

实验三：用 FFT 对信号作频谱分析

一、引言

信号的谱分析，就是计算信号的傅里叶变换。连续信号与系统的傅里叶分析显然不便于直接用计算机进行计算，使其应用受到限制，而 DFT 是一种时域和频域都离散化的变换，适合数值运算，成为使用计算机分析离散信号和系统的有力工具。对连续信号和系统，可以通过时域采样，应用 DFT 进行近似谱分析。

随着数字信号处理技术的不断发展，用 FFT 对信号做频谱分析成为学习信号处理的重要内容。在实际问题中，时域离散信号和模拟信号经常需要进行频谱分析，对信号进行谱分析的核心问题是频谱分辨率 F 以及误差的分析。频率分辨率 F 与 FFT 的采样点数 N 有关，因为 FFT 能够实现 $2\pi/N$ 的频率分辨率，因此要求 F 要大于等于 $2\pi/N$ ，在频率分辨率一定时可以由此确定采样点数 N 。误差主要来自于连续信号经过 FFT 后变为离散信号，只有 N 足够大时，离散谱的包络才能无限接近连续谱。对模拟信号进行谱分析时，首先要把它按照采样定理转换成时域离散信号，如果模拟信号是周期信号，应该选取观测时间是信号周期的整数倍，再按照采样定理将其转换成周期离散信号。

本文在 MATLAB 环境下分别对离散信号、离散周期信号与连续周期信号进行频谱分析，观察不同采样点数带来的频谱区别，进一步加深 DFT 算法原理和基本性质的理解(因为 FFT 只是 DFT 的一种快速算法，所以 FFT 的运算结果必然满足 DFT 的基本性质)。熟悉 FFT 算法原理和 FFT 程序的应用，学习利用 FFT 对离散时间信号进行频谱分析的方法，了解可能出现的误差及其原因，以便在实际中正确应用 FFT。

二、方法

用 FFT 对信号作频谱分析是学习数字信号处理的重要内容，经常需要进行谱分析的信号是模拟信号和时域离散信号。对信号进行谱分析的重要问题是频谱分辨率和分析误差。频谱分辨率直接和 FFT 的变换区间 N 有关，因为 FFT 能够实现的频率分辨率是 $2\pi/N$ ，因此要求 $2\pi/N \leq F$ 。可以根据此式选择 FFT 的变换区间 N 。误差主要来自于用 FFT 作频谱分析时，得到的是离散谱，而信号（周期信号除外）是连续谱，只有当 N 较大时离散谱的包络才能逼近于连续谱，因此 N 要适当选择大一些。

周期信号的频谱是离散谱，只有用整数倍周期的长度作 FFT，得到的离散谱才能代表周期信号的频谱。如果不知道信号周期，可以尽量选择信号的观察时间长一些。

对模拟信号进行谱分析时，首先要按照采样定理将其变成时域离散信号。如果是模拟

周期信号，也应该选取整数倍周期的长度，经过采样后形成周期序列，按照周期序列的谱分析进行。

三、实验内容及步骤

(1) 对以下序列进行谱分析。

$$x_1(n) = R_4(n)$$

$$x_2(n) = \begin{cases} n+1 & 0 \leq n \leq 3 \\ 8-n & 4 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他}n \end{cases}$$

选择 FFT 的变换区间 N 为 8 和 16 两种情况进行频谱分析。分别打印其幅频特性曲线。并进行对比、分析和讨论。

$$x_3(n) = \begin{cases} 4-n & 0 \leq n \leq 3 \\ n-3 & 4 \leq n \leq 7 \\ 0 & \text{其他}n \end{cases}$$

