

Projeto de filtro discreto passa-baixas a partir de um filtro passa-baixas Butterworth de sexta ordem

Aline Shayonara de Santana Ramos
shayramos@hotmail.com

Estevão Maciel da Silva João Victor Simões de Brito
estevaoservo@hotmail.com joao.victor.prog@gmail.com

September 5, 2017

Universidade Federal da Bahia
Profº. Antônio Carlos Lopes Fernandes Júnior
Processamento de sinais digitais

1 Especificação do Projeto

Projete, a partir de um filtro passa-baixas *Butterworth* de sexta ordem, um filtro discreto passa-baixas com frequência de corte (-3db) igual $\omega_c = 2\pi/3$, usando o método de transformação bilinear. Faça a implementação sob forma direta e sob forma em cascata. Represente os coeficientes em ponto flutuante (ex: $0,00423578 = 0,423578 \times 10^{-2}$) e vá diminuindo o número de casas decimais após a vírgula nas formas direta e em cascata para verificar a sensibilidade à quantização de parâmetros. Trace a curva do módulo da resposta em frequência em dB para os casos de precisão infinita e precisão finita. Em seguida, para a representação em forma direta, escolha duas transformações em frequência a seguir ($Z^{-1} = -z^{-1}$; $Z^{-1} = z^2$ ou $Z^{-1} = -z^{-2}$) e trace a curva do módulo em dB da resposta em frequência resultante.

2 Filtros IIR

Os filtros digitais são classificados pelo tipo de resposta ao impulso que apresentam como IIR(Resposta ao Impulso Infinita) ou FIR(Resposta ao Impulso Finita). Nesse trabalho será abordado o primeiro tipo de filtro, que por sua vez são recursivos, ou seja, os sinais de saída que já foram calculados, farão parte do cálculo dos sinais que ainda não foram calculados. Em geral, esses filtros possuem uma variação de fase não linear.

2.1 Butterworth

Este filtro é caracterizado por ter a magnitude da resposta plana na banda de passagem, podendo ser utilizado no problema da aproximação no projeto de filtros digitais IIR. Desse modo, é possível expressar a resposta em frequência utilizando a equação 1.

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\frac{\Omega}{\Omega_c})^{2N}} \quad (1)$$

onde N é a ordem do filtro e Ω_c a frequência de corte.

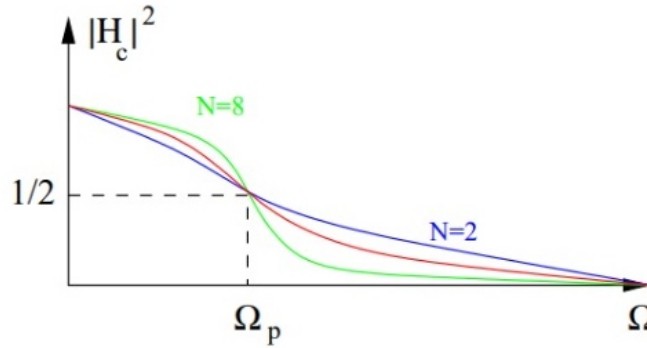


Figure 1: Resposta em frequência do filtro *Butterworth*.

3 Transformação Bilinear

É um dos métodos usados na filtragem digital, mapeando o plano analógico (s) em um plano digital (z). A transformação bilinear é um mapea-

mento matemático de variáveis, transformando filtros analógicos em filtros digitais equivalentes.

$$H(z) = H_c(s) \Big|_{s=\left(\frac{2}{T_d}\right)\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)} \quad (2)$$

onde, $H_c(s)$ é o tempo contínuo, $H(z)$ é o tempo discreto e T_d o parâmetro de amostragem. A transformação bilinear impõe uma relação não linear entre a frequência analógica e a frequência digital, dada por $\omega = 2 \tan^{-1}\left(\frac{\Omega}{\alpha}\right)$, onde $\alpha = \left(\frac{2}{T_d}\right)$, ou $\Omega = \alpha \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Essa distorção é chamada de *warping*.

