

# תורת המימון - ניהול פיננסי של גופים עסקיים

## מחברת הקורס

## סמינר 2025

מנחה: **פרופ' ד"ר שי צבן**

### Table of Contents

מפגש 1 - היברות, מטרת המימון, ערך עתידי .....	2
מפגש 2 - ערך נוכחי.....	41
מפגש 3 - המשך "ישומי ערך נוכחי" - 26.3.2025 .....	79
מפגש 4 – כדאיות פרויקטים – 2/4/2025 .....	133
שיעור 7 - כדאיות פרויקטים - השלמת סוגיות .....	189
מפגש 5 – כדאיות פרויקטים המשך – 9/12/2024 .....	206
מפגש 6 – קיצוב הון וישומים י"ח' 7 – 16/12/2024 .....	217
מפגש 7 – קיצוב הון וישומים נוספים י"ח' 7 – 23/12/2024 .....	232
שיעור 8 – השלמות בנושא קיצוב הון (י"ח' 7) והתחלת מימון בתנאי סיכון – (י"ח' 8) .....	243
מפגש 9 – י"ח' 8 חלק שני – ניהול תיקי השקעות – 6/1/2025 .....	259
מפגש 10 – י"ח' 8 חלק שלישי – ניהול תיקי השקעות מתקדם - CAPM - 13/1/2025 .....	278
מפגש 11 – י"ח' 8 חלק רביעי – ניהול תיקי השקעות מתקדם - CAPM - 20/1/2025 .....	297
מפגש 12 – י"ח' 11-9 עולם חדש של נושאים – מקורות מימון – 27/1/2025 .....	328
מפגש 13 – י"ח' 10-11 תרגול 10-11 – 3/2/2025 .....	351
מפגש 14 – חזרה לבחינה 10.2.2025 .....	375

## מפגש 1 - היכרות, מטרת המימון, ערך עתידי

### מטרות המפגש

- א. היכרות
- ב. מנהלות בתקופת ליחימה
- ג. התחלה החומר - יחידה 5, ערך הזמן של הכספי - חישובי ערך עתידי

### אופן הלמידה

החומרים במפגש יצומצמו ויסונכרנו עם המינימום החינוי ללמידה הסטטוס. לצד זאת, מעת לעת, יקושו רוחמרי למידה לתרגול נוסף עם פתרונות מלאים. כל רוחמרי המפגשים לא יצא מן הכלל, כולל כל ההגדרות, הנושאות, הפתרונות - יקושו למסמך מתעדכו זה שייהיה נגיש דרך פורום הלמידה שלנו וכן בתחום החקלאות. אין צורך אמייתי לסכם בעצמכם; אם כי נשתדל לפעול בקצב שיאפשר זאת, למי שmorgal או morgal בכך. אחר הקורס מפורט, מסודר, וככל שרטוטנים לגבי נושאים עיקריים, תרגילים בסיסיים ופתרונות נוספים. בקורס עצמו, העסוק בעיקר ביישומים מתקדמים יותר, מתוך המטרה היא שהמפגש נועד לתת כלים "מיידיים" להתמודדות עם שאלות ברמת המטלה וברמת הבדיקה. כמובן, נשתדל לא למהר ולהציג הכל באופן סדר ושיתתי; אבל מוטב שייהיה לנו מרכיב במפגשים וסביר במטלות, מאשר מפגשים חביבים בסטיל "פרואה" והתמודדות קשה מכך עם המטלות והביקורת.

### הביקורת

מידע רלוונטי לקריאת הבדיקה יתפרסם כשתתקרב. בכלל, הבדיקה כוללת 20 שאלות, רב-ברירה, כולל דרישת הציגת הדרך מצד אחד, אך התחשבות חלקית בה לצרכי ניקוד מצד שני. **הבדיקה היא עם חומר פתוח.**

### פרטי ההתקשרות עמי

שי צבאו, 050-6551519 [shay.tsaban@gmail.com](mailto:shay.tsaban@gmail.com) [שאלות מקצועיות לגבי אתגרים במטלות - נא להציג דרך הפורומים / קבוצות הדיון הייעודיות למטלות; שאלות לגבי תוכן מפגש הנוכחי - להציג לקבוצתנו]

### התychשות לשאלות הקהיל (הבמה שלכם)

שאלה: עד כמה רוחח השימוש בנושאות וביישומים מתמטיים בקורס זה?

תשובה: רמת המתמטיקה - ברוב התרגילים - כפל, חילוק, והמון חזקות. ב-90 עד 95% מהקורס אלו היישומים.

**אוקיי, אז מה בקורס? מה זה מימון? ואיך ההבנה לגבי בניית בקורס?**

ענף המימון הוא תחום במנהל עסקים שדן בעיקר בשני נושאים: **ההשקעות** (השקעות בפרויקטים, בנכסים וכיו"ב), וכן **במקורות גiros מימון** (הלוואות, אגרות חוב, מנויות). הכל מנוקודת ראות חברות ( גופים עסקיים), ותוך שימוש בקריטריונים שיאפשרו אופטימיזציה להשקעות ולגייס המימון מתוך מטרת העל של המימון:

**השאלה ערך לבאים.**

לפי תורת המימון: המטרה של הפirma (החברה) היא להוביל לכך שהשווי שלה לבעליים (בעלי המניות) יהיה גבוה ככל הניתן.

בשפה פשוטה: אם גיא, מאיה וצליל מקימים חברה (גמ"צ בע"מ) לפי תורת המימון, המטרה של גמ"צ היא להפוך את גיא, מאיה וצליל ל"עשירים".

**השאלה העוקבת:** מה בדיק צרך לעשות ואיך כדי להגדיל את הסיכוי להשתת ערך החברה?

נרצה לדעת (א) מהם תזרימי המזומנים ("הכסף שהחברה עושה") נטו.

(ב) עיתוי תזרימי המזומנים (מתי החברה תקבל את התזרימיים) - ייח' 5, 6.

(ג) רמת הסיכון - ייח' 8.

הקורס עוסק בכליים מתמטיים וקריטריונים לקבע החלטות שידונו בהיבטים הללו. המחזית הראשונה של הקורס עוסקת בהשפעות עיתוי תזרימי המזומנים - בעיקר באופן שבו ריבית משפיעה על ערך כספי בחלוף זמן. והחזית השנייה של הקורס עוסקת במשמעות הסיכון. עד הودעה חדשה, **נתעלם מקיומו של סיכון**.

בהשפעות עיתוי התזרימיים על הערך, נתחיל מסוג החישוב הבסיסי ביותר: **ערך עתידי - Future Value** או FV. לעיתים תראו בחומר הקורס סימונים כגון  $V_t$  (השווי עתידי מסוים  $t$ ). ערך עתידי הוא חישוב שמטרתו לשקף את ההשפעה המתמטית של צבירת ריבית בגין השקעות והלוואות. כאשר משקיעים - הריבית הנצברת מובילה לכך שנקל יותר ממה שהשקענו (בעתיד). כאשר לוים - הריבית הנצברת מובילה לכך שנזיר יותר ממה שקיבנו.

## יחידה 5 – חישובים פיננסיים: ערך נוכחי, ערך עתידי, ריביות ויישומים

הקורס עוסק בניהול פיננסי (ניהול כספים בחברות ובכלל).

- החלק הראשון שלו מסומן דואקא כ"יחידה 1" והיחידה היא כזו שכוללת מושגי יסוד (ולא חישובים) לגבי מהי חברה (פירמה), מה המטרות שלה, ומה המשמעות הכלכלית של ניהול כספי.
- הויאל ומשקל היחידה נמוך יחסית (אג 5 נקי, בבחן, לפעמים 0) והוא איננה חיונית ממש להבנת העקרונות הכלומטיים של ניהול פיננסי – שהם אלו שנחוו אותנו לאורך כל הקורס, אנו מתחילה מיח' 5 (יח' 2, 3, 4 כלל אין בחומר).
- היחידה עוסקת באופן כללי בחישובים פיננסיים, בעיקר ככלו המגלמים השפעות ריבית.

**מינימבוֹא:**

בעולם המימון והניהול הפיננסי אנו עוסקים בשני רבדים של ידע :

- חישובים פיננסיים – חישובי ערכיים כספיים, חישובי ריביות. חישובים אלו כוללים את ההשפעה של ריבית על ערכיים כספיים והשפעות הזמן הקשורות לכך. **זה המיקוד של ייחידה 5.**
- קבלת החלטות – במה להשקיע, איך חלופה לבחור מבין חלופות אפשרות של השקעות, הלוואות וכיווץ בזוזה.

### הסוג הראשון של החישובים הפיננסיים שכל מנהל פיננסי / אדם צריך לדעת **ערך עתידי – FV** – (Future Value)

הчисוב הפיננסי הפשטוט ביותר – כי הוא מובן אינטואיטיבית. ערך עתידי (FV) בגדול אומר: מהו הסכום הכולל שייצטר בעתיד, כולל ריבית, בגין השקעות / הלוואות.

בעצם: כשהאנו מפקידים היום כסף, אנו צופים לקבל בעתיד את הסכום המופקד בתוספת ריבית.

כשאנו לוים היום כסף, אנו צופים להידרש תשלום בעתיד את הסכום שלווינו בתוספת ריבית.

המשמעות החישובי הזה – איך ריבית מctractata לערכיים כספיים בהשקעות או הלוואות – הוא בעצם ערך עתידי;

אחד מסוגי החישובים הפיננסיים הבסיסיים ביותר שאיתם נתחיל את הקורס.

### סוגי החישובים – מקרים / קטגוריות של חישוב ערך עתידי:

תיאור קצר	משמעות ונוסחה
ערך עתידי של סכום יחיד (בריבית קבועה / משתנה)	אם מפקידים סכום היום או לווים סכום היום (הפקדה חד פעמית, או הלוואה אחת) ומקבלים (או מחזירים) את הערך בנקודה זמן עתידית אחת, מדובר בערך עתידי של סכום יחיד.  $FV = PV * (1 + r)^t$ $FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$
ערך עתידי של סדרת תשלום	אם אני מפקיד סדרה קבועה של הפקדות (למשל: הפקודת חודשיות קבועות לפנסיה), אזי בהנחות מסוימות ניתן לחשב את הערך העתידי הכלול של כל הפקדות כך:  $FV = PMT * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$ $FV = PMT * FVFA(r, t)$
שאלות על חילוצים	כדי לפטור בעיה כלכלית, נצטרך לדעת איזו נוסחה ערך עתידי אם בכלל מתאימה לנו, ואיך לישם אותה כדי לבנות משווהה שתענה על בעיה כלכלית.  למשל: כמה גראפי צריכה להפקיד כל חודש לפנסיה, כדי שתוכל לקבלות בוגאיי בגיל פרישה?  מה צריכה להיות הריבית בחסכון שתאפשר לנו לצבור 1,000,000 ש"ח בסיום התוכנית?

## נושא 1: ערך עתידי (FV) של תזרימי מזומנים ויישומים - תרגול

**שאלה 0 – ערך עתידי של סכום בוודז, בריבית קבועה, ללא התאמת ריבית**  
גרולפי רוצהಲקנות למր גROLFI ספינה חדשה. לשם כך הפקידה היום סכום של 400,000 ש"ח בתוכנית חסכו נושאית ריבית שנתית בשיעור 8%.

תכנית החסכו נושאית ריבית שנתית בשיעור 7 שנים ממועד ההפקדה.

מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של גROLFI לטובות רכישת הספינה בתום השנה ה-7?

## פתרונות:

$$FV = PV * (1 + r)^t \rightarrow FV = 400,000 * (1 + 8\%)^7 \approx 685,530$$

רצינו לחשב ערך עתידי של סכום ייחד בריבית קבועה.

**שאלה 1 - ערך עתידי של סכום בוודך, בריבית קבועה, ללא התאמת ריבית**  
גיא הפקיד 500,000 ש"ח לתוכנית חסכון הנושאת ריבית שנתית בשיעור 4%. בתום 5 שנים יפרע החסכו. מהו הסכום שיקבל גיא?

## פתרונות:

בutor התחליה, נרצה לזיהות את סוג השאלה והכלי הרלוונטי לפתרונה. לשם כך נמפה את השאלה :

נתון : כמה גיא מפקיד היום - מוצג בתור PV (Present Value) - סכום שמופקד בהווה, ערך הנוכחי)

מה רוצים? לדעת כמה יהיה לגיא בעתיד - מוצג בתור FV (Future Value) - ערך נוצר כולל ריבית).

במלים אחרות: החישוב הוא של ערך עתידי - FV.

עבור מה : הערך מחושב بعد סכום בוודח "חד פומי" שמופקד היום

כלומר: אין כאן "סדרת" הפקודות (כמו תכנית חסכון בתשלומים) סביבת ריבית: האם הריבית קבועה / משתנה? הריבית קבועה.

כאשר מטרתנו לחשב ערך עתידי FV של סכום ייחד בריבית קבועה, אנו מניחים שמתיקים עיקרונו של "ריבית דרבית" - שמשמעותו היא - אנחנו צוברים על הסכום המקורי ריבית בתקופה הראשונה, ובשנתיים הבאות - הריבית נצברת מחדש על כל הסכום כולל הריבית ההיסטורית.

הביתוי הארוך והמייגע שמייצג את צבירת הריבית בשיטת ריבית דרייבית יהיה (שים לב שמספר ההכפלות הוא כמספר תקופות הריבית) :

ובעיצם אנו נזהים לכתוב זאת בקיצור נמרץ באופן הבא:

$$FV = 500,000 * (1 + 4\%)^5 = 500,000 * (1 + 0.04)^5 = 608,326.45$$

### נוסחת ערך עתידי לסכום יחיד בריבית קבועה

از בואו נכליל: כאשר רוצים לחשב ערך עתידי (מה יהיה לנו בעתיד) כתוצאה מהפקדה בודדת כאשר הריבית קבועה, הנוסחה היא<sup>1</sup>:

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

כאשר :

הערך  $FV$  מייצג את הסכום העתידי הנצבר (ערך עתידי, Future Value).  
הערך  $PV$  מייצג את סכום ההפקדה, שמבצעו בהווה (Present Value, הערך הנוכחי).  
הערך  $r$  מייצג את שיעור הריבית.  
הערך  $t$  מייצג את מספר התקופות.

#### **שאלה 1.1 – ערך עתידי של סכום יחיד (בודד), בריבית משתנה, ללא התאמת ריבית**

שמעון החליט להפקיד היום סכום של 150,000 ש"ח לתוכנית חסכוו לתקופה של 6 שנים. הריבית בחסכוו היא בשיעור שנתי של 8% בכל אחת מהשנתיים הראשונות, ו-7% בכל שנה לאחר מכן (במשך 4 השנים הנותרות). מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של שמעון בתום השנה ה-6?

פתרון :

$$FV = 150,000 * (1 + 8\%)^2 * (1 + 7\%)^4 \rightarrow FV = 229,337$$

מסקנה: הסכום הכולל שייצטבר לשמעון בתום השנה ה-6 הוא 229,337 ש"ח. בעצם, ביצענו יישום של הנוסחה הבאה :

$$FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

---

<sup>1</sup> ביחידות הלימוד וברצפים, לעיתים הנוסחה מופיעה באופן מעט שונה:  $V_t = V_0 * (1 + r)^t$

**שאלה 2 - ערך עתידי של סכום בודד, בריבית משתנה, ללא התאמת ריבית**  
 מאיה הכבאית לוותה (נטלה הלוואה) בסך 200,000 ש"ח הנושאת ריבית שנתית בשיעור 7% לשנה בכל אחת מ-3 השנים הקרובות, ובשיעור 8% לשנה בכל שנה לאחר מכן. ההלוואה תפרע יחד עם הריבית הצבורה בחולף 10 שנים. מהו הסכום הכלול מאיה הכבאית לשלם (קרן+ריבית) בתום 10 השנים?

**פתרון :**

נתון : כמה מאיה לוותה היום ( $PV$ ), סכום יחיד, וריבית משתנה.  
 מה רוצים לדעת את הסכום העתידי שהיא תחזיר -  $FV$ .  
 שימו לב, בהתאם לניסוח השאלה, הריבית הראשונה תקפה 3 שנים. הריבית בהמשך תקפה בכל שנה לאחר מכן, עד לסיום העסקה (שהיא בתום 10 שנים). לכן, הריבית הבאה בתור תקפה 7 שנים (בשנים 4 - 10 כולל).

$$FV = 200,000 * (1 + 7\%)^3 * (1 + 8\%)^7 = 419,901.68$$

**נוסחת חישוב ערך עתידי לסכום יחיד כאשר הריבית משתנה**

$$FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

**כאשר :**

הערך  $FV$  הוא הערך העתידי המחשב (הסכום העתידי הכלול, קרן + ריבית).  
 הערך  $PV$  הוא סכום ההפקדה או הלוואה "היום".  
 הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה.  
 הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבהן כל ריבית תקפה.

## מינוי רקע – ערך עתידי של סדרה

שאלות 1 ו-2 הציגו ערך עתידי של סכום יחיד, שמתאפשר בחישוב פשוט של מכפלת הסכום בהווה (ערך הנוכחי) ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה. חישוב זה אינטואיטיבי וקל לישום.

יחד עם זאת, רבות מהעסקאות בעולם הכספי אינן עסקאות הפקדה בתשלומים אחד אלא בתשלומים: הפקדות לפנסיה, הפקדות לקרן השתלמות, חסכו נסיעה ליד וכיו"ב – כל אלו ואחרות מהוות דוגמאות למכבים שבהם הפקדות הן רבות, וכל אחת מהן כוברת ריבית פרק זמן שונה.

קיים קיצור דרך "טריקי" לחשב ערך עתידי כולל מctruber בגין הפקדות רבות, באופן שמתיחס בפרק הזמן השונה של כל הפקדה עד למועד הפירעון. קיצור הדרך נקרא "חישוב ערך עתידי סדרתי".

**יש שני אטגרים בחישוב ערך עתידי סדרתי כזה:**

א. מתי מותר להשתמש בנוסחה: כאשר סדרת הפקדות היא מסווג סר"ת קבוע – סכום הפקדה קבוע, ריבית קבועה, תדיות קבועה.

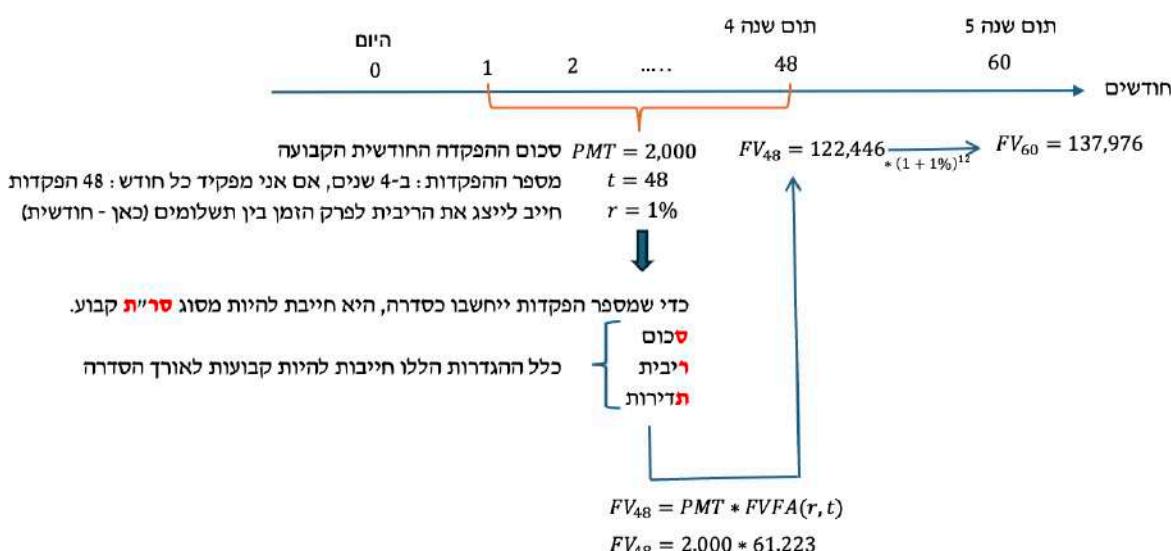
ב. נקודת הזמן אליה מובילת הנוסחה היא נקודת הזמן של ההפקדה الأخيرة. אם מועד החישוב / יעד הפירעון שונה, נצורך התאמת לחישוב.

### שאלה 2.1 – ערך עתידי של סדרה – הבסיס של הבסיס, כולל התאמות

הדר מתכונת להפקיד בתום כל חודש במשך 4 שנים סכום של 2,000 ש"ח. עם סיום ההפקדה الأخيرة, הכספי ימשיך לציבור ריבית בחסכו נספח, כך שהפירעון יחול בתום השנה ה-5.

בנחתה שהריבית החודשית היא 1%, מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של הדר בתום השנה ה-5?

פתרון :



לוח א-2: ערך עתידי מצטבר של 1 ש"ח המתකבל מדי תקופה במשך  $t$  תקופות (המשך)

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
26		29.526	33.671	38.553	44.312	51.113	59.156	68.676	79.954	93.324	109.182
27		30.821	35.344	40.710	47.084	54.669	63.706	74.484	87.351	102.723	121.100
28		32.129	37.031	42.931	49.768	58.403	68.528	80.698	95.339	112.968	134.210
29		33.450	38.792	45.219	52.966	62.323	73.640	87.347	103.966	124.135	148.631
30		34.785	40.568	47.575	56.085	66.439	79.058	94.461	113.283	136.308	164.474
31		36.133	42.379	50.003	59.328	70.761	84.802	102.073	123.346	149.575	181.943
32		37.494	44.227	52.503	62.701	75.299	90.890	110.218	134.214	164.037	201.138
33		38.869	46.112	55.078	66.210	80.064	97.343	118.933	145.951	179.800	222.252
34		40.258	48.034	57.730	69.858	85.067	104.184	128.259	158.627	196.982	245.477
35		41.660	49.994	60.462	73.652	90.320	111.435	138.237	172.317	215.711	271.024
36		43.077	51.794	63.276	77.598	95.836	119.121	148.713	187.102	234.125	299.127
37		44.508	54.034	66.174	81.702	101.628	127.268	160.337	203.070	258.376	330.039
38		45.953	56.115	69.159	85.970	107.710	135.904	172.561	220.316	282.630	364.043
39		47.412	58.237	72.234	90.409	114.095	145.058	185.640	238.941	309.066	401.448
40		48.886	60.402	75.401	95.026	120.800	154.762	199.635	259.057	337.882	442.593
41		50.375	62.610	78.663	99.827	127.840	165.048	214.610	280.781	369.292	487.852
42		51.879	64.862	82.023	104.820	135.232	175.951	230.632	304.244	403.528	537.637
43		53.398	67.159	85.484	110.012	142.993	187.508	247.776	329.583	440.846	592.401
44		54.932	69.503	89.048	115.413	151.143	199.758	266.121	356.950	481.522	652.641
45		56.481	71.893	92.720	121.029	159.700	212.744	285.749	386.506	525.859	718.905
46		58.046	74.331	96.501	126.871	168.685	228.508	306.752	418.426	574.188	791.795
47		59.626	76.817	100.397	132.945	178.119	241.099	329.224	452.900	626.863	871.975
48		61.223	79.354	104.408	139.263	188.025	256.565	353.270	490.132	684.280	960.172
49		62.835	81.941	108.541	145.834	198.427	272.958	378.999	530.343	746.866	1057.190
50		64.463	84.579	112.797	152.667	209.348	290.336	406.529	573.770	815.084	1163.909

### מה בדיקת קרה היא?

чисבונו ערך עתידי לסדרה על בסיס פקטור ייעודי שנייה של שולף מלוח א-2 בנספח א לרך ד (או באופן מתמטי, כפי שיציג בהמשך).

הערך העתידי הנ"ל מוביל תמיד לנקודת הזמן של מועד התזרים האחרון בסדרה, וכך – לזמן 48, ליום השנה ה-4, המועד שבו בוצעה ההפקה האחוריונה.

חוובה עליינו לבצע התאמה של התוצאה; מזמן 48 לזמן 60 – תום השנה ה-5 שחררי זהו זמן הפירעון. ביצוע ההתאמה הוא על ידי מכפלת פשוטה ב-1 ווד הריבית בחזקת מספר תקופות ההתאמה, כאן – חזקת 12, על מנת לשקף 12 תקופות ריבית נוספות מזמן 48 לזמן 60.

הביתוי בקצרה:

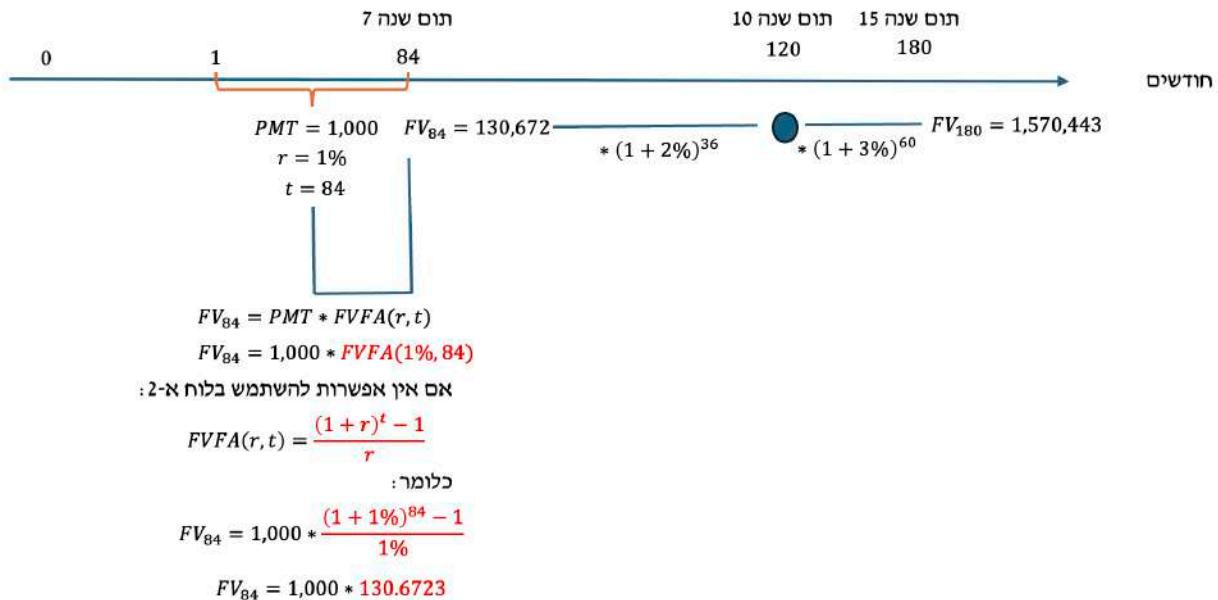
$$FV = 2,000 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^{12} = 137,976$$

**שאלה 2.2 – ערך עתידי של סדרת תשומיתים, עם שימוש בנוסחה מתמטית במקום לוח, והתאמות זמן**

”מור טק בלי עותק” מפקידה בתום כל חודש במשך 7 שנים סכום של 1,000 ש"ח לחסכו. הסכומים שנצברו לתום השנה ה-7 ימשיכו לציבור ריבית עד למועד הפירעון שיחול בתום השנה ה-15 (ביחס להיום).

הרביבית החודשית במשך 7 השנים הראשונות היא 1%, הריביבית החודשית בשנים 8, 9, 10 היא 2%, והרביבית החודשית בכל חודש עוקב היא 3%.

מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של מור טק בתום השנה ה-15?



**הסבר מורחב:**  
 הסדרה הראשונה היא מזמן 1 לזמן 84. הויל ומדובר במספר הפקודות שגדול מ-50, לא יכולנו להיעזר בלוח א-2 (שזה מה שעשויים בדרכן כלל, ב-90% מהשאלות), אלא השתמשנו בנוסחה המתמטית של חישוב הערך העתידי הסדרתי.

ישום נוסחת הסדרה (במקרה זה – המתמטית, ולא מהטבלה), מוביל לנקודת הזמן של סיום הסדרה, ככלمر למועד ההפקודה الأخيرة, זמן 84.

הויל וקיים פער זמני בין עיתויי ההפקודה الأخيرة – זמן 84, לעיתויי הפירעון – תום שנה 15, וב חודשים – תום 180, צריך לבצע התאמה של התוצאה על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריביבית בחזקה רלוונטיות.

הפעם, בתקופת ההתאמה, מ-84 (תום 7) ל-180 (תום 15) יש שתי ריביות שונות; ולכן علينا לישם לצורכי ההתאמה נוסחת ערך עתידי בריבית משתנה – לכפול ב-1 ועוד כל אחת מהריביות השונות, כאשר כל ריביבית תועלה בחזקה מתאימה בהתאם למספר התקופות שבהן היא תקפה. ריביבית 2%, תקפה 3 שנים, קרי 36 חודשים, לכן חזקת 36. ריביבית 3%, תקפה 5 שנים, קרי 60 חודשים, חזקת 60.

**פתרונות מקוצר – במשוואת אחת:**

$$FV_{180} = 1,000 * FVFA(1\%, 84) * (1 + 2\%)^{36} * (1 + 3\%)^{60} = 1,570,443$$

שאלה 3 - ערך עתידי של סדרת תשלוםים (ס"ת), ללא התאמות  
שiran מתכוונת להפקיד בתום כל שנה במשך 8 שנים סכום של 10,000 ש"ח. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה  
של Shiron בתום 8 שנים, אם הריבית השנתית בחסכון היא 4%?

פתרון:

נתון: הסכום שישירן הפקידה כל שנה.

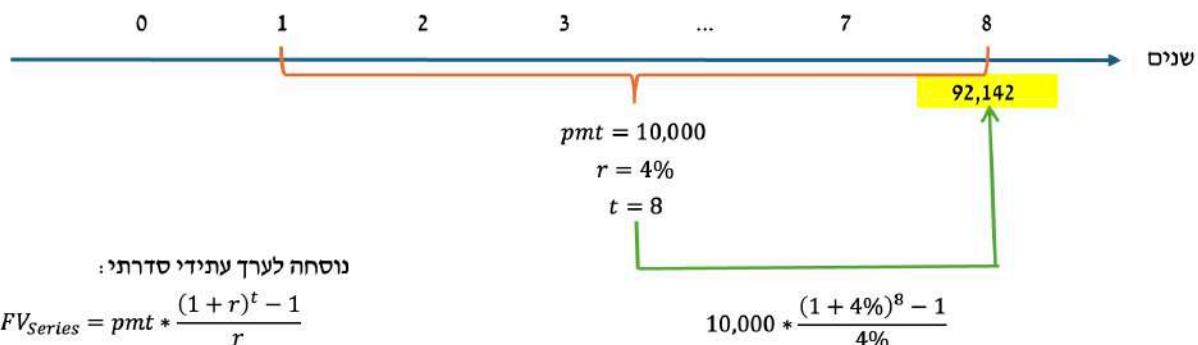
המשמעות "כל שנה" (או כל תקופה): מוביל למסקנה שישירן למשעה הפקידה סדרת תשלוםים קבועה  
זיהיתי סדרה, נבדוק 3 פרמטרים:

סכום תקופתי: הפקידה קבועה של 10,000 PMT = 10,000

ריבית לתקופת תשלום: הפקידה כל שנה, הריבית שנתית  $r = 4\%$

מספר הפקודות: הפקידה כל שנה, 8 שנים لكن  $t = 8$

איור המציג את אופן הפתרון:



האם הסדרה ס"ת: סכום קבוע (PMT קבוע) ריבית קבועה (r) תדיות קבועה (כל שנה)

ערך עתידי של סדרה קבועה (ס"ת)<sup>2</sup>

$$FV_{Series} = pmt * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

כאשר:

הערך FV Series הוא הערך העתידי של הסדרה.  
הערך pmt מסמל את ההפקידה / התזרים התקופתי קבוע.  
הערך r מסמל את הריבית **לפרק הזמן בין תשלוםים**.

---


$$^2 V_t = a * \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

הערך  $t$  מסמל את מספר **התשלומים** בסדרה.

נציין :

$$FV_{Series} = 10,000 * \frac{(1 + 4\%)^8 - 1}{4\%} = 92,142$$

מסקנה : הסכום הכלול שיימוד לרשותה של שירן בתום השנה ה-8 הוא 92,142 ש"ח.

זהירות : לא תמיד הצבה פשוטה בנוסחת ערך עתידי סדרתי תוביל את התוצאה לזמן הנכון. ערך עתידי סדרתי מוביל תמיד לנזונות הזמן שבה מבוצעת הבדיקה האחrownה בסדרה. במקרה פשוט זה, שבו הבדיקה האחrownה בוצעה בתום השנה ה-8, ולבן הערך העתידי הוביל לתום השנה ה-8, גם שאלות על השנה ה-8.

טיפ:

במסגרת ייחדות הלימוד שקיבלתם, **קיימת חוברת** שנקראת "**נספח א לכרך ד**". חוברת זו כוללת לוחות (טבלאות) שמאפשרים לזכור חישובים של סדרה. ספציפית, לוח א-2 שמתחליל בעמי 23 בחוברת זו הוא הלו שמציג את הערכיהם של הנוסחה עבור כל צירוף של ריבית ומספר תשלומים. במפגש הבטנו יחד על החוברת וראינו, שעבור ריבית  $r = 4\%$  ומספר תשלומים  $t = 8$  הערך מהטבלה הוא 9.214, והוא נקבע ב-  $FV = pmt \cdot FVFA(r, t)$  בסכום ההפקזה הקבוע. **התוצאה המתבקשת בשימוש בלוח עשויה לסטות מעט (שקלים בודדים) מזו המתבקשת אגב שימוש בנוסחה המתמטית המדוקיקת. זהה בסדר.**

$$FV = 10,000 * \frac{(1 + 4\%)^8 - 1}{4\%} = 92,142$$

חלופה להציבה בנוסחה, אפשר לפתח את לוח (טבלה) א-2 בנספח א לכרך ד, ולכפול את התשלום התקופתי  $pmt$  (ה-10,000) בערך המספרי שמתබל עבור עמודות ריבית  $r = 4\%$ , ושורת תשלומים  $t = 8$ .

$$FV_{Series} = 10,000 * 9.214 \approx 92,140$$

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%
1		1.000	1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030	2.040
3		3.030	3.060	3.091	3.122
4		4.060	4.122	4.184	4.246
5		5.101	5.204	5.309	5.416
6		6.152	6.308	6.463	6.633
7		7.214	7.434	7.662	7.898
8		8.286	8.583	8.892	9.214
9		9.369	9.755	10.159	10.583
10		10.462	10.950	11.464	12.006

**נוסחת ערך עתידי של סדרה - כתיב מקוצר ושימוש בלוח א-2<sup>3</sup>**

$$FV_{Series} = pmt * FVFA(r, t)$$

כאשר:

הערך  $pmt$  הוא סכום ההפקזה הקבוע.

הערך  $FVFA$  הוא למעשה התוצאה של הנוסחה / הלוח שמתאימה לריבית בעסקה ( $r$ ) ומספר התשלומים ( $t$ )

<sup>3</sup>  $S_t = a * (r, t)$  (מעשן)

כלומר הפתרון במקרים רבים יוצג כך :

$$FV_{Series} = 10,000 * FVFA(4\%, 8) = 10,000 * 9.214 = 92,140$$

זהירות : ביחידות הלימוד, בנספח אליך ד וכן בחלק מהפתרונות באתר, במקומות FVFA הסימן יהיה מע"ס (ראשי תיבות של מקדם ערך עתידי סדרתי).

**שאלה 4 - ערך עתידי של סדרת תלמידים, עם התאמות (דוחיה בפירעון)**

ציל מתכנתת להפקיד **בתום כל שנה** במשך **7 שנים** סכום של **4,000 ש"ח**. בחולף 7 שנים תפסיק ההפקדות, אך החסכו יצבור ריבית עוד 4 שנים נוספות (פירעון בחולוף 11 שנים). הריבית השנתית בחסכו היא 5%. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של ציל בתום 11 שנים?

פתרון :

מטרה : לחשב ערך עתידי

סדרה / סכום ייחיד :

סרי"ת קבוע?

כן : סכום קבוע  $PMT = 4,000$  ריבית קבועה  $r = 5\%$ , תזרירות קבועה = כל שנה

**ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד לשך הצבירה למועד ההפקדה האחרון (t=7).**

הדגש :

כן ! נדרש לצבור ריבית נוספת לאחר הסכום הקיימים 4 שנים נוספות.

האם צריך התאמה?

הבה נניח שהפירעון היה בתום שנה 7 (משם בסיום הסדרה). במצב כזה, הדרך לחשב את הסכום בפирעון הייתה :

$$FV_{Series}(7) = pmt * FVFA(r, t) = 4,000 * FVFA(5\%, 7) = 4,000 * 8.142 = 32,568$$

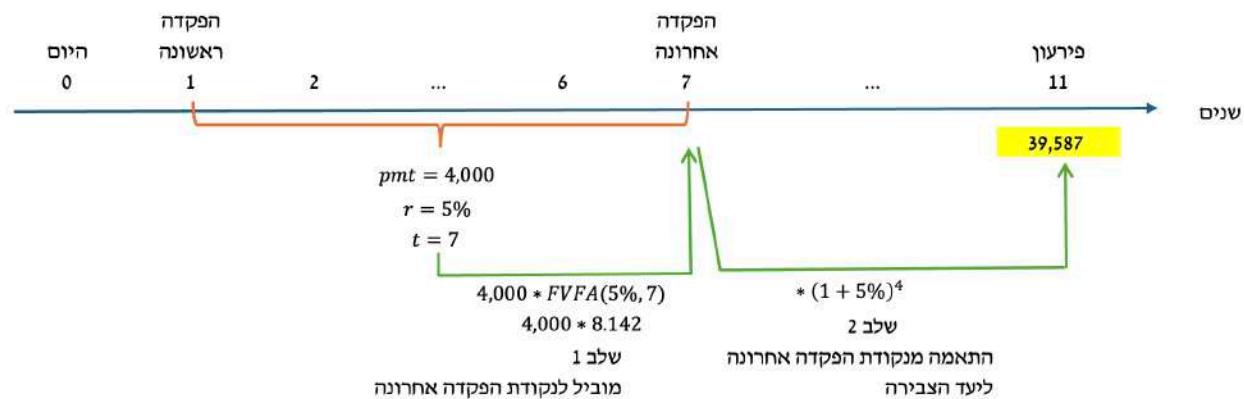
סכום זה, בסך 32,568 ש"ח שנצבר לתום שנה 7, יצבור כעת ריבית נוספת 4 שנים נוספות. האופן שבו נבע צבירת ריבית ללא הפקדות נוספות :

$$FV_{11} = FV_7 * (1 + r)^4 = 32,568 * (1 + 5\%)^4 = 39,587$$

از למשה : כאשר מחשבים ערך עתידי של סדרה, החישוב מוביל אותנו תמיד לנקודת ההפקדה האחרונה בסדרה. ואם יש צורך בחישוב הערך העתידי לנקודת זמן אחרית - נבצע את ה"התאמה" (את הדחיפה הנוספת קדימה) עם מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת מספר תקופות ההתאמה. זה בעצם אומר שהחישוב מהיר אחד ויחיד הדרך היא :

$$FV_{11} = 4,000 * FVFA(5\%, 7) * (1 + 5\%)^4 = 39,587$$

תרשים יפה המתאר זאת (טוב, לא באמת יפה, אבל אקווה שעושה את העבודה) :



### שאלה 5 - ערך עתידי של "מספר סדרות", עם התאמות

רפאל מתכוון להפקיד בתום כל שנה במשך 8 שנים סכום של 4,000 ש"ח, ובתום כל שנה במשך 4 שנים לאחר מכן סכום של 7,000 ש"ח. לאחר מכן מכון תפסקנה ההפקדות, ורפאל יצבור ריבית נוספת בגין ההפקדות עד למועד הפירעון שיחול בעוד 15 שנים. בהנחה שהריבית השנתית בחסכון 6%, מהו הסכום הכללי שייעמוד לרשותו של רפאל?

פתרון :

גם כאן, רוצים לדעת :

ערך עתידי

של "סדרה"

כאשר חל שינוי בסכום במהלך

אם ניתן לזהות בתוך הסדרה מקרים או תתי סדרות שבהן הערכים קבועים - נוכל להתייחס לכל תתי סדרה כשאללה נפרדת לגמרי, לחשב את ערכיה העתידיים למועד הפירעון, כולל התאמות רלוונטיות לפי הצורך, ואו לחבר את הערכים העתידיים של תתי סדרות אלו ולקבל  $FV$  מצפפי / כולל.

ובכתב מסודר יותר<sup>4</sup> :

$$FV = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3$$

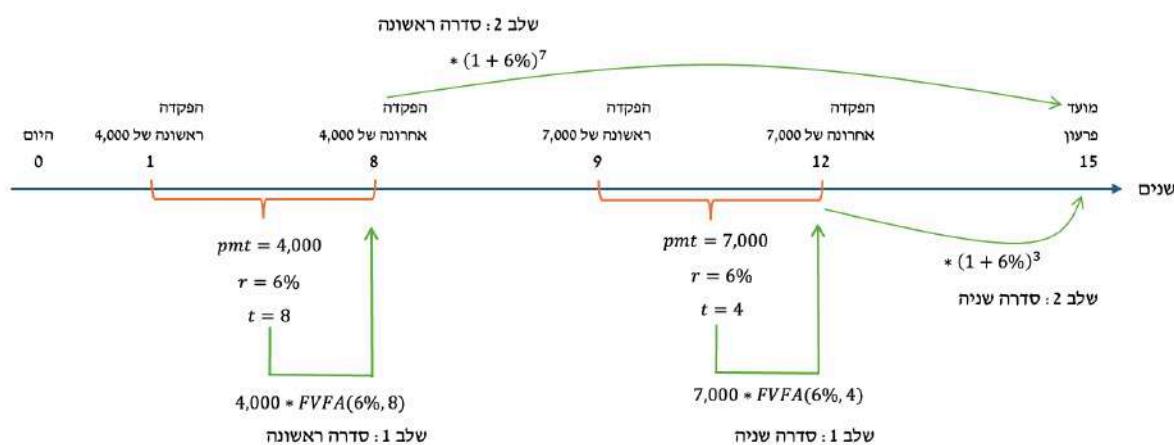
$$FV = 4,000 * 9.897 * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * 4.375 * (1 + 6\%)^3 = 96,000.58$$

<sup>4</sup> את הערך של  $FVFA$  (מעע"ס) ניתן לחשב באמצעות הצגה בנוסחה  $\frac{(1+r)^t - 1}{r}$  או באמצעות הצגה בנוסחה מלאה א-2 בנספח א לכרך ד.

הסבר: כאשר חל שינוי ברכיבי סדרה, אנו נפצל את החישוב, כך שלמעשה, יש לנו סדרה ראשונה עבור 8 הפקודות הראשונות, וסדרה נוספת, שנייה, עבור 4 הפקודות לאחר מכן.

ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד לנקודת ההפקודה الأخيرة. לכן, הערך העתידי של הסדרה הראשונה הוביל בזמן 8. בהינתן שהפירעון איננו בזמן 8 אלא רק בזמן 15, علينا להתאים / "לדוחף" את התוצאה של הסדרה הראשונה עוד 7 שנים קדימה, בזמן 8 לזמן 15. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 7. הסדרה השנייה היא בשנים 9, 10, 11, 12. ככלומר, הערך העתידי של הסדרה שMOVIL למועד ההפקודה الأخيرة מוביל בזמן 12. בהינתן שהפירעון איננו בזמן 12 אלא רק בזמן 15, علينا להתאים / "לדוחף" את התוצאה של הסדרה השנייה עוד 3 שנים קדימה, בזמן 12 לזמן 15. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 3.

להלן איור הממחיש בצורה מפורטת את אופן הפתרון וההתאמות בಗינו:



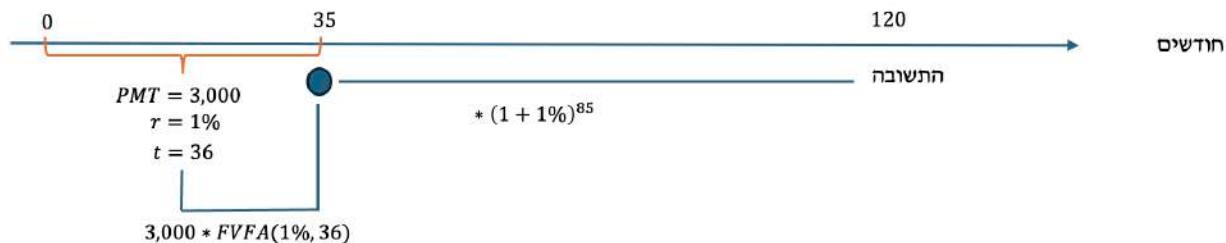
$$FV(\text{Series1}) = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7$$

$$FV(\text{Series2}) = 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3$$

$$FV(\text{Total}) = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3 = 96,000$$

### שאלה 5.1 – ערך עתידי של סדרה, תזרימי תחילת תקופה עם התאמות

אנна חנה הפקידה בתחילת כל חודש במשך 3 שנים סכום של 3,000 ש"ח. פדיון החסכון הוא בתום השנה ה-10. בהנחה שהריבית החודשית היא בשיעור 1% (והיא נצברת גם לאחר ההפקדה האחרונה, עד הפדיון), מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של אננה חנה בתום השנה ה-10?



#### הסבר מפורט:

כאשר מתארים לישור שתזרימית בתחילת תקופה, המשמעות היא שעיתוי התזרמים על הציר הוא מוקדם יותר (התחלת וסיום) מסדרה "רגילה" (תום תקופה).

במלים אחרות, אם היה כאן עניין של פקודות בכל חודש, 3 שנים, הסדרה הייתה ממוקמת על הציר מזמן 1 עד זמן 36.

הואיל ויש אזכור מפורש של תחילת כל חודש ב-3 שנים אלו, אז המיקום על הציר הופך להיות מ-0 עד 35 (גם ההתחלה וגם הסיום מוקדמים יותר בתקופה אחת).

יחד עם זאת, למרות המיקום השונה על הציר, מספר התזרמים זהה לחלווטין. למעשה, אפשר להביע על כך שמדובר בתזרמים מ-1 עד 35 (35 תזרמים) ובנוסף תזרים בזמן 0 (ולכן בסך הכל 36 תזרמים).

לחילופין, אפשר להשתמש بطريقة טכנית: כאשר עוסקים בסדרות, ה- $t$  ניתן לחישוב לפי הפרש בין עיתוי התשלומים האחרון לעיתוי התשלום הראשון, וכל זה – פלוס 1:  $36 - 0 + 1 = 36$ .

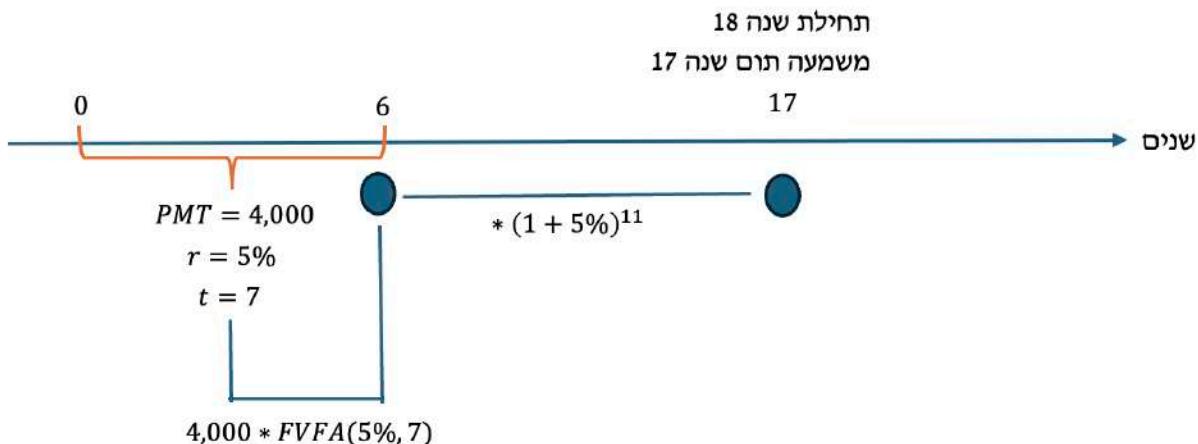
לאחר שהצחנו לגלוות שיש 36 תזרמים שהאחרון שבהם בזמן 35, אנו יודעים שהערך העתידי שמוביל בדיקות להפקדה האחרונה קרי בזמן 35, דורש התאמה נוספת מזמן 35 לזמן 120. כאשר מבצעים התאמה (כפל באחת ועוד הריבית) לא משתמשים بطريقة של מספר התזרמים; בסך הכל כופלים ב-1 ועוד הריבית בחזקת הפרש בין התקופות: דוחפים את התוצאה מ-35 ל-120 עם חזקה 85.

$$FV = 3,000 * FVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^{85} \rightarrow FV = 3,000 * 43.077 * 1.01^{85} = 301,081$$

**שאלה 5.2 – ערך עתידי של סדרה, תזרימי תחילת תקופה**

גרולפי מפקידה בתחילת כל שנה סכום של 4,000 ש"ח במשך 7 שנים. החסכו יפרע בתחילת השנה ה-18. הריבית השנתית היא 5%. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של גROLפי במועד הפירעון?

פתרון :



הסבר מפורט :

סדרה שכוללת הפקודות בתחילת כל שנה 7 שנים, כולל 7 תזרימיים שמיקומם על הציר מזמן 0 לזמן 6. לגבי עיתוי הפירעון. אמרו שהפירעון בתחילת שנה 18. אני חייב למקם את הצלל על הציר במונחי תום תקופה, שכן אשתמש בטענה שאומרת שתחילת שנה 18 היא תום שנה 17, ובהתאם, אציג את עיתוי הפירעון על גבי זמן 17 על הציר.

לאחר שאחשב ערך עתידי של סדרה וגיעו למועד ההפקודה الأخيرة זמן 6, ואת זה אתאמ קדימה בחזקה מתאימה שמתארת את פרק הזמן שחולף מ-6 ל-17 שהוא 11 שנים נוספות.

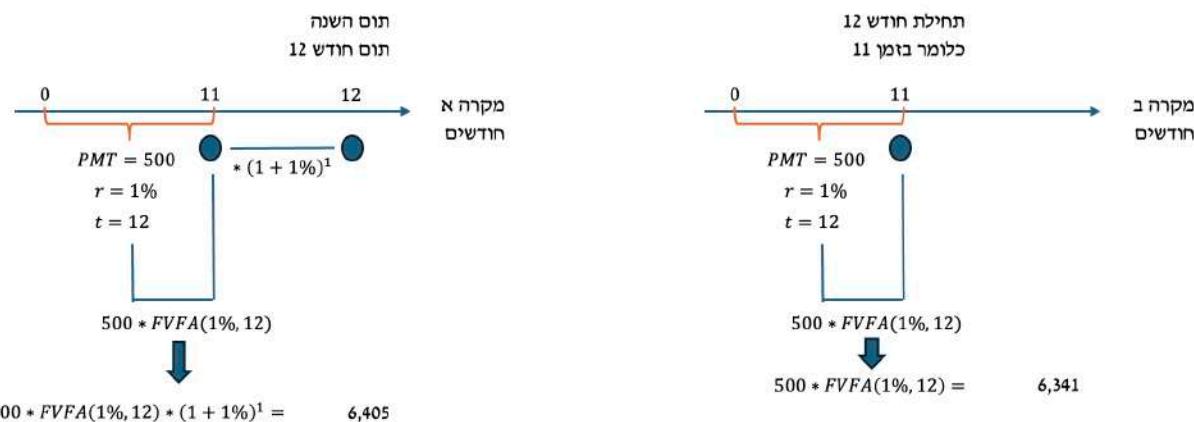
$$FV = 4,000 * FVFA(5\%, 7) * (1 + 5\%)^{11} \rightarrow 4,000 * 8.142 * 1.05^{11} = 55,702$$

**שאלה 5.3 – “האם תמיד כשכטוב תחילת תקופה כופלים ב-1 ועוד הריבית”**

קיליל מפקידה בתחילת כל חודש במשך שנה סכום של 500 ש"ח. הריבית החודשית 1%, והפירעון יבוצע בתום השנה.

- מהו הסכום הכללי שיימוד לרשותה?
- ביצד תשנה תשובתך, אם הפירעון הוא בתחילת החודש ה-12.

**פתרון :**



**הסבר :**

האיור השמאלי מתרגם את המצב שבו ההפקדות בתחילת תקופה, אך הפירעון הוא בתום תקופה. כלומר קיימים זמנים של חודש אחד בין עיתוי ההפקדה האחרונה (תחילת החודש האחרון של השנה, זמן 11) לבין עיתוי הפירעון (תום השנה, תום החודש ה-12). פער זה נדרש ביצוע התאמה; קרי, מכפלה של החישוב הסדרתי באחת ועוד הריבית, כדי לגשר על הפער בין מועד התזרים האחרון למועד הפירעון.

האיור הימני מתרגם את המצב שבו ההפקדות עוזן בתחילת תקופה, אך הפירעון גם הוא בתחילת החודש האחרון של השנה הראשונה, כלומר, גם ההפקדה הראשונה וגם הפירעון – בזמן 11 על הציר. הוואיל ואין פער זמנים בין עיתוי ההפקדה הראשונה לפירעון, אין צורך במכפלה נוספת או התאמה נוספת.

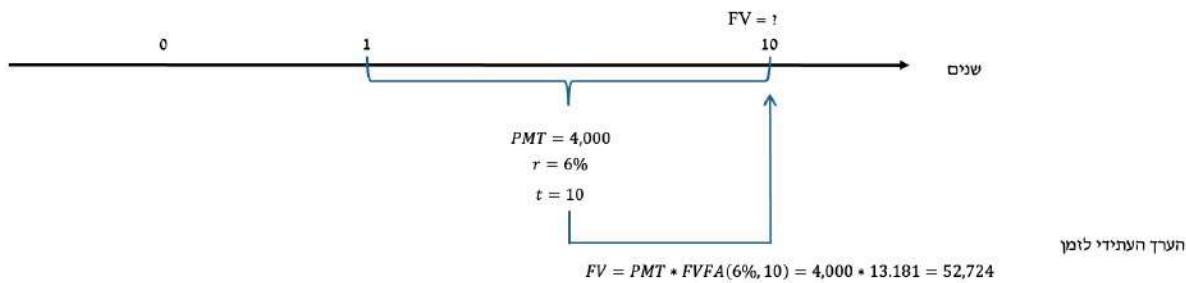
గרלופי: “שייקה, בשני המקרים אנו מדברים על פירעון; אלא שהפירעון במקרה א הוא למעשה  $FV_{12}$  ואילו הפירעון במקרה ב הוא למעשה  $FV_{11}$  וזה מה שיותר את ההבדל בחישוב.

### שאלה 6 - ערך עתידי של סדרה - תזרימי "תחילת תקופה"

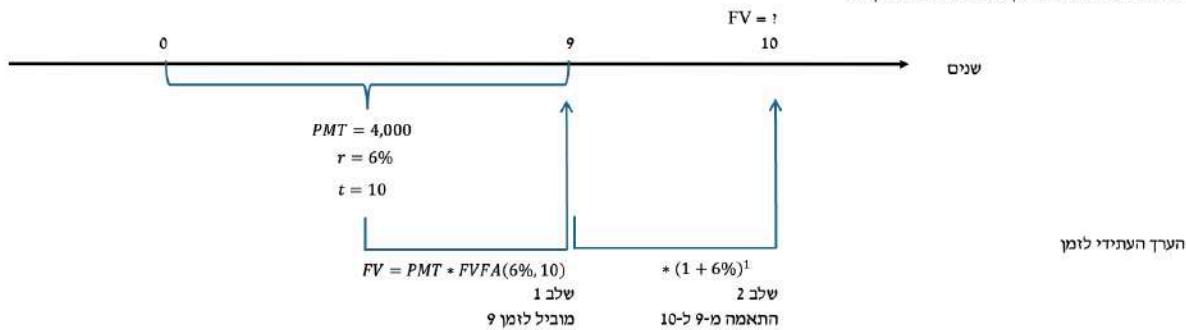
mirb matcnenet lehafkid **בתחילת** كل שנה במשך 10 שנים סכום של 4,000 ש"ח. הריבית השנתית 6%, והפירעון בוצע בתום השנה ה-10. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של מירב במועד הפירעון?

פתרון :

אם חיו אמורים שתחזקדה בתום כל שנה 10 שנים :



אבל התזרמים הם בתחילת כל שנה : תחילת שנה 1 = זמן 0 ; תחילת שנה 10 (הפקדה אחרונה) = זמן 9.  
יחד עם זאת מועד הפירעון לא חשתנה, והוא זמן 10.



$$FV = PMT * FVFA(r, t) * (1 + 6\%)^1 = 4,000 * 13.181 * 1.06 = 55,887$$

וכעת בכתיבת מסודרת יותר :

$$FV = 4,000 * FVFA(6\%, 10) * (1 + 6\%)^1 = 4,000 * 13.181 * 1.06 = 55,887.44$$

הסבירים :

1. כאשר מדובר בסדרה שהפקודות **בתחילת** תקופה, המשמעות היא שגם תחילת הסדרה וגם סיוםה הם בנקודות זמן אחת מוקדמת יותר.  
בשפה פשוטה: סדרה "בתום כל שנה, 10 שנים" תוצג על הציר מזמן 1 לזמן 10.  
סדרה "בתחילת כל שנה, 10 שנים" תוצג על הציר מזמן 0 לזמן 9.  
בכל מקרה, מספר ההפקודות  $t$  לא משתנה והוא עדין 10.
2. כאשר מבצעים את החישוב הסדרתי של הערך העתידי של סדרה זו, הוואיל וההפקדה האחורונה היא בזמן 9, נדרש לבצע התאמה של התוצאה בזמן 9 לזמן 10 (מועד הפירעון). לכן כפלו ב-1 ועוד הריבית.
3. באופן כללי, זכרו: כאשר עוסקים בסדרות ערכו של  $t$  מייצג את מספר ההפקודות / מספר תזרימי המזומנים, לא את מספר התקופות, לא את מועד סיום הסדרה או ערכיהם אחרים. מסיבה זו, גם כעסקנו בסדרה מזמן 0 ל-9, ערך ה-  $t$  עדין 10.

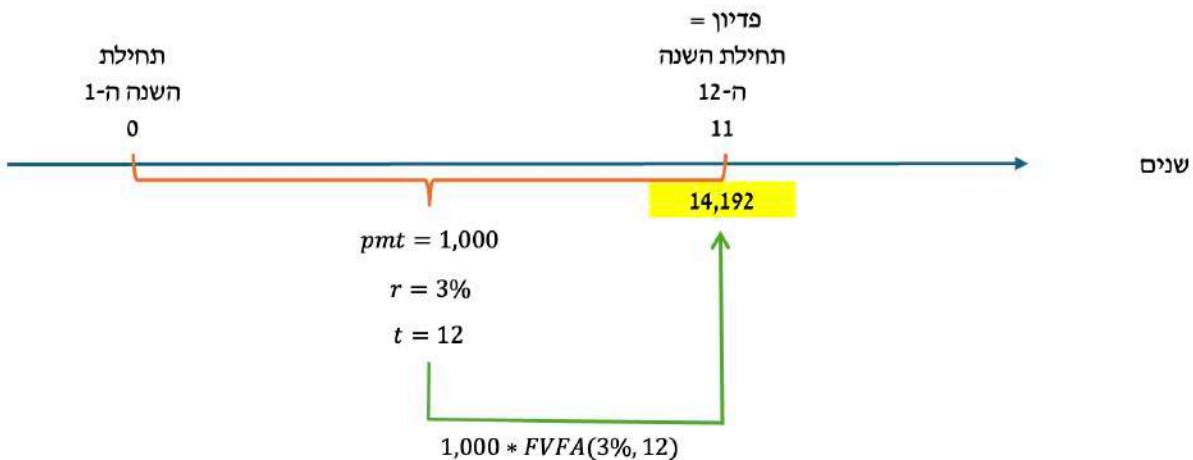
### שאלה 6.1 – ערך עתידי של סדרה, תחילת תקופה – בזיהירות

משה מתכוון להפקיד לחסכוון בתחילת כל שנה במשך 12 שנים סכום של 1,000 ש"ח. הריבית השנתית 3%. מהו הסכום הכולל שיימוד לרשותו במועד הפדיון?

פתרון:

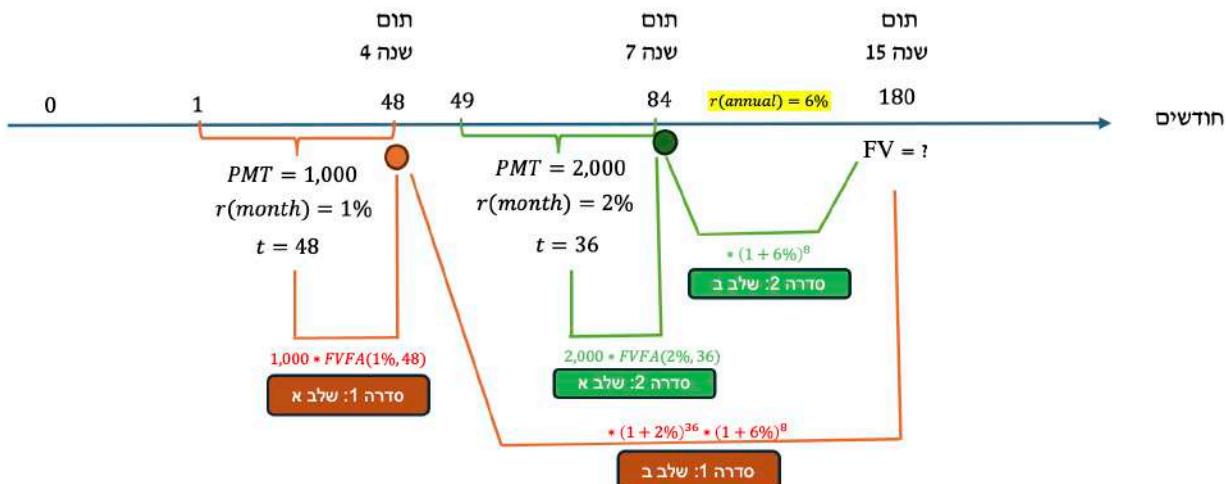
מטרת השאלה פשוטה זו היא להציג בפנינו שאסור לנו להיות נקנקיים ולהשוו שתמיד שכטובה המילה "תחילת תקופה" כופלים ב-1 ועוד הריבית. זה לא נכון. תחילת תקופה זה בסך הכל מונח שעזר לנו להבין שתחילת הסדרה וגם סיוםה על הציר – הם במועדים "שונים" (אחת לפני המיקום הטבעי שלהם).

ברגע שמייקמתי על הציר את תזרימי ההפקדה, כל שאצטרך לשים לב אלו הוא נקודת הזמן המדויקת של הפירעון / היעד – אם היא שונה מנקודת הזמן של ההפקדה האחורונה שזוהתה – נבצע התאמה. אחרת (כמו במקרה זה) לא נבצע התאמה.



## שאלה 6.2 – ערך עתידי של מספר סדרות

רוויח צבאי הפקיד בתום כל חודש במשך 4 שנים סכום של 1,000 ש"ח. בתום 4 השנים סיים דוקטורט, שכרו הוקף וד"ר צבאי הפקיד בתום כל חודש עוקב במשך 3 שנים סכום של 2,000 ש"ח. ההפקדה الأخيرة בוצעה בתום השנה ה-7 (ביחס להיום). הכספי נשאר בחסכוון, והמשיך לציבור ריבית במשך 8 שנים נוספות. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של ד"ר צבאי בתום השנה ה-15. אם הריבית החודשית במהלך 4 השנים הראשונות היא 1%, הריבית החודשית במהלך 3 השנים לאחר מכן היא 2%, והריבית השנתית בכל שנה עוקבת היא 6%.



### וואט זה פליפ?

זיהינו שאלה שבה מפקדים כל חודש סכום מסוים; ובשלב מסוים מפקדים כל חודש סכום אחר. לאור העובדה שהסכוםים שונים – יש כאן 2 סדרות, ולא סדרה אחת.

הסדרה הראשונה (האדומה) כוללת את התזרומים הקבועים מזמן 1 לזמן 48. חישוב הערך העתידי של הסדרה מוביל לזמן 48, ותוצאה זו יש לדוחף עד לזמן 180 – תום שנה 15, זמן הפירעון. הדחיפה (התאמת) הנוספת זו מבוצעת בריבית משתנה. מדוע? בשאלת נתון שהריבית ב-3 השנים לאחר הסדרה הראשונה – בעצם, שנים 5, 6, 7 – היא ריבית חודשית של 2%, ולכן ההתאמת דורשת מכפלה ב-1 ועוד ריבית חודשית 2% בחזקת 36 חודשים. את כל זה צריך לכפול ב-1 ועוד הריבית בעשתיים לאחר מכן; אמרו לי שלאחר 3 שנים הנוספות, למעשה, בתים 15-8, הריבית היא שנתית (לא חודשית) בשיעור 6%. לכן, ההתאמת הנוספת בגין תקופה זו (וזכרו – אני עדין בסדרה הראשונה בלבד) היא על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית (שנתית) בחזקת 8 (שנתיים).

בעצם, הערך העתידי של כל הסדרה הראשונה האדומה לתום החודש ה-180 מתקובל באמצעות הביטוי:

$$FV(180) = 1,000 * FVFA(1%, 48) * (1 + 2\%)^{36} * (1 + 6\%)^8 \quad (\text{סדרה 1: שלב א})$$

ומה לגבי הסדרה השנייה? הסדרה זו כוללת את התזרומים הקבועים מזמן 49 לזמן 84. חישוב הערך העתידי של הסדרה מוביל לזמן 84, ותוצאה זו יש לדוחף עד לזמן 180 – תום שנה 15, זמן הפירעון. הדחיפה (התאמת) הנוספת זו מבוצעת בריבית שנתית ידועה של 6% שתקפה מיום השנה ה-7 עד תום השנה ה-15. לכן הביטוי יהיה:

$$FV(180) = 2,000 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 6\%)^8 \quad (\text{סדרה 2: שלב א})$$

בsek הכל, הערך העתידי המצרפי שמתחשב ב-2 הסדרות, שינוי הריבית וצבירות הריבית הנוספות יהיה:

$$FV = 1,000 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 2\%)^{36} * (1 + 6\%)^8 + 2,000 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 6\%)^8 =$$

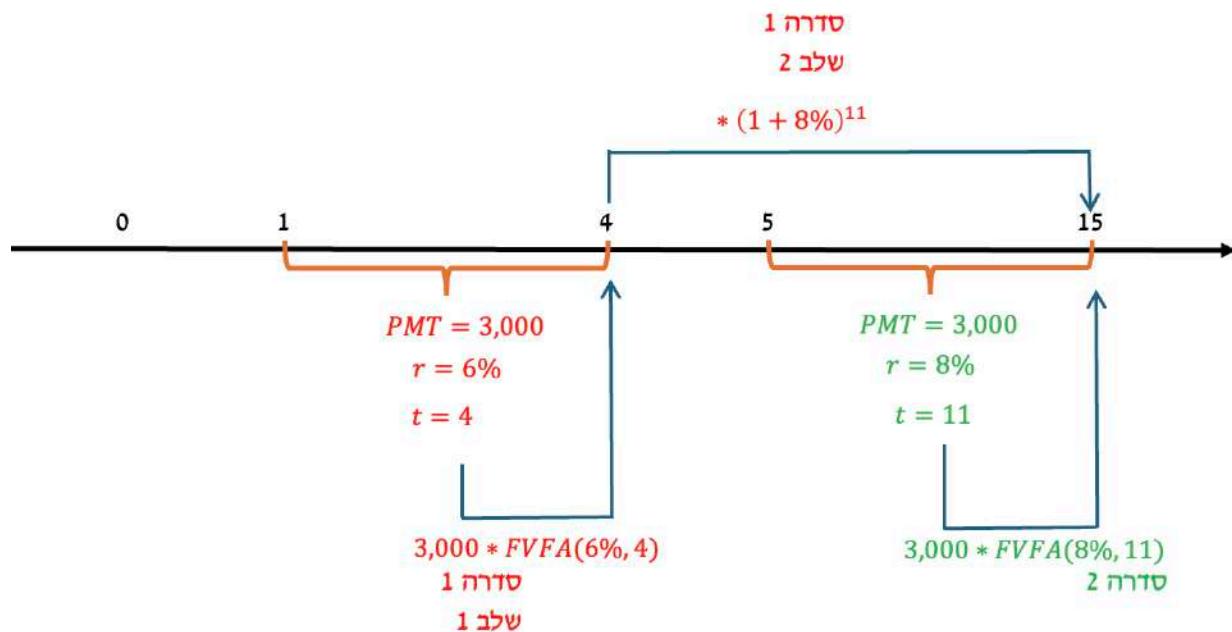
סיכום ביניים לשאלת זו:

אם זיהיתי שאלה שבה קיימות מספר סדרות וצריך לתרגם / לחשב את ערך כולל לנוכח זמן עתידי בודד, עליי לדאוג לחשב ערך עתידי לכל סדרה בנפרד, לדאוג בהתאם לכל סדרה בנפרד למועד הפירעון, ולסכם את התוצאות כדי להגיע לערך העתידי הכללי.

שאלה 7 - ערך עתידי של סדרה - פיצול למספר סדרות בעקבות שינוי ריבית - לבית

שקד מתכונת להפקיד בתום כל שנה במשך 15 שנים סכום של 3,000 ש"ח. הריבית השנתית במהלך 4 השנים הראשונות היא 6% לשנה, ואילו הריבית השנתית בתום כל שנה עוקבת היא 8% לשנה. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של שקד בתום 15 שנים?

פתרון :



בsek הכל, משווהות הפתרון היא :

$$FV = 3,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 8\%)^{11} + 3,000 * FVFA(8\%, 11)$$

ובהתאם התשובה תהיה :

$$FV = 3,000 * 4.375 * (1 + 8\%)^{11} + 3,000 * 16.645 = 80,538$$

הסבר :

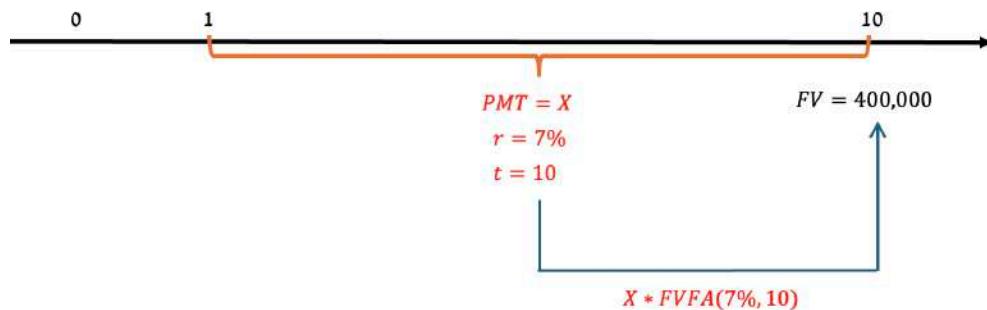
- כאשר בסדרה מסוימת חל שינוי בריבית, חייבים לפחות את הסדרה לשתי סדרות נפרדות. זאת, משום שסדרה לצרכים של חישובינו מוגדרת רק כאשר כל רכיבי הסר"ת קבועים (כלומר : גם הסכום חייב להיות קבוע, גם הריבית חייבת להיות קבועה, וגם התדירות חייבת להיות קבועה). לכן, כאשר שינוי בריבית, הסדרה "נשברת" ומתחילה סדרה חדשה.
- מסיבה זו, علينا להגדיר במקרה זה שתי סדרות : סדרה ראשונה בשנים 1-4 (עד שינוי הריבית), וסדרה שנייה עבור השנים 5-15 (לאחר שינוי הריבית).
- הערך העתידי של הסדרה הראשונה שמשמעותה בזמן 4 הוביל בזמן 4 בהגדירה (למועד ההפקה האחרון), לרבות הריבית המגולמת, עד וכול זמן זה. כדי להתאים אותו בזמן 15, מועד הפרעון - כפלו ב-1 ועוד הריבית בחזקת 11 (ההפרש בין 15, היעד, ל-4).
- הערך העתידי של הסדרה השנייה שמשמעותה בזמן 15, הוביל בזמן 15 בהגדירה (למועד ההפקה האחרון). לכן, אין צורך להתאים בזמן 15, ואין צורך במכפלה נוספת של ביטוי זה.

שאלה 8 - **חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - לבית**

גיא מתכוון להפקיד בתום כל שנה במשך 10 שנים סכום קבוע כך שבחלוף 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקדה השנתי הנדרש אם הריבית השנתית היא 7%?

פתרון :

בשאלה זו, לראשונה בחייבנו, סך הערך העתידי נתון - הנעלם הוא ב"מקום אחר".  
כאן, ספציפית, הנעלם הוא ה-  $PMT$  שמייצג את ההפקדה התקופתית בסדרת ההפקדות הנתונה.



כך מתקבל המשוואת הפתרון :

$$X * FVFA(7\%, 10) = 400,000$$

$$X = \frac{400,000}{13.816} = 28,952$$

למעשה יצרנו משווהה לפיה - הערך העתידי של סדרת ההפקדות (מכפלת סכום הפקדה בתקופתי בביטוי של ערך עתידי סדרתי) שווה ל- 400,000 ש"ח, ובהתאם חילצנו את סכום ההפקדה הנדרש העומד על 28,952 ש"ח לשנה.

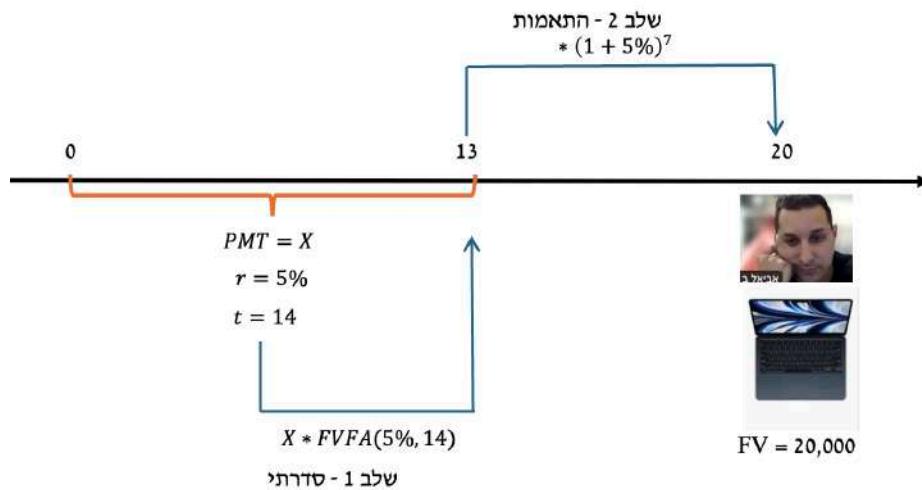
במקרה זה, לא נדרש התאמות - משום שנתון עיתוי הצבירה בסך 400,000 (הערך העתידי) הוא בדיקות למועד ההפקדה الأخيرة (תום השנה ה-10).

### שאלה 8.1 - לבית

אביאל מפקיד בתחילת כל שנה במשך 14 שנים קבוע. לאחר מכן, ישair את הכספי בחסכון עד בסוף השנה ה-20. הריבית השנתית היא 5%. מהו הסכום השנתי שצרכיך אביאל להפקיד, על מנת שיוכל לרכוש Macbook בתום 20 שנים, אם ידוע שבמועד זה צפוי מחירו להיות 20,000 ש"ח?

פתרון :

שאלה זו דומה מאד לקודמת, למעט העובדה שערכיהם בסדרה אל מול עיתוי הפירעון מוביל לכך שתדרשנה התאמות :



ומשווואת הפתרון תהיה :

$$X * FVFA(5\%, 14) * (1 + 5\%)^7 = 20,000 \rightarrow X = 725.22$$

שיםו לב : כאשר עסקנו בסדרה עצמה (בתחילת כל שנה, 14 שנה) על הערך ההציג היא מ-0 עד 13, ומספר תזרימי המזומנים בסדרה שמנדר את ה-  $t$  הסדרתי הוא 14.

לעומת זאת, כאשר עסקנו בתקופת ההתאמות, על פי נתוני השאלה הפירעון הוא **בסוף** שנה 20, ולכן עבור ההתאמה, דחפנו את התוצאה מ-13 ל-20, זו הסיבה לחזקת 7.

**בתקופת ההתאמות =  $h - t$  שווה למספר התקופות (הפרש פשוט)**

**בתקופת הסדרה =  $h - t$  שווה למספר התזרמים (הפרש + 1).**

### תרגול נוספת לאחר מפגש 1 בפגוון נושאינו - כולל שיכלולים

לשאלו שהן יחסית פשוטות יש פתרון קצר. לשאלות המורכבות השקעתי בפתרון מורחב. אני זמין לכל שאלת ו לכל אי הבנה לגבי התרגולים ופתרונותיהם, אנו כותב במיוחד שאלות מוקדמות לתכני הסטטן עבורהם בזמן קצר וכן טעויות הקלדה אפשריות מעט לעת, רצוי דרך הפורים ואפשר גם באמצעות אחרים בכל מקרה של אי בהירות.

### שאלה 9 - לבית

לורן הפקידה היום לחסכו סכום של 200,000 ש"ח. תקופת ההפקדה היא 8 שנים, כאשר הריבית השנתית בכל אחת מהשנתים הראשונים היא 4%, הריבית השנתית בכל אחת מ-3 השנים לאחר מכן היא 2%, הריבית השנתית בשנה הששית ובשנה השביעית היא 3% לשנה, והריבית השנתית בשנה השמינית היא 8%. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של לורן במועד פירעון החסכו (בתום 8 שנים)?

פתרון :

$$FV = 200,000 * (1 + 4\%)^2 * (1 + 2\%)^3 * (1 + 3\%)^2 * (1 + 8\%)^1 = 263,024$$

### שאלה 10 - לבית

מוריה החיליטה לחסוך לטובת iPhone חדש. לשם כך תפקיד בסוף כל חודש במשך שנה סכום של 300 ש"ח. הריבית החודשית בחסכו היא בשיעור 1%. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של מוריה בסוף השנה?

פתרון :

$$FV = 300 * FVFA(1\%, 12) = 300 * 12.683 = 3,805$$

### שאלה 11 - לבית

תחל החיליטה לחסוך לטובת לימוד הנדסת נתונים בטכניון. לשם כך תפקיד בסוף כל חודש במשך שלוש שנים סכום של 500 ש"ח. לאחר מכן, תפסיקת ההפקדות, אך הסכום ימשיך לציבור ריבית שנה נוספת. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של תחל בתום השנה הרביעית, אם ידוע שהיעור הריבית החודשית הנו 2%?

פתרון :

$$FV = 500 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{12} = 500 * 51.994 * 1.02^{12} = 32,970$$

### שאלה 12 - לבית

פרופ' עפר עציוון החיליט לחסוך סכום של 400 ש"ח בתחילת כל חודש במשך 3 שנים. בתום 3 שנים החסכו ייפדה. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותו בתום 3 שנים אם ידוע שהריבית החודשית היא 1%?

פתרון :

$$FV = 400 * FVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^1 = 400 * 43.077 * 1.01 = 17,403$$

**שאלה 13 - לביה**

פרופ' טל שביט החליט לחסוך סכום של 600 ש"ח בתחלת כל חודש במשך 4 שנים. לאחר מכן הפקידו (הפקידו האחרון בתחלת החודש האחרון של השנה ה-4), אך ימשיכו לציבור ריבית עד תום השנה ה-6. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של טל במועד פירעון החסכוו אם ידוע שהריבית החודשית היא 1%?

פתרון :

$$FV = 600 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^{25} = 600 * 61.223 * 1.01^{25} = 47,109$$

 **שאלה 14 - לביה**

ד"ר איל להב החליט לחסוך סכום של 300 ש"ח בסוף כל חודש במשך 3 שנים, ובסוף כל חודש במשך השנה ה-5 עד תום השנה ה-6. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של ד"ר להב בתום השנה ה-6 אם הריבית החודשית היא 2%?

פתרון :

$$FV = 300 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{36} + 200 * FVFA(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{12}$$

$$FV = 300 * 51.994 * 1.02^{36} + 200 * 30.422 * 1.02^{12} = 39,535$$

 **שאלה 15 - לביה**

פרופ' מוסי רוזנבוים החליט לחסוך סכום של 700 ש"ח בסוף כל חודש במשך 4 שנים. הריבית החודשית היא 2% לחודש בכל אחת מהשנתים הראשונות, ו-3% לחודש בכל חודש לאחר מכן. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של מוסי במועד פירעון החסכוו שיחול בתום השנה ה-4?

פתרון :

$$FV = 700 * FVFA(2\%, 24) * (1 + 3\%)^{24} + 700 * FVFA(3\%, 24)$$

$$FV = 700 * 30.422 * 1.03^{24} + 700 * 34.426 = 67,387$$

 **שאלה 16 - לביה**

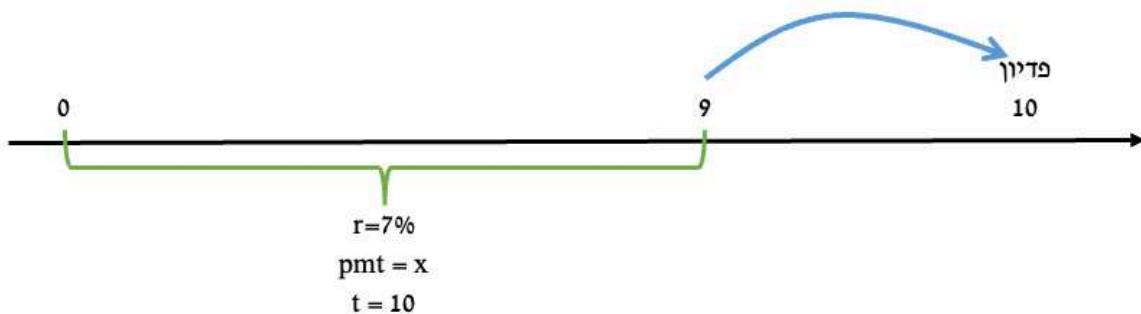
פרופ' אורן ציון החליט לחסוך סכום קבוע בסוף כל חודש במשך 3 שנים. הריבית החודשית היא 1% לחודש. מהו סכום ההפקידו החודשי הקבוע אם ידוע שבסיום תקופת החסכוו (בתום 3 שנים) עומד לרשותו סכום של 500,000 ש"ח?

פתרון :

$$FV = 500,000 = x * FVFA(1\%, 36) \rightarrow 500,000 = 43.077x \rightarrow x = 11,607$$

**שאלה 17 - חילוץ סכום הפקודה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - תחילת תקופה - לבית**  
 שיפתנו להפקיד בתחילת כל שנה במשך 10 שנים סכום קבוע כך שבחולוף 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום הפקודה השנתי הנדרש אם הריבית השנתית היא 7%?

**פתרון :**  
 בשאלת זו נתון הערך העתידי - הסכום שנצבר לסיום השנה ה-10. בנוסף, ידוע שמדובר בסדרה קבועה (הפקודה בתחלת כל שנה, 10 שנים). יחד עם זאת, הפירעון הוא בסוף השנה ה-10. יש לשים לב, כאשר מדובר בסדרה תחילת תקופה, עיתוי סיוםה הוא "אחת לפני" הסיום הטבעי שלה. במקרים אחרים, אם הפקודה בתום כל שנה 10 שנים, המיקום על הציר של איברי הסדרה הוא בטווח של 10-1, אלא שכן, לאור העובדה שמדובר בתזרימי תחילת תקופה, המיקום על הציר של איברי הסדרה הוא בטווח של 9-0. נdag להראות זאת גם ויזואלית. הערך שיש לחוץ, סכום הפקודה החודשי, יסומן כ- x :



$$FV = x * FVFA(7\%, 10) * (1 + 7\%)^1 = 400,000 \rightarrow x \approx 27,057.89$$

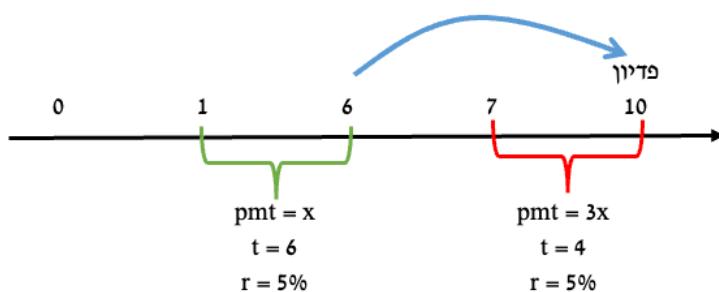
**הסבר לביטוי המתמטי :** ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד למועד הפקודה الأخيرة. הוайл וההפקודה الأخيرة היא בזמן 9 (תחלת שנה 10 = זמן 9 על הציר, תמיד), הרי שקיים פער זמנים של שנה אחת ממועד אליו מוביל הנוסחה (מועד הפקודה الأخيرة, זמן 9) לבין מועד הפירעון - זמן 10. לכן צריך לכפול את ביטוי הערך העתידי ב-1 ועוד הריבית פעם אחת (בחזקת אחת).

שאלה 18 - חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - שבלול  
 שי מוכנן להפקיד בתום כל שנה במשך 6 שנים סכום קבוע, ובתום כל שנה במשך 4 שנים לאחר מכן  
 גובה פי 3, כך שבתום 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקדה בכל אחת מ-6  
 השנים הראשונות, אם הריבית השנתית היא 5%?

משוואת הפתרון היא:

$$FV = x * FVFA(5\%, 6) * (1 + 5\%)^4 + 3x * FVFA(5\%, 4) = 400,000 \rightarrow x = 18,869.82$$

התרשימים המנמק הוא זה:



והסביר המילולי הוא: יש לנו כאן למעשה שתי סדרות. הסדרה הראשונה היא עבר הפקדות בכל אחת מהשנים 1-6. בתום כל אחת מהשנים. הסדרה השנייה היא עבר הפקדות בתום כל אחת מהשנים 7-10. חישוב הערך העתידי של הסדרה הראשונה מוביל בזמן 6, ואת התוצאה צריך לדחוף 4 תקופות קדימה על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 4 (כך מעבירים את התוצאה מזמן 6 לזמן 10). לעומת זאת הערך העתידי של הסדרה השנייה מוביל בזמן 10 בהגדלה (מועד ההפקדה الأخيرة בסדרה האדומה). את תוצאה חיבור הערך העתידי של שתי הסדרות, הסדרה הראשונה עם התאמת הזמן והסדרה השנייה כמו שהיא, משווים לערך העתידי הכללי הנדרש שהוא 400,000.

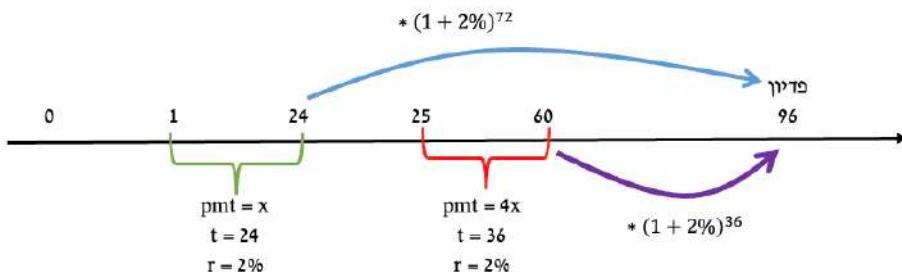
**שאלה 19 - חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון, עם התאמת ריבית נקבות**  
 בונידו מתכנן להפקיד בתום כל חודש סכום קבוע במשך שנים, ובמהלך כל חודש ב-3 שנים לאחר מכן מפקיד סכום גבוה פי 4. לאחר מכן, בשנה הששית, השביעית והשמינית, איננו מפקיד. בסוף 8 שנים ה策טבר אצל בונידו סכום של 550,838 ש"ח. מהו הסכום שהפקיד בכל חודש בשנתיים הראשונות, אם ידוע שהריבית השנתית היא ריבית נקבות בשיעור של 24%?

פתרון :

מעבר לתחום בשאלה זו שקצת מזכיר את הקודמת (לפצל מספר סדרות, לעורך התאמות, סכום ההפקדה כמובן) יש כאן הבדל מרכזיו ועקרוני לגבי נתון הריבית. אנו יודעים שכאשר עורכים חישובי סדרה, מהתסוד הנדרש בהקשר זה, הריבית חייבת להיות לתקופת תשלום. כלומר, אם ההפקדות חודשיות - חובה לייצר ריבית חודשית. לצערנו הריבית הנתונה כאן שנתית, ולכן יש להמירה, משנה לחודש. את האופן שבו מוצאים המרות ריבית עוד נציג בהרחבה בהמשך הרצך, אבל בניתוח, לטובות חישובי סדרות בסיסיים כאלו, רק נאמר משפט: כאשר הריבית הנתונה היא ריבית נקבות שנתית, אזי כדי לתאמ אותה משנה לתקופת תשלום, פשוט מחלקים אותה באופן יחסי בהתאם.

בשפה פשוטה: אם יש נתון על סדרה חודשית, והריבית **הנקובה** שנתית, נחלק את הריבית הנקובה ב-12 וכך נקבל בפשטות רבה את הריבית החודשית.  
 המילה נקבות מודגשת, ולא בצד; בהמשך נראה שכאשר הריבית אינה נקבות, המרתה מבוצעת באופן שונה. בניתוח, הריבית החודשית היא:

$$r = \frac{24\%}{12} = 2\%$$



והנוסחה המביאה לידי ביטוי ערך עתידי של סדרה בתשלומים חודשיים היא:

$$FV = x * FVFA(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{72} + 4x * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{36} = 550,838$$

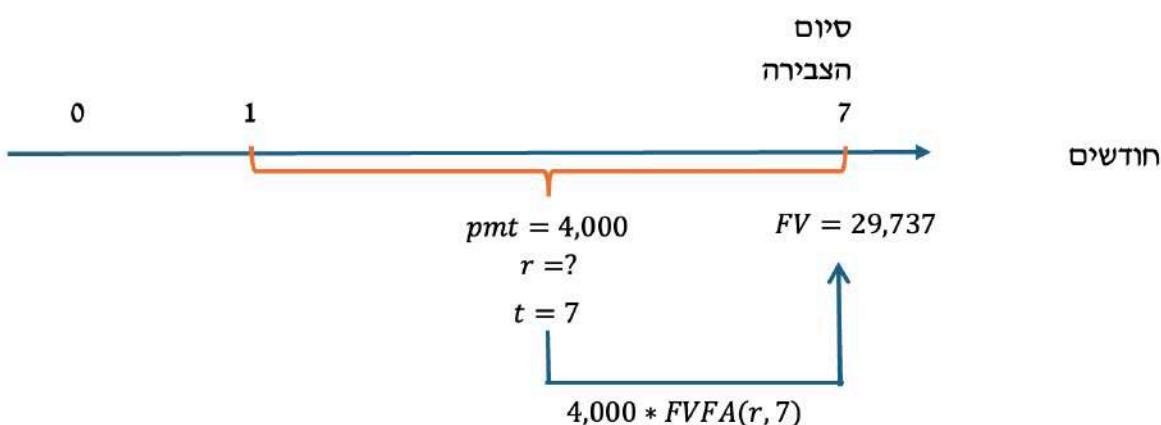
הפתרון ה"סופי" הוא:

$$x = 1,000$$

שאלה 20 - **חילוץ שיעור ריבית מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון**  
 קוזייקרו מתכוון להפקיד בתום כל **חודש** במשך 7 חודשים סכום קבוע של 4,000 ש"ח. מה צריכה להיות הריבית **השנתית** בחסכון אם ידוע שהסכום שנצבר בתום 7 החודשים הוא 29,737 ש"ח?

פתרונות :

גם שאלת זו עוסקת בערך עתידי של סדרה. ההבדל הוא שהריבית איננה ידועה, ולכון היא הערך שנדרש לחלא. חשוב לשים לב: ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד למועד ההפקדה האחידת. ולכון, אם ההפקדה בתום כל חודש במשך 7 חודשים, הערך העתידי הסדרתי אכן מוביל בזמן 7, שהוא נקודת היעד לגביה נתון הערך הנוכחי, ולפיכך אין כל צורך בהתאמות.



משוואת הפתרון תהיה :

$$4,000 * FVFA(r, 7) = 29,737$$

ואיך פותרים מקרה כזה? שבו הנעלם ב - z שבתווך ה- FVFA? פשוט מאד. בטור התחלה נгла ספציפית את ה - FVFA, ככלומר נחלק את שני האגפים ב- 4,000, קיבל :

$$FVFA(r, 7) = \frac{29,737}{4,000}$$

או בעצם :

$$FVFA(r, 7) = 7.434$$

כעת, ניגש לנספח A לכרך ד (לוחות היון) ללוח א-2. ננסח למצוא את הערך  $7.434 \cdot 7.434$  בלוח, ונבדוק עזר איזו ריבית הוא מתקיים, כאשר  $r$  (מספר התשלומים) הוא 7. נקבל  $r = 2\%$ . ראו צילום חלקו של הטבלה להלן.

$t$	$r$	1%	2%	3%
1		1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030
3		3.030	3.060	3.091
4		4.060	4.122	4.184
5		5.101	5.204	5.309
6		6.152	6.308	6.463
7		7.214	7.434	7.662
8		8.286	8.583	8.892
9		9.369	9.755	10.159
10		10.462	10.950	11.464

התוצאה שקיבלו היא הריבית לפרק הזמן בין תשלוםם - לחודש. אסור לכפול את הריבית זו ב-12 כדי לתרגם אותה לשנה; משום שריבית זו איננה נקובה. במצבים כאלה, כדי לתאמס את הריבית זו למועדים שנתיים, בגישה של ריבית דרייבית, נדרש לבצע המרה שמתבססת על מערך חזקה מתאים:

$$r_{year} = (1 + 2\%)^{12} - 1 = 26.824\%$$

מה עשינו פה? במקרה הכללי בקורס, יש להניח שמתיקיימת "ריבית דרייבית". המשמעות היא שאם הגענו לריבית לחודש, ורוצים להגיע לריבית שנתית, אלא אם נאמר מפורשות אחרת - החישוב הוא לפי:

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1$$

הערך  $r$  מייצג את הריבית השנתית

הערך  $r_{month}$  מייצג את הריבית החודשית

שיםו לב! בשאלת 19 המרת הריבית בוצעה עם חילוק ולא עם חזקה, משום שם נתון מפורש שהריבית נקובה. על המרות ריבית עוד נרחב בהמשך, אך חשוב שתתקדמו עם המרות פשוטות ביןתיים שהן חלק מרכז מכל שאלת ערך עתידי או ערך נוכחי נפוצה בקורס זה.

**שאלה 21 - חילוץ מספר הפקדות מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - לבית**

קוזייקרו מתכוון להפקיד בתום כל שנה סכום קבוע של 14,609.43 ש"ח, כאשר הריבית השנתית 6%. בחולף מספר מסויים של שנים, הסכום שנצח הרשתכם ב-167,877 ש"ח. כמה הפקדות שנתיות בוצעו לחסכו?

פתרון :

הפעם, הנעלם הוא מספר הפקדות (שזהה במספר השנים). ידוע כי משווהת הפתרון המתאימה תהיה :

$$14,609.43 * FVFA(6\%, t) = 167,877$$

בטור התחלה במצבים כאלו, כשהנעלם הוא בתוקן הסוגרים של  $FVFA$ , נחלץ אותו וזאת על ידי חלוקת שני האגפים ב-14,609.43. כך נקבל :

$$FVFA(6\%, t) = \frac{167,877}{14,609.43} = 11.491$$

כעת, ננסה לאתר בלוחות ההיוון בלוח א-2 את הערך 11.491 עבור ריבית של 6%. נמצא ש :  $t = 9$ . כך :

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%
1		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060
3		3.030	3.060	3.091	3.122	3.153	3.184
4		4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375
5		5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637
6		6.152	6.308	6.463	6.633	6.802	6.975
7		7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394
8		8.286	8.533	8.892	9.214	9.549	9.897
9		9.369	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491
10		10.460	10.856	11.261	11.674	12.094	12.521

ולכן תשובהתנו הסופית היא, שיש לבצע 9 הפקדות שנתיות על מנת להגיע ליעד הצבירה הנתון של קוזייקרו.

**שאלה 22 - ערך עתידי של סדרה עם חילוץ תקופות המתנה - לבית**

בolidro יפקיד 1,000 ש"ח כל תחילת חודש במשך שנתיים, כאשר במהלך שנתיים אלו הריבית החודשית היא 1%. לאחר מכן ימשיך להפקיד שנה נוספת 1,000 ש"ח בסוף כל חודש בריבית חודשית של 4% (ריבית זו תשאר קבועה גם בשנים העוקבות). כמה זמן bolidro יטרך לחייב את הפקדה האחונה, אם יעד הצבירה שלו הוא 93,899 ש"ח?

פתרון :

לשם נוחות, נחשב תחילת הצבירה לתום החודש ה-36, תום השנה השלישי:

$$FV_{36} = 1,000 * FVFA(1\%, 24) * (1 + 1\%) * (1 + 4\%)^{12} + 1,000 * FVFA(4\%, 12)$$

הסבר :

סדרת הפקדות בשנתיים הראשונות היא בתחלת כל חודש. לכן, על הציג, מדובר בהפקדות בזמן 0 עד 23, ולא 1 עד 24. החישוב הסדרתי מוביל בהתאם למועד הפקדה האחונה - זמן 23.Cut, הוואיל והריבית עד זמן 24 ממשיכה להיות 1%, דוחפים את התוצאה זמן 23 בזמן 24 בריבית 1% על ידי מכפלה ב-1 בתוספת 1%. כך ביטאנו את הערך העתידי של סדרת הפקדות של השנתיים הראשונות בזמן 24. Cut, כדאי מאד לדוחוף את הכל בזמן 36, ובהתאם שהריבית העדכנית היא 4%, כופלים ב-1 בתוספת 4% בחזקת 12. Cut, ניבור לסדרה השנייה. היא בשנה השלישי, אבל בתום כל חודש. לכן היא בטוחה הזמנים של 25-36. הערך העתידי של סדרה זו מוביל בזמן 36, ללא צורך בהתאם.

התוצאה המספרית המתקבלת מהחישוב היא :

$$FV_{36} = 58,643$$

cut השאלה היא: כמה חודשים של צבירת ריבית נוספת (בשיעור 4%) צריכים לחלו, על מנת שנגיע לעד הצבירה המוגדר?

המשווה הפעם תהיה :

$$FV = 93,899 = 58,643 * (1 + 4\%)^t$$

נחלק את שני האגפים ב-58,643 ונקבל :

$$\frac{93,899}{58,643} = 1.04^t \rightarrow 1.601 = 1.04^t$$

ואז, או שנציב את ערכי t שנותונם בשאלה (אם היא אמריקאית) או שנפטרו באמצעות חוקי לוגריתמים :

$$\ln 1.601 = \ln 1.04^t \rightarrow \ln 1.601 = t * \ln 1.04 \rightarrow t = \frac{\ln 1.601}{\ln 1.04} \approx 12$$

ולכן, צריך להמתין כ-12 חודשים (כשנה) לאחר הפקדה האחונה כדי לייצר צבירה זו.

## נוסחאות - ערך עתידי - לאחר מפגש 1

### ערך עתידי של סכום יחיד - ריבית קבועה

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

כאשר :

הערך  $FV$  מייצג את הסכום העתידי הנצבר (ערך עתידי, Present Value, PV, הערך הנוכחי).

הערך  $r$  מייצג את שיעור הריבית.

הערך  $t$  מייצג את מספר התקופות.

### ערך עתידי של סכום יחיד - ריבית משתנה

$$FV(\text{Lump Sum}) = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

כאשר :

הערך  $FV$  הוא הערך העתידי המוחשב (הסכום העתידי הכללי, קרן + ריבית).

הערך  $PV$  הוא סכום ההפקדה או ההלוואה "היום".

הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה.

הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבנה כל ריבית תקפה.

### ערך עתידי של סדרה - נוסחה מתמטית

$$FV_{\text{Series}} = pmt * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

כאשר :

הערך  $FV_{\text{Series}}$  הוא הערך העתידי של הסדרה.

הערך  $pmt$  מסמל את ההפקדה / התזרים התקופתי קבוע.

הערך  $r$  מסמל את הריבית **לפרק הזמן בין תשלוםויות**.

הערך  $t$  מסמל את מספר התשלומים בסדרה.

ערך עתידי של סדרה - כתיב מקוצר (את הערך אפשר גם לשלוּף מלוּח א-2 בנספח א לכרך ד)

$$FV_{series} = pmt * FVFA(r, t)$$

כאשר :

הערך  $pmt$  הוא סכום ההפקדה הקבוע.

הערך  $FVFA$  הוא למשה התוצאה של הנוסחה / הלוח שמתאימה לריבית בעסקה (i) ומספר התשלומים (t). בספרים ובחוברת נקרא גם מע"ס (ראשי תיבות של "מקדם ערך עתידי סדרתי"). אנחנו לא אוהבים להגיד מע"ס בקבוצה שלנו אז תמיד נרשום  $FVFA$ . מקווה שזה יהיה בסדר מצדכם.

**התאמות ריבית בסיסיות - הרחבה בהמשך:**

בשאלה על סדרות, בשנותונה ריבית נקובה שנתיות ללא מידע נוסף, ויש להתאים מונה לחודש :

$$r = \frac{R}{12}$$

כאשר :

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקובה

הערך  $r$

בשאלות על סדרות, כאשר רוצים לתאם ריבית כללית (שלא כתבו שהיא נקובה), מחודש לשנה :

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1$$

## מפגש 2 - ערך נוכחי

### נושא חדש – ערך נוכחי (PV)

הסבר מילולי סופר תמציתית:

הנושא הקודם - FV - משקף ומחשיב של צבירת ריבית שמתווספת לקרן הלוואה או השקעה, כך גל הסכום בעתיד (שכן הוא מגלם את הסכום הראשוני בתוספת ריבית).

פעולה הפוכה לחישוב ערך עתידי - חישוב ערך נוכחי PV, האופן שבו אנו מסוגלים לתרגם ערכיהם שיתקבלו בעתיד לשווים היום, בזמן / מידי.

הנוסחאות המתמטיות יוצגו באופן אקסימטיבי, ללא הוכחות, ועיקר הדיוון יהיה בפתרון בעיות כלכליות ותרגילים מרובים המציגים את הבעיות השונות והיישומים של נושא מורכב זה.

שאלה 23 – ערך נוכחי של סכום יחיד, ריבית קבועה

סרגיי שוקל לרכוש נכס שצפוי להניב לו בעוד 10 שנים סכום של 10,000 ש"ח. מהו המחיר המירבי שישכים סרגיי לשלם עד הנסך היום, אם הריבית השנתית היא 4%?

פתרון :

אני מ庫ווה שאתם מסכימים איתי כשהאני טוען שהסכום בסך 10,000 ש"ח הוא למעשה ערך עתידי FV. השאלה שואלת - כמה שווה לשלם / להשקיע היום PV.

הערך העתידי נתנו כאן – מתקבל בסכום אחד במועד נתון ספציפי. הערך העתידי הוא סכום יחיד.

תזכורת : חישוב ערך עתידי FV של סכום יחיד בRibbit קבועה - כמו בדוגמה 1 :

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

אם אציב את נתוני השאלה מקבל :

$$10,000 = PV * (1 + 4\%)^{10} \rightarrow PV = \frac{10,000}{1.04^{10}} = 6,755.64$$

דרך אחרת למדל (נוסחה) את החישוב שערכנו :

$$PV = \frac{FV}{(1 + r)^t}$$

כאשר :

הערך PV הוא הערך הנוכחי / השווי היום

הערך FV הוא הערך העתידי (סכום יחיד)

הערך  $r$  הוא הריבית התקופתית

הערך  $t$  הוא מספר תקופות הריבית

אני מעדיף את הגרסה זו של אותה הנוסחה בדיקות:

$$PV = FV * (1 + r)^{-t}$$

למה זה מוגניב בرمות קשות? כי מעכשו אתה יודע, שכדי לחשב ערך עתידי - לדוחף סכומים קדימה אתה כופל ב-1 ועוד הריבית בחזקה חיובית, וכך לזכור אחרה ברוורס - חישוב ערך נוכחי - אתה כופל באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית.

נציג את הנוסחה בגרסה שאנו אוהב בנתוני השאלה, שכזכור שאלות מהו הערך הנוכחי של 10,000 ש"ח שנתקבל בעוד 10 שנים, בהנחה שהריבית 4%:

$$PV = FV * (1 + r)^{-t} = 10,000 * (1 + 4\%)^{-10} = 6,755.4$$

שאלה 24 - ערך נוכחי של סכום ייחיד, ריבית משתנה

מהו הערך הנוכחי של 500,000 ש"ח שאלכסיי צפוי לקבל בעוד 7 שנים, אם הריבית השנתית בכל אחת מהשנים הראשונות היא 4% ואילו הריבית השנתית בכל שנה לאחר מכן היא 6%?

פתרון:

הנוסחה לחישוב ערך נוכחי של סכום ייחיד כאשר הריבית משתנה היא:

$$PV = FV * (1 + r_1)^{-t_1} * (1 + r_2)^{-t_2}..$$

כאשר:

הערך PV הוא הערך הנוכחי

הערך FV מייצג את הסכום העתידי שצפויים לקבל

הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  מייצגים את הריביות השונות בעסקה

הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  מייצגים את מספר התקופות שבחן כל ריבית תקופה

$$PV = FV * (1 + r_1)^{-t_1} * (1 + r_2)^{-t_2} = 500,000 * (1 + 4\%)^{-2} * (1 + 6\%)^{-5} = 345,441$$

דרך הצגה חלופית של הפתרון:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * ...} \rightarrow PV = \frac{500,000}{(1 + 4\%)^2 * (1 + 6\%)^5} = 345,441$$



### שאלה 24.1 – ערך נוכחי של סדרה – Let the games begin –

אביישי מעוניין להשקיע במפעל ענקו לחיימים נקניק. המפעל כרגע בקמה; ואשר על כן ייבן לו לראשונה בעוד 8 שנים סכום של 50,000. בכל שנה עוקבת, בשנים 15-9, יקבל אביishi מפעילות חיים נקניק סכום זהה בתום כל שנה.

