مدل‌سازی و حل مسئله برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای

مقدمه

برنامه‌ریزی تولید یکی از مسائل اساسی در تحقیق در عملیات است که هدف آن تعیین مقدار تولید در دوره‌های زمانی مختلف به‌گونه‌ای است که تقاضای مشتریان تأمین شده و هزینه‌های کل سیستم حداقل شود. در این گزارش، مسئله برنامه‌ریزی تولید یک کارگاه در افق زمانی شش‌ماهه مورد بررسی قرار می‌گیرد. از آن‌جا که تصمیمات تولید در هر ماه بر موجودی ماه‌های بعدی اثر می‌گذارند، این مسئله یک مسئله چنددوره‌ای محسوب می‌شود.

شرح مسئله

یک کارگاه تولیدی قصد دارد مقدار تولید خود را در طول شش ماه آینده برنامه‌ریزی کند. تقاضای محصول در هر ماه از قبل مشخص بوده و تحویل محصول در **انتهای هر ماه** انجام می‌شود. کارگاه دارای محدودیت ظرفیت تولید و ظرفیت انبار است. همچنین هزینه‌های مختلفی شامل هزینه ثابت راه‌اندازی، هزینه تولید و هزینه نگهداری موجودی وجود دارد.

هدف این است که با تعیین مقدار تولید در هر ماه، به‌گونه‌ای که تمام تقاضاها به‌موقع تأمین شوند و در پایان دوره ششم هیچ موجودی باقی نماند، هزینه کل سیستم حداقل شود.

فرضیات مسئله

- تقاضای هر ماه قطعی و از پیش معلوم است.
- کمبود مجاز نیست و تمام تقاضاها باید به‌موقع تأمین شوند.
- تحویل محصول در انتهای هر ماه انجام می‌شود.
- هزینه‌ها در طول افق برنامه‌ریزی ثابت هستند.
- موجودی اولیه در ابتدای ماه اول برابر با ۱ واحد است.

داده‌های مسئله

- تعداد دوره‌ها: ۶ ماه
- ظرفیت تولید ماهانه: ۴ واحد

- ظرفیت انبار: ۲ واحد
- هزینه ثابت راه‌اندازی در هر ماه: ۱۰۰
- هزینه تولید هر واحد محصول: ۲۰۰
- هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه: ۵۰
- موجودی اولیه: ۱ واحد
- موجودی انتهای ماه ششم باید صفر باشد

$$d = [2,\ 2,\ 3,\ 0,\ 3,\ 1]$$

مدل ریاضی

مجموعه‌ها

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

پارامترها

d_t :	تقاضای ماه t
$C_p = 4$	ظرفیت تولید ماهانه:
$C_s = 2$	ظرفیت انبار:
$f = 100$	هزینه ثابت راه‌اندازی:
$c = 200$	هزینه تولید هر واحد:
$h = 50$	هزینه نگهداری هر واحد در ماه:
$S_0 = 1$	موجودی اولیه:

متغیرهای تصمیم

$x_t \geq 0$ مقدار تولید در ماه t

$S_t \geq 0$ موجودی انتهای ماه t

$y_t \in \{0, 1\}$ $\begin{cases} 1 & \text{در صورت تولید در ماه } t \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

تابع هدف

$$\min \sum_{t \in T} (f y_t + c x_t + h S_t)$$

قیود

تعادل موجودی

$$S_t = S_{t-1} + x_t - d_t \qquad \forall t \in T$$

ظرفیت تولید

$$x_t \le C_p\, y_t \qquad \forall t \in T$$

ظرفیت انبار

$$S_t \le C_s \qquad \forall t \in T$$

عدم کمبود

$$S_t \ge 0 \qquad \forall t \in T$$

شرط انتهایی

$$S_6 = 0$$

نوع مسئله و جمع‌بندی

مدل ارائه‌شده یک مسئله **برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط (MILP)** از نوع **مسئله برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای با ظرفیت** است که قابلیت حل با ابزارهایی نظیر Pyomo و حل‌کننده GLPK را دارد. در ادامه، مسئله ابتدا با رویکرد برنامه‌ریزی پویا حل شده و سپس پاسخ با حل MILP در Pyomo/GLPK اعتبارسنجی می‌شود.

حل با برنامه‌ریزی پویا (DP) به‌صورت جدول‌های کم‌حجم

در این بخش حل برنامه‌ریزی پویا به‌صورت مرحله‌به‌مرحله ارائه می‌شود. برای جلوگیری از شلوغی، در هر مرحله فقط مقدار Total برای تصمیم‌های ممکن و سپس مقدارهای نهایی $V_t(s)$ و $x_t^{(s)}$ گزارش می‌شود.