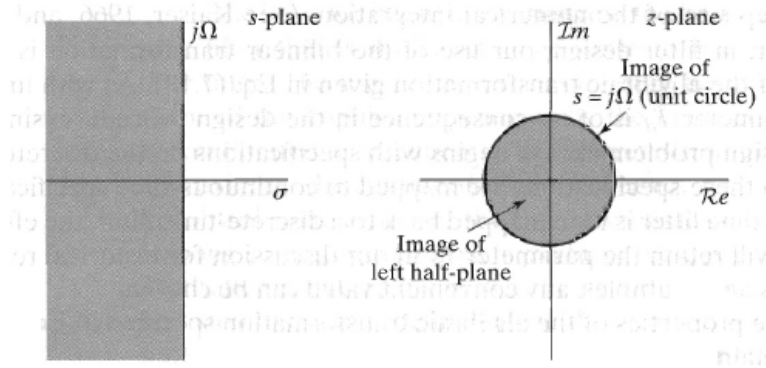


Figure 2: Mapeamento do plano s no plano z usando transformação bilinear.

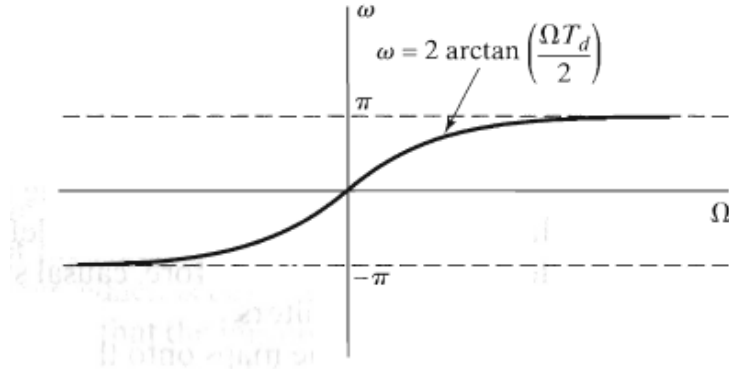


Figure 3: Mapeamento do eixo da frequência em tempo contínuo no eixo da frequência em tempo discreto pela transformação bilinear.

O mapeamento entre os planos é, tal que, $-\infty \leq \Omega \leq \infty$ mapeado dentro de $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

4 Projeto do filtro

A ferramenta usada para o desenvolvimento do projeto foi o software MATLAB, atendendo as especificações descritas na seção 1. Os efeitos dos processamentos no filtro foram observados com o auxílio de gráficos, que serão apresentados abaixo. O primeiro passo foi gerar o filtro digital a partir do filtro passa-baixa *Butterworth* de sexta ordem, para isso foi aplicada a transformação bilinear no filtro *Butterworth*. Obteve-se a função de transferência do filtro digital na forma direta e com o numerador e denominador da mesma, foi gerado o gráfico da resposta em magnitude.

