

۱- در این سؤال ما ۲ کلاس C_0 و C_1 داریم که در واقع دسته‌های خانه این ۲ کلاس target تعلق دارند

دو اکترا میانگین را برای هر کلاس حساب می‌کنیم:

$$\text{mean } C_0 \rightarrow \frac{1}{3} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{mean } C_1 \rightarrow \frac{1}{4} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

حال باید مقدار S_B و S_W را طبق فرمول حساب کنیم:

$$S_B = (\text{mean}_0 - \text{mean}_1) (\text{mean}_0 - \text{mean}_1)^T$$

$$S_W = S_1 + S_2$$

$$S_1 = \sum (n_i^0 - \text{mean}_0) (n_i^0 - \text{mean}_0)^T = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \sum (n_i^1 - \text{mean}_1) (n_i^1 - \text{mean}_1)^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$S_W = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow S_W^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/15 \\ -2/15 & 5/14 \end{bmatrix}$$

$$S_B = \begin{bmatrix} 9/4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_B W = \lambda S_W W \rightarrow S_W^{-1} S_B W = \lambda W$$

$$S_B W = (\text{mean}_1 - \text{mean}_2) (\text{mean}_1 - \text{mean}_2)^T W \propto \frac{1}{\lambda} (\text{mean}_1 - \text{mean}_2)$$

$$\Rightarrow W \propto S_W^{-1} (\text{mean}_1 - \text{mean}_2) \quad W \propto \begin{bmatrix} 9/14 \\ -4/14 \end{bmatrix}$$

سؤال ۳ الف) طبق جزوه خود استاد ماتریس پراکنندگی یا S_K به جای پراکنندگی داده‌ها در هر کلاس را نشان می‌دهد در نتیجه از جایگزینی دانیم برای هر کلاس میان دیتا هایش وجود دارد و با وجود دیتاها حایک ماتریس پراکنندگی نیز داریم که با S_K ماتریس پراکنندگی کلاس m و انما m داریم حال با جمع کردن تمام این‌ها S_K به دست می‌آید و رابط

$$S_{w_m} = \sum_{x^{(i)} \in C_m} (x^{(i)} - \mu_m)(x^{(i)} - \mu_m)^T$$

می‌توانیم $dx > 0$

جمع S_{w_m} ها $S_w = S$

در ادامه دپژوه می‌بینیم که ماتریس پراکنندگی بین کلاسی یا S_b نیز وجود دارد که پراکنندگی داده‌ها را بین کلاس‌های مختلف را نشان می‌دهد این S_b برای k کلاس به شکل زیر تعریف می‌شود:

همانطور که می‌بینیم دیگر با خود داده مستقیم کاری نداریم

$$S_b = (\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \mu_2)^T$$

حال برای بیش تر از ۲ کلاس اینگونه تعریف می‌شود:

All classes

$$S_b = \sum_{i=1}^K \mu_i (\mu_i - \mu)(\mu_i - \mu)^T$$

می‌توانیم μ میانگین کلاسی
تعداد اعشاری کلاسی

ب) تابع هزینه را می‌توانیم به شکلی آشنای برای یادگیری تعریف می‌کنیم که در این تابع به دلیل افزایش کلاس‌ها w دیگر بردار نیست و یک ماتریس است

برای افزایش خود را این تابع پراکنندگی بین کلاس باید افزایش

$$J(w) = \frac{(w^T S_b w)}{(w^T S_w w)}$$

و درون کلاس‌ها هم باید

ج) $\frac{dJ}{dw} = 2(S_b w)(w^T S_w w) - 2(w^T S_b w)(S_w w)$

$$\rightarrow S_b w (w^T S_w w) = w^T S_b w (S_w w) \rightarrow \frac{S_b w}{A} (w^T S_w w) =$$

$$S_w^{-1} w^T S_b w (S_w w) \rightarrow A w = \lambda w$$