בהתה שהריבית האלטרנטטיבית של אביishi היא 5% לשנה, מהו הסכום המירבי שישככים אביishi לשלם היום بعد זכויותיו במפעל הנקי?

פתרון :

תחילה, נשים לבנו לכך שאלה מהו הסכום המירבי שאבישי יהיה מוכן לשלם היום بعد הנכס. עצם המינוח "כמה זה שווה היום" / "כמה מוכן לשלם היום" מוביל אותנו לעולמות הערך הנוכחי.

כמובן שמדובר בערך נוכחי של סדרה – שŁemaשא כוללת תשלוםמים קבועים (בריבית קבועה ותדירות קבועה) החל מזמן 8 עד זמן 15.

כשרוצים לחשב ערך נוכחי של סדרה קבועה, הכל הRELONTE הוא מענ"ס (ובאנגלית – PVFA). Factor (Factor). זהה נוסחה שams כופלים אותה ב- PVFA היא מבטא את הערך הנוכחי של כל התשלומים כולם לנקודת הזמן שהוא "אתה אחרה" ביחס למועד תחילת הסדרה.

הנוסחה :

$$PV_{Series} = PMT * PVFA(r, t)$$

דרך הצגה שאני אוהב (זהה לגמרי, פשוט ביטוי שיותר כיף לומר) :

$$PV_{Series} = PMT * PVFA(r, t)$$

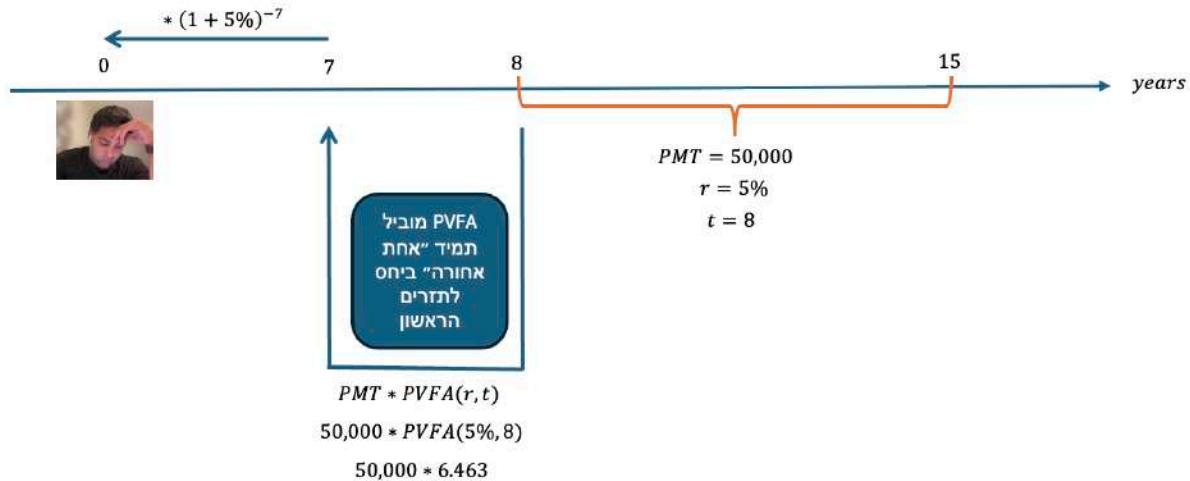
את המענ"ס (או ה-PVFA) אפשר לשולף מלוח שנקרא לוח א-4 לנספח א בכרך ד (עמ' 45 ואילך) או לחילופין, לחסבו באמצעות הנוסחה המתמטית הבאה :

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כאשר :

תשלום תקופתי קבוע	$PMT$
הRibbit לפרק הזמן בין תשלוםמים	$r$
מספר תזרימי המזומנים בסדרה	$t$

איך זה עובד פה?



יש כאן סדרת תשלומים שמתחלת בזמן 8 וכוללת 8 תשלומים (עד וככלז זמן 15, שימו לב – זו סדרה, אני סופר מספר תשלומים ולא מספר שנים). הואיל והסדרה קבועה (סכום קבוע, ריבית קבועה, תדיירות קבועה) חישבנו תחיליה את ערכה הנוכחי באמצעות נוסחת הסדרה, מה שמתבטה בביתי:

$$50,000 * PVFA(5\%, 8) \rightarrow 50,000 * 6.463$$

הבעיה:

ערך הנוכחי של סדרה לא מוביל אוטומטית לזמן 0, אלא – הוא מוביל תמיד לנקודת הזמן שהוא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה.

בשפה פשוטה: אם התשלומים כל שנה, והראשון שבאים בתום שנה 8, הביטוי הבסיסי של הערך הנוכחי הסדרתי מבהיר את הערך הנוכחי לזמן 7.

זה לא מספיק טוב, ונדרשת התאמה נוספת, מ-7 ל-0.

את ההתאמה נוספת נבע בזמנים של ערך הנוכחי של סכום חד פעמי: נכפול את הביטוי כולל ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית שמקפת את מספר תקופות ההתאמה הנדרשות מזמן 7 ל-0 (חזקת 7-), ולכן, ביטוי הפתרון כולל:

$$50,000 * 6.463 * (1 + 5\%)^{-7} = 229,656.67$$

זו התשובה – זהו השווי של הנכס שגם משקף את הסכום המירבי שאיה מוכן להשקיע.

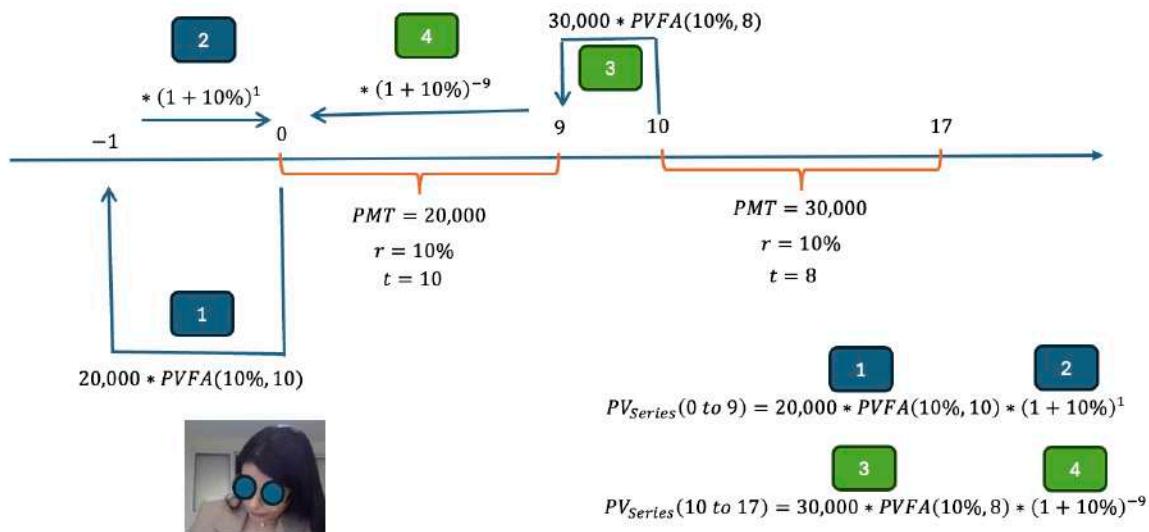
## שאלה 24.2 – ערך הנוכחי של מספר סדרות ותזרימי תחילת תקופה

דור התיעצה עם אבישי וכעת גם היא שוקלת לרכוש מפעל ענק לחימום נקי. המפעל צפוי להניב לה בתחילת כל אחת מ-10 השנים הקרובות סכום שנתי של 20,000 ש"ח ובתחילת כל אחת מ-8 השנים לאחר מכן סכום שנתי של 30,000 ש"ח.

בנחה שהריבית השנתית היא 10%, מהו הסכום המירבי שתsecsים דור תשלום بعد המפעל היום?

פתרון :

ראשית, שואלים על הסכום שדור תsecsים תשלום היום – קלומר שואלים על ערך הנוכחי. הערך הנוכחי אמר לבטא את השווי של שתי סדרות; משום שערכי התקבולים אינם זהים, ולמעשה יוצרים 2 סדרות נפרדות, האחת של 20,000 והאחרת של 30,000. ראשית, יש מקום את הסדרות על הציר. הואיל והתזרימים הם בתחילת תקופה, הסדרות הן מ-0 עד 9 ולאחר מכן מ-10 עד 17.



כעת אפשר לגשת לחישוב. החישוב יתייחס לערך הנוכחי של כל סדרה בנפרד, כאשר רק בתום התהליך לחבר את הערכיהם הנוכחיים של הסדרות יחד, כדי להגיע לתוצאה הסופית. הסדרה שכוללת תזרימי תחילת תקופה מ-0 עד 9 – כאשר נכפול את ערכיה ב- PVFA המתאים, קופצת בהגדלה "אחת אחרת" ביחס לתחילת הסדרה, קלומר לזמן 1- (אחת אחרת לפני זמן 0). כדי לתקן עיוות זה, علينا לכפול ב-1 ועוד הריבית פעם אחת (כדי לתקן מ-1- ל-0 את ערכיה של סדרה זו). המכפלה וההתאמה מתבצעות בשלבים 1, 2 באIOR.

סדרה שכוללת תזרימי מ-10 עד 17, כאשר נכפול את ערכיה ב- PVFA המתאים קופצת בהגדלה "אחת אחרת" ביחס לתחילת הסדרה, קלומר לזמן 9 (אחת אחרת לפני זמן 10). כדי לתקן את התוצאה ולתאים אותה בזמן 9 לנו נמשיך ונכפול ב-1 ועוד הריבית, הפעם בחזקה שלילית (התאמה אחרת) של 9. המכפלה וההתאמה מתבצעות בשלבים 3 ו-4 באIOR.

התוצאה הסופית תתקבל על ידי סכימת הערכיהם בנוסחאות אלו – בעמוד הבא :

$$PV_{Total} = 20,000 * PVFA(10\%, 10) * (1 + 10\%)^1 + 30,000 * PVFA(10\%, 8) * (1 + 10\%)^{-9}$$

$$PV_{Total} = 20,000 * 6.145 * (1 + 10\%)^1 + 30,000 * 5.335 * (1 + 10\%)^{-9}$$

$$PV_{Total} = 203,066.82$$

מסקנה: הערך הנוכחי שמשקף את הסכום המירבי שתסכים דור לשולם היום بعد הנכס הוא כ- 203,066.82 ש"ח.

**שאלה 25 - ערך נוכחי של סדרה, מקרה פשוט (תום תקופה)**  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה הכוללת התקבולים בתום כל חודש במשך שנתיים בסכום של 2,000 ש"ח, אם הריבית החודשית היא 2%?

**פתרון:**

כasher למדנו ערך עתידי של סדרה (מפגש 1) אמרנו: אם אני מזוהה סדרה (תקבולים / תשלוםים כל חודש, כל שנה, כל רביעון...) - אז, אם הסדרה היא מסווג סר"ת (סכום, ריבית, תזרות) קבוע - אמרנו שקיים נוסחה שיוודעת לבטא "בבetta אחת" את הערך העתידי הכולל של סדרה זו. והוא נכוון לנקודת הזמן של ההפקדה האחידונה.

כעת, בובאנו לחשב ערך נוכחי של סדרה  $PV_{SERIES}$ , נפעיל כדלקמן:

- נזזה את הסר"ת הקבוע: כאן - מתקיים: סכום קבוע (2,000 לחודש), ריבית קבועה (2% לחודש),  
 תזרות קבועה (כל חודש).
- נגידר את הפרמטרים של הסדרה:
  - סכום תשלום תקופתי קבוע =  $PMT$
  - מספר התשלומים בסדרה =  $t$
  - ריבית לתקופת תשלום =  $r$
- נזכיר:  $PV$  של סדרה מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשונים בסדרה (עקרון "אחדת אחוריה").

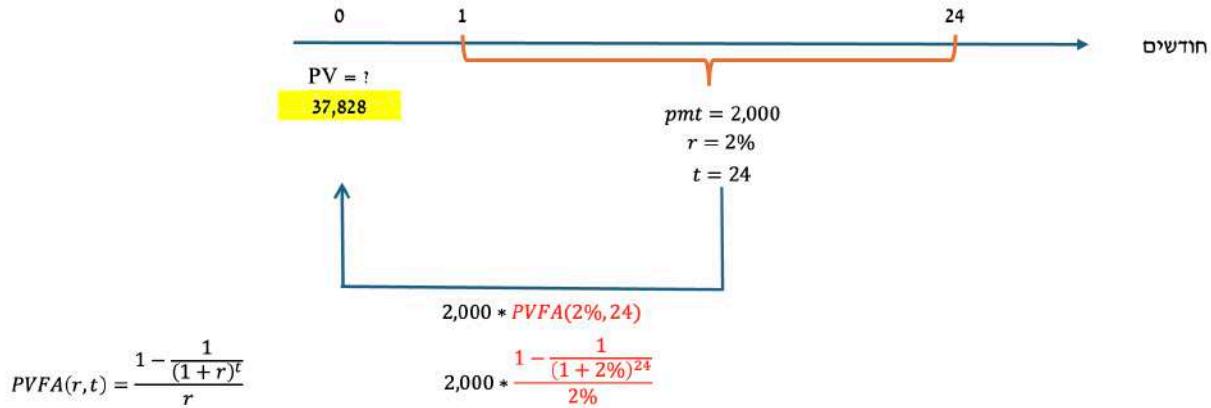
כasher אני מזוהה צריך לחשב ערך נוכחי של סדרה, הנוסחה המושמת היא:

$$PV_{Series} = pmt * PVFA(r, t) = pmt * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כasher:

הערך  $PV_{Series}$  מייצג את הערך הנוכחי המכراضי של הסדרה כולה  
 הערך  $t$  מייצג את התשלומים / התקובל התקופתי בסדרה  
 הערך  $r$  מייצג את הריבית לתקופת תשלום  
 הערך  $pmt$  מייצג את מספר התשלומים

הדגמה על הציר :



פתרון מתמטי :

$$PV_{Series} = 2,000 * \frac{1 - \frac{1}{(1 + 2\%)^{24}}}{2\%} = 37,828$$

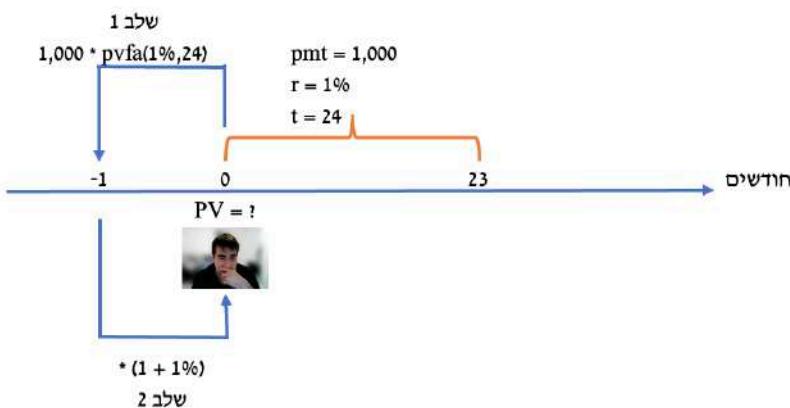
ומה לגבי חישוב באמצעות הלוח - קלומר :  $PV_{Series} = pmt * PVFA(r, t)$  ? הסימנו  $PVFA(r, t)$  נקרא בלשון הספר מענ"ס : מקדם ערך נוכחי סדרתי. ניתן למצוא את ערכו בנספח א' לכרך ד' של ייחידות הלימוד, בלוח שמספרו א-4. הלוח מופיע החל מעמ' 45 בנספח, וערך במקורה זה 18.914 נמצא בפינה הימנית התחתונה של צילום המסך להלן.

$$PV_{Series} = 2,000 * PVFA(r = 2\%, t = 24) = 2,000 * 18.914 = 37,828$$

**שאלה 26 - ערך נוכחי של סדרה, מקרה פשוט (תחילת תקופת)**

מהו הערך הנוכחי של סדרה הקיימת תקבולית בתחלת כל חודש במשך 24 חודשים בסכום של 1,000 ש"ח, אם הריבית החודשית היא 1%?

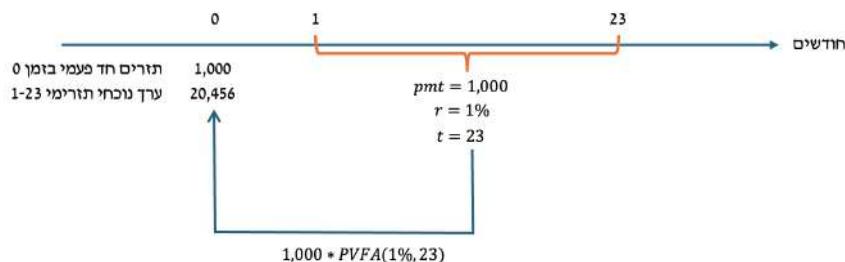
פתרונות :



$$PV_{Series} = 1,000 * pvfa(1\%, 24) * (1 + 1\%)^1 = 1,000 * 21.243 * 1.01 = 21,455.43$$

מה קרה פה? התחנו מכפול את התשלום התקופתי 1,000 ב- $pvfa$  הרלוונטי. אלא שבמקרה זה, הסדרה החלה בזמן 0. לכן העיקרון המחייב שלפיו חישוב  $pvfa$  תמיד מניב את התוצאה لنקודת הזמן שהוא "אתה אחורה" ביחס לתחילת הסדרה (כאן: אתה אחורה ביחס בזמן 0), קיבלנו בהתאם שהتوزאה עדכנית בזמן -1. לא רלוונטי! לכן עליינו לבצע תיקון ש"ידחף" את התוצאה (התאמת) קדימה, דהיינו קדימה תמיד מבצעים ע"י מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת מתאימה, כאן חזקת 1, דוחפים חדש קדימה.

דרך נוספת לחישוב ערך נוכחי של סדרה שמופיע איברה הראשון בזמן 0 הוא לפחות אותה: התזרים של זמן 0 בנפרד כמו שהוא, בתוספת הערך הנוכחי של הסדרה מזמן 1 ואילך :

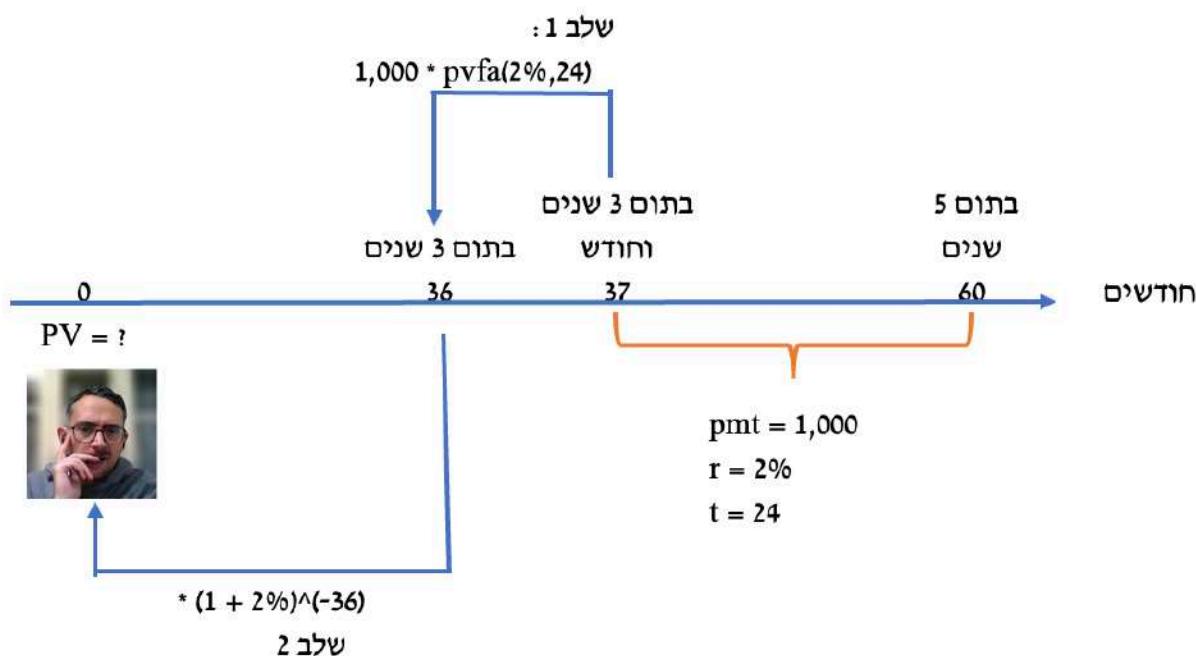


$$Total PV = 1,000 + 20,456 = 21,456$$

שיטה זו תהיה רלוונטית בעיקר במקרים שבהם נדרש לחלץ ריבית. נדגים בהמשך.

שאלה 27 - ערך נוכחי של סדרה דחיפה, עם התאמות זמן  
מהו הערך הנוכחי של סדרה הרכולת התקבולים בסך 1,000 ש"ח בתום כל חודש במשך שנתיים, כאשר התקובל  
הראשון הוא בערך 3 שנים וחודש, אם הריבית החודשית היא 2%?

## פתרונות:



$$PV = 1,000 * pva(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{-36} = 1,000 * 18.914 * 1.02^{-36} = 9,272.08$$

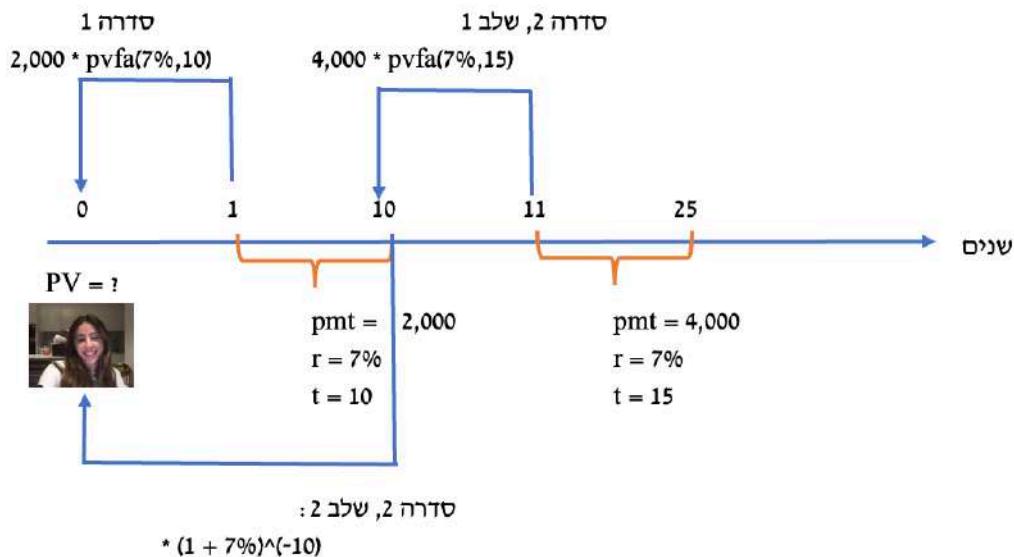
## הסבר:

תחילה כפלנו את התזוריים התקופתיים 1,000 ב-  $pvfa$  הרלונטי. כזכור, חישוב  $pvfa$  מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא תקופת תשלום אחת לפני התזוריים הראשוני בסדרה. כאן, התזוריים הראשוני בתום החודש ה-37, והתדירות היא חודשית. לכן, ה-  $pvfa$  הקפיז "אחד אחריה" ל-36, ובהתאם, יהיה עליינו לבצע התאמה נוספת, מ-36 ל-0. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית (כי זו התאמה לאחר) של 36.

שאלה 28 - ערך נוכחי של מספר סדרות, עם התאמות זמן

מהו הערך הנוכחי של סדרה הכוללת 10 תשלומים שנתיים בסוף כל שנה בסך של 2,000 ש"ח לתשלום, ולאחר מכן 15 תשלומים שנתיים בסוף כל שנה בסך 4,000 ש"ח לתשלום? הניחו שהריבית השנתית קבועה בשיעור 7%.

פתרון :



$$PV = 2,000 * pvfa(7\%, 10) + 4,000 * pvfa(7\%, 15) * (1 + 7\%)^{-10}$$

ובהצבה נקבל :

$$PV = 2,000 * 7.024 + 4,000 * 9.108 * (1 + 7\%)^{-10} = 32,568$$

הסבר :

הסדרה הראשונה החלה בזמן 0. לכן, כאשר כפלנו אותה ב -  $pvfa$  הרלונטי, ולפיכך הקפכנו את כל ערכיה, הגיענו בדיקות לזמן 0, וזה מציין - אין צורך בהתאמות עבור הסדרה ה-1. לעומת זאת, הסדרה השנייה החלה בזמן 11. לכן, כאשר כפלנו אותה ב -  $pvfa$  הרלונטי, ולפיכך הקפכנו את כל ערכיה שנית, הגיענו לזמן 10 (שנה אחרת ביחס לזמן 11). כדי לתרגם את התוצאה מזמן 10 לזמן 0 (כי אני רוצה ערך נוכחי לזמן 0), אכפול את התוצאה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית של 10.

### שאלה 28.1 – ערך נוכחי של סדרה אינסופית, עם התאמות

גרלופי שוקلت לרכוש מפעל לייצור דמויות מלאכותיות. המפעל צפוי להניב לה סכום חצי שנתי של 30,000 ש"ח נטו, בתום כל חצי שנה, לנוכח, כאשר התשלומים הראשונים יתקבלו בעוד 10 שנים. בהנחה שהריבית החצי שנתית היא 7% מהו המחיר המרבי שתascaים גRELOFI לשולם بعد מפעל הדמויות?

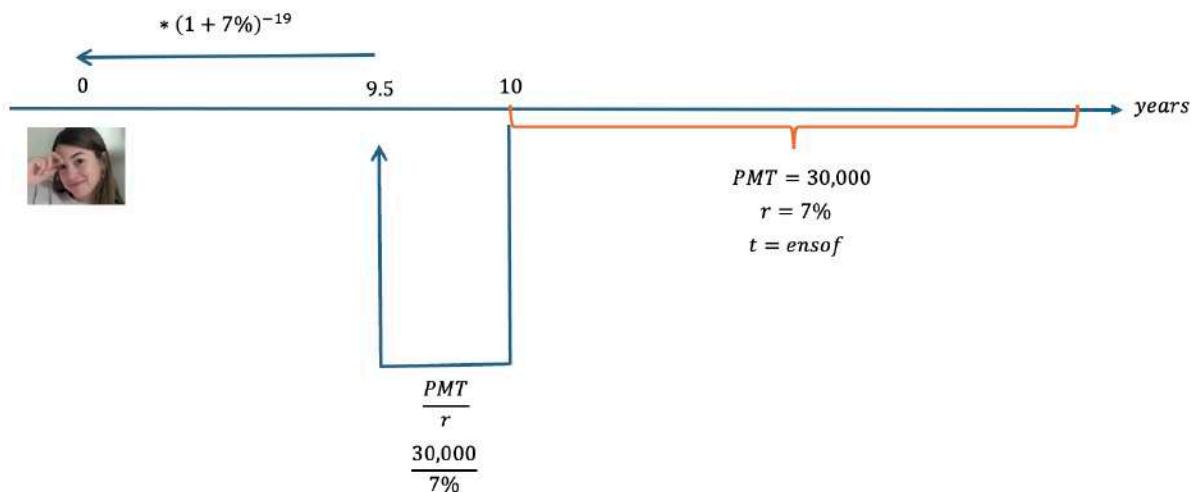
פתרון :

כמובן שורוצים לחשב כאן ערך נוכחי. אלא, שמדובר בערך נוכחי של סדרה אינסופית, מושג שלא נתקלנו בו בצורה ישירה עד לנוקודה הזו. למרבה השמחה, ערך נוכחי של סדרה אינסופית קבועה ניתן לחישוב על בסיס הפרופורציה הפשטית שבין התשלומים התקופתיים לשיעור הריבית התקופתית.

דא עתה שכמו כל נוסחת ערך נוכחי סדרתי מסדרה, גם הפעם נקבעו לנו בסוג של אינוס תקופת תשלום אחת אחורה ביחס למועד התזרים הראשונים; ובהינתן שהתזרים הראשונים בעוד 10 שנים; ותדירות התשלומים חצי שנה, נקבעו לנו לא יכולת מחאה זמן 10 לזמן 9.5 (חצי שנה אחרת, תקופת תשלום אחת אחרת).

נשאלת השאלה. כיצד נמצא דרך לתקן מ-9.5 ל-0? התשובה: התאמאה שכמו תמיד תבצע עלי ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת מתאימה.

אלא ש גם כאן דאגו לדפק אותנו. ציינו שהריבית היא חצי שנתית. פרק הזמן להתקאה לאחר הוא **9.5 שנים** ולא **9.5 חצי שנים**. כאשר אני מבצע התקאמות, עלי לדאג שמערך החזקה ישקף את מספר תקופות הריבית להתקאה. וכך, אם הריבית חצי שנתית, והתקאה היא 9.5 שנים לאחר, עלי לתקן את תקופת התקאה לMONTHS של חצי שנה. אם עושים זאת אגלה, שב-9.5 שנים יש **19 חצי שנים**, וזה יהיה מערך החזקה להתקאה.



$$PV = \frac{30,000}{7\%} * (1 + 7\%)^{-19}$$

התשובה הסופית :

$$PV = \frac{30,000}{7\%} * (1 + 7\%)^{-19} \approx 118,504$$

**שאלה 28.2 – ערך נוכחי, סדרה אינסופית, תקופות מוזרות וההתאמות ריבית**

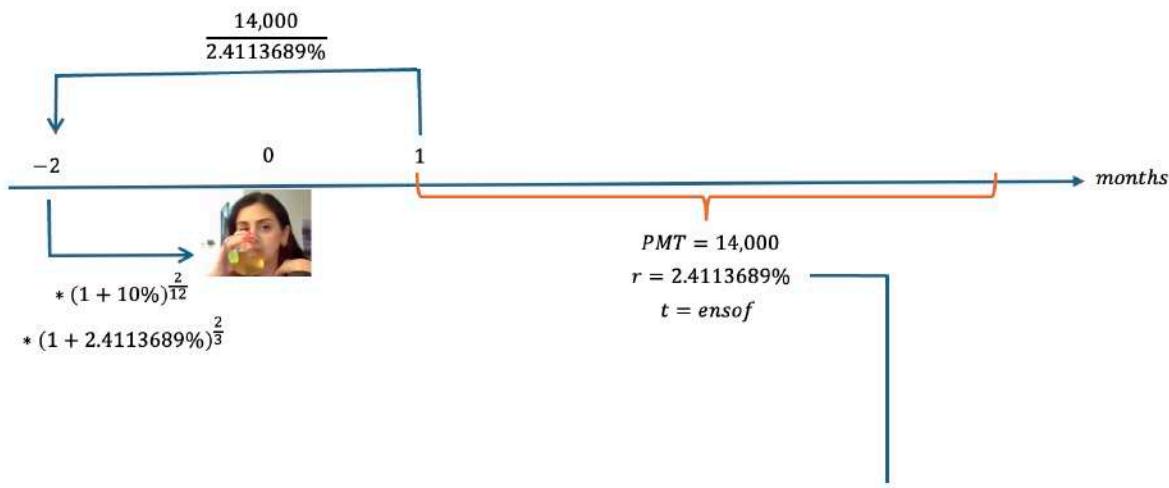
אבייטל שוקלת להשקיע בנכס שצפוי להניב לה כל 3 חודשים סכום של 14,000 ש"ח. התקובל הראשון יתקבל בעוד חודש. הריבית השנתית היא 10%. תקופת התקובלים – לנוכח מהו המחיר המרבי שתsecsים אבייטל לשלם היום עד הנכס?

פתרון :

יש שתי סוגיות יסוד בשאלה זו.

האחת, חישוב ערך נוכחי סדרתי מכל סוג (לרבבות ערך נוכחי של סדרה אינסופית) דורש הצגה של ריבית שתקופת זיהה לפך הזמן בין תשלומים.

כאן : הריבית הנתונה שנתית. יש לתאם אותה לתקופת תשלום – 3 חודשים (רבעון). כבירות מחדל, את התאמות הריבית יש לבצע באמצעות מערך חזקה מתאים (הנחת ריבית דראיבית) ראו להלן. הסוגיה הנוספת : לאחר שיישמו את הנוסחה, וקפצנו 3 חודשים לפני התשלום הראשון – לזמן 2 – בחודשים, את ההתאמה קדימה לזמן 0 אפשר לבצע באיזו ריבית שנרצה ; מדוע? כי בשלב ההתאמה כבר לא עוסקים בסדרה. כל עוד מערך חזקה יתאים לריבית שモוגנת בשלב ההתאמה, נסגור את זהיפה. ספציפית כאן, בשלב ההתאמה אני בחרתי לכפול ב – 1 ועוד ריבית שנתית בחזקת 2/12, מערך שmbטא את מספר תקופות הריבית השנתית בחודשיים.



בчисובי סדרות ה-1 המשרת את החישוב  
מייצג את הריבית לפך הזמן בין תשלומים.  
כבירות מחדל התאמות הריבית נשענות  
על העקרון של ריבית דראיבית ומערך חזקה  
מתאים :

$$r_{3months} = (1 + r_{annual})^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$r_{3months} = (1 + 10\%)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2.4113689\%$$

$$PV = \frac{14,000}{2.4113689\%} * (1 + 10\%)^{\frac{2}{12}} \approx 589,879$$

שאלה 29 - ערך הנוכחי של סדרה אינסופית, המקרה פשוט (תום תקופה)  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה אינסופית שתניב לכמ 6,000 ש"ח בתום כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית השנתית היא 5%?

פתרון :

רעיון :

בכלל, ערך הנוכחי של סדרה רגילה (סופית, ערך מספרי של תזרימיים) מתקבל באמצעות הנוסחה :

$$PV_{SERIES} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כאשר :

סימן	משמעות
$PV_{SERIES}$	הערך הנוכחי של הסדרה כולה
$r$	הריבית לפרק הזמן בין תשלומים בסדרה (כאן – תדיות התזרימיים שנתית, הריבית שנתית)
$t$	מספר תזרימי המזומנים (הקבועים) בסדרה

כאשר עסקים בסדרה אינסופית :  $t \rightarrow \infty$   
 קיבל :

$$PV_{SERIES\infty} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^\infty}}{r} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{r} = PMT * \frac{1 - 0}{r} = \textcolor{red}{PMT * \frac{1}{r}}$$

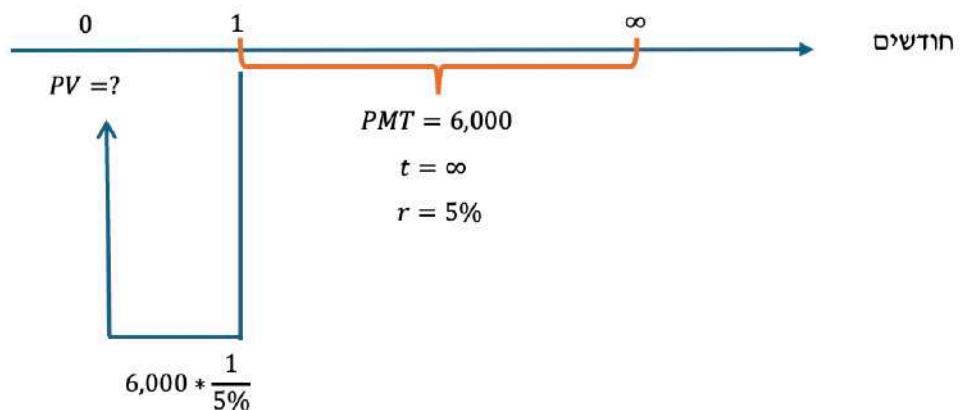
הנוסחה לחישוב ערך הנוכחי של סדרה אינסופית היא מקרה פרטי של ערך הנוכחי של סדרה רגילה :

$$PV_{SERIES\infty} = PMT * \frac{1}{r}$$

ואם כך : ערך הנוכחי של סדרה אינסופית הוא מקרה פרטי של ערך הנוכחי של סדרה במובן הכללי ; בהתאם – הוא סובל מאותן מגבלות (נדרש סר"ת קבוע – סכום, ריבית, תדיות קבועים, וגם – החישוב מוביל לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרימיים הראשון בסדרה).

תזכורת – נסח השאלה – מהו הערך הנוכחי של סדרה אינסופית שתניב לכמ 6,000 ש"ח בתום כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית השנתית היא 5%?

נייצג את התזרימיים על ציר הזמן (הציר בשנים ולא בחודשים) :



$$PV_{Ensofit} = 6,000 * \frac{1}{5\%} = 120,000$$

זכרו: ערך נוכחי של סדרה, גם אם היא אינסופית, לוקח אותך תמיד את Achotah Bihisht לזרים הראשונים. במקרה זה, הזרים הראשונים הוא בעוד שנה (כי זה בתום כל שנה). לכן, הקפיצה "את Achotah Bihisht" הובילה בדיקת זמן 0, ואין צורך בהתקופה. במקרה מורכב יותר, עם התאמה, ראו שאלה 30.

שאלה 30 - ערך הנוכחי של סדרה אינטופית, המקרה פשוט (תחילת תקופה)  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה אינטופית שתניב לכמ 8,000 ש"ח **בתחילת** כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית  
 השנתית היא 7%?

פתרון :

$$PV = 8,000 * \frac{1}{7\%} * (1 + 7\%)^1 = 122,286$$

שלב 1 :

$$8,000 * 1/7\%$$



$$pmt = 8,000$$

$$r = 7\%$$

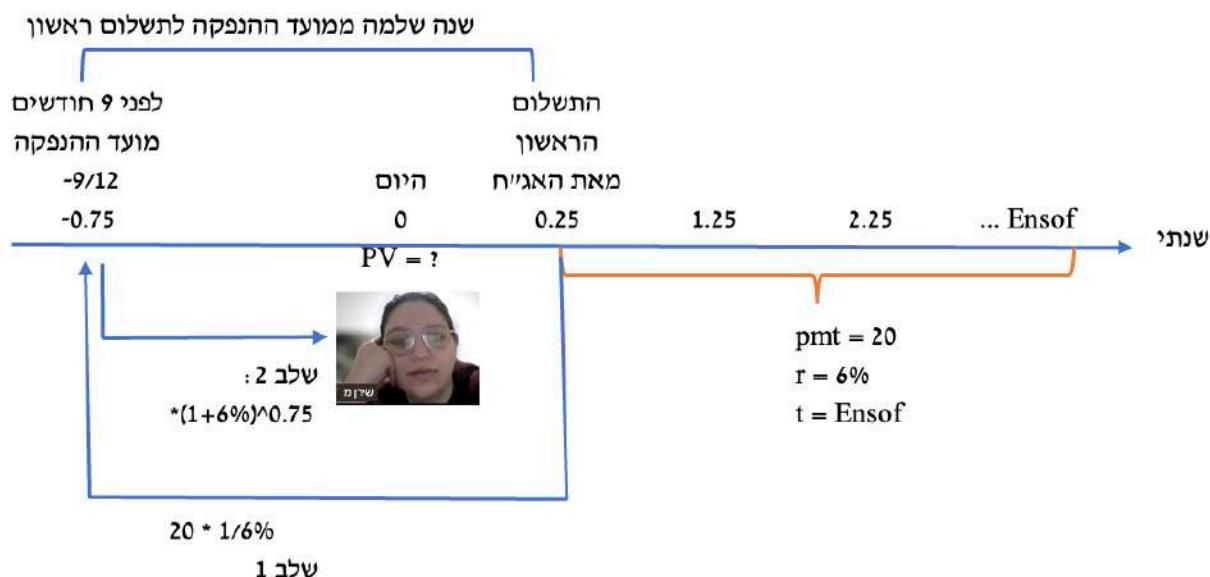
$$t = \text{Ensof}$$

הסבר :

הויל והסדרה כללת איבר ראשון בזמן 0, חישוב ערך הנוכחי הסדרתי שמקפיד "תקופת תשלום אחת אחרת" הובילנו בזמן -1. נדרש לבצע התאמה שנה קדימה מ-1- ל-0 וזאת על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה חיובית של 1.

שאלה 31 - ערך נוכחי של סדרה אינטופית - שימוש בתמוך אג"ח קונסול והתאמת זמן  
 אג"ח קונסול (شمשלמת תלולים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משמשת ריבית בסכום של 20 ש"ח בתום כל שנה (ביחס למועד הנפקתה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחיר האג"ח היום?

פתרון :



$$PV = 20 * \frac{1}{6\%} * (1 + 6\%)^{0.75} = 348.22$$

הסבר :



תחליה, יש לשים לב שהוואיל והאג"ח הונפקה לפני 9 חודשים, הרי שעל הציר, נקודת יצירת הנכס היא 9/12 בסימן שלילי. זה חשוב, הויל והאג"ח משמשת ריבית כל שנה ביחס להנפקתה. לכן, אם היא הונפקה לפני 9 חודשים, תשלום הריבית הקרוב הוא בעוד 3 חודשים. זה חשוב מאד, כי עליי להגדיר את מועד התשלום הקרוב בצורה נcona.

כעת, אני פועל לחשב ערך נוכחי של סדרה אינטופית, זאת, ע"י מכפלת התשלומים התקופתי 20 ב-1 חלקי הריבית. אלא שכמו כל סדרה, חישוב זה תמיד מופיע "תקופת תשלום אחת אחרה" ביחס לתזירים הראשונים. אם התזירים הראשונים הוא בעוד 3 חודשים, והקפיצה אחרת היא שנה שלמה, התוצאה של המכפלה הזו היא לזמן מינוס 9/12. כדי לתקן קדימה 9 חודשים, לזמן 0 - נכפול ב-1 ועוד הריבית בחזקת 9/12 ( $9/12 = 0.75$ ).

**שאלה 32 - ערך הנוכחי של סדרה אינטופית - שימוש בתמchor אג"ח קונסול והתאמת זמן וריבית מורכבת**  
 אג"ח קונסול (שלםת תשולמים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משולם ריבית בסכום של 20 ש"ח בתום כל 4 שנים (ביחס למועד הנפקתה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחר  
**האג"ח היום?**

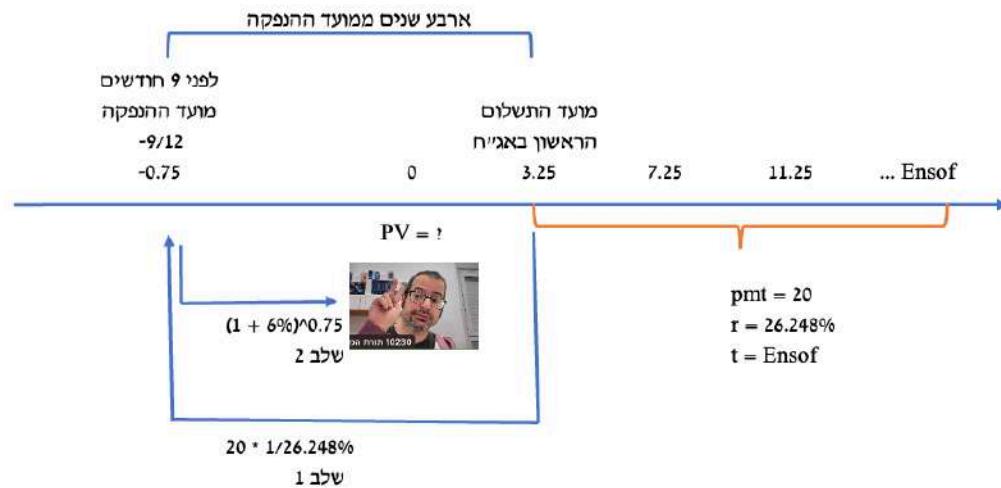
**פתרון :**  
 אנו הגדכנו שביחסobi סדרה - הריבית (r) חייבת להתאים לפרק הזמן בין תשולמים. במקרה זה, פרק הזמן בין תשולמים הוא 4 שנים. לרובה הצער - הריבית הנתונה היא שנתית בלבד. לכן, חובה עליי לתקן ולהתאים את שיעור הריבית ל-4 שנים.  
 איך עושים זאת? כבירות מחדל, מנגנון התאמת הריבית בקורס מותבס על ההנחה שקיימת ריבית דרייבית. לכן, גם התאמות הריבית תבוצע עם חזקה רלוונטיות:

$$r_{4\text{years}} = (1 + r_{\text{year}})^4 - 1 = (1 + 6\%)^4 - 1 \approx 26.248\%$$

מדוע חישוב מעצבן זה נדרש בשאלה זו ולא בקודמות? עם "1-" שאינו ברור? התשובה לכך היא שזו ה שאלה הראשונה היום שבה תקופת הריבית שהייתה נתונה (שנתית) שונה מפרק הזמן בין תשולמים (4 שנים). לכן, זו הפעם הראשונה שנאלצנו לבצע בתאמה ריבית, וזה הנוסחה הרלוונטית עבורה.

чисובי ריבית אפקטיבית יידונו בהרחבה מרובה בפגש 4. לכן זה בסדר ללמידה כרגע את הנושא הזה טכנית.

אג"ח קונסול (שלםת תשולמים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משולם ריבית בסכום של 20 ש"ח בתום כל 4 שנים (ביחס למועד הנפקתה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחר  
**האג"ח היום?**



$$PV = 20 * \frac{1}{26.248\%} * (1 + 6\%)^{0.75} \approx 78.903$$

הסבר שלבים :

תבילה השתמשנו בנוסחת ערך נוכחי של סדרה אינסופית. התוצאה הקפיצה אותנו "תקופת תשלום אחת אחורה" ביחס למועד התזרים הראשוני. עיתוי התזרים הראשוני הוא ב-25, ותקופת תשלום הוא 4 שנים. לכן התוצאה תקפה לזמן 0.75 - 4 שנים לפני (3.25). יש לתקן את התוצאה, לפיכך, 0.75 שנים קדימה. לשם כך, כפלנו ב-1 ועוד ריבית שנתית של 6% בחזקת 0.75 (בסיון חיובי).

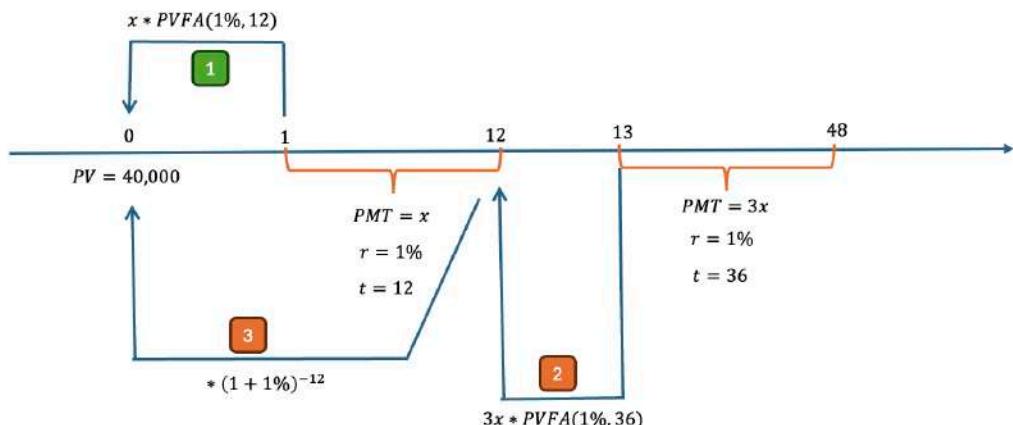
### שאלה 32.1 – יישומים של ערך נוכחי – חילוץ סכום תשלום תקופתי בהלוואה

אבייחי נטל הלוואה בסכום של 40,000 ש"ח לתקופה של 4 שנים. הלוואה מסולקת בתשלומים חודשיים קבועים במשך שנה, ובכל אחד מהחודשים העוקבים, סכום התשלום יהיה קבוע אך גבוה פי 3 מהסכום החודשי בשנה הראשונה.

בנחתה ששיעור הריבית החודשית הוא 1%, מהו סכום ההחזר החודשי במהלך 3 השנים האחרונות?

פתרון :

אכן נשאלת השאלה – במה השאלת זו עוסקת בכלל? ובאמת, כשדינם ביישומים כלכליים, במקרים רבים תהליך הזיהוי של המקרה דורש חשיפה (קשה לדעת בלבד מראש). לשם כך נשתמש בעת במשפט שעיליכם לדעת: **סכום הלוואה הוא תמיד ולוולות הערך הנוכחי של החזרה**. ממשפט זה נובע שאם נצליח לבטא את הערך הנוכחי של התשלומים העתידיים באמצעות נעלם, נוכל להשוו אותו לסכום הלוואה, וכך לחוץ נעלם זה. הسلط הגדול נוצר הואיל ויש כאן שתי סדרות החזרים, שאחת מהן גם סובלת מה צורך בהתאם, בהתאם לכללים הרגילים של ערך נוכחי סדרתי.



$$40,000 = x * PVFA(1\%, 12) + 3x * PVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^{-12}$$

תוצאת משוואת הפתרון המבוטאת בחלק התיכון של התרשימים בקירוב :

$$x = 437.24$$

מסקנה : בתום כל חודש במהלך השנה הראשונה, סכום ההחזר החודשי הוא 437.24 ש"ח. יחד עם זאת, لأن שאלנו נקודתית על התשלומים ב-3 השנים העוקבות, שבחן התשלום גבוה פי 3 ולכן התשובה הסופית לשאלה היא **1,311.72** ש"ח.

שאלה 33 - **יישומים של ערך נוכחי: חילוץ סכום החזר תקופתי בהלוואה, המקרה פשוט**  
נטלتم היום הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-10 תשלומים שנתיים שווים (כברירת מחדל - התשלומים הם בתום כל שנה). מהו סכום התשלום הקבוע (ה-PMT) אם הריבית השנתית 7%?

פתרון :

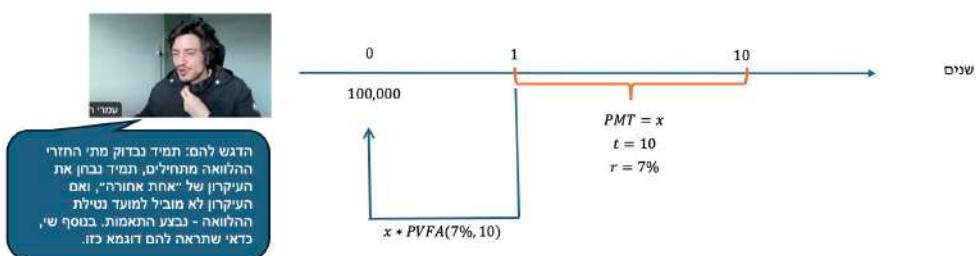
משפט: סכום הלוואה שווה תמי"ץ לערך הנוכחי (PV) של החזרה.

לכן, אם נתון לי סכום הלוואה, ואוכל לבטא את החזרה כסדרה (סוי"ת), אוכל לבנות משווה שמתווכת אחלץ את הנדרש.

$$Loan = PV(PMTs)$$

הערך  $Loan$  הוא סכום הלוואה.

הסימן  $PV(PMTs)$  הוא הביטוי המתמטי המשקף את הערך הנוכחי של החזרים.



בהינתן המשווה של סכום הלוואה = ערך הנוכחי החזרים, והעובדת שבמקרה זה לא נדרשות התאמות :

$$Loan = PV(PMTs)$$

$$100,000 = pmt * pvfa(7\%, 10)$$

$$100,000 = pmt * 7.024 \rightarrow pmt = 14,236.9$$

מסקנה : סכום התשלום התקופתי הקבוע הוא 14,236.9 ש"ח.

הסביר : סכום הלוואה - 100,000. זהו הערך הנוכחי של התשלומים בגין הלוואה, והוא נתון. סכום התשלום התקופתי, ה -  $pmt$ , איננו נתון, ולכן הוצב כנעלם.

בשונה מהשאלות הקודומות האחרונות, כאן - לא מדובר בערך הנוכחי של סדרה אינסופית, אלא סדרה "רגילה" (סופית) שכוללת 10 תשלומים. הדרך לבטא את ערכה הנוכחי - היא על בסיס מכפלה ב -  $pvfa$ . כברירת מחדל, אם לא נאמר אחרת - תשלום שנתיים הם "בסוף כל שנה", כלומר האיבר הראשון בסדרת החזרים הוא בדיקוק בעוד שנה. לכן, שאלה זו דומה מאד לשאלה 26, ואין צורך בההתאמה.

ס

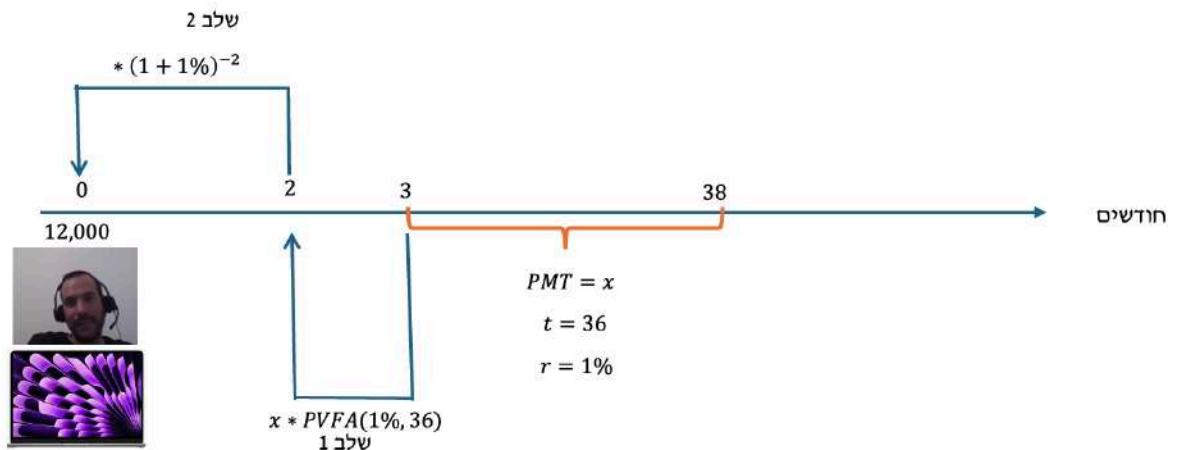
### שאלה 33.1 - חילוץ תשלום התקופתי מהלוואה עם התאמת זמן

יקיר מס' במחשבו הישן והוא מעוניין לרכוש MacBook Air M3 חדש. לשם כך, לווה סכום של 12,000 ש"ח מנק המועלים. הלוואה תוחזר ב-36 תשלומים חודשיים קבועים, שהראשון שבהם בעוד 3 חודשים. הריבית החודשית בהלוואה היא 1%.

נדרש : מהו התשלומים החודשי הקבוע שיצטרך יקיר לבצע?

פתרון :

גם כאן, הכלי העיקרי הוא המשפט : סכום הלוואה = ערך הנוכחי של החזרים.



$$LOAN = PV(PMTs)$$

$$12,000 = x * PVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^{-2}$$

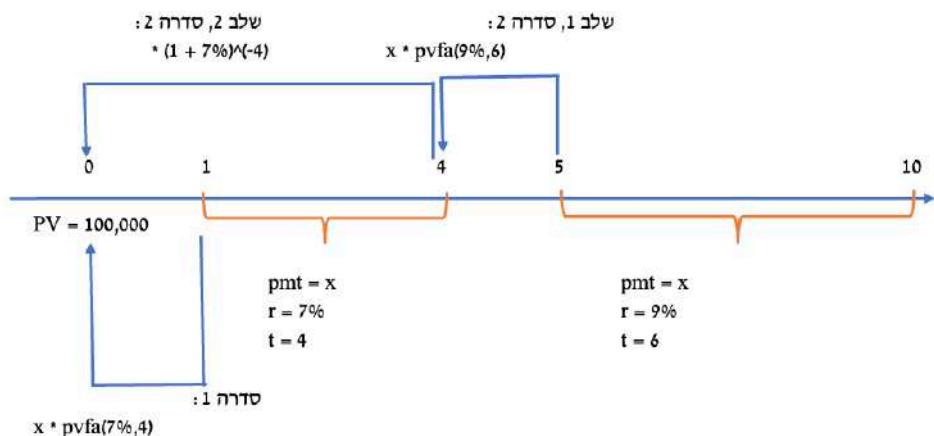
$$12,000 = x * 30.108 * (1 + 1\%)^{-2} \rightarrow x = 406.58$$

הסבר קצר :

הערך הנוכחי של סדרת החזרים שמתחלים בזמן 3 מופיע אוטומטית "אחת אחרה" כЛОMER לזמן 2, יש למתאם את התוצאה לזמן 0, מועד נטילת ההלוואה, ורק אז - לבנות את המשווה ולחלץ את הנעלם בהתאם.

שאלה 34 - **יישומים של ערך הנוכחי: חילוץ סכום החזר תקופתי בהלוואה, מקרה מורכב יותר**  
 נטלתם היום הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-10 תשלומים שנתיים. הריבית השנתית בכל אחת מ-4 השנים הראשונות היא 7%, והריבית השנתית בכל אחת מהשנים העוקבות היא 9%. מהו סכום התשלומים הקבוע?

**פתרון:**  
 כזכור, כאשר מזוהה הלוואה שהחזרה עוננים לגדר סדרה, אני משתמש במשפט: סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. להלן תיאור סדרות החזרים:



$$100,000 = x * pvfa(7\%, 4) + x * pvfa(9\%, 6) * (1 + 7\%)^{-4}$$

$$100,000 = x * 3.387 + x * 4.486 * (1 + 7\%)^{-4} \rightarrow x \approx 14,686$$

הסבר מפורט:

הלוואה עצמה היא בסך 100,000 ש"ח (אנף שמאלי).  
 הביטוי המייצג את הערך הנוכחי של סדרת החזרים הראשונה, טרם שינוי הריבית, הוא  $x$  מוכפל ב-  $pvfa$  שמתאים לריבית לתקופת הסדרה הראשונה שהיא 7%, ול-4 תשלומים. הואיל וסדרה ראשונה זו החלה בזמן 1, ותדירות התשלומים כל שנה, חישוב ערך הנוכחי סדרתי זה מוביל "אחת אחרת" כלומר בדיקת זמן 0 ללא כורך בהתאם.

הביטוי המייצג את הערך הנוכחי של סדרת החזרים השנייה (לאחר שינוי הריבית) מורכב יותר. מדוע? משום שתחילה כופלים את החזר הקבוע  $x$  במספר התשלומים העדכני 6 שנותרו, והריבית העדכנית 9%, אלא שהפעם החישוב שמקפיד "אחת אחרת" ביחס לתחילת סדרה זו, שהיא בזמן 5, מוביל בזמן 4. ולכן יש לתקן 4 שנים נוספות לאחר.

תיקון 4 שנים נוספות לאחר - חייב להתבצע בריבית השונה שמתקנית ב-4 שנים אלו, שהיא 7%. וכך, ההתאמה היא על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית 7% בחזקת -4.

### שאלה 34.1 – יישומים של ערך הנוכחי, חילוץ שיעור הנחה רלוונטי

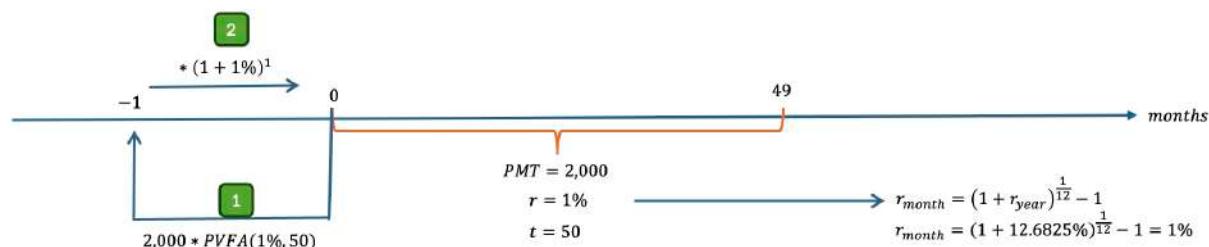
אבל שוקלת לרכוש 100 טון תה ירוק. באפשרותה לשלם בעד המוצר ב-50 תשלום מינימליים חודשיים שווים בסכום של 2,000 ש"ח כל אחד.

לחילופין, היא יכולה לשלם היום סכום ייחד בזמן לטובת ביצוע הרכישה. אם תעשה זאת, כך ציין הספק, היא תזכה בהנחה ביחס למחיר הכלול של התה, שהוא 100,000 ש"ח. נדרש: מהו שיעור הנחה המינימלי שיגרום לאבטל להעדיף את התשלומים בזמן, אם ידוע ששיעור הריבית השנתית של אבטל הוא 12.6825%.

פתרון:

משפט: אם אני יכולה לרכוש מוצר בהסדר תשלום עתידי או בתשלום מיידי היום, הסכום המרבי שאסכים לשלם היום הוא הערך הנוכחי (PV) של ההסדר העתידי.

בציר הזמן להלן תוכלו לראות את הבסיס לחישוב הערך הנוכחי (כולל התאמות) של הסדר התשלומים המוצע.



מה קרה פה? הואיל והסדרה החלה בזמן 0, ערכה הנוכחי הסדרתי הוביל ל-1-, מה שהצדיק התאמה של תקופה אחת קדימה לזמן 0. בנוסף, הריבית 1%, לאור הכל הקובל ששיעור סדרתי חייב להתבסס על הריבית לפרקי הזמן בין תשלום, שכן – היא ריבית חודשית (לכן המרנו את השנתית לחודשיות).

$$PV_{Series} = 2,000 * PVFA(1\%, 50) * (1 + 1\%)$$

$$PV_{Series} = 2,000 * 39.196 * (1 + 1\%) = 79,176$$

כדי להסכים לשלם בזמן, נדרש שיווזילו לנו את המחיר הקטולוגי מ-100,000 ל-79,176 ש"ח. במלים אחרות, יש לייצר הנחה של 20,824 ש"ח מה שמשקף שיעור הנחה של 20.824%.

מסקנה: רק אם מוצע לנו הנחה בשיעור של לפחות 20.824% נסכים לשלם בזמן מיד. זו התשובה הסופית.

שאלה 35 - **יישומים של ערך נוכחי, בחירה בין חלופת תשלוםים להנחת מזומנים, ללא התאמת ריבית**  
שי מעוניין לרכוש את המחשב הבא:

הסל של

<span style="border: 1px solid #ccc; padding: 2px 10px; display: inline-block;">▼ 1</span>	<b>Apple - MacBook Pro 16 /</b> <b>Apple M3 Max / 48GB</b> <b>Ram / 1TB SSD</b> <b>₪ 38,877.97</b>	
<b>₪ 38,877.97</b>	<b>סכום בגין</b>	<b>₪ 38,877.97</b>
<b>₪ 38,877.97</b>	<b>סה"כ</b>	<b>₪ 38,877.97</b>

החברה מציעה לשכור את המחשב, לשלם בעדו במזומן ובכך לזכות להנחה בשיעור 10% מהמחיר הנוכחי לעיל. לחילופין, ניתן לפרט עלות הרכישה ל-36 תשלום חודשיים שווים בסך 1,079.94 ש"ח כל אחד. בהנחה שהריבית החודשית האלטרנטיבית של שי היא 1%, האם יעדיף לרכוש את המחשב במזומן או בתשלומים?

## פתרונות:

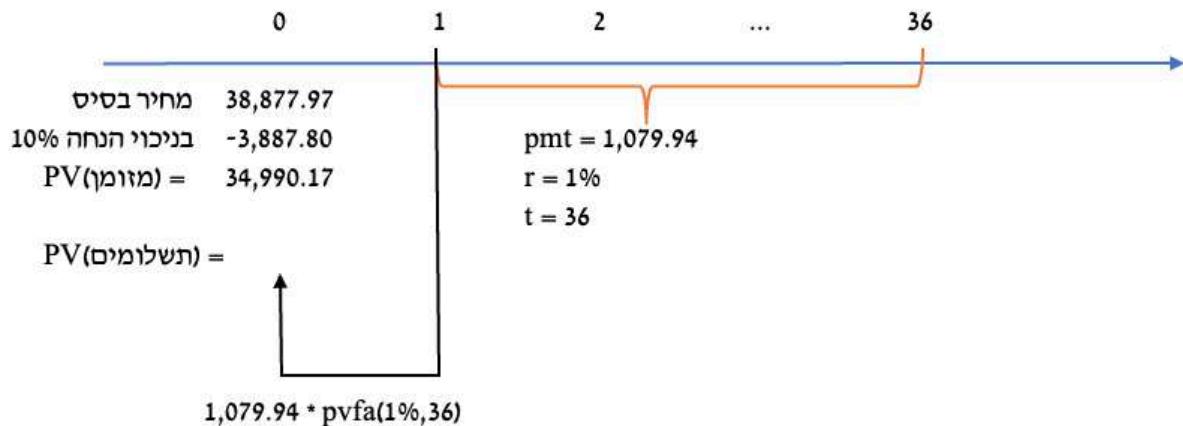
- **מבחן סגנון השאלה ויזיהו הכללי:**
  - כאשר מזיהים שעליינו לבחור בין :
  - (א) אפשרות לרכוש מוצר בתשלומים או
  - (ב) בתשלום אחד במזומן (מיידי).

העיקרונו הוא לבחור מהו הערך הנוכחי של כל חלופה - לבחור בזולה יותר.

### באופו ספצייפי:

העלות בזמן של מוצר - במונחי ערך נוכחי, אחרי הנחה, היא למעשה  $PV_{CASH}$ .

העלות של מוצר בתשלומים במועדי ערך הנוכחי - ידרוש חישוב:  $PV(PMTs)$



או בעצם, בחלוקת התשלום בזמן משלם :

$$PV_{CASH} = 38,877.97 * (1 - 10\%) = 34,990.17$$

ולעומת זאת, בחלוקת התשלומים החודשיים, מבצעים תשלום שערכם הנוכחי המכרי הוא :

$$PV_{Payments} = 1,079.94 * PVFA(1\%, 36) = 1,079.94 * 30.108 = 32,514.83$$

ומסקנה : החלוקת הזולה יותר בזמנים של ערך הנוכחי, אשר תועדף - **היאחלוקת התשלומים**.

סיכוםו : **לשם בירהה בין תשלום בזמן לבין הסדר תשלום נדחים, נחשב את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים, ואם הוא נמוך מהעלות בזמן נטו (אחרי הינה) נעדיף אותו.**

שאלה 36 - **יישומים של ערך נוכחי, בחירה בין חלופות תשלום והנחות, עם התאמת ריבית שי מעוניין לרכוש את ה-iPad הבא:**



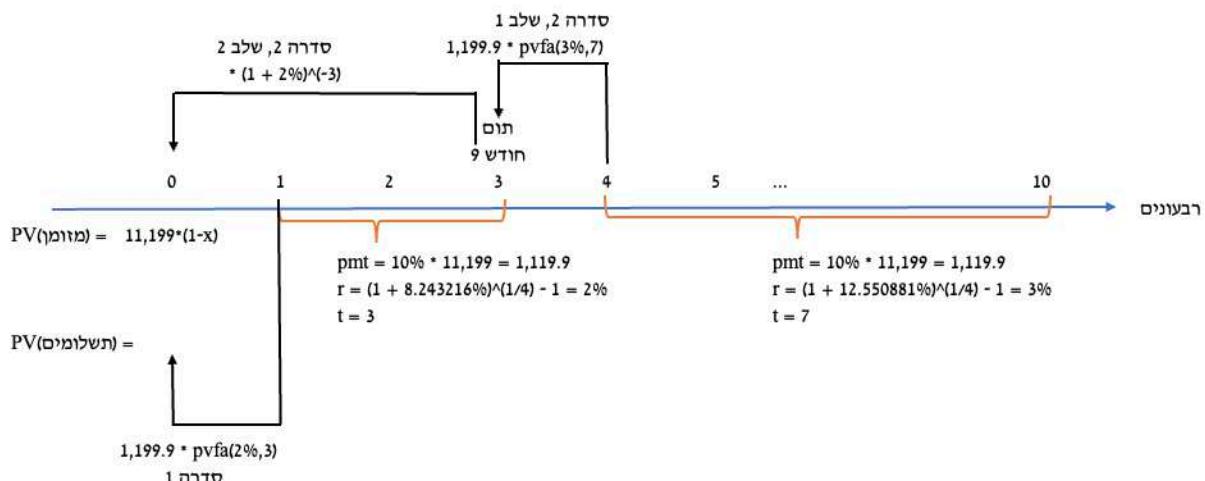
ניתן לרכוש את ה-iPad באחד מבין שני מסלולים:

א. 10 תשלום**ים קבועים** שוגבה כל אחד מהם מחושב לפי 10% מהעלות הנוקובה לעיל.

ב. תשלום **בזמן,** המקנה הנחה.

בהתהה שהריבית **השנתית** התקפה **ב-9 החודשים** הראשונים היא 8.243216%, ואילו הריבית השנתית לאחר מכן 12.550881%, מהו שיעור ההנחה המינימלי הנדרש שיביל לכך שיירכוש בזמן?

פתרון:



$$PV_{Payments} = 1,119.9 * PVFA(2\%, 3) + 1,119.9 * PVFA(3\%, 7) * (1 + 2\%)^{-3}$$

$$PV_{Payments} = 1,119.9 * 2.884 + 1,119.9 * 6.230 * (1 + 2\%)^{-3} = 9,804.35$$

(\*) את התאמת הריבית משנה לרבעון ביצענו על ידי הנוסחה הבסיסית ביותר למספר ריביות, שתשרה אותנו כברירת מחדל במצבים כאלה:

$$r_{required} = (1 + r_{natun})^t - 1$$

מקרה :

הרכיבית  $\gamma$  היא הריבית הנדרשת, כאן - לתקופת תשלום בסדרה (רביעו).

הרכיבית  $\gamma_{natun}$  היא הריבית הנוכחי.

המערך  $t$  - את החלק היחסית מהתקופה הנדרשה שחייב לבטא. כאן - חייב רביעון אחד מתוך שנה (4 רביעונים).

הערך הנוכחי של הסדר התשלומיים "סקול" לתשלום היום של 35,804.9 ש"ח. כדי לבדוק מהו גובה הנחיה שיצדק תשלום מיידי בזמן, נשווה את המחיר בזמן אחד הנחיה לנצח האז.

$$PV_{CASH} = 11,199 * (1 - x) = 9,804.35 \rightarrow x \approx 12.45\%$$

**הסבירים נוספים :**

גם בשאלת זו, בדומה למועדת, עוסקים בבחירה בין תשלום בזמן (בניכוי הנחיה) לבין הסדר התשלומיים. כמו תמיד, נרצה לבטא הן את הערך הנוכחי של הסדר התשלומיים, והן את הסכום בזמן נטו (אחרי הנחיה).

- הסכום בזמן נטו, אחרי הנחיה, הוא למעשה :  $(1 - x) * 11,199$

- לגבי הערך הנוכחי של סדרת התשלומיים הרביעוניים, נציג ציר זמן כדי לבנות בצורה נcona את הערך הנוכחי של התזוריים.

**הסבירים לציר הזמן :**

הסדרה ה-1 תקפה במשך 9 חודשים (3 רביעונים) עד למועד שינוי הריבית הנוכחי בשאלת (הריבית הראשונה השנתית בשיעור 8.243216% תקפה במשך פרק זמן זה). בתקופה זו, מבוצעים 3 תשלום, הראשון שבזמן 1. חישוב הערך הנוכחי של סדרה זו מוביל בהגדרה תקופת תשלום אחת אחרת (רביעון אחריה) ביחס למועד התשלום הראשון (ביחס לתום רביעון 1) ככלומר לזמן 0, ללא צורך בהתאמה.

הסדרה ה-2 תקפה במשך 7 רביעונים נוספים (לאחר שינוי הריבית הנוכחי בשאלת). הריבית השנתית הנוכחי ובתקופת סדרה זו היא ריבית שנתית בשיעור 12.550881%. בתקופה זו, מבוצעים 7 תשלום, והראשון שבזמן בתום הרביעון ה-4. חישוב הערך הנוכחי של סדרה זו מוביל גם הוא בהגדרה אחת אחרת (רביעון אחריה) ביחס למועד התשלום הראשון (ביחס לתום רביעון 4) ככלומר לזמן 3, ונדרשת התאמת נוספת נספה אחורנית זמן 3 לזמן 0. התאמות לאחר נבעו נספה על ידי מכפלה נספה ב-1 ועוד הריבית שבתקופת (הריבית הרביעונית הקודמת) בחזקת שלילית של מספר תקופות ההתאמה.

והמשמעות : הערך של  $x$  המיצג את שיעור הנחיה בחלוקת הזמן הוא 12.45%. קרי, אם תשלום בזמן מזכה בהנחיה בשיעור 12.45% או יותר, כדי לשלם בזמן.

**שאלה 37 - חילוץ סכום תשלום בעסקת תשלום בגין מוצר הכללת מקדמה**

גיא שוקל לרכוש היום מחשב שנתרנו להלו :

הפל של



עלות המחשב שמעוניין גיא לרכוש היא 14,129.07 ש"ח. גיא נדרש לשלם באופן מיידי 30% מעלות העסקה, ואת היתריה עליו לשלם ב-36 תשלומים שווים שיבוצעו בתדירות תלת חודשית (כל 3 חודשים), שהראשון שבהם יבוצע בעוד חודש מהיום. הריבית החודשית היא 1%. בתנאים אלו, מהו סכום התשלום התלת-חודשי שגיא יצטרך לשלם?

**פתרונות :**

בשאלות שבהן אני מזזה צורך בחילוץ תשלום תקופתי קבוע בעד מוצר, שמחירו הכלל נתון - ובנוסף משולמת מקדמה בעדו, אנו טוענים שמדובר למעשה בעסקת "הלוואה". ולמה הכוונה? הספק למעשה מעניק לגיא הלוואה בוגבה עלות מוצר בגין המקדמה.

**משפט :** סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזירה. לכן, אם אני יודע מהם הפרמטרים בעסקה :

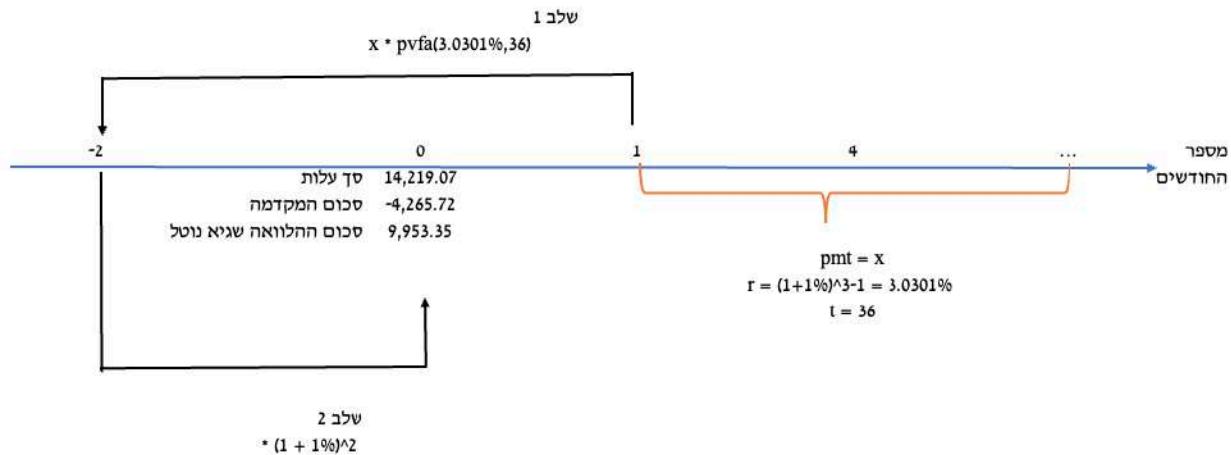
מהו סכום הלוואה : עלות המוצר בגין המקדמה. -

כמה תשלום יישם בהסדר. -

מהו שיעור הריבית. -

אוכל לחץ את נעלם התשלום התקופתי.

הוצאות המחשב שמעונייןgia לרכוש היא 14,129.07 ש"ח. גיא נדרש לשלם באופן מיידי 30% מעלות העסקה, ואת היתריה עליו לשלם ב-36 תשלומים שווים שיבוצעו בתדירות תלת חודשית (כל 3 חודשים), שהראשון שבהם יבוצע בעוד חודש מהיום. הריבית החודשית היא 1%. בתנאים אלו, מהו סכום התשלומים התלת-חודשי שגיא **צריך לשלם?**



המשפט היה: סכום ההלוואה (הוצאות המוצר בኒקי המקדמה בעדו) שווה תמיד לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של התשלומים הנותרים.  
סכום ההלוואה:

$$PV_{LOAN} = 14,219.07 * (1 - 30\%) = 9,953.35$$

הביטוי המיצג את הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו:

$$PV_{Payments} = x * PVFA(3.0301\%, 36) * (1 + 1\%)^2$$

הויל והריבית איננה שלמה, נציב בנוסחה המתמטית של PVFA:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + r)^t}}{r} \rightarrow \frac{1 - \frac{1}{1.030301^{36}}}{0.030301} \approx 21.735$$

וכך קיבל בגין הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו:

$$PV_{Payments} = x * 21.735 * (1 + 1\%)^2$$

ובsek הכל, כדי לפטור:

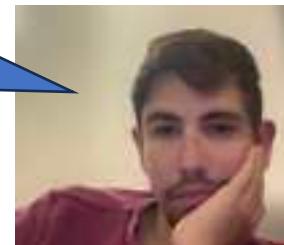
$$PV_{LOAN} = PV_{Payments}$$

$$9,953.35 = x * 21.735 * (1 + 1\%)^2 \rightarrow x \approx 448.92$$

מסקנה: התשלום התקופתי שעל גיא לבצע הוא כ-448.92 ש"ח.

סיכוםון: אם זיהיתי שאלה שבה עלה צורך לחשב את התשלומים הקבועים לרכישת מוצר שעבورو משולמת גם תשלוםים אבל גם מוקדמת בזמן, נתייחס לסכום של המחיר בגין המוקדמת כל הלוואה, שאט סכומה נשווה לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של סדרת התשלומים (מתואם לזמן אפס לפי הכללים הרלוונטיים).

אויל, ואבוי ליווצרי

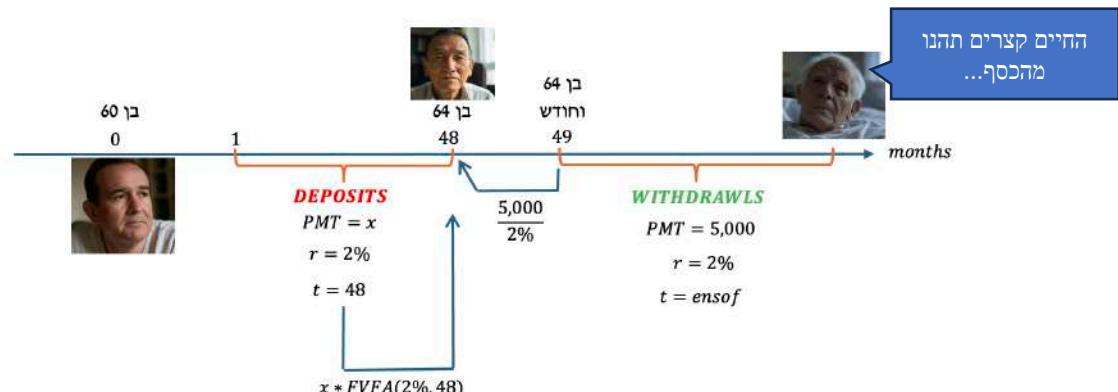


**37.1 – יישום בכלכלי: שילוב של ערך עתידי וערך הנוכחי – איזון אקטוארי**  
 עם בן 60 היום. בכוונתו להפקיד בתום כל חודש במשך 4 שנים סכום קבוע. בגיל 64 בדיקן יצא לפנסיה ובתום כל חודש לאחר מכן ולנצח בכוונתו למשוך סכום קבוע של 5,000 ש"ח.  
 בהנחה שהריבית החודשית בקרן הפנסיה שאליה מפקיד נعم היא 2%. מהו הסכום החודשי שייצטרך נעם להפקיד?

פתרון:

באופן כללי, אני מזזה כאן שאלה שעוסקת בסדרת הפקודות שלאחריה סדרת ממשיכות. שאלות מטיפוס זה נקראות "איזון אקטוארי" (МОונח שמאד מקובל בתחום הפנסיה והביטוח).  
 שאלות איזון אקטואריanno פותרים על ידי כך שבונים משווהה שבה – אגף אחד מיציג את הצבירה העתידית ערב הפרישה (למועד סיום ההפקודות), והאגף השני שווה לו – הוא הערך הנוכחי של המשיכות לאותה נקודת זמן.

בתרשים מטה ניתן לראות את התקופות הרלוונטיות ואת התאמת הזמן של ההפקודות (בכלים של ערך עתידי) והמשיכות (בכלים של ערך הנוכחי) לזמן 48.



משוואת הפתרון תהיה:

$$x * FVFA(2\%, 48) = \frac{5,000}{2\%} \rightarrow x = 3,150.46$$

**שאלה 41 - איזון אקטוארי - תכנון פיננסי:** מקרה שבו קיימת סדרת הפקדות למיון סדרת מישיות בונינו מפקיד 500 ש"ח בסוף כל חודש במשך 4 שנים. מיד לאחר סיום ההפקדות בונינו יושוק בסוף כל חודש במשך 4 שנים סכום קבוע. בהנחה שהריבית השנתית בתקופת ההפקדות היא 26.82418% ואילו הריבית השנתית בתקופת המישיות היא 12.6825%, מהו הסכום החודשי שיוכל בונינו למשוך?

**פתרון :**

המשמעות של המונח "איזון אקטוארי" הוא זה שאליו אני מקטלג שאלות שבחן אני מזזה סדרת הפקדות שאחריהן סדרת מישיות.

כאמ' מפקדים כל חודש 4 שנים, ולאחר מכן מושכים כל חודש 4 שנים – איזון אקטוארי. טכנית הפתרון היא לייצר ביטוי שמשווה בין הערך העתידי (המצטבר) של ההפקדות, לבין הערך הנוכחי של המישיות **לאותה נקודת זמן**.

אני אישית (ד"ר צבאן) אוהבת לבטא את הערכים לנקודת הזמן שהוא המיצגת את מועד ההפקדה האחרונה.

$$(משיכות) = PV = FV$$

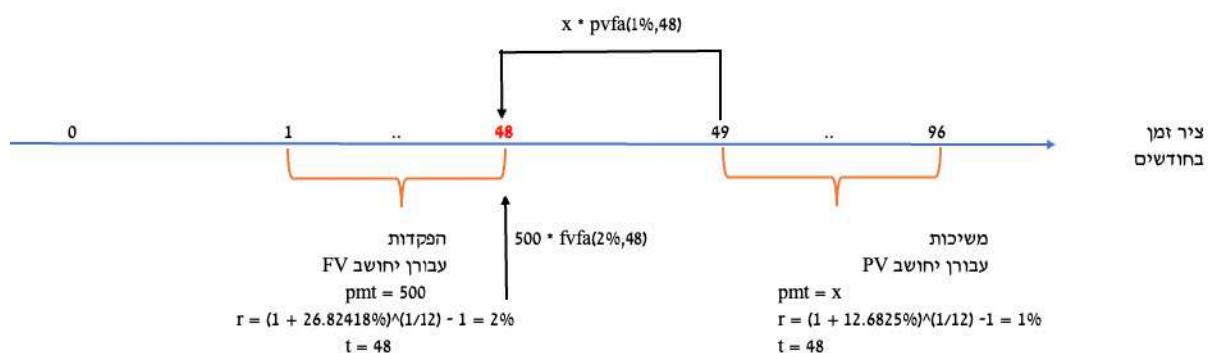
הוائل וסדרת ההפקדות היא בתדרות חודשית, ואילו הריבית הנתונה לתקופת ההפקדות היא שנתית, עליינו לבצע התאמה של תקופת הריבית משנה לחודש כדי לבטא את הערך העתידי של הסדרה. הריבית בתקופת ההפקדות היא 26.82418% ולא נאמר מאייזה סוג היא. כבירית מחדל, אם לא נאמר אחרת, הריבית הנתונה היא אפקטיבית – שעיבודה (אופן ההמרה שלה) מבוצע לפי העקרון של "ריבית דרייבית" (מעיריך חזקה מתאים ולא עם חלוקה פשוטה):

$$r_{month} = (1 + 26.82418\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 2\%$$

גם בתקופת המישיות, תדרות התזרים חודשית, אך נתונה ריבית שנתית. כבירית מחדל אופן המרתה משנה לחודש היא עם מעיריך חזקה מתאים:

$$r_{month} = (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1\%$$

בהתנתק משווה כזו, ניתן לפעול כדי לבצע חילוצים רלוונטיים.



$$500 * FVFA(2\%, 48) = x * PVFA(1\%, 48)$$

כלומר :

$$500 * 79.354 = x * 37.974 \rightarrow x \approx 1,045$$

סיכום :

- כאשר אני מזזה סדרת הפקודות שלאחריה סדרת משליכות, חילוץ ערכים רלוונטיים (כגון גובה הפקודה / גובה משיכה / שיעור הריבית) יישען בדרך כלל על משווהה שאגפיה הם הערך הנוכחי של הפקודות והערך הנוכחי של המשיכות בהתאם.

חשיבות מוד לבטא את הערכים של שני האגפים לאותה נקודת זמן בדיק.

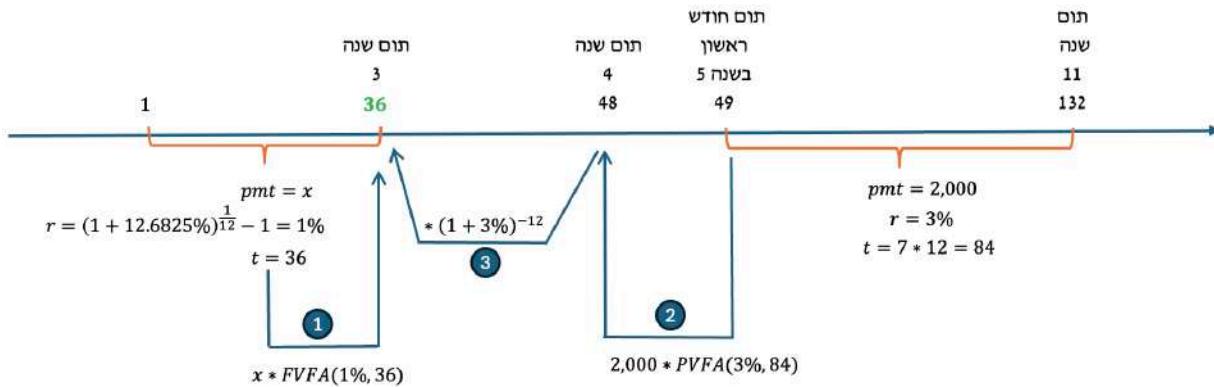
- אני אישית (שייקה) מוד אהוב לבחור נקודת זמן משותפת שהיא נקודת הזמן של הפקודה האחרונה (לכן, כאן בחרתי לבטא את כל הערכים במנוחי זמן 48). און חובה כזו, וכל עוד תייצרו משווהה שבה שני האגפים יוצרים ערך לאותה נקודת זמן בדיק, ניתן לפטור אותה ולקבל תוצאה זהה.

#### שאלה 41.1 – שאלת נוספת על איזון אקטוארי להתנסות כיתה הדורגיתית יותר עם התאמות זמן

ירין מתכוון לחסוך בתום כל חודש במשך 3 שנים סכום קבוע. הריבית השנתית בתקופת הפקודות היא 12.6825%. לאחר מכן, החל ממועד החודש הראשון של השנה ה-5 יתחיל לשזק סכום של 2,000 ש"ח בתום כל חודש במשך 7 שנים (כך שהתשולם האחרון יבוצע בתום החודש האחרון של השנה ה-11). הריבית החודשית לאחר תקופת הפקודות 3%.

מהו הסכום החודשי שירין צריך לחסוך על מנת לעמוד ביעד המשיכות?

פתרונות :



משוואת הפתרון :

$$FV_{36} = PV_{36} \quad (\text{ mishicot (הפקודות)})$$

$$x * FVFA(1\%, 36) = 2,000 * PVFA(3\%, 84) * (1 + 3\%)^{-12}$$

לצורך חישוב ה- PVFA אי אפשר להשתמש בלוח א-4 במספק א לכרך ד, שכן מספר התזוריים גבוה מ-50. לכן נפעיל עם נוסחת PVFA המתמטית :

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + r)^t}}{r} \rightarrow PVFA(3\%, 84) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 3\%)^{84}}}{3\%} = 30.55$$

נחזיר ונשלים :

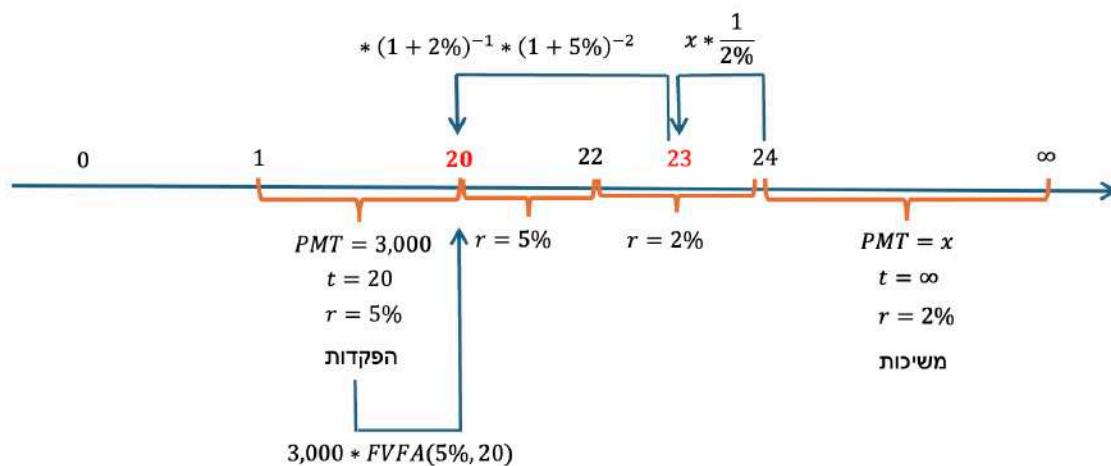
$$x * 43.077 = 2,000 * 30.55 * (1 + 3\%)^{-12} \rightarrow x \approx 995$$

מסקנה : סך הסכום הכספי שיוציא ירין להפקיד כל חודש כדי לעמוד ביעד הוא 995 ש"ח.

שאלה 42 - **יישומי ערך נוכחי - איזון אקטוארי: תכנון פיננסי - סדרת הפקודות שאחריה משיכות אינסופיות**  
 ניתנו להפקיד לפנסיה סכום של 3,000 ש"ח כל שנה במשך 20 שנים. הניחו כי החל מסוף השנה ה-24 תקבלו סכום שנתי קבוע, לאינסוף. מהו סכום שנתי זה, אם הריבית היא 5% לשנה במשך 22 השנים הראשונות, ולאחר מכן צפואה הריבית לרדת ל-2% לשנה?

פתרון :

שאלה זו במאורות דומה מאד לקודמתה, רק שנעשה שימוש בערך נוכחי של סדרה אינסופית עבור תקופת המשיכות. הויאל וגם כאן ממננים סדרת משיכות באמצעות סדרת הפקודות, נמשיך להצמד לעיקרון לפיו הערך העתידי של ההפקודות הוא הערך הנוכחי של המשיכות.



תחילה, נבטא את הערך העתידי של ההפקודות. באופן אישי, אני מאד אוהב לבטא את הערך העתידי של ההפקודות למועד ההפקדה الأخيرة, כלומר ליום השנה ה-20. אין חובה כזו, וכל עוד מבטאים גם את ההפקודות וגם את המשיכות לאותה נקודת זמן, זה יעבוד. לעסוק :

$$FV = 3,000 * FVFA(5\%, 20)$$

כעת נבעור לערך הנוכחי של המשיכות. במקרה זה, סדרת המשיכות היא לאינסוף, ואשר על כן, הערך הנוכחי צריך להיות לפי הנוסחה :

$$PV = PMT * \frac{1}{r} \quad (\text{משיכות})$$

חשוב לשים לב. המשיכות הן בתום כל שנה, והמשיכת הראשונה היא בתום שנה 24. לכן, כאשר מוחשבים ערך הנוכחי לסדרת המשיכות, הקפיצה ה"אוטומטית" אחת אחרת, מובילה לכך שתוצאת החישוב בהצבה פשוטה, בנוסחת ערך נוכחי סדרתית את הערך הנוכחי לזמן 23. הויאל וביטהנו את ההפקודות לזמן 23, נרצה שאמם המשיכות תותאמנה לזמן 23, וכך נדרשת התאמת נוספת נוספת של הנוסחה הבסיסית של הערך הנוכחי הסדרתי 3 תקופות לאחר (זמן 23 לזמן 20). חשוב לשים לב שבהתאם לנתוני השאלה, הריבית בשנים 21 ו-22

היא 5% ואילו הריבית בשנת 23 היא 2%, ולכן ההתאמה צריכה להיות פעמים בריבית 5% ופעם אחת בריבית 2%, נקבע :

$$PV = x * \frac{1}{2\%} * (1 + 2\%)^{-1} * (1 + 5\%)^{-2}$$

וכעת כל שנותר הוא להשוות בין הערך הנוכחי של המשיכות לבין הערך העתידי של ההפקדות, כשההכל מתואם במועד זמן 20 :

$$\begin{aligned} FV &= PV \\ 3,000 * FVFA(5\%, 20) &= \frac{x}{0.02} * 1.02^{-1} * 1.05^{-2} \\ 3,000 * 33.066 &= \frac{x}{0.02} * 1.02^{-1} * 1.05^{-2} \rightarrow x \approx 2,142.82 \end{aligned}$$

וכך מצאנו את ערך  $x$  שהוא סכום המשיכת התקופתית<sup>5</sup>.

#### שאלה 43 - יישומי ערך נוכחי לחילוץ נעלמים

פרויקט דורש השקעה בסך 2,000 ש"ח וידוע שהערך הנוכחי הנקי נטו (NPV) המכypy הוא 300 ש"ח. הפרויקט מניב סכום קבוע חיובי כל שנה במשך 3 שנים. בהנחה שהריבית בשנת הראשונה היא 20%, ובכל שנה עוקבת הריבית היא 60% מהריבית בשנת הקודמת, מהו הסכום הקבוע החיובי השנתי?

פתרון :

ראשית, בדומה לשאלה 40, ההגדרה של ערך נוכחי נקי (שתובחר בהרחבה רובה בmph 6 ולכון אני דן בה פה בסיסית בלבד) היא הסכום של הערכים הנוכחיים של כל תזרימי הפרויקט, בסימן חיובי עבור תקבולים ובסימן שלילי עבור תשולומים. אם נסמן את הסכום הקבוע החיובי באוט  $x$  הרי שתתקבל המשוואה הבאה, שבה ההשקעה הראשונית בסימן שלילי, התקבול הראשון מהוון שנה אחריה בריבית ספציפית, התקבול השני מהוון שנים אחוריה ב-2 ריביות שונות (ראו הסבר מתחת לחישוב), והתקבול השלישי מהוון 3 שנים אחוריה ב-3 ריביות שונות :

$$\begin{aligned} NPV &= -2,000 + x * (1 + 20\%)^{-1} + x * (1 + 20\%)^{-1} * (1 + 12\%)^{-1} + x * (1 + 20\%)^{-1} \\ &\quad * (1 + 12\%)^{-1} * (1 + 7.2\%)^{-1} = 300 \rightarrow x = 1,013.01 \end{aligned}$$

הסביר לגבי ריביות :

<sup>5</sup> הגדרת החישוב התקין של איזון אקטוארי לא דורשת באופן מחייב לבטא את כל הערכים דזוקא למועד ההפקודה الأخيرة / לזמן 20. בהחלה אפשר במקומם למקנן את הערך הנוכחי של המשיכות "עוד אחריה" מזמן 23 לזמן 20, לדוחף את הערך העתידי של ההפקודות מזמן 20 לזמן 23. התוצאה הייתה זהה, ונניתן לבחור בדרך הנוחה לכם.

ריבית השנה הראשונה : 20% 20% כנתון.

ריבית השנה השנייה : 12% 12% \* 20% = 60% \* 20%.

ריבית השנה השלישי : 7.2% 7.2% \* 60% = 20%.

### לקראת המפגש הבא (מפגש 3):

- ראשית, והכי חשוב ( מבחינתי זה חובה ), צריך לחזק את הידע, גם לגבי תכני מפגש זה, לסגור אותם פיקס, גם לגבי תכני המפגש הקודם והשאלות הנוספות לגבי תכני שהוספרי למחברת במסגרת מערך השיעור הקודם בנושא ערך עתידי כולל חילוצים. במיוחד חשובות השאלות שיש להן תשובה מפורשתות - שאלות אלו מראות יישומים שנשענים על הנלמד אך כוללות כל מיני טרייקים, וחשוב מאד להעמיק בהן ולשאול.
- שנית, מומלץ מאד כבר להתחילה באופ"ל, ל Kapoor בין שאלות ולחפש שאלות דומות בכותרת ובמהות למה שעשינו. שימו לב לכלל שאלה נתני כותרת, لكن סביר מאד ששאלות אחדות (כרבע אופל) לגמרי ניתן לפטור על סמך הקיימים וההמחשות.
- שלישית, אפשר ללמוד מהרצפים באתר, ולסגור את כל הנושא של ערך נוכחי (לא ריביות ולא הלוואות).
- רביעית, אם מצליחים, שווה לפטור עוד שאלות ממחברת הקורס שלי של הסטודנטים הקודמים. קישור למחברת הישנה תמצאו [כאן](#) (קליק וזה נפתח), ובבחינתי אפשר לפטור עד וככל עמי 167. נשמע לכם יותר מדי? אין בעיה. בזמנכם החופשי, ציינו לעצמכם שאם רוצים לחזק ולתרגל, אפשר גם ממש.

## נוסחאות מפגש 2 - ערך נוכחי

**ערך נוכחי של סכום יחיד, כהרייבית קבועה**  
הגרסה של הספר :

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$$

הגרסה של שי (אותו עיקרונו) :

$$PV = FV * (1+r)^{-t}$$

הערך PV הוא הערך הנוכחי / השוויי היום

הערך FV הוא הערך העתידי (סכום יחיד)

הערך  $r$  הוא הריבית התקופתית

הערך  $t$  הוא מספר תקופות הריבית

## ערך נוכחי של סכום יחיד, כהרייבית משתנה

הגרסה של "הספר" :

$$PV = \frac{FV}{(1+r_1)^{t_1} * (1+r_2)^{t_2} * \dots}$$

הגרסה של שי (אותו עיקרונו) :

$$PV = FV * (1+r_1)^{-t_1} * (1+r_2)^{-t_2} \dots$$

כאשר :

הערך PV הוא הערך הנוכחי

הערך FV מייצג את הסכום העתידי שצפויים לקבל

הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה

הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבהן כל ריבית תקפה

## ערך נוכחי של סדרה סופית (בשונה מסדרה אינסופית, לגבייה נוסחה נפרדת מטה)

$$PV_{Series} = pmt * PVFA(r, t) = pmt * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כאשר :

הערך PV Series מייצג את הערך הנוכחי המऋפי של הסדרה כולה

הערך  $pmt$  מייצג את התשלומים / התקבול התקופתי בסדרה

הערך  $r$  מייצג את הריבית לתקופת תשלום

הערך  $t$  מייצג את מספר התשלומים

הסימון  $PVFA(r, t)$  נקרא בלשון הספר מענ"ס : מקדם ערך נוכחי סדרתי. ניתן למצוא את ערכו בנספח א' לכרך ד של ייחדות הלימוד, בלוח שמספרו א-4. הלוח מופיע החל מעמ" 45 בנספח

ערך נוכחי של סדרת תשלוםמים אינסופית

$$PV(Infinte_{Series}) = pmt * \frac{1}{r}$$

התאמת ריבית (כasher לא ציינו את סוג הריבית) משנה ל-4 שנים:

$$r_{4years} = (1 + r_{year})^4 - 1$$

התאמת ריבית (כasher לא ציינו את סוג הריבית) משנה לחודש:

$$r_{Month} = (1 + r_{year})^{\frac{1}{12}} - 1$$

חילוץ סכום תשלום קבוע בהלוואה הנפרעת בתשלומים קבועים

$$Loan = PV(payments)$$

כלומר: סכום ההלוואה שווה לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של החזרה. דרך אחרת לבטא זאת, שגם תקציב ביטוי בפגש 3 (ושם תיקרא - החזר תקופתי בלוח שפיצר) היא:

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

### מבחן 3 - המשך יישומי ערך נוכחי - 26.3.2025

**רקע – לוחות סילוקין (אופן הטיפול בחישוב החזרי הלוואות) – "שפיצר" ו"רגיל"**  
בתרגילים הקודמים, כאשר עסקנו בהלוואות הנפרעות בתשלומיים, סכום התשלומים התקופתי היה קבוע. אלו הלוואות נפרעות שלא הענקנו להן שם – אבל מוכבל לקרוא להן "הלוואות הנפרעות לפי לוח סילוקין שפיצר".  
הבנה מלאה של לוח זהה תדרושים מאייתנו לא רק לדעת מהו הסכום הכללי של שמחזירים כל תקופה, אלא גם כיצד נפצל את סך החזר בין הרכיב המהווה החזר קרן לבין הרכיב המהווה תשלום ריבית.  
במילים אחרות – לוח סילוקין באופן כללי לא עוסק רק בתשובה לשאלת "מהו החזר התקופתי" אלא הוא מפרט את מכלול נתוני ההלוואה והתפתחותה.

לוח סילוקין וגיל שנקרא גם – הלוואה הנפרעת בתשלומי קרן שווים – הוא חישוב שונה שኒיצר בעת. מודיעו חשוב לנו לדעת את אופן הפיצול של החזרי ההלוואה בין קרן וריבית? מעבר לעניין הכללי – כshedim בחברות ובעסקים, רכיב הריבית מהו הוצאה מוכרת (מקבלים בגין זיכוי מס) ורכיב הקרן – לא (נדון בזה בהמשך).

כרגע נציג את הצד הטכני של ההלוואה.

#### שאלה 38 – לוח סילוקין [פירוט החזרי הלוואה] שפיצר מול לוח סילוקין רגיל

נטלתם הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-5 תשלומיים שנתיים. הריבית השנתית היא 6%. הציגו את לוח הסילוקין באופן השוואתי כאשר הוא מחושב לפי שיטת שפיצר (החזרים שווים) ולפי שיטת לוח רגיל (החזרי קרן קבועים). הסבירו בקצרה באופן מילולי את ההבדל בין הלוחות.

פתרונות :

נושא ההלוואות הוא נושא שכדי ללמידה את כדי להבין לעומק, גם בחיים. מצד שני, אי אפשר לתפור עליו שיעור שלם מחמת משקלו. לכן נציג היבטים בסיסיים בלבד, וכך לדאוג לכם, מקשר לכם לה [חומר נוספת](#) ללימוד מעמיק של הנושא.

#### נתחל מלוח סילוקין שפיצר – הגדרה ואופן בנייה

ובקצרה: החזרי הלוואה בשיטת שפיצר משמעם **שהתשלומים התקופתיים המהווים את החזר ההלוואה קבוע, ובעצם יוצר סדרה קבועה. כפועל יוצא, לאור ההגדרה שלפיה סכום הלוואה LOAN הוא הביטוי המהווה את הערך הנוכחי של ההחזרים הקבועים (PMT).** במקרה הקלאסי, שבו התשלומיים הם בסוף כל תקופה :

$$LOAN = pmt * PVFA(r, t) \rightarrow pmt = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

از בעצם, בהגדרה: התשלומים התקופתיים קבועים בגין הלוואה שפיצר ניתן לחישוב על בסיס היחס בין סכום הלוואה ל - PVFA המגדיר את הריבית התקופתית  $r$  ומספר החזרים  $t$ . בשאלה נתון – סכום הלוואה 100,000, תשלומיים שנתיים כאשר הריבית השנתית 6%, במשך 5 שנים ולכן :

$$PMT = \frac{100,000}{PVFA(6\%, 5)} = \frac{100,000}{4.212} \approx 23,742$$

לאחר שהתשלום התקופתי ידוע בלוח שפייצר, לעיתים נדרש לבדוק מתיoco את החלק היחסית המהווה את תשלום הריבית. זכרו: בהלואות הנפרעות בתשלומיים, כל תשלום מבצע תשלום בגין הריבית וגם החזר בגין חלק מהקרן. התשלום בגין ריבית  $INT$  הוא המכפלה הפשטוטה של יתרת ההלוואה לתקופה קודמת באחוז הריבית. כך למשל, הריבית המשולמת במסגרת התשלום ה-1 תהיה (לפי יתרת הלואה מקורית לזמן 0 שהוא 100,000 ש"א כפול שיעור הריבית 6%):

$$INT_1 = 100,000 * 6\% = 6,000$$

ואם נרצה לדעת מהו הרכיב מתוך התשלום הכלול המהווה החזר קרן  $PRN$ , علينا לנכונות מהתשלום הכלול  $PMT$  את רכיב תשלום הריבית:

$$PRN_1 = PMT - INT_1 = 23,742 - 6,000 = 17,742$$

יתרת ההלוואה לאחר כל תשלום היא ההפרש בין יתרת ההלוואה לתקופה קודמת - לבין תשלום הקרן:

$$BAL_1 = BAL_0 - PRN_1 = 100,000 - 17,742 = 82,258$$

ואם כך: בלוח שפייצר, תמיד נחשב תחילת את התשלום התקופתי הקבוע (נוסחה). לאחר מכן נחשב את תשלום הריבית (מכפלה ב-% הריבית), לאחר מכן את ההפרש בין התשלום התקופתי לתשלום הריבית (החזר קרן), החזר הקרן ינוכה מההלוואה כדי לקבוע את יתרה לתקופה הבאה.