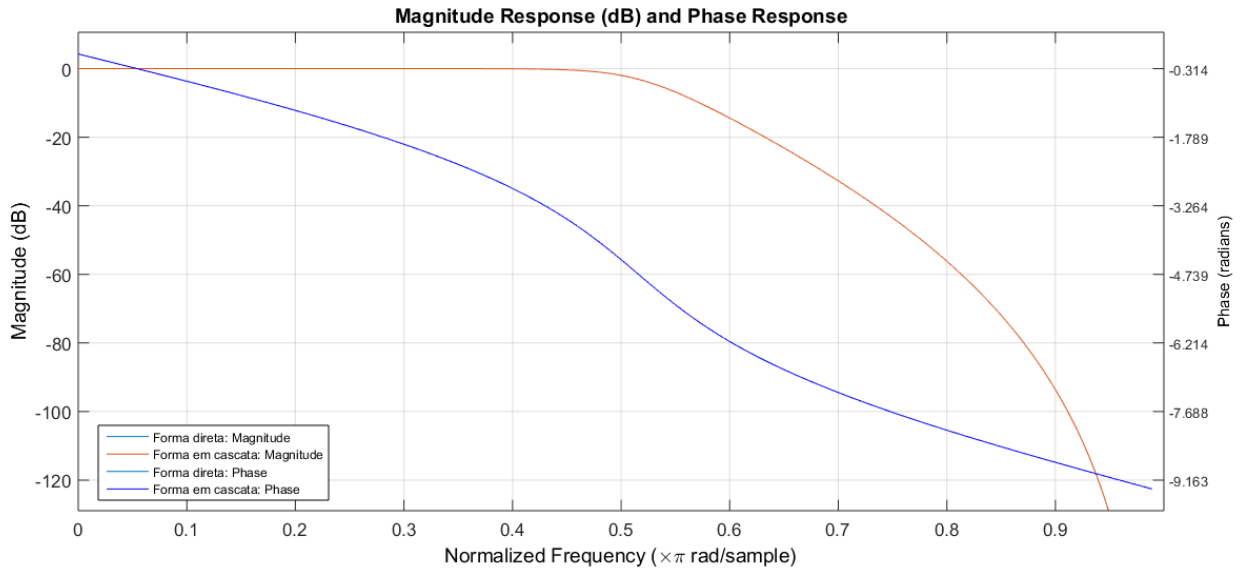


Figure 4: Resposta em magnitude e fase na forma direta e em cascata.

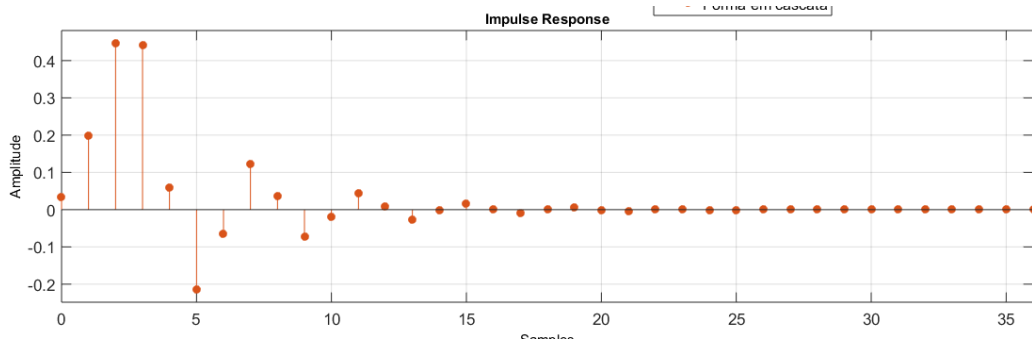


Figure 5: Resposta ao impulso na forma direta.

A estrutura da função de transferência pode ser alterada, gerando um algoritmo diferente para o cálculo do mesmo sistema. A forma em cascata se dá pelo produtório de estruturas de primeira ordem ou segunda ordem da estrutura em forma direta. Dessa forma, a partir dos polos e zeros da função de transferência na forma direta, pôde-se construir a estrutura na forma em cascata.

Posteriormente, foi aplicada uma manipulação nos coeficientes das funções de transferência de ambas estruturas discutidas acima, diminuindo o número

de casa decimais dos coeficientes gradativamente, com o intuito de observar a sensibilidade a quantização de parâmetros da forma direta e cascata, separadamente. Na implementação do filtro, o MATLAB retorna os coeficientes com precisão de 15 casas decimais, chamada de precisão infinita. Nesse trabalho, foram feitas aproximações usando entre três e uma casa decimal, chamada de precisão finita. Como seguem nos gráficos abaixo:

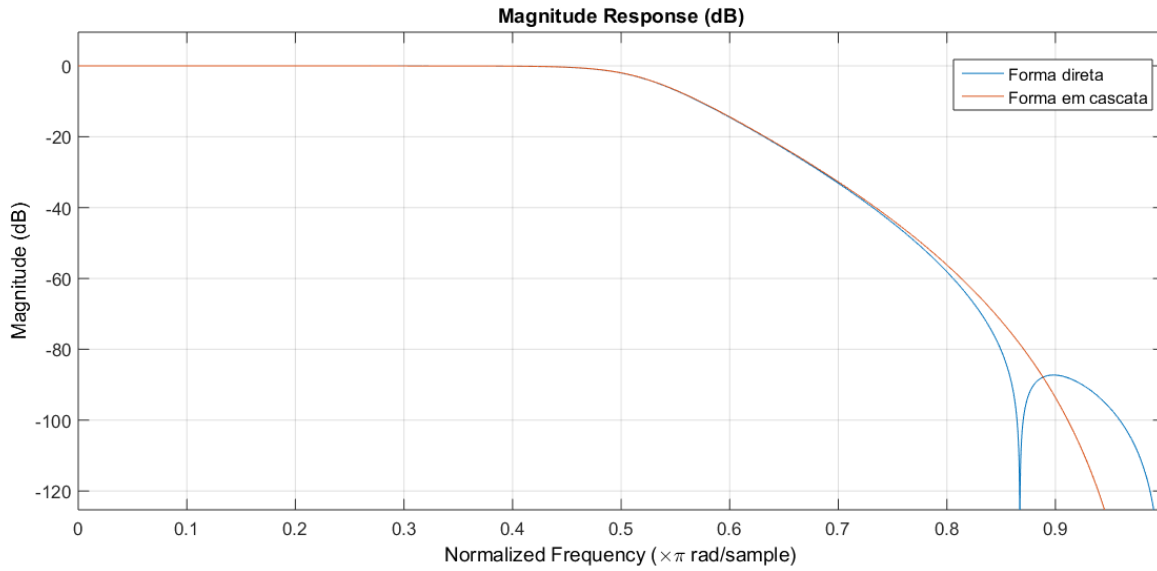


Figure 6: Resposta em magnitude e fase na forma direta e em cascata com precisão de 3 casas decimais.

