

实验五：FIR 数字滤波器的设计与软件实现

一、引言

FIR(Finite Impulse Response)滤波器即有限长单位冲激响应滤波器,又称为非递归型滤波器,是数字信号处理系统中最基本的元件,相比于模拟滤波器,其滤波精度高,稳定,可随时修改,不需要考虑阻抗等问题,可以实现特殊要求的幅频特性,同时满足一定条件的 FIR 滤波器具有线性相位,因此 FIR 滤波器在实际工程中得到了较为广泛的应用。它可以在保证任意幅频特性的同时具有严格的线性相频特性,同时其单位抽样响应是有限长的,因而滤波器是稳定的系统。因此, FIR 滤波器在通信、图像处理、模式识别等领域都有着广泛的应用。

一个 N 阶的 FIR 滤波器输出公式 $y(n)$ 如下:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

式中 $h(k)$ 为滤波器的系数, $x(n-k)$ 为 $x(n)$ 延时 k 个周期。系统的传输函数 $H(z)$ 可表示成公式:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)z^{-k} = h(0) + h(1)z^{-1} + \cdots + h(N-1)z^{-(N-1)}$$

从式中看出:滤波过程主要是一组特定的系数与信号完成卷积的过程,在有限的 z 平面内 FIR 滤波器有 $N-1$ 个零点,同时其 $N-1$ 个极点全部位于 $z=0$ 中,因此 FIR 滤波器也被称为全零点滤波器,是一个单位脉冲响应有限长的稳定系统。FIR 滤波器在系数满足一定条件的情况下,它的相频特性是线性的,可以有效的保留信号的相位信息,因此线性相位的 FIR 滤波器在实际工程中有着较为广泛的应用。FIR 网络结构的特点是没有反馈支路,也就是说没有环路,

本文借助 MATLAB 信号处理工具箱,通过使用窗函数法和等波纹最佳逼近法分别设计满足特定要求的 FIR 滤波器,从而掌握用窗函数法设计 FIR 数字滤波器的原理和方法,掌握用等波纹最佳逼近法设计 FIR 数字滤波器的原理和方法,掌握 FIR 滤波器的快速卷积实现原理,学会调用 MATLAB 函数设计与实现 FIR 滤波器。

二、方法

1.窗函数法的基本原理

给定一个理想的零相位低通滤波器,其频率特性可表示为:

$$H_d(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_d(n)e^{-j\omega n} = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_c \\ 0 & \omega_c < |\omega| < \pi \end{cases}$$

零相位滤波器的特点为：

$$H_d(e^{j\omega}) = |H_d(e^{j\omega})|$$

对应的单位冲激响应为：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} H_d(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}}{jn} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

由于 $h_d(n)$ 是一个无限长序列，计算机通常是无法处理的，因此用一个函数 $w(n)$ 对其进行截断，变成一个有限长序列 $h(n)$ ，即：

$$h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$$

$w(n)$ 称为窗函数，其表达式如下：

$$w(n) = \begin{cases} 1, & -M/2 \leq n \leq M/2 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

由于此时的 $h(n)$ 是非因果序列，是不可实现的，对其在时域上进行移位，得到新的 $h(n)$ 如下式：

$$h(n) = h_d(n - M/2) \cdot w(n - M/2)$$

也可以对 $h_d(n)$ 先做时域上的移位，再利用窗函数进行截取，并且截取过程中序列保持为对称的。窗函数 $w(n)$ 的频域表达式为：

$$W(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M e^{-j\omega n} = \frac{1 - e^{-j\omega(M+1)}}{1 - e^{-j\omega}} = e^{-j\omega M/2} \cdot \frac{\sin(\omega(M+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$$

根据时域相乘等于频域卷积，可实现的滤波器的频域表达式为：

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (H_d(e^{j\theta}) e^{-j\theta M/2}) W(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

最终得到的可实现滤波器为理想滤波器 $h_d(n)$ 与窗函数 $w(n)$ 的卷积。

由于窗的形状影响主瓣和旁瓣，所以设计滤波器时根据纹波大小确定窗的形状；窗的长度影响主瓣，进而影响过渡带宽度，所以设计滤波器时根据过渡带宽度确定窗的长度。设计一个 FIR 滤波器通常按照下面的步骤进行：

根据滤波器设计要求指标，确定滤波器的阻带衰减要求和过渡带宽度，进而选择窗函数的类型并估计窗的长度 N ；根据过渡带宽度确定理想滤波器的截止频率，得到单位脉冲响应 $h_d(n)$ ；根据求得的可实现滤波器 $h(n)$ 的表达式，求出其频率响应：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}$$