(2) 对以下周期序列进行谱分析。

$$x_4(n) = \cos \frac{\pi}{4} n$$

$$x_5(n) = \cos \frac{\pi}{4} n + \cos \frac{\pi}{8} n$$

选择 FFT 的变换区间 N 为 8 和 16 两种情况分别对以上序列进行频谱分析。分别打印其幅频特性曲线。并进行对比、分析和讨论。

(3) 对模拟周期信号进行谱分析

$$x_6(t) = \cos 8\pi t + \cos 16\pi t + \cos 20\pi t$$

选择采样频率 $F_s=64\text{Hz}$ 变换区间 $N=16,32,64$ 三种情况进行谱分析。分别打印其幅频特性，并进行分析和讨论。

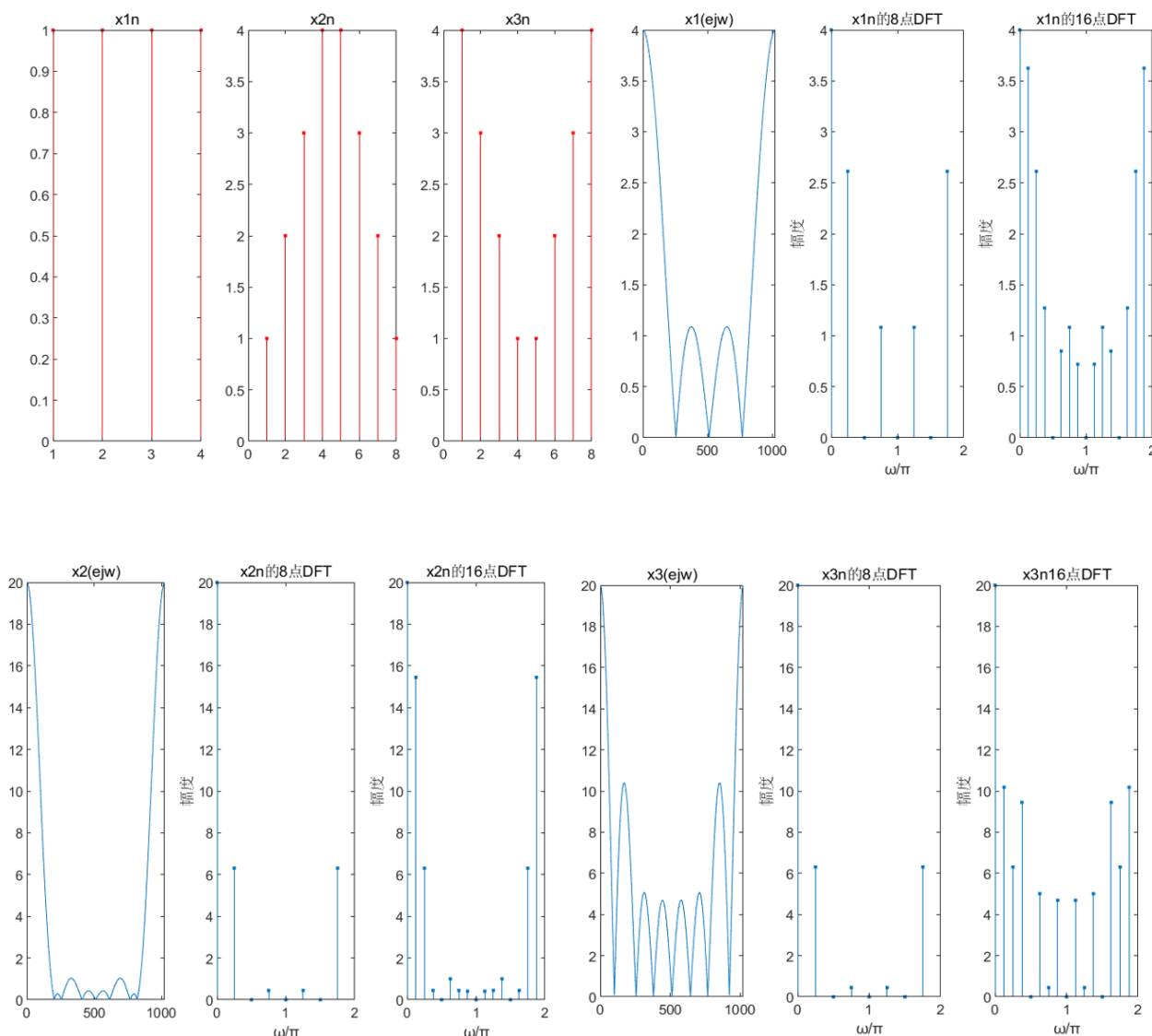
用 DFT (或 FFT) 分析频谱，绘制频谱图时，最好将 $X(k)$ 的自变量 k 换算成对应的频率，作为横坐标便于观察频谱。

$$\omega k = \frac{2\pi}{N} k, k = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