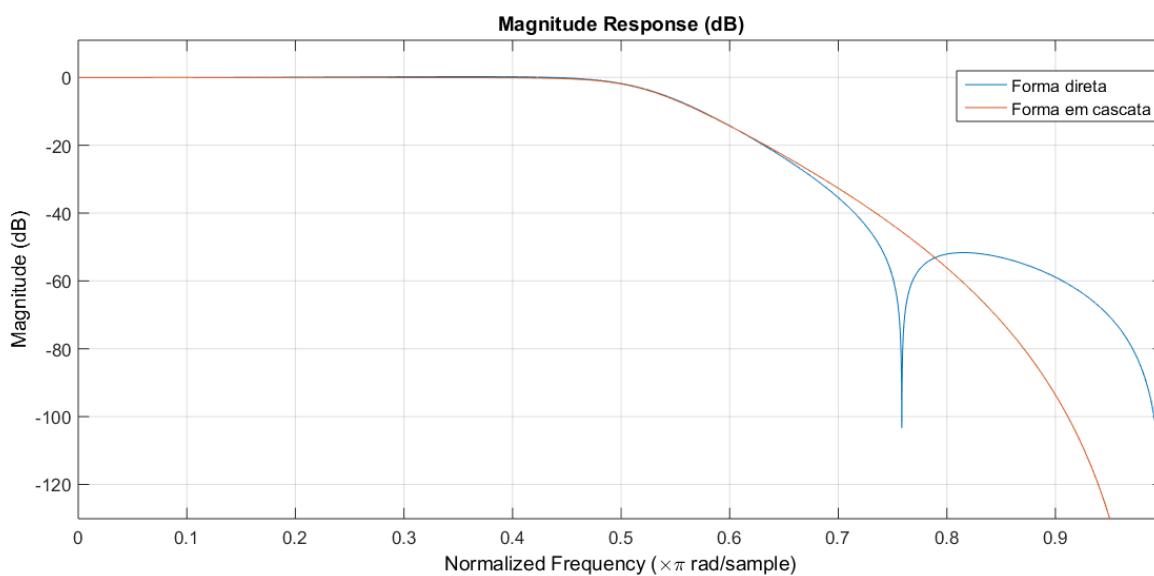


Figure 7: Resposta em magnitude e fase na forma direta e em cascata com precisão de 2 casas decimais.

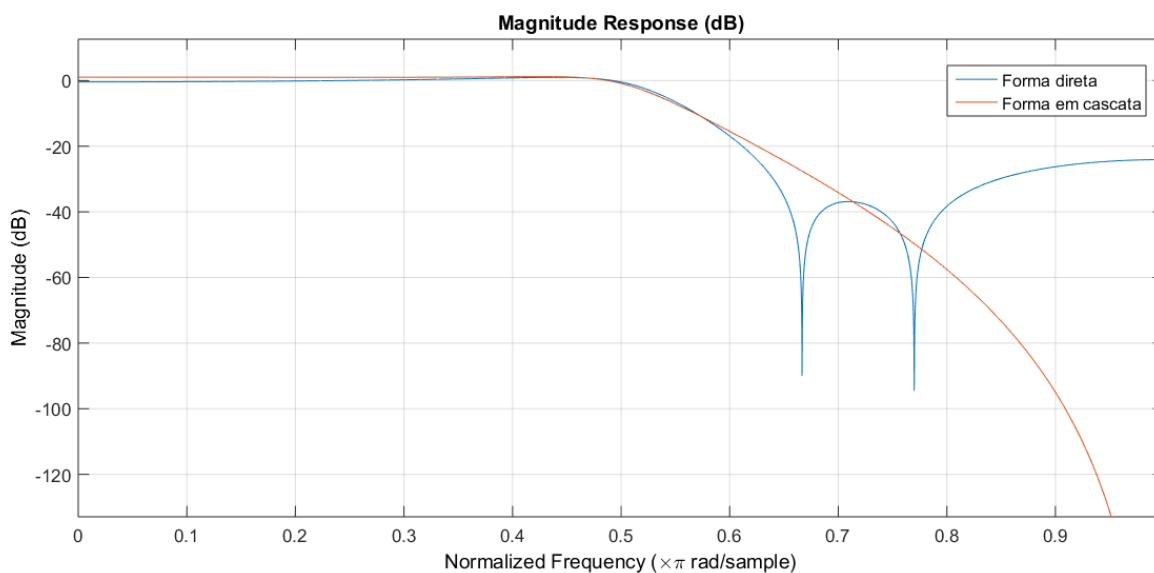


Figure 8: Resposta em magnitude e fase na forma direta e em cascata com precisão de 1 casa decimal.

Da mesma forma foi feito para o módulo da resposta em frequência. Fazendo um comparativo entre o gráfico da forma direta e em cascata no caso de precisão infinita, tanto na figura 4, como na figura 9, é possível notar que os gráficos não diferem uns dos outros, isso acontece porque, nesse caso a precisão dos coeficientes de ambas estruturas são altas (15 casas decimais).