根据频率响应验证是否满足技术指标；若不满足指标要求，则应调整窗函数类型或长度，然后重复以上步骤，直到满足要求为止。

2. 等波纹逼近法的基本原理

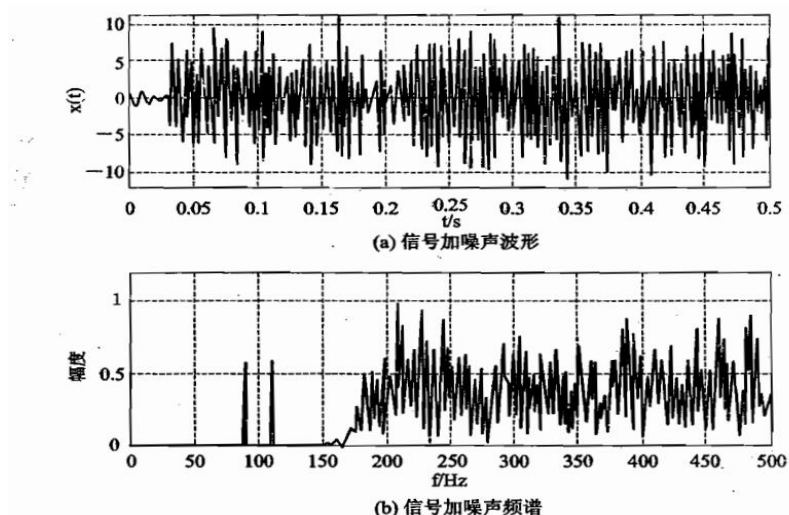
等波纹最佳逼近法是一种优化设计法，即最大误差最小化准则，它克服了窗函数设计法和频率采样法的缺点，使最大误差（即波纹的峰值）最小化，并在整个逼近频段上均匀分布。用等波纹最佳逼近法设计的 FIR 数字滤波器的幅频响应在通带和阻带都是等波纹的，而且可以分别控制通带和阻带波纹幅度，这就是等波纹的含义。最佳逼近是指在滤波器长度给定的条件下，使加权误差波纹幅度最小化。与窗函数设计法和频率采样法比较，由于这种设计法使滤波器的最大逼近误差均匀分布，所以设计的滤波器性能价格比最高。阶数相同时，这种设计法使滤波器的最大逼近误差最小，即通带最大衰减最小，阻带最小衰减最大；指标相同时，这种设计法使滤波器阶数最低。

等波纹最佳逼近法的设计思想，就是用 $H(\omega)$ 表示希望逼近的幅度特性函数，要求设计线性相位 FIR 数字滤波器时， $H(\omega)$ 必须满足线性相位约束条件。

三、实验内容及步骤

(1) 认真复习第七章中用窗函数法和等波纹最佳逼近法设计 FIR 数字滤波器的原理。

(2) 调用信号产生函数 `xtg` 产生具有加性噪声的信号 `xt`，并自动显示 `xt` 及其频谱，如图

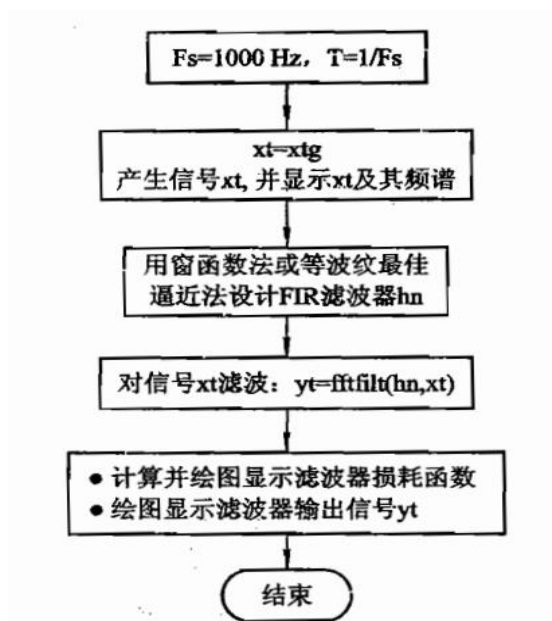


(3) 请设计低通滤波器，从高频噪声中提取 `xt` 中的单频调幅信号，要求信号幅频失真小于 0.1dB，将噪声频谱衰减 60dB。先观察 `xt` 的频谱，确定滤波器指标参数。