נציג את השלבים הראשונים במבנה לוח סילוקין מלא על בסיס עקרונות אלו. לוח סילוקין עם תוצאות מלאות כולל לשנים האחרונות שאוותן לא חישובי כאן, יופיע לאחר מכן.

שלב 4	שלב 3	שלב 2	שלב 1	שלב בתהילך
יתרת הלוואה $BAL_{t-1} - PRN_t$	ע"ח קרן $PRN_t$ $PMT - INT_t$	ע"ח ריבית $INT_t$ $BAL_{t-1} * r$	סכום התשלומים מחושב פעם אחת $PMT = \frac{LOAN}{PVFA}$	זמן
100,000				0
$100,000 - 17,742 = 82,258$	$23,742 - 6,000 = 17,742$	$100,000 * 6\% = 6,000$	$\frac{100,000}{PVFA(6\%, 5)} \approx 23,742$	1
$82,258 - 18,807 = 63,451$	$23,742 - 4,935 = 18,807$	$82,258 * 6\% = 4,935$	23,742	2
$63,451 - 19,935 = 43,516$	$23,742 - 3,807 = 19,935$	$63,451 * 6\% = 3,807$	23,742	3
.	.	.	23,742	4
0	.	.	23,742	5

#### המשך ללוח סילוקין "רגיל" = החזרי קרן שווים: הגדרה ואופן בנייה

החזרי הלוואה המבוצעים בשיטת "החזרי קרן שווים" (לוח סילוקין רגיל), דורשים בטור התחלה חישוב של התשלומים הקבוע על **חשבון הקרן**, המסומן PRN, וזאת על בסיס הפרופורציה בין סכום ההלוואה למספר התשלומים (כאן: 100,000 קרן במונה, ו-5 תשלומים שנתיים לנתחו במכנה):

$$PRN = \frac{LOAN}{t}$$

$$PRN = \frac{100,000}{5} = 20,000$$

הוail והתשלום על **חשבון הקרן** קבוע, יתרת הקרן תמיד פוחתת בסכום קבוע זה. יתרה ליום שנה ראשונה (לאחר תשלום ראשון):

$$BAL_1 = 100,000 - 20,000 = 80,000$$

והיתרה לאחר התשלום השני:

$$BAL_2 = 80,000 - 20,000 = 60,000$$

רק בשלב הזה - מחשבים בלוח הרגיל את התשלום ע"ח ריבית, לפי יתרת הקרן לתקופה קודמת, כפול אחוז הריבית:

$$INT_1 = 100,000 * 6\% = 6,000$$

וכן:

$$INT_2 = 80,000 * 6\% = 4,800$$

לבסוף, השלב האחרון בעיסוק בלוח הסילוקין הרגיל הוא לטעון שהתשלום התקופתי הכלול מורכב מסיכום התשלום ע"ח הקרן יחד עם התשלום על חשבון הריבית:

$$PMT_1 = PRN_1 + INT_1 = 20,000 + 6,000 = 26,000$$

נרכז את כל שלבי העבודה בבניית לוח "רגיל" בטבלה:

שלב בתחילת תקופה	שלב 1	שלב 2	שלב 3	שלב 4	שלב 5
יתרת ההלוואה (קרן) $BAL_{t-1} - PRN$	תשלום על חשבון הקרן מחושב פעם אחת $PRN = \frac{LOAN}{t}$	$INT_t = BAL_{t-1} * r$	התשלום הכלול $PRN + INT_t$	הגדרה	
100,000					0
80,000	$\frac{100,000}{5} = 20,000$	100,000 * 6% = 6,000	6,000 + 20,000 = 26,000		1
60,000	20,000	80,000 * 6% = 4,800	24,800		2
40,000	20,000	60,000 * 6% = 3,600	23,600		3
20,000	20,000	40,000 * 6% = 2,400	22,400		4
0	20,000	20,000 * 6% = 1,200	21,200		5

כדי לסקור את ההבדלים בין לוחות הסילוקין, נציגם זה מול זה האחד ליד השני<sup>6</sup>:

לוח רגיל					
	שלב 2	שלב 1	שלב 3	שלב 4	
BALANCE	PRN	INT	PMT		
יתרה					
100,000				0	
80,000	20,000	6,000	26,000	1	
60,000	20,000	4,800	24,800	2	
40,000	20,000	3,600	23,600	3	
20,000	20,000	2,400	22,400	4	
0	20,000	1,200	21,200	5	

לוח שפייצר - הערככים מעוגלים שכן אין איפוס בתא האחרון					
	שלב 4	שלב 3	שלב 2	שלב 1	
BALANCE	PRN	INT	PMT		
יתרה					
100,000				0	
82,258	17,742	6,000	23,742	1	
63,451	18,807	4,935	23,742	2	
43,516	19,935	3,807	23,742	3	
22,385	21,131	2,611	23,742	4	
51	22,334	1,408	23,742	5	

מעבר לשלב חמישי על בסיסו נקבעו טבלאות אלו, שעיקריו הומחשו בתהיליך המתמטי לעיל, והרחבות אודוטיו תמצאו פה [בתקליטה נוספת](#), לעיתים עשוות להישאל שאלות תאוריה לגבי הלוחות וההבדל ביניהם. בהקשר זה, ניתן לשים לב **שלב זה של לוח סילוקין שפייצר סך כל אחד מהתשלומים הראשונים, קרי PMT (כאן: התשלום הראשון והשני), יותר נמוכים מאשר במקבילה של הלוח הרגיל. למשל:**

$$PMT_1(\text{Shpizer}) = 23,742 < 26,000 = PMT_1(\text{Ragil})$$

<sup>6</sup> לוח סילוקין שפייצר מסתיים תמיד בערך 0; ההפרשים שיכולים להיותו הפרש עיגול (שנובעים מן מתשלומים בש"ח לא שלמים, והן מהעבודה שלוחות 4-5) אינם מדויק אלא מוקרב).

לעומת זאת, בתשלומים האחרנים / המאוחרים, התשלום בלוח הרגיל נמוך יותר מסך התשלום התקופתי בשפייצר. כך למשל, בתשלום ה-4:

$$PMT_4(\text{Shpizer}) = 23,742 > 22,400 = PMT_4(\text{Ragil})$$

בנוסף ניתן לטעון ש:

- א. בלוח שפייצר, תשלום הריבית התקופתית, בכל תקופה, גבוהה יותר מאשר בלוח רגיל (למעט בתשלום הראשון, שבו קיים שוויון).
- ב. בלוח שפייצר, סך תשלומי הריבית גבוהה יותר מאשר בלוח סילוקין ורגיל.
- ג. בלוח שפייצר סך התשלומים גבוה יותר מאשר בלוח סילוקין רגיל.
- ד. לגבי איזה לוח עדיף: רק כאשר עברו לדין בפרויקטם (יחידה 6) ובבahir את מחיר ההון של המשקיע, נוכל לדון בכך. בינהיים, אלו מתמקדים רק ביכולת לחשב את הערכיהם בלוח ולהבין את "סדרי הגודל" שלהם (מהו גדול ממה וכיו"ב).

#### שאלה 38.1 - קיצורי דרך בלוחות סילוקין

עמרי נטל הלוואה בסך 200,000 ש"ח הנפרעת בתשלומים חודשיים במשך 4 שנים. הריבית בהלוואה היא ריבית שנתית פשוטה בשיעור 12%.

- א. מהו התשלום ה-20 בגין קרן, אם לוח הסילוקין שפייצר?
- ב. מהו התשלום הכולל ה-12, אם לוח הסילוקין "רגיל"?

פתרון:

#### פתרון סעיף א - תשלום ספציפי בלוח שפייצר

ברגע שאני נתקל בלוח סילוקין שפייצר, תמיד ולעולם השלב הראשון הוא לחשב את התשלום התקופתי הקבוע. במקרים "פשוטים", התשלום התקופתי מחושב לפי הנוסחה:

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

במקרה שלנו - סכום הלוואה נתון 200,000, מספר התשלומים הוא 48 (כל חודש, 4 שנים) ולגבי הריבית? כמו כל חישוב סדרתי (ושפייצר - זו סדרה) אלו זוקקים לרכיבת פרק הזמן בין תשלומים. התשלומים כאן כל חודש, ולכן נדרש חישוב ריבית חודשית, לצערנו ציידו אותן בריבית שנתית פשוטה.

כאשר הריבית הנתונה פשוטה<sup>7</sup>, אז המרתה מתוקפה אחת לאחרת מבוצעת עם חלוקה ולא עם חזקה. כלומר:

$$r_{month} = \frac{12\%}{12} = 1\%$$

<sup>7</sup> אם הריבית הנתונה לא הייתה מחושבת כריבית פשוטה, או המרתה משנה לחודש הייתה באמצעות חזקה:  $1 - (1 + 12\%)^{\frac{1}{12}}$

נזהר לנוסחת חישוב התשלום התקופתי ונציב :

$$PMT = \frac{200,000}{PVFA(1\%, 48)} = \frac{200,000}{37.974} \approx 5,266.76$$

זה רק השלב הראשון, מצאתי רק את סכום התשלום הקבוע. רצוי שנחשב את סכום התשלום על חשבונו הקrho PRN בתשלום ה-20, אלא שלבנות לוח סילוקין עם 20 שורות זה מזעزع ולא יעיל. לכן, אם זה מה שרצוי (לטפל בהחזר ספציפי בלבד עם הרבה תשלוםים), אפעל בדרך קיצור שמאפשרת לגלוות PRN ספציפי ללא שימוש בטבלה כלל.

השלב ה-1 בחילוץ PRN (תשלום ע"ח קrho) ללא טבלה - לחשב את יתרת ההלוואה ל"תקופה אחת אחרת" (כאו שאלות על תשלום בגין קrho בזמן 20, אך נחשב את יתרת ההלוואה בזמן 19).

יתרת ההלוואה היא תמיד הערך הנוכחי של יתרת התשלומים:

$$BAL_t = PMT * PVFA(r, n - t)$$

כאשר :

הערך  $BAL_t$  הוא יתרת ההלוואה בזמן  $t$ .

הערך  $PMT$  הוא התשלום התקופתי בהלוואת השפיצר שדנו בה.

הערך  $r$  הוא הריבית לתקופת תשלום.

הערך  $n$  הוא מספר התשלומים הכלול בהלוואה.

הערך  $t$  הוא הזמן הספציפי / מספר התשלום הספציפי.

במקרה זה בהצבה המתבקשת נקבל שהיתרה בזמן 19 (אחת לפני המועד שעליו שאלו) היא :

$$BAL_{19} = 5,266.76 * PVFA(1\%, 48 - 19) = 5,266.76 * 25.066 \approx 132,017$$

עוד שני צעדים קטנים - תחילת, הריבית המשולמת בזמן 20 היא מכפלה היתרה בזמן 19 בשיעור הריבית התקופתית :

$$INT_{20} = BAL_{19} * r = 132,017 * 1\% \approx 1,320.17$$

התשלום על חשבונו קrho בזמן 20 הוא ההפרש בין סך התשלום PMT לבין התשלום על חשבונו ריבית :

$$PRN_{20} = PMT - INT_{20} = 5,266.76 - 1,320.17 = 3,946.59$$

**סקירת שלבי העבודה באופן תמציתי - חישוב תשלום ספציפי ע"ח קרן בשפייצר:**

- חשב את היתריה לתקופה קודמת, על בסיס מכפלת ה -  $PMT \cdot PVFA$  של מספר ההחזרים הנותר למועד זה.
- כפלי את היתריה לתקופה קודמת (א) בשיעור הריבית. כך תקבלי את תשלום הריבית הספציפי.
- הפחיתי מהתשלום התקופתי הכללי  $PMT$  את תשלום הריבית הספציפי. תקבלי את התשלום הספציפי על חשבו הקרן נדרש.

יש דרך קצרה יותר? ספציפית  
להישוב החזר ע"ח קרן בשפייצר  
בתשלום ספציפי?



**דרך חלופית / קצרה – יותר נוחה אבל פחות הבניתית לחישוב PRN ספציפי בלוח שפייצר:**  
ה-PRN הוא למעשה הירידה ביתרת הקרן (BAL) בין התקופה הקודמת  $t-1$  לבין התקופה הנוכחית  $t$  היא בהגדלה התשלום על חשבו הקרן בזמן  $t$ . כלומר :

$$PRN_t = BAL_{t-1} - BAL_t$$

אנו יודעים שיתרת הקרן לכל אחד ממועדים אלו היא הערך הנוכחי של התזרומים שנותרו לכל אחד מהמועדים :

$$PRN_t = PMT * PVFA(r, n - t + 1) - PMT * PVFA(r, n - t)$$

בגישה, קיבלנו שבעור הלוואה שהחזרה התקופתי  $5,266.76$  ש"ח ומספר החזרה הכללי  $48$ , והריבית החודשית  $1\%$ , ושאלים על תשלום הקרן בזמן  $20$  :

$$PRN_{20} = 5,266.76 * PVFA(1\%, 48 - 20 + 1) - 5,266.76 * PVFA(1\%, 48 - 20)$$

כך קיבל :

$$PRN_{20} = 5,266.76 * PVFA(1\%, 29) - 5,266.76 * PVFA(1\%, 28)$$

בהתאמה קיבל :

$$PRN_{20} = 5,266.76 * 25.066 - 5,266.76 * 24.316 \approx 3,946$$

**פתרון שאלה 38.1 סעיף ב - מהו התשלום הכללי ה-12, אם לוח סילוקין "רגיל"?**  
בלוח סילוקין "רגיל", אפשר לkür את תהליך העבודה בחישוב התשלום הכללי. כך ש :

$$PRN = \frac{LOAN}{n}$$

במילים : התשלום ע"ח קרן הוא קבוע לפי היחס בין סכום ההלוואה לבין מספר ההחזרים הכללי.

$$BAL_t = LOAN - PRN * t$$

במלים: יתרת הקרן לכל מועד היא סכום ההלוואה הכלול, בNICIO תשלום הקרן הקבוע, מוכפל במספר תשלומי הקרן שbowtzu.

$$INT_t = BAL_{t-1} * r$$

במלים: תשלום על חשבו ריבית הוא היתרה לתקופה קודמת כפול שיעור הריבית.

$$PMT_t = PRN + INT_t$$

במלים: התשלום הכלול הוא לפי תשלום הקרן הקבוע בתוספת תשלום הריבית בתקופה הספציפית.

אפשר בקיצור דרך להשתמש בנוסחה הבאה לחישוב תשלום כולל בלוח רגיל:

$$PMT_t = \frac{LOAN}{n} * [1 + (n - t + 1) * r]$$

נתחל מפתרון בדרך הארוכה:  
הלוואה בסך 200,000 ש"ח, נפרעת ב-48 תשלומים שווי קרן, ריבית חודשית 1%, ורוצים לדעת מהו התשלום הכלול בזמן 12.

שלב 1 – חישוב התשלום על חשבו הקרן (קבוע בכל תקופה):

$$PRN = \frac{LOAN}{n} = \frac{200,000}{48} = 4,166.67$$

שלב 2 – חישוב היתרה לתקופה "אחת אחרת" (אני בזמן 12 - נחשב את היתרה בזמן 11):

$$BAL_{11} = 200,000 - 4,166.67 * 11 = 154,166.67$$

שלב 3 – נחשב את הריבית בזמן 12:

$$INT_{12} = BAL_{11} * r = 154,166.67 * 1\% = 1,541.67$$

נחשב את התשלום הכלול בזמן 12:

$$PMT_{12} = PRN + INT_{12} = 4,166.67 + 1,541.67 = \boxed{5,708.34}$$

ונסה את הדרך הקצרה:

$$PMT_t = \frac{LOAN}{n} * [1 + (n - t + 1) * r]$$

בhzvba:

$$PMT_t = \frac{200,000}{48} * [1 + (48 - 12 + 1) * 1\%]$$

תוצאה:

$$PMT_t = \frac{200,000}{48} * [1 + 37 * 1\%] = \boxed{5,708.34}$$

**שאלה 39 - הלוואות ושינויים בהן: לוח סילוקין שפייר וריגיל, דרך מקוצרת לחילוץ ערכיים (לא טבלאות)**  
 נטלתם הלוואה בסכום של 100,000 ש"ח הנפרעת בתשלומים חדשניים שווים (לוח שפייר) במשך 3 שנים. הריבית בגין הלוואה היא ריבית שנתית **פשוטה (נקובה)** בשיעור של 24%. בחולוף שנה, הציע הבנק ללקוח לשנות את אופן החזר לוח סילוקין וריגיל, והלקוח הסכימים.

נדרש :

- א. מהו החזר ה-13, כפי שהוא צפוי לפני השינוי.
- ב. מהו החזר ה-13 בעקבות השינוי?
- ג. מהו החזר ה-19 לאחר השינוי?

#### **רקע - אופן התיאחות לשינויים באופן החזר של הלוואה נתונה**

אם שאלה עוסקת בהלוואה הנפרעת בתשלומים – הנושא הוא "לוחות סילוקין" ובדרכם כלל – לוח סילוקין שפייר / לוח סילוקין "רגיל" (החויר קרבן שווה).

בנוסף, ניתן שה שאלה תכלול התיאחות לשינוי אופן החזר משלב מסוים – ככלומר מעבר מלוח סילוקין וריגיל לשפייר או להפוך.

כאשר ב שאלה על לוחות סילוקין שונים את אופן החזר שלה (לרובות סוג הלוואה, מספר תקופות החזר, ריבית) علينا לטפל בשלבים – "עד השינוי" ו"אחריו".

- בשלב הראשון, נחשב את יתרת הלוואה  $BAL_t$  ערב השינוי (רגע לפני השינוי).
- בשלב השני – יתרת הלוואה ערב השינוי היא מעין הלוואה "חדשה" שיש לפרוס מאותה נקודת קידמה לפי התנאים העדכניים.

#### **פתרונות סעיף א - החזר 13**

ידוע שסכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. לכן, עבור לוח שפייר הנפרע בתשלומים שווים בתום כל חודש, מתקיים שסכום הלוואה הוא בהגדלה הערך הנוכחי של החזרה הקבועים. כך מתקבל הביטוי הבא:

$$PV = LOAN = pmt * PVFA(r, t)$$

שمنו אפשר לגזור את הנוסחה הבאה :

$$pmt = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

בטור התחלה, וטרם שינוי התנאים, השאלה עוסקת בהלוואה בסך 100,000 ש"ח, הנושאת ריבית שנתית **פשוטה** בשיעור 24%, ונפרעת ב-36 תשלומים חדשניים במשך 3 שנים :

$$pmt = \frac{100,000}{PVFA(2\%, 36)} = \frac{100,000}{25.489} \approx 3,923$$

מדובר ריבית 2%?

ראשית, נתנו שהריבית 24% היא **שנתית**, אם החזרים חדשניים – נדרש ריבית חודשית.  
 שנית, אם הריבית פשוטה, אז ההמרה שלה משנה לחודש היא ע"י חלוקה פשוטה :

$$r = \frac{24\%}{12} = \textcolor{red}{2\%}$$

シמו לב, כל הסדר הלוואה בשיטת שפייצר, מתייחס בחישוב התשלומים התקופתי הקבוע בשפייצר. הוואיל ובלוח שפייצר, כל התשלומים הם קבועים, המשמעות היא **שההחזר ה-13 יהיה צפוי אלמלא השינוי הוא 3,923**.

#### פתרונות סעיף ב - החזר 13 לאחר שינוי תנאים

כל שינוי תנאים דורש חישוב יתרת הלוואה טרם השינוי.

בשאלה נאמר: **בחלוף שנה (12 תשלומים חדשים)**, הצע הבנק ללקוח לשנות את אופן החזר ללוח סילוקין רגיל, ולקוח הסכימים.

יתרת הלוואה (שתהווה את הבסיס לפרישה מחדש) רגע לפני השינוי (זמן 12) היא הערך הנוכחי של יתרת החזרה - אלו שטרם בוצעו. לעיתים אני אוהב לסמן זאת כך:

$$BAL_t = pmt * pva(r, n - t)$$

כאשר:

הערך  $BAL_t$  מסמל את יתרת הלוואה השפייצר לאחר התשלום שמספרו הסידורי  $t$ .

הערך  $t$  מייצג את התשלום התקופתי הקבוע.

הערך  $z$  מייצג את הריבית התקופתית (لتקופת תשלום).

הערך  $n$  מייצג את מספר התשלומים הכלול בהלוואה.

הערך  $r$  מייצג את מספרו הסידורי של התשלום הספציפי שעליו שואלים.

בופן ספציפי: הלוואה כאמור כוללת 36 תשלום בסך הכל, בריבית חודשית 2%, סכום כל תשלום 3,923 ש"ח, ולכן יתרת הלוואה לאחר 12 תשלום:

$$BAL_{12} = 3,923 * pva(2\%, 36 - 12) = 3,923 * pva(2\%, 24) = 3,923 * 18.914 \approx \textcolor{yellow}{74,200}$$

מפה והלאה – הסכום הנ"ל עבר השינוי (יתרה של 74,200 ש"ח) תפרס על שארית חיי הלוואה לפי התנאים החדש: לפי לוח סילוקין רגיל, ל-24 תשלום חדשים שנותרו ובריבית חודשית של 2%. אנחנו מחפשים את התשלום ה-13, שהוא למעשה מעשה התשלום ה-1 לאחר שינוי התנאים.

#### כל תשלום בלוח סילוקין רגיל כולל שני חלקים:

א. התשלום קבוע על חשבון הקrho.

ב. תשלום הריבית – שנשען על יתרת הקrho לתקופה הקודמת מוכפלת בשיעור הריבית.

בלוח רגיל ידוע שהתשלום התקופתי ע"ח הקון הוא היחס בין סכום ההלוואה ("החדש", שהוא היתרה ערבית שינויי התנאים) לבין מספר התשלומים (שנותר, ערבית שינויי התנאים):

$$PRN = \frac{LOAN}{t}$$

נציב ונקבל את התשלום על חשבונו הקון, PRN, בלוח רגיל בתשלום ה-13, לאחר השינוי:

$$PRN_{13} = \frac{74,200}{24} \approx 3,092$$

כדי לחשב את הריבית בזמן 13, علينا לכפול את יתרת הקון לזמן 12 (היתרה לתקופה קודמת) בשיעור הריבית:

$$INT_{13} = BAL_{12} * r$$

נציב ונקבל:

$$INT_{13} = 74,200 * 2\% = 1,484$$

כך שהתשלום הכלול ה-13 בהינתן שינויי התנאים:

$$PMT_{13} = PRN + INT_{13} = 3,092 + 1,484 = 4,576$$

הציגת תמציתית של סעיפים א-ב בטבלה:

BAL	INT	PRN	PMT	לוח שפיצר סעיף א
יתרה	ע"ח ריבית	ע"ח קון	סכום התשלומים	זמן
100,000				0
			3,923	1
			3,923	2
			3,923	.
			3,923	.
			3,923	12
			3,923	13

BAL	INT	PRN	PMT	לוח רגיל סעיף ב אחרי זמן 12
יתרה	ע"ח ריבית	ע"ח קון	סכום התשלומים	זמן
100,000				0
			3,923	1
			3,923	2
			3,923	.
			3,923	.

74,200			3,923	12 ערך השינוי
	$74,200 * 2\% = 1,484$	$\frac{74,200}{24} = 3,092$	$1,484 + 3,092 = 4,576$	13 לאחר השינוי

דרך הציגה מבוססת הטבלה איננה חיונית, אך לעיתים מסויימת לסטודנטים שרצוים לראות את התהליך הדרמטי כאשר כל רכיב מופיע בסמוך לשני ובאותה שורה. התוצאה: 4,576. הערך של היתרה בצהוב – חושב לעיל.

**פתרונות סעיף ג – חישוב התשלום ה-19 לאחר שינוי התנאים**

התשלום ה-1 לאחר שינוי התנאים הוא התשלום של זמן 13.

התשלום ה-2 לאחר שינוי התנאים הוא התשלום של זמן 14.

אם אמשיך בלוגיקה זו...

התשלום ה-19 הוא התשלום ה-7 לאחר שינוי התנאים (השינוי החל בזמן 12).

הואיל ומחזיננו בזמן 12 ההלואה "נוצרה מחדש" לתקופה של 24 חודשים, מה שאנו רוצחים זה בעצם "לחשב את התשלום הכללי בהלוואה בסך 74,200, בלוח רגיל-24 תשלום, בריבית חודשית של 2%". התשלום הכללי בלוח רגיל מורכב מהתשלום הקבוע ע"ח הקرون, יחד עם התשלום התקופתי על חשבון ריבית:

א. תשלום קבוע (בלוח רגיל) בגין קרן:

$$PRN_{13} = PRN_{14} = PRN_{15} = \dots = PRN_{19} = \frac{74,200}{24} \approx 3,092$$

ב. תשלום הריבית של זמן 19 (שהוא הריבית המוכפלת ביתרה לזמן 18, לתקופה קודמת):

$$INT_{19} = BAL_{18} * r = (74,200 - 3,092 * 6) * 2\% = 1,113$$

רגע שי, מה עשית פה? לחתמי את יתרת הלוואה לזמן 12, ערב שינוי התנאים שהוא בסך 74,200, וממנה הפחתתית את 6 תשלוםיה הקבועים בלוח החדש, בסך 3,092 ש"ח כל אחד, בגין התשלומים שבוצעו בתום כל אחד מה חודשים 13-18 כולל. כך מגעים ליתרת הלוואה העדכנית לזמן 18, שהיא בהגדרה הבסיס לחישוב תשלום הריבית בזמן 19.

$$PMT_{19} = PRN_{19} + INT_{19} = 3,092 + 1,113 = 4,205$$

התשובה הסופית: 4,205 ש"ח.

**סיכום למה שלמדנו בשאלת 39:** כאשר אני מזזה שאלה שבה קיים לוח שפיצר שבמבחן מבוצע שינוי תנאי ללוח רגיל, אפעל כדלקמן:

- אחשב את התשלום התקופתי הקבוע בשפייר (PMT של שפייר). 😊
- אחשב את יתרת ההלוואה ערבית (רגע לפני) שינוי התנאים, זאת בתור הערך הנוכחי של תשלום השפייר
- "שטרם בוצעו" (סך התשלומים בኒוקי התשלומים שבוצעו עד שינוי התנאים). 😊
- אתייחס יתרת ההלוואה כל "הלוואה חדשה". 😊
- אפרוס אותה וACHINE את תשלוםיה מאותה נקודה ואילך בהתאם לגישת הלוח הרגיל (תשלומי קרו<sup>ב</sup>רים, ריבית לפי מכפלת שיעור הריבית ביתרת הקרון של התקופה קודמת). 😊

#### שאלה 40 - שווי הלואה מסובסדת

קיבלתם הלואה לעידוד עסקים בסכום של 500,000 ש"ח לתקופה של 10 שנים. הלואה נושא ריבית שנתית בשיעור 3% ("מסובסדת") והיא מוחזרת בתשלומים שנתיים שווים (לוח שפייר). ידוע שהריבית האלטרנטיבית שבה יכולתם ליטול אשראי מהבנק היא 8% ("ריבית בנקאית"). בנסיבות אלו, מהו שווי ההטבה?



פתרון :

בثور התחלה – מעוניין לשאול את עצמו – מה בדיקות יכול להיות כל כך "הטבה" בהלוואה שבסוף משלמים את כל הקרון שלו וגם ריבית? התשובה היא – הכל תלוי באלטרנטיבת.

במקרה זה סיפרו לנו על סיטואציה מוגדרת היטב, שבה אנו זכאים ליטול הלואה בשיעור 3%, במקומות בשיעור 8%. כמובן שההוזלה בשיעור הריבית יוצרת ערך לחברת (לגורם הלואה).

והשאלה, איך מחשבים ערך זה.

כאשר רוצים לחשב את השווי הכספי של הלואה מסובסדת / מזולת / בשיעור ריבית נמוך, נפעל בשלבים הבאים :

שלב 1 : אתייחס להלוואה עצמה כפי שניתנה לי – כולם לקרון ולריבית בפועל.

שלב 2 : נחשב ערך נוכחי PV לשלומי עסקת ההלוואה בפועל, כאשר הריבית שתשרת אותנו בחישובי PV יהיה הריבית האלטרנטיבית.

שלב 1, כמו תמיד בשפייר, נביט על נתוני ההלוואה בפועל, ונחשב את התשלום התקופתי הקבוע בגין ההלוואה (ה - PMT) לפי הריבית עלייה בפועל. כאן אמרו שאנו זכאי ליטול הלואה בסך 500,000 ש"ח שתפרע ב-10 תשלומים שנתיים שווים, כאשר הריבית השנתית היא 3%. لكن התשלום התקופתי בפועל לפי הנוסחה יהיה :

$$PMT = \frac{LOAN}{pvfa(r, n)} = \frac{500,000}{pvfa(3\%, 10)} = \frac{500,000}{8.5302} \approx 58,615$$

שלב 2 : הטבה / ערך נטו שගולם בכל סדר הוא כזה שambilא בחשבונו את הערך הנוכחי נטו (NPV) של ההסדר. במסגרת ההלוואה, אנו כלואים מקבלים היום (זמן 0, ערך הנוכחי) סכום של 500,000 ש"ח. כמו כן, אנו מתחייבים לשלם כל שנה במשך 10 שנים סכום של 58,615 ש"ח (ראו לעיל). כמובן שאת התשלומים השנתיים צריך להוון (PV) – ההיוון יבוצע בריבית האלטרנטיבית (הריבית שהייתי צריך לשאת בה אם הייתה נוטל את ההלוואה מהבנק).

$$NPV = +500,000 - 58,615 * PVFA(8\%, 10) = 500,000 - 58,615 * 6.71 \approx 106,693$$

הסימון NPV הוא קיצור של Net Present Value, או במלים אחרות - ערך הנוכחי "נקי" או "כולל" של כל התזרים, משומש שבעצם עליינו להתייחס גם לתזרים החיובי של ההלוואה עצמה, וגם לערך הנוכחי של התזרים השיליליים, כדי לקבל את השווי נטו. למעשה, ממעבר להצהרה הכללית לפיה שווי הטענה הוא 106,693, אנו טוענים שערך זה מבטא את העובדה שהחזר התקופתי בסך 58,615 כבר מגלם את הריבית בפועל 3%, אך המכפלה ב - PVFA הרלוונטי ל-8% עוזר להבין כמה ריבית "חוסכים". הואיל וחוסכים ריבית גבוהה מזו שמשלמים, הערך הכלול חיובי.

הרחבה בדבר המשמעות הכלכלית של ריבית להיוון על מנת לקבוע את השווי הכלול של הטענה המגולמת בפרויקט - נציג במסגרת הדיוון ביחידה 6 בהמשך הדרץ.

**תקציר מהיר לשווי הטענה מגולמת בהלוואה שפיצר שבה הריבית בפועל נמוכה מהריבית האלטרנטיבית:**

$$Value = PMT_{Actual} * PVFA(r_{alternative}, n)$$

מקרה – שווי הטענה מגולמת בהלוואה שפיצר בריבית מסובסדת :

שווי הטענה	Value
התשלום התקופתי בפועל (מתבסס על הריבית בפועל – <b>המסובסדת</b> )	$PMT_{Actual}$
הריבית האלטרנטיבית	$r_{alternative}$
מספר התשלומים בהסדר	$n$

### נוסחאות מפגש 3 - יישומי ערך נוכחי

חילוץ תשלום תקופתי קבוע: הלוואה הנפרעת בשיטת שפייצר, תשלוםית תום תקופה

$$LOAN = pmt * PVFA(r, t)$$

או בניסוח אחר:

$$pmt = \frac{LOAN}{pvfa(r, t)}$$

יתרת הלוואה שפייצר:

$$BAL_n = pmt * pvfa(r, t - n)$$

כאשר:

הערך  $BAL_n$  מסמל את יתרת הלוואה השפייצר לאחר התשלומים שמספרו הסידורי  $n$ .

הערך  $t$  מציין את התשלומים התקופתי הקבוע.

הערך  $r$  מציין את הריבית התקופתית (لتקופת תשלום).

הערך  $n$  מציין את מספר התשלומים הכלל בהלוואה.

הערך  $pmt$  מציין את מספר התשלומים השנתי שעליו שואלים.

שאלה 44 - **יישומי ערך נוכחי - סדרה עם ערכים שבועיים - מתחכם ממש... [פינה... לדעתי 😊]**

ד"ר צבאן קונה כבלי טעינה לאייפון מלאי אקספרס לעתים קרובות.

המחיר הרגיל לקבל הוא 10 ש"ח, ובדרך כלל שי מאבד 4 כבלי טעינה כל שבוע (ולכן קונה 4 כבלי טעינה חדשים כל שבוע).

כמה כבילים כדאי לרכוש במצב שמתקיים באופן חד פעמי (עכשו, היום בלבד) ומאפשר לו לרכוש כבילים במחיר של 6 ש"ח בלבד, אם הריבית השבועית של שי היא 2%?

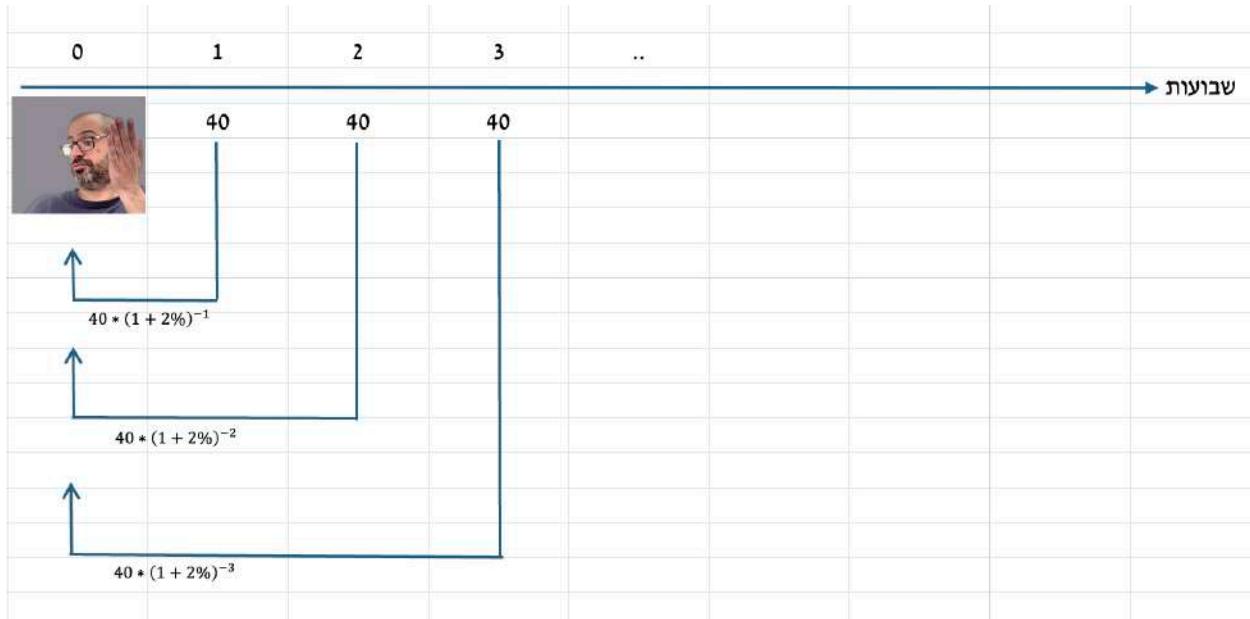
פתרון :

השאלה הכי קשה בפער בפגש זהה. היא נשענת על הרצינול ששקוניםicut, הערך הנוכחי שהוא העלות הכלכלית של כל יחידה נרכשת הוא קבוע בסך 6 ש"ח, ואילו השקונים בעתיד, הערך של כל יחידה נרכשת הוא בהתאם לעיתוי רכישתה, שהולך ופוחת (כי ככל שהתשלומים רחוק יותר, ערכו הנוכחי נמוך יותר). כך נוצרת משווהה שמנסה לבדוק מתי הרכישה בעתיד הופכת להיות משתלמת יותר מהרכישה היום, שמתוכה נחלץ את נעלם הזמן, שכאשר יוכפל ב-4, יוביל למספר היחידות שנרכוש היום. נשמע סופר מורכב ולא ברור, אז ננסה להמchioש لكم קודם התהלהיך איטרטיבית באקסל, ואז נובר להדגמה על בסיס נוסחה מתמטית.

אני בונה נוסחה מתמטית בעלת שני אגפים :

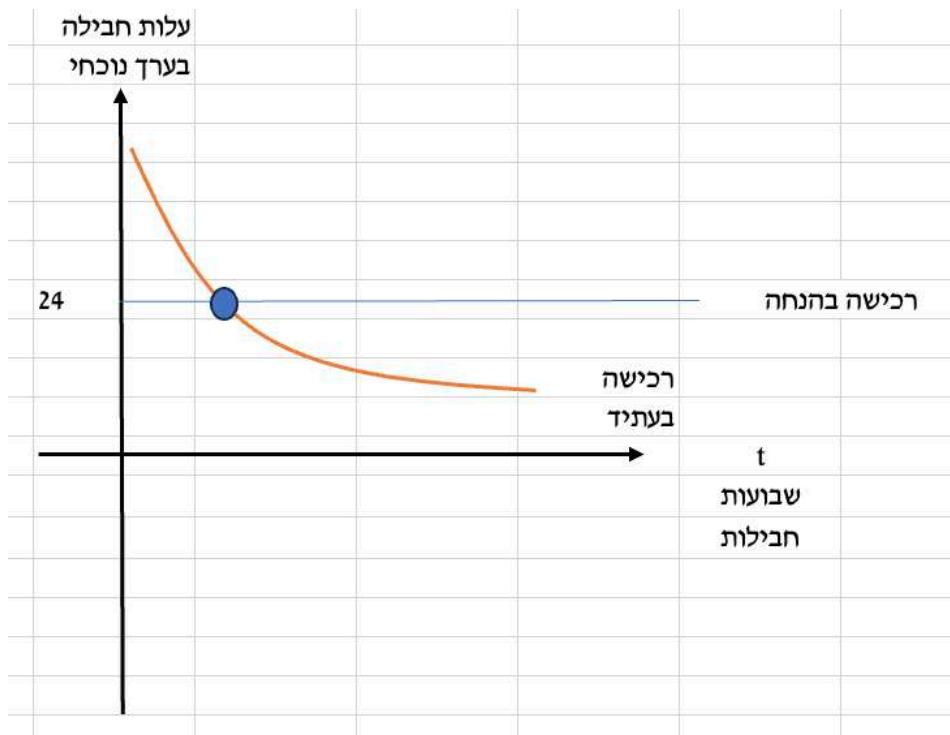
אגף שמאלו הוא הביטוי המיצג את הערך הנוכחי של רכישה בעתיד. רכישה בעתיד של חבילה כבילים (לא הנחה) היא עלות של 10 ש"ח לקבל \* 4 כבילים = 40 ש"ח. את העלות העתידית זו יש להוון (לחשב לה ערך נוכחי) בריבית של 2% בחזקה שלילית של מספר התקופות. כמה תקופות? לא יודע! זה הנעלם.

אגף ימי הוא הביטוי המיצג את הערך הנוכחי של רכישה של חבילה כבילים בזומן (במבחן) עולה לנו 6 ש"ח לקבל \* 4 כבילים = 24 ש"ח. עלות זו היא כבר במונחי ערך נוכחי, וזאת - הוואיל ומשולמת מיד. הסיבה לכך היא: שבקניה בעוד מספר רב של שבועות, החישוב של הערך הנוכחי יוביל לכך שגם ללא ההנחה, ערך התשלומים היום של הקניה בעתיד יהיה זול יותר בנקודת מסויימת.



למעשה: מטרתנו לחשב את נקודת החיתוך בגרף המצורף מטה, אם אני קונה היום בהנחה – על פי הנתון מדובר בכבלים שאני משלם עליהם היום 6 שקלים לכבל (ולכן לחבילה הכוללת 4 כבלים העלות 24). כדי לקנות במחair המבצע, חייבים לשלם היום. ולכן, הערות במנוחי ערך נוכחי של חבילת כבלים במבצע גם החבילה הראשונה, גם השניה... היא 24. לעומת זאת אם אני לא קונה היום אלא בעתיד, הערך הנוכחי של הערות של כל חבילה הולך ופוחת כפי שראינו בעומת זאת.

בתרשים מעלה.



משוואת הפתרון בעצם אומרת: "נעוצר" ונפסיק לקנות במצע, כאשר הערך הנוכחי של רכישה בעתיד (אגף שמאל) משתווה לעלות היום של רכישה במצע:

$$40 * (1 + 2\%)^{-t} = 24$$

בפיתוח נקבל:

$$(1 + 2\%)^{-t} = \frac{24}{40}$$

$$(1 + 2\%)^{-t} = 0.6$$

כדי לחץ מעריך שהוא נעלם, יש להיעזר בחוקי לוגריתמים ולהוציאו מ- ln לשני האגפים:

$$\ln(1 + 2\%)^{-t} = \ln 0.6$$

בצורה כזו, מעריך החזקה "קופץ" קדימה (המינוס t) לפני ה- ln :

$$-t * \ln(1 + 2\%) = \ln 0.6$$

אחלק את שני האגפים ב-2.02 :

$$-t = \frac{\ln 0.6}{\ln 1.02}$$

וכך מקבלים

$$-t = -25.796 \rightarrow t \approx 25.8$$

ולכן כדאי לקנות 25 חכילות של כבילים. החכילה ה-26 כבר תעלה פחות מ- 24 ש"ח במונחי ערך הנוכחי. שימוש לבכל חכילה כוללת 4 כבילים ולכן שי יקנה מיד 100 כבילים וישלם עליהם 600 ש"ח (לפי מחיר בהנחה של 6 ש"ח לכביל).

**שאלה 45 - ערך נוכחי עם השתנות ריבית תקופה**

מהו הערך הנוכחי של 2,000 ש"ח שיתקבלו בתום כל חדש לצמיתות (לנצח) אם ידוע שהריבית החודשית בכל חדש אי-זוגי היא 3% ואילו הריבית החודשית בכל חדש זוגי היא 4%?

**פתרון :**

ראשית, יש לחשב ריבית לחודשיים (משום שהתייחסות לסדרה כבעלת ערכים חדשניים - לא אפשר שימוש בנוסחה סדרתית, לאור שינויי הריבית).

לעומת זאת, הריבית לחודשיים היא קבועה (בכל חודשים שנאוז בהם, הריבית הכוללת בהם היא ציורף הריביות לעיל).

שנית, יש לפצל את סדרות התזרימיים כך שיגלמו ערכיהם דו חדשניים בהתאם (ערכים תזרימיים במרוחקים של אחת לחודשיים).

**נקבל 2 סדרות :**

סדרה 1 תשלוםים בחודשים אי-זוגיים, כל חדשניים : כוללת תזרימיים בזמן 1, 3, 5, 7 עד אינסוף.

סדרה 2 תשלוםים בחודשים זוגיים, כל חדשניים : כוללת תזרימיים בזמן 2, 4, 6, 8 עד אינסוף.

הריבית לחודשיים סמכיים / צמודים תהיה (שיםו לב, הערך של 1- נדרש הואיל והמטרה היא לשקף ריבית בלבד, ולא ערך עתידי כולל), בהנחה ברירת מחדל של ריבית דרייבית :

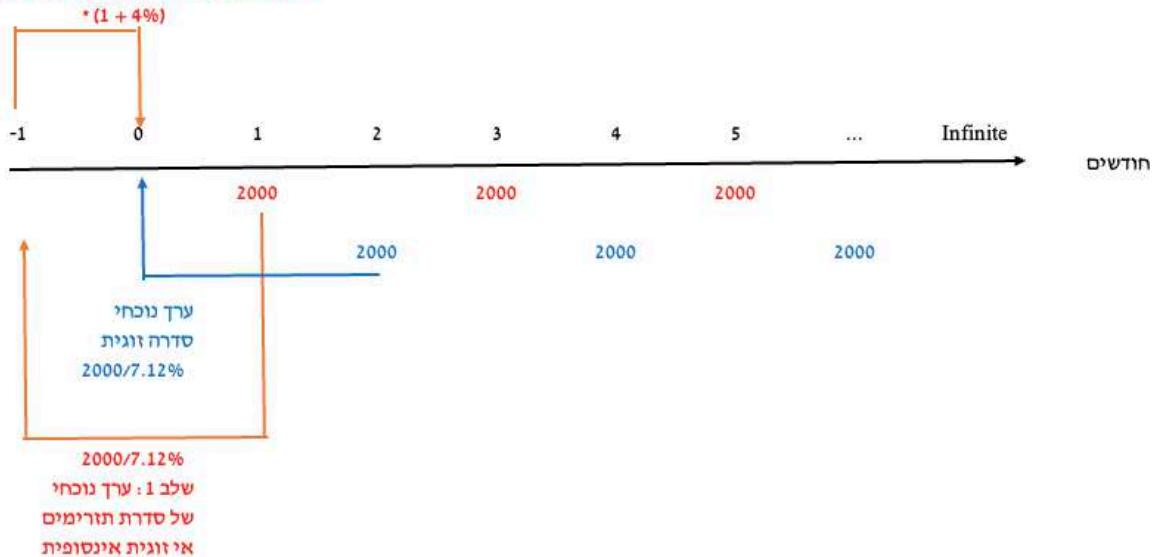
$$(1 + 3\%) * (1 + 4\%) - 1 = 7.12\%$$

כאשר מחשבים ערך נוכחי לסדרה בזמן 2, 4, 6 וכן הלאה, החישוב פשוט. משום שאוטומטית מתואימים בזמן 0, וסיימנו.

כאשר מחשבים ערך נוכחי לסדרה בזמן 1, 3, 5 וכן הלאה, לצערנו הקפיצה האוטומטית תקופת תשלום אחת לאחריה ביחס לתזרים הראשון מובילה בזמן 1-. לכן יש לתאמם את התוצאה מזמן 1- לזמן 0, וזאת על ידי המכפלה בריבית שחלה מזמן 1- לזמן 0 שהיא הריבית בחודש ה-12 של השנה הקודמת (חודש זוגי) ולכון 4%.

**בתרשים :**

שלב 2: התאמת הסדרה האיזוגית לזמן 0



הערך הנוכחי של הסדרה ש כוללת 2,000 בתום כל חודשים בזמנים 2, 4, 6 וכו', לנצח (הכחולה), הינו (ערך הנוכחי של סדרה אינסופית מחושב לפי סכום תקופתי מוחלט בריבית תקופתית) :

$$PV_{Zugit} = \frac{2,000}{r_{\text{חודשיים}}}$$

על פי נתונים השאלה, בכל שני חודשים עוקבים, הריביות חן 3% לאחד מה חודשים, ו-4% לחודש נוסף. הריבית הכוללת לחודשיים אם כך, בהתייחס לעקרון "ריבית דרייבית" :

$$r_{\text{חודשיים}} = (1 + 3\%) * (1 + 4\%) - 1 = 7.12\%$$

נחזיר לנוסחתה  $PV$  של הסדרה הזוגית :

באופן כללי, ערך הנוכחי של סדרה אינסופית מתכנס לביטוי

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

במקרה זה :

$$PV_{Zugit} = \frac{2,000}{7.12\%} \approx 28,090$$

הוائل והסדרה הזוגית הכחולה הchallenge בזמן 2, והוائل ותדירות איבריה כל חודשים, הרי שיחסוב הערך הנוכחי הסדרתי מוביל "חודשיים אחריה" (תקופת תשלום אחת אחרת) קרי לזמן 0, ואין צורך בהתאמת נוספת כדי לבטא הערך הנוכחי של הסדרה הכחולה.

נמשיך בביטוי הערך הנוכחי של הסדרה ש כוללת 2,000 בתום כל חודשים, אך בזמנים אי זוגיים, 1, 3, 5 וכו' :

$$PV_{E-Zugit} = \frac{2,000}{7.12\%} * (1 + 4\%) = 29,213$$

הסביר: גם כאן, ערך הנוכחי של סדרה שתידירות איבריה כל חודשים, מוביל חודשים חדשים לפני התזוזים הראשונים קרי חדשים לפני זמן 1, כלומר זמן -1. כעת יש לתקן מ-1- ל-0. נשאלת השאלה: באיזו ריבית? אנו יודעים שהריבית לחודשים אי זוגיים (מ-0 ל-1) היא 3%. זה אומר שהריבית לחודש הקרוב" (מ-1- ל-0) היא ריבית לחודש זוגי, קרי 4%, ובאמצעותה נבעת את ההסתמלה מ-1- ל-0 כאמור.

$$TOTAL PV = 28,090 + 29,213 = 57,303$$

## מבוא קצר - חישובי ריבית אפקטיבית

"מה נזכרת עכשוו  
בריביות, תשע בלילה"



ריבית אפקטיבית = ריבית כוללת / "אמיתית" בעסקה. היא כוללת תהליכי חישובים ונוסחאות שיביאו בחשבון בכורה נכונה את כל ההשפעות הנלוות לעסקה על הריבית המשולמת / המתבלט ביחס לקרן הראשונית.

ככל - ריבית אפקטיבית צריכה לבטא השפעות של הריבית הנטו (לעתים נקראת ריבית נקובה), תזרות חישוב הריבית (ריבית דריבית) וגם ריביות מראש. מעבר לזה, ריבית אפקטיבית צריכה לגמל ולהתיחס גם לעמלות, דמי פירעון, מענקים כספיים ו"אותיות קטנות".

מטרתנו בדיאון ריבית אפקטיבית היא להיות מסוגלים לנתח ולבודד את נתוני השאלה בהיבט ריביות, ולהתיחס לנוסחאות / תחשייב נכון שיביא בחשבון את הדרך המתאימה לחישוב הריבית האפקטיבית על פי הנסיבות.

### שאלה 46 - יישום בסיסי של מהותה של ריבית אפקטיבית

נתלווה הלוואה בסכום של 800,000 ש"ח. במועד העמדת הלוואה שילמה שילמת ערך מסוימים בשיעור של 10% מסכום הלוואה. הלוואה תפרע בחלוフ שנה אחת (קרן וריבית כבורה) כאשר ידוע שהריבית **האפקטיבית** בגין הלוואה היא ריבית שנתית של 28%.

בנתונים אלו, מהו סכום הריבית שתצטרכו לשלם בסוף השנה ביחס לקרן הלוואה המשפטית / הראשונית?

פתרון :

**מבוא למשמעות של ריבית אפקטיבית:** כפי שנדגים גם בשאלות המשך - ריבית אפקטיבית היא למעשה הכנוי לריבית **הכוללת** בעסקה. במלים אחרות, אם לוויתי 100 ש"ח לשנה, ריבית אפקטיבית של 20%, סימן שאני מחזיר בתום השנה 120 וזהת - גם אם הבנק טוען שמדובר בריבית של 15 ש"ח ועמלת פירעון של 5 ש"ח. לכן הריבית האפקטיבית היא חשובה מאד, משום שזו הריבית ה"כלכליות" שעל בסיסה נשפות כדאיות עסקיות. כאשר אני מזוהה עסקה שסכומיה הכספיים נתונים, במצב שבו אני יכול לחשב מהו סכום הנטו שקיבלתி (או שילמתי) בזמן אפס, והעסקה נפרעת בתשלום אחד הרי שאם נתונה הריבית האפקטיבית תמיד יתקיים :

$$PV * (1 + r_{ef}) = FV$$

במלים : הסכום נתן שקיבלו בהווה (בהלוואה) כפול 1 ועוד הריבית האפקטיבית, שווה לסכום טוטאל שנשלם בסוף התקופה.

שלב 1 : נציג על הציג בזמן 0 את סכום הלוואה המשפטית, 800,000, בኒוקי עמלת ערך מסוימים המהווה 10% מסכום זה - קרי 80,000. כך מקבלים תזרום נטו בזמן 0 של 720,000.

שלב 2 : הואיל ונתנו שהריבית האפקטיבית (הכוללת / הכלכליות) שתמיד מחושבת ביחס לקרן נטו הראשונית היא 28%, הרי שהמשמעות היא שבתום התקופה מחזירים 28% יותר מהתזרום נטו בזמן 0. או, במשוואה :

$$720,000 * (1 + 28\%) = 921,600$$

שלב 3 : התייחסות לנדרש. הנדרש ביקש ממוני לתאר מהו סכום הריבית שאינו משלם בתום התקופה מעלה קרן ההלוואה המשפטית הראשונית (מעל 800,000). במלים אחרות, נדרש לחשב את ההפרש שיחוו את התשובה הסופית:  $921,600 - 800,000 = 121,600$

נטילת הלוואה	0	פירעון הלוואה	1
			פרעון קרן ריבית משפטית
קרן ההלוואה משפטית תשלום עמלת ערך מסמכיים תזרים נטו לידי הלוואה - קרן ההלוואה כלכלית	800,000 -80,000 720,000	800,000 3 121,600 2 921,600	תשלום כולל

#### שאלה 47 - יישום מרכיב של ריבית אפקטיבית

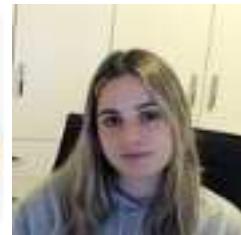
באפשרותכם להפקיד בפיקודון בנקאי לשנתיים באחד מבין המסלולים הבאים:

- ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% מחושבת כל חודש.
- ריבית שנתית נקובה בשיעור 14% מחושבת כל חצי שנה.
- ריבית אפקטיבית שנתית בשיעור 13%.

ד. ריבית שנתית נקובה בשיעור 10% מחושבת כל חצי שנה ובנוסף ריבית נקובה המנוכה מראש בשיעור שנתי של 4% המוחשבת 4 פעמים בשנה.

נדרש: מהי הריבית האפקטיבית לשנתיים בכל אחד מהמסלולים?

המלה מריבית נקובה נתונה לריבית נקובה לתקופת היישוב היא על ידי חלוקה פשוטה, כמו פריסת לחם המהה מתקופת היישוב לתקופה הכוללת – זה דיוון אחר לגמרי

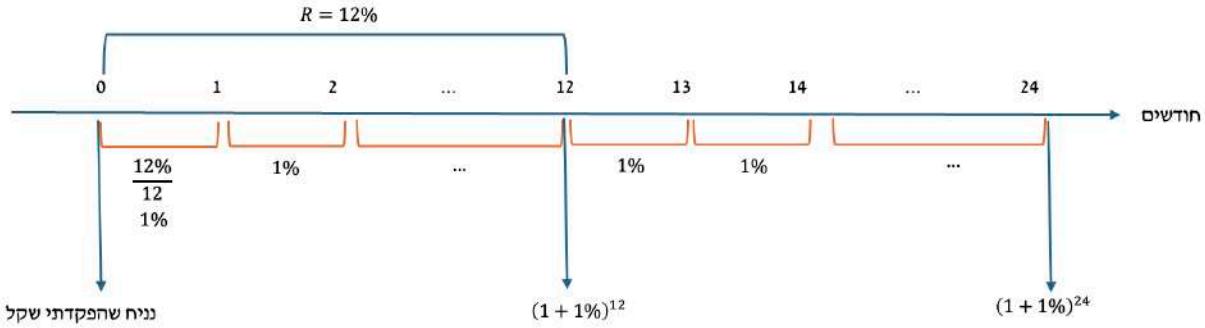


פתרונות:

זהו טיפוס שאלה שבו علينا לחשב א' ורק את הריבית האפקטיבית באחזois, וכל הנתונים הם באחזois. לכן, פחותות רלוונטי להציג ציר זמן עם עיתויי תזרימיים וכו' – אין פה תזרימיים.

**פתרונות סעיף א: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הריבית השנתית הנקובה 12% והיא מחושבת כל חודש**

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{24} - 1 \approx 26.973\%$$



$$\begin{aligned} \text{ריבית ב'כף':} \\ (1 + 1\%)^{24} &= 1.269734649 & \text{התקבלות התקופה} \\ &1 & \text{בinciי היסכום שהופקד} \\ &0.269734649 & \text{ריבית בכף על כל 1 ש"ח} \end{aligned}$$

ריבית אפקטיבית באחוזים:  $26.97346\%$

$$\begin{aligned} r_e &= \frac{(1 + 1\%)^{24} - 1}{1} & \text{במושואה מתמטית ישירה:} \\ r_e &= (1 + 1\%)^{24} - 1 = 26.97346\% & \text{המשמעות המקורית:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_e &= \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 & \text{הנוסחה המלאה:} \\ r_e &= \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{24} - 1 = 26.7346\% \end{aligned}$$

از בעצם, **כאשר מזינים ריבית נקייה שנתית ש"מ**וחושבת כל **זמן או משולמת כל זמן** המרה לRibit Aפקטיבית המגלמת את העיקרון של Ribit Drivit תבוצע לפי הנוסחה:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $r_{ef}$  מייצג את Ribit Aפקטיבית [ה"אמיתית" / "הכוללת" המתחשבת בכל השפעות]

הערך  $R$  מייצג את Ribit נקייה [Ribit בחזזה שלא מגלה השפעות נוספות, במקרים רבים - לא אפקטיבית]

הערך  $n$  הוא התשובה לשאלת: **"כמה תקופות חישוב Ribit נכללות בתקופה הנקייה הנטוונה"**

כאן: Ribit נקייה השנתית קרי  $R$  היא 12%. היא מחושבת כל חודש. החלוקה תבוצע בהתאם לתשובה לשאלת: כמה חודשים נכללים בשנה. התשובה 12.

הערך  $m$  הוא התשובה לשאלת: **"כמה תקופות חישוב Ribit נכללות בתקופה הנדרשת"**.

התקופה הנדרשת היא התקופה שאנו רוצים להגיע אליה / התקופה שעלייה שאל. כאן, שאל על שנתיים, תקופת חישוב היא חודש. וכמה חודשים (תקופות חישוב) נכנסים בשנתיים? התשובה 24.

**פתרונות סעיף ב: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הנזונה השנתית 14% מוחשבת כל חצי שנה**

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{14\%}{2}\right)^4 - 1 \approx 31.08\%$$

ערך ה-R : הריבית הנזונה, 14% לשנה.

ערך ה-n : כמה תקופות חישוב ריבית [חצי שנה] נכללות בתקופה הנזונה [שנה]. לכן : 2.

ערך ה-m : כמה תקופות חישוב ריבית [חצי שנה] נכללות בתקופה הנדרשת [שנתיים]. לכן : 4.

**סיכום ביןים :** אז למעשה, בשני המקרים בסעיפים א ו-ב, הריבית הנזונה היא סוג של ריבית "חויזית" המופיעה בהסדר, אבל היא לא באמת הריבית ה"אפקטיבית" / ה"כלכלית" שמשקפת את הסכום האמתי שנשולם. כדי לחשב את הסכום הכלול שנשלם, צריך להתחשב בהשפעות נוספות, ובפרט - בהשפעת הריבית דרייבית. הנוסחה שהצנו לעיל (המרה מנזונה לאפקטיבית, במצב ריבית דרייבית) יודעת לגלם את ההשפעות הנוספות של ריבית דרייבית, כדי להגיע לריבית השלמה, המלאה, הנזונה - ריבית אפקטיבית.



**פתרונות סעיף ג: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הריבית האפקטיבית הנתונה היא 13% לשנה**  
כאשר הנתון בשאלת הוא בדבר ריבית אפקטיבית (ואגב, זו ברירת מחדל, אם לא אמרו שהריבית נקובה / פשוטה), אז אין צורך לחלק או לכפול את הריבית, אלא רק למתאם את תקופתיה עם מערך חזקה מותאים :

$$r_{ef} = (1 + r)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $r$  הוא הריבית האפקטיבית לתקופה הנדרשת (כאן - לשנתיים).

הערך  $m$  הוא הריבית האפקטיבית הנתונה (כאן - ריבית אפקטיבית שנתיות).

הערך  $z$  הוא התשובה לשאלת : כמה תקופות ריבית  $z$  נכללות בתקופה הנדרשת.

והתשובה :

$$r_{ef} = (1 + 13\%)^2 - 1 = 27.69\%$$

הערה :

כל המבואר לעיל הוא בהיבט הטכני של אופן חישוב הריבית כתלות בסוג ה- *surto* (אם הריבית הנתונה היא נקובה או אפקטיבית) ולפניהם התייחסות להחלטה המתקבלה.

**פתרונות סעיף ד:**



חשב ריבית אפקטיבית לשנתיים אם נתון שהריבית השנתית הנקובה בשיעור 10% מוחושבת כל חצי שנה  
ובנוסף ריבית נקובה (שנתית) המנוכה מראש בשיעור שנתי של 4% המוחושבת 4 פעמים בשנה.

$$r_{ef}(2 \text{ years}) = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^4}{\left(1 - \frac{4\%}{4}\right)^8} - 1 \approx 31.73\%$$

מידול לנוסחה - חישוב ריבית אפקטיבית (כוללת) עבור מקרה שבו ישנה ריבית נקובה המוחושבת מספר פעמים (ריבית דרייבית) וכן ריבית מראש :

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

הערך  $r_{ef}$  מייצג את הריבית האפקטיבית

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקובה

הערך  $a$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנකובה הנזונה"

הערך  $b$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת".

הערך  $R_d$  מייצג את שיעור הריבית המנוכה מראש

הערך  $d$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנකובה של ריבית מראש"

הערך  $m$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית מראש נכללות בתקופה הכוללת הנדרשת"

#### 47.1 – המרות ריבית למועד ריבית אפקטיבית בזמנים שונים – תרגול נוסך לכיתה

אלכסיי מעוניין להפקיד לפקדון לתקופה של 3 שנים.

מציעים לו לבצע את ההפקודה לאחד מ בין 3 מסלולים :

מסלול א : ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל חודש.

מסלול ב : ריבית רבונונית בשיעור 4%.

מסלול ג : ריבית שנתית נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל רבעון, ובנוסף ריבית שנתית נקובה המוחשבת

ומשולמת מראש בשיעור 4% לשנה, בtdirot חישוב חצי שנתית.

מהי הריבית האפקטיבית ל-3 שנים בכל מסלול?

פתרון שמחיש את כל העבודה המתאימים בחישוב ריבית אפקטיבית ל-3 שנים :

$$r_e(a) = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{36} - 1$$

$$r_e(b) = (1 + 4\%)^{12} - 1$$

$$r_e(g) = \frac{\left(1 + \frac{6\%}{4}\right)^{12}}{\left(1 - \frac{4\%}{2}\right)^6} - 1$$

#### שאלה 48 - יישומי ריבית אפקטיבית

اري החמוד פנה לשי בקשה לקבלת הלוואה בהיקף של 500,000 ש"ח. שי הציג בפני ארי את האפשרויות הבאות:

מסלול 1: מסלול הדורש תשלום של עמלת הקצת אשראי (ריבית מראש) בשיעור של 3% לחצי שנה, ובנוסף גובה גם ריבית נקובה בשיעור 16% לשנה, המשולמת בסוף כל חצי שנה.

מסלול 2: תשלום ריבית נקובה שנתיות בשיעור של 24%, המוחשבת מדי חדש.

נדרש: חשבו את הריבית האפקטיבית<sup>8</sup> בכל אלטרנטיבה ובהתאם, קבעו מהי החלופה שאותה יעדיף ארי.

פתרון:

נתחיל דזוקא מסלול 2, לאור העובדה שהוא פשוט יחסית ועקבו מכך עס רוב הדיוון בשאלת הקודמת. כאשר אני מזהה ריבית נקובה בשיעור כך וכך המוחשבת "כל \_\_\_\_\_ או "מדי \_\_\_\_\_" איזו הנוסחה לחישוב הריבית האפקטיבית. נשים לב שכאנו לא צינו לאיזה פרק זמן הלוואה. כבירות מחדל, הריבית שתוחשב היא שנתיות.

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^{12} - 1 = 26.824\%$$

נעבור למסלול 1: במסלול זה, בדומה למסלול ד בשאלת הקודמת, ישנו שילוב בין ריבית מראש (או תשלום מראש) לבין "ריבית דרייבית" - "ריבית נקובה המוחשבת / משולמת כל \_\_\_\_". מסלול הדורש תשלום של עמלת הקצת אשראי (ריבית מראש) בשיעור של 3% לחצי שנה, ובנוסף גובה גם ריבית נקובה בשיעור 16% לשנה, המשולמת בסוף כל חצי שנה.

הנוסחה לחישוב ריבית אפקטיבית בהתקנים ריבית "רגילה" (המשולמת בתום תקופה -  $R$ ) וכן ריבית מראש / עמלת מראש (המנוכה בתחילת התקופה -  $R_d$ ) היא:

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

ובהצבה:

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{16\%}{2}\right)^2}{\left(1 - 3\%\right)^2} - 1 = 23.97\%$$

הסבר: במונה התייחסנו לכך שהריבית המשולמת "בסוף" היא ריבית נקובה, והעובדה שהיא שנתיות ומחושבת כל חצי שנה, גורמת לנו לחלק אותה ב-2, ולאחר מכן להעלות בחזקת 2 כדי לבטא ריבית אפקטיבית שנתיות (כברירות מחדל).

<sup>8</sup> כלל: ריבית הן במנוחים שנתיים, אלא אם יש דרישת מפורשת אחרת. לפיכך, בשאלת זו שדרישה ריבית אפקטיבית - ההנחה היא שנדרשת ריבית אפקטיבית שנתיות. בדרך כלל, מרכז ההוראה נהגדה ומציינית לאיזו תקופה הריבית הנדרשת.

במקרה התייחסנו לכך שהריבית "מראש" נתונה כ-3% ולא ציינו שהיא נקובה, ולא אזכיר שהיא "מחושבת כל כך וכך". לכן, את הצעד הראשון של לחלק ריבית זו בערך כלשהו, לא מבצעים (בשונה מסעיף ד של השאלה הקודמת). ההתאמנה היחידה במערך של המקרה היא חזקה שתבטא את העובדה שהוואיל והריבית מראש היא 3% לחצי שנה, צריך חזקת 2 כדי להעביר חוזה לשנה.

**לענין קבלת החלטה (מה הבחירה שתועדף):**

כאשר יש לבחור בין חלופות הלואה, תועדף הבחירה שבה הריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר. כאן, מדובר במסלול 1 משום שהריבית האפקטיבית בגינו (23.97%) נמוכה מהריבית האפקטיבית במסלול 2 (26.824%).

כਮובן שבמידה והיה מדובר בחסכוון / פקדון (השקעה), היינו מעדיפים את המסלול בריבית הגבוהה יותר.

#### שאלה 49 - חילוץ ריבית אפקטיבית מסדרת תשלוםים

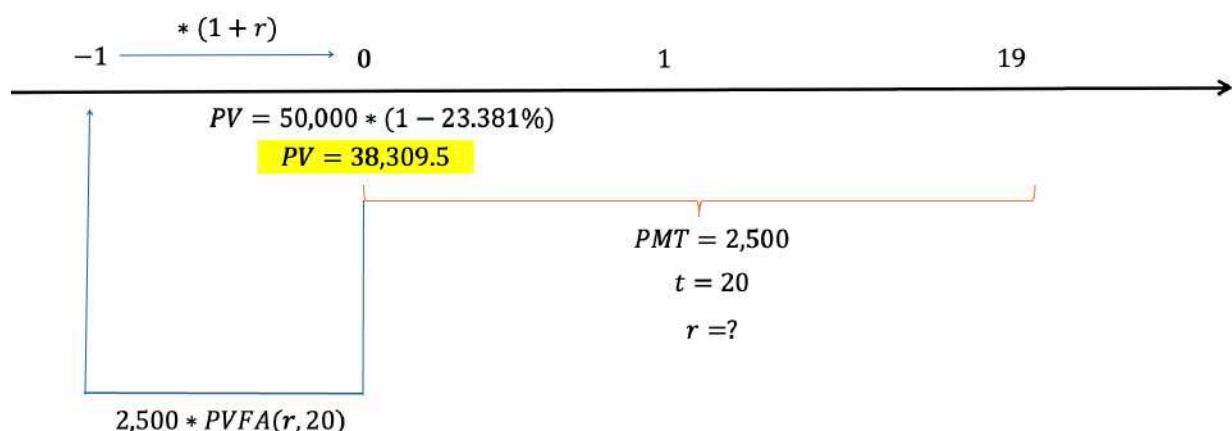
מכונה לחימום נקייקות ניתנת לרכישה בעלות של 50,000 ש"ח ב-20 תשלוםים חודשיים שווים בסך 2,500 ש"ח כל אחד, כאשר התשלום הראשון מבוצע היום. לחילופין, ניתן לקבל במסלול רכישת מכונית לחימום נקייק במזומן (מיידית) הנחתת מזומן בשיעור של 23.381%.

נדרש: מהי הריבית השנתית האפקטיבית הגלומה באלטרנטיבת האשראי?

**פתרון:**

שיםו לב בבקשתה בטור התחלת להבדל המהותי מאי שאלת (חילוץ ריבית המגולמת בהסדר תשלוםים, עם ערכים כספיים) זו לבין הקודמות לה (חילוצי ריבית על פי ערכים אוחזים).  
בשאלות הקודמות קיבלנו ריבית נקובה (עם נתונים נלוויים) בעסקאות "פשיות" (הנפרעות בתשלום אחד) והיינו צריכים לחשב בעצמנו (לפי נוסחאות מוגדרות) את הריבית האפקטיבית (הכוללת) בהתייחס לריבית דרייבית וריבית מראש.

לעומת זאת בשאלת זו אין שום אזכור של ריבית נתונים, ובנוסף - הנתונים בשאלת לא מוצגים כעסקה פשוטה (עם תזרים אחד בהתחלה ותזרים נוסף בסוף) אלא כסדרה.



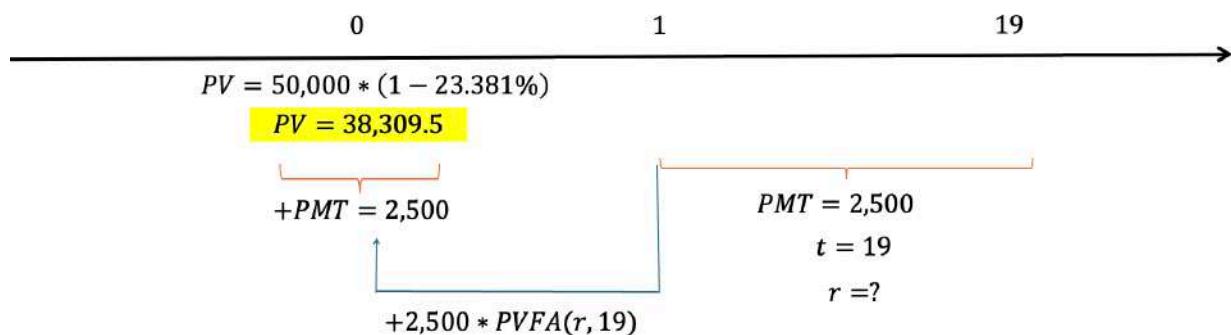
כדי לחוץ ריבית המגולמת בהסדר תשלומים אנו משתמש במשפט הטוען **שמחיר נכס במזומן/נתו** (אחרי הנחה ככל שיש) הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים בהסדר התשלומים המשולם בעדו. מחיר זה מחושב בתורו המחיר הכללי הנוכחי כפול אחת פחות שיעור הנחה:

$$PV_{CASH} = 50,000 * (1 - 23.381\%) = 38,310$$

כעת נבטא את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים שהוא בוגדר סדרה קבועה:

$$PV_{HESDER} = 2,500 * PVFA(r, 20) * (1 + r)$$

מה עשינו כאן? ישנה סדרה שמתחלת בזמן 0 (כ噫 התשלום הראשון היום). היינו סדרה מקפץ תמיד "אחד אחרה" ביחס לתזרים הראשון בסדרה. כמובן, הביטוי  $PVFA(r, 20) * 2,500$  מוביל בזמן 1-. כדי לתקן קדימה علينا לכפול ב-1 ועוד הריבית (כך חזרים מ-1 לזמן 0). אלא שלאור העובדה שהנעלם  $z$  מופיע במצב כזה בשני מקומות, גם ב-  $PVFA$  וגם בביטוי ההתאמה, זה קצר מbas. כדי להתגבר על זה, נפעל בדרך הבא:



$$PV_{HESDER} = 2,500 * PVFA(r, 19) + 2,500$$

הביטוי  $2,500 * PVFA(r, 19)$  מייצג את הערך הנוכחי של 19 התזרומים מזמן 1 עד זמן 19, שkopצת אוטומטית מזמן 1 לזמן 0 איזה כיף, ומה לגבי התזרים בזמן אפס? אוסף אותו בפרד.

וכעת נפתור:

$$PV_{CASH} = PV_{HESDER}$$

או בעצם:

$$38,310 = 2,500 * PVFA(r, 19) + 2,500$$

נעביר אגפים:

$$38,310 - 2,500 = 2,500 * PVFA(r, 19)$$

נחלק את שני האגפים ב-2,500 :

$$\frac{38,310 - 2,500}{2,500} = PVFA(r, 19)$$

או בעצם :

$$14.324 = PVFA(r, 19)$$

וכאשר נחפש בלוח א-4 בנספח א לערך  $D$  (לוח PVFA) עבור איזו ריבית  $r$  מתקיים שההינטן  $t=19$  הערך הוא 14.324 - נגלה שהדבר מתקיים עבור ריבית של 3%.

$$r = 3\%$$

אלא שריבית זו כיאה לסדרה היא ריבית לתקופה המיצגת את פרק הזמן בין תשלומים :(Clomer, זהה ריבית חודשית. כדי להמיר אותה למונחים שנתיים, כפי שדרשה השאלה, נתבسط על הנוסחה הבסיסית להמרת ריבית

- מעריך חזקה מתאים, ונקבל **תשובה סופית - ריבית אפקטיבית سنوية** :

$$r_{ANNUAL} = (1 + 3\%)^{12} - 1 = 42.576\%$$

אופנו החילוץ של הריבית (החודשית, לפני התאמת לשנה) מהלוח מובא לנוחותכם בצלום המופיע בעמוד הבא.

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%
1		0.990	0.980	0.971	0.962	0.952
2		1.970	1.942	1.913	1.886	1.859
3		2.941	2.884	2.829	2.775	2.723
4		3.902	3.808	3.717	3.630	3.546
5		4.853	4.713	4.580	4.452	4.329
6		5.795	5.601	5.417	5.242	5.076
7		6.728	6.472	6.230	6.002	5.786
8		7.652	7.325	7.020	6.733	6.463
9		8.566	8.162	7.786	7.435	7.108
10		9.471	8.983	8.530	8.111	7.722
11		10.368	9.787	9.253	8.760	8.306
12		11.255	10.575	9.954	9.385	8.863
13		12.134	11.348	10.635	9.986	9.394
14		13.004	12.106	11.296	10.563	9.899
15		13.865	12.849	11.938	11.118	10.380
16		14.718	13.578	12.561	11.652	10.838
17		15.562	14.292	13.166	12.166	11.274
18		16.398	14.992	13.754	12.659	11.690
19		17.226	15.678	14.324	13.134	12.085
20		18.046	16.331	14.877	13.590	12.462
21		18.857	17.011	15.415	14.029	12.821
22		19.660	17.658	15.937	14.451	13.163
23		20.456	18.292	16.444	14.857	13.489

## שאלה 50 - חילוץ ריבית אפקטיבית בעסקה משולבת

שייקה פיננסים בע"מ מציע למפקידים בתוכנית חסכו הלוואה בשיעור של 80% מסכום ההפקדה בחסכו. הלוואה ניתנת לתקופה זהה לתקופת החסכו, והיא נושא ריבית שנתית בשיעור 8% לשנה. החסכו נושא ריבית בשיעור 12% לשנה, וסכום ההפקדה בחסכו הוא 20,000 ש"ח. תקופת ההפקדה היא 8 שנים.

נדרש: מהו שיעור התשואה השנתי האפקטיבי בעסקה זו?

פתרון:

קודם כל בرمת המונחים: שיעור תשואה שנתי אפקטיבי = ריבית אפקטיבית. בטור התחלה, נבדוק: האם זו עסקה שנפרעת בתשלומים, ואז נctrיך לעבוד עם סדרות, או שמדובר בעסקה שבמסגרתה יש תשלום הום, תשלום בעתיד בנקודה אחת ויחידה וזהו? והתשובה היא שבמקרה זה ישנה הפקדה בנקודה בודדת, ופירעון בנקודה בודדת, והיחס בין התזרים נטו (תזרים בסוף, חלקי הערך המוחלט של התזרים ההתחלתי), פחוות אחת, ישקף את הריבית:

	0	8
הפקדה	-20,000	פרעון ההפקדה 49,519
קבלה הלוואה	16,000	פרעון הלוואה -29,615
סה"כ נטו	-4,000	סה"כ נטו 19,904

$$r_{ef}(8 \text{ Years}) = \frac{19,904}{4,000} - 1 = 397.6\%$$

הסברים נוספים:

בזמן 0: מפקידים (בסיימון שלילי) 20,000, ומיד מקבלים (בסיימון חיובי) הלוואה בשיעור 80% מסכום זה, קרי 16,000 ש"ח, כך שסכום התזרים נטו בזמן אפס הוא  $-4,000 = 20,000 + 16,000 -$

בזמן 8: פירעון ההפקדה מתחשב בסכום ההפקדה שהוא 20,000, בריבית על ההפקדה 12% לשנה ובמספר התקופות שהנו 8:  $20,000 * (1 + 12\%)^8 = 49,519$

בנוסף, באותו הזמן, יש גם לפירעון את הלוואה. פירעון הלוואה מתחשב בסכום הלוואה 16,000, בריבית בגין הלוואה 8% ובמספר התקופות שהנו 8. כך מקבלים שסכום החזר בסיימון שלילי בגין הלוואה הוא:  $-16,000 = -16,000 * (1 + 8\%)^8 = -29,615$

בהתחשב בשני ערכיהם אלו - התקובל מפדיון הפקדו, והתשלום בעד פירעון הלוואה - הרי שההתזרים נטו בזמן 8 הוא  $49,519 - 29,615 = 19,904$

כעת, הריבית האפקטיבית לכל תקופת העסקה היא היחס בין סכום התשלום בתום התקופה לבין הערך המוחלט של ההשקעה נטו:

$$r_{ef} = \frac{19,904}{4,000} - 1 = 397.6\%$$

חשוב לשים לב שטיבית זו שקיבלו היא לתקופה של 8 שנים. על מנת למצע אותה קרי לתרגם אותה לרכיבית אפקטיבית שנתיות, כפי שדרשה השאלה. את ההמרה מבצעים עם מערך חזקה מתאים (ההמורות המשועגות כוללות גם חלוקה וכיוצא בזה, מתאימות למכבים של ריבית נקובה המוחשבת מספר פעמים, או ריבית מראש וכן על זה הדרך, ראו תרגילים קודמים):

$$r_{ANNUAL} = (1 + r_{8YEARS})^{\frac{1}{8}} - 1$$

או בהצגה, נקבל כי הריבית האפקטיבית השנתית היא:

$$r_{ANNUAL} = (1 + 397.6\%)^{\frac{1}{8}} - 1 \approx 22.21\%$$

מערך החזקה הוא למעשה היחס בין "הרצו למוצוי". כמובן, אני רוצה לחשב ריבית אפקטיבית לשנה (1) - הרצוי, המוצוי - מה שיש לי - זו ריבית אפקטיבית ל-8 שנים. כך שהיחס בין הרצוי למוצוי הוא  $1/8$  ובהתאם זהו מערך החזקה.

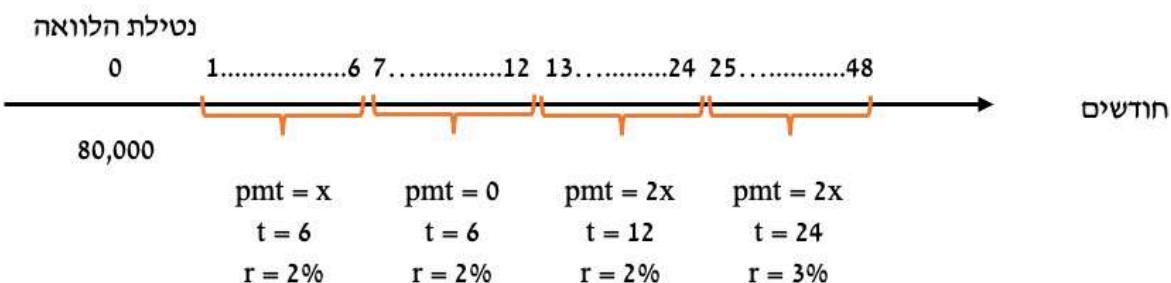
#### שאלה 5 - יישומי הלוואה עם פיגורים בתשלומים ושינויי ריבית

אברה נטל הלוואה בסכום של 80,000 ש"ח. הוא מחזיר, לפי ההסכם, סכום קבוע בכל סוף חודש. ב-6 החודשים האחרונים של השנה ה-1, לא הצליח לעמוד בחזוריים. בכל אחד מהחודשים העוקבים בשנים 2, 3, 4, ביצעה החזוריים בסכום כפול מההחזר ב-6 החודשים הראשונים. הריבית החודשית היא 2% בגין השנתיים הראשונות ו-3% בכל חודש לאחר מכן.

נדרש: מהו סכום ההחזר החודשי בשנה ה-1, בכל אחד מ-6 החודשים הראשונים?

**פתרון:**

תמיד ולעולם - ולכפי כל הלוואה - סכום ההלוואה הוא ערך הנוכחי של החזירה. במקרה זה, החזוריים כוללים 2 סדרות: סדרה ראשונה בסכום מסוים, וסדרה נוספת, בסכום כפול (גובה פי 2) לאחר מכן.



$$80,000 = x * PVFA(2\%, 6) + 2x * PVFA(2\%, 12) * (1 + 2\%)^{-12} + 2x * PVFA(3\%, 24) * (1 + 2\%)^{-24}$$

$$80,000 = x * 5.601 + 2x * 10.575 * 1.02^{-12} + 2x * 16.936 * 1.02^{-24}$$

$$80,000 \approx 43.3366x \rightarrow x \approx 1,846$$

הוائل זה -  $x$  מייצג את התשלום החודשי בחודשים הראשונים שלגביו נשאלנו - זהה גם התשובה הסופית.

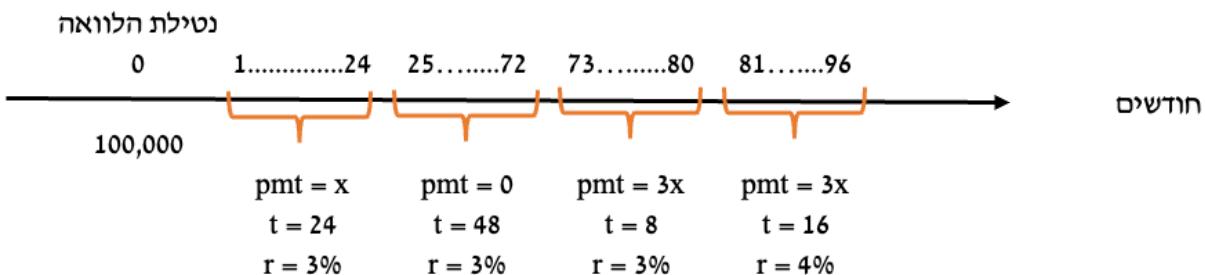
**שאלה 52 - יישומי הלואה עם פיגורים בתשלומים ושינויי ריבית תרגול נוסף**

קוקי נטל הלואה בסכום של 100,000 ש"ח. הוא מছיר, לפי ההסכם, סכום קבוע בכל סוף חודש. בשנים 3, 4, 5-6 לא ביצע החזירים. בכל אחד מהחודשים בשנים 8, 7 ביצע החזירים בסכום גבוה פי 3 מסכום החזר החודשי בשנתיים הראשונים הריבית החודשית היא 3% במהלך 6 השנים ו-8 החודשים הראשונים ו-4% בכל חודש לאחר מכן.

נדרש: מהו סכום החזר החודשי הקבוע בשנתיים הראשונים?

פתרון:

שאלה זו דומה מאד לקודמתה - גם היא דורשת חילוץ הנשען על המשפט "סכום הלואה הוא ערך הנוכחי של החזרה". ההבדל היחידי בין שאלה זו לקודמתה, הוא במספר השנים וכן בתקופות הריבית שאינן מבטאות שנים שלמות.



$$100,000 = x * PVFA(3\%, 24) + 3x * PVFA(3\%, 8) * (1 + 3\%)^{-72} + 3x * PVFA(4\%, 16) * (1 + 3\%)^{-80}$$

$$100,000 = x * 16.936 + 3x * 7.02 * (1 + 3\%)^{-72} + 3x * 11.652 * (1 + 3\%)^{-80}$$

$$100,000 \approx 22.7282x \rightarrow x \approx 4,400$$

לקראת המפגש הבא:

- לסגור הרמתית את ייחידה 5 ברכפים כולל בוחן מסכם.
- יש לחזור היטב על כל השאלות והסוגיות ולמצוא ככל שניתן הקובלות באופ"ל.
- רשות שטחיות לחלק מהסטודנטים/סטודנטיות: המחברת הינה שבאות עדי עמי 170 כולל המחוות רבות נוספות עם פתרון מלא.
- אם תתקלו בשאלת המציביעה על פרויקטים המוצאים זה את זה / פרויקטים בלתי תלויים / פרויקטים לא קובנציאנליים) - דלו גם, נגיעה במפגש הבא (מבוא ליחידה 6 לגבי פרויקטים).

**שאלה 53 - חישובי ריבית והמשמעות של ריבית מראש וריבית פשוטה**  
שי יכול ליטול הלואה ל-4 שנים באחד מבין המסלולים הבאים :

- ריבית דרייבית לפי שיעור של 10% לשנה.
- ריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית) בשיעור חצי שנתי של 5%.
- ריבית מראש בשיעור של 4% לחצי שנה, המוחשבת לפי תשלום ריבית בתחילת החציון.
- ריבית מראש בשיעור כולל לתקופה כוללת של 8% ובנוסך ריבית שנתית נקובה בשיעור 4% המוחשבת כל חצי שנה.

נדרש : מהי הריבית האפקטיבית בכל חלופה, ובהתאם - איזו חלופה תועדף?

פתרון :

שאלה זו מתמקדת בנושא שהוצג בפגש קודם (4) - חישובי ריבית אפקטיבית. בנוסף, הואיל ומדובר בהלוואה, נאף לבחור בחלופה שבה הריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר. ההבדל העיקרי בין שאלה זו למקבילותיה משיעור 4 קשור לניסוח של חלופות ב-ו-ג.

הריבית האפקטיבית שנחשב, בכל החלופות, היא ל-4 שנים (תקופת העסקה).

**א. ריבית דרייבית לפי שיעור של 10% לשנה**  
חישוב "ריבית דרייבית" הוא למעשה חישוב "ברירתה המחדל" שלנו בקורס, והוא נועל לפחות אלא אם נאמר אחרת. כאשר ריבית מוחשבת כ"ריבית דרייבית" אין שום אזכור של היותה "נקובה המוחשבת כל..." ואין שום אזכור של "מושלמת מראש/מוחשבת מראש" איזי הנוסחה הרלוונטייה היא למעשה נוסחת המרת ריבית אפקטיבית - כך נצליח לחשב ריבית אפקטיבית כוללת לכל 4 השנים, שאותה נשווה אל מול הריביות האפקטיביות ל-4 שנים בمسلולים האחרים.

$$r_e = (1 + r)^m - 1 = (1 + 10\%)^4 - 1 = 46.41\%$$

ואם כך - כבירותת מחדל: ריבית לשנה מומרת ל-4 שנים באמצעות 1 ועוד הריבית השנתית 10% בחזקת מספר שנים (4) וכל זה - פחות אחת.

**ב. ריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית) בשיעור חצי שנתי של 5%**

רקע: החישוב הבסיסי של ריבית (ראו סעיף א) מניח בהגדירה "ריבית דרייבית". זו הסיבה לכך שיש חזקה בנוסחה. במקרה החרג שבו נאמר מפורשות שהריבית היא ריבית פשוטה ללא ריבית דרייבית, איזי הריבית לתקופה הכוללת היא המכפלה הפשוטה (כפל, לא חזקה) של הריבית התקופתית במספר התקופות.

$$r_e = 5\% * 8 = 40\%$$

נתמכת את ההבדלים בטבלה הבאה :

ריבית חצי שנתית בשיעור 5%	ריבית פשוטה בשיעור 40%
---------------------------	------------------------

חשבו ריבית אפקטיבית ל-4 שנים המקרה הנדון כאן ( <b>יחסית נדירה</b> )	חשבו ריבית אפקטיבית ל-4 שנים (המקרה הנפוץ מוד)
$r_e = 5\% * 8 = 40\%$	$r_e = (1 + 5\%)^8 - 1 = 47.74\%$

ג. **ריבית מראש בשיעור של 4% לחצי שנה, המוחשבת לפי תשלום ריבית בתחילת החציון.**

המשמעות של ריבית מראש - היא ניכוי המבוצע מקרן ההשקעה או ההלוואה מיד במועד ביצוע העסקה (זמן 0). ולכן, בrama החישובית, ריבית מראש מקבלת ביטוי בסימן שלילי דרך מכנה הריבית האפקטיבית. במלים אחרות, כאשר אני מזזה שאלת עם ריבית מראש, החישוב "הכללי" במקרה הקל ביותר יהיה:

$$r_e = \frac{1}{1 - R_d} - 1$$

אם מדובר בRibit מראש אחת ויחידה לכל התקופה, ואניינה מוחשבת "מספר פעמיים", כל מה שצדך לעשותות הוא לנכונות אותה במכנה וסימנו. למשל, אם היו אומרים: "מהי הריבית האפקטיבית בעסקה ל-4 שנים שבה מנוכה ריבית מראש לכל 4 השנים בשיעור 28%" החישוב יהיה:

$$r_e = \frac{1}{1 - 28\%} - 1 = 38.88\%$$

אבל אם מדובר בRibit מראש המוחשבת "כמה פעמיים" - זה מקרה כאן - ריבית מראש, 4% לחצי שנה, אבל העסקה יכולה להיות ל-4 שנים. ולכן התשובה היא:

$$r_e = \frac{1}{(1 - r_d)^m} - 1 \rightarrow \frac{1}{(1 - 4\%)^8} - 1 = 38.62\%$$

(\*) שימושו לב, בשונה משאלת 47, את הריבית מראש במכנה אין "לחולק" בשום דבר. וזאת מושני טעמי: ראשית, משום שהריבית הזאת אינה נקובה. שנית, משום שיש חפיפה מלאה בין תקופת הריבית לבין תקופת חישוב (כל הרעיון של חלוקת ריביות נוצר במצבים שבהם הריבית הנתונה נקובה, ויש לחלק אותה כדי להגיע לריבית לתקופת חישוב אחת - למשל "ריבית נקובה שנתייה המוחשבת כל חודש").

ד. **ריבית מראש בשיעור כולל לתקופה של 8% וריבית שנתייה נקובה בשיעור 4% המוחשבת כל חצי שנה.**

ראשית, הפרדת רשות:

- יש כאן גם ריבית מראש, וגם ריבית שנתייה נקובה המוחשבת כל חצי שנה ומשולמת "בסוף". במלים אחרות, יש כאן גם ניכוי מהמכנה (ריבית מראש) וגם תוספת במונה (ריבית "בסוף").
- לענין הריבית מראש: על פי הנתון כאן, השיעור שלה, 8% הוא לכל התקופה. כמו כן, ריבית זו אינה מוחשבת "כל א זמן", ושיעורה הוא **לכל התקופה** - לא צריך להשתמש בחזקה כלשהי כדי להמיר אותה לתקופה ארוכה יותר.
- לענין הריבית השנתית הנקובה המוחשבת כל חצי שנה: עלינו להתבסס על חלוקת הריבית הנקובה כדי להמיר אותה לתקופת חישוב אחת ( $\frac{R}{2}$ ) ולאחר מכן עלינו לשאול את עצמנו: כמה תקופות חישוב ריבית (כמה חצאי שנים) נכללים בתקופת העסקה (4 שנים) - מעריך חזקה של 8.

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{1 - R_d} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{4\%}{2}\right)^8}{1 - 8\%} - 1 = 27.35\%$$

רכיבי הממצאים והכרעה - מדובר בהלוואה - אעדיף המסלול הנושא את הריבית האפקטיבית הנמוכה ביותר :

חלוקת	ריבית אפקטיבית
א	46.41%
ב	40%
ג	38.62%
ד	27.35% [הנמוך ביותר, בהלוואות - יעדן]

#### שאלה 54 - חילוץ הפקודות מסדרה הכוללת תשומות ריעוניים

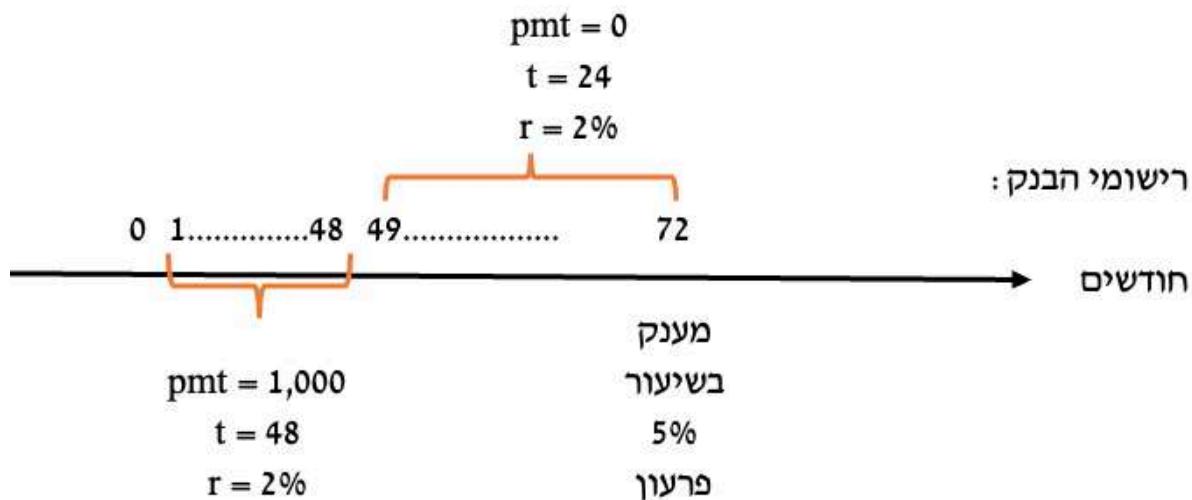
בנק צילוש מציע למשקיעיו להפקיד (בפועל) בכל תחילת חודש במשך 4 שנים סכום קבוע. הבנק יתיחס לשקעה זו באופן ריעוני, כך שבספריו ירשום את הפקודות לפי הפקודות סוף חודשיות בסכום של 1,000 ש"ח. הסכום הריעוני שרושם הבנק בספריו נושא ריבית חודשית בשיעור 2%. בחלוף שנתיים מסיום החסכו (סוף שנה 6), ניתן לקבל את כל הסכום שנצבר ונרשם ריעוניית לunganם, בתוספת מענק בשיעור של 5% מהסכום.

בנהנזה שההשוואה השנתית האפקטיבית של התכנית היא 60.10322%, מהו הסכום שיופקד בכל תחילת חודש?

פתרון :

השאלה זו מורכבת, משום ש מבחינה אינטואיטיבית קשה לנו לחשב על מצב שבו נפקיד סכום מסוימים במועדים מסוימים והבנק יבצע את רישובי הצבירה על סכום "אחר" שMOVFKD בעיתוי "שונה". יחד עם זאת, אלו הנזונים. וכך לפרך את השאלה, בטור התחלת, נתייחס אך ורק לאותם סכומים שהבנק מתייחס אליהם בחישוב הצבירה. כלומר - לאותה סדרה של 1,000 בתום כל שנה 4 שנים, עם צבירת ריבית נוספת של שנתיים עד הפירעון (ריבית חודשית קבועה 2%), ועם בONUS של 5% על הסכום הכלול.

כלומר, מנקודת ראות הבנק וציבורת הסכום הריעוני :



והסכום הריעוני הכלול שנצבר, כולל צבירת ריבית נוספת וכולל מענק פירעון :

$$FV = 1,000 * FVFA(2\%, 48) * (1 + 2\%)^{24} * (1 + 5\%)$$

ערך עתידי של סדרת הפקודות, מוביל למועד ההפקודה الأخيرة - זמן 48

צבירת ריבית שנתיים נוספות, עד הפירעון, בריבית 2%

תוספת של 5% על הכל, כנתון

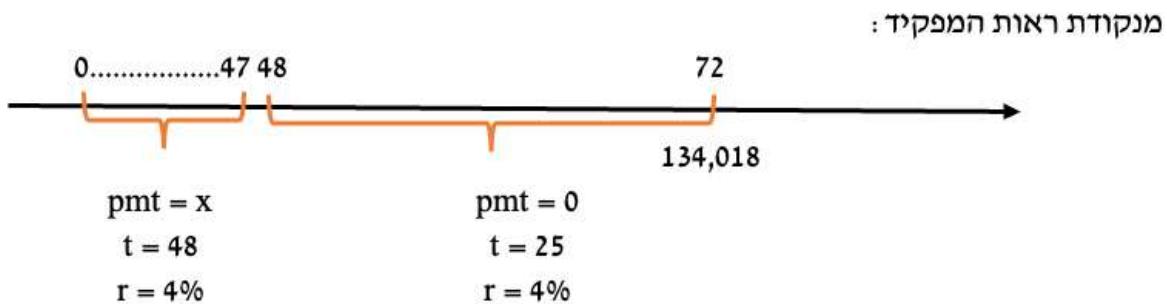
בהתבה:

$$FV = 1,000 * 79.354 * 1.02^{24} * 1.05 = 134,018$$

המסקנה היא שמנקודת ראות הבנק, הסכום שהוא מחייב להעניק למשקיע בתום השנה ה-6 (בתום החודש ה-72) הוא 134,018 ש"ח. אם כל מה שהייתי רוצה לדעת הוא הסכום שיינבע לידי המשקיע, סיימתי. אבל כאן השאלה שונה...

כעת, אני יודע בדיקות מה המפקיד מקבל בתום התקופה (ה-FV שלו). כדי לדעת כמה הוא מפקיד בפועל, סכום שאינו ידוע אני חייב להציג את ערכו ההפקדה בפועל על ציר הזמן בצורה נcona. על פי נתוני השאלה, ההפקדות בפועל הן בתחילת כל חודש 4 שנים (כלומר בזמן 0-47 ולא 1-48). כמו כן, סכום ההפקדה בפועל לא ידוע - ולכן יסומן כ- $x$ . FV בתום 6 שנים הוא 134,018 ש"ח. לגבי הריבית בפועל - על פי נתוני השאלה הריבית האפקטיבית היא 60.10322%. כדי לפעול בריבית מתאימה (חודשית) לחישובי סדרה חודשית, علينا להמיר אותה משנה לחודש. להלן הריבית החודשית:

$$r_e = (1 + r)^m - 1 = (1 + 60.10322\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 4\%$$



למעשה, הסכום המופקד בפועל  $x$  בתוספת הריבית האפקטיבית והתאמות לפירעון על בסיס ריבית אפקטיבית, חייב להצטבר לסכום שבו יזכה המשקיע בפועל, ואשר חושב לפי הצבירה הרוועונית של הבנק.

$$x * FVFA(4\%, 48) * (1 + 4\%)^{25} = 134,018$$

ערך עתידי סדרתי של ההפקדות בפועל - מוביל למועד הפקודה אחרונה, זמן 47

צברת ריבית נוספת של 4% לחודש, 25 חודשים נוספים (מן 47 עד 72)

סך הצבירה שנתתקבלה על פי הנוסחה של הבנק

התשובה הסופית:

$$x * 139.263 * (1 + 4\%)^{25} = 134,018 \rightarrow x \approx 361$$

המשקיע צריך להפקיד בפועל בתחילת כל חודש במשך 4 שנים כ-361 ש"ח.

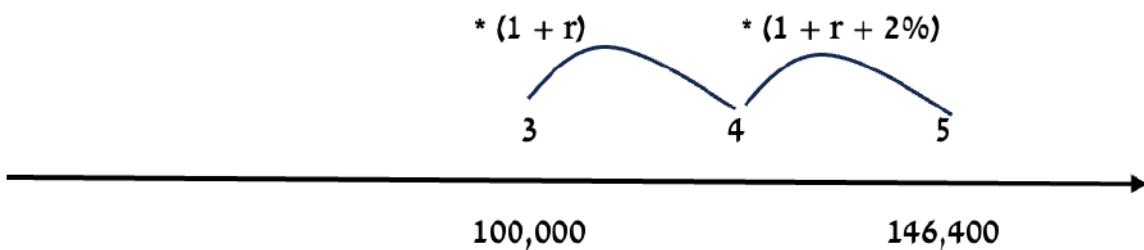
### שאלה 55 - חילוץ ריבית עם שינויי ריבית ובהתאם סכום השקעה

פוקינדה השקעה סכום מסוים, ובחלוף 3 שנים עמד לרשותה סכום של 100,000 ש"ח. בחלוף שנתיים נוספות עמד לרשותה סכום של 146,400 ש"ח. בהנחה שהריבית עלה מדי שנה ב-2%, מהו הסכום שהפקידה פוקינדה?

פתרון :

ידוע שהפקדנו סכום מסוים, אך הוא לא נתון בערך מסוימי. כלומר:  $PV = x$ . בנוספַּן אני יודע, שבחלוף 3 שנים הסכום שנცבר הוא 100,000. הבעייה: אני לא יודע מה הריבית. הואיל ואני תקוע, אנסה להציג על ציר הזמן את מה שאני CAN יודע: אני יודע שבזמן 3 הסכום הוא 100,000. אני יודע שבזמן 5 (שנתיים נוספות לאחר מכן) הסכום הוא 146,400.

ולמרות שהריבית לשנה 4 (בין 3 ל-5) ולשנה 5 (בין 4 ל-5) לא ידועה, אני CAN יכול לבטא אותה כנעלם אחד - כי הריבית בכל שנה גובהה ב-2% ביחס לקודמתה; ולכן, אם סימנתי ריבית לשנה 4 כ- $r$ , הריבית לשנה 5 תהיה  $r+2\%$ .



המשווה המשוואת המבטאת את הקשר בין הסכום שנცבר לזמן 3 לבין הסכום שנცבר לזמן 5 תהיה, לפיכך:

$$100,000 * (1 + r) * (1 + r + 2\%) = 146,400$$



אחלק את שני האגפים ב-100,000 :

$$(1 + r) * (1 + r + 2\%) = \frac{146,400}{100,000}$$

$$(1 + r) * (1.02 + r) = 1.464$$

נפתח סוגרים :

$$1.02 + r + 1.02r + r^2 = 1.464$$

נסדר את זה :

$$r^2 + 2.02r + 1.02 - 1.464 = 0$$

כלומר :

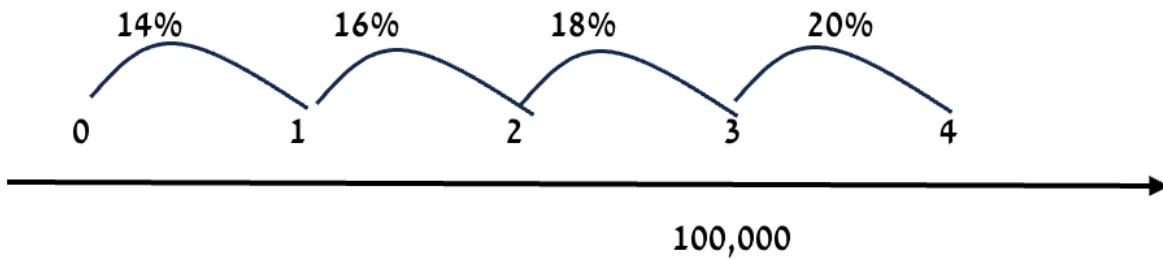
$$1 * r^2 + 2.02r - 0.444 = 0$$

כעת נוכל לפטור משווה ריבועית :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2.02 \pm \sqrt{2.02^2 - 4 * 1 * (-0.444)}}{2 * 1} = \frac{-2.02 \pm 2.42}{2} = 20\%$$

אמנם יש שני פתרונות - אחד חיובי ואחד שלילי, אבל בקורס שלנו, ריבית חייבת להיות חיובית. לכן שוללים מיד את התוצאה השלילית.

וכעת, בהתבסס על חילוץ הריבית, נוכל לדעת מהי הריבית לשנים המוקדמות יותר, ובהתאם לחישב ערך נוכחי בזמן 0 על בסיס ריביות אלו, ובכך לגלו את סכום ההשקעה.



משוואת הפתרון שתענין תוצאה סופית תהיה :

$$PV = FV * (1 + r_1)^{-t_1} * (1 + r_2)^{-t_2} * (1 + r_3)^{-t_3}$$

$$PV = 100,000 * (1 + 18\%)^{-1} * (1 + 16\%)^{-1} * (1 + 14\%)^{-1} = 64,085$$

הסכום שהופק בזמן אפס הוא לפיכך 64,085 ש"ח. זהה התשובה הסופית.

טיפ שאני לומד מהשאלה, באופן כללי : אם אני יודע את הערך העתידי בזמן מסוים (כאן - בזמן 3) ובזמן מאוחר יותר (כאן - בזמן 5) אוכל להשתמש בהם כדי לחלק את הריביות השוררות ביניהם, ולקבל מכך אינדיקציה לריביות עבר.