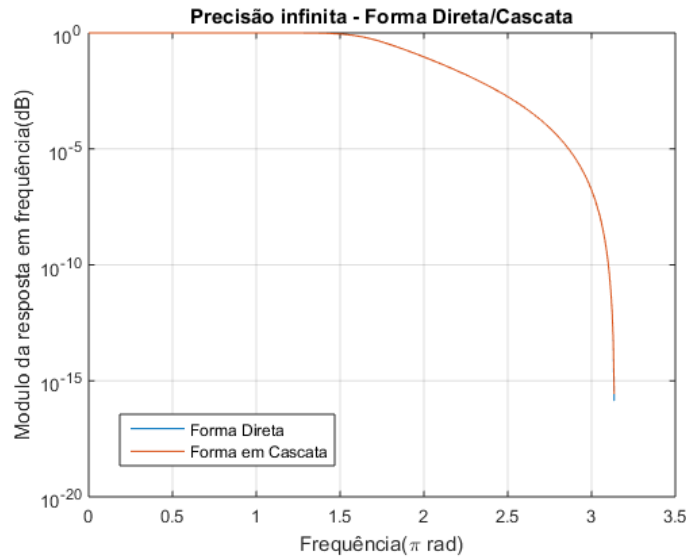


Figure 9: Módulo da resposta em frequência na forma direta e cascata com precisão infinita.

Nos casos de precisão finita, pode-se perceber, tanto nos gráficos de resposta em magnitude quanto nos de módulo da resposta em frequência, que a forma direta é mais sensível a quantização de parâmetros do que a forma em cascata, ou seja, os erros de quantização dos coeficientes dos filtros são menos severos para a implementação em cascata. Por isso estruturas na forma direta, em geral, não são recomendadas em aplicações práticas, em contrapartida percebe-se que o filtro nessa estrutura tem uma menor banda de transição.

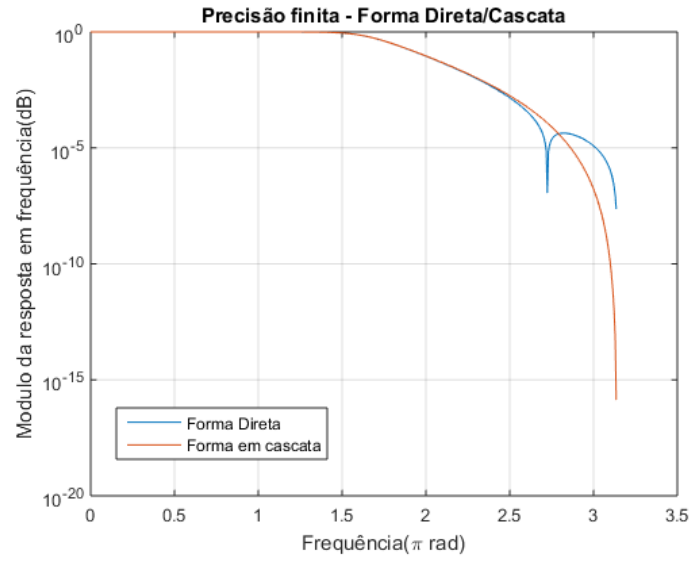


Figure 10: Módulo da resposta em frequência na forma direta e cascata com precisão finita de 3 casas decimais.

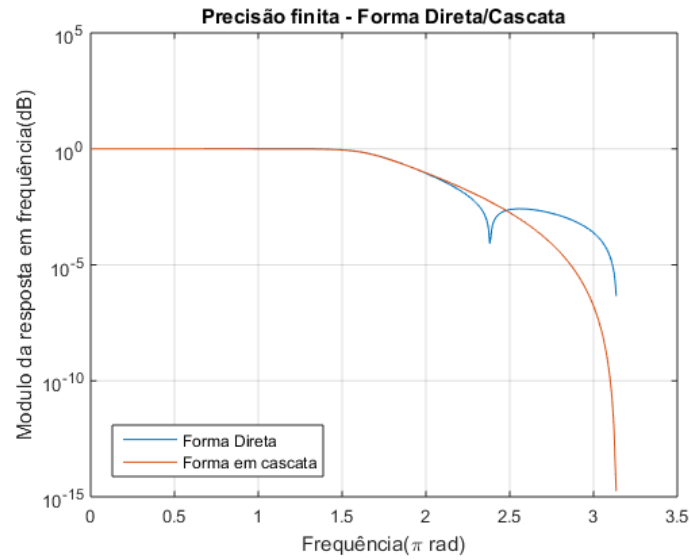


Figure 11: Módulo da resposta em frequência na forma direta e cascata com precisão finita de 2 casas decimais.

