，因此必须选取信号记录长度与时域采样间隔，对离散的时域信号利用 FFT 来表示原模拟信号频谱。即通过对连续信号采样并进行 DFT 再乘以采样间隔，得到模拟信号频谱的周期延拓函数在第一个周期  $[0, F_s]$  上的  $N$  点等间隔采样。

按照题中所给  $x_a(t)$  的幅频特性曲线近似认为  $X_a(j\Omega)$  的最高频率分量为 500Hz，按照时域采样的理论，利用理想脉冲抽样选取的采样频率应该不低于 1000Hz，采样频率越小，则频谱混叠越严重。从这一观点出发，我们可以看到，采样频率从 1000Hz，300Hz 到 200Hz，采样得到的时域离散信号长度  $M$  越来越短，与原模拟信号的近似程度越来越差；相应的，在三种采样频率的折叠频率即 500Hz, 150Hz, 100Hz 处频谱混叠程度越来越严重，1000Hz 的采样频率恢复出的原信号频谱效果最好，300Hz 时频谱底部已经出现明显的混叠失真，200Hz 时已经严重混叠。

事实上，原模拟信号的频谱范围应是无限长的，即使用 1000Hz 的采样频率也会出现频谱混叠现象，这是不希望发生的，可以通过对模拟信号进行抗混叠滤波处理去掉幅度较小的高频成分来改善这一结果。

## 2. 问题(2)频域采样定理验证的结果分析



问题(2)中频域采样定理的验证结果如图所示，第一张图片为  $X(e^{j\omega})$  的幅度谱和原三角波序列的时域波形；第二张图片为对  $X(e^{j\omega})$  进行 32 点等间隔采样，得到  $X_{32}(k)$  的幅度谱和使用  $\text{IDFT}[X_{32}(k)]$  还原出的原序列；第三张图片为对  $X(e^{j\omega})$  进行 16 点等间隔采样，得到  $X_{16}(k)$  的幅度谱和使用  $\text{IDFT}[X_{16}(k)]$  还原出的原序列。

由于计算机中无法对信号进行标准定义的 DTFT 计算，因此采用一组采样点数  $N$  非常大 (本实验中取 1024 点) 的 DFT 来对  $X(e^{j\omega})$  进行逼近，即用一组频率间隔非常小的  $X(k)$ ，使离散的幅度谱包络来表示  $x(n)$  的 DTFT 连续的幅度谱。此外，在计算  $X_{16}(k)$  时不能直接使用 MATLAB 中对  $x(n)$  进行 16 点 DFT 的 FFT 函数，由于 DFT 的点数小于序列长度，这样计算出来的 DFT 在本实验中是毫无意义的，它不能代表在频率域对  $X(e^{j\omega})$  采样后得到的  $x(k)$ 。要

得到对  $X(e^{j\omega})$  的 16 点等间隔采样, 有两种办法, 第一是使用抽取  $X_{32}(k)$  偶数点的办法, 即

$$X_{16}(k) = X_{32}(2k), k = 0, 1, 2, \dots, 15$$

当然也可以按照频域采样的理论, 周期的  $X_N(k)$  反变换得到的周期序列  $X_N(n)$  是原非周期序列  $x(n)$  以  $N$  为周期延拓的结果, 利用这一结论, 先将信号  $x(n)$  以 16 为周期进行周期延拓, 重叠相加后取主值区间(16 点), 再对其进行 16 点 DFT, 即可得到正确地频率域采样的  $X_{16}(k)$ 。

根据频域采样定理, 周期的  $X_N(k)$  反变换得到的周期序列  $X_N(n)$  是原非周期序列  $x(n)$  以  $N$  为周期延拓的结果, 即对频率域的采样点小于序列长度时, 利用  $X_N(k)$  反变换得到的  $X_N(n)$  的主值将是原序列重叠相加后的结果, 这样得到的反变换显然出现了时域混叠; 即只有当频域采样点  $N > M$  时,  $M$  为原序列长度, 才能正确还原出无混叠的  $x(n)$ , 按照这一观点, 我们观察第二张图片的 32 点采样, 由于大于原 27 点序列长度, 其采样结果较好地反映了  $X(e^{j\omega})$  的幅度变化, 经 IDFT 得到的  $x(n)$  和原序列完全相同; 第三张图片显示了采样点为 16 时时域的混叠情况, 前 11 个点都发生了时域混叠失真, 是重叠相加后得到值为 12 的结果。

## 五、讨论

1. 如果序列  $x(n)$  的长度为  $M$ , 希望得到其频谱  $X(e^{j\omega})$  在  $[0, 2\pi]$  上的  $N$  点等间隔采样, 当  $N < M$  时, 如何用一次最少点数的 DFT 得到该频谱采样?