(4) 根据滤波器指标选择合适的窗函数，计算窗函数的长度 `N`，调用 MATLAB 函数 `fir1` 设计一个 FIR 低通滤波器。并编写程序，调用 MATLAB 快速卷积函数 `fftfilt` 实现对 `xt` 的滤波。绘图显示滤波器的频响特性曲线、滤波器输出信号的幅频特性图和时域波形图。

(5) 重复 (3)，滤波器指标不变，但改用等波纹最佳逼近法，调用 MATLAB 函数 `remezord` 和 `remez` 设计 FIR 数字滤波器。并比较两种设计方法设计的滤波器阶数。

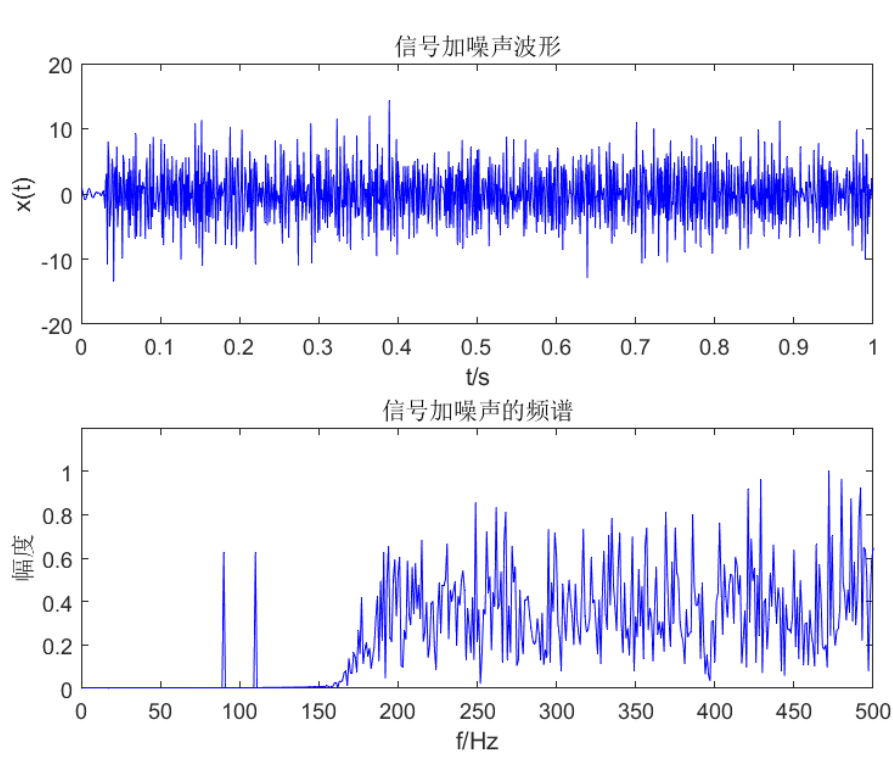
程序框图如图：



四、实验结果及结论分析

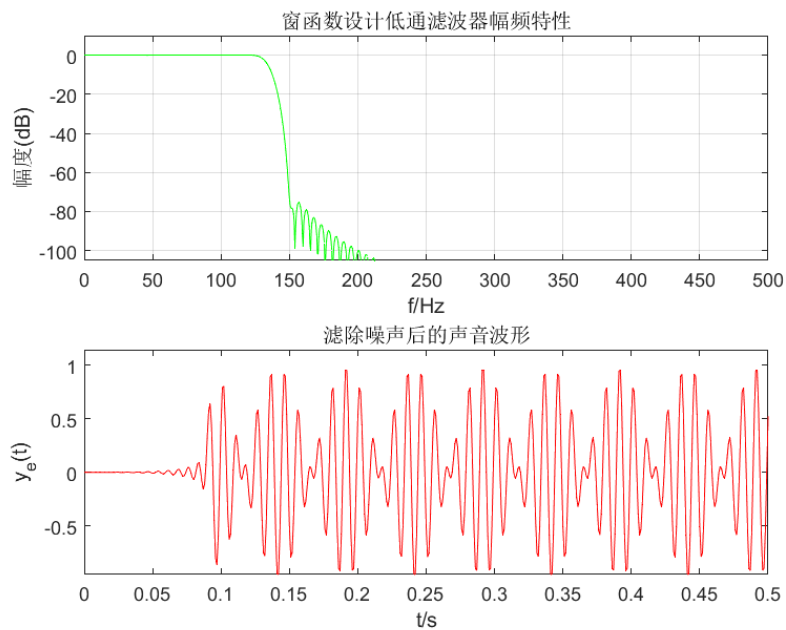
1.选择滤波器指标参数：通带截止频率 $f_p=120\text{Hz}$ ，阻带截至频率 $f_s=150\text{Hz}$ 。代入采样频率 $F_s=1000\text{Hz}$ ，换算成数字频率，通带截止频率 $\omega_p = 2\pi f_p T = 0.24\pi \text{ rad}$ ，通带最大衰为 0.1dB ，阻带截至频率 $\omega_s = 2\pi f_s T = 0.3\pi \text{ rad}$ ，阻带最小衰减为 60dB 。所以选取 blackman 窗函数。与信号产生函数 `xtg` 相同，采样频率 $F_s=1000\text{Hz}$ 。