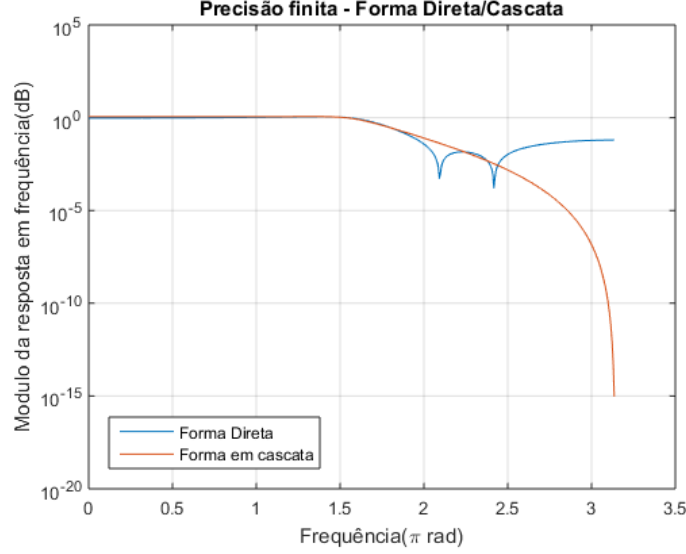


Figure 12: Módulo da resposta em frequência na forma direta e cascata com precisão finita de 1 casa decimal.

Dessa forma pode-se confirmar que quando o número de polos é grande, uma pequena mudança em um coeficiente do filtro devido ao parâmetro de quantização resulta em uma grande mudança na locação dos polos e zeros do sistema.

4.1 Transformação em frequência

A transformação em frequência tem o intuito de modificar as características do filtro através de uma transformação em z , de forma que:

$$H(z) = H_{lp}(Z)|_{Z^{-1}=G(z^{-1})}$$

onde $H_{lp}(Z)$ é um sistema passa-baixas, no qual deseja-se transformar para um sistema $H(z)$ de outra natureza. O mapeamento deve ser tal que, a estabilidade do filtro seja mantida, isso equivale dizer que a transformação mapeia o interior do círculo unitário para o interior do círculo unitário, e o exterior do círculo unitário para o exterior do círculo unitário.

4.1.1 Z^{-1} por $-z^{-1}$

Com essa transformação na função de transferência do filtro passa-baixa, foi possível observar que o mesmo se transformou em um filtro passa-alta, com as mesmas especificações do filtro antigo.

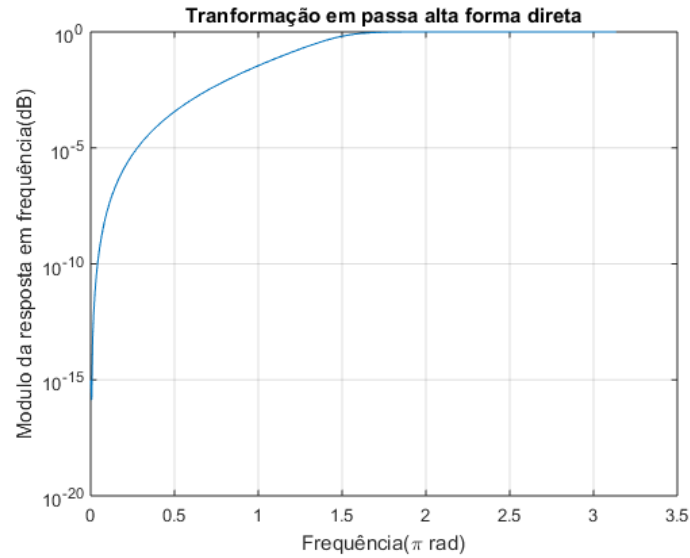


Figure 13: Módulo da resposta em frequência na forma direta, transformação em passa alta

No que diz respeito a resposta ao impulso, a transformação em frequência acarretou na alteração dos sinais de alguns coeficientes para o sinal negativo, percebe-se isso comparando a figura 5 e a figura 14.

