مدل‌سازی و حل مسئله برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای

شرح مسئله

یک کارگاه تولیدی قصد دارد مقدار تولید خود را در طول شش ماه آینده برنامه‌ریزی کند. تقاضای محصول در هر ماه از قبل مشخص بوده و تحویل محصول در **انتهای هر ماه** انجام می‌شود. کارگاه دارای محدودیت ظرفیت تولید و ظرفیت انبار است. همچنین هزینه‌های مختلفی شامل هزینه ثابت راه‌اندازی، هزینه تولید و هزینه نگهداری موجودی وجود دارد.

هدف این است که با تعیین مقدار تولید در هر ماه، به‌گونه‌ای که تمام تقاضاها به‌موقع تأمین شوند و در پایان افق برنامه‌ریزی هیچ موجودی باقی نماند، هزینه کل سیستم حداقل شود.

فرضیات مسئله

- تقاضای هر ماه قطعی و از پیش معلوم است.
- کمبود مجاز نیست و تمام تقاضاها باید به‌موقع تأمین شوند.
- تحویل محصول در انتهای هر ماه انجام می‌شود.
- هزینه‌ها در طول افق برنامه‌ریزی ثابت هستند.
- موجودی اولیه در ابتدای ماه اول برابر با ۱ واحد است.

داده‌های مسئله

- تعداد دوره‌ها: ۶ ماه
- ظرفیت تولید ماهانه: ۴ واحد
- ظرفیت انبار: ۲ واحد
- هزینه ثابت راه‌اندازی در هر ماه: ۱۰۰
- هزینه تولید هر واحد محصول: ۲۰۰
- هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه: ۵۰
- موجودی اولیه (ابتدای ماه اول): ۱ واحد

• موجودی در پایان افق (ابتدای ماه هفتم) باید صفر باشد

$$d = [2,\ 2,\ 3,\ 0,\ 3,\ 1]$$

مدل ریاضی (با رویکرد موجودی ابتدای دوره)

مجموعه‌ها

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

پارامترها

d_t : تقاضای ماه t

$C_p = 4$ ظرفیت تولید ماهانه:

$C_s = 2$ ظرفیت انبار:

$f = 100$ هزینه ثابت راه‌اندازی:

$c = 200$ هزینه تولید هر واحد:

$h = 50$ هزینه نگهداری هر واحد در ماه:

$S_1 = 1$ موجودی اولیه (ابتدای ماه اول):

متغیرهای تصمیم

$x_t \geq 0$ مقدار تولید در ماه t

$S_t \geq 0$ موجودی ابتدای ماه t

$$y_t \in \{0, 1\} \quad \begin{cases} 1 & \text{در صورت تولید در ماه } t \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

تابع هدف

در این رویکرد، هزینه نگهداری برای موجودیِ باقی‌مانده پس از تأمین تقاضای ماه t (یعنی موجودی ابتدای ماه بعد S_{t+1}) محاسبه می‌شود، لذا:

$$\min \sum_{t \in T} (f y_t + c x_t + h S_{t+1})$$

قیود

تعادل موجودی (انتقال از ابتدای ماه t به ابتدای ماه $t+1$)

$$S_{t+1} = S_t + x_t - d_t \qquad \forall t \in T$$

ظرفیت تولید

$$x_t \le C_p\, y_t \qquad \forall t \in T$$

ظرفیت انبار

(برای موجودی‌های ابتدای ماه)

$$S_t \le C_s \qquad t = 1, 2, \dots, 7$$

عدم کمبود

$$S_{t+1} \ge 0 \qquad \forall t \in T$$

شرط انتهایی

$$S_7 = 0$$

نوع مسئله و جمع‌بندی

مدل ارائه‌شده یک مسئله **برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط (MILP)** از نوع **مسئله برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای با ظرفیت** است که قابلیت حل با ابزارهایی نظیر Pyomo و حل‌کننده GLPK را دارد. در ادامه، مسئله ابتدا با رویکرد برنامه‌ریزی پویا حل شده و سپس پاسخ به‌دست‌آمده با حل MILP اعتبارسنجی می‌شود.

حل با برنامه‌ریزی پویا (DP)

در این بخش، حل مسئله با استفاده از برنامه‌ریزی پویا به‌صورت مرحله‌به‌مرحله ارائه می‌شود. برای جلوگیری از شلوغی، در هر مرحله ابتدا مقادیر هزینه کل برای تصمیم‌های مجاز و سپس مقادیر نهایی $V_t(s)$ و $x_t^*(s)$ گزارش می‌شوند.