2. 产生的信号加噪声的时域波形及其频谱如图所示

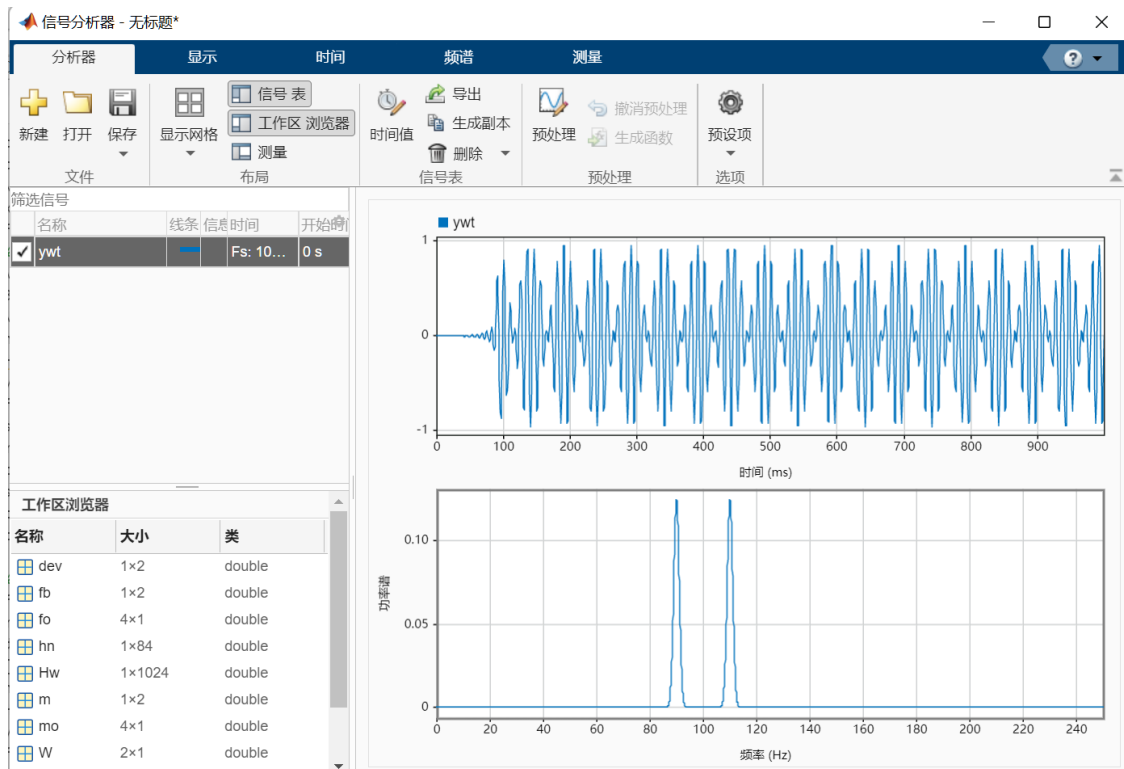


`Xtg` 函数产生有加性高频噪声的单频调幅信号，与题中所给波形类似。可以看出信号的频谱以载频 100Hz 为中心，频谱在 90Hz 和 110Hz 处。

3.本实验选取的布莱克曼窗设计的低通滤波器损耗函数及其分离得到的低频信号时域波形如图所示：

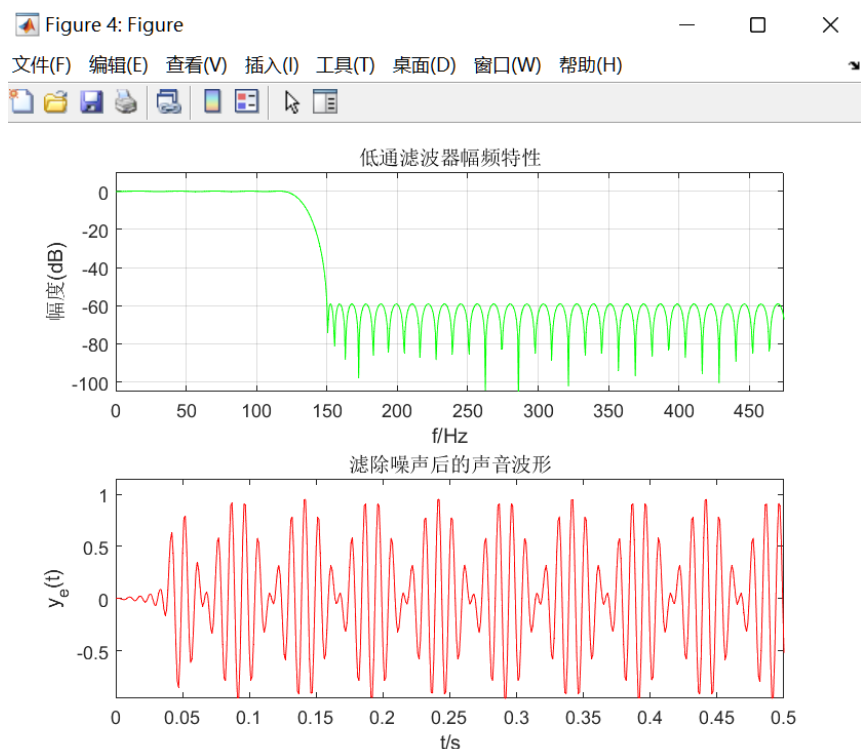