为了便于读取频率值，最好关于 π 归一化，即以 $\frac{\omega}{\pi}$ 作为横坐标。

四、实验结果及结论分析

1. 问题 1 离散序列的谱分析

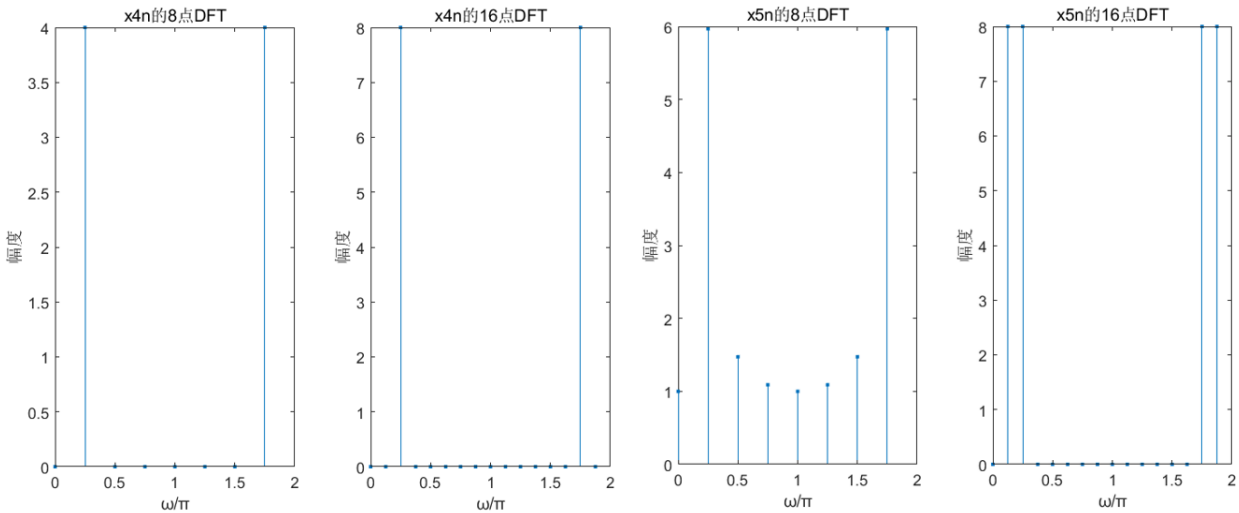


第一张图片为三个离散序列的时域波形， $x1n$ 是矩形序列 $R4(n)$ ， $x2n$ 是一个三角波序列， $x3n$ 可由 $x2n$ 循环移位得到。后边三张图分别为 $x(n)$ 的 DTFT、8 点 DFT 和 16 点 DFT 的幅频特性，其中 $x(n)$ 的 DTFT 波形是对 $x(n)$ 做 1024 点 FFT 得到的包络近似的结果。

观察可以发现，无论是 8 点 DFT 还是 16 点 DFT，他们都是对 DTFT 的结果在一个周期内等间隔 N 点采样的得到的结果，对比 16 点的 DFT，8 点 DFT 的栅栏效应十分明显，16 点 DFT 能获得更多的频谱结构信息。由 MATLAB 绘图可以发现， $N=8$ 时， $x2(n)$ 和 $x3(n)$ 的幅频特性是相同的，这是因为 $x2(n)=x3((n-4))R8(n)$ ，他们之间满足循环移位

关系，对 $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 做 8 点 DFT 的结果仅有相位上的差别，所以 $x_3(n)$ 和 $x_2(n)$ 的 8 点 DFT 的幅频特性相同；但是，当 $N=16$ 时， $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 需要先补零到 16 个点再周期延拓，这使得他们之间不再具有循环移位关系，所以 16 点 DFT 的结果得到的模值不同，幅频特性自然也就不相同。从结果对比图中也可以很好地看出这一点。