**שאלה 56 - חילוץ סכום הנחה מבוסס ערך נוכחי, כשהריבית משתנה והסכום לא ידוע?**

גוזלינדה שוקלת האם לשלם היום בעד מחשב סכום מסוים בגין הנחה, או לשלם בעדו ב-10 תשלומים רבעוניים שווים (בהתבסס על המחיר המקורי, ללא הנחה), בתום כל רביעון.

בנחתה שבשנה הראשונה הריבית השנתית האפקטיבית  $16.985856\%$  וายלו בכל שנה עוקבת הריבית השנתית האפקטיבית  $12.550881\%$ , מהו שיעור הנחה שיווביל להעדפת התשלום במזומן?

**פתרון:**

אחד האתגרים בשאלות כאלה גלום בעובדה שהסכום הכספי לא נתון. מדובר על "סכום מסוים" וזה יכול למסכלל... כדי להתגבר על הבעיה, אפשר להתייחס לסכום הכלול כ-  $x$  (מחיר המחשב לפני הנחה) או להציב ערך מספרי כלשהו.

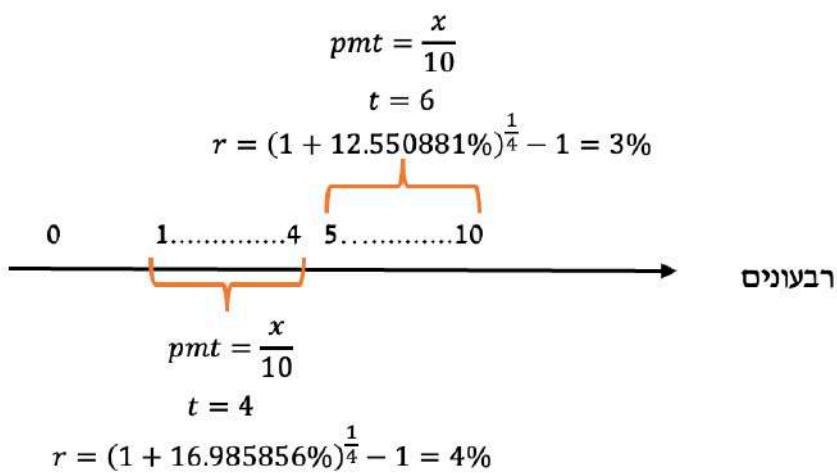
פריסת המחיר ללא הנחה ל-10 תשלומים שווים מובילה לתשלום תקופתי  $\frac{x}{10} = pmt$ .

בהתאם, ועל בסיס הנתונים המתאימים לריביות, אני יכול להציג את הסדר התשלומים על ציר הזמן. כשהאני עושה זאת, חשוב לשים לב שהריבית משתנה, ובנוסף - שלמרות שהסדר התשלומים כולל תשלומים רבעוניים, הריביות הנתונות הן אפקטיביות שנתיות.

**זה אומר שני דברים:**

- כשנתיאחס על הציר לסדרת התשלומים - עליי לפצלה לשניים (שינוי ריבית = מתחילה "סדרה חדשה").
- עלינו לבצע התאמה של הריבית משנה לרבעון לפחות הריבית האפקטיבית בגין כל סדרה.

**ציר הזמן המבטא את סדרת התשלומים **רבעוניים** והריביות יהיה, לפיכך:**



אנחנו טוענים שכשאנחנו משלמים על מוצר בתשלומים, אנחנו למעשה "משלמים פחות". כי לשלם בעתיד אומר שהכספי בינוינו, אנחנו לא מפסידים ריבית. זה כל הרעיון של ערך נוכחי; לשלם בעתיד זה יותר זול מאשר לשלם היום. לכן, בכל חישובי הערך ה- $PV$  שביבינו, הסכום של הערך הנוכחי נזוק מערך העתידי. זה אומר שאם רוצים לשכנע אותנו לשלם במזומן, צריכים לפצות אותנו על הקדמת התשלומים, או במלים אחרות - לחתת ליל הנחה. והנחתה צריכה להיות כזו שתפיצה אותנו על ההזלה שנובעת מהתשלום בעתיד.

לשם כך אני בונה ביטוי הביטוי המיציג את **הערך הנוכחי** של התשלומים :

$$PV = \frac{x}{10} * PVFA(4\%, 4) + \frac{x}{10} * PVFA(3\%, 6) * (1 + 4\%)^{-4}$$

בהמשך פיתוח מגלים שלשלם את הסדר התשלומים הניל זה כמו לשלם היום (ערך הנוכחי) :

$$PV = \frac{x}{10} * 3.63 + \frac{x}{10} * 5.417 * 1.04^{-4} = 0.826x$$

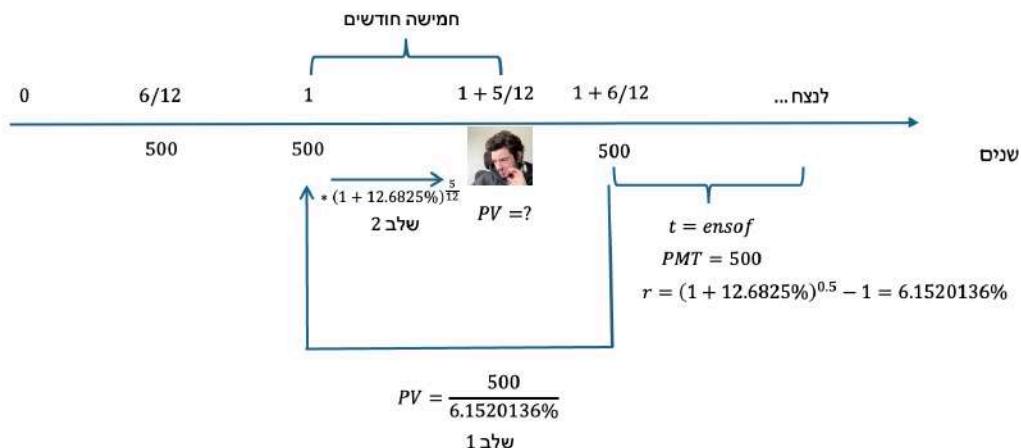
כלומר, עלות המוצר בתשלומים היא למעשה  $82.6\%$  מהמחיר המקורי המלא  $x$ . המשמעות היא שההנחה שתדרש היא לפחות  $17.4\% = 100\% - 82.6\%$  זה יהיה שיעור ההנחה המינימלי הנדרש שיבילל לכך שחולופת המזומנים תועדי.

שאלה 56.1 - ערך נוכחי של סדרה אינסופית עם חלקית תקופת והתאמות [לבקשת נופר]

נופר שוקלת לרכוש מכונה לחימום נקי שצפואה להניב למחזיק בה תזרים מזומנים נקי בסכום של 500 ש"ח בתום כל חצי שנה, לנצח. ידוע כי התקבול האחרון מכונת הנקי התקבל לפני 5 חודשים. בהנחה שהריבית האפקטיבית היא 12.6825% לשנה, מהו שווי הנכס היום?

פתרון :

הבסיס של השאלה פשוט באופן יחסית. חישוב ערך נוכחי =  $PV$  כי זו המשמעות של כל שאלה שבה שואלים מה השווי "היום". למעשה, הדיוון המרכזי כאן הוא בסוג ההתאמות המתבקשות - לריבית, לתקופות ולתוצאת הסדרה.



מה קרה פה?

אנו יודעים שהתשלום האחרון בוצע לפני 5 חודשים. ובנוסף, שפרק הזמן בין תשלוםיהם הוא חצי שנה (6 חודשים). המשמעות היא שהתשלום הקרוב הוא בעוד חודש אחד. כאשר מחשבים ערך נוכחי לסדרה האינסופית (ועושים זאת בריבית אפקטיבית המתואמת לחצי שנה - פרק הזמן בין תשלוםיהם) בהגדרה קופצים תקופת תשלום אחת אחרת לפני התשלום הקרוב, ככלمر חצי שנה אחרת (ולא חודש אחרת).

זה אומר שצורך לתקן את התוצאה 5 חודשים, באמצעות רלוונטיות (התשובה הסופית בצהוב):

$$PV = \frac{500}{6.1520136\%} * (1 + 12.6825\%)^{\frac{5}{12}} = 8,542$$

הערך הנוכחי של הסדרה האינסופית בהגדרה:  
סכום התקובל חלקית הריבית התקופתית

התאמת של התוצאה 5 חודשים נקבעת לנקודות התמיהור

## שיעור בית

- לתחון את כל מה שלמדנו, כולל שאלות שדילגנו עליהם, ולחפש שאלות מקבילות באופל, לפטור גם אותו.
- ללמידה את כל הרצפים בנושא ערך הנוכחי, עתידי והלואות.
- לצפות בסרטון זהה להעמקת הידע בנושא הלואות - [הקלטה נוספת](#).
- במחברת הקורס הישנה / המורחת [כאן](#), אפשר כזכור לפטור הכל עד עמ' 170.
- אופל – עבודה מורכבת. לא להתייחס.
- שאלות שאין מובנות מהאופל (שאינו שאלות בנושא חישובי ריבית מורכבת), ניתן להציג אלינו בפורום את "סגנון" השאלה. אני לא אפטור אותה מני הסתם, אבל אוכל לתת בהתאם בזמן וליכולה קווים. וכיון להתייחסות.

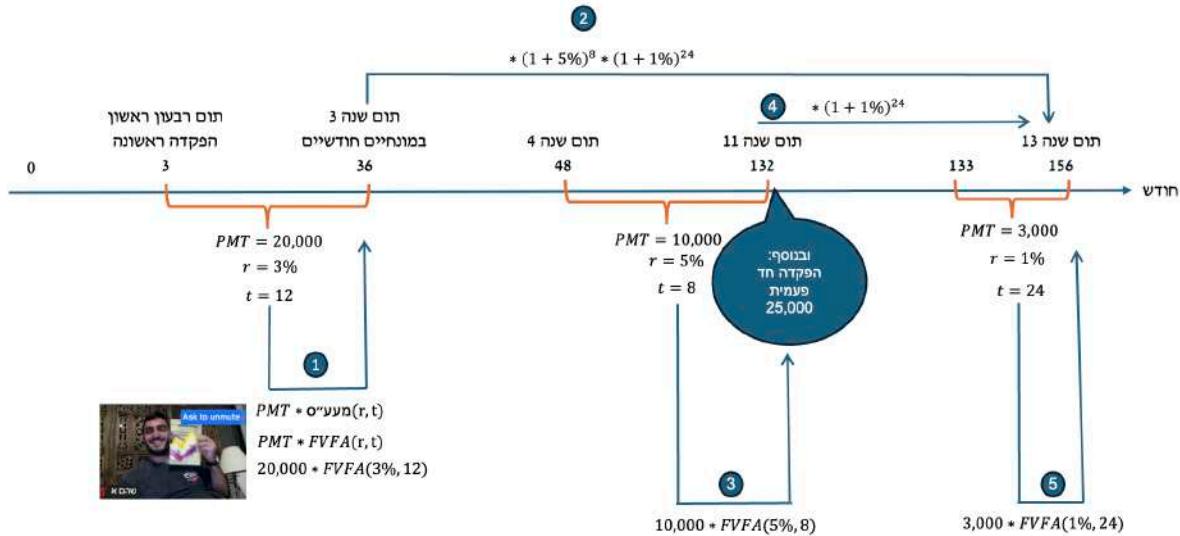
## תרגילים נוספים – מיעדים לתלמידי הנחיה וגילה (הנחיה מוגברת מזומנים להשתמש – לבריאות)

### שאלה 1001 – ערך עתידי מורכב

משה מתכוון להפקיד בתום כל רביעון במשך 3 שנים סכום של 20,000 ש"ח. בתום כל שנה עוקבת ובמשך 8 שנים בכוונתו להפקיד 10,000 ש"ח. מיד במועד ההפקדה השנתית האחרון בסך 10,000 ש"ח יוסיף סכום חד פעמי של 25,000 ש"ח ובנוסף, בתום כל חודש עוקב, במשך שנתיים, יפקיד 3,000 ש"ח. בהנחה שהריבית השנתית היא 3% לרבעון במהלך 3 שנים הראשונות, 5% לשנה, בכל אחת מ-8 השנים לאחר מכן, ו-1% לחודש בכל חודש עוקב, מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של משה במועד פדיון החסכו?

פתרון :

כמובן ששאלים כאן על ערך עתידי – הסכום שייעמוד לרשותו של משה במועד פדיון החסכו. הנקודה היא שמדובר בערך עתידי של מספר סדרות, עם אינטראול (מרוחק) זמן שונה, סכומים שונים וריביות שונות. חישוב ערך עתידי במצב כזה דורש מאייתנו לפצל את התחשבוןarlo לסדרות משנה; כל סדרה תכלול ערכיהם קבועים של ריבית, סכום ותדירות. וזה מה שבוצע בציר הזמן להלן.



כעת, נתייחס ונחשב את הערך העתידי של כל תת סדרה בנפרד.

כלל תבתוא במכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה).

### ספציפית:

שלב 1 : לוקח את נתוני הסדרה הראשונה, שכוללת תשלום רביעוניים במשך 3 שנים (לכן 12 תשלום). הביטוי **הו** :

$$20,000 * FVFA(3\%, 12)$$

מבסזרה הראשו למועד הפירעון

שלב 2 : למעשה מהויה המשך ישיר של שלב 1. הוא כופל את הביתי של שלב 1 ב-1 ועוד הריבית השנתית השוררת ב-8 השנים הקרובות בחזקת 8, ואז, ב-1 ועוד הריבית החודשית בחזקת 24, על מנת לבטא את הצבירה הסופרific רמהלך השותפים לאחרונאות.

$$* (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24}$$

**בсад הכלל:** הערד העתידי הכולל הנוצע מהתדרה הראשונה בלבד למועד הפירעון הוא:

$$FV_{SERIES1} = 20,000 * FVFA(3\%, 12) * (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24}$$

שלב 3: לוקח את נתונים הסדרה השניה, שכוללת תשומות שנתיים במשך 8 שנים (לכו 8 תשומות). הבינו:

$$10,000 * FVFA(5\%, 8)$$

בietenoi zeh mobil ottono lenkodot zeman shel hakofda haachrana b'sederha hashnita, kolomer latom ha-shanah ha-11 (medu'ah 11? ci la-pneha hitha sederha ed tom shana 3 v'danim canu b-8 shanim nuspo'ot). l'kan, niderash ha-tamah le-urz zeh cadi libetav at ha-zevirah ha-kollett ha-nuve'ut maha-sederha hashnita le-mo'ad ha-pur'ano.

שלב 4 : למעשה מהו זה המשך ישיר של שלב 3. הוא כופל את הביטוי של שלב 3 ב-1 ועוד הריבית החודשית השוררת בשנתיים הבאות בחזקת 24.

$$* (1 + 1\%)^{24}$$

בsek הכל : הערך העתידי הכלול הנובע מהתדרה השניה בלבד למועד הפירעון הוא :

$$FV_{SERIES2} = 10,000 * FVFA(5\%, 8) * (1 + 1\%)^{24}$$

נשים לב, שפרט לסדרה הנ"ל במועד סיוםה (טרם החתמות, מיד בתום שלב 3) קיימת הפקודה חד פעמיות נוספת של 25,000. אפשר לחשב לה ערך עתידי בנפרד, או להכניס אותה לחישוב הקודם.

$$FV_{\text{תוספה}} = 25,000 * (1 + 1\%)^{24}$$

שלב 5 : הסדרה האחרונה כוללת 24 תשלום חודשיים, שמועד סיוםם הוא במועד הפדיון. לכן, בגין ערך עתידי לסדרה זו אין צורך בחתימה.

$$FV_{SERIES3} = 3,000 * FVFA(1\%, 24)$$

בsek הכל :

$$FV = 20,000 * FVFA(3\%, 12) * (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24} + 10,000 * FVFA(5\%, 8) * (1 + 1\%)^{24} + 25,000 * (1 + 1\%)^{24} + 3,000 * FVFA(1\%, 24)$$

וחתומה :

$$FV = 20,000 * 14.192 * (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24} + 10,000 * 9.549 * (1 + 1\%)^{24} + 25,000 * (1 + 1\%)^{24} + 3,000 * 26.973 = 766,386$$

שאלה 1002 – ערך נוכחי

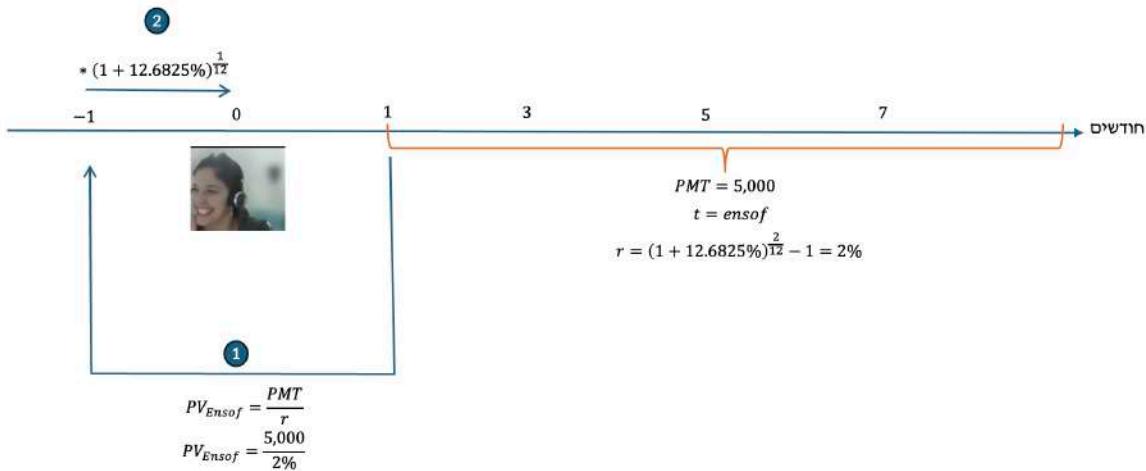
מציעים לענת לרכוש נכס שצפוי להניב לה בתום כל חודשים לנצח סכום של 5,000 ש"ח. הסכום יתקבל לראשונהה במועד חדש.

ידוע שהריבית השנתית היא 12.6825%.

נדרש : מהו המחיר המירבי שענת תסכים לשלם היום בעד הנכס?

פתרון :

ערך נוכחי הוא למעשה שווי – שווי בהווה. ביחידות הלימוד אהובים לסמןו כ- $V_0$ . אני מסמןו כ-PV מלשון Present Value. בדומה לחישובי ערך עתידי, גם חישובי ערך נוכחי יכולים להתבצע בגין סכומים בודדים וכן בגין סדרות. אלא שבשונה מערך עתידי, בחישובי ערך נוכחי קיימים גם המקרה של סדרה אינסופית. זה למעשה המקרה שמצוג כאן. מדובר בסכום שמתකבל בתום כל חודשים לנצח.



יש שאלה זו כמה נקודות החזקה ליבון : מה פשר חישוב הריבית עם החזקה בתוצאות נתוני הסדרה? כאשר מדובר בסדרה קבועה – סופית או אינסופית, אין זה משנה... עיבוד הסדרה (ביטהה במנוחי ערך נוכחי או עתידי) מחייב הזנת הריבית לפרק הזמן בין תלולים. בשאלת זו פרק הזמן בין תלולים הוא חודשיים ולרבה הערך צודתי בריבית שנתית בלבד. כבירות מחדל, המרת ריבית נתונה מתקופה אחת לאחרת מבוצעת באמצעות מערך חזקה מתאים בביטוי הבא (מבטא ריבית דרייבית) :

$$r_{\text{חדשיאים}} = \frac{1 - (1 + r_{\text{מצוי}})^{-12}}{r_{\text{מצוי}}}$$

בחבבה כאן – ידוע שהריבית המוצואה קרי הנתונה היא 12.6825% ותוקפה לשנה (זו התקופה המוצואה). אני רוצה ריבית לחודשיים, משום שהוא פרק הזמן בין תלולים שיאפשר לי לשבט את נתוני הסדרה. במלים אחרות, אני זקוק לחודשיים (רצו) מתקף שנה (12 חודשים) :

$$r_{\text{חדשיאים}} = \frac{(1 + r_{\text{מצוי}})^{\frac{1}{12}} - 1}{(1 + r_{\text{מצוי}})^{\frac{1}{12}} - 1} \approx 2\%$$

מה פשר שלב 1 שהשתמש בנוסחה :

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

המדובר בנוסחת ערך נוכחי של סדרה אינסופית. חשוב מאד – ערך נוכחי של סדרה, גם אם היא סופית וגם אם היא אינסופית, מוביל תמיד לנקודות הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד תזרים המזומנים הראשונים בסדרה. לכן, אם סדרה החלת בזמן 1, ותדרות תשלום כל חודשיים, החישוב הנ"ל, בהבזה רלוונטי, יובילנו חודשים לאחר רפוי זמן 1, כלומר לזמן -1 :

$$PV_{-1} = \frac{5,000}{0.02}$$

cut (שלב 2) עלינו לדחוף ערך זה קדימה ; על מנת לבטא את הערך הנוכחי במנוחי זמן 0 (זה מה שצרכיך). לשם כך, נכפול ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה. מדובר בתוצאות זמן ולכן כל עוד מערך החזקה בהתאם יהיה נכון, נגיע לתוצאה נכון.

אני בחרתי להשתמש בריבית השנתית, ולכפול ב-1 ועוד שיעורה, בחזקת פרק הזמן היחסית של הריבית – אני זוקק לחודש צבירה מתוך שנה :

$$PV_0 = PV_{-1} * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} \rightarrow PV_0 = \frac{5,000}{2\%} * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} \approx 252,500$$

תשובה סופית : ענת תשככים לשלם היום בעד הנכס לכל היותר 252,500 ש"ח.

### שאלה 1003 – ערך נוכחי כשווי פריט הנרכש בתשלומים

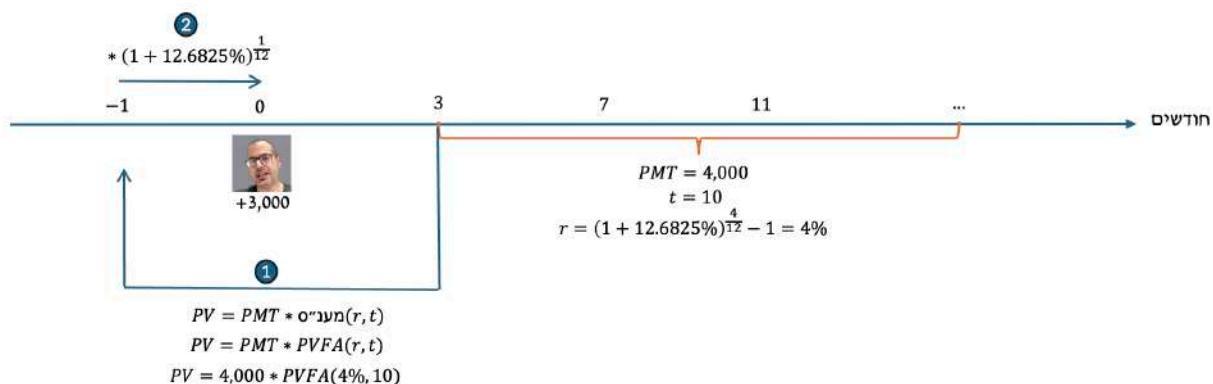
שם הוא ספק מכונות לחימום נקי. הוא יצא בтикוטו במבצע "בעל הבית השתגעו! מחונת חימום נקיין חחי טובہ שיש במחיר חבלי הזמן" : תשלום היום 3,000 ש"ח ואחר לכך תשלום לי כל 4 חודשים סכום של 4,000 ש"ח אבל את התשלום הראשון תקדים ותשלם עוד 3 חודשים". הריבית ששחם גובה היא בשיעור שנתי אפקטיבי של 12.6825%.

נדרש : מהו שווי המכונה / העלות שלה במידה ותירכש במזומן?



פתרון :

השאלה זו מז דומה לקודמתה – היא שואלת על השווי היום. יש כאן עניין קטן של סכום חד פעמי היום ודיוון נוסף בהתאם לריבית. בנוסף, השאלה מראה וריאציה ניסוחית שבה לא שאלו ברמת המונח על "השווי היום" אלא שאלו מה העלות שלה במזומן.



הביתוי הפותר את השאלה :

$$PV = 4,000 * PVFA(4\%, 10) * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} + 3,000$$

$$PV = 4,000 * 8.111 * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} + 3,000$$

$$PV = 35,768$$

ולכן, זהה עלות המכונה במזומן : 35,768 ש"ח.

הסבירים נוספים :

ראשית, ערך הנוכחי של סדרה אינטואטיבית (שיש לבצע כדי להגיע לשווי הרכישה היום) מתקבל (במקרה של סדרה קבועה) על ידי מכפלת סכום התשלומים התקופתי : 4,000 ב��וי המתאים לערך הנוכחי של סדרה. יש נוסחה מתמטית לכך, אך בדרך כלל ניעזר בלוח שנקרא לוח א-4 לנשפח א-כרכז ד. לוח זה שנקרא גם לוח מענ"ס יודע לשולף על בסיס ערכי הריבית ומספר התשלומים את הפקטור שאמנו כפול בו את סכום התשלומים התקופתי נגיעה לערך הנוכחי הכללי.

אלא, שערך הנוכחי כולל זה הוא תמיד לנקודת הזמן המוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה. כאן, ממועד התזרים הראשון בסדרה הוא זמן 3, ומרווח הזמן בין תזרים הוא 4 חודשים. לכן, הנוסחה מובילה בלי שנרצה לזמן 1- (4 חודשים לפני זמן 3). כדי לתקן את העיוות, כופלים ב-1 וודר הריבית בחזקה מתאימה של חודש.

על כל זה הוספנו סכום של 3,000 רק לאור העובדה שנתייני העסקה מבהירים מפורשות שפרט לסדרה דוחיה משלמים היום סכום נוסף שווה ערכו הנוכחי.

#### שאלה 1004 – בחירה בין תשלום במזומן והנחה לבין תשלום דוחי

ענת יכולה לרכוש במזומן מכונה לחימום נקניק. במידה ותעשה זאת, תזכה בהנחה בשיעור 10% מהמחיר הקטלוגי, שהוא 10,000 ש"ח.

אפשרות נוספת העומדת בפני עצמה היא לשלם את מלאה המחיר הקטלוגי, ללא הנחות, אך לזכות האשראי "ללא ריבית" לתקופה של 8 חודשים.

הנicho כי הריבית שענת משלם לבנק היא בשיעור 1.4% לחודש.

איזה חלופה تعدיף ענת?

פתרון :

כאשר נדרש לבחור בין תשלום בעתיד שגובה יותר לבין תשלום נמוך יותר בהווה, לא ניתן לבצע השוואה ברורה בין הערכיהם.

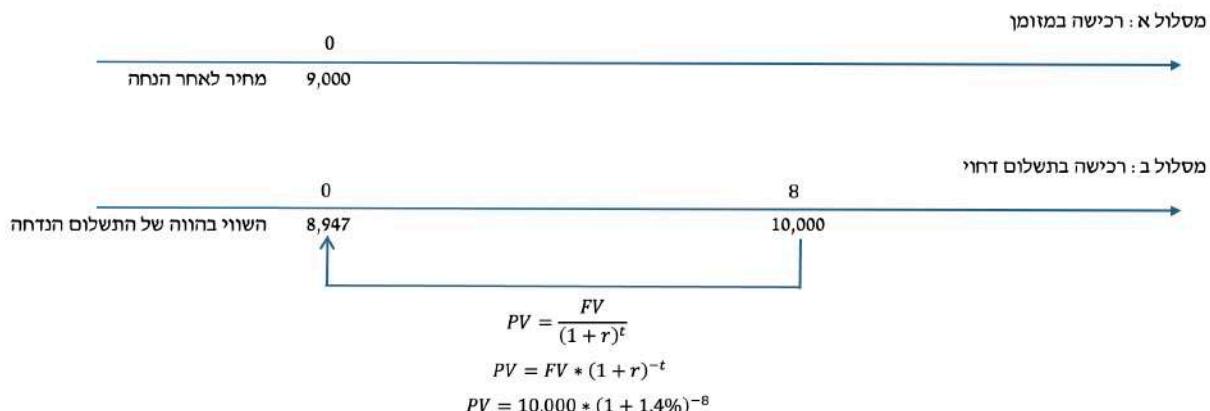
מה שעליינו לעשות כדי להחליט הוא לבטא את השווי בהווה (PV) של ההסדר העתידי, על מנת לבטא את עלותו ב"מונייה מזומן".

רק לאחר שנחשב PV להסדר האשראי הוא למעשה מעשה מומר ל"מונייה מזומן" ונitin להשותו למחיר המידי במזומן וכך לקבוע האם הוא כדאי יותר (הכבדות תיווצר מעשה עבור ההסדר שהערך הנוכחי של התשלומים בעדו הוא הנמוך ביותר).

להלן נציג שני צירום: הציר העליון קצר מיותר. הוא רק ממחיש את העובדה הטריביאלית של שלם היום בזמן – זה למעשה הערך הנוכחי; אבל כמובן שצורך לבטא בתשלום בזמןן את הנטו לתשלום, לאחר כל הנחה ללוונתית במידה וקיימת.

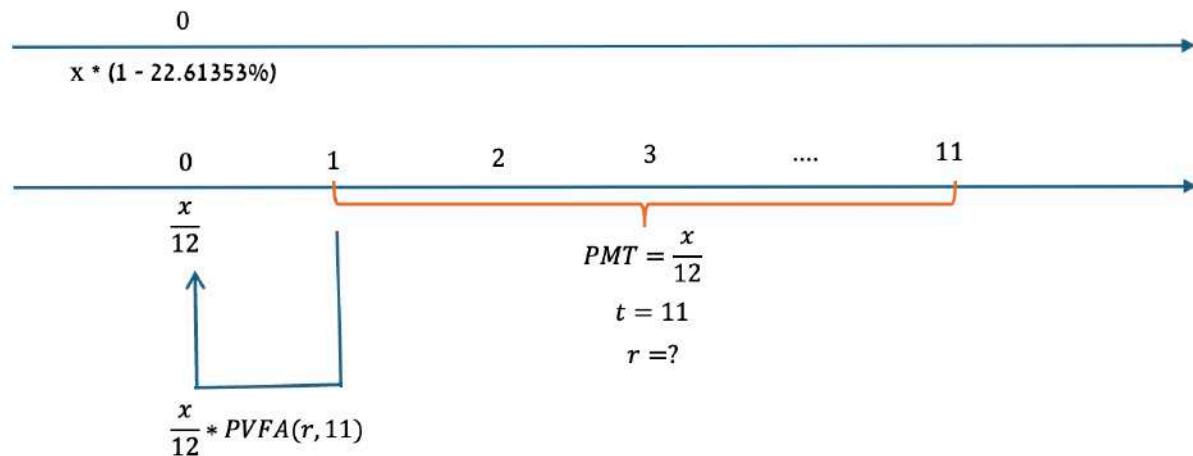
הציר התיכון הוא לב הדיוון שלו. הוא למעשה טוען שכדי לבטא את העלות במונחי ההווה, علينا להשתמש בכלים של ערך נוכחי של סכום חד פימי; למעשה התשלום העתידי לספק הוא הערך העתידי החד פימי והוא נתון, ובכדי לבטאו במונחי זמן אפס נחילקו ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה (או כפול באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית מתאימה). שמו לב, שאין כאן כל שימוש ב-PVFA או מענ"ס, הואיל ולא מדובר בהסדר תשלומים סכול סדרה קבועה אלא בתשלום בודד בעתיד.

לאחר שהיחסנו את הערך הנוכחי של הסכום הבודד, הגענו לתוצאה המיצגת את העבודה שהתשלום בעתיד זויל יותר בMONTH הנקחי מהתשלום הנוכחי, אך יש להעדייפו. יש להעדיף את מסלול B.



### שאלה 1005 – חילוץ ריבית המגולמת בהסדר תשלוםים

ידוע לכם שניתנו לקבות היום מכונה לחימום נקי במזומן. לחילופין, ניתן לשלם بعد המכונה ב-12 תשלום מושווים, כאשר התשלומים הראשונים מבוצעים היום, והתשלומים הבאים ככלל, הם מדי חודש. בהנחה שרכישה במזומן מקנה הנחה בשיעור של כ-22.61353%, מהי הריבית השנתית האפקטיבית המגולמת בהסדר התשלומים?



משפט המפתח לפתרון שאלות הדורשות חילוץ ריבית מותק הסדר תשלומים הוא המשפט הבא: "שווי המוצר בזמן נטו (לאחר כל הנחה קשורה) הוא הערך הנוכחי של הסדר התשלומים".

$$x * (1 - 22.61353\%) = \frac{x}{12} + \frac{x}{12} * PVFA(r, 11)$$

אפשר לחולוטין לחלק את כל המשווה ב- $x$ :

$$1 * (1 - 22.61353\%) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} * PVFA(r, 11)$$

נמשיך להשתעשע:

$$0.7738647 = 0.0833333 + 0.0833333 * PVFA(r, 11)$$

כדי לחוץ ריבית מביטוי של ערך נוכחי או עתידי של סדרה, علينا להתייחס לכל הביטוי של PVFA כנעלם בפני עצמו.

$$PVFA(r, 11) \approx 8.286$$

างש ללוח א-4 בנספח א לכך ד, ובשורה של 11 תשלומים אבט ימינה ואמצא עבור איזו ריבית הערך המתקיים הוא בקירוב 8.286.

לוח א-4: ערך נוכחי מוצابر של 1 ש"ח המתקבל מדי תקופה במשך  $t$  תקופות

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1		0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909
2		1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736
3		2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487
4		3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170
5		4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791
6		5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355
7		6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868
8		7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335
9		8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759
10		9.471	8.783	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145
11		10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495
12		11.253	10.375	9.934	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814
13		12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.103
14		13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367
15		13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.559	8.061	7.606
16		14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824
17		15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022
18		16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201
19		17.226	15.678	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365
20		18.046	16.351	14.877	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514
21		18.857	17.011	15.415	14.029	12.821	11.764	10.836	10.017	9.292	8.649
22		19.660	17.658	15.937	14.451	13.163	12.042	11.061	10.201	9.442	8.772
23		20.456	18.292	16.444	14.857	13.489	12.303	11.272	10.371	9.580	8.883
24		21.243	18.914	16.936	15.247	13.799	12.550	11.469	10.529	9.707	8.985
25		22.023	19.523	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.823	9.077

לע

גיליטי שהריבית המגולמת בהסדר היא 5%.

כאן צריך מגד להיזהר, ריביות בחישובי סדרות – בין אם מחולצות ובין אם מחושבות באופן ישיר מהוות תמיד ריביות לתקופת תשלום.

כאן, תקופת תשלום היא חודש. לכן, הריבית אותה חילצתי היא לחודש אחד.

הנקודה היא שדרשו ממנה ריבית שנתית. זה אומר שצריך לבצע התאמת ריבית.

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 \rightarrow r_{annual} = (1 + 5\%)^{12} - 1 \approx 79.586\%$$

מסקנה: הריבית האפקטיבית השנתית היא 79.586%.

לקראת המפגש הבא:

• עוברים ליה' חדשה. May the force be with us.

## נושא ראשון: השלמות שונות מהאופ"ל

**שאלה 1006 – העדפת מבצע המכר (היצרנו) לגבי מכירה בזמן מזמן או בתשלום נדחה**  
 גROLIFI היא יצרנית גודלה של מכונות לחימום נקיין. כאשר היא מוכרת מכונות נקיין בזמן, על מנת להיות תחרותית בתנאי השוק שבו היא פועלת עלייה להעניק הנחה בשיעור של 20% מהמחיר ה"רגיל".  
 במקרה זה, קיימת אפשרות להעניק ללקוח אשראי "לא ריבית" לתשלום הסכום המלא (לא הנחה) בעוד 8 חודשים. הניחו שהריבית השנתית האלטרנטיבית היא 30% במנוחים אפקטיביים.  
 נדרש: מהי החלופה אותה تعدיף גROLIFI (המוכרת)?

**פתרון:**  
 כאשר המטרה היא לבחור מנקודת ראות המוכר (מקבל התשלום) בין קבלת תשלום בזמן לבין קבלת תשלום נדחה, העקרון הכלכלי המנחה אותו הוא שהמוכר מעוניין לבחור בחלופה שבה שווי התקובל הוא "הגבוה ביותר". כאשרנו מגדירים שווי של התקובל אנו מדברים על ערך נוכחי (כמה זה שווה היום). ולכן, במצבים אלו, הרצינן הוא להעדיף את אפיק התשלום שיניב ערך נוכחי גבוה יותר.  
 במסלול הזמן, המוכר מקבל את הכספי היום. לכן, הסכום נטו שמקבל המוכר היום במסלול זה, הוא הערך הנוכחי.

במסלול של התשלום הנדחה, נצטרך לחשב את הערך הנוכחי של התשלום העתידי.  
 שאלת מהסוגיות המעניינות: סכום המכירה הכספי לא נתון. השאלה האם ועד כמה זה מפריע לי? התשובה היא שאם נצליח לבטא את הערך הנוכחי – גם באמצעות נעלם – עדין נוכל, במקרים רבים, לדעת איזה ערך נוכחי הוא הגבוה יותר (של הזמן או של התשלום הנדחה).  
 נסמן את מחיר המוכר המלא, לפני הנחה, באות  $X$  ונקבל שוויו של התשלום בזמן מיידי:

$$PV_{CASH} = X * (1 - 20\%) \rightarrow PV_{CASH} = 0.8X$$

כמובן אין צורך בהתאמה או תחשיב נוסף, משום שתשלום בזמן זהה בערכו לערך הנוכחי שלו (כי הוא מיידי, אין צורך בהתאמות זמן לזמן 0).

החלופה האחרת היא לקבל את מלאה התשלום המסומן כאמור כ- $X$  בעוד 8 חודשים כסכום יחיד. התאמה ערך הסכום למנוחים של ערך נוכחי תבוצע באמצעות נוסחת PV של סכום יחיד:

$$PV_{CREDIT} = X * (1 + 30\%)^{-\frac{8}{12}} \approx 0.8395X$$

מעיריך החזקה מבטא את העובדה שרצינו לתאם את התוצאה 8 חודשים לאחרו. והויאל והריבית הנתונה היא לשנה שלמה (12 חודשים) אפשר לבצע את התרגום לאחרור עם חזקה של  $8/12$ .  
**הויאל ושווי התקובל הנדחה  $X \cdot 0.8395$  גבוה יותר מאשר התקובל בזמן אובייחדי  $X \cdot 0.8$  המוכר יעדיף את החלופת התקובל הנדחה.**

**שאלה 1007 – חילוץ ריבית אפקטיבית המגולמת בהסדר תשלוםים עם הנחה**  
 מכונה לחימום נקייק ניתנת לרכישה באחד משני המסלולים הבאים:  
 מסלול 1: תשלום של 10 ש"ח בתחלת כל חודש במשך 10 חודשים.  
 מסלול 2: קבלת הנחה מזומן בשיעור 10% מהסכום המלא שהוא 100 ש"ח.  
 נדרש: מהי הריבית האפקטיבית השנתית המגולמת בהסדר התשלומים (מסלול 1)? חלצו תשובה מkorbert.

פתרונות:

באופן כללי, אם אני מקבל מידע שכולל אפשרות תשלוםים עד מוצר (תשלומים דוחויים) אל מול תשלום במזומן, המשמעות היא שבהכרח קיימת ריבית בעסקה, בכל מצב שבו סך התשלומים גבוה יותר מעלות המוצר במזומן.

תכליס – אם אומרים לי: "בוא קח את המוצר,שלם עכשו 90 ש"ח".  
 כל עוד בהסדר התשלומים הסכום הכלול הוא מעל 90 ש"ח – ברור שקיימת ריבית בהסדר התשלומים.  
 אם אני רוצה לחוץ את הריבית המגולמת בהסדר במקרה זה, אני נזעך במשפט שאומר: שווי המוצר במזומן הוא הערך הנוכחי של הסדר התשלומים הדוחויים: בעצם אני בונה משווה אחת, שאגף אחד שהוא שווי / מחיר המוצר במזומן, והางף השני שהוא הביטוי המייצג את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים.

از בעצם: אם הריבית נתונה ורוצים לדעת מהי החלוקת העדיפה – נחשב ערך הנוכחי לכל חלופה ונבחר בהתאם (הכי גבוה עבור המוכר, הכי נמוך עבור הרוכש) – זה מקרה שהותג בשאלות הקודמות (לא כאן).  
**אלא שכן: רצים לחוץ את הריבית המגולמת בהסדר, لكن בונם משווה שהריבית תהיה הנעלם היחיד**  
**שלה, על בסיס השווה בין מחיר במזומן לביטוי הערך הנוכחי של התשלומים, אז פותרים.**

$$PV_{CASH} = PV_{CREDIT}(r = ?)$$

הינו מקבלים באופן כללי:

$$r * (1 - 10\%) = 10 * PVFA(r, 10) * (1 + r)$$

כאשר אגף ימין מייצג ערך הנוכחי של סדרה תקופתית, שכוללת 10 תזרומים בזמן 0 עד 9. ערך הנוכחי של סדרה כזו מופיע אוטומטית "אחת אחרת" ביחס לתזרים הראשונים, שהוא 0 והוא בזמן 0, מוגעים ל-1. כדי לתקן בזמן 0, כופלים ב 1 ועוד הריבית. אבל כך מגיעים לנעלם הריבית בשני מקומות, וזה מזעע.

לכן, כטיפ טכני: אם המטרה היא לחוץ ריבית, והסדרה היא סדרה תקופתית, עדיף לפצל אותה: התזרומים של זמן 0 יוצג בנפרד, ונחשב ערך הנוכחי רק ל-9 התזרומים הבאים בזמן 9-0, ונחבר. בדומה כזו, הביטוי של הסדרה בזמן 9-1 מוביל בזמן 0 ללא צורך בהתאם:

$$100 * (1 - 10\%) = 10 + 10 * PVFA(r, 9)$$

נמשיך לפתח:

$$90 - 10 = 10 * PVFA(r, 9)$$

הלאה:

$$80 = 10 * PVFA(r, 9)$$

נחלק את שני האגפים ב-10 :

$$8 = PVFA(r, 9)$$

נעביר ללוח א-4 (לוח מענ"ס / PVFA) בנספח א לכרך ד של לוחות ההיוון, נעביר לשורה של  $t=9$ , ונחפש עבורה את הערך שהוא הקרוב ביותר ל-8. ואז נקבע איזו ריבית מתקיים ערך זה. הערך הקרוב ביותר שמצוותם לمعני בלוח היה 8.162 אשר התקיים עבור ריבית של 2% (עמ' 45 בנספח).

לכן מצאתי :

$$r = 2\%$$

זהו ריבית לתקופה של פרק הזמן בין תשלום. כאן התשלומים כל חודש, לכן הצלחנו למצוא ריבית אפקטיבית חודשית.

כדי להמיר ריבית חודשים לשנה, כבירית חודשים, נתבאס על מערך חזקה מתאים :

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 \rightarrow r_{annual} = (1 + 2\%)^{12} - 1$$

וההשובה הסופית :

$$r_{annual} = 26.824\%$$

שאלה 1008 – **חילוץ ריבית המגולמת בתכנית חסכון, לצורך חישוב צבירה למועד מאוחר יותר**  
לקחו שמנמן השקיע סכום של 40,000 ש"ח בפקדונן בנקאי לתקופה של 4 חודשים. ידוע שבתום החודש השני, הסכום הכלול שנצבר ללקוח היה 47,952 ש"ח.

עוד ידוע שהריבית מתחילה בשיעור מסוים, אך היא עולה מחדש לחודש ב-3%.

נדרש :

מהו הסכום הכלול שייעמוד לרשותו של הלקוח השמנמן בתום החודש ה-4?

פתרון :

השאלה דורשת באופן ברור מודד את הסכום הכלול שייעמוד לרשות הלקוח בעתיד, בגין הפקדה בודדת. במלים אחרות, מדובר בחישוב ערך עתידי של סכום ייחד.

בנוסף ידוע, שבתום החודש ה-2 ללקוח נצברו בתוכנית 47,952 ש"ח. כל מה שנצטרכן לעשות כדי להגיע לסכום הכלול שייצטבר בתוכנית בתום החודש ה-4 הוא להוסיף לתוכנית אם הריבית בחודשים ה-3 וה-4. הבעה – איני יודע מהו שיעור הריבית בחודשים ה-3 וה-4 כאמור.

הנתון שיעור לי – הסכום שנצבר בתום החודש ה-2, וכן העובדה שהריבית עולה מחדש לחודש ב-3%.

הסכום שנצבר לתום החודש השני מבטא את הפקדה הראשונית, יחד עם צבירת הריבית של החודש הראשון ושל החודש השני בהתאם :

$$FV_2 = 47,952 \rightarrow 47,952 = 40,000 * (1 + r_1) * (1 + r_2)$$

לכוארה, יש כאן שני געלמים, אבל יש נתון שעוזר לי. הנתון אומר שהריבית עולה מחדש לחודש ב-3%. או, במלים אחרות :

$$r_2 = r_1 + 3\%$$

אחזור למשווה המקורית ואציג במקום 2 את הביטוי הזה :

$$47,952 = 40,000 * (1 + r_1) * (1 + r_1 + 3\%)$$

אחלק את שני האגפים ב-40,000 :

$$1.1988 = (1 + r_1) * (1 + r_1 + 3\%)$$

נפתח סוגרים :

$$1.1988 = 1 + r_1 + 3\% + r_1 + r_1^2 + r_1 * 0.03$$

נכns לפורמט של משווה ריבועית :

$$r_1^2 + 2.03r_1 - 0.1688 = 0$$

נפתר ונקבל את שני הפתרונות הבאים :

$$r_1 = \frac{-2.03 \pm \sqrt{2.03^2 - 4 * 1 * (-0.1688)}}{2} = \{0.08; -2.11\}$$

קיבלונו 2 ריביות : 8% ומינוס (חחח) 211%. אין בקורס ריבית שלילית, ואנו נשלול מיד פתרון זה. לכן, אנו גילינו את הדבר החשוב מכל: הריבית לתקופה הראשונה בהסדר היא ריבית חודשית של 8%, ובהינתן שהיא גדרה בכל חודש ב-3%, הרי ש :

הריבית לחודש 1 :

8% + 3% = 11%

הריבית לחודש 2 :

11% + 3% = 14%

הריבית לחודש 3 :

14% + 3% = 17%

הוail והסכום שנცבר לתום חודש 2 : 47,952, נצבור עליו ריביות לחודשים 3 ו-4 לפי 14% ו-17% בהתאם ונקבל את הערך העתידי בתום 4 החודשים כנדרש :

$$FV_4 = 47,952 * (1 + 14\%) * (1 + 17\%) \rightarrow FV = 63,958$$

**שאלה 1009 – בחירה בין חלופות הלואה על בסיס חישובי ריבית אפקטיבית בכל חלופה**  
בנק דורודרים מציע הלואות ייעודיות לרכישת מכונות נקייה. כל ההלואות מסולכות בתשלום אחד בחלוקת 5 שנים מנטילתן.

להלן מסלולי ההלוואה הרלוונטיים :

- מסלול 1 : ריבית נקובה בשיעור 15% לשנה, המוחשבת כריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית).
- מסלול 2 : ריבית נקובה בשיעור 12% לשנה, המוחשבת מדוי חדש.
- מסלול 3 : ריבית בשיעור 11% לשנה, המוחשבת כריבית דרייבית.
- מסלול 4 : ריבית מראש בשיעור של 20% ובנוסח ריבית שנייה נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל חודשים.
- מסלול 5 : ריבית מראש בשיעור של 8% לחצי שנה, המוחשבת מדוי חצי שנה (= "בתחילת כל חצי שנה").

נדרש : מהו המסלול שיעודף על ידי הלואה?

פתרון :

בשאלות שכל מה שנזהה בהן אלו ערכי ריבית באחזים ; ללא סכומים / הנחות או הסדרות כספיות אחרות – הבחירה ביןיהן / דירוגן תבוצע על בסיס חישוב הריבית הכוללת (האפקטיבית) בכל חלופה. בדרך כלל, בשאלות אלו, נזהה גם מילים כגון "ריבית מראש", "ריבית המוחשבת כל...".

עבור הלואה, כਮון שתועד חלופה שהריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר (אם היו שואלים על המלואה – כמובן שיש לו העדפה למסלול הנושא את הריבית האפקטיבית הגבוהה ביותר, אבל זה לא המצב כאן).

**מסלול 1 : ריבית נקובה בשיעור 15% לשנה, המוחשבת כריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית)**  
כאשר הריבית מוחשבת כריבית פשוטה, ללא ריבית דרייבית – המשמעות היא שהריבית לתקופה הכוללת (האפקטיבית, הכוללת) היא מכפלה פשוטה של הריבית התקופתית במספר התקופות הנדרש. במילים פשוטות : 15% לשנה, אבל העסקה ל-5 שנים, לכן הריבית הכוללת האפקטיבית ל-5 שנים :

$$r_{5\text{years}} = 15\% * 5 = 75\%$$

**מסלול 2 : ריבית נקובה בשיעור 12% לשנה, המוחשבת מדוי חדש**

$$r_e = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{60} - 1 = 81.67\%$$

מה קרה כאן?

כאשר מדובר בריבית נקובה "המוחשבת כל" ואינה ריבית מראש (שהה נטפל בנפרד), תהליך העבודה כולל שני שלבים שמשלבים נוסחה אחת :

**השלב הראשון** (ב奏 הסוגרים) לוקח את הריבית הנקובה הנתונה, ומחלק אותה בערך כלשהו – כדי להגיע לריבית לתקופת חישוב אחת. כאן : הריבית הנקובה הנתונה 12% לשנה, תקופת החישוב היא חדש, לכן חילקתי את הריבית הנקובה ב-12.

**השלב השני** (מערך החזקה) לוקח את הביטוי כולם (1 ועוד ריבית לתקופת חישוב) ומעלה אותו בחזקת מספר תקופות החישוב בתקופה הנדרשת. בהינתן שהמטרה שלו בסופו של יומם היא להגיע לריבית אפקטיבית ל-5

שנתיים, הרי שאני זקוק ל-60 תקופות חישוב ריבית (60 חודשים ב-5 שנים) כדי להגיע לרכיבית האפקטיבית לתקופה הכוללת.

מסלול 3 : ריבית בשיעור 11% לשנה, המוחשבת כרכיבית דריבית

אם לא נאמר דבר לגבי הריבית (או שנאמר שהיא מוחשבת כרכיבית דריבית / ריבית אפקטיבית) אז המרת הריבית מתקופה לתקופה מבוצעת על ידי מערך החזקה בנוסחה הנפוצה שלנו – עם חזקה בלבד, ללא כפל, ללא חילוק :

$$r_{5\text{years}} = (1 + r_{\text{annual}})^5 - 1$$

וכאן :

$$r_{5\text{years}} = (1 + 11\%)^5 - 1 = 68.51\%$$

מסלול 4 : ריבית מראש בשיעור של 20% ובנוסף ריבית שנתית נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל חודשים

$$r = \frac{\left(1 + \frac{6\%}{6}\right)^{30}}{1 - 20\%} - 1 = 68.48\%$$

במונוה : החתיכשות לריבית ה"רגילה" (זו שאינה ריבית מראש). התבססו על הביטוי הקליני שלוקח 1 ועוד הריבית לתקופת חישוב אחת. זאת, על ידי חילוק הריבית הנקובה לשנה ב-6, כדי לבטא ריבית לתקופת חישוב שהיא חודשים. לאחר מכן, במערכות החזקה החתיכשתו במספר תקופות חישוב הריבית (חודשיים) בתקופה העסקה כולה (5 שנים = 60 חודשים). תקופה של חודשים נכללת 30 פעמיים ב-60 חודשים, וכך המשיך. במכנה : הריבית מראש הנתונה כאן היא ריבית מראש "חד פעמי". לא לשנה, לא לחודש, לא מוחשבת כל... פעם אחת מנכדים, וזהו. לכן המכנה יהיה פשוט, ויכלול 1 פחות הריבית זו.

מסלול 5 : ריבית מראש בשיעור של 8% לחצי שנה, המוחשבת מדי חצי שנה (= "בתחילת כל חצי שנה")

כאשר אני מזוהה בשאלת ריבית מראש, המוחשבת מספר פעמים, תהליך החישוב של הריבית האפקטיבית / הכוללת הוא שונה ; במקום להתיחס ל-1 ועוד הריבית כמו שמקובל ברוב המקרים, ריבית מראש עובדת בדרך של ניכוי (מקטינה את הסכום המקורי) ונכללת במכנה :

$$r = \frac{1}{\left(1 - \frac{8\%}{1}\right)^{10}} - 1 = 130.21\%$$

מה הlk פה?

אם הריבית היא מראש, ואין ריבית בתום התקופה, התפיסה היא שבתום התקופה מחזירים רק את הקrho הראשונית (מייצג 1 במונוה). במכנה מעניקים ביטוי לניכוי מראש ; וכך הוא בניו מביטוי של אחת פחות הריבית מראש לתקופת חישוב.

במקרה זה, הריבית מראש היא 8% לחצי שנה. היא גם מוחשבת כל חצי שנה, וכך אין צורך אמתי למתאם אותה לתקופת חישוב (אם היא הייתה מוחשבת כל רבעון, הייתי מחלק אותה ב-2).

מערך החזקה (במכנה) הוא התשובה לשאלת: כמה תקופות חישוב ריבית מראש (כמה חצאי שנים) נכללים בתקופת העסקה. כזכור, העסקה ל-5 שנים, ומספר החצאים בה 10. לכן זה המערך.

ריכוז הממצאים והכרעה :

ריבית אפקטיבית מסלול 1 :	75%
ריבית אפקטיבית מסלול 2 :	81.67%
ריבית אפקטיבית מסלול 3 :	68.51%
ריבית אפקטיבית מסלול 4 :	68.48%
ריבית אפקטיבית מסלול 5 :	130.21%

החולפה המועדפת היא זו שבה הריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר (מצד הלווה) – **מסלול 4**.

### שאלה 1010 – ערך עתידי

גרלופי הפקידה 1,000 ש"ח בתחלת כל חודש במשך 4 שנים. לאחר מכן הפסיק את החפקות לתקופה של 3 שנים. לאחר מכן, בתחלת כל חודש (ולראשה בתחלת השנה ה-8) החליטה גRELופי להפקיד כל חודש 800 ש"ח במשך 4 שנים. מהו הסכום הכללי שייעמוד לרשותה של גRELופי בתום השנה ה-11, אם ידוע שהריבית החודשית ב-5.5 שנים הראשונות היא 3% ואילו הריבית החודשית בכל חודש לאחר מכן היא 1%?

פתרון :

השאלה זו היא שאלת ערך עתידי קלאסית, והמטרה היא לגלות את סך הצבירה ליום השנה ה-11, קרי ליום החודש ה-132. להלן מבנה ציר הזמן הרלוונטי:



כיצד נחשב ערך עתידי לכל הסדרות, כולל הריבית שנצברת בתקופת ההמתנה וכל הערכים האחרים הרלוונטיים? לפיה חלקים.

נסמן – הסדרה המוקדמת (השמאלית) = סדרה 1. הסדרה אחראית (האמצעית) = סדרה 2. הסדרה الأخيرة = סדרה 3.

סדרה 1 :

$$FV_1 = 1,000 * FVFA(3\%, 43) * (1 + 1\%)^{90}$$

מילולית :

כפלנו את סכום ההפקדה הקבועה במע"ס (FVFA) הרלוונטי. חישוב זה מוביל אותנו תמיד לנקודת הזמן של תזרים המזומנים האחרון בסדרה (זמן 42). כדי לדוחף את התוצאה מזמן 42 למועד הפרעון – זמן 132, השתמשנו בריבית שבתוקף לאחר זמן 42 שהיא 1%. החזקה היא 90, לאור הפרש הזמן מזמן 42 (עיתוי סיום הסדרה) לזמן 132 (עיתוי הפרעון).

סדרה 2:

$$FV_2 = 1,000 * FVFA(1\%, 5) * (1 + 1\%)^{85}$$

AMILOLIT: :

כפלנו את סכום ההפקדה הקבוע במע"ס הרלוונטי לריבית השונה. חישוב זה מוביל אותנו למועד ההפקדה האחרוןונה, שהיא בתחילת החודש האחרון של השנה ה-4, ככלומר בזמן 47 בחודשים. כדי לדוחף את התוצאה מזמן 47 למועד הפרעון – בזמן 132, כפלנו ב-1 ועוד הריבית החודשית בטוחה הזיה, בחזקת ההפרש בין התקופות:  $132 - 47 = 85$ .

סדרה 3:

$$FV_3 = 800 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^1$$

AMILOLIT: :

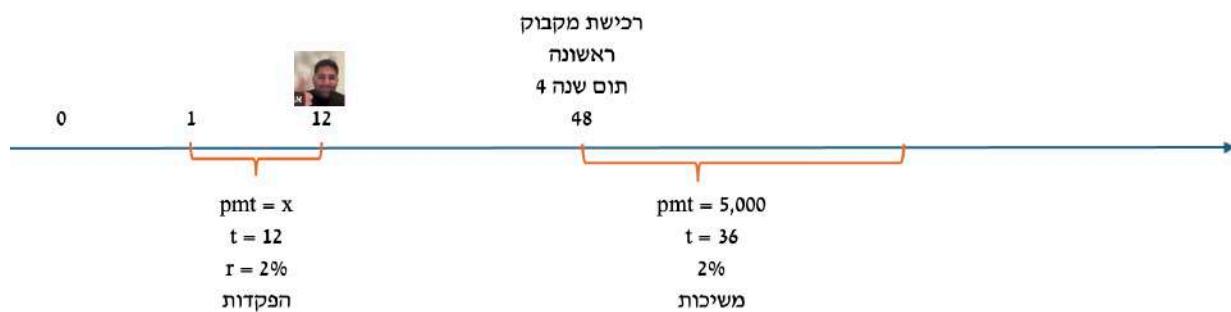
כפלנו את סכום ההפקדה הקבוע החדש במע"ס הרלוונטי. חישוב זה מוביל אותנו למועד ההפקדה האחרוןונה, שהיא בתחילת החודש האחרון של השנה ה-11, ככלומר בזמן 131 בחודשים. כדי לדוחף את התוצאה ממועד זה למועד הפרעון – תום שנה 11 (זמן 132 בחודשים) כפלנו ב-1 ועוד הריבית לחודש אחד.

**התשובה הסופית היא למעשה חיבור פשוט של הביטויים שבנינו עבורה סדרה 1, סדרה 2, סדרה 3. תוכלו לחשב זאת לבד.**

**שאלה 1011 – איזון אקטוארי להפקיד בתום הפקדות ומשיכות, ותחילת תקופה "סמייה"**  
 אבישי מעוניין לקנות בתום כל חודש מקבוק במשך 3 שנים, כאשר המקבוק הראשון יירכש בעוד 4 שנים. לשם כך בכוונתו להפקיד בתום כל חודש במשך שנה סכום קבוע.  
 אם הריבית החודשית 2%, ומהירות מקבוק קבוע בסכום של 5,000 ש"ח, מהו הסכום החודשי שאבישי יctrax להפקיד?

**פתרון :**

באופן כללי, כשננים בסדרת הפקדות שאחריה סדרת משיכות, הכללי שאנו אוהב להציג הוא לבצע  $FV$  להפקדות ו- $PV$  למשיכות, וכן התאמות שיאפשרו ביטוי שני סוגי הערכים במנוחי אותה נקודת זמן.  
 נקודת הזמן המשותפת שאנו אוהב, היא זו של סיום ההפקדות, המוצגת מטה ע"י אבישי.



ערך עתידי הפקדות למועד ההפקדה الأخيرة (לשם מגעים אוטומטיים בערך עתידי סדרתי) :

$$FV_{Deposits} = x * FVFA(2\%, 12)$$

ערך נוכחי משיכות המבוטא במנוחי אותה נקודת זמן (זמן 12). הואיל וסדרת המשיכות החלה בזמן 48, הערך הנוכחי הסדרתי של hon מקפץ "אחת אחריה" ביחס לתחילת הסדרה, כלומר בזמן 47, ועלינו לתאמס את התוצאה בזמן 47 לזמן 12 כלומר 35 תקופות לאחר, כך שהביטוי של הערך הנוכחי של המשיכות :

$$PV_{Withdrawals} = 5,000 * PVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{-35}$$

בסק הכל, משוואת הפתרון תהיה :

$$x * FVFA(2\%, 12) = 5,000 * PVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{-35}$$

מפה ממשיכים לחלץ את x, ומתפללים.

### שאלה 1012 – התאמות ריבית נקובה בחישובי ערך נוכחי

חמיינדוס יכול לקבל בתחלת כל חדש סכום של 300 ש"ח במשך 4 שנים. לחילופין, יכול לבחור לקבל סכום חד פעמי בזמן.

בנها ששיעור הריבית הוא בשיעור נקוב של 36% לשנה במהלך 3 השנים הראשונות ו-48% לשנה במונחי ריבית נקובה לאחר מכן, מהו הסכום החד פעמי בזמן שחמיינדוס יסכים לקבל במצב שבו הוא אדיש בין החלופות?

פתרון :

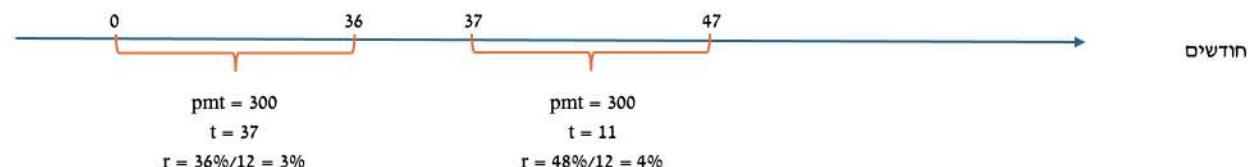
כאשר נתונים ביצירת "אדישות" (שקלות, זהות ערך כלכלי) בין חלופה בזמן לבין חלופת תשלום, הרי ששאלות זו תתקיים כאשר הערך הנוכחי של חלופת התשלומים זהה לסכום הזמן. או במלים אחרות – כל מה שצריך לעשות כאן זה לחשב ערך נוכחי להסדר התשלומים המוצע, וזהו למעשה הסכום בזמן שוביל לאדישות.

נשים לב, בדרך כלל בשאלות על ערך נוכחי ועתידי וככלי, הריבית (או התשואה) משקפת ערך של "ריבית אפקטיבית" או "ריבית דרייבית" כבירית מחדל, שהמטרה מתקופה לתקופה (למשל, משנה לחודש) מובוצעת באמצעות מערך חזקה מתאים בלבד.

אלא שבמקרה זה, הריבית הנתונה היא נקובה. והשאלה העוקבת – אם היא נקובה, הרי שבדרך כלל אנו רגילים לקבל נתון שמייצג כל כמה זמן הריבית מחושבת, כדי להמיר אותה. כאן, אין לנו כזו.

**ברירת מחדל: אם יש בשאלת ריבית נקובה והשאלה כוללת סדרת תשלום, יש להניח שהריבית הנקובה מחושבת כל מועד תשלום.**

זה הציג, לפיכך :



ערך נוכחי לזמן 0 סדרה ראשונה (שמאלית) :

מדובר בסדרה שמת>Allה בזמן 0. הערך הנוכחי של הסדרה מקפץ לזמן 1 – ("אותה אחריה"). נתקן קדימה חודש אחד על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית פעם אחת.

$$PV_0(\text{Series1}) = 300 * PVFA(3\%, 37) * (1 + 3\%)^1$$

ערך נוכחי לזמן 0 סדרה שנייה (ימנית) :

מדובר בסדרה שמת>Allה בזמן 37. הערך הנוכחי של הסדרה מקפץ לזמן 36 ("אותה אחריה"). נתקן עוד לאחר, 36 חודשים, כדי לבטא את התוצאה במונחי זמן 0 :

$$PV_0(\text{Series2}) = 300 * PVFA(4\%, 11) * (1 + 3\%)^{-36}$$

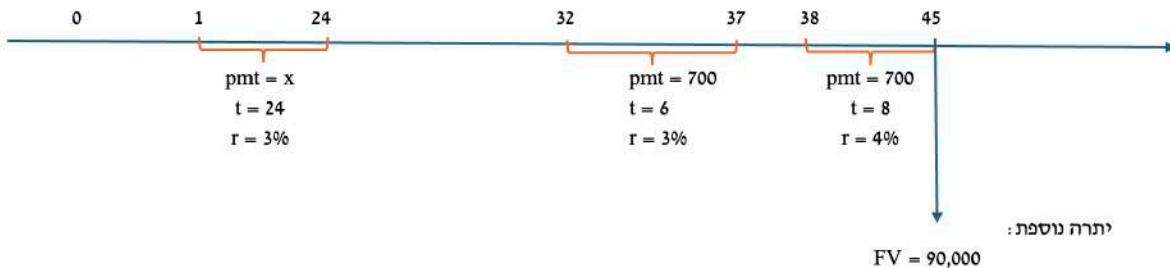
חיבור שני ביטויי העריכים הנוכחיים הוא הסכום בזמן שוביל לאדישות.

**שאלה 1013 – הפקודות, משיכות ויתרה (בונוס: תשואה = ריבית)**

ד"ר צבאן מפקיד בפקדון סכום המקנה תשואה בשיעור 3% לחודש, סכום חודשי קבוע, וזאת במשך שנתיים. לאחר 8 חודשים מההפקדה الأخيرة, הוא מתייחס למשך 14 משיכות בסכום של 700 ש"ח לחודש. לאחר 6 משיכות שיעור התשואה עולה ל-4% לחודש ובתום המשיכות נותר לד"ר צבאן בפקדון סכום של 90,000 ש"ח. מהו הסכום החודשי שהד"ר חסך?

פתרון :

גם שאלה זו עוסקת באיזון אקטוארי: סדרות הפקדה שלאחריהן סדרות משיכה. אמנם יש כל מיני שינויים והגדירות מילוליות שמסבכות את הציג, אבל זה טכני ותכל' נטמודד. בין היתר – עניין נוסף: כאשר אומרים שבסיום התקופה נותר סכום נוסף בפקדון, פשוט מתייחסים אליו כאל משיכה נוספת, ובבטעאים גם אותה במונחי נקודת הזמן של ההפקדה الأخيرة.



להלן הביטוי המשווה בין הערך העתידי של הפקודות לערך הנוכחי של המשיכות :

$$x * FVFA(3\%, 24) = 700 * PVFA(3\%, 6) * (1 + 3\%)^{-7} + 700 * PVFA(4\%, 8) * (1 + 3\%)^{-13} + 90,000 * (1 + 4\%)^{-8} * (1 + 3\%)^{-13}$$

אגף שמאל מבטא את הערך העתידי של הפקודות למועד ההפקדה الأخيرة, זמן 24. המחבר הראשון באגף ימין מבטא את סדרת המשיכות הראשונה (32-37) לאותה נקודת זמן. הואיל וסדרה זו החליה ב-32, חישוב ערכיה הנוכחי מוביל אוטומטית לזמן 31, וכך לתקן לזמן 24 (נקודת הזמן המשותפת) ביצעונו מכפלה נוספת עם חזקה שלילית של 7.

המחובר השני באגף ימין מבטא את סדרת המשיכות השנייה (38-45) בסביבת ריבית אחרת. חישוב ערכיה הנוכחי של הסדרה מוביל "אחדת אחוריה" ביחס לתחילת הסדרה, כלומר לזמן 37, וההתאמה מ-37-32-24-24 צריכה להתבסס על הריבית לפרק הזמן בין שתי נקודות אלו – ריבית של 3%, ומספר תקופות התאמה של 13.

המחובר השלישי באגף ימין מבטא את היתרה. אמרנו שליתרה צבורה לאחר סיום המשיכות מתייחסים כל משיכה נוספת, שגム אותה צריך לבטא כמו כל המשיכות האחרות במונחי נקודת הזמן המשותפת – נקודת ההפקדה الأخيرة. לכן, לקחנו סכום של 90,000 כסכום חד פעמי, והתאמנו אותו לאחר: 8 תקופות לאחר ריבית 4% ו-13 תקופות נוספות לאחר ריבית 3%. יש לפטור את המשואה ולהלץ.

**שאלה 1014 – הלוואה בתשלומים שווים, עם ריביות משתנות (לימוד עצמי)**

פרופ' להב נטל הלוואה בסך 100,000 ש"ח, הנפרעת בתשלומים חודשיים שווים (לוח סילוקים שפייצר) במשך 3 שנים.

בהתאם לתנאי ההסדר, ההלוואה נושאת ריבית חודשית בשיעור 3% במהלך השנה הראשונית, ובשיעור חודשי של 4% בשנה הנותרת.

בחלוף שנתיים וחודש (רגע לאחר התשלום ה-25) העניק הבנק ללקוח הטבה למשרתי מילואים. בהתאם לתנאי הטבה, הריבית החודשית בגין הלוואה בתקופה הנותרת תהיה 1% בלבד.

נדרש: מהו החסוך החודשי של המילואימניק בכל אחד מהתשלומים 36-26 (11 התשלומים האחרונים) בגין הטבה לה זכה?

**פתרון :**

ידוע לנו שסכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזירה. כאן, מדובר בערך הנוכחי של 2 סדרות תשלום, שבכלן התשלום קבוע (ולכן יסומן כ-א). סדרה ראשונה כוללת 24 תשלום קבועים שעבורם חשב ערך הנוכחי בריבית 3%, והסדרה השנייה כוללת 12 תשלום נוספים שעבורם חשב ערך הנוכחי בריבית 4%. אלא שעבור הסדרה השנייה זו (אם תאיירו ציר תוכלו לראות בຄלות) הערך הנוכחי של הסדרה מוביל בזמן 24, ולכן יש לתרום את התוצאה מ-24 ל-0 בריבית 3%. כך מקבלים:

$$x * PVFA(3\%, 24) + x * PVFA(4\%, 12) * (1 + 3\%)^{-24} = 100,000$$

ממשוuat פתרון זו ניתן לחץ את סכום החזר המקורי, שהוא x. מתקבל בקירוב הערך הבא (טיעיות חישוב ייתכנו, עדכנו אותו אם זה קרה, אבל הרצינול לעיל תקין):

$$x \approx 4,634$$

כעת מספרים לנו שלאחר התשלום ה-25 מבוצעת פרישה מחדש של ההחזרים בריבית שונה. לשם כך علينا לחשב את יתרת הלוואה למועד זה, שמדובר מרכיבת מהערך הנוכחי של 11 התשלומים הנותרים למועד זה, מהווים בריבית טרם השינוי (הערך הנוכחי של התשלומים המקוריים 36-26, מתואימים ל-25, עבר השינוי):

$$BAL_{25} = 4,634 * PVFA(4\%, 11)$$

כך מקבלים:

$$BAL_{25} \approx 43,211$$

כעת, נפרוס יתרה זו על פני 11 תשלוםים ובחתבסט על הריבית החדשה:

$$43,211 = y * PVFA(1\%, 11)$$

מתתקבל שגובה התשלום החדש שהוא y:

$$y \approx 4,170$$

מה שמצויב על חסוך חודשי בסכום של:

$$x - y = 4,634 - 4,170 = 464$$

## נושא חדש - עולם חדש: יח' 6 - כדיות פרויקטים - מבוא בסיסי מאד

הואיל ואופ"ל 01 עוסק רובו ככולו ביחס' 5, בה התמקדנו עד כה. יחד עם זאת, האופ"ל כולל גם התייחסות ליחס' 6 בנושא כדיות פרויקטים (בדרך כלל - בrama של שאלת תיאורטית ספציפית). לכן, נציג כאן את ה"בסיס" להבנה של מהות פרויקט והגדרתו, כבסיס להגדרת הקритריונים והחישובים על בסיסם נבחן את כדיותם במפגש הבא.

### שאלה 57 - מבוא לפרויקטים

הסביר מהו פרויקט בהתאם להגדרות הקורס.

התשובה:

פרויקט הוא הגדרה ברורה של סכומי תזרימי מזומנים (חיוביים ושליליים) שניבאו מעסקה שחברה שוקלת לבצע. למשל, בהחלט יכול להיות ייצוג של פרויקט שנראה כך (באלפי ש"ח):

זמן	2	1	0	3
תזרים	80	40	-100	90

### שאלה 58 - סוגי הפרויקטים הקיימים

הסבירו מהם סוגי הפרויקטים האוטונומיים (כמפורטים על פרויקט בודד<sup>9</sup> - מאיזה סוג הוא יכול להיות).

התשובה:

פרויקטים **"קונבנציונליים"** של השקעה. שתזרימיו הראשון / הראשונים שליליים, ולאחר מכן, כל התזרמים חיוביים. למשל:

זמן	2	1	0	3
תזרים	80	40	-100	90

זמן	2	1	0	3
תזרים	300	-200	-100	400

פרויקטים **"קונבנציונליים"** של הלוואה (נטילת הלוואה). שתזרימיו הראשון / הראשונים חיוביים, ולאחר מכן, כל התזרמים שליליים. למשל:

זמן	2	1	0	3
תזרים	-80	-40	100	-70

זמן	2	1	0	3

<sup>9</sup> בהקשר זה - "פרויקט בודד" = פרויקט ספציפי, שבמבחן נבש כלים לבחינת כדיותו, בשונה ממרקמים אחרים שבהם נדרש לדרג או לתעדף בחירה בין קבוצת פרויקטים.

-50	-90	40	60	תזרים
-----	-----	----	----	-------

בשני סוגי הפרויקטים **הكونבנציונליים**, תזרים המזומנים משנה את סימנו (משלילי לחובי או להפץ) **פעם אחת בלבד**, ופעם אחת בדיקות.

פרויקטים **"לא קונגנציונליים"** = כל פרויקט שלא עונה להגדרות לעיל, בעצם : פרויקט שתזרימי המזומנים שלו הופכים סימן יותר מפעם אחת (או שלא הופכים סימן כלל- מקרה פינתי שפחות מדברים עליו בקורס). נunik כמה דוגמאות לפרויקטים לא קונגנציונליים :

4	3	2	1	0	זמן
4,900	-100	1,200	-800	-500	פרויקט ד
-100	700	900	700	-500	פרויקט ה
-1,700	10	-500	900	800	פרויקט ו
50	-1,900	-900	1,500	1,000	פרויקט ז

**שאלה 59 - הקשרים בין סוגי פרויקטים - כמשמעותם לנו "קבוצת" פרויקטים (זוג פרויקטים או יותר) הסבירו מהם סוגי הקשרים הקיימים בין פרויקטים?**

התשובה :

א. **פרויקטים "בלתי תלויים" [מאד נפוץ]** = שיביזוע הפרויקט האחד או אי ביצועו לא משפיע על الآخر.

למשל, שירן שוקלת לפתח פרויקט פיצריה בעפולה, ופרויקט המכירות נקבע בטהילנד.

כאשר הפרויקטים הם בלתי תלויים, ניתן לבצע רק אחד מהם, את שניים או אף אחד - ללא שינוי בתנאים המספריים שלהם.

ב. **פרויקטים "משלימים" (פחות נפוץ)** = שיביזוע הפרויקט האחד תורם או עוזר להכנסות מפרויקט אחר.

למשל, שירן פתחה פיצריה בעפולה, והיא מוכרת פיצות בלבד.

היא שוקלת לבצע פרויקט "נוסף" ולהתחליל לבשל במסעדה גם פסתה.

מאד יכול להיות שבקבוק הפרויקט הנוסף קהל היעד של שירן גדל - מעכשו, יבואו לשם גם זוגות חובבי פסטה לאור נרות וגם ילדים צוחנים שרצו פיצה בלי זיתים.

ונוצרת איזושהי "סינרגיה" או "יתרונו" מביצוע משותף של הפרויקטים יחד "השלם הגדל מסך חלקיו".

ג. **פרויקטים "המוחזאים זה את זה" [מאד נפוץ]** = שיביזוע הפרויקט האחד מונע / מחשיל את האפשרות לבצע את הפרויקט האחר.

למשל, לשירן יש דוכן אחד בשוק, ולפי נהלי העירייה היא יכולה למכור בו או נקניות או תחתוניות.

היא לא יכולה למכור גם נקניות וגם תחתונות, ולכן היא צריכה לבצע אחד מבין שני הפרויקטים בלבד.



לעיל: דוגמא למכונה לחימום נקייה מתוצרת Selmor. להשג בסופרפארם ובחניות האלקטרוניקה המובילות.

### הגדרת קרייטריונים לבחינת כדאיות השקעה בפרויקטים

- נושא הפרויקטים - ייחידה 6, עוסק במצבים שבהם תזרימי המזומנים המשולמים (ההשקעות) או מתוקבים (תקבולים והכנסות) בדבר פרויקט ידועים ומוגדרים.
- בהתבסס על הנתונים וכליים של ערך הנוכחי, מתבושים קרייטריונים שימושיים לבחינת כדאיות ההשקעות ודרוגם במצבים שונים.
- הקרייטריונים (הכליים) שימושיים לקבע החלטה ומענה לשאלת: "האם פרויקט הוא כדאי?" וכן לשאלת "UMBין כמה פרויקטים - מי מהם כדאי?" המ 4 במספר:

קיצור באנגלית	קיצור בעברית	שם מלא אנגלית	שם מלא בעברית	משמעות
NPV	ענין	Net Present Value	ערך הנוכחי נקי	שווי הפרויקט בש"ח
IRR	שת"פ	Internal Rate of Return	שיעור תשואה (%)	שיעור תשואה פנימי
PI	-----	Profitability Index	מדד הרוחניות	כדאיות יחסית
-----	-----	-----	הכנסה נדרשת	החוזה הכספי הנוכחי

### שאלה 59.1 – שימוש בסיסי של הקרייטריונים – פרויקטים קונבנציונליים של השקעות בפני חברת "הנחר הנצחי" בע"מ עומדות אפשרויות ההשקעה הבאות:

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

מחיר הxon של החברה הוא 4% לשנה.

נדרש:

- באיזה סוג פרויקטים מדובר? נquo.
- חשבו את כל 4 הקרייטריונים לבחינת כדאיות ההשקעות. בהנחה שהפרויקטים בלתי תלויים, מי מהם כדאי לבצע?
- דרגו את הפרויקטים לפי הקרייטריונים PI, NPV, IRR, PI בהנחה שניתנו לבצע אחד מהם בלבד (קרי: שהפרויקטים מוצאים זה את זה).
- הסבירו ממה נובע ה嵎 הפרויקטים השונים לפי הקרייטריונים השונים.

פתרון:

#### פתרון סעיף א – באיזה סוג פרויקטים מדובר? נquo

מדובר בפרויקטים קונבנציונליים (שכן הסיכון המתמטי של תזרימייהם מתחפה פעמי אחת בלבד, משלילי לחוביי במעבר מזמן 0 לזמן 1). תח הסוג של הפרויקט הקונבנציוני הוא פרויקט קונבנציוני של השקעות (כי התזרים הראשוני שלילי ולחוביים מתרחשים רק לאחר מכן).

**פתרונות סעיף ב – חשבו את ערכיו כל אחד מ-4 הקריטריונים לבחינות כדאיות ההשקעות**

**נתחל מקריטריון ה- NPV – Net Present Value** ובערבית – ערך נוכחי נקי (ענ"נ). קритריון זה מביא בחשבון את כל תזרימי המזומנים מהפרויקט ללא יוצא מן הכלל – גם חיוביים וגם שליליים – ומהוון אותם (מחשב עבורם ערך נוכחי) בזמן 0.

הנתונים הם :

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

ובנוסך נתנו מחיר ההוו<sup>10</sup> של החברה הוא 4% לשנה – משרות אותנו כריבית להיוון.

$$NPV_A = -100 + 40 * PVFA(4\%, 4) = -100 + 40 * 3.63 = 45.2 > 0$$

$$NPV_B = -1,000 + 350 * PVFA(4\%, 4) = -1,000 + 350 * 3.63 = 270.5 > 0$$

בעצם : כתלות בהקשר, אנחנו תמיד ניישם את כלי ה-PV שנלמדו ביחידה 5 כדי לחשב את ה-NPV שהוא PV כולל או נתו המבטא את הערך המכרי הנקי של כלל השפעות התזרימיות של העסקה (כולל השקעות, עליות... כולל הכל).

התוצאה המתתקבלת בחישוב ה-NPV היא נקייה במובן זה שערך חיובי שלו משמעו כדאיות הפרויקט נקודה (למעט במצבים של צורך לדרג / לבחור, נראה בהמשך). הוואיל ובמקרה זה מדובר בפרויקטים בלתי תלויים, וזה NPV של שניהם חיובי, כדי לבצע את שניהם.

**מעבר לקריטריון הקל ביותר להבנה – ה- IRR – שיעור תשואה פנימי (Internal Rate of Return) – שת"פ** בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות משקף את שיעור התשואה התקופתי באחזois בפרויקט. וכייד נחשבו? מתמטית : נתבביס על משווהת ה-NPV, במקום מחיר ההוו נציג נעלם (IRR), ונשווה את הכל ל-0.

$$IRR_A: 0 = -100 + 40 * PVFA(IRR_A, 4) \rightarrow IRR_A \approx 22\% > 4\% = k$$

$$IRR_B: 0 = -1,000 + 350 * PVFA(IRR_B, 4) \rightarrow IRR_B \approx 15\% > 4\% = k$$

<sup>10</sup> מדוע מחיר הוו ולא סתם "ריבית"? משום שכאשר דנים ביחידה 6 בקטגוריות פרויקטים, דנים בה מנקודות ראות חברות. בקשר חברות בשונה מפרטיים יש מגוון מקורות מימון לפרויקט – גם הלוואות (בריביות שונות), גם אג"ח, גם מנויות וגם מכשירים פיננסיים נוספים. כל אלו יוצרים מעין כור היתוך של עליות מימון שונות, שתוצאתן המשוكلת נקראת מחיר הוו. בשלהז זהה אין שום צורך לדעת כיצד לחשב מחיר הוו זה, זהו רק הסבר מרחיב דעת מדוע משתמשים בחברות במונה מחיר הוו ולא ריבית.

כדי לבחון כדאיות פרויקט בודד קונבנציונלי של השקעה לפי IRR נדרש שה-IRR יהיה גבוהה יותר ממחיר ההון (k). עצם היותו של ה-IRR ערך חיוויי אינו מספיק. כאן – בהינתן שני הפרויקטים מניבים תשואה אחוזים (IRR) שהיא גבוהה יותר ממחיר ההון – שני הפרויקטים כדאיים (כל עוד אין מגבילה המכירה לבחור ביניהם).

**סיכום ביןים : בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות שם בלתי תלויים (לא מגבלת)**

קבל לפि NPV כל פרויקט שמקיים :  $NPV > 0$

קבל לפি IRR כל פרויקט שמקיים :  $IRR > k$

**מעבר לקריטריון האיזוטרי (יותר נדייר) – PI – ממד הרווחיות (Profitability Index):** בדומה ל-IRR, גם קритריון זה הוא קритריון יחס. אלא שהוא מחשב את הפרופורציה בין הערך הנוכחי של התקבולים לבין הערך הנוכחי של התשלומים. אם היחס גדול מ-1, סימן שהפרויקט כדאי. יש שתי גרסאות לקריטריון זה בرمת הנוסחאות :

גרסה 1 : ערך נוכחי התקבולים חלק ערך מוחלט של ערך נוכחי תשלומים

$$PI = \frac{PV_+}{|PV_{(-)}|}$$

גרסה 2 : עניין (NPV) בתוספת סכום ההשקעה (בערך מוחלט) וכל זה חלקו סכום ההשקעה (בערך מוחלט)

$$PI = \frac{NPV + I}{I}$$

ניישם :

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

ובנוסף נתון מחיר ההון<sup>11</sup> של החברה הוא 4% לשנה – משרת אותנו כריבית להיות.

чисוב ממד הרווחיות – נוסחה גרסה 1 :

$$PI_A = \frac{40 * PVFA(4\%, 4)}{|-100|} = 1.452 > 1$$

<sup>11</sup> מדוע מחיר הון ולא סטטס "ריבית"? משום שכאשר דנים ביחידת 6 בפרויקטים, דנים בה מנוקדות ראות חברות. בקשר חברות בשונה מפרטיים יש מגוון מקורות מימון לפירמה – גם הלואות (בריביות שונות), גם אג"ח, גם מנויות וגם מכשירים פיננסיים נוספים. כל אלו יוצרים מעין כור היתוך של עלויות מימון, שתוצאתן המשוקלת נקראת מחיר הון. בשלב זהה אין שום צורך לדעת כיצד לחשב מחיר הון זה, זהו רק הסבר מרחיב דעת מודע משתמשים בחברות במונח מחיר הון ולא ריבית.

$$PI_B = \frac{350 * PVFA(4\%, 4)}{|-1,000|} = 1.2705 > 1$$

чисוב מדד רוחניות – נוסחה גרסה 2 :

$$PI_A = \frac{45.2 + 100}{100} = 1.452 > 1$$

$$PI_B = \frac{270.5 + 1,000}{1,000} = 1.2705 > 1$$

הויאל ולשניהם הפROYקטים מדד רוחניות גבוהה מ-1 בהיעדר מגבלה, שניהם כדאיים. אני אפילו יכול לומר שמתמטית – PI גבוהה מ-1 משמעו בהכרח ערך NPV גבוה מ-0.

**מעבר לקריטריון האחרון – החזר הון שנתי (אח חורג):** מדובר בסכום ההכנסה הקבוע שפרויקט צריך להניב, במינימום, על מנת שייהי כדאי. בrama טכנית, את החזר ההון השנתי נחשב על ידי חלוקת הערך הנוכחי (המוחלט) של התשלומים הנדרשים לשם הפרויקט, ב- PVFA המתאים למחיר ההון ומספר השנים של הפרויקט :

$$CR = \frac{|PV_{(-)}|}{PVFA(k, n)}$$

כדי שפרויקט יהיה כדאי – ההכנסה השנתית הנובעת ממנו צריכה להיות גבוהה מ (או לפחות שווה ל-) החזר ההון השנתי.

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

מחיר ההון : 4%

$$CR_A = \frac{100}{PVFA(4\%, 4)} = \frac{100}{3.63} = 27.54 < 40 = \text{Actual Annual Income}$$

$$CR_B = \frac{1,000}{PVFA(4\%, 4)} = \frac{1,000}{3.63} = 275.4 < 350 = \text{Actual Annual Income}$$

בשני המקרים, קיבלנו שהPROJECTים כדאיים גם לפי קритריון החזר ההון השנתי, שכן עברו שני הפROYקטים ההכנסה השנתית המינימלית שתצדיק את הפרויקט (27.54 ו- 275.4 בהתאמה) נמוכה יותר מההכנסה השנתית הצפוייה להתקבל בפועל בגין ביצועם.

### פתרונות סעיף ג – ריכוז הנתונים ודרוג בהנחה שנדרש לבחור בין הפרויקטים לפי NPV, IRR, PI, CR

נתחל בلسמן את הערך הגבוה מבין השניים בכל קритריון וקריטריוון :

B	A	קריטריון	שם בעברית
270.5	45.2	<i>NPV</i>	ענ"נ (שווי)
15%	22%	<i>IRR</i>	שת"פ (תשואה ב-%)
1.2705	1.452	<i>PI</i>	מדד רווחיות (פרופורציה)
275.4	27.54	<i>CR</i>	החזר הון שנתי לא משמש לדירוג (למידע בלבד)

שאלות הקשורות הבאות :

- מדוע בכלל מתקיימת סטירה?
- בהתקיים סטירה בין הדירוג על פי הקריטריונים השונים, מי מהם יכריע?

ראשית, לגבי הסטירה : הוואיל וגם IRR וגם PI הם ממדדים יחסיים, הרי שהם וגביהם לגודל השקעה הראשוני. משל למה הדבר דומה? אם אומרים לי שאני יכול להשקיע היום 10agi ולקלב מחר 20agi. ה-IRR הוא 100% ליום. אבל כמובן שהשווי נטו של עסקה כזו הוא מאד נמוך. ואם אני צריך לבחור בין עסקה כזו לאחרת שבה השקעה היום 1,000,000 ש"ח וากבל עוד חודשיים 1,500,000 ש"ח, די ברור לי שלמרות שהתשואה נמוכה משמעותית באחזוים, העסקה תתרום לערך החברה הרבה יותר.

از בעצם : קритריון ה-IRR הוא בעל מגבלות, שאחת מהן מתקיימת כאשר נדרש לבחור בין פרויקטים בעלי גודל השקעה שונה (יש סיבות מסוימות, כגון אופק השקעה, שיעור תשואה על השקעות חוזרות וכיו"ב, במסגרת דיוון תיאורטי בich' 6 ורציפה, שבהם לא עמוק).

אם מבקשים בשאלת הכריע ספציפית לפי IRR או PI : תשובתנו תהיה A.

אם מבקשים להכריע מי עדיף לפי NPV : תשובתנו תהיה B.

אם מבקשים לדעת מה ההחלטה הנכונה כלכלית? התשובה B.

**שאלה 60 - כדאיות פרויקטים - מدد הרווחיות – עולם עם מגבלת התקציב כספית**

לחברה הוצעו להשקעה 5 פרויקטים :

פרויקט	ה השקעה באלפי ש"ח	מדד הרווחיות
א	1,000	1.15
ב	600	1.2
ג	300	0.83
ד	700	1.17
ה	900	1.1

החברה כפופה למגבלת התקציב של 2,000,000 ש"ח (2,000 אלפי ש"ח). נתונים אלו :

- מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה להשקיע לפי קритריון מدد הרווחיות?
- מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה אם כוונתה היא למקסם את ערכה?

**מינימציו (כיצד תוקפים את הבעיה)**

בתרגיל הבסיסי הקודם הצגנו מקרה קל יחסית שבו علينا לבחור באיזה פרויקט להשקיע מבין שניים. במקרים רבים בעולם האמיתי, המגבלה מורכבת יותר ; שכן יש לנו התקציב השקעות נתון, ונשאלת השאלה באילו פרויקטים להשקיע באופן שימצא את מגבלת התקציב בצורה הטובה ביותר – כך שיתרום לערך החברה במידה המירבית.

השאלה מבקשת מני לבחור את הפרויקטים המומלצים לפי קритריון ממד הרווחיות בתחילת (מהגבוה לנמוד, ובכפוף למגבלת התקציב) ואז לבחור באופן שימקסם ערך (מורכב יותר – וمبוסס על עניין).

**פתרון סעיף א: מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה להשקיע לפי קритריון ממד הרווחיות?**  
 ממד הרווחיות - Profitability Index או PI הוא קритריון לבחינת כדאיות השקעות – שתוצאותו יחסית. ממד זה מחושב בטור הпроפורציה (היחס) שבין הערך הנוכחי הפוקט לבין הערך הנוכחי של התשלומים בפרויקט / ההשקעה בערך מוחלט.

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולים}}}{|PV_{\text{תשומים}}|}$$

כאשר ערך ה - PI גדול מ-1 הפרויקט כדאי. מדוע? כי זה אומר:  $|PV_{\text{תשומים}}| > PV_{\text{תקבולים}}$ , כלומר ההפרש בין סך התקבולים בערך הנוכחי לסך התשלומים בערך הנוכחי הוא חיובי, כלומר בסך הכל לפרויקט יש שווי חיובי – עניין (NPV) חיובי :

$$PI > 1 \rightarrow \frac{PV_{\text{תקבולים}}}{|PV_{\text{תשומים}}|} > 1 \rightarrow PV_{\text{תקבולים}} > |PV_{\text{תשומים}}| - PV_{\text{תשומים}}$$

כלומר בהכרח מתקיים :

$$\text{כדי! } PI > 1 \rightarrow NPV > 0 \rightarrow$$

נוסחה נוספת המבטאת את ה- PI היא :

$$PI = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

כאשר :

הערך  $NPV$  הוא שווי הפרויקט נטו (ענ"נ).

הערך  $I_0$  הוא סכום ההשקעה הראשונית.

נוסחה זו ניתנת לבטא באמצעות העברת אגפים פשוטה כך שתבטא את הקשר בין PI לבין שווי הפרויקט באופן

כמפורט :

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

לאחר מבוא זה, נחזר לשאלת - אלה הפROYקטים, מגבלת התקציב היא 2,000, והחברה פועלת לפי מודד הרווחיות. אילו פרויקטים היא תבחר לבצע?

פרויקט	ההשקעה באלפי ש"ח	מדד הרווחיות
א	1,000	1.15
ב (נבחר ראשון)	600	1.2
ג	300	0.83
ד (נבחר שני)	700	1.17
ה	900	1.1

תחילה, נבחר בפרויקט ב, שמדד הרווחיות שלו הגבוה ביותר (וכך החברה בוחרת לנטוון). פרויקט ב "שורף" (מנצל) 600 אלף ש"ח מיותר מגבלת השקעה של 2,000. לכן יתרת התקציב לניצול יהיה  $1,400 - 600 = 800$  ש"ח. פרויקט "הבא בתור" מבחינת מדי הרווחיות הגבוהים ביותר הוא פרויקט ד. פרויקט זה מנצל השקעה בסך 700 ש"ח, יתרת התקציב לניצול:  $800 - 700 = 100$ . עם יתרת התקציב זו, יוכל לבצע את פרויקט ג בלבד (כי פרויקטים א ו-ה דורשים התקציב גבוה מ-700). אלא, שלאור העובדה שמדד הרווחיות של פרויקט ג נמוך מ-1, בהגדרה הוא אינו כדאי (שוויו שלילי) ולכן הוא "יורד מהפרק".

לכן, החברה תבחר לבצע בהינתן הדירוג לפי מודד הרווחיות את פרויקטים ב ו-ד.

לתשומת הלב: כאשר מבקשים לבצע דירוג או החלטה לפי קרייטריון מסוים ספציפי (כגון מודד הרווחיות) המשמעות היא שיש לבצע את הבחירה או הדירוג כאמור לפי קרייטריון זה בלבד - לא לפי חילוצים הנגזרים ממנו או קרייטריונים אחרים (גם אם קיימת להם רלוונטיות כלכלית).

**פתרונות סעיף ב: מהט הפROYקטיטים שבחור החברה אם כוונתך היא למקסם את ערךה?**  
 בuest, השאלה משתנה: יתרה על הצורך לדרג לפי ממד הרוחניות, עליינו להגיע למסקם ערך. כשמדובר על ערך = ערך נוכחי, או בקיצור - עניין ערך נוכחי נקי - NPV.  
 במקרה אחר, צריך לבנות מתחם הפROYקטיטים האפשריים את אותו צירוף שמקסם את ה-NPV בכספי.

כדי לישם ברמה הטכנית, נועל בשני שלבים:  
 שלב 1 - ניישם את הקשר המתמטי שהראינו בין ממד הרוחניות, סכום ההשקעה וה-NPV:

$$PI = \frac{NPV + I}{I} \rightarrow NPV = PI * I - I$$

ולכן תמיד מתקיים הקשר הבא שמאפשר חישוב ה-NPV בהינתן ממד הרוחניות וסכום ההשקעה:

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

שלב 2 - נבחר את הפROYקטיטים שמקסמים את ה-NPV המצרי (בכספי למוגלה).

**שלב 1 - חישוב NPV על בסיס מגבלת תקציב וסכום השקעה:**

פרויקט	ההשקעה באלווי ש"ח	מדד הרוחניות	NPV
א	1,000	1.15	$1.15 * 1,000 - 1,000 = 150$
ב	600	1.2	$1.2 * 600 - 600 = 120$
ג	300	0.83	אין צורך לחשב, שווי שלילי כי $PI < 1$
ד	700	1.17	$1.17 * 700 - 700 = 119$
ה	900	1.1	$1.1 * 900 - 900 = 90$

**שלב 2 - נבחר את הפROYקטיטים שמקסמים את ה-NPV המצרי (בכספי למוגלה)**  
 כדי למקסם את ערך החברה, עליי לבחור בקומבינציה (שילוב) פרויקטים, אשר מאפשר במסגרת תקציב ההשקעה (סך הכל או פחות) גם מוביל את סיכום ערכיה ה-NPV לערך מירבי.

$$NPV_{\text{א,ב}} = 150 + 120 = 270$$

$$NPV_{\text{א,ד}} = 150 + 119 = 269$$

$$NPV_{\text{ב,ג}} = 150 + 90 = 240$$

$$NPV_{\text{ב,ד}} = 120 + 119 = 239$$

$$NPV_{\text{ג,ד}} = 120 + 90 = 210$$

$$NPV_{\text{א,ג}} = 119 + 90 = 209$$

קיבלוño שהקומבינציה המובילה למקסימום שווי החברה היא **ביצוע הפרויקטיטים א ו-ב**. זו התשובה הסופית **לסעיף ב**.

לעומת זאת, בסעיף א מצאנו שלפי ממד הרוחניות, החברה תבחר לבצע את פרויקטים ב ו-ד. במלים אחרות, הבחירה של החברה בסעיף א **איןנה אופטימלית** ואינה מושימה את העיקרון להשאת ערך הפירמה לבעליה.

הרחבת הסבר :

מדד הרוחניות הוא ממד כדיות יחסית; הוא בוחן את היחס (הפרופורציה) בין התקבולים לתשלומים. הוא לא משקף ערך כספי, שווי כספי של הפרויקט - אלא הוא מרכיב מפרופורציה.

שאלה שודרשת את השווי של הפרויקטיטים, את הערך שלהם (ובכך מתמקדים בסעיף השואל כיצד נמקם ערך) למשה דורך את ה-  $NPV$  של כל אחד מהפרויקיטים.

ברוב המקרים, נחשב  $NPV$  בעצמו, מתמטית, בלי קשר למדד הרוחניות, על בסיס תזרימי המזומנים הנתוניים של הפרויקט. אלא שכן, תזרימי המזומנים אינם נתונים (אלא רק ההשקעה) ולכן ניעזר כगלגול חילוץ בנוסחתה  $NPV = PI * I_0 - I_0$

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

כאשר :

הערך  $NPV$  הוא שווי הפרויקט (ערך נוכחי נקי, ענ"ע).

הערך  $PI$  הוא ממד הרוחניות (שכן, נתון).

הערך  $I_0$  מייצג את סכום ההשקעה.

#### שאלה 60.1 – דיוון בהלוואות כפרויקיטים (רגיל, שפייצר, בלון)



מוראל שוקלת ליטול הלואה בסך 200,000 ש"ח. מציעים לה את המסלולים הבאים בגין ההלוואה.

כל המסלולים ל-4 שנים (בתשלומים שנתיים) וכולם נושאים ריבית שנתית בשיעור 15%.

מסלול א : לוח סילוקין רגיל (חזרי קרן שווים).

מסלול ב : לוח סילוקין שפייצר (תשלומים שווים).

מסלול ג : מסלול "בלון" – תשלום קרן ייחד עם הריבית הציבורית בתשלום אחד בתום 4 שנים.

נדרש :

- א. הציגו את תזרימי המזומנים על ציר הזמן (בטבלה) בגין כל אחת מההלוואות.
- ב. מהו שיעור התשואה הפנימי (השת"פ – ה-IRR) של כל הלואה.
- ג. הציגו בתרשים את הגרפים המיצגים את הקשר בין מחיר ההון לבין ה-  $NPV$ . הסבירו את הממצאים.

פתרון נדרש א – הצגת תזרימי הלווחות

שם	סימון	0	1	2	3	4
רגיל	א	200,000	-80,000	-72,500	-65,000	-57,500
שפיצר	ב	200,000	-70,053	-70,053	-70,053	-70,053
בלו	ג	200,000	--	--	--	-349,801

רגיל :

$$PRN = \frac{200,000}{4} = 50,000$$

$$PMT_1 = 50,000 + 15\% * 200,000 = 80,000$$

$$PMT_2 = 50,000 + 15\% * 150,000 = 72,500$$

$$PMT_3 = 50,000 + 15\% * 100,000 = 65,000$$

$$PMT_4 = 50,000 + 15\% * 50,000 = 57,500$$

שפיצר :

$$PMT = \frac{200,000}{PVFA(15\%, 4)} = 70,053$$

בלו :

$$FV_4 = 200,000 * (1 + 15\%)^4 = 349,801$$

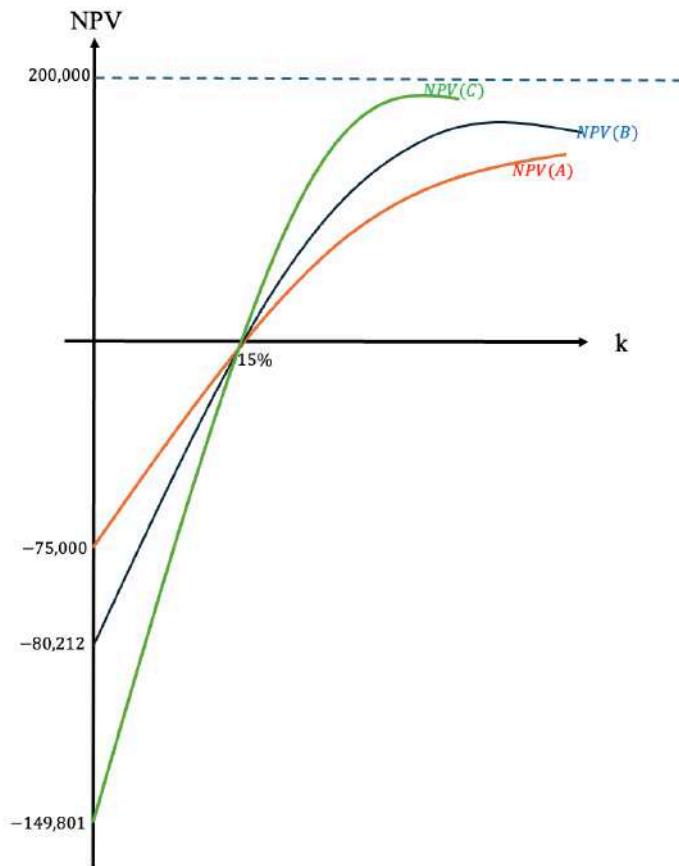
פתרון נדרש ב – מהו שיעור התשואה הפנימי (השת"פ – ה-IRR) של כל הלוואה

решפט : כאשר מדובר בפרויקט קונבנציונלי של השקעה, ה-IRR הוא שיעור התשואה התקופתי של הפרויקט. כאשר מדובר בפרויקט קונבנציונלי של הלוואה, ה-IRR הוא הריבית האפקטיבית בהלוואה (וכאן היא נתונה). לכן, בהינתן שבכל הלוואות הריבית האפקטיבית זהה, זהו גם ה-IRR של כלו.

פתרון נדרש ג – גרפ ה-NPV לכל אחד מהפרויקטים, כפונקציה של מחיר ההון

להלן טבלת התזרומים עם ההגדרות הרלוונטיות של נק' החיתוך ונק' המקסימום החיוני לאפיון התרשימים שיוופיו בעמוד הבא .

נק' מקסימום NPV עם ציר k	נק' חיתוך עם ציר k	נק' חיתוך NPV	סכום הלוואה	סכום תזרומים
רגיל	א	200,000	IRR	4 -57,500 15%
שפיצר	ב	200,000		3 -65,000 15%
בלו	ג	200,000		2 -72,500 15%



על בסיס הגרף, ניתן לראות שהשווי הגובה ביותר (ה- $NPV$  המרבי) בחרבות שבחן מחיר ההון מעל 15% הוא של פרויקט ג (פרויקט הלוואת הבלון).

השווי הנמוך ביותר בערכי מחיר ההון אלו יהיה זה של פרויקט הלוואה הרגילה.

כאשר מחיר ההון נמוך מ-15%, התמונה מתחفت: ראשית, כל הלוואות הופכות להיות לא כדיאות (בעלות ערך שלילי, מה שהגינויו במצב שבו מחיר ההון שמייצג ריבית אלטרנטטיבית נמוכה מהריבית בלוואות המוצעת) אך מעבר לכך, הלוואה הגורעה ביותר היא הלוואה ג (בלון).

ההיגיון בכך הוא: אמנם כל הלוואות הן ל-4 שנים ברמה הטכנית; אבל הלוואת הבלון היא ה"ארוכה ביותר". אם זה המצב – כל שקל יוצא מני רק 4 שנים.

בלוואות א-וב מתחילה לחזור מחר, لكن יתרת הלוואה והסכום הכספי העומד לרשותי מצטמך מחר.

אם זה טוב או רע לחזור מחר? תלוי... אם מדובר בלוואה טובה (ריבית 15% והיא נמוכה מחיר ההון) אני רוצה לדבוק בלוואה לכמה שיותר זמן, וכך אעדיף את ג.

אם מדובר בלוואה פח אשפה זבל אקסית (ריבית 15% והיא גבוהה מחיר ההון) אני רוצה להפטר מהלוואה יותר מחר וכן תהייה העדפה ללוואות האחרות שモוחזרות בממוצע מהר יותר.

**שאלה 60.2 – פרויקטים לא קונבנציונליים – עיקומי ענ"ג ומשמעותם בקבלת החלטות**  
פרויקט דורש השקעה של 100, ומנייב תזרים חיובי בסך 250 בחולף שנה ותזרים שלילי בסך 200 בחולף שנתיים.

נדרש :

- באיזה סוג פרויקט מדובר?
- מהו טווח מחירי ההון שבו הפרויקט כדאי?
- אם ניתן לקבל החלטה בפרויקט זה על בסיס ה-IRR? נמקו.

פתרון :

המבנה התזרימי של הפרויקט בטבלה :

2	1	0	
תזרים			
-200	400	-100	

פתרון נדרש א – באיזה סוג פרויקט מדובר?

הואיל והסימן המתמטי של תזרימי המזומנים של הפרויקט משנה סימנו יותר מפעם אחת (ליתר דיוק – פעריים) מדובר בהגדרה בפרויקט לא קונבנציונלי.

פתרון נדרש ב – מהו טווח מחירי ההון שבו הפרויקט כדאי?

גם בשאלה זו, כמו הקודמת שפתרנו, מחיר ההון של החברה לא נתון. ולכן כדי להבין את הפרויקט וטווחי כדאיותו, נרצה ליציר את הצורה המקובלת של עקומם הענ"ג – NPV. ככלל, הראיינו כבר צורה מקובלת של עקומם ענ"ג של הלואה קונבנציונלית. תוכלו לראות בהמשך המחברת צורת עקומם ענ"ג יורץ של פרויקט קובנציונלי של השקעות.

