

مدل سازی و حل مسئله برنامه ریزی تولید چند دوره ای

شرح مسئله

یک کارگاه تولیدی قصد دارد مقدار تولید خود را در طول شش ماه آینده برنامه ریزی کند. تقاضای محصول در هر ماه از قبل مشخص بوده و تحویل محصول در انتهای هر ماه انجام می شود. کارگاه دارای محدودیت ظرفیت تولید و ظرفیت انبار است. همچنین هزینه های مختلفی شامل هزینه ثابت راه اندازی، هزینه تولید و هزینه نگهداری موجودی وجود دارد. هدف این است که با تعیین مقدار تولید در هر ماه، به گونه ای که تمام تقاضاها به موقع تأمین شوند و در پایان دوره ششم هیچ موجودی باقی نماند، هزینه کل سیستم حداقل شود.

فرضیات مسئله

- تقاضای هر ماه قطعی و از پیش معلوم است.
- کمبود مجاز نیست و تمام تقاضاها باید به موقع تأمین شوند.
- تحویل محصول در انتهای هر ماه انجام می شود.
- هزینه ها در طول افق برنامه ریزی ثابت هستند.
- موجودی اولیه در ابتدای ماه اول برابر با ۱ واحد است.

داده های مسئله

- تعداد دوره ها: ۶ ماه
- ظرفیت تولید ماهانه: ۴ واحد
- ظرفیت انبار: ۲ واحد
- هزینه ثابت راه اندازی در هر ماه: ۱۰۰
- هزینه تولید هر واحد محصول: ۲۰۰
- هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه: ۵۰
- موجودی اولیه: ۱ واحد

• موجودی انتهای ماه ششم باید صفر باشد

$$d = [2, 2, 3, 0, 3, 1]$$

مدل ریاضی

مجموعه‌ها

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

پارامترها

$d_t :$	t تقاضای ماه
$C_p = 4$	ظرفیت تولید ماهانه:
$C_s = 2$	ظرفیت انبار:
$f = 100$	هزینه ثابت راه‌اندازی:
$c = 200$	هزینه تولید هر واحد:
$h = 50$	هزینه نگهداری هر واحد در ماه:
$S_0 = 1$	موجودی اولیه:

متغیرهای تصمیم

$$\begin{aligned} x_t &\geq 0 && t \text{ مقدار تولید در ماه} \\ S_t &\geq 0 && t \text{ موجودی انتهای ماه} \\ y_t \in \{0, 1\} &&& \begin{cases} 1 & \text{در صورت تولید در ماه} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \end{aligned}$$

تابع هدف

$$\min \sum_{t \in T} (fy_t + cx_t + hS_t)$$

قیود

تعادل موجودی

$$S_t = S_{t-1} + x_t - d_t \quad \forall t \in T$$

ظرفیت تولید

$$x_t \leq C_p y_t \quad \forall t \in T$$

ظرفیت انبار

$$S_t \leq C_s \quad \forall t \in T$$

عدم کمبود

$$S_t \geq 0 \quad \forall t \in T$$

شرط انتهایی

$$S_6 = 0$$

نوع مسئله و جمع بندی

مدل ارائه شده یک مسئله برنامه ریزی خطی عدد صحیح مختلط (MILP) از نوع مسئله برنامه ریزی تولید چند دوره ای با ظرفیت است که قابلیت حل با ابزارهایی نظیر Pyomo و حل کننده GLPK را دارد. در ادامه، مسئله ابتدا با رویکرد برنامه ریزی پویا حل شده و سپس پاسخ به دست آمده با حل MILP اعتبارسنجی می شود.

حل با برنامه ریزی پویا (DP)

در این بخش، حل مسئله با استفاده از برنامه ریزی پویا به صورت مرحله به مرحله ارائه می شود. برای جلوگیری از شلوغی، در هر مرحله ابتدا مقادیر هزینه کل برای تصمیم های مجاز و سپس مقادیر نهایی $V_t(s)$ و $x_t^*(s)$ گزارش می شوند.

