مدل‌سازی و حل مسئله برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای

شرح مسئله

یک کارگاه تولیدی قصد دارد مقدار تولید خود را در طول شش ماه آینده برنامه‌ریزی کند. تقاضای محصول در هر ماه از قبل مشخص بوده و تحویل محصول در **انتهای هر ماه** انجام می‌شود. کارگاه دارای محدودیت ظرفیت تولید و ظرفیت انبار است. همچنین هزینه‌های مختلفی شامل هزینه ثابت راه‌اندازی، هزینه تولید و هزینه نگهداری موجودی وجود دارد.

هدف این است که با تعیین مقدار تولید در هر ماه، به‌گونه‌ای که تمام تقاضاها به‌موقع تأمین شوند و در پایان ماه ششم (انتهای افق) هیچ موجودی باقی نماند، هزینه کل سیستم حداقل شود.

فرضیات مسئله

- تقاضای هر ماه قطعی و از پیش معلوم است.
- کمبود مجاز نیست و تمام تقاضاها باید به‌موقع تأمین شوند.
- تحویل محصول در انتهای هر ماه انجام می‌شود.
- هزینه‌ها در طول افق برنامه‌ریزی ثابت هستند.
- موجودی اولیه در ابتدای ماه اول برابر با ۱ واحد است.

داده‌های مسئله

- تعداد دوره‌ها: ۶ ماه
- ظرفیت تولید ماهانه: ۴ واحد
- ظرفیت انبار: ۲ واحد
- هزینه ثابت راه‌اندازی در هر ماه: ۱۰۰
- هزینه تولید هر واحد محصول: ۲۰۰
- هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه: ۵۰
- موجودی اولیه در ابتدای ماه اول: $S_1 = 1$

- موجودی در انتهای ماه ششم باید صفر باشد (معادل $S_7 = 0$)

$$d = [2,\ 2,\ 3,\ 0,\ 3,\ 1]$$

مدل ریاضی (با رویکرد موجودی ابتدای ماه)

مجموعه‌ها

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

پارامترها

d_t :	تقاضای ماه t
$C_p = 4$	ظرفیت تولید ماهانه:
$C_s = 2$	ظرفیت انبار:
$f = 100$	هزینه ثابت راه‌اندازی:
$c = 200$	هزینه تولید هر واحد:
$h = 50$	هزینه نگهداری هر واحد در ماه:
$S_1 = 1$	موجودی ابتدای ماه اول:

متغیرهای تصمیم

$x_t \geq 0$	مقدار تولید در ماه t
$S_t \geq 0$	موجودی ابتدای ماه t
$y_t \in \{0, 1\}$	$\begin{cases} 1 & \text{در صورت تولید در ماه } t \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

تابع هدف

در این رویکرد، هزینه نگهداریِ ماه t بر اساس موجودی ابتدای همان ماه S_t محاسبه می‌شود:

$$\min \sum_{t \in T} (f y_t + c x_t + h S_t)$$

قیود

تعادل موجودی (گذار ابتدای ماه به ابتدای ماه بعد)

$$S_{t+1} = S_t + x_t - d_t \qquad \forall t \in T$$

ظرفیت تولید

$$x_t \leq C_p\, y_t \qquad \forall t \in T$$

ظرفیت انبار

$$S_t \leq C_s \qquad \forall t \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

عدم کمبود

$$S_t \geq 0 \qquad \forall t \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

شرط‌های اولیه و انتهایی

$$S_1 = 1, \qquad S_7 = 0$$

نوع مسئله و جمع‌بندی

مدل ارائه‌شده یک مسئله **برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط (MILP)** از نوع **مسئله برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای با ظرفیت** است که قابلیت حل با ابزارهایی نظیر Pyomo و حل‌کننده GLPK را دارد. در ادامه، مسئله ابتدا با رویکرد برنامه‌ریزی پویا حل شده و سپس پاسخ به‌دست‌آمده با حل MILP اعتبارسنجی می‌شود.

حل با برنامه‌ریزی پویا (DP) با رویکرد موجودی ابتدای ماه

در این بخش، حل مسئله با استفاده از برنامه‌ریزی پویا به‌صورت مرحله‌به‌مرحله ارائه می‌شود. در هر مرحله، ابتدا مقادیر هزینه کل برای تصمیم‌های مجاز و سپس مقادیر نهایی $V_t(s)$ و $x_t^*(s)$ گزارش می‌شوند.