**הנקודה היא שכאשר מדובר בפרויקט לא קונבנציונלי – אין כללים!** לכן דרכנו לפטור תתייחס לחישוב ערכיו ה-IRR תחיליה, ואו הבנה כלילית בהתאם לטיפוס הנוסחה – כיצד היא נראה, ומשם להמשיך לכדיות.

בנייה משווהת הענ"ג ככלל היא :

$$NPV = -100 + 400 * (1 + k)^{-1} - 200 * (1 + k)^{-2}$$

כדי למצוא את ה-IRR, علينا להציב כתוצאה משווהת ה- $NPV$  את הערך 0. כך נקבל :

$$0 = -100 + 400 * (1 + IRR)^{-1} - 200 * (1 + IRR)^{-2}$$

לשם נוחות, נסמן תחיליה את הביטוי  $(1 + IRR)^{-1}$  בטור X. נקבל :

$$0 = -100 + 400 * X - 200 * X^2$$

זו משווהה ריבועית שאפשר לסדר אותה :

$$-200X^2 + 400X - 100 = 0$$

לפי ההגדרות, המקדם של  $X$  בリיבוע מסומן a, המקדם של  $X$  מסומן b והערך החופשי מסומן c.

$$a = -200; b = 400; c = -100$$

פתרון המשווהה הריבועית :

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow X_{1,2} = \frac{-400 \pm \sqrt{400^2 - 4 * (-200) * (-100)}}{2 * (-200)} = 1.7; 0.3$$

מתתקבל:

$$X = (1 + IRR)^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{(1 + IRR)} \rightarrow 1.7 = \frac{1}{1 + IRR_1} \rightarrow IRR_1 < 0$$

או:

$$0.3 = \frac{1}{1 + IRR_2} \rightarrow 0.3 * (1 + IRR_2) = 1 \rightarrow 0.3 + 0.3IRR_2 = 1 \rightarrow IRR_2 = 2.333 \approx 233\%$$

از רגע שי, מה לעוזול קרה פה?

לקחתי משווהת ענ"נ של פרויקט לא קוונטציונלי.

ניסיתי לחשב את ערכיו ה-IRR.

ראשית גיליתי שקיימת מרכיבות יחסית בחישובם.

שנית, גיליתי שאין באמת משמעות כלכלית ל-IRR, משום שם יש לו שני ערכי, הרי שלא באמת נוכל לבוא ולומר מה הם מייצגים.

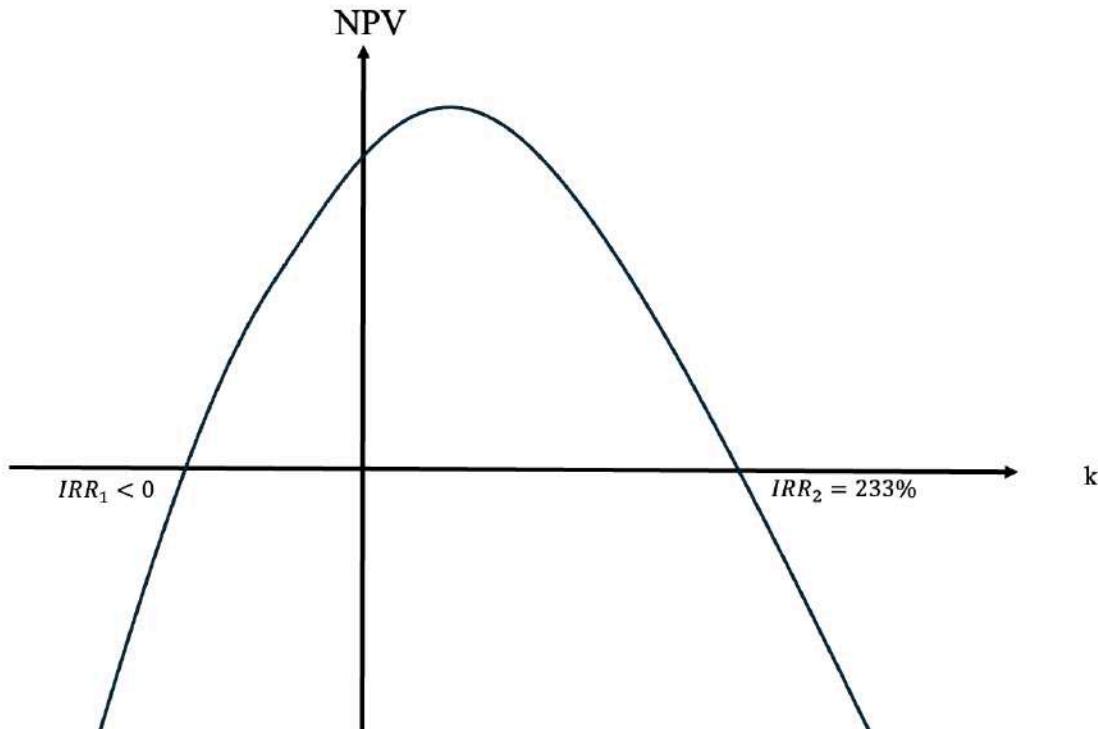
ספציפית: אם קיבלתי ש-IRR אחד הוא 233%, ו-IRR שני הוא -40%, אז מהי התשואה של הפרויקט? כמובן

שאי אפשר לדעת... כי רק מקבלים נקודות חיתוך ללא משמעות כלכלית אמיתית.

במצב כזה, השימוש היחידי שיבוצע ב-IRR זה כדי להעריך את טווח מחירי ההון שבhem יתקיים NPV חיובי.

ספציפית כאן, חילוץ ה-IRR בנקודה טכנית של נק' החיתוך עם הציר האופקי עוזר לי להסיק במקרה זה שמחיר

הון של מתחת ל-233% הפרויקט כדאי לפי גראף הענ"נ.





### שאלה 61 - החזר הון תקופתי

דונקי שוקל לבצע פרויקט, שתזירימי המזומנים שלו כדלקמן:

תזרים באלפי ש"ח	שנה
-170	1
-180	2
-90	3
200	4
200	5
200	6
200	7

מחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה.

נדרש:

- מהו העניין (NPV) והשת"פ (IRR) של הפרויקט, ומהי כדאיות הפרויקט לאורם של קרייטריונים אלו?
- הציגו את עקומת העניין של הפרויקט.
- חשבו את החזר ההון התקופתי של הפרויקט ל-4 שנים. חוו דעתכם לאור כדאיות הפרויקט לאורו.

**פתרון סעיף א - מהו העניין והשת"פ של הפרויקט, ומהי כדאיות הפרויקט לאורם של קרייטריונים אלו?**  
הunny (NPV) משקף את שווי הפרויקט במונחים של ערך נוכחי (לזמן 0).

מדובר בערך כספי העקוב במהותו עם מטרת הפירמה - השאות ערכה לבאים.

במצבים שבהם תזרימי המזומנים של הפרויקט ידועים במלואם, העניין (NPV) יחושב לפי הכליל הרלונטי מיחידה 5 לחישוב ערך נוכחי עבור התזרימיים כולם.

תזרים באלפי ש"ח	שנה
-170	1
-180	2
-90	3
200	4
200	5
200	6
200	7

הואיל ותזרימי המזומנים בכל אחת מהשנתיים 1, 2, 3 - שונים אלו מאלו, יש להווים (לחשב PV בעבורם) על בסיס חישוב ערך נוכחי לכל תזרים בנפרד (לפי נוסחת ערך נוכחי של סכום יחיד  $PV = PV * (1 + r)^{-t}$  ונסכום את התוצאות).

תזרימי המזומנים לשנים 4-7 מהווים סדרה קבועה סר"ת (סכום קבוע, ריבית = מחיר הון קבוע, תדיות קבועה) ולכן את ערכם הנוכחי המכרי נחשב באמצעות PVFA.

ערך הנוכחי של סדרה (זו שמתהילה מהזמן 4) מוביל תמיד לנקודת הזמן המוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשוני בסדרה. לכן היוון הסדרה מ-4 ואילך מוביל לזמן 3, ויש לתקן את התוצאה עוד 3 שנים לאחר.

$$NPV = -170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + 200 * PVFA(5\%, 4) * (1 + 5\%)^{-3}$$

ומקבלים :

$$NPV = -170 * 1.05^{-1} - 180 * 1.05^{-2} - 90 * 1.05^{-3} + 200 * 3.546 * 1.05^{-3} = 209.718$$

המשמעות : הערך נטו שנוצר לחברת מהפרויקט בהתחשב בכל התקabolים, בכל התשלומים, בעיתויים ובריבית היא  $209.718$  ש"ח.

ברמת קבלת החלטה - כשלוקים בפרויקט ייחיד (ולא בדירה / מגבלות תקציב) כאשר ה- NPV חיובי, כדאי לבצע את הפרויקט. במלים אחרות, הפרויקט הספציפי המוצע הוא כדאי לפי קритריון העניין.



בעוד ש- NPV מחשב שווי פרויקט נטו, בכספי - השט"פ (IRR) הוא שיעור התשואה הממוצע באחזים בפרויקט (שנתית) - שיעור הרוח השנתי הממוצע על ההשקעה.

כדי לחץ את ה- IRR, علينا להתבסס על משווהת ה- NPV (הענין) המתאימה לפרוייקט, בשני שינויים :

1. נזין את מחיר ההון (ריבית להיוון) כנעלם - IRR.
2. נשווה את המשווהת כולה ל-0.

זכור, משווהת ה- NPV הייתה :

$$NPV = -170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + 200 * PVFA(5\%, 4) * (1 + 5\%)^{-3}$$

ולאחר שני השינויים (מחיר הון כנעלם IRR והשוואה ל-0) מתבלט משווהת חילוץ ה- IRR כדלקמן :

$$-170 * (1 + IRR)^{-1} - 180 * (1 + IRR)^{-2} - 90 * (1 + IRR)^{-3} + 200 * PVFA(IRR, 4) * (1 + IRR)^{-3} = 0$$

משווהה כזו (שכלולת נעלמי ריבית גם במסגרת סדרה וגם במסגרת ביטויים נוספים באופן שיווצר משווהה מתמטית מזוועת) פותרים בקורס שלנו רק באמצעות שיטת ה"ניסוי והטעה".

עליכם להציג כמו נינגיות ריביות שונות עד אשר תגיעו לתוצאה.

הרי אנחנו יודעים שריבית 5% הערך הנוכחי חיובי. וככל שהריבית עולה, הערך הנוכחי יורד. לכן, ניתן לנסות ולהציג למשל ריבית של 10% ולראות אם התוצאה אכן 0.

אם התוצאה עדין חיובית - נמשיך ונגדיל את הריבית. למשל, ל-15%.

ואם התוצאה שלילית - נקטין את הריבית.

הויאל ופתרון בניסוי וטיעיה עשוי להיות מעט מתסכל, והואיל ובדרכ כל שיטת פתרון כזו אין צורך לישם בבחינה, ניעזר בדרך נוספת (שאינה זמינה בבחינה) - Excel.

	A	B	C	D
1			תזרים	זמן
2			0	0
3			-170	1
4			-180	2
5			-90	3
6			200	4
7			200	5
8			200	6
9			200	7
10				
11	=IRR(C2:C9)		18%	
12				

בהתאם קבלת החלטה: כשהעסקנו בקריטריון העניין (NPV) המשקף שווי - הטענה הייתה: כדאי לבצע כל פרויקט בעל עניין חיובי.

לעומת זאת, כshawוסקים בשתי פ (IRR) בפרויקט של השקעה (תזרים ראשוניים שליליים ולאחר מכן חיוביים), התוצאה - ה - IRR. מייצגת את שיעור התשואה באחזois על ההשקעה בפרויקט עצמו. علينا לבחון תשואה זו אל מול התשואה שדורשים המשקיעים (מחיר ההון).

בנתוני השאלה, נאמר מפורשות: מחיר ההון = תשואה הנדרשת ע"י המשקיעים = 5%. מקובל מאד לסמן את מחיר ההון באות  $k$ , ובהתאם כלל ההכרעה בדבר קבלת פרויקטים לפי IRR הוא:

$$IRR > k$$

וכאן מתקיים :

$$IRR = 18\% > k = 5\%$$

כלומר כדאי לקבל את הפרויקט, הויאל ותשואתו (IRR) גבוהה מציפיות / דרישות המשקיעים ( $k$ ).

**ב. הציגו את עקומת העניין של הפרויקט - ויזואлизציה של הקשר בין מחיר ההון ל- NPV**  
עוקם העניין מציג את הקשר שבין העניין לבין מחיר ההון.

עלינו לאירר מערכת צירים שצירה האנכי שלה (ה-у שלה) הוא  $NPV$  וצירה האופקי (ציר ה - x) הוא מחיר ההון  $k$ . **כאשר מדובר בפרויקטים של השקעות (משלמים, וرك או מתחילים לקטוף פירות והכנסות)** עוקם העניין תמיד בעל שיפוע שלילי ( יורד משמאל לימין). מדוע? כי בפרויקטים של השקעה, התקבולים הם בעתיד; וככל שהריבית גבוהה יותר, השווי היום של אותם התקבולים נדחים - נמוך יותר.

---

במו כן, ניתן לאפיין את נקודות החיתוך של עוקם העניין עם הצירים באופנו הבא:

نקודת החיתוך עם הציר האופקי (B) :  $h - IRR$  של הפרויקט (חישוב בסעיף א).

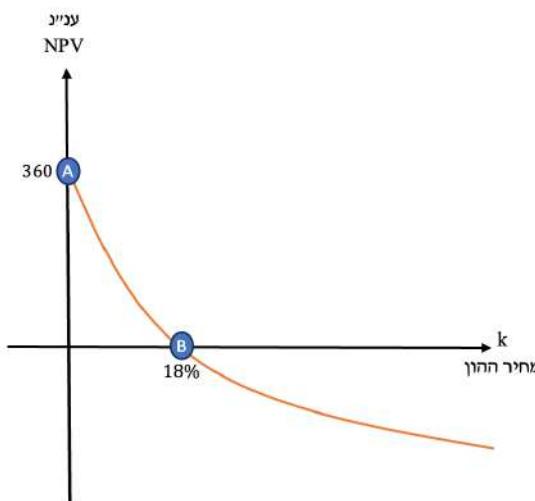
نקודת החיתוך עם הציר האנכי (A) : סיכום פשוט של תזרימי המזומנים של הפרויקט :

תזרים באלפי ש"ח	שנה
-170	1
-180	2
-90	3
200	4
200	5
200	6
200	7

نקודת החיתוך עם הציר האנכי היא הנקודה שבה מחיר ההון שווה לאפס אין משמעותות זמן ולכן במקומות להוון את תזרימי המזומנים בכל  $V$  כדי לחשב את ערכם הנוכחי - אפשר פשוט לסקום אותם:

$$NPV(k = 0) = -170 - 180 - 90 + 200 + 200 + 200 = 360$$

نקודת החיתוך עם הציר האופקי היא הנקודה שבה  $NPV = 0$ . כפי שהראינו קודם, זו הנקודה שמנדרת מתמטית את  $h - IRR$  (השת"פ) ולכן בהינתן שהיחסנו אותו קודם ומצאו  $IRR = 18\%$  זו תהא נקודת החיתוך עם הציר האופקי.



מה למדנו מהתרשים? בפרויקט של השקעה - יש קשר שלילי בין מחיר ההון לשוויי נטו (NPV). ככל שמחיר ההון עולה התשואה שדורשים המשקיעים עולה ("החברה משלם יותר ריבית על ההון המושקע") ולכן הפרויקט מניב פחות ערך נטו.

מעבר לכך, אנחנו גם מבינים שבנייה פרויקט הקשור במידה רבה לזרות המבצע שלו. כלומר, בהחלט ייתכן שהחברה מסויימת בעלת מחיר הון נמוך וחברה אחרת בעלת מחיר הון גבוה - תראה בפרויקט ערך שלילי.

ולבסוף - אמנם זה קצר מוקדם, אבל בהמשך דרכנו המשותפת, כשניחסן לעוד סוגים פרויקטיים (שאינם פרויקטיים של השקעות, ו/או אינם פרויקטיים בודדים) ההבנה של התננויות הגרפיים תהיה משמעותית בשיפוט שלהם.

ג. חשבו את החזר ההון התקופתי של הפרויקט ל-4 שנים. חוו דעתכם לאור כדיות הפרויקט לאורו. החזר ההון התקופתי מוגדר בטור ההכנסה השנתית הקבועה נטו שצרכיה להתקיים בפרויקט, על מנת שהינה כדיי.

כדיות פרויקט מתחילה (במינימום) כאשר  $h = -V$  (הענין) 0. לכן, עלינו לבנות את משווהת הענין, לסמן את הכנסה השנתית כנעלם, ולהשווות לאפס - וכך לחלץ את הכנסה השנתית כאמור.

שנה	תזרים באלפי ש"ח
1	-170
2	-180
3	-90
4	200
5	200
6	200
7	200

זכור מסעיף א, משווהת הענין הייתה:

$NPV = -170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + 200 * PVFA(5\%, 4)$  על מנת להשתמש בה בשינויים המתחייבים, כדי לחלץ את החזר ההון התקופתי אבצע את השינויים הבאים:

שינוי 1: במקום הכנסה שנתית של 200, נציב גודל הכנסה לא ידוע ליחילוץ שיסומן כ-  $x$ .  
שינוי 2: נשווה את כל המשווהה ל-0.

$$-170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + x * PVFA(5\%, 4) = 0$$

נחשב ונקבל:

$$-170 * 1.05^{-1} - 180 * 1.05^{-2} - 90 * 1.05^{-3} + x * 3.546 * 1.05^{-3} = 0$$

ונגיע לתוצאה

$$x \approx 131.54$$

מסקנה: החזר ההון התקופתי של הפרויקט (הכנסה השנתית המינימלית ב-4 השנים האחרונות שתצדיק כדיות) היא 131.54 ש"ח. והואיל וההכנסה השנתית הצפוייה היא 200 ש"ח, סכום גבוה מכך - הרי שגם לפי קритריון החזר ההון התקופתי הפרויקט כדי.

לפי קритריון החזר ההון התקופתי, עלינו לחשבו, אז לבדוק - האם ההכנסה השנתית הצפוייה בפועל שווה לו או גבוהה ממנו (ואז הפרויקט כדי) או נמוכה ממנו (ואז הפרויקט לא כדי).

## שאלה 62 - בחירה בין חלופות - כולל חלופת הלואאה

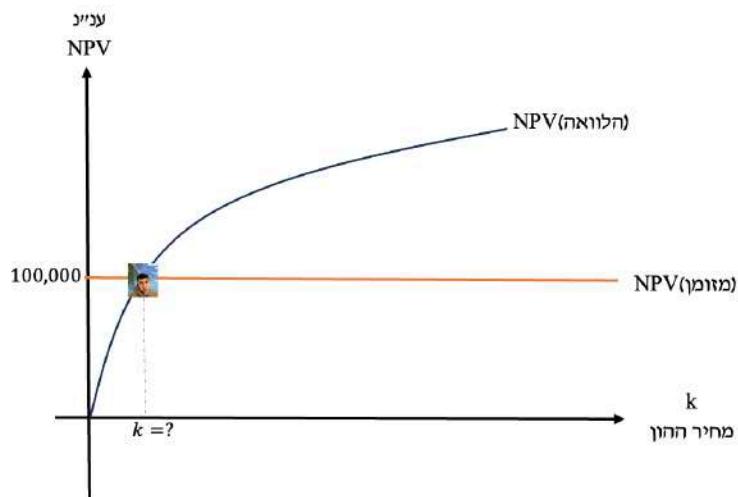
באפשרות החברה לקבל אחת משתי ההצעות הבאות:

- לקבל לחשבון העו"ש באופן מיידי 100,000 ש"ח (מענק, לא מחזירים).
  - לקבל הלואאה בסך 1,000,000 ש"ח **לא ריבית** שתוחזר ב-10 תשלומים שנתיים שווים בסך 100,000 ש"ח כל אחד.
- הציגו את גרפ' העניין של הפרויקטים / החלופות וחווו דעה בדבר הבחירה לאורו.

פתרון :

מחיר החון של החברה אינו נתון. ואם כך, נשאלת השאלה - כיצד נחשב את העניין (NPV) וכייזו חלופה תועדף? אפשר להגדיר את הנסיבות גם לפי גרפ' העניין, ובabhängig למה הכוונה.

הלוואה		
תורים	זמן	
1,000,000	0	
-100,000	1	
-100,000	2	
-100,000	3	
-100,000	4	
-100,000	5	
-100,000	6	
-100,000	7	
-100,000	8	
-100,000	9	
-100,000	10	



הסבר :

באյור עקום העניין **בשאלות הקודמות** - הצגנו שהוא יורדת משמאל לימין. זאת, משום שהוא מדובר בפרויקטים של השקעות. ככל שהתשואה שהמשקיעים דורשים بعد השקעות גבוהה יותר, שווי הפרויקט יורדת.

כאן, **כשאנו דנים בפרויקט של נטילת הלואאה, צורת עקום העניין הפוכה** - והיא עולה **משמאלי** לימין. ומהו? למעשה, מציעים לחברת הלואאה ללא ריבית. כדי שהחברה תבין מה החסכו הכלכלי הנובע מכך, היא חייבת להבין כמה ריבית היא משלמת בפועל היום למשקיעים.

כל שהריבית למשקיעים (מחיר הון) גבוהה יותר, כך הרווח / הערך הנובע מתקבלת הלואאה ללא ריבית ממשמעותי יותר - מה שמתבטא בעניין גבוה יותר.

משל למה הדבר דומה? גיא מקבל רכב צמוד מהעובדת (דלקן). אני טוען: ככל שמחירי הדלק גבוהים יותר, כך החסכו של גיא בזכות הדלקן ממשמעותי יותר. זה מאד דומה - רק שבמקום לדבר כאן על מחירי הדלק, אנחנו מדברים על מחירי הכספי - ריבית.

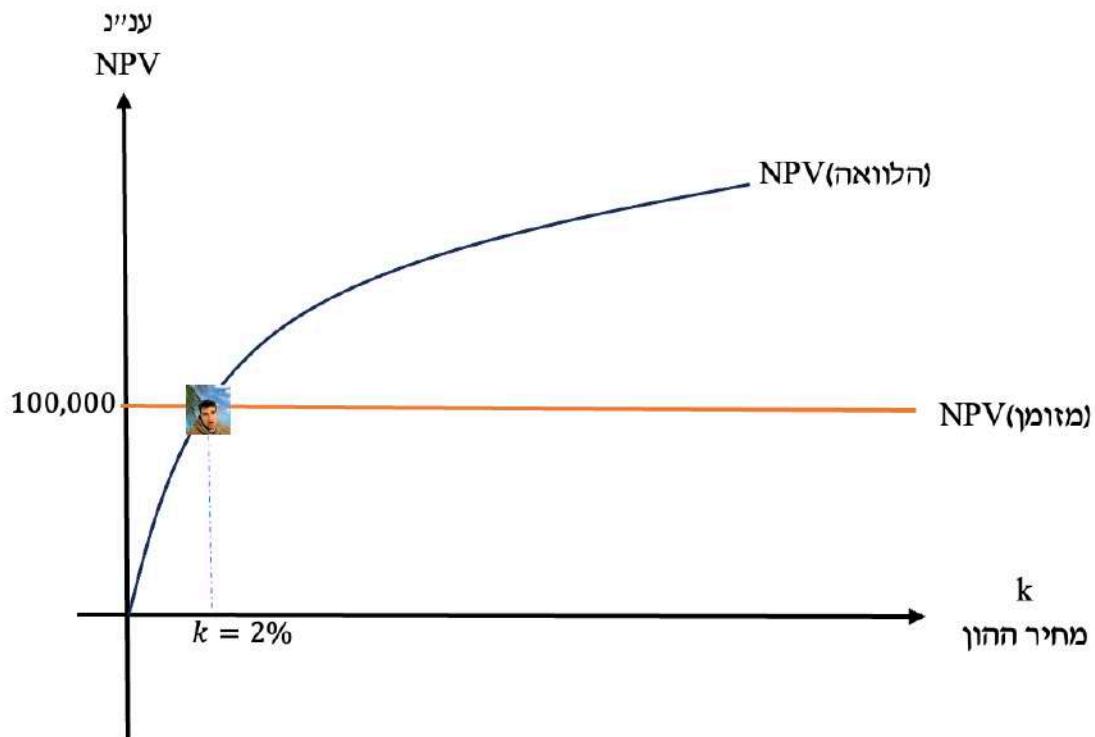
העיקום האדום מייצג את העניין (NPV) של קבלת הסכום במזומן, שהוא כמובן שווה ל-100,000 בכל ריבית (כי הסכום מתקובל בזמן 0).

מטרתנו היא למצוא את נקודת החיתוך בין העוקומים. משמאלו לנקודת חיתוך זו יעדף הפרויקט האדום (המזומן) ומימין לנקודת חיתוך זו יעדף הפרויקט הכהול (ההלוואה המוזלת).

$$NPV_{\text{מזומן}} = NPV_{\text{הלוואה}}$$

$$100,000 = 1,000,000 - 100,000 * PVFA(k, 10)$$

$$PVFA(k, 10) = 9 \rightarrow k \approx 2\%$$



ניתן לומר כי:

יש להעדיף את הסכום במצוון מיידי כאשר  $2\% < k$ .

יש להעדיף את הלוואה ללא ריבית כאשר  $k > 2\%$ .

כאשר  $k = 2\%$  הבחירה שקולות (אין העדפה ביןיהן / קיימת אדישות באשר לבחירה ביןיהן).

מה למדנו?

א. עקום ה- $NPV$  של הלוואות (תזרים חיובי ואחר כך תזרומים שליליים) הפוך בצורתו לעקום ה- $NPV$ .

של השקעות (שהראינו בשאלת קודמת).

ב. כדאיות הלוואה הולכת וגדלה ככל שמחיר ההון  $k$  גדל.

ג. בחירה בין הלוואה מוזלת (בריבית נמוכה / 0) לבין מענק נקי במצוון - תבוצע בהתייחס לריבית האלטרנטיבית של החברה (מחיר ההון). בכלל, ככל שריבית זו גבוהה יותר, כדאיות הלוואה תהיה גבוהה יותר.

**שאלה 63 - קבלת הכספיים מוקדם / מאוחר - השפעה על כדאיות ועל שט"פ**  
 שני פרויקטים דורשים השקעה ראשונית זיהה, ומנייבים תקבוליים בסכום כולל זהה.  
 אלא שבפרויקט א התקבוליים הגבוהים מתקבלים בשנים הראשונות, והקטנים בשנים האחרונות.  
 בפרויקט ב התקבוליים הגבוהים מתקבלים בשנים האחרונות, והקטנים בשנים הראשונות.

- איזה פרויקט כдאי יותר?
- לאיזה פרויקט שט"פ גבוה יותר?

**פתרון :**

- א. בהגדרה, אם הסכומים הכספיים הכוללים זהים, קבלת עיקר הכספיים מוקדם יותר מגדילה את ערכם הנוכחי (את הע"נ), את שוויים ואת הcadיות. **לכן פרויקט A עדיף**. זה פתרון מלא וזו הנמקה מלאה.  
 יחד עם זאת, הציגו כהמזהה כמותית בשיעור גם את הטבלה הבאה לדוגמה שמחישה עיקרונו זה:

זמן	אלעד	ニア
-100	-100	0
20	80	1
30	50	2
40	40	3
50	30	4
80	20	5

26%                    47%                    **IRR**

- ב. בהגדרה, קבלת הכספיים מוקדם יותר מקטינה את סכום ההשקעה, וגורמת לתשואה להיות מוחשבת ביחס לקרן השקעה קטנה יותר, מה שմגדיל את התשואה באחזois - כלומר, את השט"פ.

**שאלה 63.1 - קבלת הכספיים מוקדם / מאוחר - השפעה על כדאיות ועל שט"פ - ניסוח "בחינתי"**

6	5	4	3	2	1	0	
$x_2$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$-y$	א
$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_2$	$x_2$	$-y$	ב

כמו כן, ידוע כי  $x_1 > x_2$  ושניהם חיוביים. כמו כן ערך  $y$  חיובי. סמן את התשובה הנכונה:

- פרויקט בעדיף על פני פרויקט א.
- פרויקט א עדיף על פני פרויקט ב.
- הויאל ושני הפרויקטים מניבים הכנסות זהות בסך הכל, הם שווים.
- לא ניתן לדעת איזה פרויקט יותר, שכן חסר מידע בדבר מחיר ההון.
- כל התשובות שגויות.

**תשובה ל-63.1**

בהתנחת שהסכוםים הכלולים המתקבלים זהים, מועד הפרויקט שבו הסכומים מתקבלים ככל שניתן מוקדם יותר (הסכוםים הגבוהים קודם) ככל פרויקט ב שכן נתנו  $x_1 > x_2$ .

**שאלה 64 - חוזה על פרויקטים**

באפשרותך להשיקע באחד מבין 3 הפרויקטים הבאים:

פרויקט	0	1	2	3	4	5
א	-100	200	200	200	200	200
ב	-300	150	250	700	200	200
ג	-200	100	200	300	400	500

מחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה.

או מה הקטוע???



: הקטוע

- בחירה בפרויקט א מחייבת לחזור עליו פעמיים
- בחירה בפרויקט ב מחייבת לחזור עליו אינסוף פעמיים
- על פרויקט ג לא ניתן לחזור ( מבוצע פעם אחת בלבד )

**השאלה: מהו הפרויקט שיועזר?**

פתרון :

שימו לב! חשוב מאד להבדיל בין שאלות הדנות בעצם הכספיות של פרויקט בודד העומד בפני עצמו לבין שאלות המבוקשות לדוג מס' פרויקטים / לבחור ביניהם. בכלל, הקритריון הדומיננטי המוביל למסקנה כלכלית נכונה לצורך זה הוא קритריון הענין בלבד.

שימו לב, ציינו שלפחות על חלק מהפרויקטים נדרש לחזור (לבצע שוב לאחר סיום הביצוע שלהם). כדי לתפעל מצב זה, נתחיל בחישוב נאיי פשוט של ה- NPV הבסיסי של כל פרויקט "למחזר הפעלה אחד". לאחר מכן, נראה כיצד אפשר לתקן אותו כדי לגלם את אפשרות החזרה.

פרויקט	0	1	2	3	4	5
א	-100	200	200	200	200	200
ב	-300	150	250	700		
ג	-200	100	200	300	400	500

בשלב ראשון - נחשב את ה- NPV למחזר הפעלה בודד של כל פרויקט (חישוב PV נריגיל). נזכיר שמחיר ההון 5% כנתון בשאלת :

נחשב תחילה את ה- NPV של פרויקט א. תקבוליו הם סדרה, ולכן הביטוי פשוט :

$$NPV_A = -100 + 200 * PVFA(5\%, 4) = -100 + 200 * 3.546 = 609.2$$

עבור לחשב את ה- NPV של פרויקט ב. תקבוליו אינם סדרה, ולכן ההיוון מכוער (כל ערך יהוו בנפרד) :

$$NPV_B = -300 + 150 * (1 + 5\%)^{-1} + 250 * (1 + 5\%)^{-2} + 700 * (1 + 5\%)^{-3} = 674.3$$

עבור לחשב את ה- NPV של פרויקט ג. גם תקבוליו אינם סדרה, ולכן ההיוון מכוער :

$$NPV_C = -200 + 100 * 1.05^{-1} + 200 * 1.05^{-2} + 300 * 1.05^{-3} + 400 * 1.05^{-4} + 500 * 1.05^{-5}$$

$$NPV_C = 1,056.6$$

כדי לבצע חישוב שווי פרויקטים החזורים על עצם, ניתן להתייחס לכל עניין כאל תזרים שתדירותו היא כתדיירות הפרויקט. ולמה כוונתי?

**نبיט על פרויקט A.** זהו פרויקט ל-4 שנים. העניין שלו (שווי לזמן 0) הוא 609.2.

אך אם נזכיר על הפרויקט הזה עם נוספת (מתחל בבדיקה כשהוא מסתויים, בזמן 4), המשמעות היא שזמן 4 נוצר שוב עניין זהה בסכום כזה. כלומר, בהינתן שחזרים עליו פעריים כנתון, השווי נוצר מ:

4	3	2	1	0	
609.2 עניין מוחר הפעלה 2				609.2 עניין מוחר הפעלה 1	A

נתאים את מחיר ההון שהוא 5% לשנה, למשך הפרויקט הפרויקט (4 שנים). מחיר ההון הוא תמיד במונחי ריבית אפקטיבית, ולכן זה יישום של הנוסחה:

$$k(4 \text{ years}) = (1 + k_{\text{annual}})^4 - 1$$

$$k(4 \text{ years}) = (1 + 5\%)^4 - 1 = 21.55\%$$

ואז העניין המऋבי לביצוע פרויקט A פעריים יהיה:

$$NPV_{\text{A}} = 609.2 * PVFA(21.55\%, 2) * (1 + 21.55\%)$$

ערך הנוכחי של סדרה שמתחלת בזמן 0 מקפיד אותנו "אחדת אחרת" (תקופת תשלום אחת אחרת - 4 שנים) ביחס למועד התזרים הראשון, כלומר הביטוי הבסיסי בירוק מוביל בזמן 4. כתה נרצה לתקנה בזמן 0, ולכן כופלים ב-1 ועוד הריבית ל-4 שנים (באודום).

הואיל ושייר הריבית איננו עגול, נחשב את ערך PVFA באמצעות נוסחתו המתמטית:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} = \frac{1 - \frac{1}{(1+21.55\%)^2}}{21.55\%} \approx 1.5$$

נציב ונקבל את העניין הכלול לביצוע "פעריים" של פרויקט A:

$$NPV_{\text{A}} = 609.2 * 1.5 * (1 + 21.55\%) = 1,110.7$$

הסביר:

העניין של מוחר הפעלה מהוון כמספר מוחורי הפעלה ובמחיר ההון המתאים לתקופת הפעלה - 4 שנים. אלא, שהואיל והערך של העניין המיציג את ה"תזרים" הראשון הוא בזמן 0, והואיל וערך הנוכחי של סדרה מוביל תמיד לנקודות הזמן שהיא "תקופת היון אחדת אחרת" ביחס למועד התזרים הראשון, הרו שkopצים 4 שנים אחדת, והביטוי (זמן 0 \* PVFA(21.55%, 2) \* 609.2) ייצג את העניין בזמן 4. כדי לתקן בזמן 0, כפלנו שוב ב-1 ועוד מחיר ההון ל-4 שנים.

ניבור לפרויקט ב - הוא בסך הכל ל-3 שנים, ה - NPV שלו למחוזר הפעלה אחד הוא 674.3, ולפי נתוני השאלה  
נדרש לחזור עליו לאינסוף :

לאינסוף ...	6		3		0	
	674.3 ענין מחוזר הפעלה 3		674.3 ענין מחוזר הפעלה 2		674.3 ענין מחוזר הפעלה 1	ב

כדי לחשב ערך נוכחי לסדרה אינסופית זו, שתדירות תזרימיה 3 שנים, נחשב את מחיר ההון התלת שנתי. כזכור,  
הוא היה בשיעור 5% לשנה, ולכן לתקופה של 3 שנים ערכו :

$$k(3 \text{ years}) = (1 + k_{\text{annual}})^3 - 1$$

כך שנתקבל את מחיר ההון (לתקופת ביצוע) של 3 שנים :

$$k(3 \text{ years}) = (1 + 5\%)^3 - 1 = 15.7625\%$$

ערך נוכחי של סדרה אינסופית מתקובל על ידי חלוקת התזרים הקבוע (כאן - הערך של מחוזר הפעלה אחד)  
במחיר ההון לתקופת תשלום :

$$PV_{\text{Infinite}} = \frac{PMT}{r}$$

ובהצבה נקבל :

$$NPV_{\text{Ens of}} = \frac{674.3}{15.765\%} * (1 + 15.765\%) = 4,951$$

מה עשינו כאן? כאשר חילקנו את התזרים התקופתי שופיעו לראשונה בזמן 0 במחיר ההון התלת שנתי, קיבלנו  
ערך נוכחי במועד הזמן שהוא "תקופת תשלום אחת אחרת" (כאן - תקופת ביצוע של 3 שנים אחרת)  
ביחס למועד התזרים הראשון. כלומר, הגענו בזמן -3, ויש לתקן בזמן 0 ע"י מכפלה ב-1 בתוספת ריבית ל-3  
שנתיים.

כעת, לאחר ששירשנו (התיחסנו לדרישה / לצורך לחזור על חלק מהפרויקטים ולחשב את עניינים המתואימים  
בהתאם), התוצאות הן :

פרויקט	ענין
א - ביצוע פעמיים (8 שנים)	1,111
ב - ביצוע לאינסוף	4,951
ג - ביצוע פעם אחת	1,057

ולכן אם אני נאלץ לבחור לבצע אחד מבין 3 הפרויקטים בלבד בכפוף לנסיבות, עלינו להעדיף את פרויקט ב. שכן  
ענינו מירבי.

### שאלה 65 - חוזה על פרויקטים (אולי נשאיר לחזרה בסוף)

בפניכם האפשרות להשקיע באחד מבין שני פרויקטים של השקעה קונבנציונלית<sup>12</sup> שסכום ההשקעה בהם זהה. יחד עם זאת, סך התקבולים בפרויקט א גבוה מסך התקבולים (סיכום פשוט של התקבולים) בפרויקט ב.

נדרש :

א. הציגו את עוקום העניין של שני הפרויקטים באופן סכמטי אם ידוע שבשער ריבית אפס עניין שני הפרויקטים חיובי וידוע שערך העניין של הפרויקטים נחכמים בנקודת מסויימת. חוו דעתה בדבר דירוג הפרויקטים בהתאם.

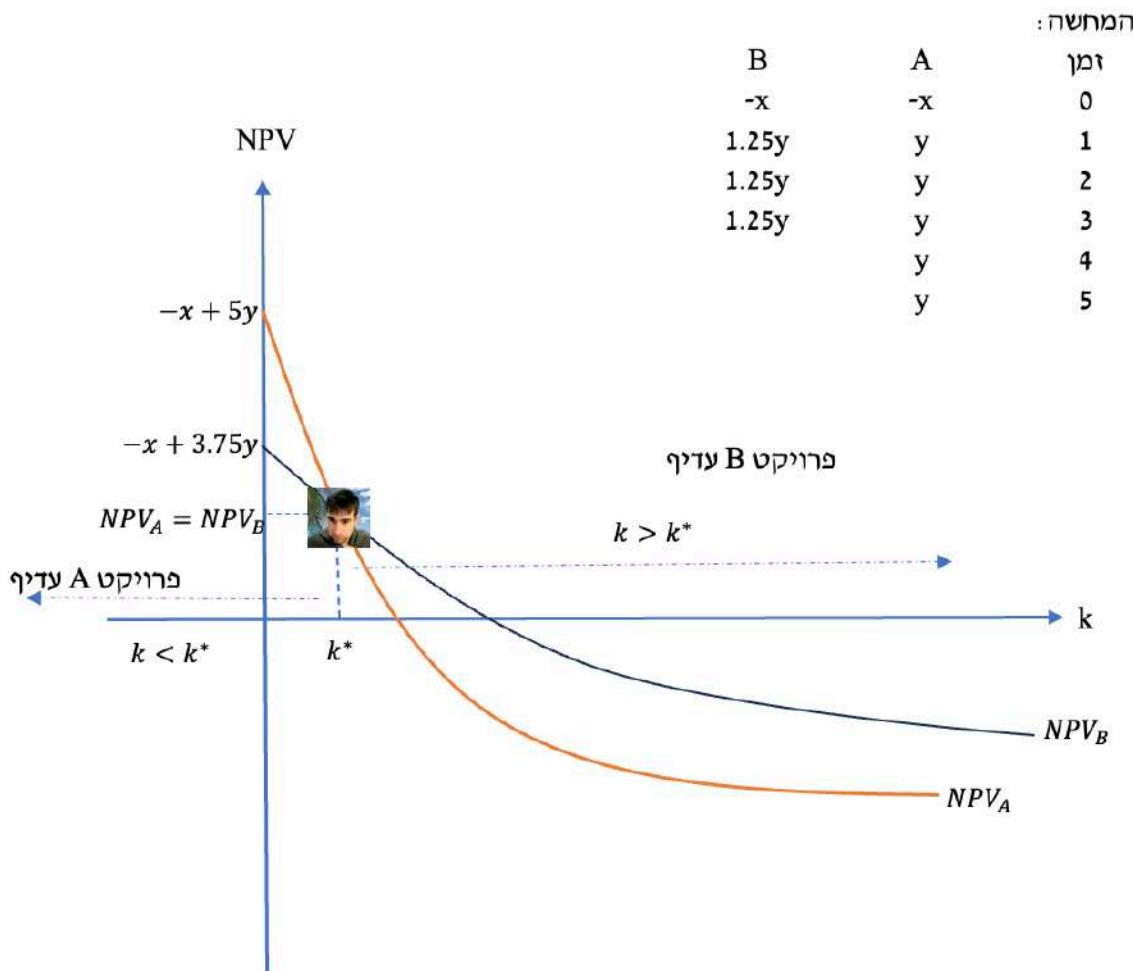
ב. חשבו את ה - IRR של פרויקט א אם ידוע אם ידוע שבשער ריבית אפס עניין פרויקט ב שווה ל-0. חוו דעתה בדבר כדאיות הפרויקטים בהתאם.

ג. הניחו כתע שבהינתן מחיר הון אפס בחברה, ה - NPV של פרויקט א הוא 0. האם ניתן לומר במצב כזה שבכל שער ריבית חיובי, ה-NPV של פרויקט ב הוא שלילי?

פתרון סעיף א :

בהתנتن שסך התזרומים של פרויקט A גבוה מסך התזרומים של פרויקט B, בהגדלה - נקודת החיתוך של עוקום NPV של A עם הציר האנכי גבוה מנקודת החיתוך של עוקום ה-NPV של B עם ציר אנכי זה. לצד זאת, הרי שסכום ההשקעה בשני הפרויקטים זהה. ולכן, ההפסד המירבי בשניהם (במונחי ערך נוכחי) עבר מחيري הון גבוהים מאד - זהה. בעצם : פרויקט B מתחל בנקודת נמוכה יותר, והוא חייב לחותך את פרויקט A כדי להשתווות אליו בהמשך.

<sup>12</sup> פרויקט של השקעה - כזה שמתחל בסיכון שלילי; פרויקט של השקעה קונבנציונלית - מתחל בסיכון שלילי ומרגע שהתזרומים הופכים חיוביים, הם נשאים חיוביים לכל אורך הדרכ - החלפת סיכון אחת. פרויקטים של השקעה מתאפיינים בין היתר בכך שעוקום העניין שלהם תמיד יורד משמאלי לימין (עליה במחור הון מלווה בירידת שווי) וכשעוסקים בפרויקט בודד (לא בדירוג) כדאיות תיווצר כאשר העניין חיובי / השת"פ גבוה ממחיר הון.



פתרונות סעיף ב :

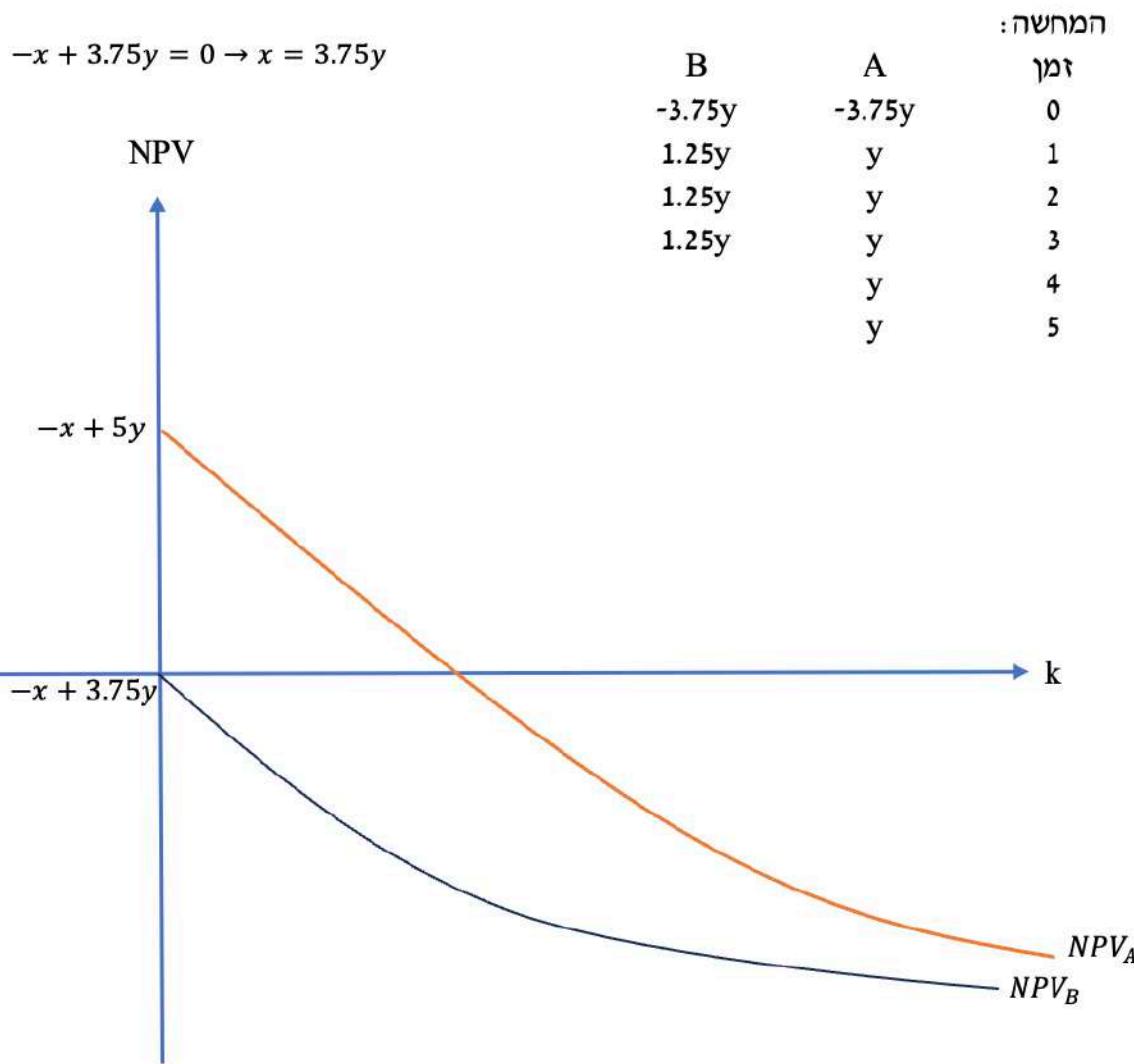
המשוואת המגדירה את ה-IRR של פרויקט ב תהיה משווהה שבה מבטאים את משווהת ה - NPV, אך מייצגים באמצעות נעלם את מחיר ההון, ומשווים את כולה ל-0 :

$$IRR_A = -3.75y + y * PVFA(IRR_A, 5) = 0$$

ניתן לחלק את שני האגפים ב- y :

$$-3.75 + PVFA(IRR_A, 5) = 0 \rightarrow IRR_A = 10.42\%$$

לא לדאוג, במללה ובחינה, יצא לכם שיעור ריבית שלם ויפה.

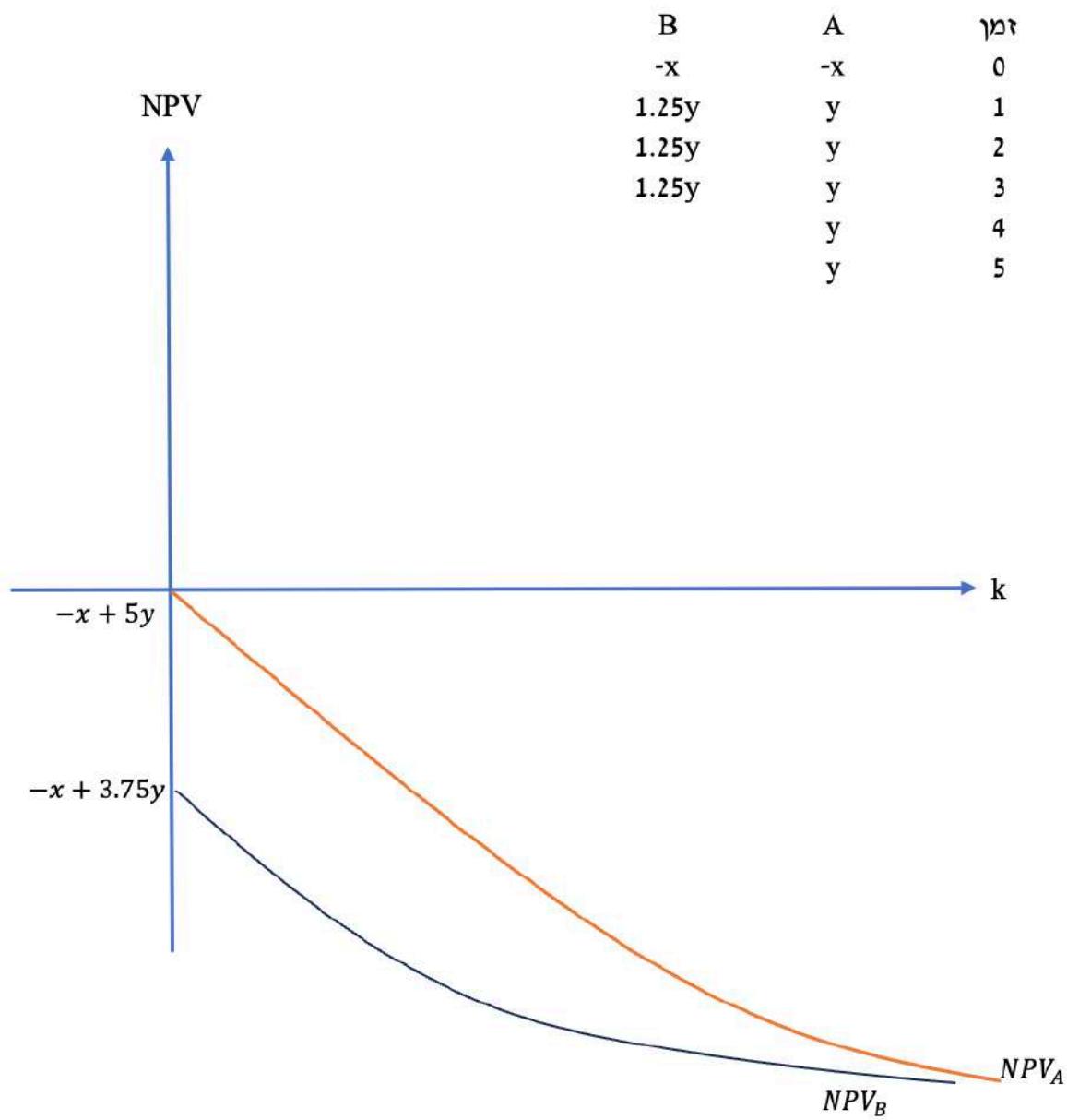


המשוואת המופיעה מעל ציר ה-  $-NPV$  היא למעשה המשוואת שנשענת על הנתון שאומר שכאשר מחיר ההון שווה ל-0, ה- $-NPV$  של B הוא אפס, ולכן סיכון תזרימי פרויקט B הוא אפס, וזה משווה שמסויימת לבטא את  $x$  באמצעות  $y$ , מה שיוצר לי מבנה תזרימי מבוסס נעלם אחד, שעל בסיסו יכולתי לחלץ את ה-  $-IRR$  של פרויקט A. כמובן, שבhibet כדאיות - ברור לי שפרויקט B לא רלוונטי ושלילי תמיד. הוא יוצא מאפס - תמיד שלילי.

#### פתרונות סעיף ג:

סיכון התזרמים של פרויקט A הוא מקסימום הענין האפשרי שלו, והוא בוודאות גבוה מסיכון תזרימי פרויקט B. אם הערך המקסימלי של תזרימי פרויקט A (סיכון התזרמים, מתקבל כמחיר ההון אפס) הוא אפס כמובן, ומשם אפשר "רק לרודת", הרי שבכל מחיר הון חיובי שני הפרויקטים (ובפרט, פרויקט B שעליו שאלות) יהיה בעל ערך שלילי.

המחשה:



### שאלה 66 - פרויקטים לא קונבנציונליים וכדאיות לאורם

הסבירו את המונח "פרויקטים לא קונבנציונליים" והדגימו באופן גרפי את הקושי בקבלת החלטות על בסיס כל השת"פ לאורו.

פתרונות :

- מבוא : ככלל, הפרויקט שהוזג בשאלה קודמת הוא פרויקט "קלאסי" (קונבנציונלי) של השקעה. לא העמקנו בכך, אך הוא מתאפיין בתזרים שלילי שלאחריו תזרימים חיוביים בלבד.
- פרויקט קלאסי (קונבנציונלי) מסווג אחר הוא פרויקט של הלואה. פרויקט של הלואה מתאפיין בתזרים חיובי שלאחריו תזרימים שליליים בלבד.
- לעומתם, קיימים גם פרויקטים "לא קונבנציונליים". פרויקטים אלו הם פרויקטים שמספר היפוכי הסימן של תזרימייהם (מסימן חיובי לשילי ולחפץ) שונה מ-1.

דוגמאות :

פרויקט	0	1	2	3	4
א	-400	-100	80	200	900
ב	500	-100	-200	-300	-150
ג	800	800	800	-2,000	-2,000
ד	-400	-800	2,000	-100	-200
ה	-1,000	-2,000	-3,000	-4,000	-5,000
ו	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000

פרויקט א : קונבנציונלי של השקעה. קונבנציונלי = היפוך סימן אחד. והוא של השקעה כי התזרימיים הראשונים שליליים.

פרויקט ב : קונבנציונלי של הלואה. קונבנציונלי = היפוך סימן אחד. והוא של הלואה - כי התזרימיים הראשונים חיובי והתזרימיים העוקבים שליליים.

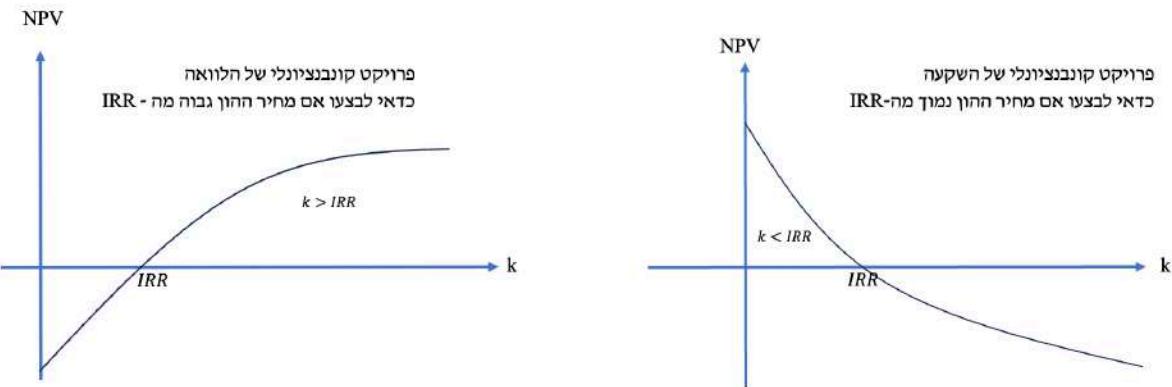
פרויקט ג : קונבנציונלי של הלואה.

פרויקט ד : לא קונבנציונלי (שני היפוכי סימן).

פרויקט ה, ו : פרויקטים לא קונבנציונליים (גם אפס היפוכי סימן = לא קונבנציונלי).

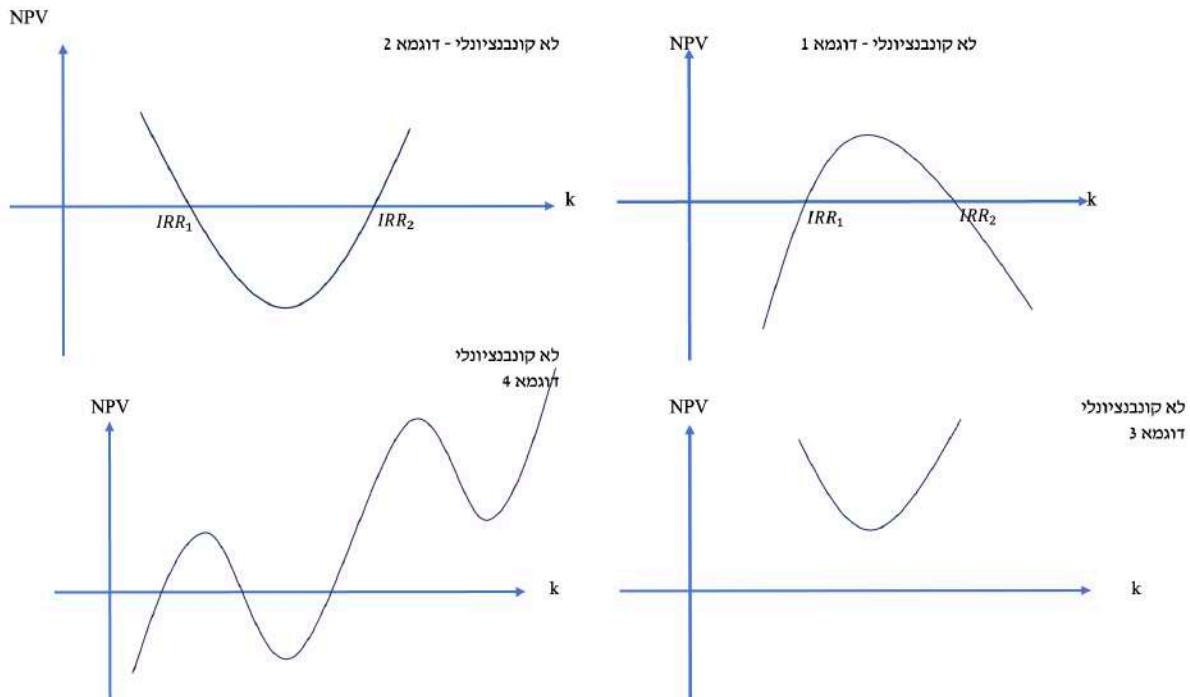
פרויקטים לא קונבנציונליים אינם ניתנים לשיפוט על פי כל השת"פ / IRR הואיל ומספר השת"פים הוא עד מספר היפוכי הסימן.

להלן תרשים המתאר את התצוגה הגנרטית של פרויקטים קונבנציונליים (של השקעה ושל הלוואה) ושל כדיותם של פונקציית ההפרש בין מחיר החון לשט"פ:



להלן דוגמאות לתרשיים (לא ממצה) לפרויקטים לא קונבנציונליים, הממחישים את הבעייתיות / היעדר האפשרות להכרעה בדבר כדיותם לפי שט"פ - במקרים כאלה לא ניתן לאפיין באופן מלא את צורת העקומה ומספר ה-IRR-ים (נק' **חיתוך של פרויקט לא קונבנציונלי**) עם **הציר האופקי** עלול להיות עד מספר היפוכי **הסימן**.

למשל: אם הסימן של התזרים מתחפה פעמיים, ייתכנו שני שט"פים. אם הסימן של התזרים מתחפה 3 פעמים - ייתכנו 3 שט"פים.



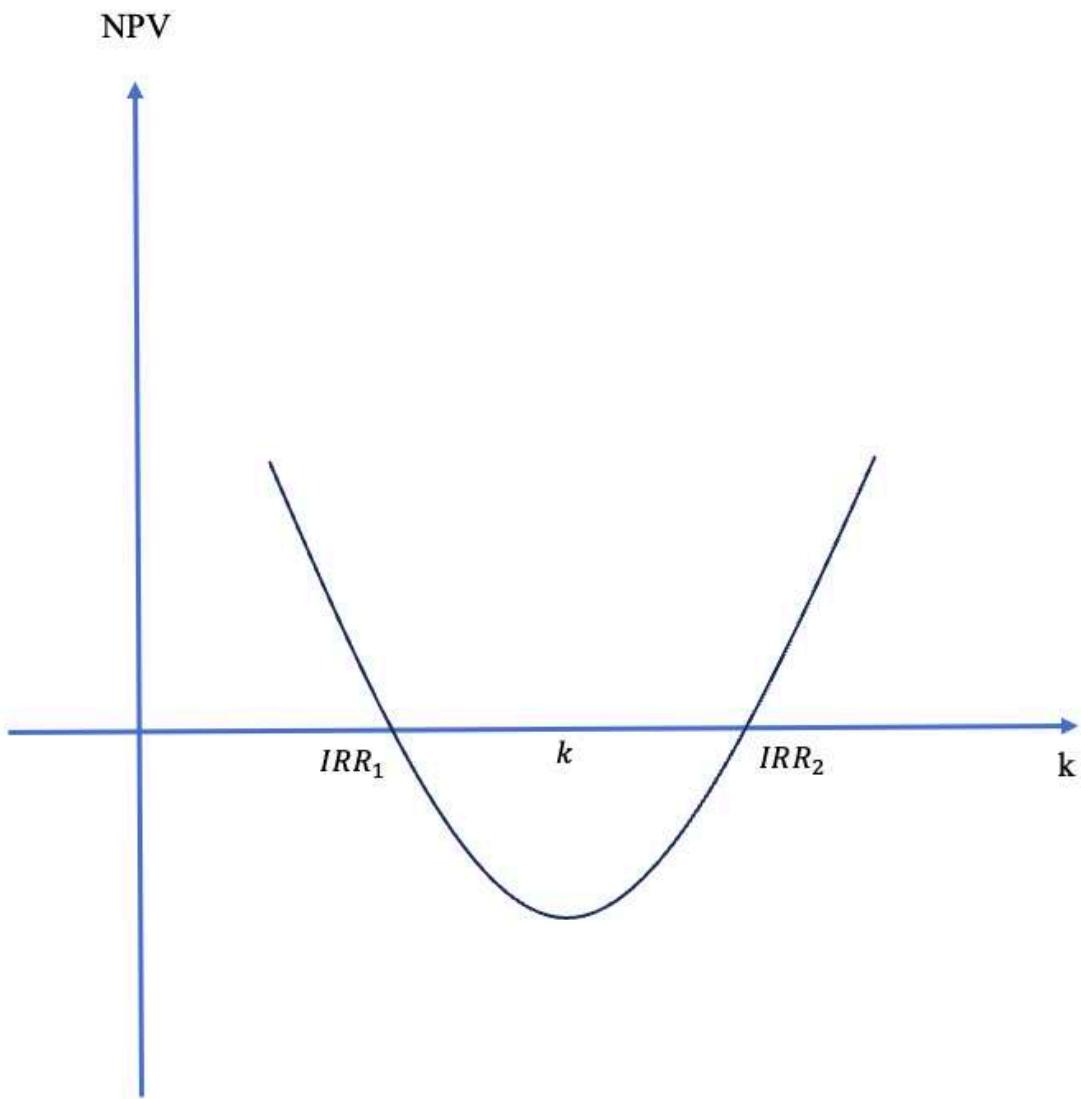
במילים אחרות, שאלות מילוליות (ללא ערכיהם מספריים) העוסקות בפרויקטים לא קונבנציונליים, בדרך כלל ייכללו רמזים מסוימים לגבי הצורה הפוטנציאלית של העקום שכן לא ניתן לאפיינה באופן מלא. הרמזים יכולים להיות במשמעותם (אפשרויות התשובה) ו/או בתיאור השאלה.

שאלה 67 - **פרויקטאים לא קוגניציונליים, שאלת לא מספרים עם שיפוט עקרוני**  
 גיא שוקל לבצע פרויקט לא קוגניציונלי.  
 לפROYיקט ישנים שני שותפ"ים : להלן יסומנו לשם נוחות כ -  $IRR_1$  ו-  $IRR_2$ .  
 $IRR_1 < IRR_2$  :  
 בנוספ, הינו ידוע כי  $IRR_1 < k < IRR_2$ , ה- NPV שלילי.  
 ידוע כי במחיר הון  $k$  אשר מקיים  $IRR_1 < k < IRR_2$ , ה- NPV שלילי.  
 בטאו באמצעות המשתנים בשאלת טווח מחירי ההון שבו הפרויקט כדאי. להלן אפשרויות התשובה :  
 א. כאשר מחיר ההון נמוך מ-  $IRR_1$   
 ב. כאשר מחיר ההון נמוך מ-  $IRR_2$   
 ג. כאשר מחיר ההון גבוה מ-  $IRR_1$   
 ד. כאשר מחיר ההון גבוה מ-  $IRR_2$   
 ה. תשובה א-ד נכונות  
 ו. תשובה ב-ג נכונות  
 ז. לא ניתן לקבוע הוויל ומחיר ההון לא ידוע

פתרונות :  
 יש לאייר את התרשימים המתאים למועד תחילת. בהינתן שאמרו שמחיר הון הנמצא בין ה- IRR וה- NPV הוא שלילי, הרי שצורת התרשימים היא כמפורט להלן (בדומה לדוגמא 2 בפרק התרשימים לעיל). לפיכך אסיק מצורה זו וערכו IRR שכך לבע את הפרויקט (התרשימים הוא באזרע החיובי, ה- NPV בריבוע הראשון) בשני המקרים הבאים :  
 $k > IRR_2$

או כאשר :

$$k < IRR_1$$



הערה: שימוש לב שגמ אם לא היה נתון מפורש שמדובר בפרויקט לא קונבנציונלי, יכולתי להסביר זאת ישירות  
וזאת מעצם העובדה שהפרויקט כולל שני שטפ"ים (מספר שת"פים שונה מ-1).  
התשובה היא.

**שאלה 68 - לבית (חזרה על הסבר שכבר הענקנו בתחילת השיעור)**

הציגו את נוסחת מzd הרווחיות PI. האם לאורה ייתכן שפרויקט בעל PI גדול מ-1 (כדי) הוא בעל ערך NPV שלילי? בהתאם, האם ייתכן שפרויקט בעל PI נמוך מ-1 (לא כדי) הוא בעל ערך NPV חיובי?

פתרון :

לzd הרווחיות יש שתי הדרות כלהלן.

הדרה 1 : היחס בין הערך הנוכחי של התקבולים לבין הערך הנוכחי (בערך מוחלט) של התשלומים.

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולים}}}{|PV_{\text{תשומים}}|}$$

הדרה 2 : הדרה נוספת שנפוצה יותר בקורס :

$$PI = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

לא משנה לפי איזו הדרה עוסדים, כלל ההכרעה בדבר קבלת פרויקט או דחייתו לפי zd הרווחיות קובע:

קבל את הפרויקט כאשר :  $PI > 1$

דחה את הפרויקט כאשר :  $PI < 1$

היה אדיש כאשר :  $PI = 1$

האם לאורה ייתכן שפרויקט בעל PI גדול מ-1 (כדי) הוא בעל ערך NPV שלילי?

$$PI > 1 \rightarrow \frac{NPV + I_0}{I_0} > 1 \rightarrow NPV + I_0 > I_0 \rightarrow NPV > 0$$

בשורה התחתונה: **פרויקט בעל zd רווחיות גדול מ-1 (כדי לפי zd הרווחיות) הוא תמיד בעל עניין חיובי (כדי לפי NPV) ולהפך: פרויקט בעל zd רווחיות קטן מ-1 (לא כדי לפי zd הרווחיות) הוא תמיד בעל עניין שלילי (לא כדי לפי NPV).**

## שאלה 69

לחברה הוצע להשקיע בפרויקט ספציפי מסוימים (אחד). הפרויקט הוא מסווג השקעה קובננציאונלית. ידוע שהענין חיובי.

סמן את הטענה הנכונה :

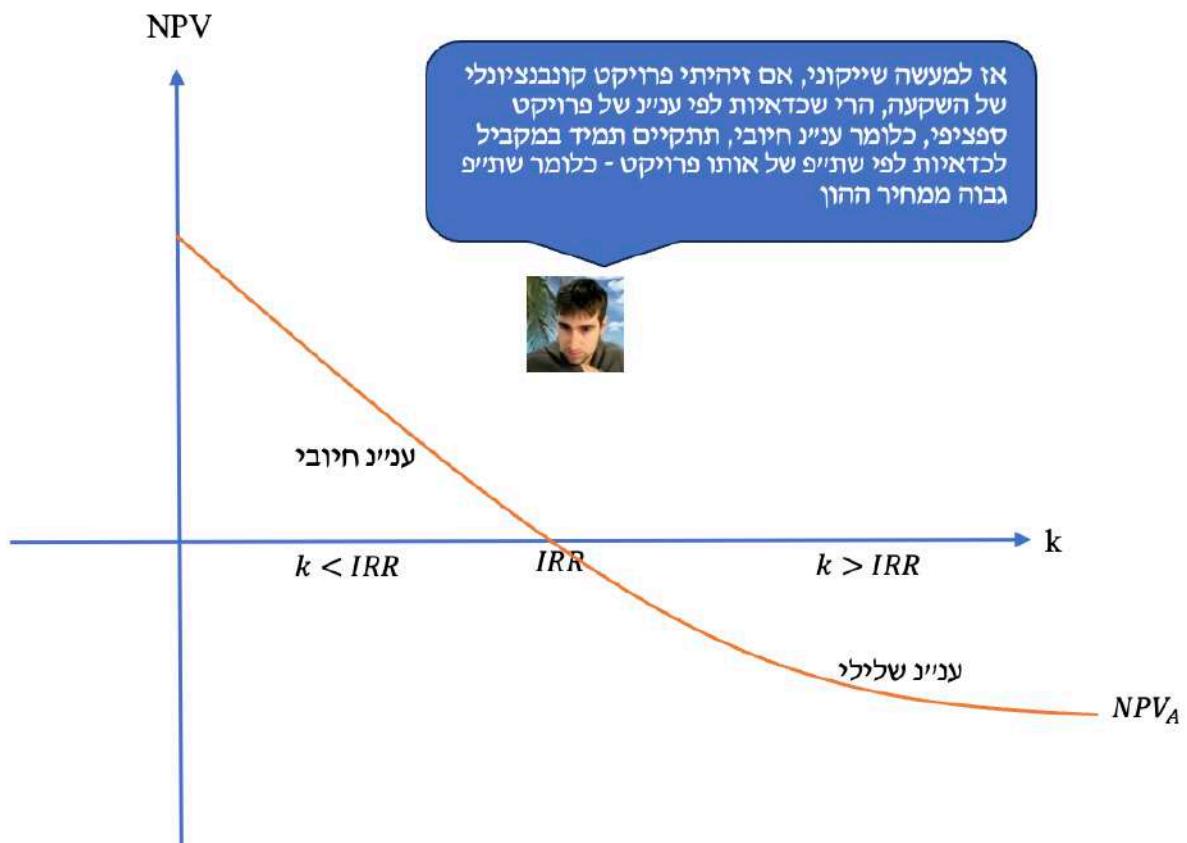
- א. **ייתכן שהפרויקט לא יהיה כדאי לפני מועד הרוחניות.**
- ב.  **ייתכן שמועד הרוחניות יהיה נמוך מ-1.**
- ג.  **ייתכן שהשת"פ נמוך ממחיר ההון.**
- ד.  **לא כדאי להשקיע בפרויקט.**
- ה.  **כל יתר התשובות שגויות.**

**פתרונות :**

התשובה ה.

להלן עוקום הענין של השקעה קובננציאונלית. זכרו : בפרויקטים של הלוואות ו/או פרויקטים לא קובננציאונליים, צורת עוקום הענין עשויה להיות שונה.

בכל מקרה, עבור השקעה כאמור, תמיד תתקיים חפיפה בהכרעה לגבי כדאיות פרויקט ספציפי לפי כל הקriterיוונים : כשאני בוחן כדאיות של פרויקט אחד ויחיד, אם הוא כדאי, תמיד מתקיימת כדאיות לפי  $NPV$ , כדאיות לפי  $IRR$  וגם כדאיות לפי מועד הרוחניות.



## שיעור 7 - כדאיות פרויקטים - השלמת סוגיות

### מטרת המפגש:

השלמת סוגיות לצד ריענון וחיזוק תיאורטי, גם ברמת הקритריונים הבסיסיים לבחינת כדאיות השקעות, גם ברמת הסטירה בין עניין - NPV, שט"פ - IRR ואופן יישוב הסטירה, גם ברמת הצגה גרפית וגם ברמת שאלות תאוריה וחלוץ הרלוונטיות להשלמתה המלאה של מטלה 11 (שהכוונה ראשונית לגביה ניתנה כבר בשלבי המפגש הקודם).

**שאלה 1 - 69.1 - חזרה על הקритריונים העיקריים, לצד יישוב סטירה ותרשיים**  
חברת "פלפלוני" ניצבת בפני הזרמוויות ההשקעה (הפרויקטים) הבאים. ידוע שמחיר ההון של פלפלוני הוא 12%. **ערכים שליליים מופיעים בסוגרים.**

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

- א. חשבו עניין, שט"פ ומדד רוחניות לכל אחד מהפרויקטים.
- ב. בהנחה אי תלות בין הפרויקטים, באיזה / באילו מהם תשקיע החברה לפי כל קритריוון?
- ג. בהנחה שהפרויקטים מוצאים זה את זה, באיזה / באילו מהם תשקיעו לפי כל קритריוון?
- ד. מהם הגורמים לסתירה בין עניין לשט"פ ככל שקיים, בהיבט דירוג הפרויקטים מסעיף ג'?
- ה. השתמשו בניתוח הפרויקט ההפרשי על מנת לישב את הסטירה.
- ו. שרטטו את עקומות העניין כפונקציה של מחיר ההון, וכן את עקומות העניין של הפרויקט ההפרשי.

### פתרון:

בשאלה זו שני חלקים. החלק הראשון, בסעיפים א, ב, ג - מהוות חזרה על אופן היישום של קритריונים העיקריים. החלק השני, בסעיפים ד, ה, ו - קשרו במחות שלו לסתירה בין עניין לבין שט"פ, הרחבת לגבי משמעותה וגורמיה, לצד איזור תרשימים רלוונטי של עקומי עניין וחיתוכים.

כאשר אני מקבל רשימת פרויקטים ארצתה לדעת כיצד לחשב את ערכי הקритריונים שהיו אינדיקציה לכדאיותם. קיימים 2 אינדיקטורים מרכזיים (ו-2 שליליים יותר). המרכזיים הם :

1. **[מרכזי] עניין - ערך נוחני נקי - NPV - Net Present Value :** שווי בהווה (במועדី ערך נוחאי) של כל תזרימי הפרויקט, חיובים ושליליים כאחד. אם העניין חיובי, זה אומר שהפרויקט כדאי. **שווי כספי נטו.**

2. **[מרכזי] שט"פ - שיעור תשואה פנימי - IRR - Internal Rate of Return :** משקף את התשואה באחזים על ההשקעה בפרויקט. אם השט"פ גבוהה יותר ממחיר ההון (עלות גiros ההון בחברה ; התשואה שדורשים משקיעיה) הפרויקט כדאי. **התשואה על השקעה באחזים.**

3. [שולוי] **מדד הרוחיות** - קרייטריוון יחסי שבודח את הפרופורציה בין הערך הנוכחי של התקבולים לערך הנוכחי של התשלומים (בערך מוחלט). ערך גבוה מ-1 משמעו שהפרויקט כדאי.
4. [שולוי - שלא מופיע בשאלת הספציפית] החזר הון שנתי - קרייטריוון שונה שמחשב את הסכום התקופתי של ההכנסה שתצדיק את הפרויקט.

**א. חשבו ענ"ג, שט"פ ומדד רוחיות לכל אחד מהפרויקטים**

נתון בשאלת - מחיר הון 12%

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
A	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
B	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

**חישוב ענ"ג - ערך נוכחי נקי מצרכי (שווי כספי) לכל פרויקט:**

הענ"ג - NPV, הוא הסיכון של הערך הנוכחי של כלל תזרימי הפרויקט (זמן 0), חיוביים ושליליים. אם התזרים הראשונים (זמן 0) שלילי, ויתר התזרים הם חיוביים וקבועים, ניתן לחשב את הענ"ג באופן הבא - שמתיחס להשקעה בזמן אפס, ולערך הנוכחי של התקבולים מהווים בריבית מתאימה לאחר מכן.

$$NPV_A = -19,946 + 9,000 * PVFA(12\%, 4) = 7,390$$

$$NPV_B = -47,232 + 20,000 * PVFA(12\%, 4) = 13,515$$

**חישוב שט"פ - שיעור תשואה פנימי:**

השת"פ - IRR, הוא שיעור התשואה המוצע התקופתי על ההשקעה בפרויקט באחזois. לשם חילוץ השת"פ, מבצעים את הפעולות הבאות :

א. בונים את משווהת הענ"ג של כל פרויקט - ראו לעיל.

ב. מציבים במקומות מחיר הון (כאן - 12%) את ה - IRR כנעלם.

ג. משווים את כל המשווהה ל-0.

ד. מחלצים את IRR.

$$IRR_A: -19,946 + 9,000 * PVFA(IRR_A, 4) = 0 \rightarrow PVFA(IRR_A, 4) = 2.216 \rightarrow IRR_A = 28.65\%$$

$$IRR_B: -47,232 + 20,000 * PVFA(IRR_B, 4) = 0 \rightarrow PVFA(IRR_B, 4) = 2.362 \rightarrow IRR_B = 25\%$$

הסבר : בנו את המשווהה לפי תנאים א-ד לעיל, העברנו אגף את הערך המספרי, חילקנו את שני האגפים במקדים של PVFA וקיבלנו את ה - PVFA עצמו. מכאן, צריך ללקת לוח א-4 בנספח א לכרך ד, ולבזוק עבור איזה שיעור ריבית מתקיים ערך זה של PVFA (במבחן, הריביות תצאננה שלמות).

**חישוב מדד הרוחיות:**

מדד הרוחניות הוא היחס בין הערך הנוכחי של התקבולים (МОנה) לבין הערך הנוכחי של התשלומים (במכנה).  
ambil להוכיח, ניתן גם לומר שאט היחס ניתן לחשב לפי הפרופורציה בין סכום ה-NPV בתוספת עלות ההשקעה, חלקו סכום ההשקעה, כלומר :

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולים}}}{|PV_{\text{תשלים}}|} = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

כאשר :

הערך  $NPV$  הוא עניין הפרויקט.

הערך  $I_0$  הוא סכום ההשקעה הראשונית בפרויקט, בערך מוחלט.

תזכורת לגבי השאלה :

NPV חוسب לעיל	4	3	2	1	0	פרויקט / שנה
7,390	9,000	9,000	9,000	9,000	(19,946)	א
13,515	20,000	20,000	20,000	20,000	(47,232)	ב

ב换כבות הנתונים הרלוונטיים בנוסחה נקבל :

$$PV = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

וב换כבה נקבל :

$$PI_A = \frac{7,390 + 19,946}{19,946} = 1.37$$

$$PI_A = \frac{13,515 + 47,232}{47,232} = 1.29$$

ב. בהנחה אי תלות בין הפרויקטים, באיזה / באילו מהם תשקיע החברה לפי כל קритריון?  
רכיבוי הממצאים ("בלתי תלויים" = אפשר לבצע מה שנרצה, את שניהם, רק אחד, אף אחד...):

kritiron	מה כדאי לבצע לפי הקритריון?	פרויקט ב	פרויקט א	
ענ"ג - NPV	בנחה אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט שה - NPV שלו חיובי. לכן, יבוצעו שני הפרויקטים.	13,515	7,390	
שת"פ - IRR	בנחה אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט "קונבנציונלי" של השקעה, כדאי לבצע כל פרויקט של השקעה שעבורו השת"פ (התשואה מהפרויקט) גבוהה מחיר ההון. כאן - שניהם כדים, כי תושאות שני הפרויקטים גבוהות מחיר ההון, 12%.	25%	28.65%	
מדד הרוחיות - PI	בנחה אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט שעבורו מדד הרוחיות גבוהה מ-1. כאן, שני הפרויקטים כדים.	1.29	1.37	

ג. בהנחה שהפרויקטים מוצאים זה את זה, באיזה / באילו מהם תשקיעו לפי כל קритריון?  
ראינו שכל הפרויקטים כדים עקרונית, ואת כולם כדאי לבצע בהיעדר מגבלה ("בלתי תלויים"). אלא שאם הפרויקטים מוצאים זה את זה - המשמעות היא שניתן לבצע אחד מביניהם לכל היותר - בלבד. לכן, לפי כל קритריון יעדף לביצוע הפרויקט שערך הקритריון המתאים שלו מירבי.

kritiron	מה יעדף לביצוע לפי הקритריון?	פרויקט ב	פרויקט א	
ענ"ג - NPV	פרויקט ב	13,515	7,390	
שת"פ - IRR	פרויקט א	25%	28.65%	
מדד הרוחיות - PI	פרויקט א	1.29	1.37	

נניח שבנשח שאלת חלופי אומרים לי: "משקיע מעוניין לפעול לפי כלל השת"פ. באיזה פרויקט יבחרמשקיע זה?" התשובה שלנו תהיה: בפרויקט א. כי השת"פ שלו מירבי.  
נניח שבנשח השאלה אומרים לי: "משקיע מעוניין לפעול לפי מדד הרוחיות. באיזה פרויקט יבחר המשקיע?"  
התשובה שלנו תהיה - בפרויקט א.  
נניח ששאלים אותו "במה יבחרמשקיע הפועל לפי כלל הענ"ג" - התשובה שלנו תהיה תהיה ב.

קיבלו סטירה בין תוכאות הדירוג מבוססות הענ"ג לבין תוכאות הדירוג מבוססות הקритריונים האחרים.

ואם ישאלו: "מהי ההחלטה הבונה ביותר בrama הכלכלי?" תשובה תהיה: כלל הענין הוא המלך! הרי מטרת החברה היא להשיא את הערך הכספי לבאים. המטרה היא לייצר כמה שיותר "כספי" (במונחי ערך נוכחי) ולא כמה שיותר אחוזי תשואה.

**ד. מהם הגורמים לסתירה בין ענין לשתי"פ ככל שקיים, בהיבט דירוג הפרויקטים מסעיף ג'?**  
הגורםים לכך שנוצרה סתירה בין הפרויקט הממוצע ערך כספי (ב) לבין הפרויקט הממוצע תשואה באחוזים (א) נובעת מוגדל השקעה שונה בפרויקטים. בפרויקט ב, גודל ההשקעה גבוהה יותר, ולכן למروת שהתשואה היחסית באחוזים נמוכה יותר - היא מתרגםת לערך כספי גבוה יותר.

ה. השתמשו בעקרון הפרויקט הפרשי כדי "ליישב את הסטירה" בדירוג בין NPV ו-IRR

תחיליה, נזכיר את המבנה התזרימי של הפרויקטים א ו-ב בפני עצם:

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

הפרויקט הפרשי הוא פרויקט **דמיוני** שמודרך בתור פרויקט שתזרימיו הם ההפרש בין תזרימי הפרויקטים "המתחרים" או "המוחזאים את זה".

אנחנו נוהגים לבצע הפקה של הפרויקט ה"קטן" מהפרויקט ה"גדול": כמובן, במקורה זה, נפחית מתזרימי פרויקט ב (הוא הגדל - השקעה גדולה, הכנסות גבוהות) את תזרימי פרויקט ב. כך נקבל:

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000
<b>בבנייה א = הפרשי</b>	<b>(27,286)</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>

הדגמה לאופן חישוב תזרימי הפרויקט:

$$-47,232 - (-19,946) = -27,286 \quad \text{זמן 0 (שימו לב - הפרש עם ערך שלילי הופך ל +):}$$

$$20,000 - 9,000 = 11,000 \quad \text{זמן 4-1 :}$$

כאשר נתונים בפרויקט הפרשי, מקובל לחשב את ה - IRR. איך נחשב את ה - IRR? עליינו לבנות משווהה המבטאת את הערך הנוכחי של כל תזרימי הפרויקט הפרשי, להציב את מחיר החון (IRR) כנעלם, ולהשווות ל- 0:

$$IRR \rightarrow NPV_{\text{חפרשי}} = 0 \rightarrow -27,286 + 11,000 * PVFA(IRR, 4) = 0$$

במהשך פיתוח נקבל:

$$11,000 * PVFA(IRR, 4) = 27,286$$

ואז:

$$PVFA(IRR, 4) = \frac{27,286}{11,000}$$

ואז בחלוקת מלח א-4 מקבלים בקירוב:

$$PVFA(IRR, 4) = 2.48 \rightarrow IRR \approx 22\%$$

בפתרון הטעיפים הקודמים חישבנו זה מכבר את ה - NPV ואת ה - IRR של הפרויקטים עצם:

IRR	פרויקט ב	פרויקט א	IRR
ענ"ג -	7,390	13,515	IRR -
25%	28.65%		IRR -

בנוסף לכך אני יודע ש :

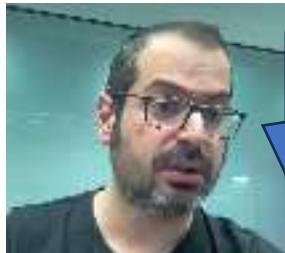
הפרשי	פרויקט ב	פרויקט א	קריטריון
	13,515	7,390	ענ"ג - NPV
22%	25%	28.65%	שת"פ - IRR

בנוסף ידוע שמחיר הערך של החברה הוא 12%.

שלום רב.שמי עמרית ואני עובד רק לפני שת"פ  
איןני רואה בעיניים, רק שת"פ הוא אהובי. لكن  
מבין א-ו-ב שמצויאים זה את זה, אני שבסבצע את  
פרויקט א



אבל אתה יודע שהענ"ג, מיקסום שווי כספי, הוא  
המטרה של כולנו בימון!!! אני אומר לך, בוא  
ニקח את פרויקט ב, אתה לא תתחרט!



אני מכבד את מה שאתה אומר, אבל אתה יכול  
לקפוץ לי. הולכים לפני שת"פ נקודה.



אני צריך לחשב על דרך לשכנע אותו... לפי כלל  
השת"פ.



נפנה כעת **ליישוב הסטירה** :

- לפי  $NPV$  מועדף פרויקט ב.
- לפי  $IRR$  מועדף פרויקט א.
- נניח שאנו רוצים לבנות קונסטרוקציה שתగורם לכך שגם לפי  $IRR$  פרויקט ב יהיה כדאי.
- לשם כך, נגדיר את הפרויקט ההפרשי בתור פרויקט "נוספ" שהחברה יכולה לבצע.
- כאשר נבחן את כדאיות ההפרשי לפי  $IRR$ , אנחנו נטען ש :

  - מבין הפרויקטים א-ב (শ্মুচাইম זה את זה) לפי  $IRR$  מועדף א.
  - אבל בנוסף לא, במידה וניתן, כדאי לבצע גם את הפרויקט ההפרשי :

$$IRR_{\text{הפרשי}} = 22\% > 12\% = k$$
- מה זה אומר בעצם : אם המשקיע יכול לבחור בין "א" בלבד, לבין "א" + "הפרשי", הוא יעדיף לפי  $IRR$  את א+hהפרשי.
- אבל א + ההפרשי = הוא פרויקט ב! ומדובר? כי ההפרשי הוא בבניכוי :
$$A + (B - A) = B$$
- כך קיבלנו שגם לפי השת"פ, אם נפצל את פרויקט B השלם, לשני פרויקטים שהם בדיקות אותו דבר, פרויקט B (העדיף לפי עניין) יועדף - וכך יישבנו את הסטירה בין עניין לבין השת"פ.

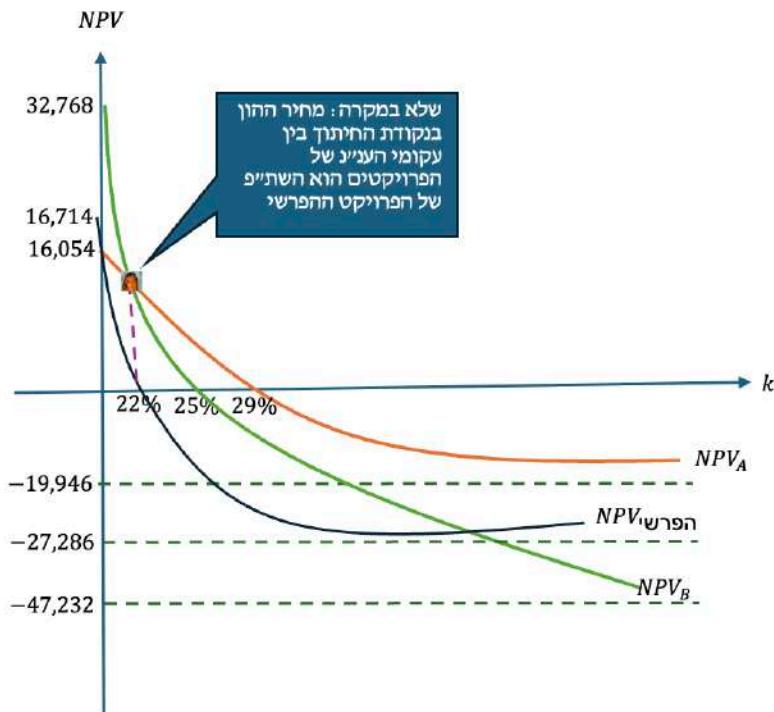
**בתמצית:**

בגישה הפרויקט ההפרשי, מפצלים את הפרויקט העדיף לפי  $NPV$  (ב) לשני חלקים : פרויקט (א) והפרויקט ההפרשי. אז מוכחים שגם (א) וגם ההפרשי כדאיים לפי השת"פ. ובהגדרה, בהינתן  $Sh(A) + (הפרשי) = (ב)$ , מראים שגם לפי השת"פ (ב) למעשה כדאי.

1. שרטוט עקומות הענ"ג של כל הפרויקטים כפונקציה של מחיר ההון - לרבות NPV הפרשי

הפרש	ב	א	שנה
-27,286	-47,232	-19,946	0
11,000	20,000	9,000	1
11,000	20,000	9,000	2
11,000	20,000	9,000	3
11,000	20,000	9,000	4

נק' חיתוך עם ציר אופקי ( $k$ )	IRR =	22%	25%	29%
נק' חיתוך עם ציר אכבי ( $k=0$ )	סכום פשוט	16,714	32,768	16,054
סכום ההשקעה	ערך מינימום	-27,286	-47,232	-19,946



**שאלה 69.2 - פרויקטים משלימים (פרויקטים שביצועם בו"ז שללים מעניק ענ"ג מצרפי גובה מענ"ג הרכיבים)**  
לחברה הוצע להשקיע ב-2 פרויקטים שערכיהם באלפי ש"ח הם כדלקמן :

זמן	פרויקט א	פרויקט ב
-500	-800	0
140	180	1
140	180	2
140	180	3
140	180	4
140	180	5

שיעור ההיוון הוא 5%.

הנicho כי קיימת תלות בין ההשקעות, כך שביצוען בו זמנית יוביל לכך שתזרימי פרויקט א יגדלו ב-40 א' ש"ח בשנה (ambil שיחול שניי בתזרימי פרויקט ב).

מכאן שהחברה תעדי :

- להשקיע רק בפרויקט א
- להשקיע רק בפרויקט ב
- להשקיע בשני הפרויקטים
- לדוחות את שני הפרויקטים
- כל יתר התשובות שגויות

רקע ופתרון (התשובה ג - להלן הפתרון) :

כפי שאמרה רים : כאשר הפרויקטים הם **תלויים**, המשמעות היא שביצוע האחד משפיע על الآخر ולהפך. במקרה זה, תיארו את סוג התלות במובן זה שכאשר שני הפרויקטים מבוצעים בו זמנית, תזרימי א' גדלים ותזרימי ב' לא משתנים.

מצב זה של תרומה לתזרים הכלול כתוצאה משילוב הפרויקטים מוביל להגדלת הפרויקטים הרלוונטיים **פרויקטים משלימים**. בהינתן הצורך לבחון את ביצועם, נוצר 3 חלופות לשם החלטה :

- חלופה 1 : ביצוע א בלבד - לפי נתוני הקיימים.
- חלופה 2 : ביצוע ב בלבד - לפי נתוני הקיימים.
- חלופה 3 : ביצוע א + ב - כאשר תזרימי הביצוע המשולב הם סיכום תזרימי הפרויקטים הנתונים בתוספת תזרימי ההכנסה העודפים הנובעים מהביצוע המשולב.

כמו כן, **מבחןת הקритריון שניישם**, הואיל ולא הגבילו אותנו - כמובן שנלך על הקритריון שהוא המלך, על הענ"ג - NPV שמיקסומו הוא מטרת החברה העילונה.

תזרים - א+b (כולל ערך מוסף)	תזרים - b בלבד	תזרים - a בלבד	
על פי הנתון - תוספת תזרים של 40 לסכום ההכנסה של א, ללא שינוי בתזרים השקעתי			
- 800 - 500 = -1,300	-500	-800	<b>0</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>1</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>2</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>3</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>4</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>5</b>

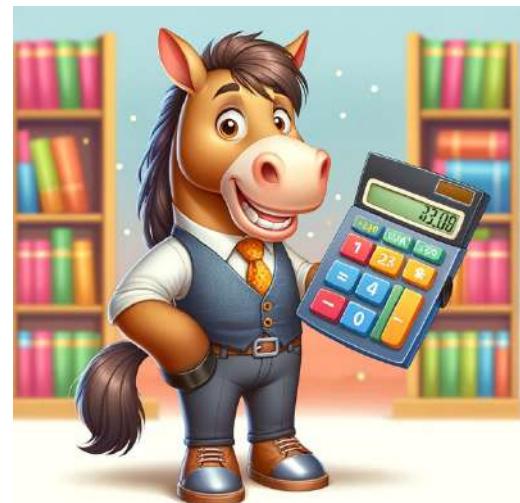
כמו כן, נתון שמחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה. לכן ניתן לחשב את העניין של כל אחד מהפרויקטים:

$$NPV_A = -800 + 180 * PVFA(5\%, 5) = -800 + 180 * 4.329 = -20.78$$

$$NPV_B = -500 + 140 * PVFA(5\%, 5) = -500 + 140 * 4.329 = 106.06$$

$$NPV_{A+B} = -1,300 + 360 * PVFA(5\%, 5) = -1,300 + 360 * 4.329 = 258.44$$

ולכן מבין האפשרויות - ביצוע A לבדו (זבל קופות), ביצוע B לבדו (חביב, אבל לא מיטבי) והשילוב (סוס), יעודף ההילוב. הוואיל ומוביל ל-NPV מירבי.



### שאלה 69.3 - סוג פרויקטים - תאוריה

מעבר לחישובים הטכניים של NPV, IRR, PI החזר הון שנתי... כשרוצים לשפט ולהעריך פרויקטים לפי קריטריונים שונים, חשוב מאד לשים לב לסוג הפרויקט ולמערכת היחסים בין פרויקטים שונים (עם מגבלה, מוציאים זה את זה). על רוב הנושאים דיברנו, אבל שווה לעשות סדר בזורה יותר ממודדת. לשם כך נועדה השאלה זו.

1. הסבירו את המושגים הבאים:
  - פרויקטים בלתי תלויים כלכליות.
  - פרויקטים "לא קיוב הון".
  - פרויקטים בלתי תלויים כלכליות ללא קיוב הון.
  - פרויקטים המוציאים זה את זה.
2. הסבירו מהו הקריטריון הרלוונטי לדירוג הפרויקטים / החלטה לגבייהם.

פתרון :

#### 1. הסבר המושגים :

א. **פרויקטים בלתי תלויים כלכליות** - אלו הם פרויקטים שניתן לבצע באופן אוטונומי (כל פרויקט - בפני עצמו), כאשר ביצוע אחד מהם לא משליך על עצמו היכולת לבצע את הפרויקט האחר; וכן לא משפיע לטובה או לרעה על תזרימי הפרויקט האחר. הדוגמה: רותם הוא משקיע עשיר במיוחד; מוצע לו לפתח בורקס בעפולה ו/או חברת סטארט אפ.

פרויקט/זמן	4	3	2	1	0	
פרויקט בורקס	20	40	30	40	-100	
פרויקט סטארט אפ	900	0	0	0	-300	

ב. **פרויקטים "לא קיוב הון"** - המונח "קיוב הון" הוא מילה אחרת ל"מגבלה השקעה". כאשר לחברת מוצע להשקיע במספר פרויקטים, אבל גובה ההשקעה המצרי שתוכל לבצע מוגבל והוא נאמר שהוא פועלם בעולם עם קיוב הון. לעומת זאת, בעולם ללא קיוב הון - אין מגבלה השקעה. להמחשה נוספת בדבר הבחירה בין פרויקטים בהינתן מגבלה השקעה / קיוב הון - [ראו שאלה 60 כאן](#).

ג. **פרויקטים בלתי תלויים ללא קיוב הון** = לא זאת בלבד שהפרויקטים בלתי תלויים, אין שום מגבלה על היקף השקעה מסוימלי אליו כפופה החברה (היא תעשה "מה שבאה לה" מתוך האפשרויות). דעו לכם, שאם אמרו **שפרויקטים הם בלתי תלויים**, ללא מידע נוסף - המשמעות היא שהם בלתי תלויים ללא קיוב הון.

ד. **פרויקטים המוציאים זה את זה** - פרויקטים אשר ביצוע אחד מהם מבטל (מושcia) את היכולת לבצע את הפרויקט האחר (ראו בין היתר סעיפים ג ו איילך [של שאלה 69.1](#)).

2. קритריונים רלוונטיים לקבלת החלטות / דירוג / הכרעה במצבים השונים (בנהנזה שמדובר בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות) :

PI מדד רוחניות	IRR שת"פ	NPV ענ"ג	סוג הפרויקט / קритריון
יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $PI > 1$	יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $IRR < k$	יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $NPV > 0$	בלתי תלויים ללא קיצוב הון
עלול שלא להיות תקף : גם קритריון זה הוא בסופו של יומם - יחסית	עלול שלא להיות תקף (או סתירה בין IRR ל- $NPV$ בשאלת 69.1)	יש לבצע את הפרויקט שה- $NPV$ שלו מירבי. הkritריון תקף.	מושגאים זה את זה
עלול שלא להיות תקף : גם קритריון זה הוא בסופו של יומם - יחסית	עלול שלא להיות תקף, מאותה סיבה שאיננו תקף כאשר מושגאים זה את זה	יש לבצע את תמהיל הפרויקטים המוביילים ל- $NPV$ מזרפי כולל מירבי. הkritריון תקף.	פרויקטיםבלתי תלויים אך בתנאי קיצוב הון (מגבלת השקעה מירבית מתאפשרת)



## שאלה 70

פרויקט א דורש השקעה של 42,206.78 ש"ח ואילו פרויקט ב דורש השקעה של 68,234.16 ש"ח. שט"פ פרויקט א הוא 13% וشت"פ פרויקט ב הוא 10%.

שני הפרויקטים מניבים תזרימי מזומנים קבועים בכל שנה במשך 5 שנים, אך התזרים השנתי (הקבוע) של פרויקט א שונה מהתזרים השנתי (הקבוע) של פרויקט ב. חשבו את שט"פ הפרויקט ההפרשי.

פתרונות :

נתחילה בלחיציג את הערכים הקיימים בטבלת תזרימיים, מתמטית ידוע:  $y \neq x$

IRR	5	4	3	2	1	0	פרויקט
13%	x	x	x	x	x	-42,206.78	א
10%	y	y	y	y	y	-68,234.16	ב

זכרו : ההגדרה המתמטית של השט"פ היא מחיר ההון שאים נהוון בו את תזרימי הפרויקט, הענין (ה- $NPV$ ) יהיה שווה ל-0.



בנה את הגדרת  $NPV$  של שני הפרויקטים :

$$NPV_A = -42,206.78 + x * PVFA(k_A, 5)$$

$$NPV_B = -68,234.16 + y * PVFA(k_B, 5)$$

אך ידוע שהשת"פ של א הוא 13%, כלומר אם נציב במקומות k ערך של 13% במשווהה, תוצאה החישוב תהיה 0 כי ה-  $NPV$  המתקיים בהיוון במחיר הון זהה ל-  $IRR$  מוביל לענין 0, תמיד.

במקביל, הויל וידוע שהשת"פ של ב הוא 10%, הרי שams נציב במקומות k במשווהה ב ערך של 10%, תוצאה החישוב תהיה 0.

$$-42,206.78 + x * PVFA(13\%, 5) = 0 \rightarrow x = \frac{42,206.78}{PVFA(13\%, 5)} \rightarrow x \approx 12,000$$

$$-68,234.16 + y * PVFA(10\%, 5) = 0 \rightarrow y = \frac{68,234.16}{PVFA(10\%, 5)} \rightarrow y \approx 18,000$$

נזכור ונציב ערכיהם אלו בטבלת התזרימיים המתארת את שני הפרויקטים :

5	4	3	2	1	0	פרויקט
12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	-42,206.78	א
18,000	18,000	18,000	18,000	18,000	-68,234.16	ב

הפרויקט ההפרשי מוגדר בתורו פרויקט "חדש" שככל אחד מותרימיו הוא למעשה ההפרש הפשטוני שבין תזרימי שני הפרויקטים.

מקובל לבצע את החישוב ההפרשי על ההפרש בין הפרויקט ה"גדול" (זה שהשקעתו גדולה ותזרימי גבויים) לבין הפרויקט ה"קטן". לא מחייב. אפשר גם לעבוד הפוך (להחסיר מערכי הפרויקט הקטן את ערכיו הפרויקט הגדל). אבל מומלץ תמיד לעבוד לפי ההפרש בין הגדל לקטן.

5	4	3	2	1	0	פרויקט
12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	-42,206.78	א
18,000	18,000	18,000	18,000	18,000	-68,234.16	ב
					-26,027.38	הפרשי : ב
6,000	6,000	6,000	6,000	6,000		בנייה א

כעת, כל שנותר לבצע, בהתאם להנחיות הנדרש, הוא לחשב את השט"פ של הפרויקט ההפרשי (השורה השלישית במקבץ התזרימיים לעיל). כזכור, חישוב שט"פ דורש לבנות משווהות ענין, להציב את מחיר החון כנעלם, ולהשווות ל-0.

$$NPV_{\text{הפרשי}} = -26,027.38 + 6,000 * PVFA(IRR_{\text{הפרשי}}, 5) = 0$$

נמשיך את הפיתוח ונגלה :

$$PVFA(IRR_{\text{הפרשי}}, 5) = \frac{26,027.38}{6,000}$$

או בעצם :

$$PVFA(IRR_{\text{הפרשי}}, 5) \approx 4.338$$

שיטוט מחיר בלוח א-4, כמפורט להלן, מובילנו לריבית קרובה ל-5%. וזהי תשובהנו הסופית: ה - IRR של הפרויקט ההפרשי הוא 5%.

ЛОЧ А-4: ערך נוכחי מצבבר של 1 ש"ח המותקבל מדי תקופת המשך  $t$  תקופות

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1		0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909
2		1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736
3		2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487
4		3.902	3.808	3.717	3.630	3.566	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170
5		4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791
6		5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355
7		6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868
8		7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335
9		8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759
10		9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145



#### שאלה 70.1 - החזר הון שנתי

חברה שוקלת לרכוש מזינה לחימום נקי. לפי ההסדר עם היבואן התשלומים בגין המכונה יבוצעו בתחילת כל שנה במשך 4 שנים בסכום של 200 אלף ש"ח לשנה. ההכנסות ממיקרת המוצר צפויות להתקבל החל מtons השנה ה-4 במשך 6 שנים. בהנחה שמחיר ההון של החברה הוא 15%, מהי ההכנסה השנתית המינימלית אשר תצדיק את ביצוע הפרויקט?

רעיון ופתרון :

ככל, ההכנסה השנתית המינימלית המצדיקה פרויקט היא זו אשר בהינתנה, ה- NPV הוא אפס (מינימום הכספיות).

לפיכך, אם נבנה את משוואת ה- NPV, נציב את סכום ההכנסה התקופתית כנעלם, ונשווה לאפס - חילוץ הנעלם הוא התשובה לשאלה.

מעבר לעובדה בסיסית זו, המושג הנ"ל = הכנסה התקופתית המצדיקה את הפרויקט - נקרא גם "החזר הון שנתי". במלים אחרות, אם היו דרישים מאייתנו לחשב את החזר ההון השנתי ולקבוע כדאיות לאורו, הiliary פועל בדיקת אותה הגישה.



זמן	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
תזרים	x	x	x	x	x	x	-200	-200	-200	-200

הסבירים: הויל ו-4 תזרימי העלות הם בתחילת כל שנה, הרי שבמוקם להציבם על ה"ציר" בזמן 1 עד 4, הם יוצבו בזמן 0 עד 3. שימוש לב שמחיר ההון של החברה ידוע - 15% :  
ניצור כאמור את משווהת הענין - שבח התזרים x הוא נעלם - ונשווה לאפס :

$$NPV = 0 \rightarrow -200 * PVFA(15\%, 4) * (1 + 15\%)^1 + x * PVFA(15\%, 6) = 0$$

מה עשינו כאן?

הביתוי  $(4 * PVFA(15\%, 4) * 200)$  מבטא את הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים מזמן 0 עד וככל זמן 3. אלא שערך הנוכחי של סדרה מובילה אותנו תמיד "אחד אחרה" ביחס לתזרים הראשון (במקרה זה - ביחס בזמן 0) וכך התוצאה של הביתוי הינה היא בזמן -1. כדי להחזיר בזמן 0, כפלנו ב-1 ועוד מחיר ההון פעם אחת.

הביתוי  $x * PVFA(15\%, 6)$  מבטא את הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים מזמן 4 עד זמן 9 כולל. ערך הנוכחי סדרתנו כזו מקיים את התוצאה אחת אחרת, בזמן 3. לכן יש לתקן 3 שנים נוספות לאחר על ידי מכפלה ב-1 ועוד מחיר ההון בחזקה שלילית של 3.

