

مدل سازی و حل مسئله برنامه ریزی تولید چند دوره‌ای

شرح مسئله

یک کارگاه تولیدی قصد دارد مقدار تولید خود را در طول شش ماه آینده برنامه ریزی کند. تقاضای مخصوص در هر ماه از قبل مشخص بوده و تحویل مخصوص در انتهای هر ماه انجام می‌شود. کارگاه دارای محدودیت ظرفیت تولید و ظرفیت انبار است. همچنین هزینه‌های مختلفی شامل هزینه ثابت راه‌اندازی، هزینه تولید و هزینه نگهداری موجودی وجود دارد. هدف این است که با تعیین مقدار تولید در هر ماه، به‌گونه‌ای که تمام تقاضاها به موقع تأمین شوند و در پایان دوره ششم هیچ موجودی باقی نماند، هزینه کل سیستم حداقل شود.

فرضیات مسئله

- تقاضای هر ماه قطعی و از پیش معلوم است.
- کم بود مجاز نیست و تمام تقاضاها باید به موقع تأمین شوند.
- تحویل مخصوص در انتهای هر ماه انجام می‌شود.
- هزینه‌ها در طول افق برنامه ریزی ثابت هستند.
- موجودی اولیه در ابتدای ماه اول برابر با ۱ واحد است.

داده‌های مسئله

- تعداد دوره‌ها: ۶ ماه
- ظرفیت تولید ماهانه: ۴ واحد
- ظرفیت انبار: ۲ واحد
- هزینه ثابت راه‌اندازی در هر ماه: ۱۰۰
- هزینه تولید هر واحد مخصوص: ۲۰۰
- هزینه نگهداری هر واحد موجودی در ماه: ۵۰
- موجودی اولیه: ۱ واحد

• موجودی انتهای ماه ششم باید صفر باشد

$$d = [2, 2, 3, 0, 3, 1]$$

مدل ریاضی

مجموعه‌ها

$$T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

پارامترها

d_t :	تتقاضای ماه t
$C_p = 4$	ظرفیت تولید ماهانه:
$C_s = 2$	ظرفیت انبار:
$f = 100$	هزینه ثابت راه اندازی:
$c = 200$	هزینه تولید هر واحد:
$h = 50$	هزینه نگهداری هر واحد در ماه:
$S_0 = 1$	موجودی اولیه:

متغیرهای تصمیم

$x_t \geq 0$	مقدار تولید در ماه t
$S_t \geq 0$	موجودی انتهای ماه t
$y_t \in \{0, 1\}$	$\begin{cases} 1 & \text{در صورت تولید در ماه } t \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

تابع هدف

$$\min \sum_{t \in T} (fy_t + cx_t + hS_t)$$

قیود

تعادل موجودی

$$S_t = S_{t-1} + x_t - d_t \quad \forall t \in T$$

ظرفیت تولید

$$x_t \leq C_p y_t \quad \forall t \in T$$

ظرفیت انبار

$$S_t \leq C_s \quad \forall t \in T$$

عدم کمبود

$$S_t \geq 0 \quad \forall t \in T$$

شرط انتهایی

$$S_6 = 0$$

نوع مسئله و جمع‌بندی

مدل ارائه شده یک مسئله برنامه‌ریزی خطی عدد صحیح مختلط (MILP) از نوع مسئله برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای با ظرفیت است که قابلیت حل با ابزارهایی نظیر Pyomo و حل کننده GLPK را دارد. در ادامه، مسئله ابتدا با رویکرد برنامه‌ریزی پویا حل شده و سپس پاسخ به دست آمده با حل MILP اعتبارسنجی می‌شود.

حل با برنامه‌ریزی پویا (DP)

در این بخش، حل مسئله با استفاده از برنامه‌ریزی پویا به صورت مرحله‌به‌مرحله ارائه می‌شود. برای جلوگیری از شلوغی، در هر مرحله ابتدا مقادیر هزینه کل برای تصمیم‌های مجاز و سپس مقادیر نهایی $x_t^*(s)$ و $V_t(s)$ گذارش می‌شوند.