选取的布莱克曼窗窗长为 184，阻带最小衰减为 74db，对 x_{tg} 信号滤波得到信号 y_{wt} 。
使用 MATALB 信号分析器对所得信号分析如下：



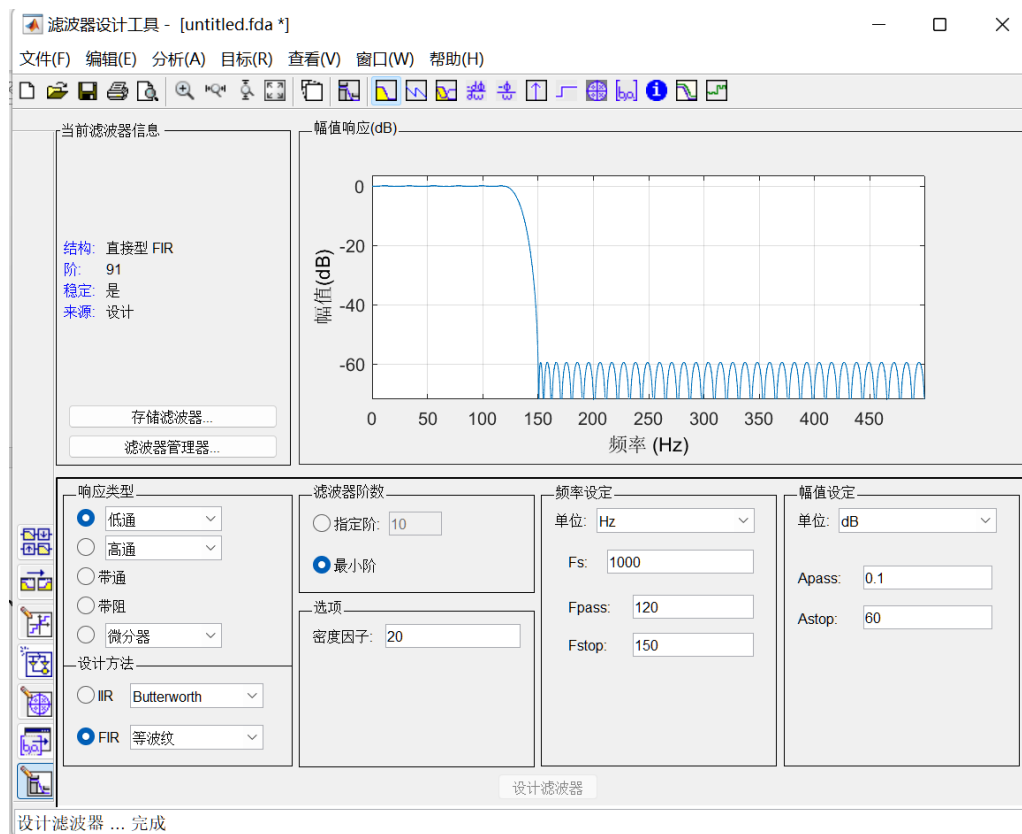
分离得到的信号频谱以 100Hz 为中心，能量集中分布在 90Hz 与 110Hz 处，这与预期要得到的原始信号结论基本一致，使用布莱克曼窗的 FIR 线性相位滤波器很好地去除了其他频段的噪音，对所得信号很好地保留，滤波效果良好。