נפתח ונקבל :

$$-200 * 2.855 * 1.15 + x * 3.784 * 1.15^{-3} = 0$$

במעברת אגפים וחילוץ זרי נקבל :

$$-656.65 + 2.488x = 0 \rightarrow x \approx 263.9$$

המשמעות היא שההכנסה השנתית המינימלית שתצדיק את הפרויקט היא כ-263.9. פרשנות נוספת מצד הטכני היא לומר ש"במקרה זה, החזר ההון השנתי הוא 263.9".

## מפגש 5 – כדאיות פרויקטים המשך – 9/12/2024

**מיini רציו:**

- במפגש הקודם הצגנו את העקרונות והעיקרים ביה' 6. במסגרת זאת, הבחרנו את מושג ה- NPV (שווי כספי נטו במונחי ערך הנוכחי), ה-IRR (שיעור התשואה בפרויקט / הריבית על ההלוואה, למעט במקרים של פרויקטים לא קובנציאונליים), וכן הצגנו בקצרה את מzd הרווחיות PI ואת החור ההון.
- בחלק הראשון של המפגש הנעים זהה נציג מספר סוגיות נוספות בהקשר לישום הקритריונים, באופן נקודתי יותר, ואיהнач נתחליל כבר את יה' 7 שעוסקת בהגדרת בנית תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה.

### שאלה 70.2 – חימום לגבי קритריונים

למשמעות מוצע פרויקט שדורש השקעה של 50,000 ש"ח והוא מניב 19,314 ש"ח בתום כל שנה במשך 4 שנים. מחיר ההון של הפירמה הוא 10% לשנה. האם כדאי לבצע את הפרויקט לפי קритריון הענין? ולפי קритריון השת"פ?

**פתרון:**

4	3	2	1	0	
19,314	19,314	19,314	19,314	-50,000	תזרים

חישוב עניין והכרעה לפיו:

$$NPV = -50,000 + 19,314 * PVFA(10\%, 4)$$

$$NPV = -50,000 + 19,314 * 3.17 = 11,225.38 > 0$$

מדובר בפרויקט בוודד, עניינו חיובי, כדאי לקבלו לפי קритריון זה.

חישוב שת"פ והכרעה לפיו:

שת"פ מאפשר זיהוי כדאיות פרויקט בוודד אם מדובר בפרויקט קובנציאוני (במקרים אחרים, הוא עלול להטעות).

פרויקטים קובנציאונליים (משמעות מתחפה פעם אחד) יש שני סוגים:

פרויקט של השקעה: סימן שלילי ואחריו חיובי – קритריון ההכרעה בדבר קבלת הפרויקט:  $IRR \geq k$

פרויקט של ההלוואה: סימן חיובי ואחריו שלילי.  $IRR \leq k$

וכעת, נוכל לחשב את ה-IRR על פי נתוני הפרויקט, ובהינתן שהוא פרויקט קובנציאוני של השקעה, נבחר לקבלו אם התוצאה גבוהה ממחיר ההון הנוכחי 10%.

תזכורת – כדיحلץ את השת"פ יש להתבסס על משווהת ה- NPV, להציב במקום מחיר ההון את הנעלם  $IRR$ , ולהשוו את המשווה כולה ל-0:

$$-50,000 + 19,314 * PVFA(IRR, 4) = 0$$

$$PVFA(IRR, 4) = 2.58 \rightarrow IRR = 20\% > 10\% = k$$

מה למדנו?

ראשית, בפרויקט פשוט ובודד זה, בהינתן שהוא קונבנציונלי, ניתן לקבל החלטה גם לפי שת"פ וגם לפי ענ"ג. כמו כן, ההחלטה בדבר כדיות תיותר זהה לגבי השימוש בשני הקריטריונים.

אם נתקلت בפרויקט קונבנציונלי בודד ואומרים שהוא **כדי לפי ענ"ג, אז הוא כדי גם לפי שת"פ ולהפך** (טיפ קטן נוסף – גם הכרעה לפי מدد הרוחניות תהיה חופפת).

**שאלה 70.3 – שאלת שכל מטרתה להטמע את המסקנה הבסיסית לעיל**

בחברת "ירינים ועמרם" בע"מ ידוע כי ניתן להשקיע בפרויקט מסוימים – שהנו פרויקט קונבנציונלי. בחברה חישבו את ענ"ג הפרויקט ומצאו שהוא חיובי.

לפניכם מספר טענות:

טענה 1: הפרויקט לא יהיה כדי לפי מدد הרוחניות.

טענה 2: יתכן שהפרויקט לא יהיה כדי לפי ממד הרוחניות.

טענה 3: הפרויקט לא יהיה כדי לפי שת"פ.

טענה 4: הפרויקט יהיה כדי לפי שת"פ.

הטענה / הטענות הנכונה / הנכונות:

א. טענה 1 בלבד

ב. טענה 2 בלבד

ג. טענה 3 בלבד

ד. טענה 4 בלבד

ה. טענות 2 ו-4

פתרונות:

מדובר בפרויקט בודד קונבנציונלי. כדיותתו תקבע באופן זהה לגבי היישום של כל אחד מהקריטריונים (ענ"ג, שת"פ, ממד הרוחניות, ובסימוניהם NPV, IRR, PI).

כאן: **ענ"ג חיובי <>**

כדי לפי ענ"ג <> וגם בודד קונבנציונלי

<> **תתקיים כדיות (בחכרח!) גם לפי IRR, PI,**

רק טענה 4 נכונה.

#### שאלה 70.4 – קритריונים לגבי פרויקט כולל גם הלוואה

למשמעות פרויקט שדורש השקעה של 100,000 ש"ח והוא מניב 35,027 ש"ח בתום כל שנה 4 שנים. מחיר ההון של החברה הוא 17% לשנה.

א. האם הפרויקט כדאי? נanko לפि קритריון השט"פ ולפי קритריון העניין.

ב. הניחו כי הממשלה מציעה הלוואה מסובסדת למימון 80% מההשקעה בפרויקט. ההלוואה נושאת ריבית שנתית בשיעור 4% לשנה והוא מוחזרת ב-4 תשלומים שנתיים שווים של קרן וריבית. על בסיס

הפרויקט המשולב (כולל היבט המימון בהלוואה) האם הפרויקט כדאי לפि עניין? לפि שט"פ?

פתרון :

פתרון סעיף א – האם הפרויקט כדאי? נanko לפি קритריון השט"פ ולפי קритריון העניין.

4	3	2	1	0	
35,027	35,027	35,027	35,027	-100,000	תזרים

בהתנחתה שהפרויקט בודד וקונבנציונלי, ניתן להכريع בצורה נכונה בדבר קבלה או דחיהה חן לפि IRR והן לפि NPV.

$$NPV = -100,000 + 35,027 * PVFA(17\%, 4) \approx -3,921 < 0$$

לפי עניין, הפרויקט אייננו כדאי (عنيין שלילי).

למרות שבורר לי בהינתן סוג הפרויקט שגם לפि IRR הוא לא יהיה כדאי (קרי, קיבל IRR שנמוך ממחיר ההון), נחשבו כמותית:

$$-100,000 + 35,027 * PVFA(IRR, 4) = 0 \rightarrow IRR = 15\% < 17\% = k$$

גם לפि IRR, הפרויקט לא כדאי.

פתרון סעיף ב – הכרעה בדבר כדאיות פרויקט באופן שטחני גם לתזרימי הלוואה מסובסדת ייעודית  
ככלל, עלויות המימון של פרויקט כבר באות לידי ביטוי במנגנון ההיוון (במסגרת מחיר ההון, שמשיע לחישוב NPV). אלא שבמקרה שבו קיימת הלוואה מסובסדת למימון הפרויקט, שלא במחיר ההון – הרוי שיש לשקוף את תזרימייה בפרויקט, והם ישפרו את העניין ואת הכספיות.

לכן כאשר אני מזוהה פרויקט שבגינו מוצעת לחברת הלוואה מסובסדת, תחילה העבודה יהיה:

שלב 1 : חשב את תזרים ההלוואה בהתאם לנוטוניה, כולל ריבית, בכל תקופה.

שלב 2 : הוסף / נכה את תזרימי הלוואה התקופתיים מتوزרי הפרויקט הבסיסי הנוטוניים. כך קיבל את תזרים המזומנים נטו.

שלב 3 : הפעילו את קритריון ההכרעה הרלוונטי על התזרים נטו המשולב (כלומר חשבו NPV/IRR/PI על תזרים הנטו המשולב).

שלב 1 – העתק נתוני השאלה וчисוב תזרים הלוואה  
 הנicho כתע כי הממשלה מציעה הלוואה מסובסדת למימון 80% מההשקעה בפרויקט. הלוואה נושאת ריבית שנתית בשיעור 4% לשנה והוא מוחזרת ב-4 תשלומים שנתיים שווים של קרן וריבית. על בסיס הפרויקט המשולב (כולל היבט המימון בהלוואה) האם הפרויקט כדאי לפי עניין? לפי שטי'פ?

סכום ההחזר התקופתי בהלוואה, בהתבסס על סכום הלוואה (LOAN במונה) ועל ה- PVFA המתאים לריבית המשובסדת ומספר התשלומים במכנה :

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, n)} = \frac{80\% * 100,000}{PVFA(4\%, 4)} = 22,039$$

שלב 2 : הוסף / נכח את תזרימי הלוואה התקופתיים מتوزרי הפרויקט הבסיסי הנתונים. כך קיבל את תזרים המזומנים נטו.

4	3	2	1	0	
35,027	35,027	35,027	35,027	-100,000	תזרים פרויקט
-22,039	-22,039	-22,039	-22,039	80,000	תזרים הלוואה
12,988	12,988	12,988	12,988	-20,000	תזרים נטו משולב

שלב 3 : הפעילו את קритריון ההכרעה הרלוונטי על התזרים נטו המשולב (כלומר חשבו NPV/IRR/PI על תזרים הנטו המשולב).  
 נחשב מחדש כדאיות בהינתן  $k=17\%$ .

$$NPV = -20,000 + 12,988 * PVFA(17\%, 4) \approx 15,626 > 0$$

כלומר, בהתחשב גם בערך שנתי מה haloואה המשובסדת, הפרויקט כדאי לפי NPV. כמובן שה כדאיות התקיימית גם לפי IRR (בהתנן שהוא פרויקט בודד שהוא קונבנציונלי).

$$-20,000 + 12,988 * PVFA(IRR, 4) = 0 \rightarrow IRR = 53\% > 17\% = k \rightarrow ^{13}$$

<sup>13</sup> מדובר בתרגיל שאת נתנו אני המצאי, ולכן לא ניתן להלץ IRR מלהלה. בבחינה, סביר שתוכל לחלק מהלה. בכל מקרה, המסקנה לפיה גם לפי IRR מתקיימת כדאיות, בעינה עומדת לאור הערך החיווי של NPV והיות הפרויקט בודד, קונבנציונלי.

**70.5 – קритריון החזר הון שנתי במצב שבו התקובל הראשוני נדחה**  
 שקיי שוקלת לרכוש מכונה ענקית לחימום נקיין שעולותה היום 300,000 ש"ח ובנוסף היא תדרוש תשלום בעוד שנתיים בסכום של 200,000 ש"ח ובוד 4 שנים בסכום של 250,000 ש"ח. החל מתום השנה ה-7 ובמשך 10 שנים המכונה תניב הכנסה שנתיית קבועה. בתנאים אלו, ובנחה שמחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה, מהו סכום הכנסה השנתית שיצדיק את ביצוע הפרויקט?

פתרון :

תזכורת: החזר הון שנתי מושמעו תזרים המזומנים התקופתי החזובי הקבוע שיצדיק את כדאיות הפרויקט. במלים אחרות, זהו אותו תזרים שהנבטו באופן קבוע במהלך התקופות שבהן הפרויקט מניב הכנסה – תוביל את הענין ל-0 (נק' מינימום כדאיות).  
 במלים אחרות, כאשר הפרויקט "מורכב", נציג את מכלול הרכיבים התזוריים על ציר זמן / בטבלה, נסמן את התזרורים כנעלם בהתאם, ונבטא את משווהת הענין בהתאם, אגב השוואתה ל-0. תזרים הנעלם מסומן עם הפרטוף הנאה של ירין.

16 ...	8	7	...	4	3	2	1	0	
				-250,000		-200,000		-300,000	תזרים

   
 $X =$

$$NPV = 0 = -300,000 - 200,000 * (1 + 5\%)^{-2} - 250,000 * (1 + 5\%)^{-4} + X * PVFA(5\%, 10) * (1 + 5\%)^{-6} = 0$$

משווהה זו ניתן לחלץ את  $X$  שיהווה את החזר ההון השנתי.

$$-687,082 + X * 7.722 * (1 + 5\%)^{-6} = 0 \rightarrow X = 119,238$$

כלומר, הפרויקט יהיה כדאי אם הכנסה הקבועה בכל אחת מהשנתיים 7-16 תהיה 119,238 ש"ח לפחות. זה החזר ההון השנתי.

זהו! אנחנו מוכנים למן 11 ולסופגניות



## יחידה חדשה - יח' 7 - **בנייה תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה (קיזוב הון)**

**מיini רציו:**

ביחידה 6 – העוסקת בבחינת כדאיות השקעות ופרויקטים שתזרימיים נתונים, עוסקו (בעיקר) בעיבוד ערכי טבלאות תזרימיים על בסיס קרייטריונים מוגדרים, על מנת לקבוע כדאיות ולדרג. אלא שבדרך כלל, תזרימיים אלו אינם ניתנים לנו "מן המוקו". בדרך כלל, אנחנו מקבלים נתונים גלים בסיסיים של הכנסות/הוצאות, של מסים והשפעות נוספת, ובאחריותנו לפועל כדי לייצר מביל הנזונים את הערך התזרימי הרלוונטי – ובמהשך: את הענ"נ<sup>14</sup> (NPV) כבסיס לקבלת החלטות (cadaiot hareshka).

### עקרונות בסיסיים באפיון תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה

עקרון	פרשנות
תזרימיים תוספתיים	אנו מתעניינים אך ורק בתזרימי המזומנים העתידיים שצפויים לנבוע ספציפית מההחלטה על ביצוע הפרויקט. כך למשל, עלויות קבועות (אלו שאין ניתנות לשינוי ולביטול, בין אם הפרויקט יבוצע בין אם לאו) אינם לא תובנה בחשבון בתחזית תזרימי המזומנים של הפרויקט על מנת לקבוע את כדאיותו.
מנקודת ראות כלל הפירמה	אם פרויקט מסוים מגדיל/ מקטין תזרימיים של פרויקט אחר בחברה, יש להתחשב בכך כהכנסה נוספת/ הוצאה נוספת לפי העניין. נניח שביצוע פרויקט תשתיות בחברה צפוי להניב להLKות נוספות גם בתחום הייעוץ. כנש��ול את כדאיות פרויקט התשתיות, נתיחס גם לעלייה הצפוייה כתוצאה ממנה בתחום הייעוץ.
התעלמות מעלות שקוות (sunk cost)	כל עלות שנובעת מairoע/ פעילות היסטורית, טרם קבלת ההחלטה, לא תובא בחשבון בתזרימי הפרויקט ולא תכלל בשיקולים להחלטה בדבר הפרויקט. למשל, אם ביצענו סקר שוק מוקדים לטובת איסוף נתונים פרויקט – עלות סקר השוק לעולם לא תכלל בתזרימי המזומנים לשם בוחינת כדאיות הפרויקט.
לא לכלול עלויות מימון (למעט חריג...)	למעט המקרה של הלוואה מסובסדת ייודית לטובת הפרויקט, כל עלויות המימון כבר מובאות לידי ביטוי במסגרת ההיוון/ מחיר הון. לכן, למעט המקרה הספציפי הנ"ל, אם מספרים על הלוואה שהחברה נטלה לצורכי הפרויקט – אין להתחשב בתזרימייה.
בהתחשב בתזרימי מסים על ההכנסה	עד כה, התעלמנו באופן מלא מעליות הקשורות למיסוי הכנסות החברה ורווחה. בעת, חשוב להתייחס אליהן על מנת שהתמונה בדבר תזרימי הפרויקט תהיה מלאה.

<sup>14</sup> אם התזרימיים נבנו על ידנו כהלה, בהחלט נוכל לחשב גם את השט"פ ומדד הרווחות וכו'. יחד עם זאת, ביה' 7, הקритריון המרכזי ובפער גדול הוא קרייטריון ה- NPV.

**שאלה 70.6 – הציג מקרה בסיסי של תזרימי מזומנים לתכניות השקעה וחישוב ענ"ג**

חברה שוקלת לרכוש מכונה לחימום נקייק עלות של 500,000 ש"ח. המכונה בעלת אורך חיים שימושיים של 4 שנים, והוא מופחתת על פני תקופת זו גם לצרכי מס. לאורך תקופת השימוש במכונה צפויות להיווצר הכנסות שנתיות בסך 200,000 ש"ח והוצאות שוטפות שנתיות של 30,000 ש"ח.

בנחלה שמחיר ההון של החברה לאחר מס 10% לשנה ושיעור המס החל על החברה הנ"ו 20%, וכי כלל תזרימי המזומנים (למעט רכישת המכונה) הם בתום כל שנה, האם הפרוייקט כדאי? נזכיר.

**פתרון :**

כאשר אני מזזה שאלה שכוללת רכיבים שונים של תזרימי מזומנים (הכנסות, הוצאות, מסים, פחת) – אני יודע שאני בICH 7, ואחד האתגרים המרכזיים שלי יהיה לתרגם את המלול הרוב לציר זמן ועליו תזרימי מזומנים. נבצע זאת כאן :

	0	1	2	3	4
עלות השקעה	-500,000				
מגן מס - פחת		$\frac{500,000}{4} * 20\%$ 25,000	25,000	25,000	25,000
הכנסות שנתיות		200,000	200,000	200,000	200,000
הוצאות שנתיות		-30,000	-30,000	-30,000	-30,000
השפעת מס		-20%*(200,000-30,000) -34,000	-34,000	-34,000	-34,000
סה"כ	-500,000	161,000	161,000	161,000	161,000

**הסבירים נוספים ללוח התזרימיים :**

- ההשקעה עצמה (במכונות, ציוד, וכו' – במכונית נקייק) היא בזמן 0 אלא אם נאמר אחרת. היא בגדיר תזרים שלילי, ובהתו השקעה (רכישת נכס) היא לא מהוות הוצאה לצורך מס, ולכן לא יוצרת השפעת מס מיידית.
- בכל שנה עוקבת למועד ביצוע ההשקעה, علينا לחשב את הוצאות הפחת. הוצאות אלו אינן תזרימיות ואף על פי כן, כן מזוכות במגן מס (זיכוי מס) שהוא בגדיר תזרים חיובי. כדי לחשב זיכוי זה, נחלק את עלות ההשקעה בתקופת הפחתה (הוצאות פחת) ואת התוצאה נכפול בשיעור המס.
- להכנסות השנתיות ולהוצאות השנתיות השוטפות (שאינם פחת) נתייחס בסימן המתמטי המתאים במועד התרחשותן.
- מס יכול גם על ההפרש בין הכנסות השנתיות לבין הוצאות השנתיות – והשפעתו התזרימית בסימן הפוך (כפי אם מדובר ברווח, ההשפעה שלילית, ואם מדובר בהפסד – השפעת המס חיובית).

בוחלת אפשר לחשב את הענין על בסיס חישוב ה-NPV לזרימי הסה"כ,omid נבצע זאת. יחד עם זאת, מקובל יותר מטעמי זמן / ירידעה / התאמה לפתרונות קיימים, לייצר גם משווהות פתרון מוקוצרת. קודם כל על בסיס הלוות:

$$NPV = -500,000 + 161,000 * PVFA(10\%, 4) = 10,370 > 0$$

את ההחלטה בדבר כדאיות הפרויקט קיבל "כרגיל" לפי ענין חיובי / שלילי. כאן, הפרויקט;cדי.

מעבר כעט לטכנית הפתרון המוקוצרת המקבילה. לשם נוחות נעתיק לכואן שנית את כל הנתונים:

חברה שוקלת לרכוש מכונה לחימום נקייק בעלות של 500,000 ש"ח. המכונה בעלת אורך חיים שימושיים של 4 שנים, והיא מופחתת על פני תקופה זו גם לצרכי מס. לאורך תקופת השימוש במכונה צפויות להיווצר הכנסות שנתיות בסך 200,000 ש"ח והוצאות שוטפות שנתיות של 30,000 ש"ח. בהנחה שמחיר ההון של החברה לאחר מס 10% לשנה ושיעור המס החל על החברה הנ"ו 20%, וכי כלל זרימי המזומנים (למעט הרכישה של המכונה) הם בתום כל שנה, האם הפרויקט;cדי? נМО.

להלן משווהות הפתרון המלאה, המובילה לאותה זהה:

$$NPV = -500,000 + \frac{500,000}{4} * 20\% * PVFA(10\%, 4) + (200,000 - 30,000) * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 4) = 10,370$$

ואם מישחו / מישהי צריכים הסברים מפורטים על כל איבר, להלן:

$$NPV = -500,000 + \frac{500,000}{4} * 20\% * PVFA(10\%, 4) + (200,000 - 30,000) * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 4) = 10,370$$

עלות השקעה  
זמן 0  
לכן אין צורך להוונה

הערך הנוכחי של מגני המס על הפחת.  
הוא מחושב על ידי הוצאות הפחתה (הייחס  
בין עלות השקעה לתקופת הפחתה  
לערך מז):  
$$\frac{500,000}{4}$$
  
כל זה מוכפל בשיעור המס - 20%  
משום שהוא שיעור הזיכוי שיתקבל על בסיס שנתי.  
ובהינתן שמשיק לדוח על פחת זיכויים המשך כל  
תקופת ההזקקה של הפריט (או תקופת הפחתה - מה שהוא קצר),  
הרי יש להוון סדרת זיכויים אלו ב-PVFA של 4 זרים

דרך המהירה להגעה לתוצאות  
הOPERATIVE NET PROFITABILITY (กำไร הפעולית)  
שנה במשך 4 שנים,  
על כן הוענו בסדרה  
עם PVFA של 4  
המס קרי-ב-  
(1-20%)  
כדי להגעה לערך הזרימי נטו  
אחרי מסים

**שאלה 70.7 – בניית תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה, רק בגיןה מקוצרת ופחות בתקופה שונה**

שרון שפרן שוקלת להתחדש במכונה חדשה לחימום נקניק עבור עובדי המשרד שלו בחברת "ספרנים בע"מ". החלטתה עומדת על הפרק לאור ממצאים של מחקר רחב היקף שערך החברה בשיתוף חברת ייעוץ חיצונית בעלות של 150,000 ש"ח ששולם זה עתה, ולפיו אכילת נקניק צפואה להגדיל את תזרימי החברה. עלות מכונת הנקניק 800,000 ש"ח. העלייה בתזרימי ההכנסה של החברה בעקבות הפרויקט צפואה להיות בסכום של 400,000 ש"ח בכל אחת מהשנתיים הראשונות ובסכום של 200,000 ש"ח בכל אחת מ-4 השנים לאחר מכן. העליות השנתיות השוטפות הן בסכום של 40,000 ש"ח, עיקרן לשם ניקוי מכונת הנקניק משאריות כרבולות ופופיקם. מכונת הנקניק מופחתת בשיטת הקו ה ישיר לצרכי מס במשך 4 שנים. החברה כפופה למס בשיעור 20% ומהיר ההון של החברה לאחר מס הוא 5%. האם הפרויקט כדאי? נマー.

**פתרון:**

התוצאה המתתקבלת להלן היא התוצאה של סיכון כולל הערות בכל השירות (זו מושואה אחת שرك פופולרי לשורות לאור אורה).

$$\begin{aligned}
 NPV = & -800,000 + \frac{800,000}{4} * 20\% * PVFA(5\%, 4) \\
 & + (400,000 - 40,000) * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 2) \\
 & + (200,000 - 40,000) * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 4) * (1 + 5\%)^{-2} = 289,032
 \end{aligned}$$

עלות הסקר היא עלות של פעולה היסטורית. זהה עלות שקוועה, שכבר נתהוותה, שלא ניתן להשיבה, ואשר על כן איננה חלק מהתזרימים שישינו לקבל החלטה לגבי הפרויקט מפה ולהלאה. לגבי הוצאות הפחית: הן מוחשבות במרקחה הפסוט (אם אין ערך שיר / גרט לצרכי מס, דבר על זה בהמשך) לפי הפרויקטיה הפשוטה שבין עלות ההשקעה לתקופת ההפחיתה **לצרכי מס**. מידע זה מופיע רק בשורה הלפניהם אחרונה.

לGBTי מסpter תזרימי מגני המס על הפחית (4 PVFA(5%, 4) מדוע? מסpter מגני המס על הפחית באופן כללי נקבע תמיד לפי הנמוך מבין שני הרכבים: א. תקופת החזקה בפרט בשנים (כאן – 6). ב. תקופת ההפחיתה של הפרט לצורך מס (כאן – 4 שנים).

לGBTי הביטוי (1 – 20%) \* (400,000 – 40,000) מדווח בהכנסה השנתית בכל אחת מהשנתיים הראשונות, בגין הוצאות השוטפות, וכל זה (רווח תפעולי שנתי בשנתיים הראשונות) בגין מס.

לGBTי הביטוי:  $(1 + 5\%)^{-2} * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 4) * (400,000 - 40,000) + (200,000 - 40,000)$  הוא מייצג את תזרימי ההכנסה נטו (הכנסות בגין הוצאות ובנטול מסים) בכל אחת מ-4 השנים העוקבות, קרי בשנים 3, 4, 5, 6. כאשר סדרה זו מהוונת באמצעות PVFA מגיעים לזמן 2 (אחד אחרת ביחס לתזרים הראשונים). כדי לתאם הכל לזמן 0, כופלים ב-1 ועוד הריבית בחזקת 2.

#### שאלה 70.8 – פרויקט שבו תזרימי ההכנסה אינם ידועים, ויש לחצות על מנת לבחון כדאיות



ד"ר צבאן שוקל להשקיע במכונה לחימום נקניק בעלות של 300,000 ש"ח. המכונה צפופה להניב הכנסה שנתית קבועה, בתום כל שנה, במשך 8 שנים. המכונה מופחתת על פני 8 שנים גם לצרכי מס ושיעור המס אליו כפופה לחברה הננו 20%. כמו כן, מחיר ההון השנתי של החברה, אחרי מס, הננו 10%. מה צריכה להיות ההכנסה השנתית הקבועה על מנת שהפרויקט יהיה כדאי?

פתרונות :

כדי שפרויקט יהיה כדאי, הכנסה המינימלית הנדרשת היא זו שתוביל לאייפוס הענין.

$$NPV = -300,000 + \frac{300,000}{8} * 20\% * PVFA(10\%, 8) + X * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 8) = 0$$
$$NPV = -259,987.5 + 4.268X = 0 \rightarrow X \approx 60,915$$

מסקנה: כדי להצדיק את הפרויקט הכנסה השנתית צריכה להיות 60,915 ש"ח.

#### שאלה 70.9 – פרויקט שבו נדרש לחוץ את תזרימי ההכנסה, במקרה יותר מורכב



מוראל שוקלת לרכוש מכונת חימום נקניק לחברה. מחיר ההון של החברה לאחר מס הוא 12% לשנה. משך הפרויקט הוא 10 שנים. עלות מכונת הנקניק היא 400,000 ש"ח. הכנסה השנתית בכל אחת מ-4 השנים הראשונות קבועה, ובכל אחת מ-6 השנים לאחר מכן מהוות 80% מההכנסה השנתית ב-4 השנים הראשונות. ההוצאה מהוות 60% מההכנסה במהלך 4 השנים הראשונות, ו-30% מההכנסה במהלך 6 השנים לאחר מכן (הוצאות אלו אינן כוללות פחתה). פרט להוצאות השוטפות הניל', מוראל עוסיק בפרויקט חימום הנקניק עובד קבוע, שלא ניתן לפטרו, ואשר עלות שכרו השנתית היא 240,000 ש"ח. הנסיבות הכספיים של הפרויקט התקבלו לאחר סקר שוק מעמיק שנערך בעלות של 30,000 ש"ח.

רשות המסים מתיירה לחברת הוצאות פחת בגין הפקחת פריטי נקניק, לפי תקופת הפקחת של 4 שנים. שיעור המס אליו כפופה החברה הוא 30%.

נדרש: מהו סכום הכנסה השנתי בכל אחת מ-6 השנים האחרונות, אשר יוביל להצדקת הפרויקט?

פתרונות :

למרות שגישת הפתרון שניים בהחולט תבצע שימוש בנוסחה ובחילוץ, הרי שלאור ריבוי רכיבי התזרים, נציגים לפחות ברמה הבסיסית (לפני מס) את החלקים העיקריים של התזרים. לשם נוחות, הערכים יוצגו באלפי ש"ח.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
הכנסה 4-1		X	X	X	X						
הוצאה 4-1		-0.6X	-0.6X	-0.6X	-0.6X						
סה"כ רווח שנתי 4-1 לפני מס		0.4X	0.4X	0.4X	0.4X						
הכנסה 10-5						0.8X	0.8X	0.8X	0.8X	0.8X	0.8X
הוצאה 10-5						-0.3*0.8X =-0.24X	-0.24X	-0.24X	-0.24X	-0.24X	-0.24X
סה"כ רווח שנתי 5-10 לפני מס						0.56X	0.56X	0.56X	0.56X	0.56X	0.56X

$$NPV = -400 + \frac{400}{4} * 30\% * PVFA(12\%, 4) + 0.4X * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 4) + 0.56X * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 6) * (1 + 12\%)^{-4} = 0$$

קייבלי:

$$X = 164.76$$

אבל זו רק הכנסה השנתית ב-4 השנים הראשונות, ושאלו אותו על הכנסה השנתית דזוקא בכל אחת מ-6 השנים האחרונות מהו % 80 מסכום זה, והיא באלפי ש"ח:

$$164.76 * 0.8 = 131.8$$

וב שקלים שלמים: **131,800 ש"ח**

הסבירים נוספים:

כאשר מציגים בפרויקט מקרה שבו הוא דורש עסקה של עובד קבוע, הנחתנו הפרשנית היא שמדובר בעובד קיים (קבוע) שפשות מוקצת לפרויקט לאורך תקופת קיומו. שכר שכזה, בהיותו תזרים קבוע, לא נובע מעצם ביצוע הפרויקט, אלא מהעובד – ואיןנו ניתן למניעה. לפיכך, שכרו של עובד כזה איננה חלק מגורמים המזומנים של הפרויקט.

לגביו סקר השוק – גם הוא מהוות פעילות היסטורית נכוו לנקודת הזמן שבה מתאפשרה החלטה, ואשר על כן איןנו תזרים מזומנים שיווא בחשבון.

## מפגש 6 – קיצוב הון ויישומים ייח' 7 – 16/12/2024

### ריענון קצר וחיבור לאחר

במפגש הקודם הנקדנו את היסודות לקיצוב הון – האופן שבו משתמשים במקרים מסוימים מילוליים כדי לזקק מתוכם את תזרימי המזומנים הכספיים לבוע מפרויקטיטים, ולאחר מכן – לחשב את כדאיותם (בדרך כלל – על בסיס ענ"נ). במסגרת זו, מנדנו להתעלם מ揆ירים לא רלוונטיים, להתייחס למסים ולהשפעות נוספת. בפגישה הזיה – נמשיך לתרגל ולהציג אגב התרגול באינטנסיביות מוגוון סוגיות, שחלקן בהחלט עשוויות להיות רלוונטיות לאופל 02 שבספה. בפגישה הבא, נמשיך לטחון בעוצמה רבה ואולי, עד אז, תגבשו סוגיות ספציפיות הדורשות ליבורן.

**שאלה 70.91 – חישוב ענ"ג לפרויקט שיש לו ערך גרט / שיר, במקרה כללי שבו קיים פחות מואץ**  
חברה שוקלת לבצע פרויקט, לשם כך ערכה בדיקה מקדימה כדי לבחון כדאיותו, עלות של 150,000 ש"ח ששולמו ליו"ץ הכלכלי אשר מסר את הפרטיהם הבאים: לשם ביצוע הפרויקט, נדרש השקיע במחשבים MacBook עלות של 300,000 ש"ח. אורך החיים של המחשבים הוא 5 שנים (כמשך הפרויקט) וערך השיר / הגרט שלהם הוא 90,000 ש"ח. הפרויקט צפוי להניב הכנסות בסך 200,000 ש"ח בשנה הראשונה, 300,000 ש"ח בשנה השנייה ו-400,000 ש"ח בשנה השלישי מהשנים 3-5.

המחשבים מוחתמים לצרכי מס בשיטת הקו ה ישיר במשך שנתיים, כאשר שיעור המס 30% ומהיר ההון לאחר מס 10%.

נדרש: מהו ענ"ג הפרויקט?

פתרונות:

בבואי לנתח תזרימי פרויקט בעולם עם מסים לשם חישוב ענ"ג, אני אוהב להתחיל במיפוי עלויות שאינן רלוונטיות ועל כן, לא יזכה להתייחסות כלל במסגרת התחשב. בהקשר זה בולטת בא-רלוונטיותה עלות הבדיקה המקדימה. מדוע? משום שבבואה לבחון את תזרימי המזומנים לשם קבלת החלטה, אנו מתעניינים אך ורק באוטם תזרימיים שנייתן להשפיע עליהם, ככלומר – הכנסות והוצאות, או ערכיהם אחרים, שככל קיומם נובע מההחלטה על ביצוע הפרויקט בנקודת הזמן הנוכחית. במלים אחרות – עלות היסטורית לעולם לא תהווה חלק מ揆ימי המזומנים של הפרויקט, היא בגדר עלות שקופה.

**עלויות היסטוריות שאינן ניתנות להשבה / ביטול לא תכללה בתזרימי המזומנים.**

השלב הבא שאני אוהב לטפל בו – הוא סוגיית השקעה. עלות השקעה בזמן אפס, מגן המס (זיכוי המס) بعد הפחתתיה על פני הימים הרלוונטיות, ובמידת הצורך – מכירת השקעה בסיום הפרויקט.

נתחיל מהתיקשות להשקעה ומגנני המס על הפחתתה :

$$-300,000 + \frac{300,000 - 90,000}{2} * 30\% * PVFA(10\%, 2)$$

מגן המס על הפחתה דורש חישוב הוצאות הפחתה לצורך מס תחילת. מדובר במחובר השני במשווהה. הוא מורכב מהעלות 300,000 בኒכוי השייר / הגרט לצורך מס (רק אם מונח זה נכלל מפורשות; שכן שווי הפריט בסיום חייו איננו עונה להגדלה). כל זה מחולק בתקופת הפחתה לצרכי מס, ומוכפל בשיעור המס.

תמורה ממכירת ההשקעה ומיסוייה בתום הפרויקט :

בשאלה לא נאמר מפורשות שהפריט צפוי להימכר בתום הפרויקט. בנוסף, למורות שניתן מידע בדבר ערך הגרט / השייר לצרכי מס, אין מידע מפורש בדבר שווי השוק הצפוי לפריט בתום הפרויקט. יחד עם זאת, עלינו להניח שהיהuder נתונים סותרים, פריטי רכוש קבוע תמיד יימכרו בתום הפרויקט בהתאם לערך הספרים (העלות המופחתת שלהם) אם יש כזו.

על פי נתוני השאלה – הפריט מופחת על פני שנתיים לצרכי מס. לכן, עלותו המופחתת בתום הפרויקט (לאחר 5 שנים) היא ערך הגרט / השייר בלבד :

עלות הפריט ההיסטורית	300,000
פחית נცבר לתום 5 שנים	<u>(210,000)</u>
ערך ספרים = עלות מופחתת	90,000

בתום 5 שנים, אנו מניחים שהפריט נמכר בתמורה זו. כמו כן, הואיל והוא נמכר בתמורה זהה לערך הספרים, לא יכול להיווצר רווח / הפסד במכירה. בקצרה: **אם פריט נמכר לאחר שתקופת הפחתתו לצורך מס תמה בתמורה לערך הספרים שלו (ברירת מחדל, אם אין נתון אחר על שווי), אז התמורה זהה לגרט, ואין מס.**

$$90,000 * (1 + 10\%)^5$$

יש לבטא את המכירה והتوزרים בגין במנוחי עניין, והואיל והמכירה היא תזרים חד עמי, ההיוון לאחר הוא על ידי חלוקה ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה, או ע"י מכפלה באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית.

ערך נובחי של תזרימי הכנסה מהפרויקט (שנתיים, אחרי מס) :

נתון: "הפרויקט צפוי להניב הכנסות בסך 200,000 ש"ח בשנה הראשונה, 300,000 ש"ח בשנה השנייה ו-400,000 ש"ח לשנה בכל אחת מהשנתיים 3-5".

$$200,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 300,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-2} \\ + 400,000 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2}$$

מה עשינו כאן?

ה-200,000 הם סכום בודד בעוד שנה. נטרלנו ממנו מס והיוונו אותו כסכום בודד שנה אחרת. גם ה-300,000 הם סכום בודד בעוד שנה, נטרלנו גם מהם מס והיוונו אותם כסכום בודד שנה אחרת. ה-400,000 מייצגים סדרה שמוספע איברהה הראשונית בזמן 3. היוונו אותה לאחר מס כסדרה, והואיל וההתנייחות היא כל סדרה, הגיעו לנקודת הזמן של "אחת אחרת" לפני תחילת הסדרה כולמר בזמן 2. לכן, את כל הביטוי עליינו בהתאם על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית 10% בחזקה שלילית של 2.

איחוד כל האלמנטים לנוסחת NPV אחת (הכלב "שורה אחת", פיצול השירות רק מטעמי מקום):

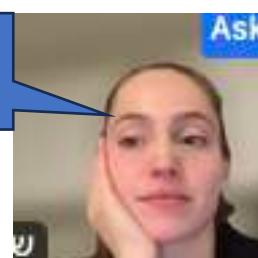
$$NPV = -300,000 + \frac{300,000 - 90,000}{2} * 30\% * PVFA(10\%, 2) + 90,000 * (1 + 10\%)^{-5}$$
$$200,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 300,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-2}$$
$$+ 400,000 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2}$$

והתוצאה:

$$NPV = 686,849$$

הואיל וה-NPV חיובי, כדאי לבצע את הפרויקט שזה עניינו.

האם כל התרגילים כל כך ארוכים בתחום זה?



לא. לצד התרגילים הבוחנים על עניין מלא, ישנו  
תרגילים הבוחנים על השפעת אירוע ספציפי



### שאלה 70.92 – המשמעות של הון חזר והשפעתו על הענין

אלון פרידמן שוקל לבצע פרויקט ממשמעותי בתחום חימום הנקייק. ענין הפרויקט הוא חיובי בסך 548,000 ש"ח. בבדיקה של התחשב שנערך, התברר כי ההתייחסות לתזרימי הפרויקט לא כללה השקעה הנדרשת בהון חזר בסכום של 120,000 ש"ח. מדובר בהשקעה במלאי קבוע, שתבוצע בתחילת הפרויקט ואשר תושב לחברת במלואה עם סיומו בסכום זהה. משך הפרויקט 8 שנים, החברה כפופה למס בשיעור 30%, ומהיר ההון של החברה 10%.

נדרש: מהו ערך הענין המתוקן?

פתרון:

השאלה הרשונית העולגה והמתבקשת, ולפעמים גם יש עליה מגוון שאלות והידטים תיאורתיים היא: אם החברה צריכה להשקיע סכום, והיא מקבל אותו במלואוchorah, בחלוף מספר שנים – האם זה רלוונטי בכלל לחישובי עניין וכדאיות, או שנכון יותר לומר שהוואיל וההשפעה הכלולות אפס, אפשר להתעלם מזה?

התשובה היא: כמובן שאסור להתעלם! הרי כל הרעיון במימון וניהול פיננסי הוא ההשפעה של עיתויי תזרימי המזומנים על הערך. ולכן, חייבים לבטא את השפעות התזרימיים ואת ההשלכות הנובעות על הערך בchorah של היון.

$$\Delta NPV(Working Capital) = -W + W * (1 + k)^{-t}$$

$$\Delta NPV(Working Capital) = -120,000 + 120,000 * (1 + 10\%)^{-8} = -64,019$$

שים לב שאין השפעת מס לאירוע מסוים שבתפיסה הבסיסית, רשות המסים לא רואה כאן רווח/פסד חשבוני החייב במס, למורת שכמובן נוצר כאן הפסד כלכלי.

כאשר:

השינוי בעניין הנובע מההשקעה בהון החזר	$\Delta NPV$
סכום ההשקעה הנדרשת בהון החזר, תזרים שלילי מיידי	$W$
מחיר ההון של החברה (הריבית להיון)	$k$
פרק הזמן (בדרך כלל בשנים) שבסיוםו קיבלchorah את ההון (החזר)	$t$

548,000

ענין שוחשב בהתעלם מההון החזר

(64,019)

השפעה השלילית של הכללת ההון החזר בחישוב

483,981

הענין הנכון / המתוקן

**שאלה 70.93 – חישוב שווי השקעה על בסיס תזרימי מזומנים שנותרו, לנקודת תמחור מסויימת**  
 חברת שוקלת לבצע פרויקט שדורש השקעה בצד בעלות של 200,000 ש"ח. אורך החיים של הצד 4 שנים, ולצרבי מס הוא מופחת על פני שנתיים.

הכנסות השנתיות הצפויות הן: 300,000 ש"ח בשנה הראשונה, 330,000 ש"ח בשנה השנייה, ובכל שנה עוקבת – הכנסות יגדלו ב-15% ביחס לשנה קודמת. הלוויות השנתיות (לא כולל חת) הן קבועות בסך 80,000 ש"ח לשנה בגין הפרויקט. מחיר החון לאחר מס הוא 5% לשנה ושיעור המס החל על כל סוגי העסקאות בחברה הוא 20%.

נדרש:

- חשבו את ה-NPV.
- הניחו כתה כי בתחלת השנה ה-3 של המיזם הציעו לחברת רכוש אותו ממנה. מהו המחיר שהיא תדרוש בנקודת זמן זו?

### פתרונות סעיף א – חישוב NPV

הערכמים באלפי ש"ח:

$$\begin{aligned}
 NPV = -200 + \frac{200}{2} * 20\% * PVFA(5\%, 2) + 300 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-1} + 330 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-2} \\
 + 330 * (1 + 15\%) * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-3} + 330 * (1 + 15\%)^2 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-4} \\
 - 80 * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 4) = 627.77
 \end{aligned}$$

막רא צבעים:

**אדום: השקעה; ירוק: מגן המס על החת; כחול: תזרימי הכנסה לאחר מס; שחור: עלויות לאחר מס.**

### פתרונות סעיף ב – שווייה המיזם בתחלת שנה 3

תחלת שנה 3: רגע לאחר תזרים המזומנים של השנה השנייה.

במבט קדימה – כי כל פרויקט מתומך בכל נקודת זמן לפי התזרמים שנותרו ממנו – אנו זכאים לקבל את התזרמים של השנים 3-4. למעשה, המחיר המינימלי שנדרש בגין המיזם בתחלת שנה 3 הוא הערך הנוכחי של התזרמים של סוף 3 וסוף 4 לנקודה זו.

$$\begin{aligned}
 NPV = 330 * (1 + 15\%) * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-1} + 330 * (1 + 15\%)^2 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-2} \\
 - 80 * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 2) = 486.821
 \end{aligned}$$

כאשר, בכחול מסומנים כתה רק התזרמים של זמן 3 (הראשון) וזמן 4 (השני) מתואימים לזמן 2 (תחלת זמן 3, ערב המכירה) ובשחור, מסומנים כתה רק תזרימי העליות שנותרו בשנתיים הבאות.

**שאלה 70.94 – סוגיה: חילוץ הכנסה שנתיות ברוטו שמצדיקה את הפרויקט בעולם עם מסים**  
 מציעים לחברת "שי פ" בע"מ לרכוש מחשב Mac Pro בעלות 50,000 ש"ח שאורך חייו 10 שנים אך הוא מופחת לצרכי מס על פני 5 שנים. הוצאות התפעול השנתיות בגין המחשב הן 3,000 ש"ח. שיעור המס החל על החברה הוא 20% ומהירות ההון לאחר מס הוא 10%.  
 מה צריכה להיות ההכנסה השנתית שתצדיק את הרכישה?

**פתרון :**

נקודות מינימום הכספיות, באופן כללי אצלנו, היא נקודת "ענין 0". לכן, נבנה על בסיס התזרימיים המזוהים את משווהות העניין, נציב בה את סכום ההכנסה המתבקש כנעלם, ונשווה אותה ל-0.

$$NPV = -50 + \frac{50}{5} * 20\% * PVFA(10\%, 5) - 3 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 10) + X * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 10) = 0$$

$$X = 11.629$$

**כאשר :**

**באדום :** **עלות ההשקעה, בירוק – מגן המס על הפחתה, בשחור – עלויות שוטפות, ובכחול – הכנסות שוטפות.**  
 יש לשים לב שלמרות שההפחטה היא על פני 5 שנים, מבחיננו אלא אם נאמר אחרת, הפרויקט מתmeshק בהתאם לארוך החיים השימושיים של הנכס.

מסקנה : על מנת להצדיק את הפרויקט, נדרש כי ההכנסה השנתית המומוצעת (ברוטו, לפני מס) תהיה 11,629 ש"ח.

**שאלה 70.95 – חילוץ מחיר מינימלי ליחידת מוצר עם שינויי בהיקפי המכירות להצדקת פרויקט**

באפשרותך ללמוד 1,000 קורסים בשנה הקרויה (הניחו שמקבלים את התקובל בתום כל שנה), 2,000 בשנה לאחר מכן, 1-000 3,000 קורסים בכל אחת מהשנתיים, 3, 4 ו-5. לשם כך תצטרכי לרכוש מכונת נקניק לסטודנטים בהשקעה של 2,000,000 ש"ח. הוצאות המשנה לקורס היא 500 ש"ח. אורך חיי מכונת הנקניק 5 שנים והוא מופחתת לפי שיטת הקו ה ישיר. בתום הפרויקט ניתן מכור את מכונת הנקניק בתמורה ל-200,000 ש"ח. מחיר ההון לאחר מס הוא 10% לשנה, שיעור מס החברות הוא 40% ושיעור מס רווחי ההון הוא 20%. נדרש: מהו המחיר המינימלי לקורס (בנחתה שהקורסים אחידים) אשר יצדיק את הפרויקט?

פתרון :

הערכמים באלפי ש"ח :

$$\begin{aligned}
 NPV = & -2,000 + \frac{2,000}{5} * 40\% * PVFA(10\%, 5) + 200 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-5} \\
 & -1,000 * 0.5 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-1} - 2,000 * 0.5 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-2} - 3,000 * 0.5 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & +1,000 * X * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 2,000 * X * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-2} + 3,000 * X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

את כל הביטוי הזה יש להשוות ל-0, ולהלץ את ה-X המביטה את המחיר לקורס בודד.

**באדום : עלות ההשקעה, בירוק – מגני המס על הփחתה (תקופת הփחתה זהה לאורך החיים אם אין נזון סותר), בטורקיז – תמורות המכירה בתום הפרויקט של הפריט נשוא ההשקעה (מכונת הנקניק) אחרי מס. מה רואים שם? שמקבלים 200, אבל הוואיל והפריט הופחת לגמר (כל 5 שנים הփחתתו תמו) ואין לו ערך שייר / גרט לצורך מס, הוא אמור להיות שווה 0. لكن, כל ה-200 שצופים לקבל בעדו הם לא רק תזירים – אלא גם רווח / הכנסה החיבת במס, וכן הדריך המהירה להגעה לנטו במקרה כזו היא על ידי מכפלה ב-1 פחות המס. בשחור – עלויות משתנות בכל שנה, בהתאם למספר הקורסים (0.5 המ 500 ש"ח באלפיים).**

**בכחול – הכנסות מהקורסים. המחיר לקורס הוא X.**

משיקולי זמן, לא פתרתי עם חילוץ ה-X, ניסיתי להיעזר בצ'אט GPT לפתרון זויר, לטענתו (לא בדكتוי) התוצאה 1,059.6 ש"ח לקורס. אתם מוזמנים לבדוק. בכל מקרה, הדגש הוא כמובן הדריך.

### **מינוי רצוי – סוגיות השוואת אופק**

כאשר אנו רוצחים לבחור בין פרויקטים, אשר אורך חייהם שונה, ואשר ניתן לחזור עליהם – לא ניתן לבצע השוואה בין ערכי הענין של כל אחד מהפרויקטים בנפרד, באופק פשוטי. מדוע? משום שאם למשל יש פרויקט שנמשך 8 שנים והענין שלו פחות גבוה מענין פרויקט שנמשך 3 שנים, לא יוכל לדעת האם ביצוע חזרה של הפרויקט המתחרה יוביל לענין מצרכי גבוה יותר, בהתחשב בפרק הזמן הכלל להשקעה. לשם השוואת אופק וחישוב ענין לאופק מסו��ף, יש כמה גישות ביחידות הלימוד:

גישה 1 – השוואת אופק לאופק זהה.

גישה 2 – השוואת אופק לאינסוף.

גישה 3 – גישת שווה הערך השנתי, שהיא הגישה היחידה שאותה נציג, שכן אפשר לישם באמצעותה גם את גישות 1-2.

**בקצרה: אם צריך לבחור בין פרויקטים בעלי אורך חיים שונה, אז בהינתן אפשרות לחזרה על הפרויקטים, علينا להשתמש בגישה מתאימה של "השוואת אופק" ורק לאחר מכן להכריע.**

### **שאלה 70.96 – השוואת אופק**

במפעל נקי מלחמים נקי ללקחות ברחבי הארץ. בעלות החברה מוכנות חיים נקיין ישנה שערכה בספרים אפס. המפעל שוקל את החלפת המוכנה הישנה במוכנה חדשה, ולפניהם 2 אפשרויות:

- אפשרות 1: לרכוש מוכנות נקי של זק"ש בעלות של 100,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המוכנה היא 7,000 ש"ח שיישולמו בתום כל שנה, ואורך חייה 8 שנים.
- אפשרות 2: לרכוש מוכנות נקי של סלמור בעלות של 70,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המוכנה היא 14,000 ש"ח ואורך חייה 10 שנים.

ידוע שההוצאות השנתיות הצפויות מחימום נקיין הן חיוביות וגובהות מכך. כמו כן, ידוע כי ניתן לרכוש מוכנות דומות באותם תנאים גם בעתיד.

ידוע ששיעור מס החברות הננו 40%, שמחיר הhook לאחר מס הוא 10%, שיטת הפקת היא קו ישר על פני 4 שנים בלבד, וכן יש להניח שבעוד 40 שנים החברה תחולש ותפרק מרצון.

נדרש:

- א. מהו ענין העליות של כל חלופה לתקופת הפרויקט? איזו חלופה תועדף, לאור חישוב זה?
- ב. לטובת נדרש זה, הタルמו מההנחה שההכנסה השנתית גבוהה וחיובית. מה צריכה להיות ההכנסה השנתית המינימלית ב-10 השנים הקרובות, אם ידוע שכלל אחת מ-30 השנים לאחר מכן, ההכנסה תהיה גבוהה פי 3, אם המטרה היא להוביל לכדיות הפרויקט?

### **פתרונות סעיף א – ענין ל-40 שנה לכל אחת מהחלופות:**

נתחיל מהמקום הכי בייסיק – חישוב NPV לכל חלופה בנפרד, למחזור הפעלה אחד. כמובן שלא קיבל במצב כזו את התוצאות המלאות, אך בחלוקת זו נקודת פטיחה טוביה. שימו לב, אמן ההכנסות לא נתונות, אך נאמר שהן חיוביות וגובהות מכך. המשמעות היא שהענין הסופי גם אם לא ידוע, הוא בהכרח חיובי, וכל המטרה היא למזער את ענין העליות.

ענין עליות למחוזר הפעלה אחד, של אפשרות 1 :

$$NPV_1 = -100,000 + \frac{100,000}{4} * 40\% * PVFA(10\%, 4) - 7,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 8) = -90,708$$

ענין עליות למחוזר הפעלה אחד של אפשרות 2 :

$$NPV_2 = -70,000 + \frac{70,000}{4} * 40\% * PVFA(10\%, 4) - 14,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 10) = -99,425$$

לכארה, בчисיבה לא מתוחכמת, אפשרות 1 זולה יותר ולכארה תועדף. בפועל, כמובן שלא. משום שאפשרות 1 אולי אכן זולה יותר, אבל גם משרתת אותו פחות שנים. לכן, ככל שניתן לחוזר על הפרויקטים – עליינו לחשב עלות שנתיות ממוצעת לכל פרויקט, כאשר הפרויקט שעולתו הממוצעת זולה יותר – יועדף באופן כלכלי.

חישוב / מיצוע עלות פרויקט NPV כולל למועדים שנתיים מביצים בגישה שנקראת "שוויון ערך שנתי" – EAC – Equivalent Annual Cost – מחשבים את הפרופורציה שבין ה-NPV לבין PVFA – שמתאים לתקופת ההשקעה.

$$EAC = \frac{NPV}{PVFA(k, t)}$$

$$EAC_1 = \frac{-90,708}{PVFA(10\%, 8)} = -17,003$$

$$EAC_2 = \frac{-99,425}{PVFA(10\%, 10)} = -16,180$$

לכן, כבר עכשו נוכל לומר בהיבט הכספיות :

העלות השנתית בחלוקת 2 זולה יותר, ולכארה, למרות –  
שענין בסיסי שלה לתקופת ביצוע אחת גובה יותר –  
היא תועדף



כדי להפוך את העלות השנתית הקבועה שחילצנו לענין ל-40 שנה בכל חלופה, כל מה שצרכיך לעשות זה להוון סדרת תזרימיים כאלו בהתאם לפרק הזמן הרלוונטי :

$$NPV_1(40\text{ years}) = EAC_1 * PVFA(10\%, 40) = -17,003 * 9.779 = -166,272$$

$$NPV_2(40\text{ years}) = EAC_2 * PVFA(10\%, 40) = -16,180 * 9.779 = -158,224$$

### פתרונות סעיף ב – חילוץ סכום הכנסה שמצדיק את הפרויקט

ראשית, הכנסה המינימלית להצדקת הפרויקט כМОון תדרש אם נבחר בביוץ חלופה 2. לפיכך, נדרש כי סך הכנסות נטו מהפרויקט, אחרי מס, תהיה לפחות 158,224 ש"ח (ערך חיובי שMOVIL לאייפוס הענ"נה שלילי שנוצר כתוצאה מהעלויות בחלופה 2 – ראו לעיל). על פי נתוני השאלה, צפויות הכנסות להמשך 40 שנה: 10 שנים ראשונות הכנסות קבועות, וב-30 השנים לאחר מכן, הכנסות גבוהות פי 3.

$$158,224 = X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 10) + 3X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 30) * (1 + 10\%)^{-10}$$

ומפה רק יותר לחלק את ה-X. תוצאה החילוץ האוטומטי (לא בדكتוי) היא 15,460 אבל העיקר הדרך ☺.

### שאלה 70.97 – השפעות פחת מואץ על כדאיות פרויקטים ענ"נ

בחברת ההייטק של יוסף פודורובסקי קיימת מכונה לחימום נקניק לעובדי ועובדות המשרד. הפחת השנתי בגין המכונה הוא 5,000 ש"ח. חברת ההייטק של יוסף רוחה מאד, מניבה תזרימי מזומנים חיוביים על בסיס שנתי, והוא כפופה לשיעור מס של 20%.

מחיר ההון של החברה הוא 10% לשנה.

ערך המכונה בספרים היום הוא 50,000 ש"ח.

נדרש: כמה כדאי לヨסף לשלם בתור נציג החברה, לכל היותר, בעבור ייעוץ מס שבעזרתו תכיר רשות המסים בפחית כפול כל שנה?

פתרונות :

פחית כפול = מדווחים לרשות המסים על סכומים גבוהים יותר של פחת, אך במשך פחות שנים. מה היתרונו? ובכן, לא מקבלים יותר החזרי מס בסך הכל, אך מקבלים אותם מוקדם יותר. ולזמן יש ערך במימון.

כדי לחשב את הערך התוספתי הנובע מפחית כפו, נבעוד "כפול": נחשב את ההשפעה של מגני המיס הקיימים על הענ"ג, ולאחר מכן נחשב את ההשפעה הנובעת מפחית הכספי על הענ"ג. כל חישוב – בנפרד.

ההפרש בין הערכיהם הנתרמים כתוצאה מכך (בהתנחת פחת כפול ובהתנחת פחת רגיל בהתאם) יהיה ההפרש אשר על בסיסו נקבע את התשלום המירבי ליעץ.

טריק: תקופת ההפחיתה כאן (לפניהם שינוי הפחית המואץ) איננה נטונה, אך אם ידוע ערך הספרים של הפריט וכן ידועות הוצאות הפחית השנתיות בגיןו, אזי הפרופורציה (היחס בין השנתיים) זהה תקופת ההפחיתה הנורטת. כאן – פריט של 50,000 החוצה פחת של 5,000 בשנה, נותרו לו עוד 10 שנים הפחיתה, ולפיכך:

$$\Delta NPV_{RegularPhat} = 5,000 * 20\% * PVFA(10,10\%) = 6,145$$

$$\Delta NPV_{PhatMuaz} = 10,000 * 20\% * PVFA(5,10\%) = 7,582$$

וההטבה הנגזרת מהפחתת המזוזן תהיה ההפרש : **1,437** = **7,582** – **6,145** **אבל זו לא** התשובה הסופית!

כשאנו משלמים ליווץ סכום بعد ייועץ המס שמאפשר הטבה זו, העלות של היועץ היא הוצאה המוכרת לצורך מס. לכן, קיבל בוגינה החזר מס. זה אומר שנסכים לשלם ליווץ בברוטו יותר מ-1,437 ש"ח אם ההטבה שהוא מעניק נטו היא 1,437 ש"ח.

$$X * (1 - 20\%) = 1,437 \rightarrow X = \textcolor{red}{1,796}$$

**נסכים לשלם ליווץ לכל היותר 1,796 ש"ח بعد הייעוץ. זו התשובה הסופית.**

از מה למדנו מ שאלה זו :

1. שאם תקופת ההפחיתה לא ידועה, אך ידוע ערך הספרים והוצאות הפחת – ניתן לחלץ את תקופת ההפחיתה לפי היחס בין הערכיים.
2. שאם הוצאה מסוימת מובילה לגידול בענין בערך מסוים, בהנחה שההוצאה מוכרת לצורך מס (ברירת מחדל) נסכים לשלם בעדיה יותר מאשר העליה בענין.

#### שאלה 70.98 – פחת בסכומים משתנים

טל שוקلت להשקיע במכונה לחימום נקניק לעובדי המשרד :



אם ידוע שעלות המכונה לעיל היא 40,000 ש"ח, וsettוצאה ממנה החברה תוכל להניב תזרימי מזומנים שנתיים (הכנסות בניכוי הוצאות לא כולל פחת ומסים) בסך 20,000 ש"ח, וכן ידוע שהשיעור המס החל על החברה הוא 20%, ומהירות ההון של החברה לאחר מס 10%, מה יהיה הענין של רכישת המכונה והשימוש בה 4 שנים אם ידוע ששיעור הפחת השנתי הוא כדלקמן :

שיעור פחת שנתי	שנה
10%	1
20%	2
30%	3
40%	4

**פתרונות שאלה 70.98**

$$\begin{aligned}
 NPV = & -40,000 + 40,000 * 10\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-1} + 40,000 * 20\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + 40,000 * 30\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-3} + 40,000 * 40\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-4} \\
 & + 20,000 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 4) = \boxed{16,758}
 \end{aligned}$$

ה”לכורה טרייק” היחיד בשאלת זו טמון בכך שבמוקום לחשב את הוצאות הפחota על ידי היחס בין עלות ההשקעה לבין תקופת ההפחota – בכל שנה חישבנו הוצאות פחות מחדש על ידי מכפלה עלות המכונה בשיעור הפחota. מכפלה זו היא ההוצאה שכפלנו בשיעור המס, וכך קיבלנו את מגן המס השנתי על הפחota בכל שנה וธนา. הפחota השנתי, כמו תמיד, הוכפל בשיעור המס, והויל והוא משתנה – לא הווים כסירה, אלא כסכומים בודדים.

 **שאלה 70.99 – שיעור פחות משתנה ומכירת הפריט לפני סיום תקופת הפחota**

בנתוני השאלה הקודמת, שנ汇报 עליהם לשם נוחות:

אם ידוע שעלות המכונה לעיל היא 40,000 ש"ח, ושותוצאה ממנה החברה תוכל להניב תזרימי מזומנים שנתיים (הכנסות בגין הוצאות לא כולל פחות ומסים) בסך 20,000 ש"ח, וכן ידוע ששיעור המס החל על החברה הוא 20%, ומהירות ההון של החברה לאחר מס 10%, מהו העניין של רכישת המכונה והשימוש בה שנתיים, אם ידוע שבתום השנתיים ניתן יהיה למכור את המכונה בתמורה ל-38,000 ש"ח?

שנה	שיעור פחות שנתי
1	10%
2	20%
3	30%
4	40%

**פתרונות שאלה 70.99**

$$\begin{aligned}
 NPV = & -40,000 + 40,000 * 10\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-1} + 40,000 * 20\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + \{38,000 - 20\% * [38,000 - (40,000 - 40,000 * 10\% - 40,000 * 20\%)]\} * (1 + 10\%)^{-3} \\
 & + 20,000 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 2) = \boxed{19,578}
 \end{aligned}$$

בעמוד הבא – הדיוון בשורה ה-2, שהוא הדיוון העיקרי המתגדר בשאלת זו.

רוחוון / הפסד הון: ההפרש שבין תמורה המכירה לעלות המופחתת עבר המכירה

$$+ \{38,000 - 20\% * [38,000 - (40,000 - 40,000 * 10\% - 40,000 * 20\%)]\} * (1 + 10\%)^{-2}$$

תמורה המכירה ברוטו

תמורה המכירה

עלות היסטורית

הבסיס לעלות

מופחתת

הפחית ש恢צטבר

מהורכיה עד המכירה

שיעור מס רוחוון  
וביעדרו: שיעור המס הכללי  
מס חבורת

שיעור מס רוחוון  
המחיר המקורי ביחס למשך שנים

## מיini רציו – מדיניות החלפה אופטימלית

נניח שהקדי קנתה מכונית. היא מעוניינת לתכנן מראש – מתי hei משתלים להחליף אותה? יש כאן דילמה בرمאה העקרונית. מדו"ע? בשל הכוחות המנוגדים הפעילים כאשר מתקדמיים בעיתוי ההפלה.

### מצד אחד – כשלופות השנים – שווי המכוניות יורץ ;

מצד שני – עלויות התחזקה – עלות עלות;

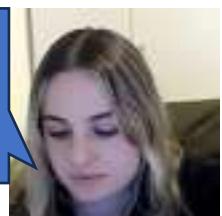
מצד שלישי – אם מחזיקים את המכוונית הרבה זמן – לא צריך ל凱נות חדשה בעלות גבואה. אז בשורה התחתונה – איך יודעים متى להחליף?

הkowski CAN TEMON BUOBDA SHBUCZM, YSH CAN LA MAUT PROYIKTUM; CL APYSHROT HCHLPA (BUOD SHNA, BUOD SHNTIIM, BUOD (3) HIA PROYIKT NFRD. LA RK ZH - APYSH GEM MLCTCHILAH LKNOT MCNONIT MSHOMSHT, ZH YOZC / POUTCH SONGI PROYIKTUM NOSFIM.

הכוון הכללי לפתרון שນחה ב שאלה להלן,ittihs לכל אפשרויות הרכישה והמכירה כפרויקטים נפרדים, ויחסב עלות שנתית ממוצעת (שווה ערך שנתי) לכל אחת מהן. העלות השנתית הנמוכה יותר – תנאצ'ה.

### שאלה 70.100 – מדיניות החלפה אופטימלית

## הרשות מינהלית, אבל הלב אומר חיים נקניך



בחברה של טל מחזיקים במכונות חיים נקין 3 שנים לכל היתר. בחלוּף תקופה זו, שרידי הכרבולות והפופיקים הנתקעים במכונה גורמים לתחלוּאה רבתית בקרב העובדים. להלן הנתונים בדבר מכונות חיים נקין חדשה, שעולתה בתקציב 100,000 ש"ח:

סוף שנה	עלויות תחזוקה בסוף השנה	שווי השוק של המכונה בסוף השנה
1	20,000	75,000
2	30,000	60,000
3	40,000	40,000

הנicho כי החברה פטורה ממשים על ההכנסה. מהי מדיניות החלפה האופטימלית (הווי אומר – האם לרכוש מכונת חיים נקי חדש? בת שנה? בת שנתיים? וכמה זמן להחזיק בה?) הנicho לשם חישוב כי מחיר ההון של החברה הוא 10% לשנה.

פתרון :

ראשית, עלינו לייצר את כל הקומבינציות האפשרות ללא יוצא מן הכלל :

מספר קומבינציה	תיאור
1	לכונת מכונה חדשה ולהחזיק בה 3 שנים
2	לכונת מכונה חדשה ולהחזיק בה שנתיים
3	לכונת מכונה חדשה ולהחזיק בה שנה
4	רכישת מכונה בת שנה והחזקתה שנתיים
5	רכישת מכונה בת שנה והחזקתה שנה
6	רכישת מכונה בת שנתיים והחזקתה שנה

בtower התחלה נחישב את ה- $NPV$  לכל אפשרות :

$$NPV_1 = -100 + 40 * (1 + 10\%)^{-3} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-2} - 40 * (1 + 10\%)^{-3} = -142.975$$

$$NPV_2 = -100 + 60 * (1 + 10\%)^{-2} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-2} = -93.388$$

$$NPV_3 = -100 + 75 * (1 + 10\%)^{-1} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} = -50$$

$$NPV_4 = -75 + 40 * (1 + 10\%)^{-2} - 30 * (1 + 10\%)^{-1} - 40 * (1 + 10\%)^{-2} = -102.272$$

$$NPV_5 = -75 + 60 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-1} = -47.727$$

$$NPV_6 = -60 + 40 * (1 + 10\%)^{-1} - 40 * (1 + 10\%)^{-1} = -60$$

הויאל והאפשרויות הן בעלות אורך חיים שונה, ומדובר במדיניות החלפה שנייתן לחזור עליה, הרי שקיבלה החלטה לכונת שמתהשכת באורך החיים השונה של הפרויקטים, תדרוך שימוש בכלים של "השוואת אופק".  
במסגרת זאת, עלינו לבצע את הטיפול על בסיס גישת EAC אשר תחלק את הענין למחזור הפעלה של כל פרויקט ב- $PVFA$  הרלוונטי למשך הפרויקט.

$$EAC_1 = \frac{-142.975}{PVFA(10\%, 3)} = -57.489$$

$$EAC_2 = \frac{-93.388}{PVFA(10\%, 2)} = -53.795$$

$$EAC_3 = \frac{-50}{PVFA(10\%, 1)} = -55$$

$$EAC_4 = \frac{-102.272}{PVFA(10\%, 2)} = -58.912$$

$$EAC_5 = \frac{-47.727}{PVFA(10\%, 1)} = -52.5$$

$$EAC_{60} = \frac{-60}{PVFA(10\%, 1)} = -66$$

אפשר להבחן בכך שההוצאות השנתיות הנמוכה ביותר מתקבלת בחלוקת 5: חלופה במסגרת נרכוש מכונת נקייה משומשת בת שנה, ונחזיק בה שנה אחת בלבד.



סיכום ביניים – שלבי עבודה בגיבוש מדיניות החלפה אופטימלית :

1. נגידר את כל הנסיבות האפשריות בכספי לאילוצים. למשל, אם לא מחזיקים בפריט מעל כך וכך שנים, או אם החברה רוכשת רק פריטים חדשים וכיו"ב.
2. נחשב את NPV לכל חלופה, למחזר הפעלה אחד ויחיד של אותה החלופה.
3. נבעץ השוואת אופק כדי למצוא את הבחירה הטובה ביותר. אני אוהב (ורק את זה הריאתי) את גישת שווה הערך השנתי (EAC). לשם יישומה, חשוב להתייחס במכנה למשך החזקת הפריט בחלוקת.
4. נבחר בפרויקט / בחלוקת שבה ה-EAC הוא המשתלם ביותר (הזול ביותר במקרה של עלויות, או הגובה ביותר במקרה של הכנסות).
5. אם במקרה בשאלת זו שואלים "מהו הענין האינטימי בחלוקת האופטימלית" כל מה שצריך לעשות זה להתבסס על ה-EAC שהוא עלות שנתית אופטימלית, ולהלכו במחיר ההון (מודיע – כי זו הדרך לחשב ערך נוכחי לסדרה אינטימית).

#### סוגיות נוספות מרכזיות ביה' 7:

עסקאות החלפה "רגילותות" חד פעמיות – מכונה חדשה שמחילפה מכונה ישנה (י"ב, י"ג) שאלות על השוואת אופק – כאשר חלק מהחלוקת אינטימיות (82.3) החלטות ייצור או רכישה. סוגיות נוספות בהתאם לאופל / בחינות.

**את מפגש 6 עצרנו כאן.**

## מפגש 7 – קיצוב הון ויישומים נוספים י' 7 – 23/12/2024

### ריענון וחיבור לאחר:

יח' 7 עוסקת בקיצוב הון – במסגרת עליינו לחשב את תזרימי המזומנים הצפויים מתוכניות השקעה, בשים לב במסים, עלויות רלוונטיות בלבד ובהתייחס להשפעות הזמן וההיוון במסגרת ערך נוכחי. הצגנו את העבודה שאפשר לייצר מעין טבלה שתכלול את תזרימי המזומנים, אבל ברוב התרגילים – חישוב הכספיות שבדרך כלל מבוסס ענ"ג ביחידה זו – עיקר הדיוון מבוצע על בסיס נסחאות היינו ארכות, שככל איבר בהן מייצג התיאחות לרכיב תזרימי מסוימים בפרויקט. מעבר לייצוג ענ"ג של תזרימים מורכבים כלו, הצגנו גם את העיקרונות של השוואת אופק – מצב שבו קיימים פרויקטים בעלי אורך חיים שונה, והציגו כל שנקרא שווה הערך השנתי EAC לחישוב עלות שנתית ממוצעת בפרויקט, מה שמשרת אותנו גם לדיורוג פרויקטים במצבים שבהם יש חזרה עליהם, וגם לצורך חישוב ענ"ג לתקופה ממושכת שכוללת חזרה כאמור.

והיום – המשך הדיוון עם סוגיות נוספות במקרים שונים.

**שאלה 70.10 – עסקת החלפה (לא עיתוי החלפה / מדיניות החלפה, בלי מסים)**  
בחברה של רביב מחזיקים במכונות חיים נקייק ענקיות. ידוע כי מכונות הנקייק הקיימות יכולות המשיך ולפעול עוד 5 שנים ולהניב תקובל שנתי בסוף כל שנה בסך 20,000 ש"ח. לחילופין, ניתן להחליף את המכונות ענק לחימום נקייק שכוללות פיצ'ר מיוחד שמוסיף פופיקים ממוחזרים לנקייק, ובכך מגדילות את ההכנסות. עלות המכונות המחליפות (החדשנות) 30,000 ש"ח, והתקבולים הצפויים יהיו בסך 40,000 ש"ח (בסיס הכל), בתום כל שנה במשך 4 שנים, וערך השירור שלחן 0. בהנחה שניתן למכור את הציוד הישן היום תמורה 5,000 ש"ח, מהו ענ"ג ההחלפה בהנחה שמחיר ההון 10% לשנה.

פתרון :

שאלות בנושאי יחידה 7 צריך להפריד בין תחומיים: במיוחד חשוב לדעת האם יש בשאלה מידע הקשור לעיתוי החלפה (מתי בדיקוק מחליפים פריט) או לגבי מדיניות החלפה (במצב שבו מגבשים מדיניות לפריט מסוים שנחזר עליה שוב ושוב) או לא. במלים אחרות – אם אני מזיהה דיוון המתבצע בהחלטת החלפה מיידית (לא כזו שבה אנחנו צריכים לקבוע את מועד החלפה, ולא כזו שתמיד פועלות שנחזר עליה שוב ושוב), הרי שהדיוון שלנו הוא בסיסי, כזה שמתבסס על NPV לכל תזרימי החלפה, פעם אחת, ללא השוואת אופק, ללא שווה ערך שנתי.

הדרך שאני אוהב לנוקוט בה היא – להציג תחילת את כל הביטויים / האיברים הקשורים לפריט המחליף – עלות ההשקעה בו, התזרימים הנובעים ממנו, תמורה מכירתו וכיו"ב.

לאחר מכן, אציג את ההשפעות התזרימיות המהוונות של "גריטת" / "מכירת" הפריט המוחלף. הסיבה לכך שאני רוצה להתחיל דזוקא מהפריט המחליף (החדש) נובעת מפשטות ההתייחסות אליו.

$$NPV_{\text{החלפה}} = -30,000 + 40,000 * PVFA(10\%, 4) + 5,000 - 20,000 * PVFA(10\%, 5) = 25.982 > 0$$

הויאל והענין חיובי, עסקת החלפה כדאית.

הסבירים נוספים :

עלות השקעה במכונה החדשה / המחליפה.	-30,000
תזרים מזומנים ברוטו שנתי (אין כאן מסים ופחית) הנובע מהפעלת המכונה החדשה 4 שנים	40,000
מכירת המכונה הישנה היום בעקבות החלפה – כאן אין מסים, ולכן זו התמורה נטו היום	5,000
אובדן תזרים מזומנים מהנקני שיכולה הינה לחם המכונה הישנה, 5 שנים נוספות	-20,000

#### תרגיל 70.102 – עסקת החלפה (לא מדיניות החלפה / לא עיתוי החלפה) – עם מסים

חברת מיטלים וברעמים מחמתה היום נקנאים באמצעות מכונה ישנה שנרכשה לפני 6 שנים בעלות של 100,000 ש"ח.

תקופת ההפחיתה של המכונה הישנה 8 שנים, ואורך חייה השימושים (תפעולית) ממועד רכישתה 10 שנים. למכונה אין ערך גרט / שיר לצורכי מס, אך החברה צופה כי תוכל למכור אותה בתום חייה השימושים בתמורה ל-20,000 ש"ח.

הכנסה השנתית מהמכונה הישנה היא 40,000 ש"ח.

החברה שוקלת להחליף מכונה ישנה זו במכונה חדשה. עלות המכונה החדשה 150,000 ש"ח ותקופת הפחתתה 4 שנים. הערך הצפוי לה בתום חייה השימושים הוא 20,000 ש"ח.

הכנסות מהמכונה החדשה תהיינה בסך 180,000 ש"ח לשנה, והוא מופחתת ללא ערך גרט / שיר לצרכיו מס. בהנחה שהחברה כפופה למס חברות בשיעור 30%, למס רוחבי הון בשיעור 20% ומהיר ההון לאחר מס 10%, וכי ניתן למכור את המכונה הישנה היום תמורת 30,000 ש"ח, מהו עניין החלפה?

פתרון :

שאלה זו דומה במהותה לקודמת; אלא שນctrיך לכלול רכיבים תזרימיים נוספים הנובעים מהשפעות המס.

בדומה לקרה הקודם, נתעלם בשלב ראשון מהרכיבים התזרימיים הקשורים למכונה המוחלפת (לרבות מכירתה, אובדן תזרימיה, מגני המס בוגינה) ונתיחס למכונה החדשה (המחליפה) בלבד. רק לאחר שנסיים עמה, נעבור להשפעות התזרימיות של גירתה / מכירת הפריט המוחלף על כל המשתמע.

נציין את הערכים באלפי ש"ח לשם קיצור הכתיבה, וכן לאור ריבוי הרכיבים התזוריים, נתאר ביתר פירוט כל אחד מהם בנפרד.

נתיחיל מטיפול במכונה החדשה, רכיב רכיב:

תחילה – עלות הרכישה הראשונית בזמן אפס :

–150

בנוסף, יש להתייחס למגנify המס על ההפחיתה של המכונה החדשה. היא מופחתת על פני 4 שנים, ושיעור המס : 30%

$$+ \frac{150}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4)$$

תמורה המכירה העתידית של המכונה החדשה צפואה להיות 20 אלף ש"ח. היא צפואה להמכר רק לאחר סיום תקופת הפחתתה, בתום 4 שנים, מה שMOVEDIL לכך שהמיסוי בגינה (שיעור מס רווח הון, 20%) הוא על כל תמורה המכירה :

$$+ 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4}$$

הכנסות שנתיות מהמכונה החדשה אחורי מס :

$$+ 180 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

מעבר לרכיבים התזוריים הנובעים ממכונה הישנה / שנגרטת / מוחלפת / נמכרת :

תחילה, המכונה הישנה נמכרת היום, וקיימת השפעת מס על מכירתה. התמורה ברוטו היא 30 (היום, במועד החלפה) והואיל והמכונה הישנה נמכרת טרם הסתיימה תקופת הפחתתה, עלינו לחשב בצורה מורכבת יותר את ההשפעות של מס רווח / הפסד הון. עשינו זאת על ידי מכפלת שיעור מס רווח הון 20% בהפרש שבין תמורה המכירה 30 לבין העלות המופחתת ערב המכירה. העלות המופחתת היא לפי העלות ההיסטורית 100 בኒוקי פחות על בסיס 6 שנים שחלפו ממועד 8 :

$$+ 30 - 20\% * \left[ 30 - \left( 100 - \frac{100}{8} * 6 \right) \right]$$

מעבר לכך, עצם מכירת המכונה הישנה היום מובילת לאובדן מגנify המס שנוטרו על הפחתתה. כנתון בשאלה, המכונה מופחתת על פני 8 שנים בסך הכל מרכישתה, ועיטוי החלפה הוא במלחף 6 שנים. המשמעות היא שאנו מונעים מעצמנו את היכולת להכיר בשנתיים של פחות וכך לאובדן מגנify מס על הפחתה במשך שנתיים כאלו :

$$- \frac{100}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 2)$$

העובדת שמכררים את המכונה הישנה היום (ולכך התיחסנו לעיל) משמעה בהגדרה שאנו למעשה מבטלים את התזוריים שהוא צפוי מהמכירה בעתיד. המכירה בעתיד צפואה הייתה בתמורה ל-20, והיא הייתה אמורה להתבצע לאחר שהפריט סיים את תקופת הפחתתו. וכך, התמורה נטו מהמכירה שאותה מאבדים היא לפי 20 בኒוקי מס רווח הון מהוון 4 שנים לאחר (כי המכירה של הישנה הייתה צפואה בלעדיו החלפה בעוד 4 שנים) :

$$- 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4}$$

כמו כן, علينا להתייחס לאובדן ההכנסות השנתיות מהמכונה הישנה, בסך 40 לשנה, אחרי מס במשך כל אחת מ-4 שנים פועלות התפעולות אשר נותרו :

$$-40 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

$$NPV = -150 + \frac{150}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4) + 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4} \\ + 180 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4) + 30 - 20\% * \left[ 30 - \left( 100 - \frac{100}{8} * 6 \right) \right] \\ - \frac{100}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 2) - 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4} - 40 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

ירין חישב ויצא לו :

$$NPV = 218.8 > 0$$

ולכן עסקת החלפה כדאית.

#### תרגיל 70.103 – פרופ' עציוון – חישוב ענ"ג מותמך לחולפות שונות, עם מסים

חברת פרופ' עציוון מעוניינת למצוא פתרון לביעית חימום הנקייק של עובדי המשרד. כלל העובדים לא יוצאים מן הכלל מוגעים לחברה כשםารזי נקייקות בתיקם, וכולם צריכים לחמם את כל הנקייק בחלוון זמן צר בהפסקת הצהרים. בפני החברה עומדות שלוש אפשרויות להסדרת פעילות החימום :

מספר אפשרות	פרטים
1	לשכור מכונה ענקית לחימום נקייק, כזו שמאפשרת לחםם 5,000 נקייקות בו זמן. הסכם ההשכרה הוא לזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החודש פועמים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם מושלמים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. החולפה תדרושים עלות התקנה חד פועמיה בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החודש פועמים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקחתה על פני 10 שנים – בשיטת הקו ה ישיר. עלויות שוטפות נוספות שתיווצרנה בגין הולפה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה – הן בגין ניכוי כרבולות ומקרים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.
2	לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד. התשלום לנקייק 500 ש"ח בתשלום מראש בתחלת כל שנה. החברה זוקה ל- 5,000 מכונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בלוות קבוצה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כחוצה לצרכי מס.
3	לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחלת השנה עברו 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש בעלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהשקעה לצרכי מס, הפקת בגין מחושב במשך 10 שנים לפי קו ישר.

נדרש :

א. חשבו את העניין לכל חלופה. איזו אפשרות תעדיף החברה בהנחה שאינה משלםת מס ומהירות ההון שלה 10% לשנה?

ב. חזרו על חישוביכם בהנחה ששיעור המס 25% ומהירות ההון לאחר מס 7%. כמו כן, הניחו כי תשלומי המס הם בסוף כל שנה.

#### הבחנה כללית:

בכל המקרים הנדרנים אין דיון בהכנסה כלל. למעשה, מדובר בכך שבדרישת החברה, כאשר הבחירה הנבונה תהיה כזו המזערת את עניין ההוצאה (ערך נוכחי של עלויות – שהיא כמה שפחות משמעותית). כמו כן, הויאל וחלופה מס' 1 דנה בנסיבות של עלות שמשרתת את החברה לאינסוף, הנחה קבילה והגיונית היא שגם את יתר הchlופות נחשב בהנחה ביצוע לאינסוף.

#### טיפול בעולם ללא מסים:

מספר	פרטים
1	<p>לשכור מכונה ענקית לחימום נקי, כזו שמאפשרת לחםם 5,000 נקניקיות בו זמניות. הסכם ההשכרה הוא לזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החד פעריים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם מושלים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. הchlופה תזרוש עלות התקנה חד פעמיות בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החד פעריים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקתה על פני 10 שנים בשיטת הקו ה ישיר. עלויות שוטפות נוספות שתיווצרנה בגין הchlופה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה – הן בגין ניכוי כרבות ומקורים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.</p> <p>בעולם ללא מסים (באלפי ש"ח):</p> $NPV = -500 - 100 - \frac{20}{10\%} = -800$
2	<p>לשכור מכונות אישיות לחימום נקי לכל עובד. התשלום למכונה אישית לחימום נקי 500 ש"ח בתשלום מראש בתחלת כל שנה. החברה זוקפה ל-5,000 מכונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בעלות קבועה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כהוצאה לצרכי מס.</p> <p>בעולם ללא מסים (באלפי ש"ח – لكن 500 ש"ח סומנו כ-0.5 אלפי ש"ח):</p> $NPV = -0.5 * \frac{1}{10\%} * (1 + 10\%) * 5,000 = -27,500$
3	<p>לשכור מכונות אישיות לחימום נקי לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחלת השנה עבור 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש עלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהשקעה לצרכי מס, הפקת בגין מחושב במשך 10 שנים לפי קו ישיר.</p> <p>בעולם ללא מסים:</p> <p>הויאל ומדובר בפרויקט לתקופה קצרה נרצה לחשב תחילתה את הוצאות השנתית הממוצעת, אז לתרגם אותה לאינסוף על ידי חלוקה במחיר ההון. בעצם, משתמשים כאן בגישה EAC שווה הערך השנתי.</p>

$$EAC = \frac{-400}{PVFA(10\%, 10)} = -65.094$$

זהי העלות השנתית הממוצעת, נהוון אותה לאינסוף ונקבל :

$$NPV = \frac{-65.094}{10\%} = -650.94$$

מסקנה : בעולם ללא מסים, הבחירה שתועדף היא חלופה 3, שכן למרות שהענין שלה שלילי – הוא הכי פחות שלילי מכולם ; ولكن אם החברה דורשת את ביצוע הפעולות, הבחירה הזולה מבין האפשרויות "תנצה".

טיפול בעולם עם מסים – שיעור מס 25%, מסים בסוף שנה, מחיר הון 7% :

מספר אפשרויות	פרטים
1	<p>לשכר מכוונה ענקית לחימום נקי, כזו שמאפשרת לחםם 5,000 נקיינות בו זמינה. הסכם ההשכרה הוא לזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החד פעריים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם מושלמים מראש ואיינם מוכרים לצרכי מס. הבחירה תדרוש עלות התקנה חד פערית בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החד פעריים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקחתה על פני 10 שנים – בשיטת הקו ישיר. עלויות שוטפות נוספות שתיווצרנה בגין חלופה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה – הן בגין ניכוי כרבולות ומקרים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.</p> <p><b>בעולם עם מסים (באלפי ש"ח) :</b></p> $NPV = -500 - 100 + \frac{100}{10} * 25\% * PVFA(7\%, 10) - \frac{20 * (1 - 25\%)}{7\%} = -796.726$
2	<p>לשכר מכוונות אישיות לחימום נקי לכל עובד. התשלום למכוונה אישית לחימום נקי 500 ש"ח בתשלום מראש בתחילת השנה. החברה זוקה ל-5,000 מכוונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בעלות קבועה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כהוצאה לצרכי מס.</p> <p><b>בעולם עם מסים (באלפי ש"ח – שכן 500 ש"ח סומנו כ-0.5 אלף ש"ח) :</b></p> $NPV = -0.5 * 5,000 * \frac{1}{7\%} * (1 + 7\%) + 0.5 * 5,000 * 25\% = -29,285.714$
3	<p>לשכר מכוונות אישיות לחימום נקי לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחילת השנה עבור 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש עלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהשקעה לצרכי מס, הפקת בגין מוחושב במשך 10 שנים לפי קו ישיר.</p> <p><b>בעולם עם מסים :</b></p> <p>הואיל ומדובר בפרויקט לתקופה קבועה נרצה לחשב תחיליה את העלות השנתית הממוצעת, אז לתרגם אותה לאינסוף על ידי חלוקה במחיר הון. בעצם, משתמשים כאן בגישה EAC שווה הערך השנתי.</p> $NPV_{10 \text{ years}} = -400 + \frac{400}{10} * 25\% * PVFA(7\%, 10) = -329.76$

$$EAC = \frac{-329.76}{PVFA(7\%, 10)} = -46.947$$

זהה הוצאות השנתיות הממוצעת, נהוון אותה לאינסוף ונקבל:

$$NPV = \frac{-46.947}{7\%} = -670.68$$

במקרה פרטי זה, הטלת המס או הידריה לא הובילה לשינוי העדפת חלופה 3 שעודנה הוצאה ביותר מبين המוצעות.

**תרגיל 70.104 – השוואת אופק עם עיתוי החלפה אופטימלית, בהתקיימים חלופה קיימת מתיקות**  
בחברת "אלנים ופרידמןס" המנכ"ל הגדול אילן מחים לעצמו נקניק מדי יום מכונה חכובה שעברו עליה ימים טובים יותר. ערכה בספרים ושוק של מכונת חיים הנקניק זניח (אפט). הוצאות התחזקה. של מכונת הנקניק הולכות ונחלות בחלוף השנים: הן צפויות להיות בסך 5,000 ש"ח בתום השנה הקרובה, והן תגדלנה בשיעור של 5% לשנה.

אילן שוקל להחליף את מכונת הנקניק הישנה, במכונה חדשה – ולפניו שתי אפשרויות:

חלופה 1: מכונת חיים נקניק תוצרת זקש שעולתה 60,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 5,000 ש"ח ואורך חייה 5 שנים.

חלופה 2: מכונת חיים נקניק תוצרת סלמור שעולתה 80,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 6,000 ש"ח ואורך חייה 7 שנים.

בזכות חיים הנקניק הומי מסוגל המנכ"ל לפעול בעבודתו ביעילות מירבית, כך שבסך הכל, הענין מפעילותו חיובי.

כמו כן, הניחו כי ניתן לרכוש מכונות מדגם 1 או 2 – החדשות – באותם תנאים גם בעתיד.

נתונים נוספים:

שיעור מס החברות הוא 40%, מחיר ההון לאחר מס: 10%. שיטת הפחת: קו ישר, כאשר הפחת הוא בהתאם לאורך חיי הנכס.

נדרש:

א. איזו מכונה חיים נקניק כדאי לרכוש?

ב. מתי מומלץ יהא לרכוש את המכונה החדשה (כלומר – זה את עיתוי החלפה האופטימלי המתחשב בעליות התחזקה של הקים, שהולכות ונחלות).

ג. הניחו לטובת סעיף זה שהחלפה כדאית לאחר 4 שנים. בהנחה זו ולא תלות בתוצאות סעיף קודם, מהי עלות ההחזקה של מכונות הנקניק – מעתה ועד עולם הלויה?

פתרונות:

#### סעיף א – איזו מכונה כדאי לרכוש

למרות שעקורונית ובנתוני השאלה, ניתן להמשיך להשתמש במכונה הישנה עד אינסוף, הרי שהעובדת שעליות התחזקה שלה עלות משנה לשנה "ללא גבול" מובילה למסקנה לפיה בהכרת, מתישחו, החלפה תהיה כדאית.

מטרת סעיף זה היא לומר – במידה וההחלפה כדאית בנקודת מסויימת, איזו חלופה תועדף – או במלים אחרות: בהינתן אורך חיים שונה של החלופות השונות ואפשרויות החזרה על הפרויקטם (ניתן לרכוש מכונות זהות בעליות זהות בעתיד) נחשב את שווה הערך השנתי EAC בכל חלופה – והזולה יותר (זו שווה הערך השנתי שלה הוא גבוהה יותר / פחות שלילי) תועדף.

**חלופה 1:** מכונת חיים נקי תוצרת זקש שעלותה 60,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 5,000 ש"ח ואורך חייה 5 שנים. שיעור מס החברות הוא 40%, מחיר החון לאחר מס: 10%. הפחתה הוא בהתאם לאורך חיי הנכס.

чисוב ה-NPV למחזור הפעלה אחד – בהתייחס להשקעה, מגני המס על הփחתה ועלויות תחזוקה:

$$NPV = -60,000 + \frac{60,000}{5} * 40\% * PVFA(10\%, 5) - 5,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 5) = -53,177$$

חילוץ שווה הערך השנתי על בסיס הפרויקט בין ה-NPV למחזור הפעלה אחד ל- $PVFA$  של משך הפרויקט:

$$EAC_{Zaksh} = \frac{-53,177}{PVFA(10\%, 5)} = -14,028$$

**חלופה 2:** מכונת חיים נקי תוצרת סלמור שעלותה 80,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 6,000 ש"ח ואורך חייה 7 שנים.

$$NPV = -80,000 + \frac{80,000}{7} * 40\% * PVFA(10\%, 7) - 6,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 7) = -75,271$$

$$EAC_{Selmor} = \frac{-75,271}{PVFA(10\%, 7)} = -15,461$$

התשובה הסופית לסעיף א: יש להעדיף רכישת זקש על פני רכישת סלמור, העלות התקופתית נמוכה יותר.

**פתרונות סעיף ב – מתי בדוק תבוצע החלפת המכונה?**

אנו יודעים שעלות המכונה החדשה / המחליפה הזולה מבין השתיים היא 14,028 ש"ח לשנה (עלות ממוצעת קבועה).

לעומת זאת, עלות המכונה הקיימת היא 5,000 בитום השנה הנוכחית (לפני התחשבות בהשפעות מס) והיא תגדל כנתון ב-5% לשנה.

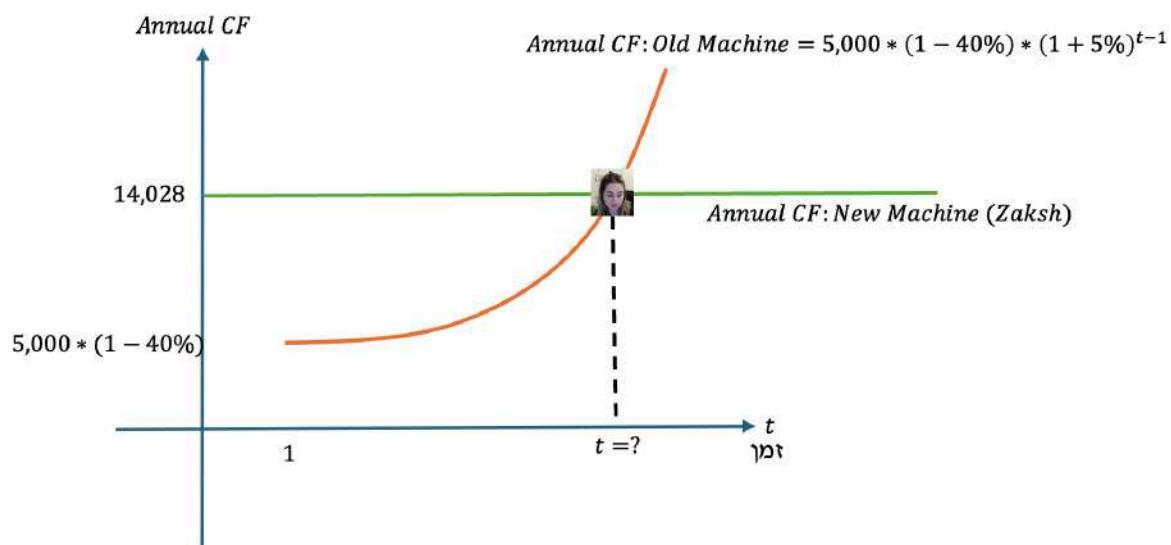
המשמעות היא שניתן לבטא גם גרפית ובעיקר מתמטית את הูลות השנתית של המכונה הקיימת כפונקציה של חלוף הזמן כدلקמן (בערך מוחלט) :

$$\text{Annual CF Old Machine} = 5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 5\%)^{t-1}$$

כאשר :

- 5,000 הูลות בתום השנה הקרובה בערך מוחלט.
- 40% שיעור המס (מדוע בהוצאה מוכרת, אך הูลות נטו היא בנטרול רכיב המס).
- 5% העליה השנתית בעולות.
- ערך t השנה (מימד הזמן, time)

הסיבה לצורך ב- $t-1$  היא שהูลות הנזונה בסך 5,000 היא כבר בתום השנה הקרובה – כולל בזמן 1. לכן, המטרה היא שהפקטור יופיע עבור  $t=1$  ולמעשה הגידול בעולות יתחיל רק מזמן 2.



הפתרון ידרוש ממי להשוות בין הูลות השנתית הקבועה בחלופת זמן לבין הביטוי המיצג עלות שנתית בחלופת תחזקה :

$$14,028 = 5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 5\%)^{t-1}$$

$$14,028 = 3,000 * (1 + 5\%)^{t-1}$$

נתחיל לפשט – אחלק את שני האגפים ב-3,000 :

$$\frac{14,028}{3,000} = (1 + 5\%)^{t-1}$$

$$4.676 = 1.05^{t-1}$$

נוציה בו לשני האגפים :

$$\ln 4.676 = \ln 1.05^{t-1}$$

לפי חוקי לוגריתמים :

$$\ln 4.676 = (t - 1) * \ln 1.05$$

זהו כל הסיפור :

$$\frac{\ln 4.676}{\ln 1.05} = t - 1 \rightarrow t = \frac{\ln 4.676}{\ln 1.05} + 1 = 32.61 \approx 33$$

המשמעות : רק בעוד כ-33 שנים כדאי להחליף לפריט חדש (לזקח).

סעיף ג' : הינו לטובת סעיף זה שההחלפה כדאית לאחר 4 שנים. בהנחה זו ולא תלות בתוצאות סעיף קודם, מהי עלות החזקה של מכונות הנקניק – מעטה ועד עולם הללויה? מחיר ההון 10%, שיעור המס 40%.

לפי נתוני השאלה, עלינו לחשב את ה-NPV של עלויות החימום לאינסוף, בהנחה שב-4 השנים הראשונות ממשיכים להחזיר את המכונה הישנה, ועל כן התזרימיים הם בהתאם לעליונותה ההולכות וגדלות, ולאחר מכן מחליפים את המכונה מחדש, עלות שנתית שהיא שווה הערך השנתי של מכונת הזקן החדשה :

נתחיל מהביטוי המיצג את העלות השנתית אחורי מסים לכל אחת מ-4 השנים הקרובות בגין המכונה הישנה :

$$\begin{aligned} NPV = & -5,000 * (1 + 10\%)^{-1} \\ & -5,000 * (1 + 5\%) * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-2} \\ & -5,000 * (1 + 5\%)^2 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-3} \\ & -5,000 * (1 + 5\%)^3 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-4} \end{aligned}$$

נוסף את העלות השנתית נטו (במנוחה ערך שנתי) מזמן 5 לאינסוף בגין המכונה החדשה. עלות זו תתרוגם לזמן 0 על ידי התאמה של 4 תקופות נוספות לאחר מכן וסדרה שמתחלת בזמן 5 קופצת אחורנית ל-4 ולכן עלינו לבצע התאמות נוספות :

$$-14,028 * \frac{1}{10\%} * (1 + 10\%)^{-4}$$

בכך הכל, סיכום הביטויים לעיל יחד עם ביטוי הערך הנוכחי האינטובי מזמן 5 וAIL מיניב את התוצאה :

$$NPV = -106,001$$

### שאלה 70.105 – חילוץ שיעור המס המוביל לכדאיות פרויקט

בחברת "משה" שוקלים להשקיע במכונה לקיורו נקייק. עלות המכונה 100,000 ש"ח והיא מופחתת בשיטת הנקו הישר על פני 10 שנים. למכונה מוגדר ערך שירט / גרט של 10,000 ש"ח. החברה חייבת במס. מחיר ההון של החברה הוא 8% לשנה. המכונה צפואה להניב הכנסות שנתיות בסכום של 20,000 ש"ח.

נדרש: מהו שיעור המס המירבי שעדיין יצדיק את הפרויקט?

הצדקה פרויקט מתאפשרת בהגדלה לכל הפחות (רף מינימלי לכדאיות) כאשר ענין הפרויקט 0. לכן, נבנה את משווהת הענין, נקווה מכך שהנעלם היחיד הוא זה שרצוים, ונחלץ אותו על בסיס השוואת הענין ל-0.

$$NPV = -100,000 + \frac{100,000 - 10,000}{10} * t * PVFA(8\%, 10) + 10,000 * (1 + 8\%)^{-10} + 20,000 * (1 - t) * PVFA(8\%, 10) = 0 \rightarrow t = 0.526 = 52.6\%$$

מסקנה: שיעור המס המירבי שצדיק את הפרויקט הוא 52.6%. קרי, אם שיעור המס גבוהה מכך, הפרויקט לא כדאי.

הסבירים נוספים:

$$\frac{\text{עלות ההשקעה} - 100,000}{\frac{\text{הוצאות פחות שנתיות: עלות בניכוי גרט שנתיו מפורשות חלקית} - (100,000 - 10,000)}{t} + \text{שיעור המס}} = \frac{10,000 * (1 + 8\%)^{-10}}{10,000 * (1 + 8\%)^{-10}}$$

מדוע אין מיסים במכירת הפריט (בעיקר – מס רווח הון)? התשובה היא שבנהנתה בריית מחדל ובהיעדר נתונים סוטרים, פריט נמכר בתום פרויקט בתמורה לערך הספרים שלו (עלות מופחתת) באותו מועד. במקרה זה, תמורה המכירה תהיה זהה לגרט, כי הפריט בעל גרט חיובי וסיים תקופת הפחתתו. בכל מקרה, המשמעות היא שאין מיסים – כי אם פריט אכן נמכר בתמורה לערך הספרים שלו (בריית מחדל, לא מחייב שכן יהיה בכל שאלה אז אין הפרש בין תמורה המכירה לבין ערך הספרים ואין מס.

סוגיות לפגש הבא:

- החלטות ייצור או רכישה
- מענקים למימון חלקו של השקעות בפרויקט (כולל השפעות המס)
- הלוואות מסובסדות (חריג למימון פרויקטים)

## שיעור 8 – השלמות בנושא קיצוב הון (יח' 7) והתחלת מימון בתנאי סיכון – (יח' 8)

**סוגיה ביח' 7 – עידוד כדיות השקעות באמצעות ממשלתיים – מענקים**  
ממשלה עשויה לחפש בכך שחברות תבצעה פרויקטים בעלי עדיפות לאומי, בתחוםים מסוימים, באזוריים מסוימים וכיוצא בהז. אם הפרויקטים עצם אינם כדים, הממשלה יכולה לעודד חברה לבצע את הפרויקט על בסיס מענק השקעה. מענק שכזה יתקבל בידי החברה כתזרים מזומנים חיובי, ובכך יקטין את ההשקעה הנדרשת לטובת הפרויקט. לצד זאת, העובדה שמדובר במענק למימון השקעה ספציפית – ישפייע גם על מגני המש על הפקחתה, ולעתים גם על מס רווח / הפסד הון. לכן, כאשר אנו מתיחסים למענקים ממשלתיים והשפעתם על העניין – علينا להביא לידי ביטוי לא רק את השפעתם הראשונית החיובית – אלא גם את השפעות המש העוקבות.

**שאלה 70.105 – מענק השקעה, יישום בסיסי (גודל המענק נתון)**  
חברת "ירינים ועמרם" בע"מ שוקלת לרכוש מכונה ענקית לחימום נקייק. עלות המכונה 400,000 ש"ח והיא צפואה לשרת את החברה במשך 5 שנים. תקופת הפחתהה של המכונה לצורך מס זהה לאורך חייה הכלכליים. המכונה צפואה להניב הכנסה שנתית נקייה (לפניהם מסים ופחח) בסכום של 110,000 ש"ח. שיעור המש אליו כפופה החברה הנו 30%, ומהיר ההון לאחר מס הנו 15% לשנה.  
נדרש:  
א. מהו עניין הפרויקט?  
ב. הניחו כתה כי הממשלה מעניקה לחברת מענק למימון 75% מעלות המכונה. חשבו מחדש את העניין בהתחשב במענק.

פתרון:

### סעיף א – חישוב NPV ללא מענק

$$NPV = -400 + \frac{400}{5} * 30\% * PVFA(15\%, 5) + 110 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 5) = -61.43$$

לאור העניין השלילי, הפרויקט לא כדאי.

### סעיף ב – חישוב NPV בהתחשב במענק

הדרך הארוכה והמסובלת בהתחשב במענק – חישוב מחדש של כל העניין בשים לב סכום ההשקעה העדכני, שהוא למעשה סכום ההשקעה הנוכחי בנסיבות המענק (גם לצרכי פחת):

$$NPV_{WM} = -400 + 0.75 * 400 + \frac{400 - 0.75 * 400}{5} * 30\% * PVFA(15\%, 5) + 110 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 5) = 178.23$$

הדרך הקצרה יותר:

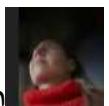
$$\Delta NPV_M = +0.75 * 400 - \frac{0.75 * 400}{5} * 30\% * PVFA(15\%, 5) \approx 239.66$$

הענין העדכני ניתן לחישוב בדרך הקצרה (בבנהה שהענין לפני מענק נתון) בתוור הסיכום של הענין המקורי בתוספת השפעת ענין המענק בלבד :

$$NPV_{WM} = NPV + \Delta NPV_M = -61.43 + 239.66 = 178.23$$

כך שלמעשה : ההשפעה החיובית של מענק השקעה על הענין לעולם תהיה נמוכה יותר מסכום המענק, וזאת, לאור ההשפעה השלילית של המענק על מגני המשך על הפחת (ואם היה מכרה – ייתכן גם הייתה השפעה הקשורה אליה).

#### שאלה 70.105 – מענק השקעה – חילוץ גודל המענק המינימלי המצדיק את הפרויקט



חברת "שקיידי" בע"מ שוקלת לרכוש משאית שתסייע מכונות חימום נקניק ברחבי הארץ. עלות המשאית 1,500,000 ש"ח והיא צפופה לשרת את החברה במשך 10 שנים. תקופת הפחתתה של המכונה לצורך מס היא 8 שנים. המכונה צפופה להניב הכנסה שנתיות נקייה (לפni מסים ופחח) בסכום של 170,000 ש"ח. שיעור המשך אליו כפופה החברה הנו 30%, ומהיר ההון לאחר מס הנו 15% לשנה. נדרש : הממשלה מעוניינת לעודד רכישת משאיות חימום נקניק ולכון מציעה לחברות בתחום מענק השקעה. מהו גובה המענק המינימלי אשר יצדיק את ההשקעה בפרויקט.

פתרון :

נציג באלפי ש"ח :

אני מתייחס למענק בגודל נעלם אשר מנוכה מעלות ההשקעה ואשר מוביל לכך שהענין יכול בתחרש בהשפעות המענק יהיה 0 (מינימום כדיות).

$$NPV = -1,500 + M + \frac{1,500 - M}{8} * 30\% * PVFA(15\%, 8) + 170 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 10) = 0$$

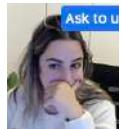
$$-1,500 + M + \frac{1,500}{8} * 0.3 * PVFA(15\%, 8) - \frac{1}{8} M * 0.3 * PVFA(15\%, 8) + 170 * 0.7 * PVFA(15\%, 10) = 0$$

$$-1,500 + M + \frac{1,500}{8} * 0.3 * PVFA(15\%, 8) - 0.1682 * M + 170 * 0.7 * PVFA(15\%, 10) = 0$$

מכאן מחלצים משווהה בណלט אחד :

$$M \approx 781.93$$

## שאלה 70.106 – מענק השקעה – חילוץ גודל המענק המינימלי המצדיק את הפרויקט כולל מכירה



טל שוקلت לרכוש נקניקייה נוי ענקית מזכוכית למשרד, שצפואה להגדיל את תעבורת הلكוחות ובהתאם את הכנסות החברה. עלות הנקניקה 300,000 ש"ח והיא מופחתת בשיטת הקו הישר על פני 10 שנים. החברה צופה להניב מהנקניקה הכנסות של 30,000 ש"ח בתום כל שנה, במשך 11 שנים. החברה כפופה למס חברות בשיעור 30% ולמס רווחי הון בשיעור 20%. מחיר ההון של החברה לאחר מס 15%. מה צריך להיות סכום המענק המינימלי שצדיק את השקעה, אם ידוע שהחברה צופה למכור בתום הפרויקט את הנקניקה בתמורה ל-40,000 ש"ח.