تعاریف برنامه‌ریزی پویا

- **مرحله:**

$$t = 1,2,3,4,5,6$$

- **حالت:**

$$s = S_t, \qquad s \in \{0,1,2\}$$

(state: inventory at the beginning of month t)

- **تصمیم:**

$$x = x_t, \qquad x \in \{0,1,2,3,4\}$$

(decision: production in month t)

• **انتقال حالت:**

$$s' = S_{t+1} = s + x - d_t$$

(next state: inventory at the beginning of month $t+1$)

قیود مجاز بودن تصمیم‌ها:

$$s + x \geq d_t, \qquad 0 \leq s' \leq 2.$$

هزینه مرحله‌ای و معادله بلمن

در این رویکرد، هزینه نگهداریِ ماه t برابر $h\,s$ است (موجودی ابتدای ماه):

$$g_t(s,x) = \begin{cases} 100 + 200x + 50s & x > 0, \\ 50s & x = 0, \end{cases} \qquad V_t(s) = \min_x \{g_t(s,x) + V_{t+1}(s')\}.$$

شرط پایانی

پس از ماه ۶ وارد حالت S_7 می‌شویم و باید $S_7 = 0$ باشد:

$$V_7(s) = \begin{cases} 0 & s = 0, \\ \infty & s \in \{1,2\}. \end{cases}$$

نکته

در جدول‌های زیر، علامت -- نشان‌دهندهٔ تصمیم‌های نامجاز است (تصمیم‌هایی که به حالت نامجاز یا پایان نامعتبر منتهی می‌شوند).

مرحله $t = 6$ (تقاضا $d_6 = 1$)

s	$x=0$	1	2	3	4	$V_6(s)$	$x_6^*(s)$
0	–	300	–	–	–	300	1
1	50	–	–	–	–	50	0
2	–	–	–	–	–	∞	–

مرحله $t = 5$ (تقاضا $d_5 = 3$)

s	$x=0$	1	2	3	4	$V_5(s)$	$x_5^*(s)$
0	–	–	–	1000	950	950	4
1	–	–	850	800	–	800	3
2	–	700	650	–	–	650	2

مرحله $t = 4$ (تقاضا $d_4 = 0$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_4(s)$	$x_4^*(s)$
0	950	1100	1150	–	–	950	0
1	850	1000	–	–	–	850	0
2	750	–	–	–	–	750	0

مرحله $t = 3$ (تقاضا $d_3 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_3(s)$	$x_3^*(s)$
0	–	–	–	1650	1750	1650	3
1	–	–	1500	1600	–	1500	2
2	–	1350	1450	–	–	1350	1

مرحله $t = 2$ (تقاضا $d_2 = 2$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_2(s)$	$x_2^*(s)$
0	–	–	2150	2200	2250	2150	2
1	–	2000	2050	2100	–	2000	1
2	1750	1900	1950	–	–	1750	0

مرحله $t = 1$ (تقاضا $d_1 = 2$)

توضیح: از آن‌جا که در داده‌های مسئله موجودی اولیه برابر با $S_1 = 1$ داده شده است، در این مرحله فقط حالت متناظر با $s = 1$ در جدول ارائه می‌شود و دو حالت دیگر ($s = 0$ و $s = 2$) نیازی به گزارش ندارند.

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_1(s)$	$x_1^*(s)$
1	–	2500	2550	2500	–	2500	1 or 3

نتیجه

با توجه به صورت مسئله $S_1 = 1$، هزینه کل بهینه برابر است با:

$$V_1(1) = 2500.$$

استخراج مسیر بهینه (یکی از جواب‌های بهینه)

(با انتخاب $x_1^* = 1$ یک مسیر بهینه به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.)

t	S_t	x_t^*	d_t	S_{t+1}
1	1	1	2	0
2	0	2	2	0
3	0	3	3	0
4	0	0	0	0
5	0	4	3	1
6	1	0	1	0

Optimal production plan: $(x_1, \ldots, x_6) = (1, 2, 3, 0, 4, 0)$, **Optimal total cost** $= 2500$.

یادآوری: طبق جدول مرحله ۱، انتخاب $x_1 = 3$ نیز هم‌ارزش است و یک برنامهٔ تولید بهینهٔ دیگر هم وجود دارد.

اعتبارسنجی مدل با حل MILP

برای اطمینان از صحت پاسخ به‌دست‌آمده از برنامه‌ریزی پویا، مدل MILP نیز (با همان تعریف موجودی ابتدای ماه) قابل حل با Pyomo/GLPK است.

فرمول‌بندی MILP (خلاصه)

$$\min \sum_{t=1}^{6} (f y_t + c x_t + h S_t)$$

$$S_{t+1} = S_t + x_t - d_t \qquad (t = 1, \ldots, 6), \quad S_1 = 1$$

$$x_t \le C_p y_t \qquad (t = 1, \ldots, 6)$$

$$0 \le S_t \le C_s \qquad (t = 1, \ldots, 7)$$

$$S_7 = 0, \qquad x_t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \quad S_t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \quad y_t \in \{0, 1\}$$

نتیجه

این مدل نیز همان هزینه بهینه را می‌دهد:

$$\text{Cost Total} = 2500.$$

نتیجه‌گیری و دسترسی به کد

در این گزارش، مسئلهٔ برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای با ظرفیت مدل‌سازی و با دو رویکرد DP و MILP حل شد. در این نسخه، مطابق رویکرد شکل/جزوه، S_t موجودی **ابتدای ماه** t تعریف شد؛ به همین دلیل هزینهٔ بهینه برابر 2500 به‌دست آمد.

کد کامل پروژه در گیت‌هاب:

`https://github.com/shayan-hm/Capacitated-Lot-Sizing-Problem-CLSP-`