2. 问题 2 离散周期序列的谱分析

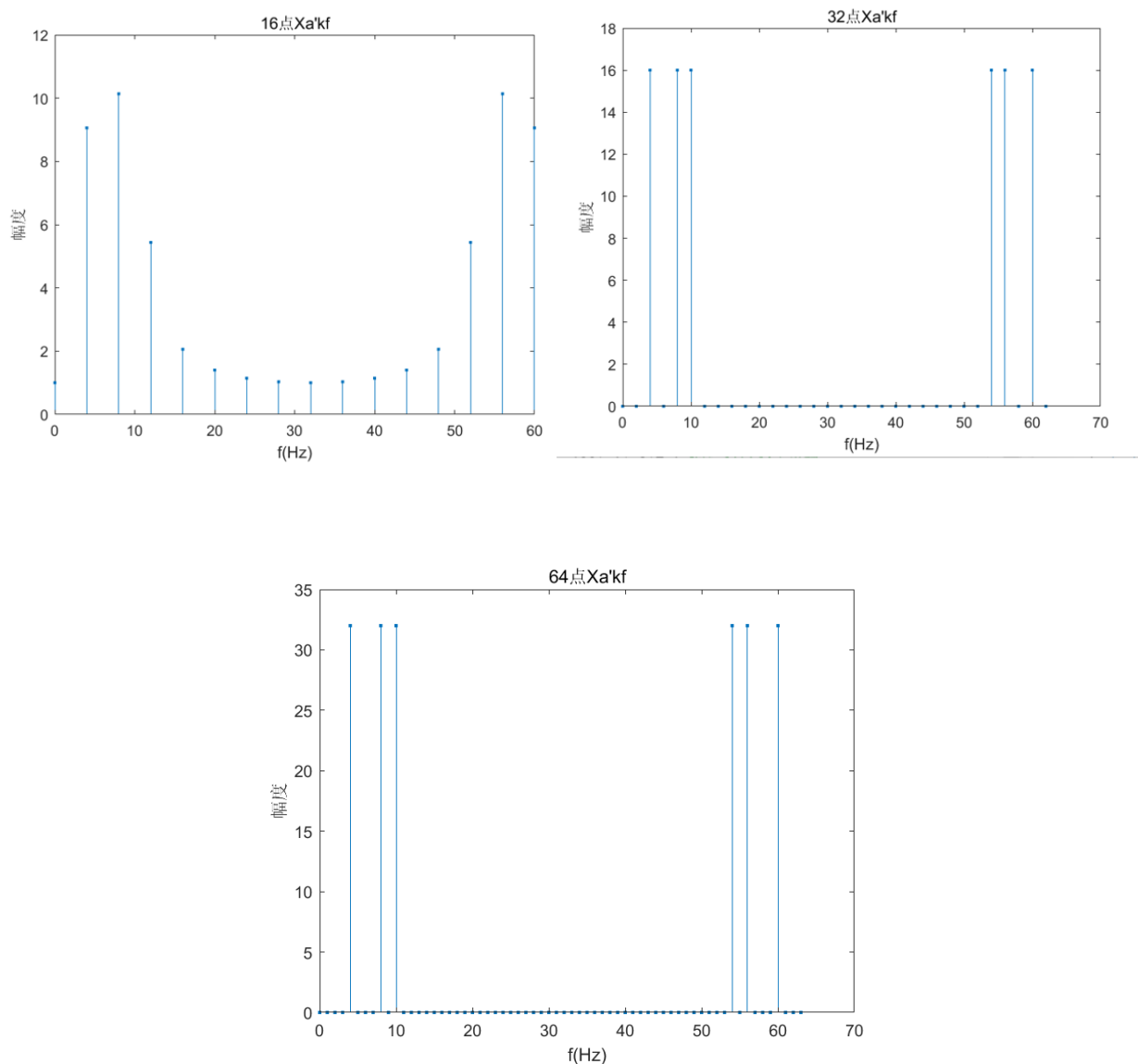


左图为周期序列 x_{4n} 的 8 点与 16 点 DFT 幅频特性，右图为 x_{5n} 的 8 点和 16 点 DFT 的幅频特性。实验中分别截取了 x_{4n} 和 x_{5n} 的 8 个点和 16 个点做 FFT。