פתרונות :

$$NPV = -300 + M + \frac{300 - M}{10} * 30\% * PVFA(15\%, 10) + (40 - 20\% * 40) * (1 + 15\%)^{-11} + 30 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 11) = 0 \rightarrow M = 162.51$$

**באדום – מס רווח הון במכירה**, להלן פירוט ההתייחסות למכירה :

במועד המכירה علينا לבחון את העלות המופחתת ערב המכירה תחילה. הויל והפריט מופחת על פני 10 שנים, והמכירה הצפואה היא רק בחלוף 11 שנים, הרי שיתרת ערך הספרים 0 :

$$(300 - M) - \frac{(300 - M)}{10} * 10 = 0$$

רווח / הפסד ההון הוא ההפרש בין תמורה המכירה לבין העלות המופחתת (זהו ימושה לפי שיעור מס 20%) :

$$40 - 0 = 40$$

### דיון מקדים קצר – אמצעי עידוד נוספים – הלואה מסובסדת

באופן כללי, בשאלות "רגילותות", לא נהוג להתייחס לעליות מימון, שהרי עבורן יש את מגנון ההיוון (חישוב PVFA עם ריבית מתאימה).

חריג כלל הוא המקרה שבו כדי לעודד פרויקט, מוצעת לבעלי הלואה מסובסדת ספציפית, המותנית ביצוע הפרויקט, ואשר הריבית בגיןה נמוכה במיוחד.

הטיפול שלנו בהלוואות כאלה יכלול :

- א. חישוב לוח הסילוקין להלוואה. علينا לגלות כמה מחזירים, מתי, ואת החלוקה בין קרן וריבית.
- ב. ריביב הריבית מזכה במגוון מס (כמו כל הוצאה), ולעומתו – החזר קרן לא מזכה במגוון מס.
- ג. ערכים אלו (תזרימי קרן ללא השפעות מס, והוצאות מימון עם השפעות מס) יתווסף לתזרימי המזומנים של הפרויקט וישפיעו על העניין שלו.

## שאלה 70.107 – הלוואה מסובסדת – יישום בסיסי



ירין עמר שוקל לרכוש לחברה שבה הוא עובד מכונה לניקוי שאריות כרכבות ממכונות חימום הנקייה של החברה. צפוי כי עלות המכונה שתשלום מיידית תהיה 200,000 ש"ח והוא תתרום לחסכון בעלות הניקיון הידניות של מכונת הנקייה בסכום של 22,000 ש"ח לשנה במשך 10 שנים. תקופת ההחפתה של המכונה לצורך מס זהה לאורך חייה השימושיים. החברה כפופה לשיעור מס חברות של 30%, ומהיר ההון שלה 15%.

נדרש :

- מהו עניין הפרויקט.
- הממשלה מציעה למבצעים פרויקטים מסווג זה הלוואה מסובסדת למימון 80% מעלות הרכישה. ההלוואה תפרע ב-5 תשלומי קרן שנתיים שווים, והיא נושא ריבית שנתית בשיעור 2%. חשבו את עניין הפרויקט בהתחשב בהלוואה זו.

פתרון :

פתרון סעיף א :

$$NPV = -200 + \frac{200}{10} * 30\% * PVFA(15\%, 10) + 22 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 10) = -92.6$$

פתרון סעיף ב :

נציג תחילה את לוח סילוקין המלא בגין הלוואה = "תשלומי קרן שווים" = לוח סילוקין רגיל סכום הלוואה באלפי ש"ח :  $160 * 80\% = 160$  והחזר קבוע בגין קרן :  $160 / 5 = 32$

זמן	32	ע"ח קרן	ע"ח ריבית	יתרה
0				160
1	32			128
2	32			96
3	32			64
4	32			32
5	32			0

$$\Delta NPV_{SubLoan} = +160 - 32 * PVFA(15\%, 5) - 3.2 * (1 - 30\%) * 1.15^{-1} - 2.56 * (1 - 30\%) * 1.15^{-2} - 1.92 * 0.7 * 1.15^{-3} - 1.28 * 0.7 * 1.15^{-4} - 0.64 * 0.7 * 1.15^{-5} = 47.81$$

הואיל והשפעה החיובית הנובעת מנטילת הלוואה בריבית הנמוכה היא קטנה יותר (בערכה מוחלט) מהענין השילילי המקורי, עדין הפרויקט כולל לא כדי. לשם הממחשה נציג להלן את העניין הכלול המתחשב בהלוואה על בסיס סיכום העניין המקורי יחד עם שינוי העניין הנובע מה haloואה :

$$NPV_{TOTAL} = NPV + \Delta NPV_{SubLoan} = -92.6 + 47.81 = -44.79$$

### סוגיה נוספת - החלטות ייצור או רכישה

בהחלטה ייצור או רכישה, הדילמה היא בין תשלום עבור מוצר לספק חיצוני (בדרך כלל סכום נתון או כזה שנדרש לחץ), לבין עלות הייצור שלו. במקרים רבים, לטובות ייצור עצמי, מתחוות עלויות הקשורות להשקעה בפס הייצור וכיו"ב, ורכישה מספק במקרים רבים כרוכה בעלות משתנה ליח' גובה יותר. צריך להביא לידי ביטוי את ההפרש התזרימי בין המוצבים, כדי לדעת האם כדאי עבור מייצור עצמי לרכישה ואו להפץ. השאלה גם יכולה לכלול את מספר היחידות כנעלם על מנת לחז הערכים שיובילו לכדיות המעבר.

### שאלה 70.108 – ייצור או רכישה

חברת "معدני טל – נקניק לכל אגרטל" שוקלת לרכוש מכונה לייצור נקניקיות מסווג חדשני, שתתספר את איכות המוצר ותגדיל את המכירות. עלות המכונה היא 500,000 ש"ח, והיא מופחת בשיטת הקו הישר על פני 8 שנים. החברה מעריכה כי ההכנסות השנתיות הנובעות מהנקניקיות שהמכונה מייצרת יעמדו על 80,000 ש"ח בכל שנה במשך 10 שנים. בנוסף, החברה בוחנת אפשרות לרכוש את הנקניקיות מהספק "נוי בע"מ – נקניק ללא טעם", שמציע אותן בעלות של 75,000 ש"ח לשנה (כולל תחזוקה וaspersה). עם זאת, שימוש בספק חיצוני יוביל לצמצום מסויים בעלות התפעול של החברה בסך 10,000 ש"ח לשנה. ידוע כי שיעור מס החברות הנזק 30%, מחיר ההון של החברה לאחר מס 10%, בתום התקופה החברה צופה כי תוכל למכור את המכונה בתמורה ל-150,000 ש"ח.

נדרש :

- חשבו את NPV בחלוקת רכישת המכונה (ייצור).
- חשבו את NPV בחלוקת רכישת מספק החיצוני.

פתרונות :

פתרונות סעיף א – NPV ברכישת המכונה ויצור :

$$NPV_{Own} = -500 + \frac{500}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 8) + 150 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-10} + 80 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) = 266.8$$

פתרונות סעיף ב – NPV ברכישת מספק חיצוני :

$$NPV_{Buy} = -75 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) + 10 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) + 80 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) = 64.52$$

## ולקינוח מותוק – שאלת מבחן, שאלון 22, שאלה 11

### שאלה 11

חברת מטמון בע"מ זוקה לדחפור חדש. עלות הדחפור החדש 1,200,000 ש"ח והוא מופחת לפוי שיטות הכספיים הקיימים לארוך חייו במשך 4 שנים.

ההכנסה השנתית הצפוייה ממנה מסתכמת ב-900,000 ש"ח ועלות הפעלתו השנתית צפוייה להיות 300,000 ש"ח. הפעלת הדחפור תקבע את הכנסות החברה מלחפור קיים מ-1,000,000 ש"ח ל-900,000 ש"ח לשנה. כמו כן, הפעלת הדחפור תצריך הקשרה של העובדים טרם הפעלה ועלות של 150,000 ש"ח, המוכרת במלואה לצורכי מס במועד ביצועה.

שיעור המס של החברה הוא 35% ומהירות ההון שלח, לאחר מס, 12% לשנה. **כדי לחברה:**

- א. לרכוש את הדחפור
- ב. לא לרכוש את הדחפור
- ג. לרכוש את הדחפור, רק אם מחיר ההון יעלה לפחות 15%
- ד. לרכוש את הדחפור, רק אם מחיר ההון ירד לפחות 10%
- ה. תשובה ב-ו-ד נכוןות

$$NPV = -1,200 + \frac{1,200}{4} * 35\% * PVFA(12\%, 4) + (900 - 300 - 100) * (1 - 35\%) * PVFA(12\%, 4) - 150 * (1 - 35\%) = 8.56$$

**כדי לרכוש, א.**

## שיעור 8 – חלק ב: התחלת הדיוון ביח' 8 – עולם עם סיכון

### רקע קצר – דיוון בפרויקטים מסוכנים בודדים וDİRוגם

הדיםנים שערכנו עד כה (ביח' 5 – ערך נוכחי, עתידי, יישומיהם וריביות, יח' 6 – כדאיות פרויקטים, יח' 7 – קיצוב הון ויפוי תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה) התعلמו **במהבהק** מקיומו של סיכון; ובפרט, התعلמו מכך שלכל פרויקט / אובייקט עסקי יש מספר אפשרויות (תרחישים שונים אפשריים לגבי התזרמים שעשוים לנבוע מהפרויקט). תנודתיות אפשרית זו בנסיבות העסקיים היא הלב של סיכון מבחןינו – וקבלת החלטות בתנאי סיכון דורשת מאייתנו לדעת כיצד לסתה את הסיכון, ובהמשך – כיצד לנהל אותו. הדבר שימושי לקבלת החלטות וDİRוג פרויקטים.

את הדיוון שלנו בפרק הזה אנחנו נתחליל מחייב שני ערכים סטטיסטיים מאד בסיסיים והגיאוניים בעולם עם סיכון :

- תוחלת – ממוצע משוקל של תוצאות פרויקט – על בסיס מכפלתו בהסתברות התוצאות.
  - סטטיסטית תקן (ושונות) – ממד הסיכון הבוחן את מידת הפיזור / התנדתיות האפשרית בתוצאות.
- הדיוון יתחליל בפרויקט / פרויקטים בודדים שלגביהם נתוני הסתברויות ותוצאות רלוונטיות – ועבורם נחשב את ערכי התוחלת וסטטיסטית התקן.
- בהמשך – נעסק גם בקבלת החלטות על בסיס ממדים אלו, וביחס המשקיעים לסיכון שקובע זאת.

### שאלה 71 – פרויקט מסוכן בודד (הגרלה) – חישובים בסיסיים של תוחלת וסטטיסטית תקן

בהגרלה יש לכם אפשרות לזכות ב-20 ש"ח בהסתברות 30%, ב-40 ש"ח בהסתברות 20%, ובהסתברות של 50% תפסידו 10 ש"ח. מהי התוחלת וסטטיסטית התקן בש"ח של ההגרלה?

פתרון :

תוחלת היא הממוצע המשוקל (שקלול תוצאות בהסתברויות) והיא ניתנת להציג באמצעות הנוסחה הבאה :

$$E(X) = P_1 * X_1 + P_2 * X_2 + \dots$$

כאשר :

הערך  $E(X)$  הוא תוחלת התקובל.

הערכים ...  $P_1, P_2$  מייצגים את ההסתברות (Probability) לכל תוצאה אפשרית בפרויקט.

הערכים ...  $X_1, X_2$  מייצגים את התוצאות (הערכים הכספיים / האחוזיים) שיתרחשו בכל הסתברות.

נגישים ונגלה :

הסתברות	תוצאה (ש"ח)
30%	20
20%	40
50%	-10

$$E(X) = 30\% * 20 + 20\% * 40 + 50\% * (-10) = 9$$

התוצאה של התוחלת מייצגת את התקבול הממוצע "לאורך זמן" בהנחה והפרויקט יבוצע "שוב ושוב". הויאל והפרויקט לא באמת מנייב 9, אלא ערכים הסטטיסטיים ממנה (20 או 40 או הפסד 10), נרצה לחשב את הסיכון המשתקף בפערים האפשריים בין תוצאות הפרויקט לתוחלתו, ופערים אלו – כאשר משוקלים בהסתברות, מניבים מגדסיכון, ולכמת אותו סטטיסטית לערך הנקרא "סטטיסטית תקן" (שורש השונות) שנוסחתה כדלקמן:

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 * [X_1 - E(X)]^2 + P_2 * [X_2 - E(X)]^2 + \dots}$$

כאשר :

הערך  $(X)$  מייצג את סטטיסטית התקן (מגדסיכון / הפיזור המקבול בקורס) = שורש השונות.

הערך  $E(X)$  הוא תוחלת התקבול.

הערכים  $P_1, P_2, \dots$  מייצגים את ההסתברות לכל תוצאה אפשרית בפרויקט.

הערכים  $X_1, X_2, \dots$  מייצגים את התוצאות (הערכים הכספיים / האחוזיים) שיתרחשו בכל הסתברות.

ניישם ונגלה :

$$\sigma(X) = \sqrt{30\% * [20 - 9]^2 + 20\% * [40 - 9]^2 + 50\% * [-10 - 9]^2} \approx 20.22$$

בקורסנו, איננו עוסקים בניתוח מבנה התפלגיות. כל שנטע הוא, שבהתאם סטטיסטית התקן מגדס פיזור / סיכון, הרי שככל שהערך המתkeletal בגין סטטיסטית התקן גבוהה יותר, הפרויקט מסוכן יותר (ערכי מפוזרים יותר).

### שאלה 72 - תוחלת וסטטיסטית התקן בהגרלה / הטלת קובייה / הסתברויות אינן נתונות במפורש

בהגרלה המבוצעת על ידי הטלת קובייה תוכלו לזכות ב-80 ש"ח אם תוצאה הקובייה היא 1 או 2, ב-100 ש"ח אם תוצאה הקובייה היא 3, 4 או 5, ותפסידו 200 ש"ח אם תוצאה הקובייה היא 6. מהי התוחלת וסטטיסטית התקן בש"ח של ההגרלה?



פתרון :

לקובייה יש 6 פאות. ההסתברות לכל "פאה" (לכל אחת מ-6 התוצאות) זהה. לכן, כאשר מאורע מתרחש כאשר תוצאה הקובייה היא 1 או 2, קרי 2 פאות מתוך ה-6, ההסתברות המאורע היא  $2/6$ . וכך' :

תוצאה קובייה	ערך כספי
80	1
80	2
100	3
100	4
100	5
-200	6

במהר לטלטל הסתברויות:

הסתברות	ערך כספי
80	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
100	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
-200	$\frac{1}{6}$

תוחלת התקבול הכספי:

$$E(X) = \frac{1}{3} * 80 + \frac{1}{2} * 100 + \frac{1}{6} * (-200) = 43\frac{1}{3}$$

סטיית התקן:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3} * \left(80 - 43\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} * \left(100 - 43\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} * \left(-200 - 43\frac{1}{3}\right)^2} \approx 109.19$$

שאלה 73 – בחירה בין פרויקט מסובן לבין פרויקט ודאי – מקרה בסיסי

מציעים לכם להשקיע בפרויקט שיעניק לכם 60 ש"ח בוודאות, או בפרויקט חולפי שיעניק לכם 100 ש"ח בהסתברות של 60% או 0 בהסתברות של 40%.

נדרש: חשבו את התוחלת ואת סטיית התקן של כל פרויקט. איזה פרויקט יועד לפיקטיבון תוחלת-שונות?

פתרון:

פרויקט B		פרויקט A	
תקבול כספי	הסתברות	תקובל כספי	הסתברות
100	60%	60	100%
0	40%		

בutorה תחילה, נחשב את התוחלת ואת סטיית התקן של כל פרויקט. לגבי פרויקט A, התהיליך טריביאלי. מודיע? בהינתן שלפרויקט יש רק תוצאה אפשרית אחת – תוחלתו חייבת להיות זהה לתוצאה זו. בנוסף, בהינתן תוצאה אפשרית אחת בלבד, הרי שסטיית התקן (מדד הפיזור של התוצאות) בהכרח אפס.

$$E(A) = 60; \sigma(A) = 0$$

אפשר גם לחשב כמובן:

$$E(A) = 100\% * 60 = 60$$

$$\sigma(A) = \sqrt{100\% * (60 - 60)^2} = 0$$

נחשב את התוחלת וסטיית התקן לפרויקט B ונקבל:

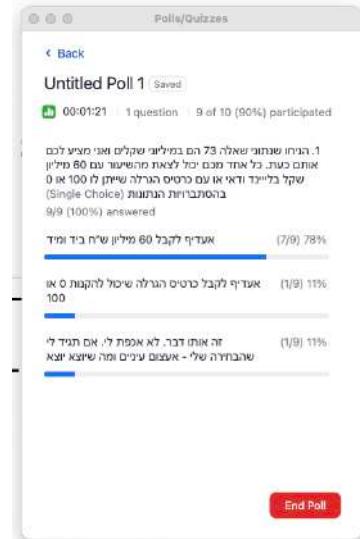
$$E(B) = 60\% * 100 + 40\% * 0 = 60$$

$$\sigma(B) = \sqrt{60\% * (100 - 60)^2 + 40\% * (0 - 60)^2} \approx 48.99$$

נרכז את הממצאים :

B	A	
60	60	תוחלת
48.99	0	סטיית תקן

כשאני שאלתי מה תעדיפו - עלתה תמורה מאד ברורה אך מעורבתת :



בשאלה נדרשנו לדרג את הפרויקטים (ולהכריע מי מביניהם עדיף) לפי קритריון תוחלת-שונות. זהו קритריון שמניח שהמשקיע שונא סיכון (=דוחה סיכון). ולמה הכוונה? מדובר במשקיע ש מבחינתו הסיכון (עליה בסטיית התקן) פוגעת בערך הסובייקטיבי של הפרויקט מבחינתו. משקיעים שונאי סיכון פועלים בהנחהות הקורס לפי קритריון תוחלת-שונות (או תוחלת-סטיית התקן).

על פי קритריון תוחלת שונות :

פרויקט A יועדף על פני פרויקט B אם ורק אם מתקיימים כל התנאים המוצטברים הבאים :

$$\text{תנאי 1 : } E(A) \geq E(B)$$

$$\text{תנאי 2 : } \sigma(A) \leq \sigma(B)$$

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים, 1, 2 מתקיים ב"צורה חזקה" (גדול ממש או קטן ממש בהתאמה).

נבדוק את התנאים לאט ובעדינות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלה זו.

B	A	
60	60	תוחלת

תנאי 1 :  $E(A) = E(B)$  מתקיים כי  $E(A) \geq E(B)$

תנאי 2 :  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$  מתקיים כי  $\sigma(A) < \sigma(B)$

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה החזקה : מתקיים כי **תנאי 2 מתקיים "חזק"**

בשורה התחתונה : לפי קритריון תוחלת-שונות המתאים לדירוג פרויקטים מסוכנים בהנחה שנאות סיכון, יועד פרויקט A על פני פרויקט B.

### שאלה 73.1 – חידוד משמעות קритריון תוחלת / סטיות תקן ויחס לסיכון

מייצל על מתלבטת בין שני הפרויקטים הבאים :

B	A	
8,500	5,000	תוחלת כספית – ש"ח
7,000	2,000	סטיות תקן – ש"ח

סמןו את הטענה הנכונה :

- לפי קритריון תוחלת שונות, מייצל تعدיף את פרויקט A.
- בנחה שמייצל שנאות סיכון, היא تعدיף את פרויקט A.
- תשובות A ו-B נכונות.
- בנחה שמייצל אוחבת סיכון, היא تعدיף את פרויקט B.
- בנחה שמייצל אדישה לסיכון, היא תהיה אדישה בין הפרויקטים.

א+b+g : הכרעה לפי קритריון תוחלת שונות משמעה הכרעה מנוקדת ראות שונות סיכון. מנוקדות ראות שונות

סיכון שכזה, אנו נבחן את שני הערכים :

בפרויקט A התוחלת נמוכה יותר ---> ככלمر B עדיף במידת התוחלת

בפרויקט A הסיכון נמוך יותר ---> ככלמר A עדיף במידת הסיכון (עבור שנוא סיכון כאמור) מתקיימת סתירה בין המידים ; או אם תרצו – קיימת תחלופה בין סיכון ותשואה. חשוב מאד להמנע מטענה שאומරת שתמיד שנוא סיכון ירצה למזער סיכון. זה לא נכון. הוא ירצה למזער סיכון אם התוחלת זהה או אפילו גבוהה יותר בפרויקט הבטוח ; אבל אם הפרויקט המסוכן מוביל לתוחלת גבוהה יותר – יש סיכוי שהוא יבחר.

בקצהה : לא נוכל להביט רק על הסיכון בובאנו להחליט עבור שנוא סיכון. نتيיחס גם לתוחלת.

לכן, הטענה לגבי העדפת שנוא סיכון את פרויקט A **שגויה**.

ג : עבור אוהב סיכון – במידת התוחלת B עדיף (תוחלת גבוהה יותר) וגם במידת הסיכון B עדיף (כי הסיכון גבוהה

יותר, אבל המשקיע אוהב סיכון). לכן, אוהב סיכון יעדיף את B בהגדרה. הטענה **נכונה**.

ה : הטענה **שגויה**, משקיע אדיש לסיכון מדרג השקעותיו לפי תוחלת בלבד ובהתאם, יעדיף את B שתוחלתו גבוהה מה בין השתיים.

**שאלה 73.2 – בחירה בין פרויקטים מסוכנים והמשמעות העמוקה של סיכון עבור אהב סיכון**

שקדי שוקלת לבצע אחד מבין הפרויקטים הבאים:

B	A	
10,000	10,000	תוחלת כספית – ש"ח
12,000	6,000	סטטיסטיקת – ש"ח

לפניכם מספר טענות. יש לבחור בנכונה:

- א. בהנחה ששקדי אהבת סיכון, היא תעדיף את פרויקט A לאור התוחלת זהה.
- ב. בהנחה ששקדי שונאת סיכון, היא תעדיף את פרויקט B.
- ג. בהנחה ששקדי אדישה לסיכון, היא תעדיף את פרויקט A.
- ד. תשובה A ו-ג נכונות.
- ה. בהנחה ששקדי אהבת סיכון, היא תהיה אדישה בין הפרויקטים.
- ו. נקי.

**פתרון:**

א: אם שקדי אהבת סיכון, היא מביטה על התוחלת – וראה שהיא זהה. אז, היא ממשיכה ו מביטה על הסיכון, וראה שבפרויקט B הסיכון גבוהה יותר. בהיותה אהבת סיכון, העליה בסיכון תורמת לה, ולכן היא מעדיפה את B. הטענה נכונה.

ב: אם שקדי שונאת סיכון – היא מביטה על התוחלת – וראה שהיא זהה. היא בוחנת את סטטיסטיקת התקן. היא רואה שסטטיסטיקת התקן בפרויקט A נמוכה יותר, ולכן תעדיף את A. הטענה נכונה.

ג: אם שקדי אדישה לסיכון – היא מביטה על התוחלת בלבד בבואה לדרג השקעות, ובහינתן זהות התוחלות – הפרויקטים שקולים מבחינתי. לכן הטענה נכונה.

ד: שגוי.

ה: כפי שאמרנו בסעיף א, במצב כזה שקדי תעדיף את B.  
לכן, התשובה הנכונה היא: **נקיק**.

### שאלה 73.3 – לאחר אתכם סופית

בפני המשקיע שי פ הוציאו הפרויקטם הבאים, וعليו לבחור באחד מביניהם בלבד :

הסתברות	ערך כספי A	הסתברות	ערך כספי B
100	20%	120	
	40%	150	
	40%	105	

לפניכם מספר טענות :

טענה 1 : "אם שי שונא סיכון, כמובן שיעדיף את פרויקט A, שהרי זה פרויקט ודאי – חסר סיכון"

טענה 2 : "רק אם שי אהוב סיכון, הוא יעדיף את פרויקט B, שכן לפרויקט מסחרת תוצאות אפשריות וסתירות תקן חיובית"

טענה 3 : "כל סוגים המשקיעים ללא תלות ביחסם לסיכון, יעדיפו את פרויקט B"

הטענה / הטענות הנכונה / הנכונות :

- א. טענה 1 בלבד
- ב. טענה 2 בלבד
- ג. טענות 1 ו-2
- ד. טענה 3
- ה. נכון

טענה 1 : שגوية. פרויקט A הוא אכן פרויקט ודאי – חסר סיכון. אבל תוחלתו נמוכה מזו של B. לכן, כבר בשימוש ב الكلים הבסיסיים של תוחלת וסתירות תקן אפשר לומר – A בטוח יותר, אך בתוחלת נמוכה יותר, ובמצב זהה לא ניתן להכריע. זכרו : שונא סיכון אינו אדם ששואף למצער סיכון בכל מחיר ; אלא אדם שכasher התוחלות זהות יבחר בחלופה הבטוחה יותר. אם גם התוחלת נמוכה יותר בחלופה הבטוחה, לא ניתן לומר באופן ברור מה הוא יעדיף.

טענה 2 : שגوية. גם לפי הכלים הישנים, העדפת B לשוויה להתבצע גם על ידי שונאי סיכון (לאור התוחלת הגבוהה יותר) ובטח שעל ידי אדישים לסיכון.

טענה 3 : נכונה. אמם ב الكلים הקודמים שהציגו לא התייחסנו למצב זהה, אבל אם מזיהים מקרה מיוחד שבו פרויקט ספציפי נותן בכל מקרה, בכל מצב טבעי, בכל אפשרות יותר מפרויקט אחר – הרוי שהוא בהכרח יהיה עדיף עליו והדבר אינו תלוי ביחס לסיכון. **תשובה ד נכונה.**

**שאלה 74 - לבית**

מציעים לכם להשקיע בפרויקט שיעניק לכם 80 ש"ח בוודאות, או בפרויקט חלופי שיעניק לכם 100 ש"ח בהסתברות של 60% או 0 בהסתברות של 40%.  
נדרש: חשבו את התוחלת של כל פרויקט. מוביל לחשב כמותית את סטיית התקן, איזה פרויקט יועד לפיקרייטריוו תוחלת-שונות?

פתרונות :

$$E(A) = 80$$

$$E(B) = 60\% * 100 + 40\% * 0 = 60$$

נבדוק את התנאים לאי ובעדינות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלה זו.

תנאי 1 :  $E(A) > E(B)$  מתקיים כי  $E(A) \geq E(B)$

תנאי 2 :  $\sigma(A) < \sigma(B)$  מתקיים כי  $\sigma(A) < \sigma(B)$  גם ללא חישוב: כי A פרויקט ודאי

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה חזקה: גם תנאי 1 וגם תנאי 2 מתקיימים חזק.

לכן, לפי קרייטריוו תוחלת-שונות, יש להעדיף 80 ש"ח בוודאות על פני ההגרלה המוצעת.

**שאלה 75 - לבית**

מושע לכם להשתתף בהגרלה. עלות ההשתתפות היא 500 ש"ח. ההגרלה יכולה להניב לכם ערך חיובי של 800 ש"ח בהסתברות של 40% או ערך חיובי של 300 ש"ח בהסתברות 60%. סמןו את הטענה הנכונה :

- א. אם המשקיע שונא סיכון, כדאי לו להשקיע בתכנית (בהגרלה).
- ב. לפי קרייטריוו תוחלת-שונות, כדאי לו להשקיע בתכנית (בהגרלה).
- ג. לפי קרייטריוו תוחלת-שונות, לא ניתן לקבל החלטה האם כדאי להשקיע בתכנית.
- ד. אם המשקיע שונא סיכון, מוטב לו שלא להשקיע בתכנית.
- ה. כל יתר הטענות שגויות.

פתרונות :

מצב שבו מציעים לי להשתתף בהגרלה בעלות מסויימת ושאליהם אם כדאי, שcola להבירה בין הסכום הוודאי (שיש לי בכיס היום, ומהווה את עלות ההגרלה) לבין הסכום ה"מסוכן" שיתקבלו בהגרלה.

פרויקט B - סכום בכיס היום	פרויקט A - סכום בכיס היום
---------------------------	---------------------------

תקבול כספי	הסתברות	תקבול כספי	הסתברות
800	40%	500	100%
300	60%		

$$E(B) = 40\% * 800 + 60\% * 300 = 500$$

$$\sigma(B) = \sqrt{40\% * (800 - 500)^2 + 60\% * (300 - 500)^2} \approx 244.95$$

נבדוק את התנאים לאט ובעדינות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלת זו.

תנאי 1 :  $E(A) \geq E(B)$  מתקיים כי  $E(A) = E(B)$

תנאי 2 :  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$  מתקיים כי  $\sigma(A) < \sigma(B)$  גם ללא חישוב: כי A פרויקט ודאי

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה החזקה: תנאי 2 מתקיים חזק.

לכן, לפי קритריון תוחלת שונות, מוטב למשקיע להיוותר עם 500 ש"ח בכיסו, יתרה על התחשך בעסקת ההגרלה. **התשובה ד.**

**שאלה 76 - המלצה נוספת של תוחלת שונות - לבית**

ברק להוא משקיע שונא סיכון. מציעים לביק להשקיע אחד מבין שני הפרויקטים הבאים:

פרויקט B		פרויקט A	
הסתברות	תקבול כספי	הסתברות	תקובל כספי
3,000	50%	1,000	100%
0	50%		

נדרש: לפי קритריון תוחלת שונות, איזה פרויקט יעדיף ברק?

פתרון:

לגביה פרויקט A שישי לו תוצאה אפשרית אחת בלבד:

$$E(A) = 1,000 \quad \sigma(A) = 0$$

ולגביה פרויקט B בישום רלוונטי:

$$E(B) = 50\% * 3,000 + 50\% * 0 = 1,500$$

$$\sigma(B) = \sqrt{50\% * (3,000 - 1,500)^2 + 50\% * (0 - 1,500)^2} = 1,500$$

ריכוז הממצאים:

B	A	
תוחלת	1,000	
סטיית תקן	0	1,500

נבדוק באופן מלא האם A עדיף על B לפי צבר התנאים המגדירים את קритריון "תוחלת שונות":

תנאי 1:  $E(A) < E(B)$   $E(A) \geq E(B)$

תנאי 2:  $\sigma(A) < \sigma(B)$   $\sigma(A) \leq \sigma(B)$

תנאי 3: לא רלוונטי, לאור אי קיומו של תנאי 1.

נבדוק "הפוך". האם B עדיף על A.

תנאי 1:  $E(B) > E(A)$   $E(B) \geq E(A)$

תנאי 2:  $\sigma(B) \leq \sigma(A)$   $\sigma(B) > \sigma(A)$

תנאי 3: לא רלוונטי, כי תנאי 2 לא מתקיים.

לא הצלחנו להראות ש - A עדיף על B.

לא הצלחנו להראות ש - B עדיף על A.

המשמעות: לא ניתן להכריע לפי קритריון תוחלת-שונות איזה פרויקט יועדף.

## מפגש 9 – יי' 8 חלק שני – ניהול תיקי השקעות – 6/1/2025

### רקע קצר - דיוון במיגור סיכון (הקטנתו) על ידי שילוב פרויקטים מסוכנים - גישת תיקי השקעות

- הדיונים לעיל (בפרויקטים מסוכנים ודירוגם) הניחו שיש לבחור פרויקט אחד בלבד מבין כמה מוצעים. בעולם האמיתי, ובעיקר ככל שאמוריהם הדברים לגבי נכסים סחריים (מניות המרכיבות תיק השקעות, למשל) כמובן שניתן לשלב בין נכסים מסוכנים, והדבר עשוי לתרום להקטנת הסיכון הגלום בתיק.
- ומדוע? לאור העובדה שרכיבי התיק "מאזנים זה את זה". ממש כשם שקרמל מלוח הוא טעם נפלא, כי המلوוה מאزن את המתוק, כך בתיק השקעות המאזן היבט המאפיינים השונים של הנכסים ובעיקר מוקדם המתאים ביניהם (הקובע, בgesot, האם ועד כמה תנועה לכיוון מסוים בנכס אחד מרכיבת עם תנועה בכיוון הפוך בנכס אחר) מאפשרת להקטין סיכון.
- עלום ניהול סיכון בתיקי השקעות הוא ענק. אנחנו נתמקד במספר יישומים סטטיסטיים בסיסיים מiad, שבבסיסם הנוסחאות המקובלות לחישוב תוחלת וסטטיסטית תקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים. נתחיל בהצגה גרפית, כדי לקבל תחושה. לאחר מכן, נציג את היבט הconomic ונתרגל בהתאם.

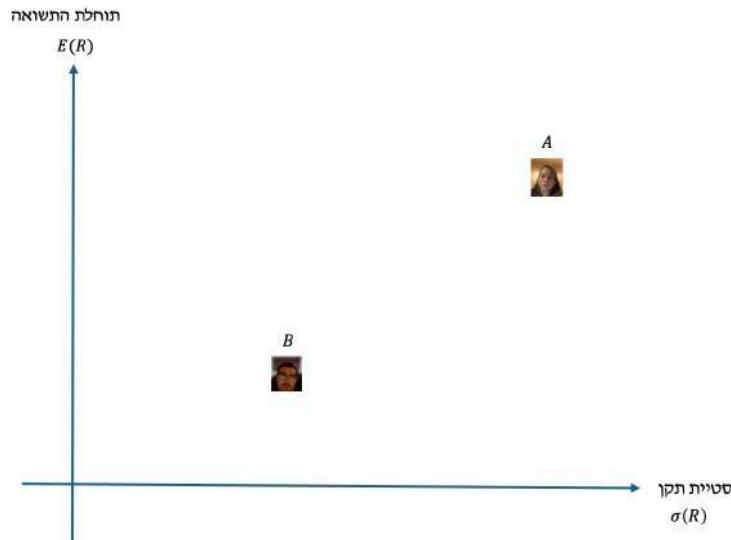
#### מינוי מבוא – חיווני :

- בנסיבות החשובות בחיות – רובנו שונאי סיכון; ולכן לי יכולת להקטין סיכון יש ערך מיוחד; יכולת זו יכולה להתקיים לא רק על ידי בחירה בנכסים מסוכנים פחות – אלא גם באמצעות שילוב נכסים. פיזור הביצים מקטין את תנודתיות תיק ההשקעות, ללא פגיעה מתחייבת בתוחלת התשואה וזהו ערכה.
  - איך בדיקת פיצול ההשקעה בין מגוון נכסים מסוכנים משפיע על התוחלת?
  - איך אותו פיצול לתיק השקעות משפיע על סטיית התקן / מיזן הסיכון?
- בשלב ראשוני: **תיקי ההשקעות יהיו פשוטים ונאייביים, יעסקו בשילוב שני נכסים מסוכנים בלבד, ובהציגותם הגרפית. בהמשך הדרך, נshall.**

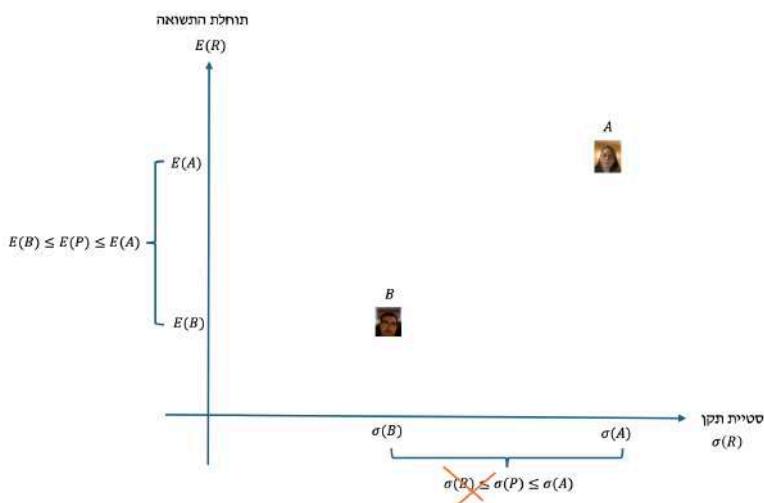
### מינימיזציה – מודל שני נכסים מסווגניים – הציגת גרפית

כל נכס מסווג ניתן להציג במערכות ציריים שציר האנכי הוא תוחלת התשואה / ערך, וציר הופכי הוא ממוצע – סטיית התקן.

אנו דנים בעת בשילוב בין שני נכסים מסווגניים. ו מבחיננו, כל דיוון בשילוב הנ"ל דורש ידיעת המיקום היחסי של שני הנכסים מסווגניים, זה מול זה, תחילת.

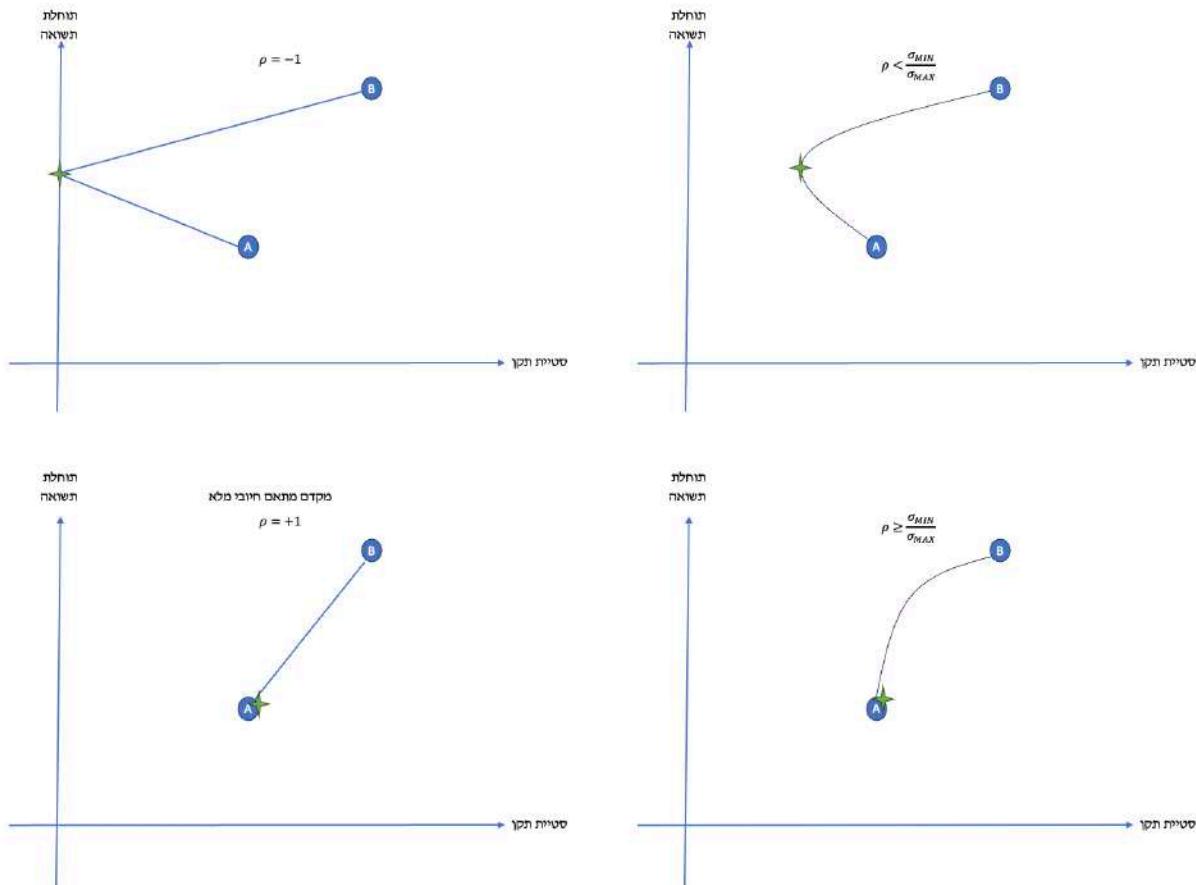


מה קורה עקרונית כאשר משלבים בין הנכסים? לאילו ערכי תוחלת ו/או סטיית התקן אפשר להגיע? התשובה מתחולקת לשני חלקים שאפשר לראות באIOR מטה:



תוחלת תיק השקעות המורכב משני נכסים מסווגניים תמיד תהיה בין (או שווה ל) תוחלות הנכסים בתיק. לעומת זאת, סטיית התקן תהיה לכל היותר זו של הנכס מסווג יותר – אבל המינימום שלו לא מוגבל ותלויה ביכולת לפזר את הסיכון (לצמצמו) בזכות פיזור ההשקעה, וזה תלוי בסטטיסטי שנקרו "מקדם המתאים".

שאלה 77 – המלצה לגבי צירופי ההשענות האפשריים ויכולת פיזור הסיכון כפונקציה של מקדם המתאים ידוע כי בשוק הhone קיימות 2 מנויות בלבד: A ו- B. ידוע כי סטיטית התקן של מניה B גבוהה יותר מסטיטית התקן של מניה A, וכי תוחלת התשואה של מניה B גבוהה מתוחלת התשואה של מניה A. בהתאם, הציגו באופן עקרוני בתרשימים של צירוף האופקי סטיטית התקן ועל צירוף האנכי תוחלת תשואה, את המקרים האפשריים המציגים את תמהילי ההשענות האפשריים.



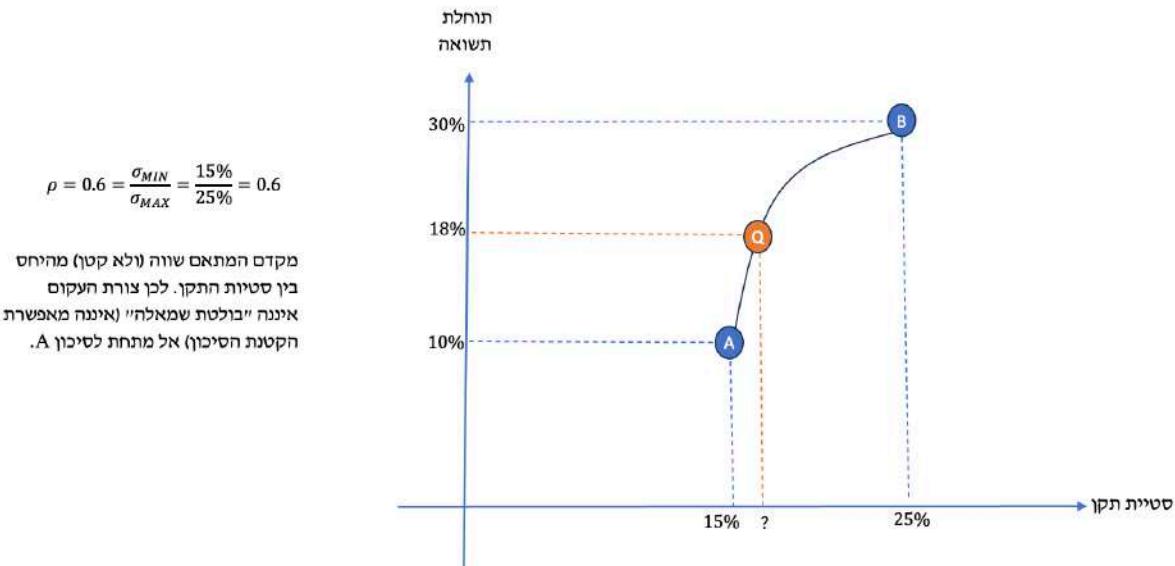
מה בעצם ראיינו כאן? ראיינו שאם קיימים נכסים שנייתן לייצג במערכת הצלרים של תוחלת וסטיטית התקן, האופן שבו ישפיעו שילובי הנכסים על תוחלת התשואה וסטיטית התקן **שאפשרי** להשיג באמצעות השילוב מותנית בערכו של מקדם המתאים (הקשר בין המשתנים). בעוד שתוחלת התשואה תמיד תימצא בין תוחלות התשואה של הנכסים בתיק, את סטיטית התקן (מדד הסיכון) ניתן לפזר (להקטין) אל מתחת לסיכון שני הנכסים, ובבלבד שמקדם המתאים ביניהם ק הוא קטן יותר מהיחס בין סטיטית התקן הנמוכה לבין סטיטית התקן הגבוהה. דיוון זה לא מציג שום דבר לגבי **בחירה המשקיע והעדפותיו**. קודם כל חשוב **שנבין את אופורוויות ההשענה, ובשלב הבא נבנין כיצד בוחרים**.

### שאלה 78

ידוע כי בשוק הhaven קיימות 2 מניות בלבד: מניה A שתוחלת תשואתה 10% וסטיית התקן שלה 15%, ומניה B שתוחלת תשואתה 30% וסטיית התקן שלה 25%. ידוע שמשקיע מעוניין בתיק השקעות בעל תוחלת תשואת של 18%. מהי סטיית התקן של תיק ההשקעות, בהינתן שמדובר המתאים בין תשואות הנכסים הוא 0.6?

פתרון:

נאייר את צורת העקום הרלוונטי בנסיבות המקורה, ונציג עלייה את הנעלם הרלוונטי ("?").



שאלה כמותית זו דורשת לחשב ממש את סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים. הנוסחאות לחישוב תוחלת וסטיית התקן במקומות הבאים (של שילוב שני נכסים מסוכנים):

תוחלת:

$$E(P) = W_A * E(A) + \textcolor{red}{W_B} * E(B) \rightarrow E(P) = W_A * E(A) + (1 - W_A) * E(B)$$

סטיית התקן:

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

נוסחה : תוחלת תשואת תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים היא :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

כאשר :

הערך  $E(P)$  מייצג את תוחלת התשואה של תיק ההשקעות (כאן - P מלשון Portfolio).

הערך  $W_A$  מייצג את משקל ההשקעה בנכס A (האחוז מכיספו שיושקע בנכס A).

הערך  $W_B$  מייצג את משקל ההשקעה בנכס B (האחוז מכיספו המושקע ב - B).

ככלל, בעולם עם שני נכסים בלבד, תמיד מתקיים  $W_A + W_B = 100\%$

הערך  $E(A)$  מייצג את תוחלת התשואה של נכס A.

הערך  $E(B)$  מייצג את תוחלת התשואה של נכס B.

נציב את נתוני השאלה ונקבל :

$$E(Q) = 18\% = W_A * 10\% + \textcolor{red}{W_B} * 30\%$$

אך הואילו :  $W_A + W_B = 100\%$

$$E(Q) = 18\% = W_A * 10\% + (1 - W_A) * 30\%$$

נפשט ונקבל :

$$0.18 = 0.1W_A + 0.3 - 0.3W_A \rightarrow W_A = 0.6 = 60\%$$

והמשמעות : משקיע המעניין בתוחלת תשואת תיק של 18%, ישקיע 60% מכיספו בנכס A ואת שארית כספו קרי 40% בנכס B.

נוסחה : סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$



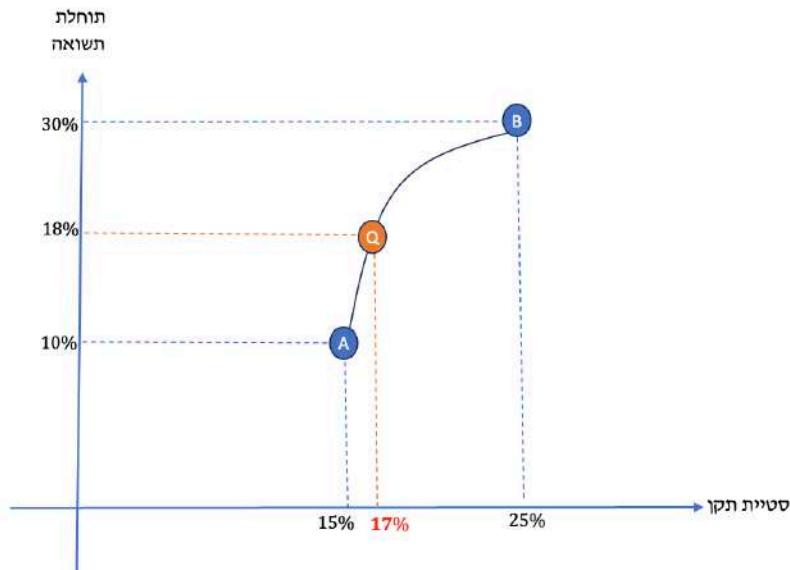
לא נראה מעין, הנוסחה קצרה ארכאה אבל פשוטה להצבה :

המקרה לכל הערכים זהה כמו צג בתחריבים קודמים, למעט  $\rho_{A,B}$  שמייצג את מקדם המתאים בין התשואהות

בשאלה הנדונה ידוע שמקדם המתאים 0.6. כמו כן, דרך נתון תוחלת התקן חילצנו את משקלי ההשקעה. סטיות התקן של הנכסים הבודדים גם הן נתונות, ולכן כל שנותר לעשות הוא להציב :

$$\sigma(P) = \sqrt{0.6^2 * 0.15^2 + 0.4^2 * 0.25^2 + 2 * 0.6 * 0.4 * 0.15 * 0.25 * 0.6} = 17\%$$

המשמעות: בנקודה Q (תיק ההשקעות שבו תוחלת התשואה 18%) סטיית התקן היא 17%.



#### מה למדנו מ שאלה זו (78)?

ראשית, השאלה כללה נתונים מסוימים שעזרו לנו להכיריע בדבר צורת העקומה, בהתאם לדיוון הכללי יותר (הפרמטרי) שנערך בשאלת 77.

שנית, השאלה הציצה בפנינו לראשונה בחיננו את הנוסחאות לחישוב תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוימים. הנוסחאות מציגות את העובדה שתוחלת תיק כזה מושפעת מתוחלתו הנכסיים ושיעור ההשקעה ( $W$ ) בכל אחד מהם, ואילו סטיית התקן של תיק כזה מושפעת מסטיית התקן של הנכסיים ושיעור ההשקעה בכל אחד מהם, אבל גם ממקדם המתאים.

בנוסחאות אלו, שתוצגנה עוד הרבה, אפשר להשתמש גם כדי לחזיב ערכיהם ולמצוא נדרשים, וגם כדי לחלץ את משקלי ההשקעה ( $W$ ) שיובילו לערך סטטיסטי נתון (כأن למשל – רציתי למצוא את משקלי ההשקעה שיובילו לתוחלת נתונה לתיק).

**שאלה 79 – המשמעות של תשואות "בלתי תלויות", ואפיון תיק מינימום סיון**

לפניכם התפלגות התשואה של 2 מניות - יש להניח שהתשואות בלתי תלויות (מקדם מתאם 0) :

תשואה בהסתברות זו	הסתברות	מניה
10%	0.4	A
20%	0.6	
-10%	0.3	B
30%	0.7	

נדרש :

- חשבו את תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל מניה.
- חשבו את תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק המורכב מ-65% השקעה ב-A ו-35% השקעה ב-B.
- (חדש!!!) כמו כן חשבו את מאפייני תיק מינימום סיון (את התוחלת ואת סטיית התקן) שנitin לבנות על בסיס שילוב הנכסים.
- הסבירו איזו מבין חלופות ההשקעה יעדיף משקיע שונאי סיון בהתאם לקריטריון תוחלת-שונות.

פתרון :

**פתרון נדרש א - תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל נכס בנפרד**

$$E(A) = 0.4 * 0.1 + 0.6 * 0.2 = 0.16 = 16\%$$

$$\sigma(A) = \sqrt{0.4 * (0.1 - 0.16)^2 + 0.6 * (0.2 - 0.16)^2} \approx 0.05 = 5\%$$

$$E(B) = 0.3 * (-0.1) + 0.7 * 0.3 = 0.18 = 18\%$$

$$\sigma(B) = \sqrt{0.3 * (-0.1 - 0.18)^2 + 0.7 * (0.3 - 0.18)^2} \approx 0.1833 = 18.33\%$$

סטיית התקן ( $\sigma(R)$ )	תוחלת ( $E(R)$ )	מניה
5%	16%	A
18.33%	18%	B

**פתרון נדרש ב - תוחלת תשואה וסטיית התקן של תיק השקעות המורכב מ-65% בנכס A**

תוחלת :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

$$E(P) = 0.65 * 0.16 + 0.35 * 0.18 = 0.167 = 16.7\%$$

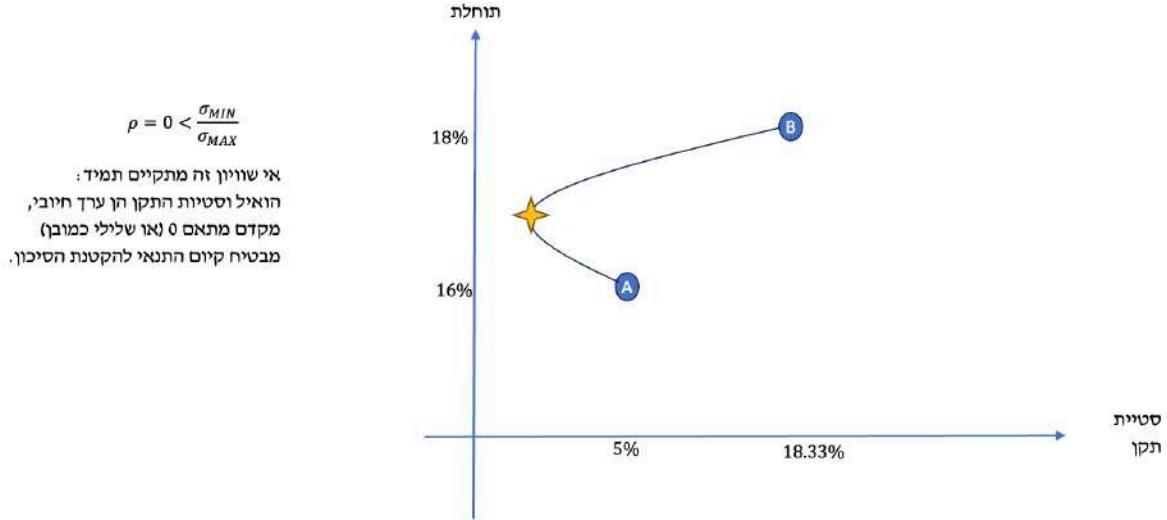
סטטיסטית התתקן :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

$$\sigma(P) = \sqrt{0.65^2 * 0.05^2 + 0.35^2 * 0.1833^2 + 2 * 0.65 * 0.35 * 0.05 * 0.1833 * 0} \approx 7.192\%$$

### פתרונות נדרש ג - תיק מינימום סיכון

כאשר מקדם המתאים קטן מהיחס בין סטיות התקן (וכאן מתקיים, כי מקדם המתאים אפס), אפיון תיק מינימום סיכון דורש יישום נוסחת  $W_A^{MRP}$  (משקל ההשקעה בנכס A - A (Minimum Risk Portfolio



משקל ההשקעה בנכס A בתיק מינימום סיכון הוא :

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B}$$

ב换בנה נקבל את האחוז מכספי המשקיע שיש להשקיע בנכס A כדי להגיע לтик בעל הסיכון המינימלי (זה שמסומן בתרשים לעיל בכוכב) :

$$W_A^{MRP} = \frac{0.1833^2 - 0 * 0.05 * 0.1833}{0.05^2 + 0.1833^2 - 2 * 0 * 0.05 * 0.1833} \approx 0.931 = 93.1\%$$

את שארית כספנו (המשלים ל-100%) נשקיע בנכס B :

$$W_B^{MRP} = 1 - W_A^{MRP} = 1 - 0.931 = 6.9\%$$

כדי לחשב את התוחלת וסטיית התקן של תיק זה :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

$$E(MRP) = 0.931 * 0.16 + 0.069 * 0.18 = 16.138\%$$

סטיית התקן של תיק זה :

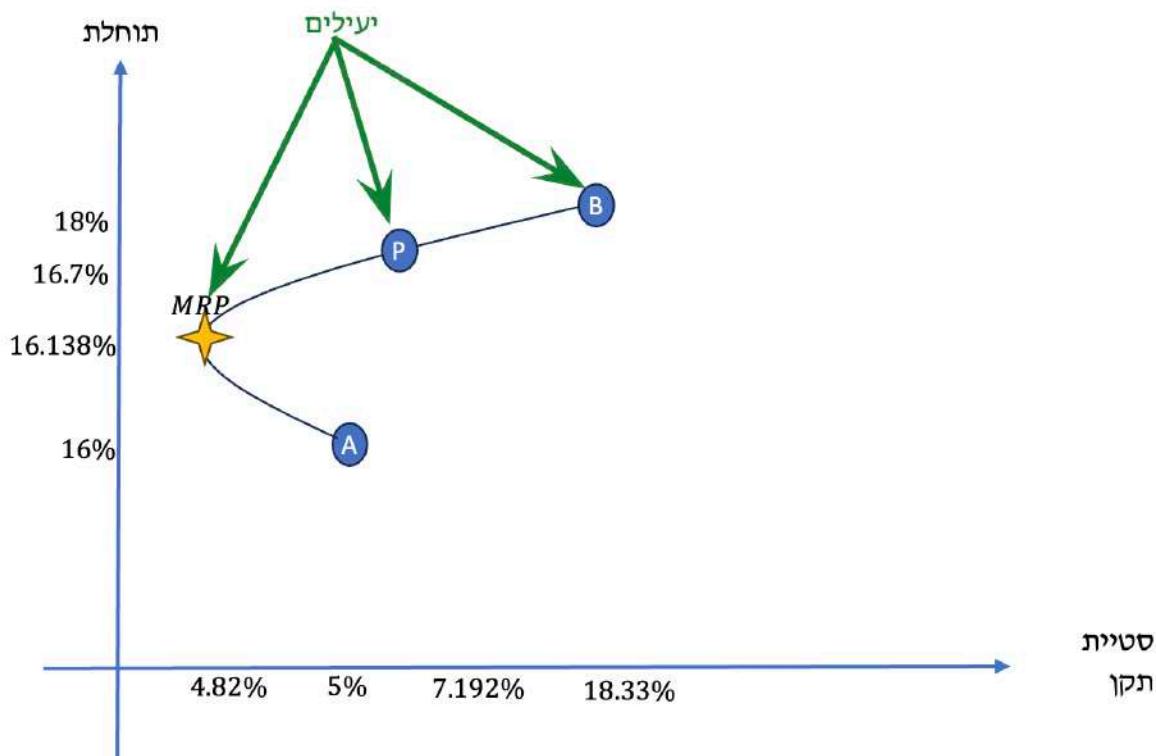
$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

$$\sigma(MRP) = \sqrt{0.931^2 * 0.05^2 + 0.069^2 * 0.1833^2 + 2 * 0.931 * 0.069 * 0.05 * 0.1833 * 0} \approx 4.82\%$$

#### פתרון נדרש ד - בחירת המשקיע

כאשר האיור בידי, וعليו תמהיל ה השקעה האפשריים (כאן - הם P, B, A ו- MRP), משתמש במשפט: תיקי ההשקעות הייעילים שאוותם ישקל המשקיע, מתחילה מתיק מינימום סיכון (כוכב, MRP) וממשיכים ימינה ומעלה.

משכך, נכס A זווהה כנכס נחות. הוא לא יבחר על ידי שונאי סיכון הפועלים לפי קритריון תוחלת שונות. לעומת זאת, לא נוכל להכריע בין תיקי ההשקעות האחרים לפי המודל.



משקיע שונאי סיכון יבחר תמיד באפשרות השקעה יعلاה; בעולם של ניהול תיקי השקעות, אפשרויות ההשקעה הייעילות הן אלו שמתחללות בתיק מינימום סיכון (כוכב) וממשיכות ימינה ומעלה. במלים אחרות, התיקים הייעילים הם כל אלו הנמצאים על אותו חלק של עקום תמהילי ההשקעה שתחלתו בנקודת כוכב וסיום בנקודה B שנמצאת מימין ולמעלה.

הואיל וכל התיקים הללו יעילים, לא ניתן לדעת לא מידע נוסף באיזה מהם ספציפית יבחר המשקיע.

**שאלה 79.1 – שילוב נכסים מסוכנים – והקשר להציג גרפית ויעילות, שאלת תיאורטית לדין נסף**  
 טל הקטנה היא משקיעה שונאת סיכון. היא פועלת בעולם שבו קיימים שני נכסים מסוכנים שנitin להשקיע  
 באחד מהם, או בשילוב כלשהו ביניהם.  
 להלן הנתונים לגבי תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל אחד מהנכסים :

מניה	תוחלת ( $R$ )	סטיית התקן ( $\sigma(R)$ )
A	20%	5%
B	15%	10%

לפניכם מספר טענות :

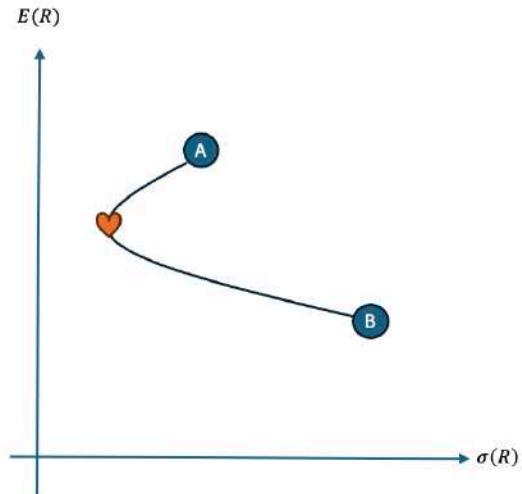
- טענה 1 : אם מקדם המתאים בין הנכסים 0, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו את כל כספם בנכס A, לאור סטיית התקן הנמוכה שלו והתוחלת הגבוהה שלו.
- טענה 2 : אם מקדם המתאים בין הנכסים שלילי, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו בתיק ההשקעות בעל הסיכון המינימלי.
- טענה 3 : אם מקדם המתאים בין הנכסים חיובי, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו את כל כספם בנכס A, לאור סטיית התקן הנמוכה שלו והתוחלת הגבוהה שלו.
- טענה 4 : אם מקדם המתאים בין הנכסים 1+, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו את כל כספם בנכס A.

הטענה / הטענות הנכונה / הנכונות :

- טענה 1 בלבד
- טענה 2 בלבד
- טענה 3 בלבד
- טענה 4 בלבד
- כל הטענות שגויות

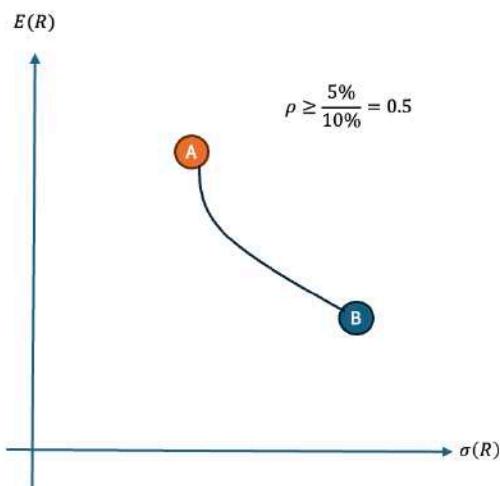
**פתרון:**

התשובה הנכונה היא ד. בעמודים הבאים לגבי כל אחד מהמצבים ובהתחתיותם – דין רלוונטי לשילילה או אישור כל טענה.

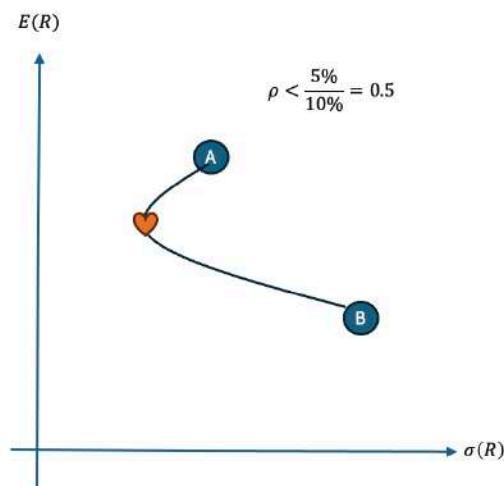


טענה 1: שגואה. המשקיעים שנאוי הסיכון יכולים להימצא בנקודת כלשהו בין נקודות הלב (מינימום סיכון שבחרה מותקינה בהינתן מקדם מותאם אפס) לבין נקודה A.

טענה 2: שגואה. מקדם מותאם שלילי מוביל גם לאפשרות להקטין סיכון (נקודת לב שנמצאת משמאל לשני הנכסים) אבל עדין אפשרויות ההשקעה היעילה כוללות גם את כל חלק העקומה שמשמאלה ולמעלה לנקודת הלב.

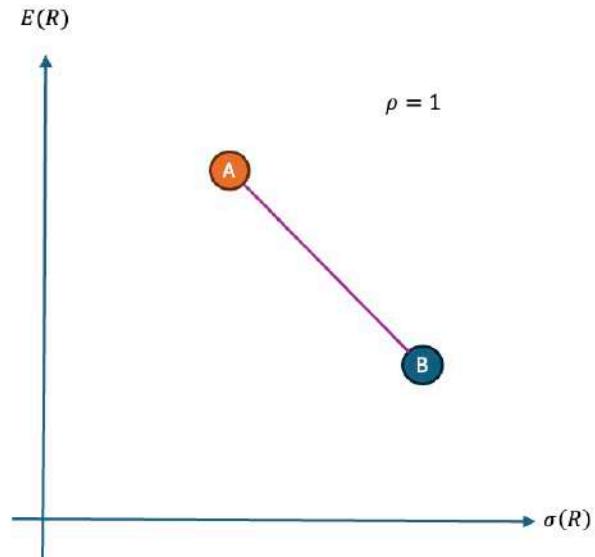


אם מקדם המתאים חיובי אך גדול שווה ליחס בין סטיות התקן (וכאן לא נוכל לדעת לבטח שאכן זה המצב) אז אכן ההשקעה היעילה היחידה הינה כוללת 100% בנכס A. במקרה זה - לא נוכל לומר זאת.



אם מקדם המתאים חיובי אך עודנו קטן מהיחס בין סטיות התקן (ובשאלה אין תנאים שייעורו להכריע בנסיבות) אז נמשיך להיות במצב שבו כל תיקי ההשקעות מנקודות הלב עד וככל נקודה A ייעילת. לא נוכל להגיד שرك A יבחר.

דיון בטענה 3: לא יודעים באיזה "תת מקרה" אני נמצא, ולכן לא ניתן להכריע ולאשר את הטענה



דיוון בטענה 4: כאשר מקדם המתאים בין הנכסים הוא  $+1$ , לא זאת בלבד שאי אפשר להקטין סיכון, עקום תמהילי ההשקעה האפשריים הוא הקו הישר המחבר בין הנכסים. ספציפית במקרה זה, אפשר לראות שעוקום תמהילי ההשקעה שנוצר כולל נקודות מינימום סיכון אחת (A) שאין אף נקודה שנמצאת מימין ולמעלה ממנה. במלים אחרות נקודה A (ההשקעה של 100% ב-A) היא הנקודה היעילה היחידה, וכל שונאי הסיכון יבחרו בה. הטענה נכונה.

## שאלות מבחנים בנושא תיקי השקעות המורכבים משני נכסים מסוכנים

### שאלה 12 – שאלון בחינה 25

#### שאלה 12

שוק ההון נסחרים נכסים A ו-B. ידוע כי:

$$E(R)_B > E(R)_A$$

$$\sigma(R)_B > \sigma(R)_A$$

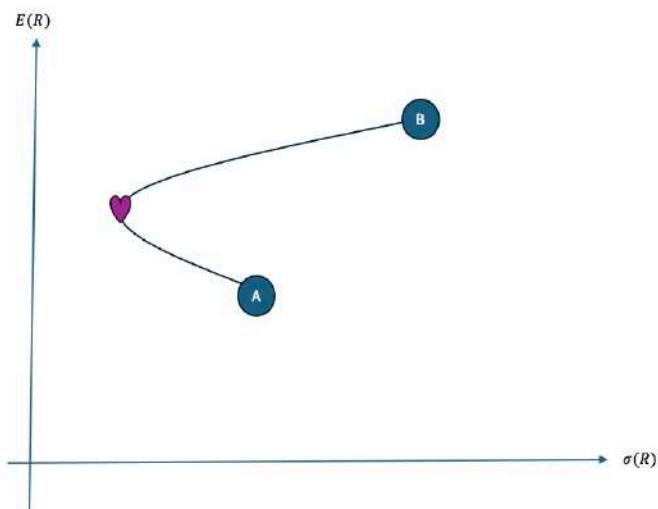
מקדם המותאם בין הנכסים (A ו-B) נמוך מ-0.

משקיע דוחה סיכון יכול להשקיע בכל אחד מהנכסים הללו או בשילוב שלהם.

**מהי הקביעה הנכונה?**

- המשקיע בחר להשקיע בתיק המורכב משני הנכסים (A ו-B), במטרה לצמצם סיכון.
- המשקיע עשוי לרכוש את כל השקעותו בנכס B המסוכן יותר, למטרות סיכון הגובה.
- המשקיע עשוי לרכוש את כל השקעותו בנכס A הפתוח מסוכן, במטרה לצמצם סיכון.
- המשקיע בחר רצוי את כל השקעותו בנכס A הפתוח מסוכן.
- תשובות ב-1-ד נכונות.

**התשובה ב. להלן פירוט:**



עוקם תמהיל ההשקעה הייעילם בהינתן האפשרות להקטין סיכון (בטן / פופיק) הנובעת בבחירה מעוקם מקדם מתואם קטן מ-0 - הוא מינוחת הלב עד וככל נקודה B.

**טענה ב:** נכון, כשלורטוט "המשקיע עשוי לבחרו" בעקבות מותאים אפשרויות השקעה וUILAH בפni עצמה. ואכן, השקעה ב-100% ב-B היא UILAH (למטרות שאיננהUILAH היחידה) ולכן יש מבחן שתהבחר.

**טענה :** על פי הטענה, התיקים היעילם בהם יבחר מושקיע הם ככל הוללים שילוב בין A ל-B. במלים אחרות - הטענה אומתת שההשקעה של 100% ב-B-A איננהUILAH וגם השקעה ב-100% ב-B לאUILAH. טענה שווה והאילוג גם השקעה של 100% ב-B שאיננה משלבת בין הנכסים היאUILAH.

**טענה ד:** שגوية. מאותה סיבה ששילוטו את ג', שלול את ד'.

**טענה ג:** שגوية. השקעה ב-100% של A היא מוחץ לטוח התיקים היעילם שכאמור מתחילה בנקודת החלב וממשיך ימינה ומעלה לכיוון נכס B.

**טענה ח:** שלול, שללו את ד'.

## שאלה 13 – שאלון בחינה 25

### שאלה 13

לניירות ערך  $A$  ו-  $B$  הנתונים הבאים :

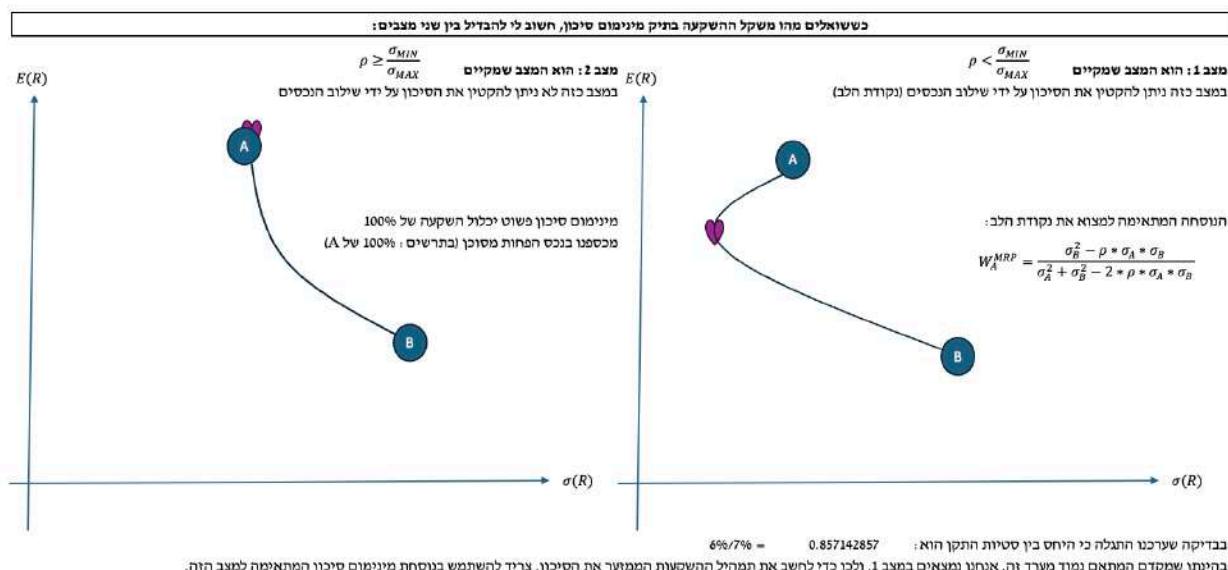
$A$ ני"ע	$B$ ני"ע
19%	15%
6%	7%
$\rho(R_A, R_B) = 0.665$	מקדם המתאים

המשקלות של תיק השקעות בעל סיכון מינימלי המורכב משני הנכסים :

- א. 55% -  $B$  ; 45% -  $A$
- ב. 28% -  $B$  ; 72% -  $A$
- ג. 45% -  $B$  ; 55% -  $A$
- ד. 86% -  $B$  ; 14% -  $A$
- ה. 72% -  $B$  ; 28% -  $A$

פתרון :

התשובה היא ! להלן דיוון כללי – כיצד מוצאים משקלים השקעה בתיק מינימום סיכון במצביים שונים :



ציב בנוסחה המתאימה ל McKee 1 :

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B} = \frac{0.07^2 - 0.665 * 0.06 * 0.07}{0.06^2 + 0.07^2 - 2 * 0.665 * 0.06 * 0.07} = 0.723 \approx 72\%$$

משקל ההשקעה בנכס  $B$  במצב כזה יהיה הערך המשלים ל-100% קלומר : 28%

## שאלה 14 – שאלון בחינה 24

### שאלה 14

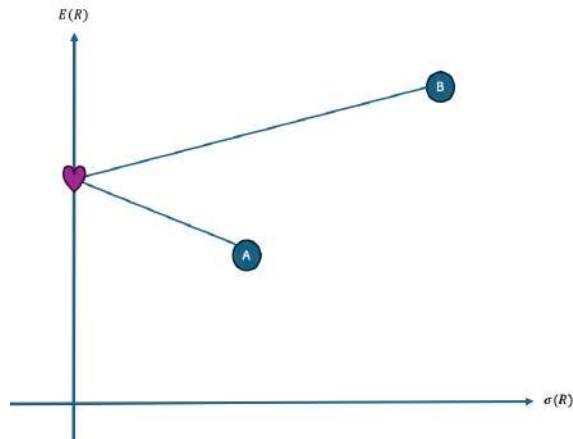
בנהנעה שבסוק ההון נסחרים שני נכסים  $A$  ו- $B$ :  
 תוחלת התשואה של  $A$  שווה ל-5% עם סטיית תקן של 2%. תוחלת התשואה של  $B$  שווה ל-10% עם סטיית תקן של 3%.  
 בהנחה שמקדם המתאים בין שני הנכסים שווה ל-(-1), **ביצד נציג תיק השקעות חסר סיכון?**

- א. התיק יהיה מושקע 40% בנכס  $A$  ו-60% בנכס  $B$ .
- ב. התיק יהיה מושקע 30% בנכס  $A$  ו-70% בנכס  $B$ .
- ג. התיק יהיה מושקע 60% בנכס  $A$  ו-40% בנכס  $B$ .
- ד. התיק יהיה מושקע 91% בנכס  $A$  ו-9% בנכס  $B$ .
- ה. רק על-ידי השקעה בנכס חסר סיכון (Rf).

**פתרון:**

התשובה ג.

הוائل וננו שמקדם המתאים בין הנכסים הוא -1, אכן ניתן לאפס את הסיכון על ידי בנייה נכונה של תיק השקעות – למעשה, תיק מינימום סיכון בהינתן מקדם מתאים מינוס אחד, תמיד מוביל לסיכון 0:



ולכן מקבלים:

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B} = \frac{0.03^2 - (-1) * 0.02 * 0.03}{0.02^2 + 0.03^2 - 2 * (-1) * 0.02 * 0.03} = 0.6 = 60\%$$

ובשפה פשוטה: משקל ההשקעה בנכס  $A$  בתיק מינימום סיכון הוא 60% ואילו משקל ההשקעה בנכס  $B$  בתיק מינימום סיכון הוא 40%.

**שאלון 22 – שאלה 15** **שאלה 15**

לפניכם הנתונים הבאים:

נ"י"ע B	נ"י"ע A	
8%	15%	תוחלת התשואה
10%	20%	סטטיסטית התקן

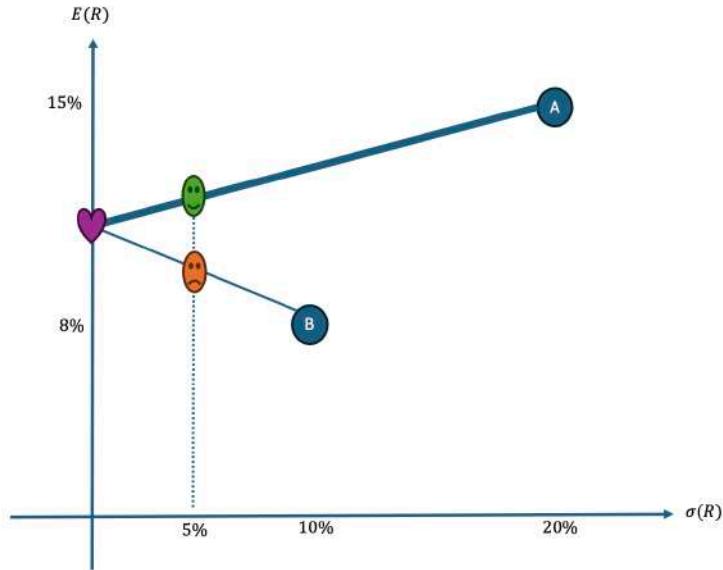
משקיע בונה תיק המשלב בתוכו את נ"י"ע A ו- B, כאשר מקדם המתאים בין תשואות המניות שווה ל- (1-). המשקיע מעוניין להשקיע **יעיל**, עם סטטיסטית התקן של 5%.

מהי **תוחלת התשואה של התקין?** (התשובות מופיעות ברמת דיווק של סירה אחת לאחר הנקודה)

- א. 13.7%
- ב. 9.2%
- ג. 11.5%
- ד. 10.3%
- ה. תשובות ב ו-ג נכונות.

**פתרון:**

בשאלה זו, איזור נכוון לבחיר בפנינו שלמעשה קיימים שני תики השקעות שモביילים לסטטיסטית תקן של 5%. מתוכם, רק אחד יהיה יעיל. כפי שנווכל לראות באיזור בעמוד הבא, הנקודת הירוקה שהיא הקרויה יותר ל-A כלומר, זו המאפיינת במשקל השקעה גבוהה יותר בנכס A היא היעילה מבין השתיים, והיא מסומנת בסמיילי ירוק.



נוסחת סטטיסטית התקן לתיק השקעות המורכב מ-2 נכסים מסוכנים היא :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho}$$

בhzבבה :

$$0.05 = \sqrt{W_A^2 * 0.2^2 + (1 - W_A)^2 * 0.1^2 + 2 * W_A * (1 - W_A) * 0.2 * 0.1 * (-1)}$$

העלאת שני האגפים בריבוע :

$$0.05^2 = W_A^2 * 0.2^2 + (1 - W_A)^2 * 0.1^2 + 2 * W_A * (1 - W_A) * 0.2 * 0.1 * (-1)$$

מאל מגuil לפתח משווה כזו, אבל אם עושים זאת מגלים :

$$W_A(1) = 0.5; \quad W_A(2) = 0.1667$$

הערך ש כולל משקל גבוהה יותר ב-A מנצח, מה שモוביל למסקנה שלפיה :

$$E(P) = 0.5 * E(A) + 0.5 * E(B) = 0.5 * 0.15 + 0.5 * 0.08 = 0.115 = 11.5\%$$

ולכן התשובה ג.

ומה לגבי פיתוח פחות מגעיל, ד"ר צבאן?

כשמדובר המתאים הוא 1-, נוסחת סטיית תקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים עונה להגדרות הבאות:

$$\sigma(P) = |W_A * \sigma_A - W_B * \sigma_B|$$

ונס:

$$\sigma(P) = |W_B * \sigma_B - W_A * \sigma_A|$$

נציב בכלל אחת ממשוואות אלו את סטיית התקן הנזונה שהוא 5% :

$$0.05 = |W_A * 0.2 - (1 - W_A) * 0.1| \rightarrow W_A = 50\%$$

$$0.05 = |(1 - W_A) * 0.1 - W_A * 0.2| \rightarrow W_A = 16.67\%$$

במצב כזה, גם בלי הפנייה הריבועי המסרייה, הצלחנו למצוא את שתי הנקודות החשודות, והואיל ואנו יודעים שהנקודה הקטנה יותר ל-A היא היעילה – סיימנו.

הערך שכולל משקל גובה יותר ב-A מנצח, מה שמוביל למסקנה שלפיה :

$$E(P) = 0.5 * E(A) + 0.5 * E(B) = 0.5 * 0.15 + 0.5 * 0.08 = 0.115 = 11.5\%$$

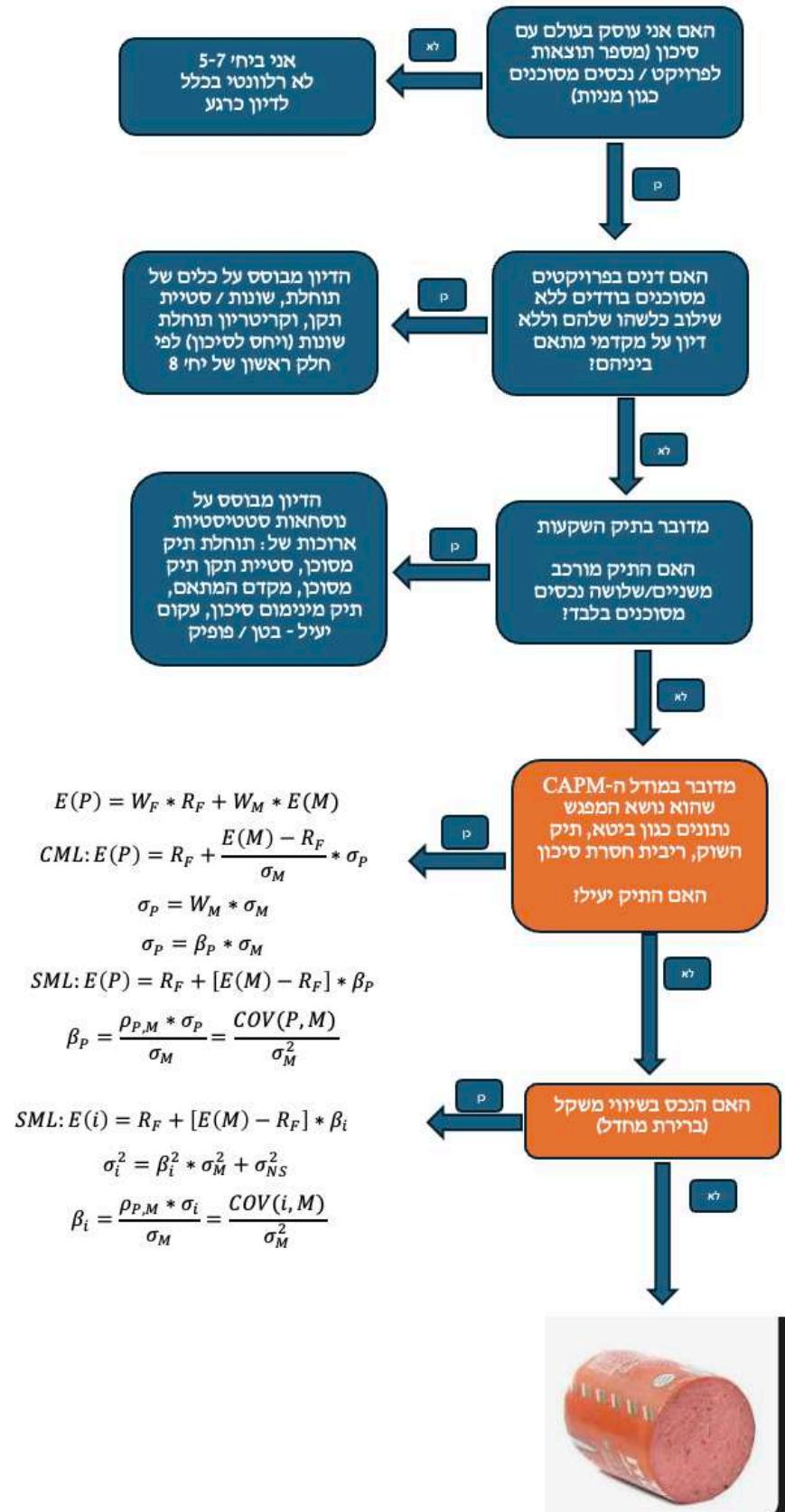
ולכן התשובה ג.

### מודל חדש (אחרון וננק) לניהול תיקי השקעות - מודל ה - CAPM

המודל שהציגנו בחלק הראשון של השיעור, שדן בתיקי השקעות הכלולים במסוכנים בלבד (ובדרך כלל - שני במסוכנים בלבד) הוא מודל פשוטני. הוא מניח שלא קיימים בעולם נכסים חסרי סיכון (כגון אגרות חוב ממשלתיות), וכן כי לא ניתן ליטול הלוואות - כמובן, המשקיע מוגבל להשקעת הונו הראשוני בלבד. בעולם האמיתי - ישנים גם במסוכנים, ובנוספ' - בהחלטת ניתן ליטול הלוואות לטובת מימון השקעות. כדי לכלול אפשרות אלו במודל באופן מלא, אנו נעסוק במודל בגרסת המורחבת - מודל ה - CAPM, ראשי התיבות של : Capital Asset Pricing Model

הנחות מודל ה - CAPM :

- א. כל המשקיעים שונאי סיכון.
- ב. ניתן להפיקד / להשקיע כל סכום בנכס חסר סיכון. תשואתו של נכס חסר סיכון מסומנת ב-  $R_F$ .
- ג. ניתן ללוות כל סכום בריבית חסרת סיכון.
- ד. כאשר משקיעים מעוניינים לסכן חלק מהתיק - הם יشكיעו אותו בתיק מסוון שנקרא "תיק השוק" ואשר מסומן באות  $M$ . למשל, בשוק הישראלי, המקבילה לתיק השוק היא מודד ת"א 135, שמכיל את המניות הגדולות במשק הישראלי, בפייזור רחב שמקטין סיכון. בשאלות שאנו נפתחו, תיק זה יהיה נתון או מחולץ (לא נצטרך לחשבו במישרין).



$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M$$

$$SML: E(P) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_P$$

$$\beta_P = \frac{\rho_{P,M} * \sigma_P}{\sigma_M} = \frac{COV(P, M)}{\sigma_M^2}$$

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

$$\beta_i = \frac{\rho_{P,M} * \sigma_i}{\sigma_M} = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

בעולם המקיים את הנחות ה - CAPM, علينا לאפיין את עיקום תיקי ההש侃ות היעילים:

#### נוסחת משקל ה השקעה בתיק ייעיל - במודל ה - CAPM

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

כאשר :

הערך  $E(P)$  הוא תוחלת התשואה של תיק ייעיל בהנחות המודל.

הערך  $W_F$  הוא השיעור (האחוז) מכספי המשקיע שמושקע בנכס חסר סיכון. המצביעים האפשריים לגבי ערכי משתנה זה הם :

$W_F > 0$  המשקיע מנתב חלק מכיספו בנכס חסר סיכון.

$W_F = 100\%$  המשקיע מנתב את כל כספו לנכס חסר סיכון.

$W_F < 0$  המשקיע נוטל (לוקח) הלוואה בריבית חסרת סיכון.

הערך  $R_F$  מהווה את הריבית חסרת הסיכון, בדרך כלל נתונה / מוחלצת.

הערך  $W_M$  הוא השיעור (האחוז) מכספי שמושקע בתיק השוק (התמהיל המסוכן האידאלי בהנחות המודל).

תמיד מתקיים ש :

הערך  $E(M)$  הוא תוחלת התשואה של תיק השוק.

#### נוסחת תוחלת תיקים ייעילים במודל ה - CAPM - קו ה - CML

המושג CML מהווה את ראשית התיבות של Capital Market Line. קו שוק ההון. זהו תיאור גרפי שמייצג את הקשר בין רמת הסיכון בנכסים ייעילים לפי המודל (סטטיסטית התקן) לבין תוחלת התשואה.

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

כאשר :

הערך  $\sigma_M$  מהווה את סטטיסטית התקן של תיק השוק. בדרך כלל נתון או מוחלץ.

הערך  $\sigma_P$  מהווה את סטטיסטית התקן של התקן הייעיל.

#### נוסחת סטטיסטית התקן של תיק ייעיל - במודל ה - CAPM

הויאל ותיק ייעיל במודל ה - CAPM מורכב רק משילוב נכס חסר סיכון  $R_F$  שסיכוןו  $\sigma^0$ , וمتיק השוק שסיכוןו

$\sigma_M$ , הרי שסטטיסטית התקן של תיק ייעיל מושפעת מהשיעור המשקיע בתיק השוק - ומסיכון השוק :

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

### **נוסחה נוספת לסטטיסטיקת תקן של תיק ייעיל - מבוססת ביתא - במודל ה - CAPM**

ביטה היא מודד סיכון הבוחן את הסיכון היחסי של התקיק ביחס לשוק. כאשר התקיק ייעיל, ניתן להיעזר בנתון הביטא כדי לחשב את סיכון התקיק כדלקמן :

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M$$

כאשר :

הערך  $\beta_P$  הוא ערך של פירוב לא מחשבים ישירות (אלא נתון / מחולץ) והוא משקף את הסיכון היחסי של תיק ייעיל ביחס לשוק. כלומר : ביטה גדולה מ-1 משמעה "התיק מסוכן יותר מהשוק", וביטה קטנה מ-1 משמעה "התיק מסוכן פחות השוק", וביטה שווה ל-1 משמעה "התיק מסוכן כמו השוק".

**שאלה 80 - שאלת בסיסית לחילוץ ערכאים בגין תיקים עילאים - CAPM**  
 בשוק הון המקיימים את הנחות מודל ה - CAPM, נ驰רים שני תיקי השקעות עילאים : A ו- B. להלן נתונים רלוונטיים :

הרביה חסרת סיכון היא 5%.

תוחלת התשואה של תיק השוק היא 10%, וסטיית התקן של תיק השוק היא 20%.

ידוע שתוחלת התשואה של נכס A היא 15%, וסטיית התקן של נכס B היא 8%.

נדרש :

א. מהי סטיית התקן של נכס A?

ב. מהו הריבב ההשקעות של נכס A (איזה חלק מכיסי המשקיע מושקע בנכס חסר סיכון, ואיזה חלק מושקע בתיק השוק)?

פתרון :

#### פתרון סעיף א

לפי תרשימים הזרימה שהגדנו, מדובר במודל ה-CAPM, בעולם עם עילות. את סטיית התקן של נכס עיל במודל ה - CAPM אפשר לחשב בכמה דרכים :

חילוץ מנוסחת ה - CML, בהנחה וכל הנתונים פרט לסטיית התקן של התקיק - נתונים.

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

כאשר :

ערך בשאלת	הגדירה	סימון
$E(P_A) = 15\%$	תוחלת תשואה של תיק CAPM portfolio עיל ב- $E(P)$	
$R_F = 5\%$	ריבית חסרת/נטולת סיכון (אג"ח ממשלתית)	$R_F$
$E(M) = 10\%$	תיק השוק (שילוב אידיאלי של נכסים מסוכנים)	$E(M)$
$\sigma_M = 20\%$	סטיית התקן של תיק השוק	$\sigma_M$
$\sigma_{P_A} = ?$	סטיית התקן של התקיק העיל ב- $CAPM$	$\sigma_P$

$$CML: 15\% = 5\% + \frac{10\% - 5\%}{20\%} * \sigma_{P_A} \rightarrow \sigma_{P_A} = 40\%$$

## פתרונות סעיף ב

בבhinתן ערכי סטטיסטיק התקן וגם התוחלת של התקיק, דיוון בהרכב של התקיק השקעות יעל משמעו תשובה לשאלת פשוטה: איזה אחוז מהתקיק מושקע בנכס חסר סיכון  $R_F$  ואיזה אחוז מהתקיק מושקע בתיק השוק שתוחלתו היא  $E(M)$ ?

קיימות נוסחה ספציפית שמודעת לקשר בין משקליה ההשכעה בנכס חסר סיכון (ה אחוז מכיספי המשקיע שמושקע בנכס חסר סיכון -  $W_F$ ) ואחוז משקל ההשכעה בתיק השוק  $W_M$  בין תוחלת התקיק היעיל שבנוי לפי משקלים אלו – בbhinתן שהוא תיק ייעיל במודל CAPM:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

נדיר ונציב את הנתונים הרלוונטיים:

סימן	הגדרה	ערך בשאלת
$E(P)$	תוחלת תשואה של תיק Portfolio ייעיל ב-CAPM	$E(P_A) = 15\%$
$R_F$	ריבית חסרת/נטולת סיכון (אג"ח ממשלתית)	$R_F = 5\%$
$E(M)$	תיק השוק (שילוב אידיאלי של נכסים מסוכנים)	$E(M) = 10\%$
$W_F$	ה אחוז מכיספי המשקיע המושקע בנכס חסר סיכון אם $0 < W_F$ המשמעות היא שהמשקיע לוקח הלוואה	$W_F = ?$
$W_M$	ה אחוז מכיספי המשקיע המושקע בתיק השוק	$W_M = 1 - W_F = ?$

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

$$15\% = W_F * 5\% + (1 - W_F) * 10\% \rightarrow W_F = -1 = -100\%$$

המשמעות: המשקיע נוטל הלוואה בשיעור של 100% מההוון העצמי, ומשקיע את ההוון ההתחלתי בתוספת כספי הלוואה (200%) בתיק השוק.

אפשר לשים לב שמעבר לחישוב הטכני, הרי המשקיע הצליח להגיע כאן לתוחלת תשואה שבווהה יותר מתוחלת השוק. הדרך היחידה לעשות כן היא ליטול הלוואה!



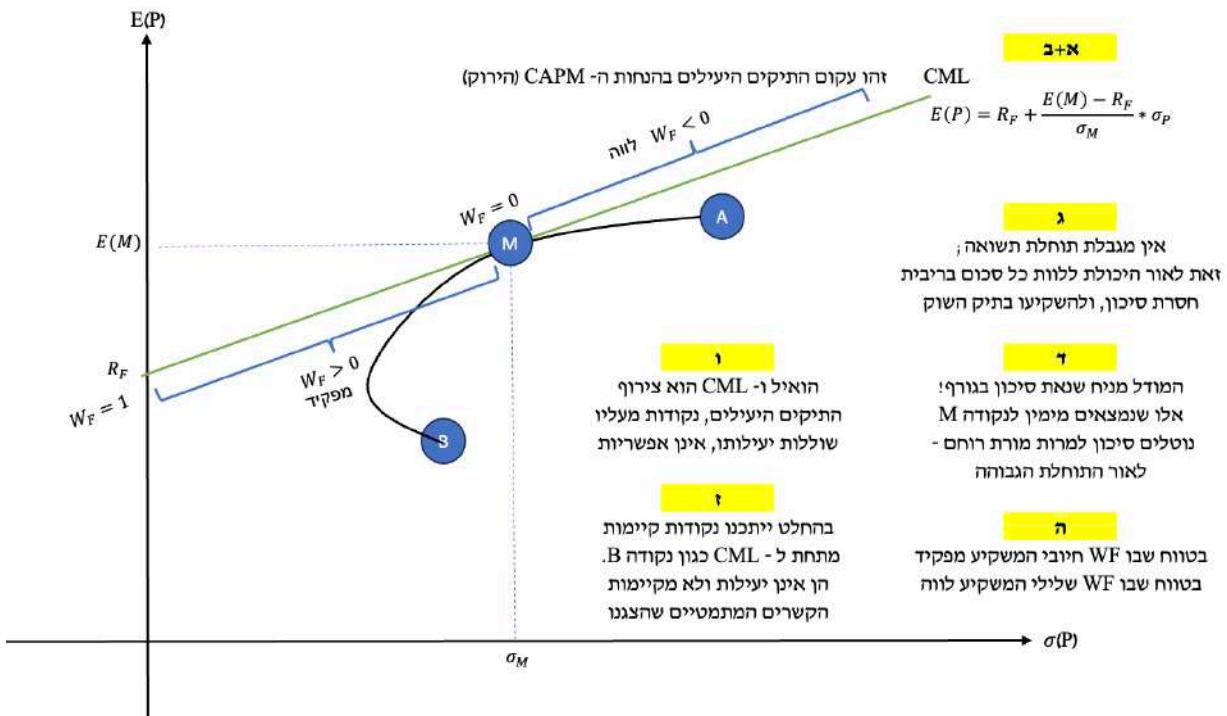
### שאלה 81 - הצגה גרפית בסיסית של העקום הייעיל - CAPM

- א. הציגו באופן גרפי את עקום התיקים הייעילים בעולם המקיים את הנחות ה- CAPM.
- ב. מקמו על גבי העקום את תיק השוק ואת הנכס חסר הסיכון.
- ג. האם תוחלת התשואה לפי המודל מוגבלת? הסבירו.
- ד. האם משקיע הנמצא מימין ומעל לנקודה M על העקום הוא משקיע אוהב סיכון? נמקו.
- ה. באיזה טווח על גבי העקום המשקיע נח呼ב "לוה", ובאיזה טווח נח呼ב "מפרקיד"?
- ו. האם יתכנו נקודות מעל ה- CML?
- ז. האם יתכנו נקודות מתחת ל- CML?

**פתרון נדרש א:**

הציגנו שבעולם ה- CAPM שבו ניתן להפיקד וללווות בריבית חסרה סיכון, התיקים הייעילים כוללים שני חלקים - נכס חסר סיכון המסומן RF, ואת תיק השוק המסומן באות M. כל התיקים הייעילים מצויים על הקו הישר המחבר בין אפשרויות השקעה אלו, מה שמייצג את העובדה שמשקיעים יכולים לחלק את כספם כראות עיניהם בין נכסים חסרי סיכון לבין תיק השוק בהתאם.

בעמוד הבא - מוצג התרשים המבהיר צורתו של ישר תיקי ההשקעות הייעילים במצב כזה, ואפיונים רלוונטיים מתאימים.

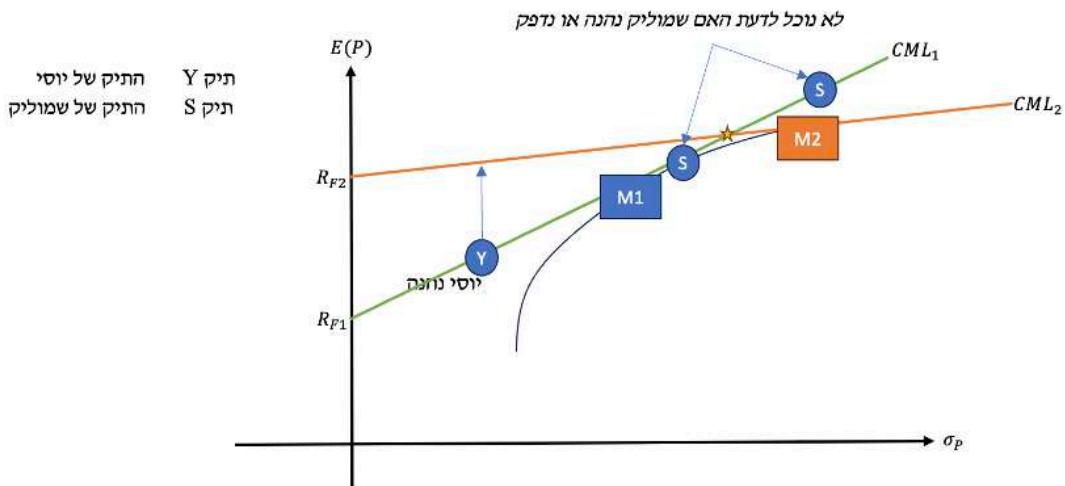


**שאלה 82 - שינוי בריבית חסרת סיכון והשפעתו על משקיע הבוחר בתיק ייעיל (פינה... להמשך...)**  
 בעולם המקיים את הנחות ה - CAPM יש להניח קיומים של שני משקיעים: שמוליק (S) וヨוסי (Y). יוסי משקיע בתיק ייעיל שתוחלת תשואה נמוכה מתוחלת התשואה של תיק השוק, ושמוליק משקיע בתיק ייעיל שתוחלת תשואה גבואה מתוחלת התשואה של תיק השוק.

נדרש :

- הציגו על גבי קו ה - CML את מיקום התיקים של שמוליק ושל יוסי.
- הניחו כתה כי חלה עלייה בריבית חסרת הסיכון. הציגו את נקודת החיתוך שבין עקום ה - CML החדש ובין עקום ה - CML המקורי (באופן סכמטי, אין צורך בערכאים מספריים).
- מה תוכלו לומר על השינוי במצבם של המשקיעים (משתפר / מורע)? נמקו.

- א. קו ה - CML ה"מקורי", היוצא מריבית חסרת סיכון מקורי  $R_{F1}$  וועבר דרך תיק שוק מקורי  $M_1$  הוא קו ה - CML הירוק. על גבי קו זה, התיק של שמוליק (S) נמצא מימין ולמעלה ביחס לתיק השוק (בנקודה S הימנית או S השמאלית, לא אדע כי לא ברור עד כמה הוא מימין לתיק השוק) והתיק של יוסי נמצא משמאל ולמטה ביחס לתיק השוק (נקודה Y).
- ב. כאשר חלה עלייה בריבית חסרת סיכון מ-  $R_{F1}$  ל-  $R_{F2}$  אז העוקם המשקף את תמהילי ההשקעה היעילים משתנה ל-  $CML_2$ . הוא חותך את העוקם המקורי ויוצר נקודת השקעה חדשה וימנית יותר עם גראן הנכסים המסוכנים: תיק השוק הוא בתוחלת וסיכון גבויים יותר.
- ג. לעניין מצב המשקיעים, יש לדון בכל משקיע בנפרד: יוסי, שהשקיע במקור בתיק בעל סיכון נמוך משל השוק, מקבל כעת יכולת לשפר את מצבו (תנוועה בכיוון החץ הכהול כלפי מעלה) ולמעשה להגדיל את תוחלת תשואתו ללא שינוי בסיכון, ומcean - שמצוותו משתפר בהכרח.
- לעומת זאת, השינוי במצבו של שמוליק יותר: אם הוא היה מצוי במצב המוצע בנקודה "קרובה"  $M_1$ , איזי מצבו משתפר (כפי עדין עוקם ה - CML עובר מעליו, ומאפשר לו תוחלת גבוהה יותר באותו תיק). אם לעומת זאת הוא מצוי בנקודה "רחוקה" מ-  $M_1$ , וספציפית כזו שהיא מימין לנקודת החיתוך שנוצרה בין עוקמי ה - CML (לפניהם ואחריהם השינויי) הרי שייאlez להסתפק בתוחלת נמוכה יותר עברו רמת הסיכון שנטול, והמשמעות היא שהוא נפגע.
- ואם כך, בשורה התחתונה: מצבו של יוסי משתפר, ולא ניתן לקבוע חד משמעותית מה יקרה במצבו של שמוליק.



**שאלה 1- 82. קווון ותיקים יעילים במודל CAPM**  
 **בשוק הון המקיימים את הנחות CAPM ידועים הנתונים הבאים :**

סימן	ערך מספרי	נתון
$R_F$	8%	ריבית חסרת סיכון
$E(M)$	18%	תוחלת תשואה תיק השוק
$\sigma_M$	20%	סטיית התקן של תיק השוק
$E(P_A)$	15%	תוחלת תשואה תיק יעיל A
$E(i)$	20%	תוחלת תשואה מניה B

נדרישים :

- ממי סטיית התקן של תיק A?
- אם ניתן לומר שמשקיע שבורח בתיק A הוא אוהב סיכון, שהרי יוכל במקומות זה להשקיע בריבית חסרת סיכון?
- אם ניתן לחלץ מהנתונים את סטיית התקן של מניה B? מדוע?
- משה קופרמן טוען: "בהתאם לנחותי השאלה, ניתן להניח אפילו תוחלת תשואה של 80% לשנה". לעומת זאת, טענת מיטל ב: "אין מצב. תוחלת התשואה של תיק השוק, שהוא התקן המ██וכן ביותר, היא 18%. אי אפשר לעקוף אותה". חוו דעתכם ונמקו.

פתרון :

סעיף א - מהי סטיית התקן של תיק A?

$$E(P_A) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_{P_A}$$

ובהצבה :

$$15\% = 8\% + \frac{18\% - 8\%}{20\%} * \sigma_{P_A} \rightarrow \sigma_{P_A} = 14\%$$

סעיף ב - האם הבחירה להסתכן מעידה על אהבת סיכון?

התשובה שלילית. נטילת סיכון בהקשר לתייקים יעילים מובילה לתוחלת תשואה גבוהה יותר. הבחירה של משקיע בתיקים מסוכנים יעילים מבוצעת **למרות הסיכון**, ולא בגללו. המשקיע שונא סיכון – פשוט "פחות שונא סיכון" משקיעים שבורחים להסתכן פחות ממנו.

סעיף ג – היכולת לחלץ נתונים בגין נתוני נכס בודד שלא אמרו דבר על יעילותו

יעילות איננה ברירת מחדל. כאשר נתונים בנכש בודד (ואפלו בתיק) ואין אזכור לעילותו, לא נוכל להניח שהוא יעיל ובהתאם, לא נוכל לבצע שימוש במשוואות תיקים יעילים כדי לחלץ ערכיהם חסרים. בפשטות – עצם הידיעה של תוכלת התשואה של נכס (שאין מידע מפורש בדבר יעילותו) לא תאפשר לחלץ את סטיית התקן שלו.