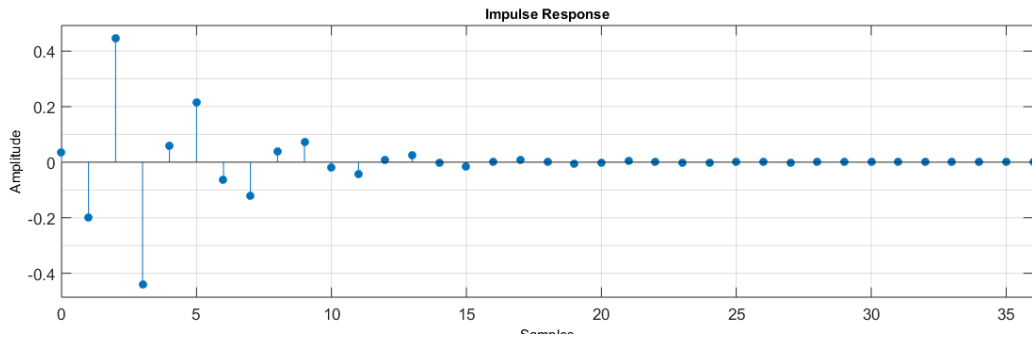


Figure 14: Resposta ao impulso na forma direta, passa alta

4.1.2 Z^{-1} por $-z^{-2}$

Diferente da seção 4.1.1 o filtro tornou-se passa-faixa, preservando as especificações iniciais do filtro.



Figure 15: Módulo da resposta em frequência na forma direta, transformação em passa faixa

Observando a figura 5 e a figura 16, nota-se que além da negatificação, a transformação dobra a ordem dos coeficientes do filtro, ocorrendo uma expansão dos registradores de deslocamento no eixo das frequências

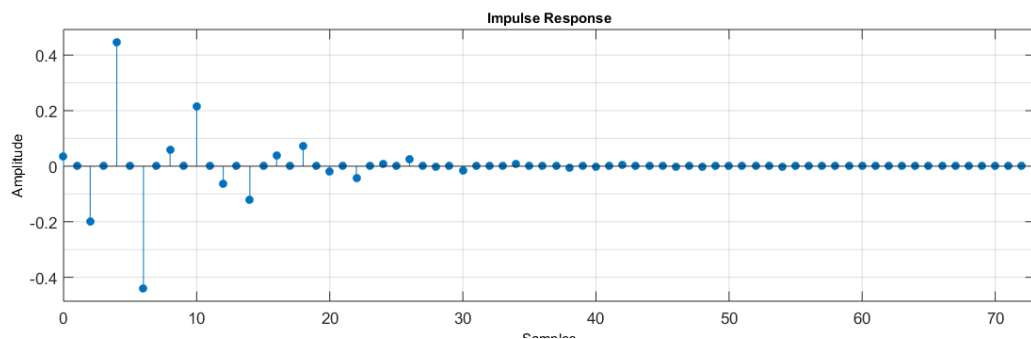


Figure 16: Resposta ao impulso na forma direta, passa faixa

References

- [1] Alan V. Oppenheim, Ronald W. Schaffer, and John R. Buck. 1999. Discrete-Time Signal Processing (2nd Ed.). Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA.
- [2] http://www.estgv.ipv.pt/paginaspessoais/maeb/SPD/Teorico_Praticas_PDF/Guia%20TP7_Filtros%20IIR%20Soluc%C3%A7%C3%B5es.pdf
- [3] Santos V. da Rosa, 2005. Uma ferramenta para a geração otimizada de Filtros FIR paralelos com coeficientes constantes. Porto Alegre, RS, BR.