x_{4n} 周期为 8， x_{5n} 周期为 16，由 DFT 频谱分析的理论可知，对于离散的周期序列，我们需要选取周期序列的周期整数倍作为变换长度 N 才能正确地反映序列的频谱的结果。由于 x_{4n} 以 8 点为周期，因此无论是做 8 点 DFT 还是 16 点 DFT 其频域只有 $\pm\frac{\pi}{4}$ 的频率处有值，且 16 点 DFT 的幅值是 8 点 DFT 的 2 倍，这是由于 $\cos\frac{\pi}{4}n$ 的频谱本身就是 $\pm\frac{\pi}{4}$ 的冲击，做 DFT 的点数 N 越多，主瓣会变窄，旁瓣会增加，更接近于真实的频谱，幅度越接近冲激，又窄又高。

x_{5n} 是周期为 16 点的周期序列， $\cos\frac{\pi}{4}n + \cos\frac{\pi}{8}n$ 的频域为 $\pm\frac{\pi}{4}$ 和 $\pm\frac{\pi}{8}$ 处的冲击。从右图中可以看出对 x_{5n} 做 16 点 DFT 时，其幅频特性与理论结果吻合，即只观测到这两个频率(及其周期延拓频率处)处有冲击。而 8 点的 DFT 小于 x_{5n} 的周期点数，其 8 点 DFT 的频谱出现了明显的频谱泄露，得到了错误的频谱，无法分辨出原周期序列 $\cos\frac{\pi}{4}n + \cos\frac{\pi}{8}n$ 中的频率成分。

3. 问题 3 模拟周期信号的谱分析



对于模拟的连续周期信号 $x_6(t)$ ，有三个频率成分：4Hz，8Hz 和 10Hz，首先对 $x_6(t)$ 进行时域采样的频率 $F_s=64\text{Hz}$ ，满足时域采样定理。先对模拟信号进行时域采样，采样时间间隔即观察长度 T_p 分别为 0.25s、0.5s 和 1s，实际上是得到了类似于问题 2 中的离散周期序列。序列周期长度为 0.5s，当观察长度不满足序列周期的整数倍时将表现出频谱混叠现象。

从图中可以看出，当对抽样序列 $X_6(n)$ 做 32 点和 64 点 DFT 时，观测到了正确的频率成分，包含 $\cos\frac{\pi}{8}n + \cos\frac{\pi}{4}n + \cos\frac{5\pi}{16}n$ 三个频率成分，只在 4Hz，8Hz 和 10Hz 处观察到频谱成分(在主值区间 $[0, N-1]$ 上观测)。32 点 DFT 的频率间隔为 2Hz，在第 2，4，5 根谱线处有值；64 点 DFT 的频率间隔为 1Hz，在第 4，8，10 根谱线有值。所不同的是 64 点 DFT 的幅度为 32 点 DFT 幅度的 2 倍，这是由于做 DFT 的变换区间点数加倍导致的。

对于 16 点 DFT 而言，必然观测到频谱混叠现象，在谱线中无法分辨出原有的三个频率成分，这实际上是窗函数包络处的取值。事实上如果对所得结果 $X(k)$ 除以变换周期长度 N 将会得到原有的真实幅值，它是周期序列傅里叶级数的系数。

值得注意的是，我们在做 32 点和 64 点 DFT 时，也发生了频谱混叠现象，因为采样点满足整数倍周期，所得到的点恰好只在三个频率成分处取值，在其他频率点处取到了窗函数频谱上的零点，所以显示出来的结果好像是没有发生频谱混叠。事实上只要对信号时域进行截断处理，必然发生频谱混叠，所以我们要合理地选择变换点数。

五、讨论

1. 实验结论与分析

用 FFT 对信号作频谱分析是学习数字信号处理的重要内容，经常需要进行谱分析的信号是模拟信号和时域离散信号，对信号进行谱分析的重要问题是频谱分辨率 D 和分析误差。

频谱分辨率直接和 FFT 的变换区间 N 有关，因为 FFT 能够实现的频率分辨率是 $2\pi/N$ ，因此要求 $2\pi/N \leq D$ 。可以根据此式选择 FFT 的变换区间 N 。误差主要来自于用 FFT 作频谱分析时，得到的是离散谱，而信号（周期信号除外）是连续谱，只有当 N 较大时离散谱的包络才能逼近于连续谱，因此 N 要适当选择大一些。