4.使用等波纹逼近法设计的低通滤波器损耗函数及其分离出的信号时域波形如图所
示：

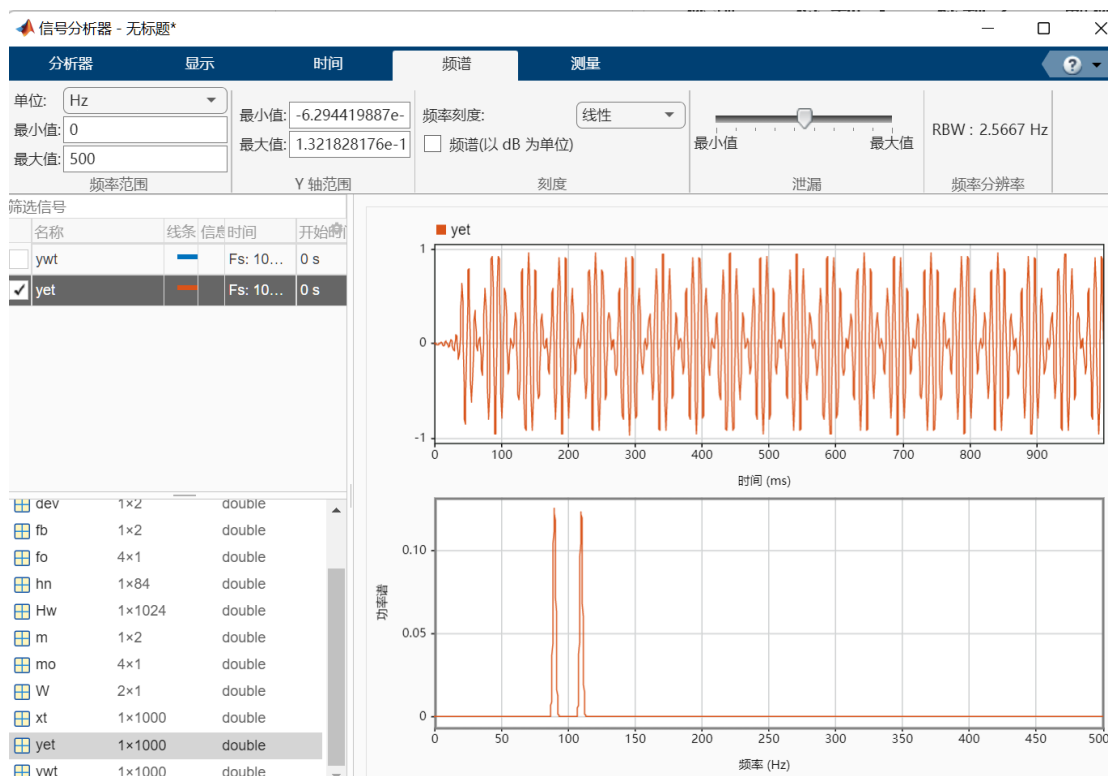


等波纹逼近法设计的滤波器其通带和阻带都具有等波纹特性，图中通带波纹幅度小，表示不明显。

使用 MATLAB Filter Designer 设计的等波纹低通滤波器如图所示：



MATLAB 得到了 91 阶的直接型等波纹低通 FIR，实验中我们调用函数得到的是 83 阶的低通滤波器，使用滤波器对 sgt 信号滤波后的 yet 信号频谱分析如下：



与使用 Blackman 窗设计的低通滤波器类似，等波纹设计的 FIR 对含有噪声信号的滤波效果也非常好，能量集中分布在 90Hz 与 110Hz 处，与原始不含噪声信号频率成分一致，对噪声频段进行了很好地滤除，达到了预期的滤波效果。

由此可见使用两种方法设计地低通 FIR 都能有效地从噪声中提取信号成分，但相比于布莱克曼窗设计的 184 阶滤波器，等波纹逼近法设计的滤波器阶数大大降低，滤波实现的运算量和时延也小得多。

五、讨论

1.窗函数法设计的滤波器有如下结论：

旁瓣积分决定阻带和通带内的纹波；主瓣积分决定过渡带的宽度通带的幅度取决于主、旁瓣积分。

2.解释为什么对同样的技术指标,用等波纹最佳逼近法设计的滤波器阶数低?