تعاریف برنامه‌ریزی پویا

• مرحله:

$$t = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

• حالت:

$$s = S_t$$

(inventory at the beginning of month) t , $s \in \{0, 1, 2\}$

• تصمیم:

$$x = x_t$$

(production in month) t , $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

• انتقال حالت:

$$s' = s + x - d_t$$

(end-of-month inventory)

قيود بمحاذ بودن تصميم ها:

$$s + x \geq d_t, \quad 0 \leq s' \leq 2.$$

هزينه مرحله اي و معادله بلمن

$$g_t(s, x) = \begin{cases} 100 + 200x + 50s' & x > 0, \\ 50s' & x = 0, \end{cases}$$

$$V_t(s) = \min_x \{g_t(s, x) + V_{t+1}(s')\}.$$

شرط پيانى

$$V_7(s) = \begin{cases} 0 & s = 0, \\ \infty & s \in \{1, 2\}. \end{cases}$$

نکته

در جدول های زیر، علامت -- نشان دهنده تصميم هاي نامجاز يا پيان نامعتبر منتهی می شوند).

Stage $t = 6$ (Demand $d_6 = 1$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_6(s)$	$x_6^*(s)$
0	--	300	--	--	--	300	1
1	0	--	--	--	--	0	0
2	--	--	--	--	--	∞	--

Stage $t = 5$ (Demand $d_5 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_5(s)$	$x_5^*(s)$
0	--	--	--	1000	950	950	4
1	--	--	800	750	--	750	3
2	--	600	550	--	--	550	2

Stage $t = 4$ (Demand $d_4 = 0$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_4(s)$	$x_4^*(s)$
0	950	1100	1150	—	—	950	0
1	800	950	—	—	—	800	0
2	650	—	—	—	—	650	0

Stage $t = 3$ (Demand $d_3 = 3$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_3(s)$	$x_3^*(s)$
0	—	—	—	1650	1750	1650	3
1	—	—	1450	1550	—	1450	2
2	—	1250	1350	—	—	1250	1

Stage $t = 2$ (Demand $d_2 = 2$)

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_2(s)$	$x_2^*(s)$
0	—	—	2150	2200	2250	2150	2
1	—	1950	2000	2050	—	1950	1
2	1650	1800	1850	—	—	1650	0

Stage $t = 1$ (Demand $d_1 = 2$)

توضیح: از آنجا که در داده‌های مسئله مقدار موجودی اولیه برابر با $S_1 = 1$ داده شده است، در این مرحله فقط حالت متناظر با $s = 1$ در جدول ارائه می‌شود و سایر حالت‌ها ($s = 0$ و $s = 2$) در نظر گرفته نمی‌شوند.

s	$x = 0$	1	2	3	4	$V_1(s)$	$x_1^*(s)$
1	—	2450	2500	2450	—	2450	1

نتیجه:

با توجه به صورت مسئله $S_1 = 1$ ، هزینه کل بهینه برابر است با:

$$V_1(1) = 2450.$$

استخراج مسیر بهینه

t	S_t	x_t^*	d_t	S_{t+1}
1	1	1	2	0
2	0	2	2	0
3	0	3	3	0
4	0	0	0	0
5	0	4	3	1
6	1	0	1	0

Optimal production plan: $(x_1, \dots, x_6) = (1, 2, 3, 0, 4, 0)$, **Optimal total cost** = 2450.

اعتبارسنجی مدل با حل MILP

برای اطمینان از صحت پاسخ به دست آمده از برنامه ریزی پویا، مدل MILP نیز با استفاده از Pyomo و حل کننده GLPK حل شد.

فرمول بندی MILP (خلاصه)

$$\begin{aligned} & \min \sum_{t=1}^6 (fy_t + cx_t + hS_t) \\ S_t &= S_{t-1} + x_t - d_t \quad (t = 1, \dots, 6), \quad S_0 = 1 \\ x_t &\leq C_p y_t \quad (t = 1, \dots, 6) \\ 0 &\leq S_t \leq C_s \quad (t = 1, \dots, 6) \\ S_6 &= 0, \quad x_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad S_t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \quad y_t \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

نتایج حل با Pyomo/GLPK

نتایج حل کننده نشان می‌دهد که پاسخ به دست آمده از حل MILP کاملاً با پاسخ برنامه ریزی پویا منطبق بوده و هزینه کل بهینه برابر است با:

Cost Total = 2450.

دسترسی به کد

کد حل مسئله در مخزن گیت‌هاب زیر قرار دارد:

<https://github.com/shayan-hm/Capacitated-Lot-Sizing-Problem-CLSP->