周期信号的频谱是离散谱，只有用整数倍周期的长度作 FFT，得到的离散谱才能代表周期信号的频谱。如果不知道信号周期，可以尽量选择信号的观察时间长一些。对模拟信号进行谱分析时，首先要按照采样定理将其变成时域离散信号。如果是模拟周期信号，也应该选取整数倍周期的长度，经过采样后形成周期序列，按照周期序列的谱分析进行。

2. 思考题

（1）对于周期序列，如果周期不知道，如何用 FFT 进行谱分析？

答：如果 $x(n)$ 的周期预先不知道，可截取 M 点进行 DFT，即

$$\begin{aligned}x_M(n) &= x(n)R_M(n) \\ X_M(k) &= DFT[x_M(n)] \quad 0 \leq k \leq M-1\end{aligned}$$

再将截取长度扩大 1 倍，截取

$$x_{2M}(n) = R_{2M}(n)$$

$$X_{2M}(k) = DFT[x_{2M}(n)] \quad 0 \leq k \leq 2M-1$$

比较 $x_M(k)$ 和 $x_{2M}(k)$ ，如果两者的主谱差别满足分析误差需求，则以 $x_M(k)$ 或 $x_{2M}(k)$ ， $M(k)$ 近似表示 $x(n)$ ，否则，继续将截取长度加倍，直至前后两次分析所得主谱频率差别满足误差要求。设最后截取长度为 iM ，则 $X_{iM}(k_0)$ 表示 $\omega = \frac{2\pi}{iM}k_0$ 点的谱线强度。

此外，也可以通过计算 $x(n)$ 的自相关函数来估算 $x(n)$ 的周期，然后使用 FFT 进行计算。

(2) 如何选择 FFT 的变换区间？（包括非周期信号和周期信号）

答：对于非周期信号：有频谱分辨率 F ，频谱分辨率直接 D 和 FFT 的变换区间 N 有关，因为 FFT 能够实现的频率分辨率是 $\frac{2\pi}{N}$ ，因此要求 $\frac{2\pi}{N} \leq D$ ，可以根据此式选择 FFT 的变换区间 N 。对于周期信号，周期信号的频谱是离散谱，只要截取 $x(n)$ 的整数个周期进行 DFT，就可以得到周期序列的频谱结构，达到谱分析的目的。

(3) 当 $N=8$ 时， $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的幅频特性会相同吗？为什么？ $N=16$ 呢？

答：当 $N=8$ 时， $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的幅频特性相同；当 $N=16$ 时， $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的幅频特性不同。 $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 的 8 点 DFT 的模相等，这是因为 $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 之间是循环移位四位的结果，而且他们的序列长度都是 8 点，做 8 点 DFT 的结果只在相位上有差别，所以他们的幅频特性相同。而做 16 点 DFT 时， $x_2(n)$ 和 $x_3(n)$ 需要先补零到 16 个点再周期延拓，这使得他们之间不再具有循环移位关系，所以 16 点 DFT 的结果得到的模值不同，幅频特性自然也就不相同。

六、附录

实验内容问题 1 代码	
X1(n)绘制部分	X2(n)和 x3(n)绘制部分
<pre> x1n=ones(1,4);%5 点 R4n x2n=[1:4,4:-1:1];%8 点三角波 x3n=[4:-1:1,1:4]; figure subplot(1,3,1);stem(x1n,'r. ');title("x1n") subplot(1,3,2);stem(x2n,'r. ');title("x2n") subplot(1,3,3);stem(x3n,'r. ');title("x3n") X1k8=fft(x1n,8);%计算 x1n 的 8 点 DFT X1k16=fft(x1n,16);%计算 x1n 的 16 点 DFT x1ejw = fft(x1n,1024); X2k8=fft(x2n,8);%计算 x2n 的 8 点 DFT X2k16=fft(x2n,16);%计算 x2n 的 16 点 DFT x2ejw = fft(x2n,1024); X3k8=fft(x3n,8);%计算 x3n 的 8 点 DFT X3k16=fft(x3n,16);%计算 x3n 的 16 点 DFT x3ejw = fft(x3n,1024); figure subplot(1,3,1);plot(0:1023,abs(x1ejw)) title("x1(ejw)") subplot(1,3,2);mstem(X1k8);%绘制 8 点 DFT 的幅频特性图 title("x1n 的 8 点 DFT") subplot(1,3,3);mstem(X1k16);%绘制 16 点 DFT 的幅频特性图 title('x1n 的 16 点 DFT') </pre>	<pre> figure(2) subplot(1,3,1) plot(0:1023,abs(x2ejw)) title("x2(ejw)") subplot(1,3,2);mstem(X2k8);%绘制 8 点 DFT 的幅频特性图 title('x2n 的 8 点 DFT'); subplot(1,3,3);mstem(X2k16);%绘制 16 点 DFT 的幅频特性图 title('x2n 的 16 点 DFT') figure(3) subplot(1,3,1) plot(0:1023,abs(x3ejw)) title("x3(ejw)") subplot(1,3,2);mstem(X3k8);%绘制 8 点 DFT 的幅频特性图 title('x3n 的 8 点 DFT'); subplot(1,3,3);mstem(X3k16);%绘制 16 点 DFT 的幅频特性图 title('x3n16 点 DFT') </pre>