用窗函数法设计的滤波器,如果在阻带截止频率附近刚好满足,则离开阻带截止频率越远,阻带衰减富裕量越大,即存在资源浪费,几种常用的典型窗函数的通带最大衰减和阻带最小衰减固定,且差别较大,又不能分别控制。所以设计的滤波器的通带最大衰减和阻带最小衰减通常都存在较大富裕。如本实验所选的 blackman 窗函数,其阻带最小衰减为 74dB,而指标仅为 60dB,用等波纹最佳逼近法设计的滤波器,其通带和阻带均为等波纹特性,且通带最大衰减和阻带最小衰减可以分别控制,所以其指标均匀分布,没有资源浪费,所以期阶数低得多。

等波纹逼近法允许在通带内存在一些波纹,这使得在设计中更加灵活。允许一定的通带波纹通常可以通过较低阶数的滤波器来实现,而无需过分增加阶数以满足精确的通带要求。换句话说,等波纹最佳逼近法的灵活性使得在通带内的波动可以被容忍,从而降低了对滤波器阶数的严格要求。这可以带来计算效率的提升,因为较低阶数的滤波器通常需要更少的计算资源。

3.如果要求用窗函数法设计带通滤波器,且给定通带上、下截止频率为 ω_{pl} 和 ω_{pu} ,阻带上、下截止频率为 ω_{sl} 和 ω_{su} ,试求理想带通滤波器的截止频率 ω_{cl} 和 ω_{cu} 。

希望逼近的理想带通滤波器的截止频率 ω_{cl} 和 ω_{cu} 分别为:

$$\omega_{cl} = (\omega_{sl} + \omega_{pl}) / 2, \omega_{cu} = (\omega_{cu} + \omega_{pu}) / 2$$

4.如果给定通带截止频率和阻带截止频率以及阻带最小衰减,如何用窗函数法设计线性相位低通滤波器?请写出设计步骤。

(1)根据对阻带衰减及过渡带的指标要求,选择窗函数的类型,并估计窗口长度 N。先按照阻带衰减选择窗函数类型。原则是在保证阻带衰减满足要求的情况下,尽量选择主瓣窄的窗函数。然后根据过渡带宽度估计窗口长度 N。待求滤波器的过渡带宽度 B,近似等于窗函数主瓣宽度,且近似与窗口长度 N 成反比, $N \approx A/B$,A 取决于窗口类型。

(2)构造希望逼近的频率响应函数 $H_d(e^{jw})$,即

$$H_d(e^{jw}) = H_d(w)e^{-jw\frac{N-1}{2}}$$

所谓的“标准窗函数法”,就是选择 $H_d(e^{jw})$ 为线性相位理想滤波器(理想低通、理想高通、理想带通、理想带阻)。以低通滤波器为例, $H_{dg}(w)$ 应满足:

$$H_{dg}(w) = \begin{cases} 1, & |w| \leq w_c \\ 0, & w_c < |w| \leq \pi \end{cases}$$

理想滤波器的截止频率 w_c 。近似位于最终设计的 FIRDF 的过渡带的中心频率点, 幅度函数衰减一半(约-6dB)。所以如果设计指标给定通带边界频率和阻带边界频率 w_p 和 w_s , 一般取:

$$w_c = \frac{w_p + w_s}{2}$$

(3) 计算 $h_d(n)$ 。如果给出待求滤波器的频响函数为 $H_d(e^{jw})$, 那么单位脉冲响应用下式求出:

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_d(e^{jw}) e^{jwn} dw$$

如果 $H_d(e^{jw})$ 较复杂, 或者不能用封闭公式表示, 则不能用上式求出 $h_d(n)$ 。我们可以对 $H_d(e^{jw})$ 从 $\omega=0$ 到 $\omega=2\pi$ 采样 M 点, 采样值为 $H_{dM}(k) = H_d\left(e^{j\frac{2\pi}{M}k}\right)$, $k=0, 1, 2, \dots, M-1$, 进行 M 点 IDFT (IFFT), 得到

$$h_{dM}(n) = IDFT[H_{dM}(k)]_M$$

根据频域采样理论, $h_{dM}(n)$ 与 $h_d(n)$ 应满足如下关系:

$$h_{dM}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_d(n + rM) R_M(n)$$

因此, 如果 M 选得较大, 可以保证在窗口内 $h_{dM}(n)$ 有效逼近 $h_d(n)$ 。

对给出的线性相位理想低通滤波器作为 $H_d(e^{jw})$, 可求出单位脉冲响应 $h_d(n)$:

$$h_d(n) = \frac{\sin[w_c(n - \alpha)]}{\pi(n - \alpha)}$$

为保证线性相位特性, $\alpha = (N-1)/2$ 。

(4) 加窗得到设计结果: $h(n) = h_d(n)w(n)$ 。

六、附录

主函数代码
两种方法并绘制图形
<pre>clear clc N=1000; xt=xtg(N); fp=120;fs=150;Rp=0.2;As=60;Fs=1000;T=1/Fs%输入给定指标 %(1)用窗函数法设计滤波器 wc=(fp+fs)/Fs;%理想低通滤波器截止频率(关于 pi 归一化) B=2*pi*(fs-fp)/Fs;%过渡带宽度指标 Nb=ceil(11*pi/B);%blackman 窗的长度 N hn=fir1(Nb-1,wc,blackman(Nb)); Hw=abs(fft(hn,1024));%求设计的滤波器频率特性 ywt=fftfilt(hn,xt,N);%调用函数 fftfilt 对 xt 滤波 figure subplot(2,1,1); myplot(hn,1); title('窗函数设计低通滤波器幅频特性'); subplot(2,1,2); tplot(ywt,T); title('滤除噪声后的声音波形') %(2)用等波纹最佳逼近法设计滤波器 fb=[fp,fs]; m=[1,0];%确定 remezord 函数所需参数 f,m,dev dev=[(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1),10^(-As/20)]; [Ne,fo,mo,W]=remezord(fb,m,dev,Fs);%确定 remez 函数所需参数 hn=remez(Ne,fo,mo,W);%调用 remez 函数进行设计 Hw=abs(fft(hn,1024));%求设计的滤波器频率特性 yet=fftfilt(hn,xt,N);%调用函数 ftfilt 对 xt 滤波 figure subplot(2,1,1) myplot(hn,1) title('低通滤波器幅频特性') subplot(2,1,2) tplot(yet,T) title('滤除噪声后的声音波形')</pre>

自定义函数代码	
Part1 产生信号 xt	Part2:绘制信号频谱和损耗函数
<pre> function xt=xtg(N) %采样频率 Fs=1000Hz Fs=1000;T=1/Fs;Tp=N*T; t=0:T:(N-1)*T; fc=Fs/10;f0=fc/10; mt=cos(2*pi*f0*t);%产生单频正弦波调制信号 mt,频率为 f0 ct=cos(2*pi*fc*t);%产生载波正弦波信号 ct,频率为 fe xt=mt.*ct;%相乘产生单频调制信号 xt nt=2*rand(1,N)-1;%产生随机噪声 nt %设计高通滤波器 hn fp=150;fs=200;Rp=0.1;As=70;%滤波器指标 fb=[fp,fs];m=[0,1];%计算 remezord 函数所需参数 fm,dev dev=[10^(-As/20),(10^(Rp/20)-1)/(10^(Rp/20)+1)]; [n,fo,mo,W]=remezord(fb,m,dev,Fs);%确定 remez 函数所需参数 hn=remez(n,fo,mo,W);%调用 remez 函数进行设计,用于滤除噪声 nt 中的低频成分 yt=filter(hn,1,10*nt);%滤除随机噪声中低频成分,生成高通噪声 yt xt=xt+yt;%噪声加信号 fst=fft(xt,N); k=0:N-1;f=k/Tp; figure;subplot(2,1,1) plot(t,xt,'b');xlabel('t/s');ylabel('x(t)'); %axis([0,Tp/5,min(xt),max(xt)]); title('信号加噪声波形') subplot(2,1,2);plot(f,abs(fst)/max(abs(fst)),'b') title('信号加噪声的频谱') axis([0,Fs/2,0,1.2]) xlabel('f/Hz');ylabel('幅度'); end </pre>	<pre> function tplot(xn,T) n=0:length(xn)-1; t=n*T; plot(t,xn,'r'); xlabel('t/s');ylabel('y_e(t)'); axis([0,0.5,min(xn),1.2*max(xn)]); end function myplot(B,A) [H,W]=freqz(B,A,1000); m=abs(H); plot(W/pi*500,20*log10(m/max(m)),'g'); grid on; xlabel('f/Hz');ylabel('幅度(dB)') axis([0,500,-105,10]); title('损耗函数曲线'); end </pre>