تعاریف DP (Stage، State، Decision)

- مرحله: $t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- حالت: $s = S_t$ (inventory at the beginning of month t)، $\quad s \in \{0, 1, 2\}$
- تصمیم: $x = x_t$ (production in month t)، $\quad x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

- انتقال: $s' = s + x - d_t$ (end-of-month inventory)

قیدهای مجاز بودن تصمیم:

$$s + x \ge d_t, \qquad 0 \le s' \le 2.$$

هزینه مرحله‌ای و معادله بلمن

$$g_t(s,x) = \begin{cases} 100 + 200x + 50s' & x > 0, \\ 50s' & x = 0, \end{cases} \qquad V_t(s) = \min_x \{g_t(s,x) + V_{t+1}(s')\}.$$

شرط پایانی (عدم باقی‌مانده در پایان افق):

$$V_7(s) = \begin{cases} 0 & s = 0, \\ \infty & s \in \{1,2\}. \end{cases}$$

نکته

در جدول‌های زیر، علامت – یعنی تصمیم infeasible است (یا به حالت نامجاز/پایان نامجاز منتهی می‌شود).

Stage $t=6$ (Demand $d_6 = 1$)

s	$x=0$	1	2	3	4	$V_6(s)$	$x_6^{(s)}$
0	–	300	–	–	–	300	1
1	0	–	–	–	–	0	0
2	–	–	–	–	–	∞	–

Stage $t=5$ (Demand $d_5 = 3$)

s	$x=0$	1	2	3	4	$V_5(s)$	$x_5^{(s)}$
0	–	–	–	1000	950	950	4
1	–	–	800	750	–	750	3
2	–	600	550	–	–	550	2

Stage $t=4$ (Demand $d_4 = 0$)

s	$x=0$	1	2	3	4	$V_4(s)$	$x_4^{(s)}$
0	950	1100	1150	–	–	950	0
1	800	950	–	–	–	800	0
2	650	–	–	–	–	650	0

Stage $t = 3$ (Demand $d_3 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_3(s)$	$x_3^{(s)}$
0	–	–	–	1650	1750	1650	3
1	–	–	1450	1550	–	1450	2
2	–	1250	1350	–	–	1250	1

Stage $t = 2$ (Demand $d_2 = 2$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_2(s)$	$x_2^{(s)}$
0	–	–	2150	2200	2250	2150	2
1	–	1950	2000	2050	–	1950	1
2	1650	1800	1850	–	–	1650	0

Stage $t = 1$ (Demand $d_1 = 2$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_1(s)$	$x_1^{(s)}$
0	–	–	2650	2700	2650	2650	2
1	–	2450	2500	2450	–	2450	1
2	2150	2300	2250	–	–	2150	0

نتیجه برای موجودی اولیه $S_1 = 1$

با توجه به صورت مسئله $S_1 = 1$، هزینه بهینه برابر است با:

$$V_1(1) = 2450.$$

استخراج مسیر (Policy) بهینه

t	S_t	x_t	d_t	S_{t+1}
1	1	1	2	0
2	0	2	2	0
3	0	3	3	0
4	0	0	0	0
5	0	4	3	1
6	1	0	1	0

Optimal production plan : $(x_1, \ldots, x_6) = (1, 2, 3, 0, 4, 0)$, **Optimal total cost** $= 2450.$

اعتبارسنجی مدل با حل MILP در Pyomo

برای اطمینان از صحت پاسخ به‌دست‌آمده از برنامه‌ریزی پویا، مدل MILP نیز با استفاده از Pyomo و حل‌کننده GLPK حل شد. در این مدل، متغیر دودویی y_t برای نمایش راه‌اندازی تولید در ماه t به‌کار رفت و با قید $x_t \leq C_p y_t$ هزینه ثابت راه‌اندازی فقط در صورت تولید اعمال می‌شود.

فرمول‌بندی MILP (خلاصه)

$$\min \sum_{t=1}^{6} (f y_t + c x_t + h S_t)$$

$$S_t = S_{t-1} + x_t - d_t \qquad (t = 1, \ldots, 6), \;\; S_0 = 1$$

$$x_t \leq C_p y_t \qquad (t = 1, \ldots, 6)$$

$$0 \leq S_t \leq C_s \qquad (t = 1, \ldots, 6)$$

$$S_6 = 0, \qquad x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad S_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad y_t \in \{0, 1\}$$

نتایج حل با Pyomo/GLPK

نتایج خروجی حل‌کننده به‌صورت زیر است:

Month t	Production x_t	Inventory S_t	Setup y_t
1	1	0	1
2	2	0	1
3	3	0	1
4	0	0	0
5	4	1	1
6	0	0	0

هزینه کل بهینه به‌دست‌آمده از حل MILP برابر است با:

$$\text{Total Cost} = 2450.$$

دسترسی به کد

کد حل مسئله با Pyomo در مخزن گیت‌هاب زیر قرار داده شده است:
https://github.com/shayan-hm/Capacitated-Lot-Sizing-Problem-CLSP-

جمع‌بندی

مطابق نتایج، برنامه تولید بهینه و هزینه کل حاصل از Pyomo/GLPK کاملاً با پاسخ به‌دست‌آمده از برنامه‌ریزی پویا منطبق است؛ بنابراین پاسخ نهایی مسئله معتبر می‌باشد.