实验内容问题 1 代码说明
其中 mstem 函数的调用需要在程序运行同目录下保存以下.m 的 function:
<pre> function mstem(Xk) M=length(Xk); k=0:M-1; wk=2*k/M; stem(wk,abs(Xk),'. '); box on;%绘制 M 点 DFT 的幅频特性图 xlabel('ω / π ');ylabel('幅度'); end </pre>

实验内容问题 2 代码	实验内容问题 3 代码
离散周期序列 x_4n 和 x_5n	模拟周期信号 x_6t
<pre> %实验内容(2)周期序列谱分析 m=0:7; x4n=cos(pi*m/4); x5n=cos(pi*m/4)+cos(pi*m/8); X4k8=fft(x4n,8);%计算 x4n 的 8 点 DFT X5k8=fft(x5n,8);%计算 x5n 的 8 点 DFT n=0:15;%FFT 的变换区间 N=16 x4n=cos(pi*n/4); x5n=cos(pi*n/4)+cos(pi*n/8); X4k16=fft(x4n,16);%计算 x4n 的 16 点 DFT X5k16=fft(x5n,16);%计算 x5n 的 16 点 DFT figure subplot(1,2,1); mstem(X4k8);%绘制 8 点 DFT 的幅频特性图 title('x4n 的 8 点 DFT') subplot(1,2,2); mstem(X4k16);%绘制 16 点 DFT 的幅频特性图 title('x4n 的 16 点 DFT') figure subplot(1,2,1); mstem(X5k8);%绘制 8 点 DFT 的幅频特性图 title('x5n 的 8 点 DFT') subplot(1,2,2); mstem(X5k16);%绘制 16 点 DFT 的幅频特性图 title('x5n 的 16 点 DFT') </pre>	<pre> %实验内容(3)模拟周期信号谱分析 Fs=64; Ts=1/Fs; n1=0:16-1; Tp1=16*Ts; x6nT=cos(8*pi*n1*Ts)+cos(16*pi*n1*Ts)+cos(20*pi*n1*Ts);% 对 x6(t)16 点采样 X6k16=fft(x6nT,16);%计算 x6nT 的 16 点 DFT figure stem((0:15)*1/Tp1,abs(X6k16),'.'); title('16 点 Xa''kf') xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度'); %FFT 的变换区间 N=32 figure n2=0:32-1; Tp2=32*Ts; x6nT=cos(8*pi*n2*Ts)+cos(16*pi*n2*Ts)+cos(20*pi*n2*Ts); X6k32=fft(x6nT,32);%计算 x6nT 的 32 点 DFT stem((0:31)/Tp2,abs(X6k32),'.'); title('32 点 Xa''kf');xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度'); %FFT 的变换区间 N=64 n3=0:64-1;Tp3=64*Ts; x6nT=cos(8*pi*n3*Ts)+cos(16*pi*n3*Ts)+cos(20*pi*n3*Ts);% 对 x6(t)64 点采样 X6k64=fft(x6nT,64);%计算 x6nT 的 64 点 DFT stem((0:63)/Tp3,abs(X6k64),'.'); title('64 点 Xa''kf'); xlabel('f(Hz)');ylabel('幅度'); </pre>