先对原序列  $x(n)$  以  $N$  为周期进行周期延拓后取主值区序列,

$$x_N(n) = \left[ \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(n + iN) \right] R_N(n)$$

计算  $N$  点 DFT 则得到  $N$  点频域采样:

$$X_N(k) = DFT[x_N(n)]_N = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

## 六、附录

时域采样定理验证代码 1000hz	300hz
<pre>%时域采样定理的验证 clear%1000hz clc Tp=64/1000; Fs=1000;Ts=1/Fs; M=floor(Tp*Fs);n=0:M-1; A=444.128;alpha=pi*50*sqrt(2); omega=pi*50*sqrt(2); x1n=A*exp(-alpha*n*Ts).*sin(omega*n*Ts); subplot(2,1,1);stem(x1n,'r'); xlabel("n");ylabel("x1nt") box on; title('Fs=1000hz,x1n 幅度'); Xk=Ts*fft(x1n,64);%xat 傅里叶变换 k=0:64-1;fk=k/Tp; subplot(2,1,2); plot(fk,abs(Xk),'r'); title('xa(jf),fs=1000hz'); xlabel('f(Hz)');ylabel('幅频特性'); axis([0,Fs,0,1.2*max(abs(Xk))]);</pre>	<pre>%300hz clear clc Tp=64/1000; Fs=300; Ts=1/Fs;M=floor(Tp*Fs); n=0:M-1; A=444.128; alpha=pi*50*sqrt(2);omega=pi*50*sqrt(2); x2n=A*exp(-alpha*n*Ts).*sin(omega*n*Ts); subplot(2,1,1); stem(x2n,'r'); title('Fs=300hz,x2n 幅度'); xlabel("n");ylabel("x2nt"); Xk = Ts*fft(x2n,M); k=0:M-1; fk=k/Tp;subplot(2,1,2); plot(fk,abs(Xk),'r'); title('xa(jf),fs=200hz'); xlabel('f(Hz)');ylabel('幅频特性'); axis([0,Fs,0,1.2*max(abs(Xk))]);</pre>



时域采样定理验证代码 200hz	频域采样定理验证代码
<pre> %200hz clear;clc Tp=64/1000; Fs=200;Ts=1/Fs; M=floor(Tp*Fs); n=0:M-1;A=444.128; alpha=pi*50*sqrt(2);omega=pi*50*sqrt(2); x3n=A*exp(-alpha*n*Ts).*sin(omega*n*Ts); subplot(2,1,1);stem(x3n,'r');box on; xlabel("n");ylabel("x3nt"); title('Fs=200hz,x3n 幅度'); Xk = Ts*fft(x3n,M); k=0:M-1;fk=k/Tp;subplot(2,1,2); plot(fk,abs(Xk)); title('xa(jf),fs=200hz'); xlabel('f(Hz)');ylabel('幅频特性'); axis([0,Fs,0,1.2*max(abs(Xk))]); </pre>	<pre> %频域采样的验证 clear;clc x1n = [1:14,13:-1:1]; Xk=fft (x1n,1024) ;%近似 x(ejw) k=0:1023; figure subplot(1,2,1) plot(2*k/1024,abs(Xk))%绘制 x(ejw) title('x(ejw)幅频特性'); xlabel ('\omega/\pi');ylabel (' X(e^j\omega) '); axis ([0, 1, 0, 200]);subplot(1,2,2)%绘制 x(n) stem(0:26, x1n, '.');box on ylabel('x(n)');xlabel ('n'); figure x32k=fft(x1n,32);%32 点 FFT[x(n)] x32n=ifft(x32k); subplot(1,2,1) stem(abs(x32k), 'r. ');%绘制 32 点 xk axis ([0,16,0,200]);title('32 点频域采样'); xlabel('k');ylabel(' X_3_2(k) '); subplot(1,2,2) stem (0:31,x32n, 'r. ');xlabel ('n'); ylabel ('x_3_2 (n)');axis ([0, 32, 0, 20]); figure x16k=x32k(1:2:16) ;%16 点 fft x16n =ifft(x16k,16); subplot(1,2,1) stem (0:7,abs(x16k), 'b. ');%绘制 16 点 xk title('16 点频域采样');xlabel('k');ylabel('X_1_6 (k) '); axis([0,8,0,200]);subplot(1,2,2); stem (0:15,x16n, 'b. '); xlabel ('n');ylabel ('x_1_6(n)'); axis ([0,17,0,20]); </pre>