تعاریف برنامه‌ریزی پویا

- **مرحله:**

$$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

• حالت:

$$s = S_t, \qquad s \in \{0,1,2\}$$

(state: inventory at the beginning of month t)

• تصمیم:

$$x = x_t, \qquad x \in \{0,1,2,3,4\}$$

(decision: production in month t)

• انتقال حالت:

$$s' = s + x - d_t$$

(next state: inventory at the beginning of month $t+1$)

قیود مجاز بودن تصمیم‌ها:

$$s + x \geq d_t, \qquad 0 \leq s' \leq 2.$$

هزینه مرحله‌ای و معادله بلمن

$$g_t(s,x) = \begin{cases} 100 + 200x + 50s' & x > 0, \\ 50s' & x = 0, \end{cases}$$

$$V_t(s) = \min_x \{g_t(s,x) + V_{t+1}(s')\}.$$

شرط پایانی

$$V_7(s) = \begin{cases} 0 & s = 0, \\ \infty & s \in \{1,2\}. \end{cases}$$

نکته

در جدول‌های زیر، علامت -- نشان‌دهندهٔ تصمیم‌های نامجاز است (تصمیم‌هایی که به حالت نامجاز یا پایان نامعتبر منتهی می‌شوند).

Stage $t = 6$ (Demand $d_6 = 1$)

s	$x=0$	1	2	3	4	$V_6(s)$	$x_6^*(s)$
0	–	300	–	–	–	300	1
1	0	–	–	–	–	0	0
2	–	–	–	–	–	∞	–

Stage $t = 5$ (Demand $d_5 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_5(s)$	$x_5^*(s)$
0	–	–	–	1000	950	950	4
1	–	–	800	750	–	750	3
2	–	600	550	–	–	550	2

Stage $t = 4$ (Demand $d_4 = 0$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_4(s)$	$x_4^*(s)$
0	950	1100	1150	–	–	950	0
1	800	950	–	–	–	800	0
2	650	–	–	–	–	650	0

Stage $t = 3$ (Demand $d_3 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_3(s)$	$x_3^*(s)$
0	–	–	–	1650	1750	1650	3
1	–	–	1450	1550	–	1450	2
2	–	1250	1350	–	–	1250	1

Stage $t = 2$ (Demand $d_2 = 2$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_2(s)$	$x_2^*(s)$
0	–	–	2150	2200	2250	2150	2
1	–	1950	2000	2050	–	1950	1
2	1650	1800	1850	–	–	1650	0

Stage $t = 1$ (Demand $d_1 = 2$)

توضیح: از آن‌جا که در داده‌های مسئله مقدار موجودی اولیه برابر با $S_1 = 1$ داده شده است، در این مرحله فقط حالت متناظر با $s = 1$ در جدول ارائه می‌شود و سایر حالت‌ها ($s = 0$ و $s = 2$) در نظر گرفته نمی‌شوند.

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_1(s)$	$x_1^*(s)$
1	–	2450	2500	2450	–	2450	1

نتیجه:

با توجه به صورت مسئله $S_1 = 1$، هزینه کل بهینه برابر است با:

$$V_1(1) = 2450.$$

استخراج مسیر بهینه

t	S_t	x_t^*	d_t	S_{t+1}
1	1	1	2	0
2	0	2	2	0
3	0	3	3	0
4	0	0	0	0
5	0	4	3	1
6	1	0	1	0

Optimal production plan: $(x_1, \dots, x_6) = (1, 2, 3, 0, 4, 0)$, **Optimal total cost** $= 2450$.

اعتبارسنجی مدل با حل MILP

برای اطمینان از صحت پاسخ به‌دست‌آمده از برنامه‌ریزی پویا، مدل MILP نیز با استفاده از Pyomo و حل‌کننده GLPK حل شد.

فرمول‌بندی MILP (خلاصه)

$$\min \sum_{t=1}^{6} (f y_t + c x_t + h S_{t+1})$$

$$S_{t+1} = S_t + x_t - d_t \qquad (t = 1, \dots, 6), \quad S_1 = 1$$

$$x_t \le C_p y_t \qquad (t = 1, \dots, 6)$$

$$0 \le S_t \le C_s \qquad (t = 1, \dots, 7)$$

$$S_7 = 0, \quad x_t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \quad S_t \in \mathbb{Z}_{\ge 0}, \quad y_t \in \{0, 1\}$$

نتایج حل با Pyomo/GLPK

نتایج حل‌کننده نشان می‌دهد که پاسخ به‌دست‌آمده از حل MILP کاملاً با پاسخ برنامه‌ریزی پویا منطبق بوده و هزینه کل بهینه برابر است با:

$$\text{Cost Total} = 2450.$$

دسترسی به کد

کد حل مسئله در مخزن گیت‌هاب زیر قرار دارد:
https://github.com/shayan-hm/Capacitated-Lot-Sizing-Problem-CLSP-