تعاریف برنامه ریزی پویا

• مرحله:

$$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

• حالت:

$$s = S_t$$

(inventory at the beginning of month) t , $s \in \{0, 1, 2\}$

• تصمیم:

$$x = x_t$$

(production in month) t , $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

• انتقال حالت:

$$s' = s + x - d_t$$

(end-of-month inventory)

قيود مجاز بودن تصميم‌ها:

$$s + x \geq d_t, \quad 0 \leq s' \leq 2.$$

هزينه مرحله‌ای و معادله بلين

$$g_t(s, x) = \begin{cases} 100 + 200x + 50s' & x > 0, \\ 50s' & x = 0, \end{cases}$$

$$V_t(s) = \min_x \{g_t(s, x) + V_{t+1}(s')\}.$$

شرط پایانی

$$V_7(s) = \begin{cases} 0 & s = 0, \\ \infty & s \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

نکته

در جدول‌های زیر، علامت -- نشان‌دهندهٔ تصميم‌های نامجاز است (تصميم‌هایی که به حالت نامجاز يا پايان نامعتبر منتهی می‌شوند).

Stage $t = 6$ (Demand $d_6 = 1$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_6(s)$	$x_6^*(s)$
0	–	300	–	–	–	300	1
1	0	–	–	–	–	0	0
2	–	–	–	–	–	∞	–

Stage $t = 5$ (Demand $d_5 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_5(s)$	$x_5^*(s)$
0	–	–	–	1000	950	950	4
1	–	–	800	750	–	750	3
2	–	600	550	–	–	550	2

Stage $t = 4$ (Demand $d_4 = 0$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_4(s)$	$x_4^*(s)$
0	950	1100	1150	–	–	950	0
1	800	950	–	–	–	800	0
2	650	–	–	–	–	650	0

Stage $t = 3$ (Demand $d_3 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_3(s)$	$x_3^*(s)$
0	–	–	–	1650	1750	1650	3
1	–	–	1450	1550	–	1450	2
2	–	1250	1350	–	–	1250	1

Stage $t = 2$ (Demand $d_2 = 2$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_2(s)$	$x_2^*(s)$
0	–	–	2150	2200	2250	2150	2
1	–	1950	2000	2050	–	1950	1
2	1650	1800	1850	–	–	1650	0

Stage $t = 1$ (Demand $d_1 = 2$)

توضیح: از آن جا که در داده های مسئله مقدار موجودی اولیه برابر با $S_1 = 1$ داده شده است، در این مرحله فقط حالت متناظر با $s = 1$ در جدول ارائه می شود و سایر حالت ها ($s = 0$ و $s = 2$) در نظر گرفته نمی شوند.

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_1(s)$	$x_1^*(s)$
1	–	2450	2500	2450	–	2450	1

نتیجه:

با توجه به صورت مسئله $S_1 = 1$ ، هزینه کل بهینه برابر است با:

$$V_1(1) = 2450.$$

استخراج مسیر بهینه

t	S_t	x_t^*	d_t	S_{t+1}
1	1	1	2	0
2	0	2	2	0
3	0	3	3	0
4	0	0	0	0
5	0	4	3	1
6	1	0	1	0

Optimal production plan: $(x_1, \dots, x_6) = (1, 2, 3, 0, 4, 0)$, **Optimal total cost** = 2450.

اعتبارسنجی مدل با حل MILP

برای اطمینان از صحت پاسخ به دست آمده از برنامه ریزی پویا، مدل MILP نیز با استفاده از Pyomo و حل کننده GLPK حل شد.

فرمول بندی MILP (خلاصه)

$$\begin{aligned}
 & \min \sum_{t=1}^6 (fy_t + cx_t + hS_t) \\
 & S_t = S_{t-1} + x_t - d_t \quad (t = 1, \dots, 6), \quad S_0 = 1 \\
 & x_t \leq C_p y_t \quad (t = 1, \dots, 6) \\
 & 0 \leq S_t \leq C_s \quad (t = 1, \dots, 6) \\
 & S_6 = 0, \quad x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad S_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad y_t \in \{0, 1\}
 \end{aligned}$$

نتایج حل با Pyomo/GLPK

نتایج حل کننده نشان می دهد که پاسخ به دست آمده از حل MILP کاملاً با پاسخ برنامه ریزی پویا منطبق بوده و هزینه کل بهینه برابر است با:

$$\text{Cost Total} = 2450.$$

دسترسی به کد

کد حل مسئله در مخزن گیت هاب زیر قرار دارد:

<https://github.com/shayan-hm/Capacitated-Lot-Sizing-Problem-CLSP->