#### סעיף ד – היעדר הגבול העליון לתוכלת התשואה ב- CML

לפי המודל (CAPM) אין מוגבלה להיקף ההלוואות שניתנו ליטול בריבית חסרת סיכון ולהשקיען בתיק השוק. מסיבה זו בדיק אין מוגבלה לתוכלת התשואה המריבית שניתנו להגעה אליה בהשקעה בתיקים יעילים בכפוף למודל. הערכה: זה לא אומר בשום צורה ואופן שבדאי להגדיל את התשואה; הרוי המשמעות היא גם עלייה בסיכון. משה צודק.

## נכיסים שאינם מהווים תיקים יעילים במודל ה- CAPM וקו ה SML

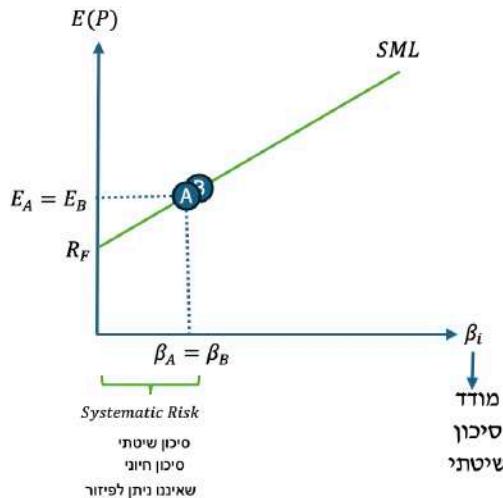
כל המשקיעים צריכים לבחור בתיקים יעילים ; אבל כל תיק יעיל מורכב מרכיבים שאינם יעילים בפני עצם ; איך דנים בהם ?



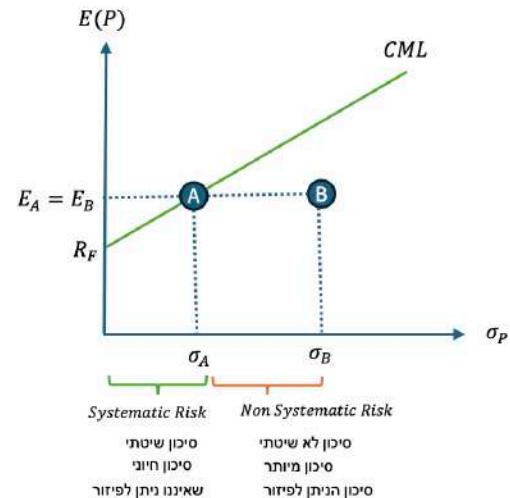
- בסוף המפגש הקודם הצגנו במסגרת מודלה - CAPM מגוון רחב של נוסחאות שמאפייניות את הקשרים המתמטיים שמקיימים תיקים יעילים במודל.
- יעילות תיקים / נכסים אינה ברירת מחדל ; במלים אחרות, אם אני קורא שאלת בעולם ה- CAPM שבה מספרים לי על מגוון נכסים, לא אוכל להניח (ברירת מחדל) שהתיקים יעילים, ובהתאם - לא אוכל להשתמש אוטומטית בנוסחאות המתמטיות שהוצעו בהקשר זה.
- אם התקים (או הנכסים) הנדונים בשאלת כולם או חלקם אינם יעילים, ועלוי לבצע חישובים רלוונטיים הקשורים לתוכחותם, הסיכון הגלום בהם וכו', מתקיימת מערכת קשרים מתמטית אחרת (שונה) לאפיון תוכחת תשואתם וסיכוןם. מערכת קשרים שקובעת את מאפייני התקיק לפי רמת הסיכון השיטתי (ביטה) הגלומה בו, ולא לפי הסיכון הכלול (סטטיסטית תקן).

**אם התקיק יעיל - ב CAPM = קשר חד משמעי, מתמטי, בין סיכון (סטטיסטית תקן) לתוכחת.**  
**אם התקיק איננו יעיל = קשר בין ביטה (מדוד סיכון יחסית שונה) לתוכחת.**

כל התקיקים כולל הלא יעילים - על ה- SML (לפי סיכון שיטתי) :



תיקים יעילים בלבד על ה- CML :



$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

הקשרים הם שונים, ולמרות הצורך להעניק בקיום, נתקדם לפחות בשלב זה בהיבט היישומי שלהם. חשוב לשים לב: ניתן להשתמש בכל הנוסחאות (כולל אלו שמתאימות לאירועים) גם כשםדובר בתיקים עילאים; אך בהיעדר נתון בדבר עילו, נוכל להשתמש רק בנוסחאות אלו.

### תוחלת תשואה של כל נכס / תיק עיל / לא עיל בשוויו משקל כתלות בבייטה - SML

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

סימון	משמעות
$E(i)$	תוחלת התשואה של הנכס / התיק
$R_F$	ריבית חסרת סיכון / תשואת אג"ח מושלטת
$E(M)$	תוחלת תיק השוק
$\beta_i$	הבייטה - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס

רכיבי הסיכון בתיק לפי המודל (מתאים ללא עילאים)

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

סימון	משמעות
$\sigma_i^2$	שונות של נכס לא עיל
$\sigma_{NS}^2$	השונות = סיכון לא שיטתי / סיכון ניתן לפייזור (ניתן להימנע ממנו) - מחולץ בלבד אם התיק עיל, בהכרח מתקיים $\sigma_{NS}^2 = 0$
$\sigma_M^2$	השונות של תיק השוק
$\beta_i$	הבייטה - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס
$\beta_i^2 * \sigma_M^2$	השונות המהווה את הסיכון השיטתי / שאיננו ניתן לפייזור (לא ניתן להימנע ממנו)

חישוב הביטה - דרך כמשמעות המתאים בין המניה לבין תיק השוק נתון:

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,M} * \sigma_i}{\sigma_M}$$

סימון	משמעות
$\rho_{i,M}$	מקדם המתאים בין הנכס לשוק
$\sigma_i$	סטיית התקן של הנכס
$\sigma_M$	סטיית התקן של השוק
$\beta_i$	הבייטה - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס

חישוב הביטא - דרך נוספת לשינוי המשותפת של המניה עם השוק נתונה:

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

סימון	משמעות
$COV(i, M)$	השינוי המשותפת של הנכס עם השוק
$\sigma_M^2$	השינוי של תיק השוק

נוסחת שינוי משותפת/COV:

$$COV(i, M) = P_1 * [R_{i1} - E(i)] * [R_{M1} - E(M)] + P_2 * [R_{i2} - E(i)] * [R_{M2} - E(M)] + \dots$$

כאשר:

סימון	משמעות
$P_1, P_2 \dots$	הסתברויות
$R_{i1}, R_{i2} \dots$	התשויות האפשריות של המניה הבודדת
$R_{M1}, R_{M2} \dots$	התשויות האפשריות של תיק השוק
$E(M)$	תוחלת השוק
$E(i)$	תוחלת הנכס הבודד

**שאלה 83 - קו ה - SML מנויות - Capital Asset Pricing Model – CAPM :** מודל תמחור נכסי הון מנויות "נכניים של תקווה" צפואה להיסחר בעוד 3 שנים במחיר של 500 ש"ח. השוואה המשותפת של תשואת המניה עם תשואת השוק היא 0.9, שער הריבית חסר הסיכון (נטול הסיכון) 4% ותוחלת התשואה של תיק השוק היא 12%. כמו כן ידוע כי סטיית התקן של תיק השוק היא 0.8. מה יהיה מחיר המניה היום?

פתרון :

אמנם נתונים במניה בודדות בפני עצמה אבל קיימים נתונים על ריבית חסרת סיכון ותיק השוק, כMOVED שעני במודל CAPM גם אם לא אמרו מפורשות. השלב הבא הוא לנסות להבין האם אני עוסק בהנחה יעילות או בהיעדרה? וכפי שאמרנו קודם, אסור להניח שמדובר בתיקים או נכסים ייעילים. אם אין מידע ספציפי המבשר על יעילות התקן, נוצרך להניח אי יעילות, ולבור לחתם המודל המתאים על תתי נסחאותיו – SML.

משוואת ה-SML באופן כללי, היא משווה הקושורת בין רמת הסיכון השיטתי (הmbוססת על ביטא) של נכס לבין תוחלת תשואתו.

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i \quad (\text{ראו חילוץ ביטה מטה})$$

$$E(i) = 4\% + [12\% - 4\%] * 1.40625 = 0.1525 = 15.25\%$$

סימן	משמעות	ערך מספרי
$E(i)$	תוחלת תשואת נכס (ללא תלות בייעילותו)	$E(i)$
$R_F$	ריבית חסרת סיכון	$R_F$
$E(M)$	תוחלת תשואת תיק השוק	$E(M)$
$\beta_i$	מקדם הסיכון השיטתי של הנכס	$\beta_i$

לאחר שייעור התשואה בעד המניה נתון, ניתן להשתמש בו כ"ריבית" לשם היון (PV) מחיר המניה – כדי לשקף את שווייה המתואם להיום  $P_s = \text{Price of Share}$  :

$$P_s = 500 * (1 + 15.25\%)^{-3} = 326.62$$

**אופן חילוץ הביטה:** אם אפשרות להגעה לערך הביטה, כMOVED שואכל להציג את מכלול הנתונים ולהגיע לתוחלת התשואה הנדרשת בעד המניה. לפי ההגדרה, את הביטה ניתן לחשב באמצעות שתי נוסחאות. שתי הנוסחאות מבטאות את העובדה שהביטה בוחנת סיכון של הנכס באופן שמוספע מסיכון השוק:

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2} \quad \text{or} \quad \beta_i = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M}$$

ערך מספרי	משמעות	סימון
$\beta_i = ?$	מקדם הסיכון השיטתי של הנכס	$\beta_i$
$COV(i, M) = 0.9$	השונות המשותפת בין הנכס לשוק (מדד קשר)	$COV(i, M)$
$\sigma_M^2 = 0.8^2 = 0.64$	שונות תיק השוק – ס. תקן השוק בריבוע	$\sigma_M^2$
$\sigma_M = 0.8$	סטיית התקן של תיק השוק	$\sigma_M$
$\rho(i, M) = ?$	מקדם המתאים בין תשואה הנכס לתשואה השוק	$\rho(i, M)$
$\sigma_i = ?$	סטיית התקן של הנכס	$\sigma_i$

מכל הנתונים הנ"ל ברור לי למחרי שהנוסחה המתאימה לחישוב הביטה היא הנוסחה השמאלית:

$$\beta_i = \frac{0.9}{0.64} = 1.40625$$

**שאלה 84 - הקשר בין ביטה וסטיית תקן - הייתה או חלמתי חלום?**

הביטה של מנית "תפוחי" היא 4, ואילו הביטה של מנית "שזיפי" היא 12. האם ניתן לומר שסטיית התקן של מנית שזיפי גבוהה פי 3 מזו של מנית תפוחי? נמקו (הדרך: התייחסו לרכיבי הסיכון).

פתרון:

**מבוא:**

באופן כללי, הסיכון הכולל במונחי שונות בנכש לא כולל שני רכיבים:

$$\text{סיכון לא שיטתי} + \text{סיכון שיטתי} = \sigma_i^2$$

פורמלית:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

סימון	
$\sigma_i^2$	הסיכון הכולל בנכש / בתיק במונחי שונות
$\beta_i^2$	הביטה (קדם הסיכון השיטתי) ברכיב
$\sigma_M^2$	סיכון השוק במונחי שונות
$\beta_i^2 * \sigma_M^2$	הסיכון השיטתי במונחי שונות: ביטה ברכיב כפול סיכון השוק
$\sigma_{NS}^2$	סיכון לא שיטתי / סיכון ניטן לפיזור

הביטה של מנית "תפוחי" היא 4, ואילו הביטה של מנית "שזיפי" היא 12. האם ניתן לומר שסטיית התקן של מנית שזיפי גבוהה פי 3 מזו של מנית תפוחי? נמקו (הדרך: התייחסו לרכיבי הסיכון).

אם מדובר בתיק **יעיל** (זה לא המצב), אז בהגדרה אין בתיק סיכון לא שיטתי:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2 \rightarrow \sigma_P^2 = \beta_P^2 * \sigma_M^2$$

ניתן לראות, אם כך, שאם התקן **יעיל** – אז כל עלייה בביטחון מתורגם באופן ישיר לעלייה בסיכון הכולל באותו יחס. למשל, אם התקן מסויים הוא **יעיל** עם ביטה של 4, לעומת התקן **יעיל** אחר עם ביטה של 12, אז הרכיבים יהיו בהתאם:

$$\sigma_P(\beta = 4) = 4 * \sigma_M$$

$$\sigma_P(\beta = 12) = 12 * \sigma_M$$

כלומר, אם התקן **יעיל** – ביטה גבוהה פי 3 מושמעה סיכון / סטיית התקן גבוהה פי 3.

אל... שכן דיברו על **תיק לא יעיל**. בתיק לא יעיל פרט לרכיב הסיכון השיטתי שמוספע מהביטחון, קיימים בהגדרה רכיב סיכון אחר, לא שיטתי, שאין דרך למדוד אופן ישיר:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

לאור היעדר היכולת להעריך את גובהו של הסיכון הלא שיטתי בכל אחד מהנכסיים הלא יעילים -  $S_N^2$  לא נוכל לומר שעלייה בביטא בשיעור מסוים משמעה עלייה בסיכון באותו שיעור.

מסקנה: עלייה בביטא פי 3 מגדילה את הסיכון השיטתי פי 3, אך לא את הסיכון הלא שיטתי. לכן, הסיכון הכלל יעלה בפחות מפי 3.

לכן, ובהתאם, בהינתן **תיקי השקעות** שאינם יעילים (ומኒות בודדות הן דוגמא בולטת לכך) לא ניתן להסיק כלל מערכי ביטא בדבר הסיכון הכלל וערךו היחסי במניות שונות. זוו התשובה.

שים לב: אם התיקים היו יעילים אז רכיב הסיכון הלא שיטתי (החלק האדום) מתאפס, וכן ניתן לגזר מיחסיות בערכי ביטא בדבר יחסיות בסיכון הכלל (במונחי סטיטית תקן). אך אנחנו לא מניחים יעילים. ובהיעדרה - זהה מסקנתנו כאן.

### שאלה 85 - חילוץ ערכי ביתא על בסיס משקלים נכסיים בתיק

נתון תיק השקעות מורכב מ-2 נכסים הבאים:

נכס	משקל (שיעור) השקעה בתיק	תוחלת תשואה
א	0.65	10%
ב	0.35	22%

ידוע כי תוחלת תשואה תיק השוק היא 12%, הריבית חסרת הסיכון היא בשיעור של 4%. מהי הביטה של תיק השקעות? (רמז:  $E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$ )

פתרון:



בשלב הראשון, אוחשב את תוחלת התשואה של תיק המורכב משני הנכסים מסווגים, על בסיס נוסחת התוחלת של תיק המשלב בין שני נכסים מסווגים.

לאחר מכן, אתחה עם עצמו: האם תיק שקיבلت עיל או לא עיל? אלו טענים שהוא יהיה בחזקת לא עיל. יחד עם זאת, הוא כן צפוי לקיים, כמו כל תיק לא עיל אחר, את משווהת ה-SML, ואולי, רק אולי, אם הביטה של התקיק תהיה הנעלם היחיד במשווהה זו - נצליח להיחלץ מהמלכודת.

בשלב ראשון - ניישם את נוסחת תוחלת תיק השקעות המורכב מ-2 נכסים מסווגים:

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

ב换בת משקלי ההשקעה הנתונים בכלל אחד מהנכסים א, ב נקבל:

$$E(P) = 0.65 * 0.1 + 0.35 * 0.22 = 14.2\%$$

למרות שמדובר בתיק ואף סומן באות P, חשוב מאד שלא לעבוד טכני. ובעצם לומר: אם אין סיבה מאד טובה להניח עילות (כפי נתון שהתיק עיל, או נתון שהוא מורכב רק מריבית חסרת סיכון ו/או תיק השוק) אז נניח אי עילות, ובהתאם, המשווהה הרלוונטית המאפיינת את תוחלת התשואה ואשר תקפה גם למצבי אי עילות היא משווהת ה-SML:

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

ב换בת נקבל:

$$14.2\% = 4\% + [12\% - 4\%] * \beta_P \rightarrow \beta_P = 1.275$$

קיבלנו כי הביטה של תיק השקעות הנתון בשאלה היא 1.275. תשובה סופית.

## מפגש 11 – יה' 8 חלק רביעי – ניהול תיקי השקעות מתקדם - CAPM

### ריענון ורקע קצר לאחרו:

- בפגש הקודם התחלנו לסדר את המודלים הרלוונטיים לניהול תיקי השקעות – החל מהמקרה של שני נכסים מסוכנים, עברך דרך המקרה של תיקי השקעות הכלולים גם נכס חסר סיכון, ואז – התמודדות לסוגיות הביטא ותוחלת התשואה של נכסים לא ייעילים בשוויי משקל על פי ה-SML.
- מה אנחנו רוצחים לעשות היום – זה בעיקר להפעיל יישומים נוספים רלוונטיים של זה, ברמת בחינה.
- מעבר זהה, ככל שיאפשרו הכוחות והזמן, נתחל בקומה ביישורת המסתממת של הקורס הקשור לה' 11-9, יה' העוסקות בכיוון קצר שונה לגבי מימון – שמדובר על מקורות המימון של החברה וההשפעה שלהם על מחיר ההון והתשואה הנדרשת (כבר לא נסוק בה' אלו בהשקעות; אלא יותר בעלות גiros הון מצד החברה כאשר היא בוחרת בגין במניות לעומת אג"ח וכיו"ב).

### שאלה 85.1 – לפטור במפגש 2025 – הקשר בין סטיית התקן, המתאים עם השוק וכדאיות השקעה

בשוק ההון נסחרות שתי מניות אשר תוחלת התשואה שלן 30%.

למניה C סטיית תקן של 25% ומקדם מתאים עם תשואת השוק של 0.3.

למניה D סטיית תקן של 20% ומקדם מתאים עם תשואת השוק של 0.6.

נדרש:

- א. בטוואו את הביטא של כל מניה על בסיס סטיית התקן של השוק כפרמטר.
- ב. לאייזו מניה ביטא גבוהה יותר?
- ג. בהנחה שהמשקיע מחזיק בתיק מבוזר והוא שוקל לצרף אותה מ בין המניות לתיקו, אייזו מניה יעדיף לצרף לתיק ומדוע?

### פתרונות:

רקע – באופן כללי, שאלות הדורשות **זהות ביתא** באופן מספרי או יחסית, יכולות להשען על הכלים הבאים:

כלי 1: הצבה במשוואת ה-SML:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

הכלי הזה שימושי בעיקר במקרים שבהם הריבית חסרת הסיכון ידועה ו גם תוחלת תשואת תיק השוק.

כלי 2: לנסות לחשב את הביטא יישורות (או לבטא אותה) לפי נוסחה רלוונטית.

יש שתי וריאציות לנוסחאות הביטא, שהבחירה ביניהן תלויות בתנונים:

$$\beta_i = \rho(i, M) * \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \quad \text{or} \quad \beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

הנוסחה השמאלית – כופלת את מקדם המתאים בין תשואת הנכס לתשואת השוק ביחס בין סטיית התקן של הנכס לסתીית התקן של השוק, ואילו הימנית – מחלקת את השונות המשותפת עם השוק, בשונות תיק השוק.

**מעבר לחישוב הטפני של הביטה**, היא למעשה מגדד הסיכון המרכזי שאליו צריך להתייחס משקיע שմשלב את המניה כחלק מתיקו המפוזר / היעיל. למה הכוונה? ביטה היא לא הסיכון הכלול; היא רק חלק של הסיכון שלא ניתן לפזר (סיכון שיטתי). אנחנו טוענים שאם משקיע משלב את המניה כחלק מתיק השקעות יעל, הסיכון הלא שיטתי "מתפזר" ומtbody, ונוטרים רק עם סיכון הביטה.

זה חשוב – משום שאם קיים מקרה שבו לשני נכסים (שאינם ייעילים בפני עצמם) יש תוחלת תשואה זהה, הרי שאם נרצה לשלב בתיק השקעות המפוזר שלו אחד מהם – נבחר בזה שהביטה שלו היא הנמוכה יותר.

**למעשה: התרומה של נכס לא יעל לסיכון של תיק מפוזר במודל ה-CAPM היא פונקציה של הביטה שלו ולא של סטיית התקן שלו (רק רכיב הביטה קובע את הסיכון שלא מתפזר, את הסיכון השיטתי).**

ואחרי הנאום הזה, נעתיק את נתוני השאלה:

$$\begin{aligned} E(C) &= 30\% & \sigma_C &= 25\% & \rho_{C,M} &= 0.3 \\ E(D) &= 30\% & \sigma_D &= 20\% & \rho_{D,M} &= 0.6 \end{aligned}$$

#### סעיף א – מתן ביטוי לביטה של כל נכס

לאור נתוני מקדים המתאים עם תיק השוק של הנכסים בשאלת, הנוסחה הרלוונטית לביטוי של הביטה היא הנוסחה זו:

$$\beta_i = \rho_{i,M} * \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

ובהצבת נתוני השאלה אני מקבל את הערכים הבאים:

$$\begin{aligned} \beta_C &= \rho_{C,M} * \frac{\sigma_C}{\sigma_M} = 0.3 * \frac{0.25}{\sigma_M} = \frac{0.075}{\sigma_M} \\ \beta_D &= \rho_{D,M} * \frac{\sigma_D}{\sigma_M} = 0.6 * \frac{0.2}{\sigma_M} = \frac{0.12}{\sigma_M} \end{aligned}$$

#### סעיף ב – הביטה הגבוהה יותר

למרות שערכה המספרית המלא של הביטה של הנכסים לא ידוע, אנחנו כן יכולים לזהות שלנכס C הביטה נמוכה יותר (הביטה של D גבוהה יותר):

$$\beta_D = 0.12 * \frac{1}{\sigma_M} > 0.075 * \frac{1}{\sigma_M} = \beta_C$$

#### סעיף ג – בהנחה שהמשקיע מחזיק בתיק מפוזר והוא שוקל לצרף אחת מмежду המניות לתיקו, איזו מניה יעדיף לצרף לתיק

ראשית מה משמעתו של תיק מבוזר?

תיק מבוזר = תיק יעל.

אם התיק שמהווה נקודת מוצא הוא יעל, ככלمر מגוון בין מספר גדול של נכסים, תיק השוק וכיו"ב – אזי, כאשר נוסיף לו נכס מסוון כלשהו, חלק משמעותי מהסיכון הגלום בנכס המוסוכן – יתפזר גם הוא (יקטן) לאור השילוב בתיק יעל.

כך שלמעשה: **שיילוב נכס מסוון בתיק יעל משפייע על הסיכון הכלל רק לפי הסיכון השיטתי (הבלתי ניתן לפיזור) בתיקシャルבים, ככלמר רק לפי הביטה שלו.**

במקרה זה: שני הנכסים מניבים את אותה תוחלת; נכס C במידה ישולב, ישפייע על הסיכון הכלל בהתאם לביטה הנמוכה שלו; ואילו נכס D, במידה וישולב, ישפייע על הסיכון הכלל בהתאם לביטה הגבוהה שלו. **לכן, עדיף לשלב בתיק את נכס C (התרומה לתשואה – אותה תרומה, והעליה בסיכון – בהתאם לביטה – נמוכה יותר).**

[ככל, בהיעדר נתונים סותרים, ביטה גבוהה יותר משמעה תוחלת תשואה גבוהה יותר, בהתאם למשוואת ה-SML שקובעת

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

אלא שכן ספציפית, יש נכסים שתוחלתם זהה למטרות שהביטה של אחד מהם גבוהה יותר. זה מצב "לא טבעי" שמתאר היעדר שווי משקל. במצב כזה, לאורך זמן, משקיעים יברחו מהנכס בעל הביטה הגבוהה ולהלא מוצדקת, מה שיוביל לירידת מחירו]

### **שאלה 85.2 – לפתרו במפגש 2025א – הקשר בין תוחלת, סטיית תקן והסיכון השיטתי**

בשוק ההון הכספי נערך משקל נסחרות שתי מניות, G ו- Q, אשר תוחלת התשואה שלן 30%. סטיית התקן של מניה G גבוהה מסטיית התקן של מניה Q.

נדרש:

- א. למי מבין המניות סיכון כולל גבוהה יותר?
- ב. למי מבין המניות סיכון שיטתי גבוה יותר?
- ג. למי מבין המניות סיכון לא שיטתי גבוה יותר?

פתרונות:

#### רקע וחידוד מושגים

סיכון כולל = כלל הסיכון, לאו דוקא זה שנובע מביטה; מדובר בסיכון שיטתי (הנובע מביטה) בתוספת סיכון לא שיטתי, יחד. נכס בעל סטיית התקן (או שונות) גבוהה יותר מאשרו = סיכון כולל גבוהה יותר.

סיכון שיטתי גבוה יותר = מתרבש על ערך הביטה. ביטה גבוהה יותר משמעה סיכון שיטתי גבוה יותר. סיכון לא שיטתי = ערך הפרשי. הוא לא מחושב באופן ישיר אלא על בסיס ההפרש בין הסיכון הכלל לסיכון השיטתי.

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2 \rightarrow \sigma_{NS}^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2 * \sigma_M^2$$

כאשר:

סיכון כולל במנוחי שונות	$\sigma_i^2$
-------------------------	--------------

הxicoon השיטתי שמוספע מהביטא	$\beta_i^2 * \sigma_M^2$
ערך שמחולץ ולא מחושב ישירות	$\sigma_{NS}^2$

אזכור הנתונים :

$$E(G) = 30\%$$

$$E(Q) = 30\%$$

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

מושג חשוב : שיווי משקל.

כשאנו פועלים בעולם של הנחות ה-CAPM (חלק מהנדירים דנים בסיכון שיטתי / לא שיטתי, זה חרmo לכאן),  
אנו יודעים שיש שני תתי מודלים :

המודל שקשר לתקנים יעילים (4 הנוסחאות בראש מערך השיעור) המחייב מידע בדבר יעילות התקנים ;  
המודל שקשר לכל התקנים בכלל (גם אם הם לא יעילים) וمبוסס על ביטה :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

מודל זה דורש הנחה הרבה יותר "רכח" : שהשוק בשווי משקל. משמעות שווי המשקל היא שאין לחצים לשינוי מחירי הנכסים ולשינויי תשואתם. באופן כללי, תמיד יכול להיות שמניות מסוימות נזקנות ומניבות למשל ביצועי יתר. במקרה שכזה, זה לא אומר שהביטה שלhn תשנה מיד ; ואו אז, תוכלת תשואתn תהיה גבוהה מהצפוי לפי המודל. אלא, שמצוות כזו הוא מצב זמני ואינו שווי משקל, מדוע? משום שמצוות כזו יכולים ירצו לקנות את המניה, מחירה יעלה והתשואה היחסית יורדת עד להתכנסות בשווי משקל (ואותו דבר כמובן ההפוך כאשר התשואה נמוכה מזו שמנבأ המודל).

בשונה מהנחה יעילות, שלא תמיד מתקינה – הנחת שווי משקל מתקינה אלא אם קיימות ראיות סותרות בשאלת.

לכן, בתכליס : כshaworms "מתקינים שווי משקל" וזו גם בריית מחדל המשמעות היא שמשוואת ה-SML. הקושרת בין ערכי הביטה (מקדם סיכון שיטתי) לבין תוכלת התשואה מתקינה.

א. למי מבין המניות סיכון כולל גובה יותר?

אזכור הנתונים :

$$E(G) = 30\%$$

$$E(Q) = 30\%$$

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

סיכום כולל – משמעו בשפה פשוטה: סטיטית תקן. ואין ספק שעל פי נתון מפורש, הסיכון הכלל הגבוה יותר הוא של מניה G.

ב. למי מבין המניות סיכון שיטתי גבוה יותר?

את הסיכון השיטתי אנו אומדים על בסיס ערך הביטא. בהינתן שהנכסים בשווי משקל (ברירות מחדל), הרי שקיים תוחלת תשואה זהה משמעה בהכרח ביטה זהה. זאת הואיל ושני הנכסים מקיימים את משוואת ה-SML שקיימת להלן:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בהתבסת הנתונים:

$$E(G) = 30\% = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_G$$

$$E(Q) = 30\% = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_Q$$

ריבית חסרת סיכון, ערך של השוק כולו ואינו משתנה במעבר בין מניות	$R_F$
תוחלת תשואת השוק, ערך כללי בשוק ולא משתנה במעבר בין מניות	$E(M)$

בהתנתן שהמניות מניבות תוחלת תשואה זהה, יותר ערכיו השוק כמובן זהים ומשותפים, ומתקיים שווי משקל הביטה שלחן חייבת להיות זהה, ולכן **הסיכון השיטתי שלחן – זהה**.

ככל, סיכון שיטתי מוגדר כך:

$$\beta_i^2 * \sigma_M^2$$

הואיל וסטיטית התקן של השוק היא ערך כללי שתקף לשוק כולו, פערים בסיכון השיטתי יכולים לנבוע רק מפערים ביטה, שפה כאמור לא מתקיים (לאור התוחלת הזהה).

ג. למי מבין המניות סיכון לא שיטתי גבוה יותר?

הסיכון הכלל מוגדר כך:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

אם לשתי מניות יש אותה ביטה, כמובן שרכיב **הסיכון השיטתי (באדום)** זהה. והמשמעות היא שככל פער בינהן בסיכון הכלל יכול לנבוע רק מרכיב הסיכון **הלא שיטתי (בכחול)**.

תזכורת נתונים – הנתונים העידו על כך שסטיטית התקן (קרי סיכון כולל) בנכס G גבוהה יותר:

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

הביתא אותה הביטה; הסיכון השיטתי אותו סיכון שיטתי; ולכן בהכרח הסיכון הגבוה יותר במנוחי סטיטית תקו במניה G יכול לנבוע אך ורק מסיכון לא שיטתי גבוה יותר במניה זו.

$$\sigma_G^2 = \beta_G^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(G)$$

$$\sigma_Q^2 = \beta_Q^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(Q)$$

אך ידוע:

$$\beta_G = \beta_Q$$

ובהינתן ש:

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

כלומר:

$$\sigma_G^2 > \sigma_Q^2$$

$$\beta_G^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(G) > \beta_Q^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(Q)$$

ניתן לבטא זאת גם כך לאור זהות ערכי הביטה:

$$\beta_Q^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(G) > \beta_Q^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(Q)$$

כלומר: **הסיכון הלא שיטתי** במניה G גבוה יותר.

בקיצור - אם לשני נכסים בשוויי משקל יש את אותה תוחלת תשואה ולכן את אותה ביתא, הגורם היחידי שיווביל לסטיטית תקו גבוהה יותר של אחד הנכסים היא סיכון לא שיטתי גבוה יותר בנכס זה.

### שאלה 85.3 – לפטור במפגש 2025 – הביטה מול סטיית התקן

הביטחון של מניה G גבוה מהביטחון של מניה Q.

להלן מספר טענות שנשמעו בישיבה בוועדת ההשകעות:

טענה 1: "מניה G בודאות עם סטיית התקן גבוהה יותר. הרי הביטה שהיא מגד הסיכון העיקרי גבוהה יותר"

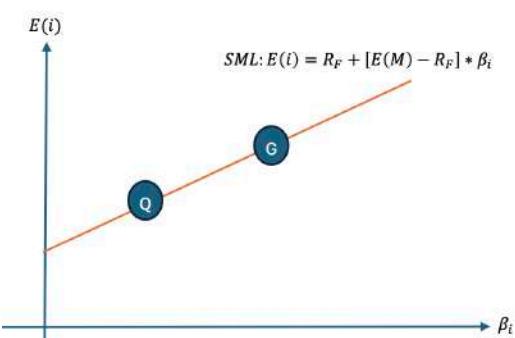
טענה 2: "אם מניה G עיליה ומניה Q איננה עיליה, למניה G סטיית התקן גבוהה יותר"

טענה 3: "אם שתי המניות עיליות, למניה G סטיית התקן גבוהה יותר"

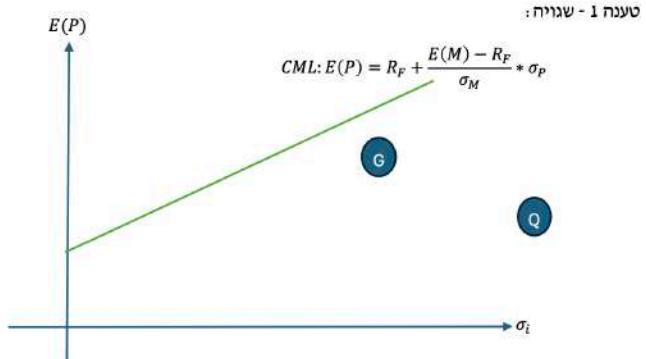
טענה 4: "אם שתי המניות אינן עיליות, למניה Q סטיית התקן נמוכה יותר".

נדרש:

חווי דעתכם, לגבי כל טענה, האם היא נכונה או לא – וنمכו בהתאם.

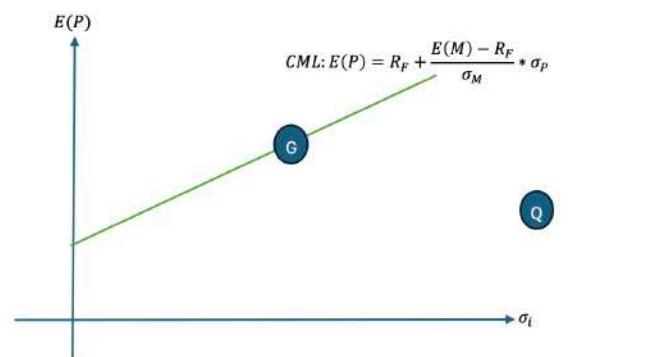
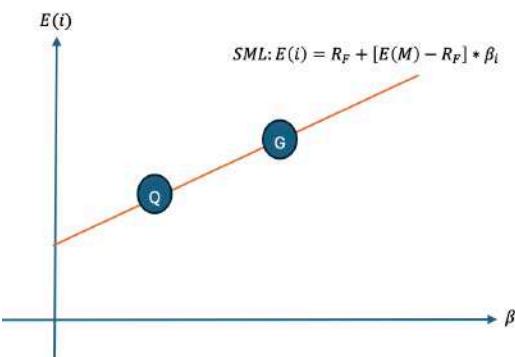


במערכות הציריים שבה מאיירים את קו ה-SML  
לא רואים בכלל את הסיכון הלא שיטתי  
שהוא אחד מרכיבי הסיכון הכלול (סטיית התקן)  
העיקריים. לכן, לא נוכל ללמידה מהביטחון בלבד  
על ערך סטיית התקן

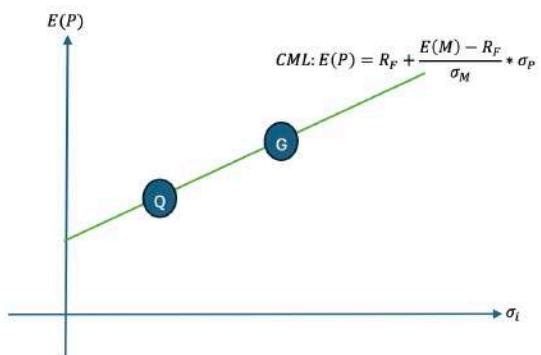
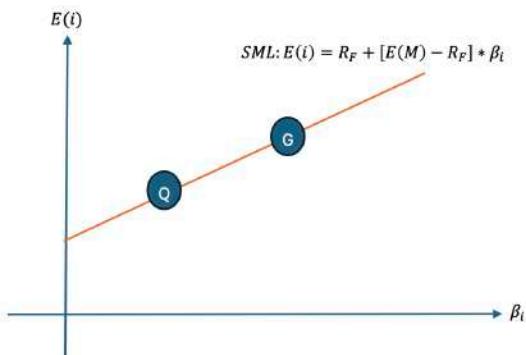


במערכות הציריים שבה מאיירים את קו ה-CAL  
שהוא העקום הייעיל במודל ה-CAPM, המרכיב  
האופקי שמותקנים בין נס לביין היעיל  
הוא למעשה רכיב הסיכון הלא שיטתי  
עצם ידיעת הביטה לא אומرت דבר עלי

טענה 2 – נכונה: המניה Q עיליה מboth ה-SML ו-CML אך לא ניתן למצוא ביחס אליה את Q ללא מידע בדבר ייקוף הסיכון הלא שיטתי של Q.



טענה 3 - נכון: אם שתי המניות ייעילות, מניה עם ביטא גבואה יותר וסיכון שיוטתי גבואה יותר (כי לא קיים רכיב סיכון נוסף):



טענה 4: נשלת בדיק באוטו האופן שבו נשללה טענה 1.

**שאלה 86 - חילוצי ערךים על בסיס ה - CAPM**

לפניכם נתונים בדבר 3 מנויות, J, G, Q:

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	?	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
?	45%	30%	סטיתת תקן תשואה
0.7	0.8	?	מתאים עם השוק

נדרש :

- מahi תוחלת תשואה של תיק השוק?
- מahi הריבית חסרת הסיכון?
- מahi סטיתת תקן של תשואת השוק?
- שחזרו את כל סימני השאלה.
- הניחו כי הנכים משקיעים בתיק השוק 200,000 ש"ח, מtower זה 120,000 ש"ח מהונכם העצמי והיתרה כחלוואה. מהי תוחלת תשואה וסטיתת תקן של תיק זה?
- במהשך לסייע ה, האם משקיע שונא סיכון עשוי להשקיע בתיק זה?
- איירו את המשקיע שאפיינתו בסעיפים ה, ו לעיל על העוקום הגרפי המתאים.

פתרון :

א. + ב. חילוץ תוחלת תשואה של תיק השוק וריבית חסרת סיכון בהתבסס על ערכי נכסים בודדים לצד העובדה שנכסים בודדים אינם יעילים, הרי שבזומה לנכסים אחרים הם מקיימים את משוואת ה- SML. ספציפית, לגבי הנכסים J ו- Q, בהינתן גם ערכי תוחלת תשואתם וגם הביטה שלהם, ניתן לבנות צמד משוואות ב-2 נעלמים, שיהוו את הריבית חסרת הסיכון ואת תוחלת תיק השוק בהתאם.

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בהצבה - אם יש לי נתונים על שתי מנויות הכלולים תוחלת וbijta, ניתןحل את תוחלת השוק ואת הריבית חסרת הסיכון על בסיס בנית מערכת הכוללת 2 משוואות בשני נעלמים, שכל אחת מהן מייצגת את הצבת הנתונים הנ"ל ב - SML :

$$(I) \quad E(J) = 12.4\% = R_F + [E(M) - R_F] * 1.4$$

$$(II) \quad E(Q) = 16.6\% = R_F + [E(M) - R_F] * 2.1$$

אני אישית (לא חובה) מdad אוhab כשאני נתקל בחילוצים אלו, לסמן את הביטוי  $E(M) - R_F$  כנעלם x :

$$(I) \quad 0.124 = R_F + x * 1.4$$

$$(II) \quad 0.166 = R_F + x * 2.1$$

נחסיר את המשוואה (I) ממשוואת (II) ונקבל :

$$0.166 - 0.124 = R_F + 2.1x - (R_F + 1.4x)$$

נמשיך בכיף שלנו :

$$0.042 = 0.7x \rightarrow x = 0.06$$

נציב באחת מבין המשוואות (אני אציב במשוואת ה-I) :

$$(I) \quad 0.124 = R_F + 0.06 * 1.4 \rightarrow R_F = 0.04$$

$$R_F = 4\%$$

כידוע,  $x$  הוא :

$$x = E(M) - R_F \rightarrow 0.06 = E(M) - 0.04 \rightarrow E(M) = 0.1$$

$$E(M) = 10\%$$

ג. מהי סטיית התקן של תשואת השוק?

את נתוני תיק השוק - תוחלת תשואת וסטיית התקן, ב- 99% מהמקרים אנו מחלצים ולא מחשבים ישירות. כלומר, נשתמש באיזושהי נוסחה רלוונטית שבה מופיעה סטיית התקן / התוחלת כנעלם, ונמשיך ממש בהצבות והחילוץ.

השאלה - איזו נוסחה מתאימה ליתר נתוני השאלה ותאפשר לחלץ את סטיית התקן של תיק השוק?

נוסחאות רלוונטית לחישוב ביטה, ששתיהן כוללות את סטיית התקן של תשואת השוק כנעלם, מה שבשאיפה יאפשר לחלץ אותו, גם כאשר הנכסים או התיקים שבהם אני עוסק אינם ייעילים, הן :

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,M} * \sigma_i}{\sigma_M}$$

וגם :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

נתוני השאלה :

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	?	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
?	45%	30%	סטיית תקן תשואה
0.7	0.8	?	מתאים עם השוק

על פניו, אני נגש למניה Q ואני מגלח שבהתאים לנוסחת החישוב הישירה הראשונה של ביטה אני מקבל :

$$\beta_Q = \frac{\rho_{Q,M} * \sigma_Q}{\sigma_M}$$

הערכים בירוק - נתוניים. הערכים שבחרור - 2 נעלמים, במשווה אחת. לא תופס.

אם אני נגש ל - J, אין לי את המתאים עם השוק בכלל.

אם אני נגש ל - G, אין לי את הביטה... אבל רגע! אולי אני יכול לחוץ את הביטה של G. זאת על בסיס משווהת ה - SML :

$$E(G) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_G$$

בhzבת נתוני תיק השוק ונכש חסר סיכון שגילינו בנדרישים א, ב נקבל :

$$14.8\% = 4\% + (10\% - 4\%) * \beta_G \rightarrow \beta_G = 1.8$$

נחזיר להגדרת ביטה על פי המתאים עם השוק, עברו נכש G, נקבל :

$$\beta_G = \frac{\rho_{G,M} * \sigma_G}{\sigma_M} \rightarrow 1.8 = \frac{0.8 * 0.45}{\sigma_M} \rightarrow \sigma_M = 20\%$$

ולכן כתשובה סופית לסעיף, סטיית התקן של תיק השוק היא 20%.

#### ד. שbezro' at cel simoni ha-shala

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	1.8 בפתרון סעיף ג	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
60% ראו להלן	45%	30%	סטיית תקן תשואה
0.7	0.8	0.9333 ראו להלן	מתאים עם השוק

נשתמש בנוסחת הגדרת הביטה כדי לחוץ את מקדם המתאים של מניה J עם השוק :

$$\beta_J = \frac{\rho_{J,M} * \sigma_J}{\sigma_M} \rightarrow 1.4 = \frac{\rho_{J,M} * 0.3}{0.2} \rightarrow \rho_{J,M} \approx 0.933$$

גם עברו מניה Q, נשתמש בנוסחת הגדרת הביטה כדי לחוץ את סטיית התקן של תשואת הנכש :

$$\beta_Q = \frac{\rho_{Q,M} * \sigma_Q}{\sigma_M} \rightarrow 2.1 = \frac{0.7 * \sigma_Q}{0.2} \rightarrow \sigma_Q = 0.6 = 60\%$$

ה. הניחו כי הנכס משקיעים בתיק השוק 200,000 ש"ח, מtower זה 120,000 ש"ח מהו נכס העצמי והיתרה כהלוואה. מהי תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק זה?

תחילה, נסדר את הנתונים שהילכנו במאזך רב משאלות קודמות לגבי ריבית חסרת סיכון, ומאפייני תיק השוק (תוחלת תשואה וסטיית התקן). זה חשוב, משום שמדובר בתיק שכולל השקעה בתיק השוק וכן הלוואה (כי סכום ההשקעה עולה על ההון העצמי). זכרו: תיק חייב להיות יעיל אם הוא מורכב רק מההשקעה בתיק השוק והלוואה / אם הוא מורכב רק מההשקעה בתיק השוק וההשקעה בנכס חסר סיכון. **למן התקן הנדון בסעיף זה הוא ייעיל.**

בסעיפים קודמים גילינו את תוחלת התשואה של תיק השוק, את סטיית התקן של השוק, ואת הריבית חסרת הסיכון, בהתאם:

$$E(M) = 10\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

$$R_F = 4\%$$

על פי נתונים הסעיף הספציפי, משקל ההשקעה בתיק השוק ביחס להון העצמי גבוהה מ-1 (גבוה מ-100%) זאת הואיל וידוע שסכום ההשקעה בתיק השוק גבוהה ממהון העצמי של המשקיע. ניתן לחשב במצב כזה את משקל ההשקעה בתיק השוק לפי היחס בין סכום ההשקעה בתיק השוק לבין ההון העצמי:

$$W_M = \frac{200,000}{120,000} = 1 \frac{2}{3}$$

זה גם אומר באופן טבעי שמשקל ההשקעה בנכס חסר סיכון שתמיד מהוות את המשלים ל-1 ניתן לחישוב גם הוא, ואני מצפה שהוא יהיה שלילי, כדי לשקף הלוואה:

$$W_F + W_M = 1 \rightarrow W_F = 1 - W_M = 1 - 1 \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

דרך אחרת להביט על כך היא לומר: ברור אם לוינו (במינוס) 80,000 ש"ח ביחס להון עצמי של 120,000 ש"ח, אז היחס בין ערכיהם אלו (שהוא 2/3) הוא למעשה שיעור הלוואה או WF שלילי.

$$W_F = \frac{-80,000}{120,000} = -\frac{2}{3}$$

כלומר, מדובר במשמעות שבהתאם לנתחים נוטל הלואה בשיעור 2/3 (כ- 66.67% מהוננו העצמי) ומשמעות כספי ההלואה וכן את הוננו העצמי יחד בתיק השוק. התיק שמתකבל כתוצאה משילוב של השקעה בתיק השוק והלוואה הוא תמיד יעיל במודל ה- CAPM, וכן נוכל לחשב את תוחלת התשואה וגם את סטיית התקן של התקן המשולב באמצעות הנוסחאות המתאימות ל蹶ה היעיל:

נוסחת משקלים השקעה בתיק ייעיל (כולל השקעה רק בנכס חסר סיכון / הלוואה ובתיק השוק) הרי שלפי מודל תיקי ההשקעות היעילים ב-CAPM בנוסחת המשקלים:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

נוסחת משקלים השקעה בתיק ייעיל ב- CAPM לשם חישוב סטיית התקן:

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

ובהצבת הערכים שהצלהנו לגłów במשקלים יחד עם יתר נתוני השאלה והחילוצים בסעיפים קודמים, אגלה בזריזות ש:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M) \rightarrow -\frac{2}{3} * 0.04 + 1\frac{2}{3} * 0.1 = 14\%$$

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M \rightarrow 1\frac{2}{3} * 0.2 \approx 33.33\%$$

מסקנה: תוחלת התשואה של התקן הנבחר היא 14%, וסטיית התקן שלו היא כ-33.33%.

ו. בהמשך לסעיף ה, האם משקיע שונא סיכון עשוי להשקיע בתיק זה?

לכוארה, עולה השאלה: הרי סטיית התקן של התקן מסעיף הגבוהה יחסית (33.33%), אפילו גבוהה מההשקעה בתיק השוק באופן מלא). יחד עם זאת, המשקיע מקבל פיצוי בדמות עודף תוחלת תשואה بعد השקעה זו (תשואה של 14% בתוחלת, שהיא גבוהה ב-10% מריבית חסרת סיכון, ואפילו גבוהה ב-4% מתוחלת תשואה השוק).

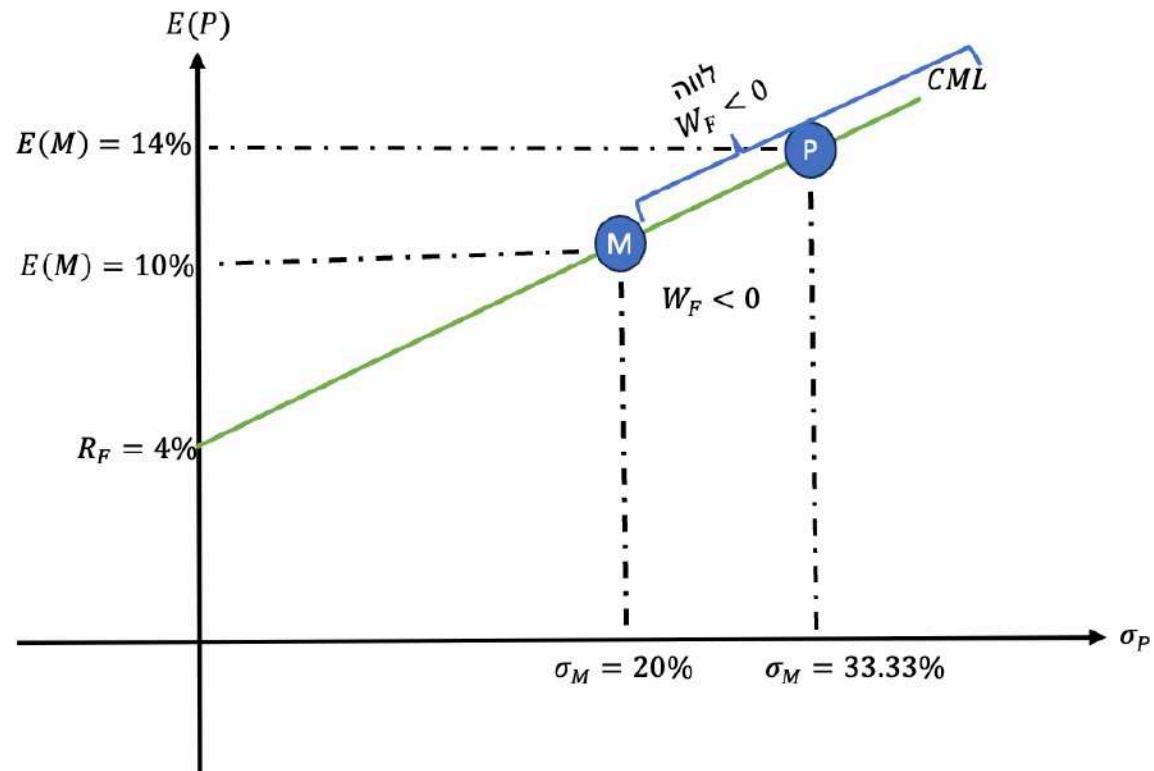
במלים אחרות - המשקיע ששולק התקן כזה מבין שהוא "מסוכן יותר" (שהה כשלעצמם "רע") אך מנגד מודע לעודף התשואה אשר לו זוכה (שהה כשלעצמם "טוב").

קיבלו אם כך השפעות מנוגדות, או אם תרצו: תחולפה בין סיכון ותשואה. מגלי להכיר את המשקיע אינדיבידואלית לא נוכל לטעון שיש לשלול את התקן עבור כל סוגים הסיכון בעולם ובהתאם, שונא סיכון עשוי (לא בהכרח, אך עשוי) לבחור בתיק כזה.

**זכרו: כל התקנים על ה- CML המרכיבים משילוב כלשהו של נכס חסר סיכון ותיק השוק (לרובות הלוואות) הם יעילים. וכולם מהווים חלופות השקעה רלוונטיות / יעילות מנוקדות ראות שונאי סיכון.**

בשורה התחתונה: התקן המשקיע על ה-CML, הוא עשוי להיבחר - למורות סיכון גבוהה.

ז. אifyו את המשקיע שאפייניתם בסעיפים ה, ו לעיל על העוקם הגראפי המתאים. סעיף זה הוא סעיף שמטרתו בעיקר לחזק ולסייע להבנה של ההסבר שנכלל בסעיף ו.



### שאלה 87

לנכש א שהוא נכס ייעיל יש ביטה של 0.8, ואילו לנכס ב שאינו ייעיל יש ביטה של 0.2. בנוסף ידוע כי מתקיים:  $\sigma_A = \sigma_B$ . בנסיבות אלו, מהו מקדם המתאים בין נכס ב לבין תיק השוק? [הדרך: הציגו את נוסחת חישוב הביטה המתבססת על מקדם המתאים עם השוק; הציגו את משווה חישוב הסיכון המתבססת על ביטה ואשר תקפה לתיק ייעיל; בטאו את המשתנים לפי הנסיבות; פתרו בהתאם]

פתרון:

נתון:

$$\begin{aligned}\beta_A(Yail) &= 0.8 \\ \beta_B(Not\ Yail) &= 0.2\end{aligned}$$

$$\sigma_A = \sigma_B$$

נדרש:

$$\rho(B, M) = ?$$

הואיל והשאלה מציגה נתונים את הביטה, וכן כוללת דיוון במקדם המתאים עם תיק השוק, נזכר בנוסחת חישוב הביטה על סמך מקדם המתאים עם השוק:

$$\beta_i = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M}$$

בנסיבות השאלה:

$$\begin{aligned}\beta_A &= 0.8 = \frac{\rho(A, M) * \sigma_A}{\sigma_M} \\ \beta_B &= 0.2 = \frac{\rho(B, M) * \sigma_B}{\sigma_M}\end{aligned}$$

בנוסף, מעצם העובדה שנכס א ייעיל, עולה כי הוא מקיים את הנוסחה הבאה:

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 * \sigma_M^2$$

בצורת ניסוח אחרת:

$$\sigma_A = \beta_A * \sigma_M \rightarrow \sigma_A = 0.8 * \sigma_M \rightarrow \sigma_A = \sigma_B \rightarrow \sigma_B = 0.8 * \sigma_M$$

עכשו נציב את הביטוי באדום במקום סטיטית התקן של נכס ב ונקבל:

$$\beta_B = 0.2 = \frac{\rho(B, M) * 0.8 * \sigma_M}{\sigma_M} \rightarrow \rho(B, M) = 0.25$$

מסקנה: מקדם המתאים בין נכס B לבין השוק הוא 0.25.

## שאלה 88

הנicho כי מודל ה - CAPM מתקיים בשוק הון מסוים.

בנוסף ידוע כי בשוק הון זה, עברו מניה מסוימת, מניה א, מתקיים כי:

$$\beta_A = 0.9 * \beta_M$$

כמו כן ידוע כי:

$$\rho_{A,M} = 0.9$$

האם במצב כזה נוכל לחוות דעתה, האם סטיית התקן של המניה גבוהה מזו של השוק, שווה לזו של השוק או נמוכה מזו של השוק? נמקו בהתאם. [הדרכה: הציגו את נוסחת הביטא המתבססת על מקדם המתאים עם השוק. פתרו אותה בהתאם]

פתרון:

לפי ההגדרה, הביטא של המניה הבודד היא בהגדרה:

$$\beta_A = \frac{\rho(A, M) * \sigma_A}{\sigma_M} \rightarrow 0.9 * \beta_M = \frac{0.9 * \sigma_A}{\sigma_M} \rightarrow \beta_M = \frac{\sigma_A}{\sigma_M}$$

תזכורת: הביטא היא ערך המודד סיכון ייחסי של נכס / תיק ביחס לשוק. נכסים מסווגנים יותר מהשוק הם בעלי ביטא גדולה מ-1, והם נקראים "אגראטיביים". נכסים מסווגנים פחות מהשוק הם בעלי ביטא קטנה מ-1, והם נקראים "דפנסיביים". הביטא של תיק השוק היא תמיד 1! כי השוק מסוכן "כמו השוק".

$$\beta_M = 1$$

ואחרי אקסיומה זו:

$$1 = \frac{\sigma_A}{\sigma_M} \rightarrow \sigma_A = \sigma_M$$

כלומר: סטיית התקן של הנכס זהה לסטיית התקן של השוק.

## שאלה 89

בשוק הון נסחרות 2 מניות: א ו-ב, וכן נכס חסר סיכון.

משקיעים מעוניין לבנות תיק השקעות כאשר:

40% מסכום השקעותיו יושקעו במניה א.

35% מההשקעותיו יושקעו במניה ב.

והיתרתו תושקע בנכס חסר סיכון.

בנוסף ידוע כי:

סטיית התקן של מניה א היא 40%

סטיית התקן של מניה ב היא 30%

מקדם המתאים בין תשואות המניות הוא 0.3.

בנתונים אלו, מה תהיה סטיית התקן של תיק ההשקעות?

פתרון:

נסכ	$R_F$	משקל השקעה בנכס	טוחלת התשואה	סטיית התקן
א		40%	?	40%
ב		35%	?	30%
		25%	?	0%

כיצד חישבנו את משקל ההשקעה באחזois בנכס חסר סיכון? ובכן, ידוע לנו שסך משקלי ההשקעה בכל הנכסים בתיק ייחד חייב להתכנס ל-100% ! משקל ההשקעה ב - א ו-ב ייחד הוא 75%, ולכן משקל ההשקעה המשלים ל-100% שהוא 25% הוא משקל ההשקעה בנכס חסר סיכון. כזכור שסטיית התקן של נכס חסר סיכון היא אפס.

כדי לחשב את סטיית התקן של תיק ה כולל 3 נכסים מסווגים לכארה צריך צרך את הנוסחה הסופר מסורבלת הבאה:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

אלא שבמקרה שלנו הנכס ה"שלישי" הוא חסר סיכון. כלומר  $0 = \sigma_F = \sigma_C = \sigma$ . ולכן רוב הביטוי מתאפס וסטיית התקן של תיק השקעות מסווג שכולל שני נכסים מסווגים וגם נכס שלישי חסר סיכון הוא קצר משמעותית:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

נambil את נתונים השאלה בנוסחה מקוצרת זו ונקבל :

נכש	משקל השקעה באחזים בנכש	תוחלת התשואה	סטטיסטית התקן
א	40%	?	40%
ב	35%	?	30%
$R_F$	25%	?	0%

$$\sigma_P = \sqrt{0.4^2 * 0.4^2 + 0.35^2 * 0.3^2 + 2 * 0.4 * 0.35 * 0.4 * 0.3 * 0.3} \approx 0.2161 = 21.61\%$$

מסקנה : סטטיסטית התקן של תיק ההשקעות היא 21.61%

### 90 שאלה

בשוק הון המקיים את הנחות ה-CAPM ידוע :

הריבית חסרת הסיכון היא 5%.

תוחלת תשואת תיק השוק היא 15%.

סטטיסטית התקן של תיק השוק היא 20%.

ההשקיע ארתור בוחר בתיק עם תוחלת תשואת של 18%.

ההשקיע אוריאן בוחרת בתיק שטטיסטית התקן שלו 15%.

בחירת שני המשקיעים היא בתיקים ייעילים.

מה תוכלו לומר על העדפות הסיכון של המשקיעים?

א. ארתור שונא סיכון יותר מאשר אוריאן

ב. אוריאן שונאת סיכון יותר מאשר ארתור

ג. ארתור ואוריאן שונאי סיכון במידה שווה

ד. ארתור אוהב סיכון, ואילו אוריאן שונאת סיכון

ה. אוריאן שונאת סיכון ואילו ארתור אוהב סיכון

פתרון - התשובה ב, להלן חפירת הנמקה :

ידוע :

$$R_F = 5\%$$

$$E(M) = 15\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

ארתור :

$$E(AR) = 18\%$$

אוריאן :

$$\sigma(OR) = 15\%$$

אנו בעולם המקיים את הנחות מודל ה-CAPM. בהתאם, ולפי הנחות המודל, כל המשקיעים שונאי סיכון. יחד עם זאת, בהחלט יתכו משקיעים שונאי סיכון יותר / פחות אחרים. בהינתן שבחרתם בתיקים עילים, ההחלטה בהקשר זה תהיה פשוטה - המשקיע שבוחר בתיק מסוכן יותר מחברו, הוא פחות שונאי סיכון מחברו ולהפך.

את הסיכון שאוריין הסכימה ליטול על עצמה, אנחנו יודעים כמובן. המשמעות היא, שאם נוכל גם לחלק ולבודק מהו הסיכון שארטור נוטל על עצמו - פחות או יותר פתרנו את השאלה.

איזו נוסחה, בהנחה עילות, היא המתאימה ביותר לגלות את סטיית התקן בתיק של ארטור? המשווה הרלוונטי ביותר לחילוץ סטיית התקן של תיקיע ייעיל במודל- $\text{CAPM}$  בהינתן נתוני תוחלת השוק ( $M$ ), ריבית חסרת סיכון  $R_F$  וסטיית התקן של תיק השוק  $\sigma_M$  היא משווהת ה-CML עצמה:

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

במצבת נתוני השאלה ונתוני תוחלת ארטור נקבל חיש קל:

$$18\% = 5\% + \frac{15\% - 5\%}{20\%} * \sigma_{AR} \rightarrow \sigma_{AR} = 0.26 = 26\% > \sigma_{OR} = 15\%$$

הואיל וגילינו שארטור בחר בכפוף לאותם נתוני שוק בתיק מסוכן יותר, הרי שהוא פחות שונאי סיכון מאוריין (או: אוריין שונאית סיכון יותר מאשר ארטור).

הבהרה חשובה – למרות שארטור פחות שונאי סיכון מאוריין, לא נוכל לומר שהוא אוהב סיכון; שנאת סיכון (המחשה מטומטמת שאני נתן) היא כמו לשונו דגים; אם אני מוכן לאכול הרבה דגים בתמורה לכך ישילמו לי הרבה כסף – זה לא אומר שאני אוהב אותם, אלא שאני כנראה פחות שונאי דגים מאדם אחר שלא מוכן לאכול כל כך הרבה דגים למרות הפסיכו שהוא יכול לקבל בעד זאת.

אוהב סיכון – הוא אדם שעצם אכילת הדג מענגת אותו, עצם נטילת הסיכון מענגת אותו, והוא לא דורש בכלל פיצוי בדמות תוחלת תשואה גבוהה יותר. אוהבי סיכון בכלל לא חיים / קיימים במודל- $\text{CAPM}$ . כל הרעיון ב- $\text{CAPM}$  הוא לייצר תיקים עילים המזערים סיכון לכל רמת תשואה רלוונטית.



בקצהה : כל המשקיעים במודל ה-CAPM הם שוני סיכון בהגדלה ; הנקודה הספציפית ורמת הסיכון הספציפית בה יימצאו יכולה להעיד האם הם שוני סיכון יותר או פחות מאשרים ; אך זה לא הופך אותם לאוהבי סיכון .

#### שאלות מבחנים – מיקס ייחידה 8 :

מטרת התרגול כתת היא לפתרור ריבוי שאלות בנושא סיכון ותיקי השקעות, ללא חלוקה דיקוטומית או מופרדת ברורה בין המודל של נכסים מסוכנים בלבד (מרקובייז') לבין מודל ה-CAPM כמו שעשינו בסותה רבה ברוב התרגילים עד כה ; מדוע ? משום שאנו רוצים להיערך עקרונית לצורך שלנו בזיהוי המודלים תוך כדי תנועה והבחנה ברורה ביניהם .

#### שאלה 10

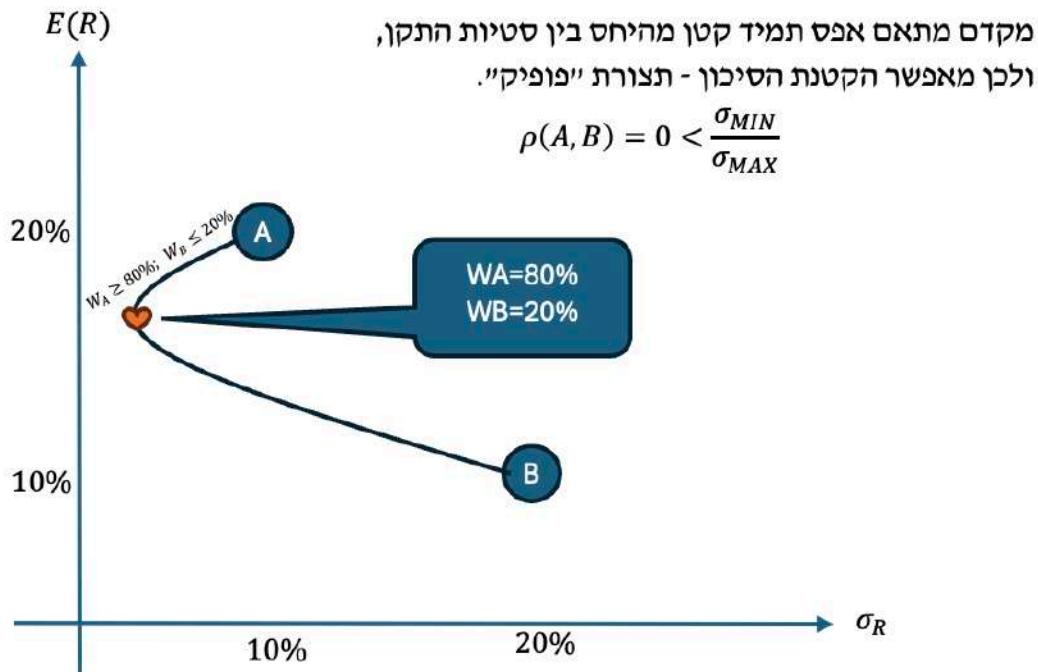
הנicho כי בשוק ההון קיימות שתי מניות בלבד : מקדם המתאים בין המניות הוא אפס .

מניה B	מניה A	תוחלת תשואה
10%	20%	תוחלת תשואה
20%	10%	סטטיסטית תקן

בחרו את הטענה הנכונה עבור מSCIיע דוחה סיכון :

- א. אף מSCIיע לא ישקייע יותר מ-20% מכספיו במניה B .
- ב. אף מSCIיע לא ישקייע פחות מ-20% מכספיו במניה B .
- ג. ניתן כי המSCIיע יבחר להSCIיע 70% מכספיו במניה A ו-30% מכספיו במניה B .
- ד. כל המSCIיעים יבחרו לחלק את כספם בין A ל- B , בין 0% ל-100% בכל מניה .
- ה. כל המSCIיעים יבחרו להSCIיע 100% מכספים במניה A בעלת תוחלת התשואה המרבית .

פתרון (תשובה א):



נקודות ה- ❤️ המיצגת את תיק מינימום סיכון, היא נקודת שבת משקלים המשקעה בכל אחד מהנכסים ניתנים לאפיון על בסיס נוסחת המשקלים:

$$W_A^{MRF} = \frac{\sigma_B^2 - \rho(A, B) * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho(A, B) * \sigma_A * \sigma_B}$$

$$W_A^{MRF} = \frac{0.2^2 - 0 * \sigma_A * \sigma_B}{0.1^2 + 0.2^2 - 2 * 0 * \sigma_A * \sigma_B}$$

$$W_A^{MRF} = \frac{0.2^2}{0.1^2 + 0.2^2} = 0.8 = 80\%$$

$$W_B^{MRF} = 1 - W_A^{MRF} = 1 - 0.8 = 0.2 = 20\%$$

לביון נקודת A

הייעילות על חלק העקום בין ה ❤️

תהליך העבודה שהפעלנו כלל איזור עוקום תמהילי ההשקעה, וזיהויו חלקו הייעיל, בהתאם לערך מקדם המתאים. מצאנו את המשקלים בתיק מינימום סיכון, וידענו שהחלק הייעיל של העקום נמצא החל מנקודת זו, ימינה ומעלה, ובהתאם – זיהינו את המשקלים יוצרו הייעילות שימושדים להשקעה. בהתאם, קבענו שתשובה A נכונה.

## שאלה 7

להלן מספר נתונים על מנויות A ו- B:

טוחלת	מניה A	מניה B
20%	10%	
	10%	20%

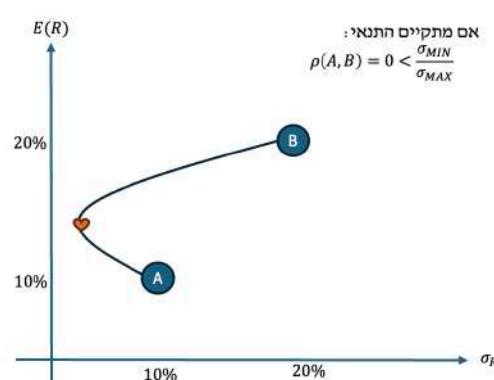
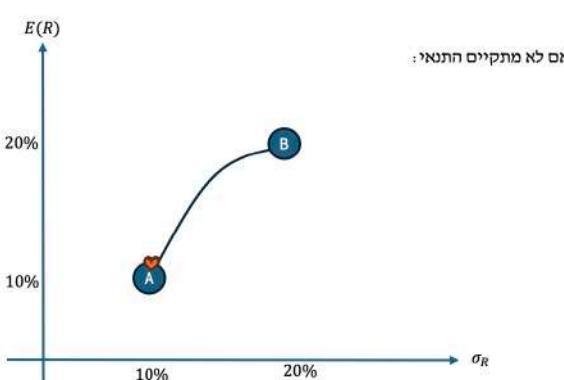
תיק המפוזר בין שתי המניות (לא אפשרות למכירה בחסר) עשוי להניב:

- טוחלת שיעור תשואה הנמוכה מ- 20% וסטיית תקן הגבואה מ- 10%.
- טוחלת שיעור תשואה בין 10% ל- 20% וסטיית תקן בין 10% ל- 20%.
- טוחלת שיעור תשואה בין 10% ל- 20% וסטיית תקן הנמוכה מ- 20%.
- טוחלת שיעור תשואה וסטיית תקן הגבואה מ- 10%.
- כל התשובות נכונות.

התשובה ה.

בשאלה זו, יש שני טריקים: הטריק האחד הוא שמקדם המתאים בין הנכסים לא ידוע, ולכן לא ברור האם מתייחסים במצב שבו אפשר להקטין סיכון (מיינין) או שאי אפשר להקטין סיכון (משמאלי). לכן צריך להתייחס לשני המצביעים.

הטריק השני הוא, שלא דיברו כאן על יעילות או על בחירת משקיעים, וגם לא דיברו על מחויבות לקיים תנאים מסוימים או מאפיין מסוימים; בסך הכל הניסוח אומר "עשוי להניב". כזו הניסוח, מופיע שוכן להראות באחד מהמקרים המתוארים שניתן להגיא לтик העונה להיגד כלשהו – ו מבחינתנו הוא מתקיים.



שאלה 9

הטבלה הבאה מတatta את התוחלת וסטיית התקן של שתי מניות:

B	A	מניה
		תוחלת
		סטיית התקן
20%	15%	
25%	20%	

מקדם המתאים בין שתי המניות הוא 0.5 (מינוס חצי).

משקיע מחלק את כספו שווה בשווה בין שתי השקעות. סטיית התקן של תיק המניות המשולב היא:

- א. 11.46%
- ב. 19.52%
- ג. 13.91%
- ד. 16.20%

ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**פתרון:**

זו כנראה השאלה הקלה ביותר שתראו אי פעם. מדובר בעולם עם שני נכסים מסוכנים בלבד, עם מקדם מתאים נתון, עם משקלים השקעה נזונים בכל נכס (שווי בשווה = 50% השקעה בכל אחד משני הנכסים), ועם נתוני תוחלת וסטיית התקן מן המוכן.

כל מה שנותר לנו לעשות זה להציב את הערכים בנוסחת סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים ולקבל חישוב קל:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

$$\sigma_P = \sqrt{0.5^2 * 0.2^2 + 0.5^2 * 0.25^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * 0.2 * 0.25 * (-0.5)} = 0.1146 = 11.46\%$$

התשובה א.

8. הטבלה הבאה מתארת את התוחלת וסטיית התקן של שתי מניות:

B	A	מניה
תוחלת תשואה		סטיית התקן
30%	10%	
80%	25%	

מקדם המתאים בין שתי המניות הוא 0.7.

משקיע היכול להשكيיע בשתי מניות אלו בלבד מעוניין להשיג תשואה של 21% על כספו. סטיית התקן של תיק המניות המשולב היא:

- א. 27.56%
- ב. 52.49%
- ג. 78.85%
- ד. 67.04%
- ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**פתרונות:**

שלב 1 – שימוש בנוסחת תוחלת תשואת תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים לשם חילוץ משקליהם המשקעה בכל נכס אשר יובילו לתוחלת הנтונה:

$$E(P) = W_A * E(A) + (1 - W_A) * E(B)$$

**בהתבזה:**

$$21\% = W_A * 10\% + (1 - W_A) * 30\% \rightarrow W_A = 45\% \rightarrow W_B = 1 - 45\% = 55\%$$

כעת, נוכל להציב את הערכיהם הרלוונטיים בנוסחת סטיית התקן של תיק המורכב מ-2 נכסים מסוכנים וסימנו:

$$\sigma_P = \sqrt{0.45^2 * 0.25^2 + 0.55^2 * 0.8^2 + 2 * 0.45 * 0.55 * 0.25 * 0.8 * 0.7} \approx 52.49\%$$

ולכן התשובה: ב.

7. לפניכם נתונים על תשואת השוק ועל תשואת מניה חברת "מאור" במהלך 4 השנים האחרונות:

תשואת מניה	תשואת השוק	שנה
13%	21%	1
21%	18%	2
38%	22%	3
8%	-5%	4

מכאן הביטה של חברת "מאור" היא:

- א. 0.399
- ב. 0.631
- ג. 2.68
- ד. 1.24
- ה. אף תשובה מהניל אינה נכונה.

**פתרון:**

שאלה זו היא סיציפית במיוחד והיא דורשת מיאתנו לחשב על בסיס נתונים גולמיים (תשואות מפורטוות) את הקשר (על בסיס שונות משותפת COV או מקדם מתאם) בין נתוני המניה לבין נתוני השוק, ועל בסיסם לחשב יישור את הביטה לפי אחת מבין שתי הנוסחאות המקובלות שלה.

בטור התחלה, נחשב את תוחלת התשואה של המניה ושל השוק. בהינתן שיש 4 תציפות בלבד, הנחთנו היא כי התוחלת היא הממוצע הפ疏ט של התשואה הנתונות:

$$E(Menaya) = \frac{21\% + 18\% + 22\% - 5\%}{4} = 14\%$$

$$E(M) = \frac{13\% + 21\% + 38\% + 8\%}{4} = 20\%$$

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{(13\% - 20\%)^2 + (21\% - 20\%)^2 + (38\% - 20\%)^2 + (8\% - 20\%)^2}{4}} = 11.37\%$$

נחשב כעת את השונות המשותפת בין תשואת המניה לתשואה השוק שהיא רכיב חיוני בחישוב יישור של הביטה:

$$COV(i, M) = \sum P_i * [R_i - E(i)] * [R_M - E(M)]$$

$$COV(i, M) = \frac{[(21\% - 14\%) * (13\% - 20\%) + (18\% - 14\%) * (21\% - 20\%) + (22\% - 14\%) * (38\% - 20\%) + (-5\% - 14\%) * (8\% - 20\%)]}{4}$$

כך קיבלנו :

$$COV(i, M) = 0.00936$$

כעת, נשתמש בנוסחת הביטא המבוססת על השונות המשותפת עם השוק, כלהלן :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

בהצבה :

$$\beta_i = \frac{0.00936}{0.1137^2} \approx 0.631$$

התשובה ב.

#### מבחן 6 - שאלה 8

8. בשוק ההון, המצוין בשווי משקל לפי ה-CAPM, נסחרות שתי מניות A ו-B. תוחלת התשואה של מניה A היא 12%, ותוחלת התשואה של מניה B היא 24%. הביטא של מניה B היא 1.5 ושער ריבית נטוול סיכון הוא 6%. מכאן הביטא של מניה A היא :
- 0
  - 0.75
  - 1
  - 0.5
- ה. לא ניתן לדעת ללא ידיעת תוחלת תשואת תיק השוק.

**מבחן 4 - שאלה 8**

**שאלה 8**

נתונים שני תיקים יעילים- A ו- B. שעור התשואה על תיק A הוא 10% ועל תיק B הוא 20%. סטיית התקן של תיק B גדולה פי 3 מסטיית התקן של תיק A. שער ריבית נטול סיכון:

- א. 5%
- ב. 10%
- ג. 12.5%
- ד. 7.5%
- ה. 15%

**מבחן 3 - שאלה 9**

**שאלה 9**

לפי ה- CAPM, אם לתשואה שני נכסים שונים אותו מקדם מתאם עם תשואת תיק השוק, הרי ש:

- א. לשניים אותם תוחלת שיעור תשואה אך סטיית התקן שונה.
- ב. לשניים אותם תוחלת שיעור תשואה ואלה סטיית התקן.
- ג. לשניים אותם סטיית התקן אך תוחלת שיעור התשואה יכולה להיות שונה.
- ד. לנכס בעל סטיית התקן הגבוהה יותר גם תוחלת שיעור תשואה גבוהה יותר.
- ה. כל התשובות הנ"ל אינן נכונות.

### מבחן 3 - שאלה 10

#### שאלה 10

דני השקיע את כספו בתיק השקעות ייעיל. מנהל התיק הודיע לו כי לכל תוספת של 2% לsiccon (כלומר, לסתירת התקן) על השקעתו, יוכל להגדיל את תוחלת שיעור התשואה ב- 2.5%. דני הודיע למנהל התיק כי אין ברצונו לסכן את כספו והוא מבקש להשקיע את כספו ללא Siccon. מנהל התיק הודיע לדני כי השקעה ללא Siccon משלמת ריבית של 5%. מכאן שמשוואת ה- CML (ב אחוזים) היא:

א.  $\mu_P = 2.5 + 1.25 \cdot \sigma_P$

ב.  $\mu_P = 5 + 2.5 \cdot \sigma_P$

ג.  $\mu_P = 5 + 1.25 \cdot \sigma_P$

ד.  $\mu_P = 2.5 + 2 \cdot \sigma_P$

ה. אין מספיק נתונים המאפשרים את מציאת משוואת ה- CML.

### מבחן 2 - שאלה 9

9. הנח כי שוק ההון מצוי במצב של שווי משקל לפי CAPM. לمنיה A תוחלת תשואה של 15%

ו-  $\beta$  של  $\frac{1}{2}$ . לمنיה B תוחלת תשואה של 20% ו-  $\beta$  של 1. לمنיה C תוחלת תשואה של

30%. מה תהיה ה-  $\beta$  של מניה C?

א. 1.3

ב. 0

ג. 2

ד. 1.8

ה. -0.5

### מבחן 1 - שאלה 10

10. בשווי משקל לפי CAPM תוחלת התשואה של מניה משקפת את שער הריבית נטול הסיכון

בתוספת פרמייה בגין:

- א. הסיכון שאעו ניטע למיזור.
- ב. סטיית התקן של המניה.
- ג. הסיכון המתן לפיזור.
- ד. סטיית התקן של תיק השוק.
- ה. תשובות א'ו- ד' נכונות.

### מבחן 1 - שאלה 6

6. לחברה מסוימת אפשרות להשקיע ב-2 פרויקטים המוצאים זה את זה אשר דוחשים השקעה של

100 ש"ח. פרויקט A יניב תזרים מזומנים שנתי נטו של 115 ש"ח בעד שנה. פרויקט B יניב תזרים מזומנים שנתי נטו של 120 ש"ח בעד שנתיים. שני הפchiaקטים ניתנים לביצוע פעם אחת בלבד ומהירות ההון 5%. בחרו את הטעינה הנטונה:

- א. נבחר בפרויקט A לפי כלל הענ"ג, ב- B לפי כלל השת"פ, וב- A לפי ממד הרוחיות.
- ב. נבחר בפרויקט B לפי כלל הענ"ג, ב- A לפי כלל השת"פ, וב- B לפי ממד הרוחיות.
- ג. נבחר בפרויקט A לפי כלל הענ"ג, ב- A לפי כלל השת"פ, וב- A לפי ממד הרוחיות.
- ד. נבחר בפרויקט B לפי כלל הענ"ג, ב- B לפי כלל השת"פ, וב- A לפי ממד הרוחיות.
- ה. נבחר בפרויקט B לפי כלל הענ"ג, ב- A לפי כלל השת"פ, וב- A לפי ממד הרוחיות.

### מבחן 1 - שאלה 7

7. לפרימה מחיר ההון של 10%. כלכלני הפירמה בנתו פרויקט השקעה קוונטציאוני ומצאו כי במחדר

ההון של הפירמה ממד הרוחיות של הפרויקט שווה ל-1. עבור איזה תחום של מחירי הון

הפחיקת יהיה כדי ?

- א. בתחום שבו  $10\% < K$  הפרויקט כדי.
- ב. בתחום שבו  $10\% > K$  הפרויקט כדי.
- ג. רק כאשר  $10\% = K$  הפרויקט כדי.
- ד. אין מספיק נתונים כדי לקבוע.
- ה. אף תשובה מהל' לאינה נכונה.

**מבחן 3 - שאלה 6**

**שאלה 6**

חברה בוחנת השקעה בפרויקט קונבנציונלי. במחיר הון של 8% ממד רוחניות של הפרויקט הוא 1.2, ואילו במחיר הון של 12% הוא 0.8. מכאן שהשת"פ של הפרויקט:

- א. גובה מ- 12%.
- ב. נמוך מ- 8%.
- ג. שווה ל- 10%.
- ד. נמצא בין 8% ל- 12%.
- ה. לא ניתן לדעת על סמך נתונים אלו בלבד.

**מבחן 2 - שאלה 6**

6. איזה מהמשפטים הבאים אינו תמיד נכון?
- א. שת"פ הינו שער ההיוון שבו הענ"ג שווה 0.
  - ב. ממד רוחניות גדול מ- 1 מעיד על ענ"ג חיובי.
  - ג. דרגה פרויקטים לפי קритריון הענ"ג תמיד יהיה זהה לדרגה פרויקטים לפי קритריון השת"פ.
  - ד. יתכנו מספר שת"פים לפרויקט.
  - ה. כל המשפטים הרשומים לעיל נכוןים תמיד.

### מבחן 2 - שאלה 7

7. תזרים המזומנים הנקי הצפוי מפרויקט מסוים הוא 13,000 ש"ח לשנה בתום כל אחת משלוש השנים הבאות. שט"פ הפרויקט הוא 10%, וענ"נ הפרויקט הוא 2,420 ש"ח. מכאן שמחיר ההון

לפיו חושב ענ"נ הפרויקט הוא:

- א. 6%
- ב. 8%
- ג. 10%
- ד. 135%

ה. לא ניתן לחשב את מחיר ההון מאחר ואין מספיק נתונים.

### מבחן 3 - שאלה 5

#### שאלה 5

להלן נתונים זרמי המזומנים של פרויקט מסוים:

4	3	2	1	0	שנה
1,000	700	500	300	-1,500	זרם מזומנים

מהו הענ"נ של הפרויקט, אם מחיר ההון הוא 10% לשנה בשנים 1-2, 12% בשנה 3 ו-15% בשנה 4.

- א. 256
- ב. 312
- ג. 400
- ד. 329
- ה. 344

**מינוי רצוי – יח' 11-9**

- יח' 7-5 העניקו לנו את הכלים הבסיסיים בחישובים פיננסיים: ערך הנוכחי (PV), ערך עתידי (FV) ויישומיהם – בפרויקטים, בהלוואות, ובהערכת כדאיות השקעות.
- יח' 8 העבירה אותנו לעולם של סטטיסטיקה: בעיקר כדי להבין את סיכון ואופן מדידתו, של קבלת החלטות רלוונטיות בתנאי סיכון, וכן ההשפעה של פיזור סיכון (לפי גישת תיקי השקעות) על הערך **למשמעות**.
- יח' 11-9 מוציאות אותנו מהפוזיציה של המשקיע ומחזירות אותנו לכובע מ="#">**מקבלי החלטות בחברה** – בהיבט זה שחברה צריכה **LAGIIS MIMON** (לגייס כסף) כדי לבצע את פעילותה, ומימון זה מורכב מ:
  - **הון עצמי** (נובע מהනפקת מנויות).
  - **הון זר** – גיוס מימון נגד נטילת התחייבות – הלואות שבחן כבר עסקנו, אבל גם באגרות חוב – מכשיר פיננסי ספציפי לגיוס חוב בחברות, דומה להלוואה אבל יש הבדלים בהגדרות ובאופן הsslיקה (מותי מקבלים כסף וכמה) ובכך עמוק.

**אנחנו נרצה, בהתאם:**

- א. לדעת טכנית איך מבצעים חישובי שווי וחישובים קשורים (חילוצים של פרמטרים) במכשירים הפיננסיים שנקרואים "אגרות חוב".
- ב. כיצד לתמוך (חישוב שווי, מחיר) של מנויות לפי מודל מסוים ספציפי (מודל גורדון – "היוון הדיבידנדים") וכיים לחלק ערכים מהמודל.
- ג. כיצד שילוב מקורות מימון בתמאל כזה או אחר – ובפרט: יותר חוב / יותר הון עצמי – משפיע על הסיכון למשקיעים, על מחיר ההון המשווקל של החברה WACC, **ועל שווי החברה** (מה עדיף לחברת בהיבט השאות ערכה ובאיזה הקשר – למומן בהון עצמי או בהון זר).

## פרק 1: חישובי אג"ח (יח' 9)

אג"ח – הגדרה:



אג"ח – אגרת חוב – היא מכשיר פיננסי שמנפיקה חברת ואשר מחייב אותה לשלם לאוחז בה תזרימי מזומנים  
משני סוגים :

- קופון** – מכפלה של הריבית הנקבה  $i_B$  (המודדרת באג"ח) בערך הנקוב  $B$  (המודדר באג"ח). למשל אם האג"ח בעלת ערך נקוב של 100, והריבית הנקבה 10%, הקופון יהיה  $10 * 10\% = 100$ .
- הערך הנקוב עצמו** – שכברירתה מחדל בקורס שלנו משולם בתשלום אחד בתום חי האג"ח (אם לא – צריך להביא לידי ביטוי את פרעונות לשיעורין במסגרת תזרימי המזומנים למשך).

מדוע לעזאזל שחברה **תשכים להתחייב לשלם למשקיע בעtid ? מה יוצא לה מזה ?** התשובה כמובן – החברה תדרוש תשלום בהווה بعد ההבטחה לקבל תזרימי מזומנים עתידיים. במקרה אחר, החברה מגייסת כסף היום, בתמורה להבטחתה לשלם בעtid (ואם זה מזכיר להם הלוואה... אתם צודקים).

- **הגבול הוא אופן חישוב התמורה והמחיר.**
- **בהלואות** – החברה קובעת את התמורה (סכום ההלוואה), והבנק קובע את ההחזר התקופתי.
- **באגרות חוב** – החברה קובעת את התשלום התקופתי, והמשקיע קובע את התמורה שיסכימים לשלם بعد זאת (בהתאם למחיר האג"ח).
- **מחיר האג"ח** נקבע בהתאם לערך הנוכחי  $P_V$  של תזרימי המזומנים באגרת החוב (קופון וערך נקוב), מנקודת ראות המשקיע (רווח האג"ח).
- **את חישוב ה-  $P_V$**  שmbססים על התזרימיים של הקופונים והערך הנקוב, כאשר ההיוון מתבצע בሪביה שנקראת **"מחיר ההון הזר"** / **"ריבית השוק על אג"ח"** / **"שיעור תשואה לפדיון"**.
- **המסר המרכזי** כאן הוא – שבעוד שהחברה היא זו שקובעת בתשקייף הנפקת האג"ח את התזרימיים שהיא מתחייבת לשלם לאוחז באג"ח, המשקיע הוא שיקבע את שווייה על בסיס חישוב הערך הנוכחי של תזרימיים אלו בריביה שהוא (המשך) דרוש.
- **בקצרה :** **ריבית נקובה = לחישוב התזרימיים ; כל ריבית אחרת (מהמודרגות) משמשת להיוון.**

### שאלה 9.1 – תמחור בסיסי של אג"ח – שנים שלמות

חברת "אלון סיון" בע"מ הנפקה ב-1.1.2020 אג"ח אשר ערכה הנקוב 100,000 ש"ח. האג"ח נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 5% המשולמת בתום כל שנה (תשלום הריבית יבוצע לראשונה ב-31.12.2020). ערכה הנקוב של האג"ח ייפרע בתשלום אחד בתום שנת 2026.

נדרש :

- מהו מחיר האג"ח במועד הנפקתה, אם ידוע שבמועד זה שיעור התשואה לפדיון הוא 8% לשנה?
- כיצד תשתנה תשובתכם, אם חלפה שנה ממועד ההנפקה (תשלום קופון אחד כבר בוצע), ובמועד זה, שיעור התשואה לפדיון הוא 4% לשנה?
- כיצד תוכלו להסביר את הקשר בין שיעור התשואה לפדיון לשווי האג"ח? התיחסו להגדרות מקובלות בשוק (פרמייה, ניכוי, פארו).



פתרונות :

#### פתרונות סעיף א

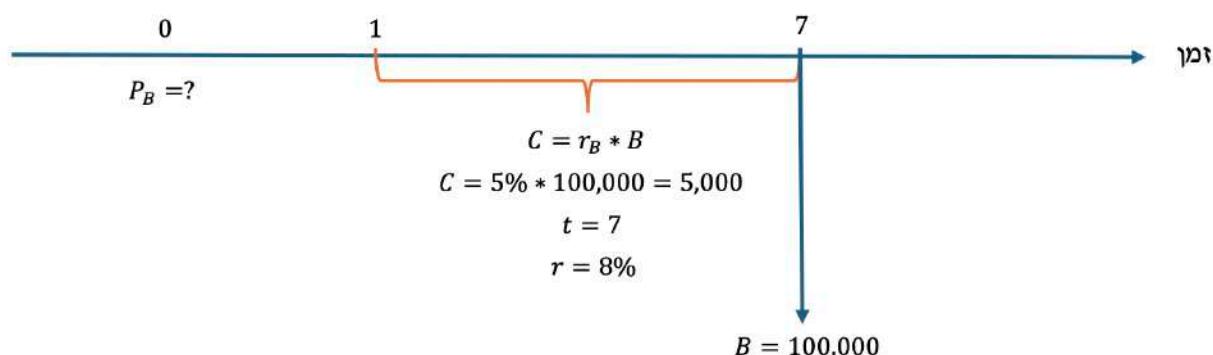
תזרים המזומנים הבסיסי שמקבל המשקיע, כל תקופת תשלום (וכאן – כל שנה) נקרא קופון, והוא מוחשב כמכפלת הריבית הנקובה בערך הנקוב :

$$\text{Coupon(Annual)} \text{ or } C = r_B * B = 5\% * 100,000 = 5,000$$

פרט לכך, בתום חי האג"ח (בחלוף 7 שנים מההנפקה) המחזיק באג"ח קיבל גם את הערך הנקוב (סכום נוסף) בסך 100,000 ש"ח.

מחיר האג"ח הוא, לפיכך, הינו של סדרת תזרימי מזומנים קבועים בסך 5,000 ש"ח כל אחד, ובנוסף, הינו תזרים חד פעמי של 100,000 ש"ח בתום שנת 2026.

בעוד שאלו תזרימי המזומנים, ההינו עצמו (הריבית המזונת לטובת חישוב ה-PV, הערך היום של האג"ח, במועד הנפקה) היא שיעור התשואה לפדיון שנקבע על ידי המשקיעים.





ואופן ההיוון (חישוב הערך הנוכחי) לכל התזרים :

$$P_B = C * PVFA(k_D, t) + B * (1 + k_D)^{-t}$$

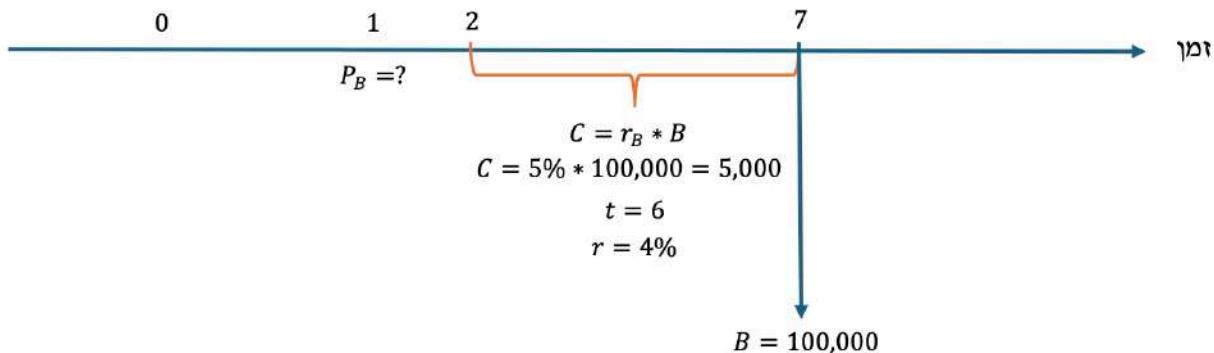
$$P_B = 5,000 * PVFA(8\%, 7) + 100,000 * (1 + 8\%)^{-7} = 84,379.04$$

מקרה :

משמעות	סימן
קופון : תזרים המזומנים התקופתי למשקיע, לפי ריבית נקובה מוכפלת בערך הנוכחי	$C = r_B * B$
ריבית נקובה	$r_B$
ערך נקוב	$B$
שווי האג"ח	$P_B$
שיעור תשואה לפדיון / ריבית השוק / מחיר ההון הזר / התשואה שודושים בעלי החוב בתכל"ס : זה ה z שאותו נציב לטובות ההיוון כפי שמתואר בתרשים לעיל. ההיגיון בסימן $k_D$ נועד לאפשר בהמשך הבחנה בין מחיר ההון (ריבית להיוון) של חוב לבין מחיר ההון (ריבית להיוון) של הון עצמאי.	$k_D$
מספר תזרימי המזומנים הקבועים (תזרימי הקופון) שנותרו ערב התמזור.	$t$

### פתרון סעיף ב

כיצד תשתנה תשובתכם, אם חלפה שנה ממועד ההנפקה (תשלום קופון אחד כבר בוצע), ובמועד זה, שיעור התשואה לפדיון הוא 4% לשנה?



אם חלפה שנה ממועד ההנפקה, זה אומר שמספר תזרימי המזומנים שהאג"ח צפוי להניב מפה ואילך (ועל בסיס זה ייקבע ערכה) יהיה 6 (לפי 7 תזרימי מזומנים בסך הכל, ניכוי האחד שכבר בוצע).  
 שינוי נוספים בתחום הוא שינוי התשואה לפדיון (ריבית להיוון) ירד ל-4%. הירידה בשיעור התשואה לפדיון לעולם לא תשפיע על הריבית נקובה שנקבעה במועד הנפקת האג"ח, ולכן **סכום הקופון נותר זהה והוא בלתי תלוי בשיעור התשואה לפדיון**, אשר השינוי בו ישפיע רק על הריבית שנזקן לטובות חישוב PV.

$$P_B = 5,000 * PVFA(4\%, 6) + 100,000 * (1 + 4\%)^{-6} = 105,242$$

(\*) הערכה: שווי של כל מכשיר פיננסי / השקעה, לרבות אג"ח, הוא תמיד הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים העתידיים שנותר לו (למכשיר הפיננסי) להניב לנכודת ההשקעה. תזרימיים היסטוריים שנתקבלו בידי משלקאים בעבר אינם חלק מהשווי והתמיהר לנכודת הזמן הנוכחי.

#### פתרונות סעיף ג

באופן גס, המחשנו את מערכת הקשיים הבאה בין הריבית הנקובה ושיעור התשואה לפדיון מצד אחד; לבין הערך הנוכחי ושווי האג"ח.

מושג	במלים	התוצאה	במלים	כasher
אג"ח בניכויו	מחיר האג"ח נמוך מהערך הנוכחי	$P_B < B$	כasher שיעור התשואה לפדיון גבוה מהריבית הנוכחי (סעיף א)	$k_D > r_B$
אג"ח בפרמייה	מחיר האג"ח גבוה מערכה הנוכחי	$P_B > B$	כasher שיעור התשואה לפדיון נמוך מהריבית הנוכחי (סעיף ב)	$k_D < r_B$
אג"ח בפארטי מלשון :	מחיר האג"ח לערכה שווה הנקוב	$P_B = B$	כasher שיעור התשואה לפדיון זהה לריבית הנוכחי (לא הוצג)	$k_D = r_B$



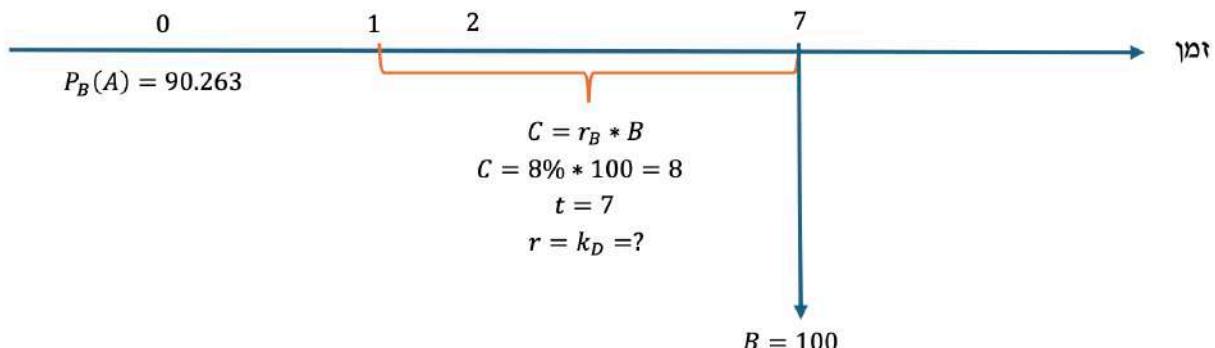
שאלה 9.2 – הנחות יסוד לגבי אג"ח – חילוץ שיעור תשואה לפדיון מאג"ח מסויימת לטובת אג"ח אחרת בשוק ההון קיימות שתי אגרות חוב. אג"ח "א" בעלת ערך נקוב של 100 ש"ח, נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 8% לשנה, המשולמת בתום כל שנה. ערכה הנקוב של האג"ח ייפרע בעוד 7 שנים, ותשלום הקופון האחרון בוצע אתמול. שווייה של אגרת חוב זו הוא 90.263 ש"ח. אג"ח ב שהוא אג"ח נוסף שנסחרת בשוק שערכה הנקוב 100, נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 5% לשנה שגם היא משולמת בתום כל שנה, התשלום האחרון בוצע אתמול, וערכה הנקוב ייפרע בעוד 11 שנים. נדרש:

- חשבו את שווי האג"ח מסווג ב.
- הניחו כתה כי בשונה מהנתנו, אג"ח ב תשלם את הקופון הקרוב שלו בעוד חודש אחד. פדיוןה בחולף 3 שנים וחודש מהיום. כמו כן, הניחו כי האג"ח משולמת ריבית בתדירות רבונית. בהתאם לשינויים אלו, מה יהיה שווי אג"ח ב במצב החדש?

פתרון:

### פתרון סעיף א

התבסטי על נתוני אג"ח א:



$$P_B(A) = 8 * PVFA(k_D, 7) + 100 * (1 + k_D)^{-7} = 90.263$$

המטרה הראשונית שלנו היא לעזור בנתוני תזרימי המזומנים של אג"ח א ושווייה, על מנת לחלץ את שיעור התשואה לפדיון, שהוא הריבית להיוון.

בקורס זה אנו מניחים ששיעור התשואה לפדיון של כל אגרות החוב המתוארות זהה, אלא אם נאמר מפורשות אחרת. טכנית: ה-IRR שמחלצים בגין אג"ח מסויימת, כוחו יהיה לתמחר אג"ח אחריות (כברירת מחדל). הפתרון של משואה זו הוא מסורבל מדי (לכן במלחה ובמרקירים רבים בבחינות, יהיה לכל היותר שני תזרימים, שניינו יהיה לחלץ IRR שלהם על בסיס פתרון משואה ריבועית). אני הצגתי יישום אקסלי פשוט:

	H	I	J	K
8			-90.263	0
9			8	1
10			8	2
11			8	3
12			8	4
13			8	5
14			8	6
15			108	7
16				
17	=IRR(J8:J15)		10%	חילוץ

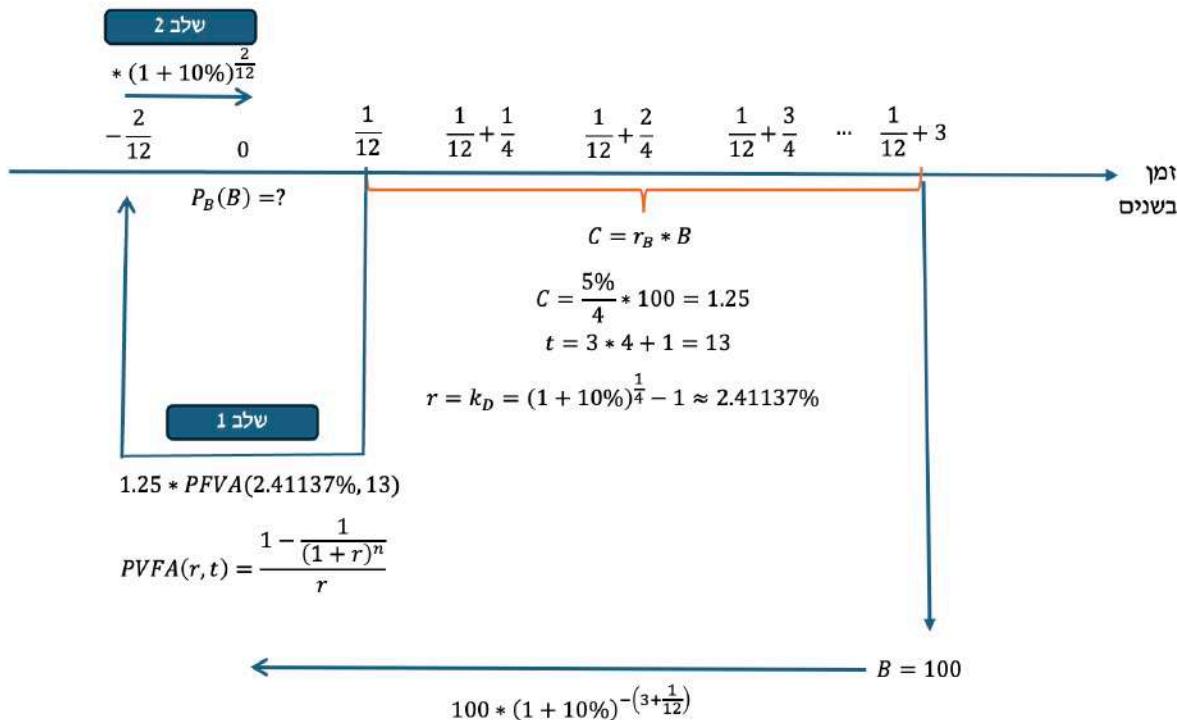
ה-IRR הייתה פונקציה אקסלית, זהה במהותה ל-IRR מיח' 6: אנו בעצם טוענים ש-IRR שבאופן כללי משקף את שיעור התשואה התקופתי המוצע בפרויקט למשקיע, באג"ח – משקף את שיעור התשואה המתkeletal (והנדרש) על ידי המשקיע באג"ח, ככלומר שיעור תשואה לפדיון.

וכעת, משתמש בשיעור התשואה לפדיון אשר חולץ מנתוני אג"ח לשם יישום תמחור שווי אג"ח ב, על פי נתוניה – זאת, לאור הנחת שיעור תשואה לפדיון זהה בין אגרות חוב בשאלות הקורס. נתוני אג"ח ב היו: אג"ח בעלת ערך נקוב 100, ל-11 שנים, שנושאת ריבית נקובה בשיעור 5%.

$$P_B(B) = 5\% * 100 * PVFA(10\%, 11) + 100 * (1 + 10\%)^{-11} = 67.525$$

## פתרונות סעיף ב

הנחנו כתעת כי בשונה מהנתון, אג"ח ב תשלום את הקופון הקרוב שלו בעוד חודש אחד. פדיונה בחלוף 3 שנים וחודש מהיומם. כמו כן, הנחנו כי האג"ח משלם ריבית בתדירות רבונית. בהתאם לשינויים אלו, מה יהיה שווי אג"ח במצב החדש?



התאמת ריבית הקופון לתשלום רבוני: נשים לב, שתחילה עליי לחשב את הקופון מחדש. אם הריבית הנקובה השנתנית 5%, אך תדירות תשלום הקופון היא כל רבון, עליי לחשב ריבית נקובה רבונית ועל בסיסה קופון רבוני.

התאמת של ריבית נקובה מתקופה לתקופה, מבוצע באמצעות חילוק פשוט (לא באמצעות ריבית דרייבית / חזקה). בשפה פשוטה:

$$r_B(\text{quarter}) = \frac{r_B(\text{Annual})}{4} \rightarrow r_B(\text{quarter}) = \frac{5\%}{4} = 1.25\%$$

התאמת שיעור התשואה לפדיון לרבעון: הויאל ומדובר באג"ח שיצרת סדרת תשלוםים רבוניים, גם שיעור התשואה לפדיון (הריבית להיוון) צריך להיות מתואם למונחים של רבון. לעיל ראיינו ששיעור התשואה לפדיון לשנה (שחולץ מנתוני אג"ח שתזירימיה שנתיים) הוא 10%. נתקן זאת לשיעור התשואה לפדיון רבוני. שיעור התשואה לפדיון הוא במונחים אפקטיביים. המשמעות היא **שההתאמת שיעור התשואה לפדיון מתקופה לתקופה מבוצעת באמצעות חזקה מתאימה ולא!** באמצעות כפל או חילוק.

$$k_D(\text{quarter}) = [1 + k_D(\text{annual})]^{\frac{1}{4}} - 1 \rightarrow (1 + 10\%)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2.4114\%$$

כדי לחשב כעת את שווי האג"ח, נתבבש על תזרימי הקופון (לפי הריבית הנקובה הרבונית, 1.25%) וכן על שיעור התשואה לפדיון הרבוני. אבל גם נרצה לדעת כמה תזרימי מזומנים ישנים ומתי הם מתרחשים.

בנตอน: האג"ח תשלם קופון בעוד חודש, ולאחר מכן תמשיך ותchiaה עוד 3 שנים שלמות. ב-3 השנים השלימות ישנים 12 קופונים רבונניים  $12 = 3 * 4$ , אך בנוסף קיימים קופון נוסף בעוד חודש, ולכן מספר הקופונים הכלל הוא 13. **שימוש לב:** סדרת קופונים, 13 במספר, שהראשון בעוד חודש ולאחריו המרווה בין קופונים רבוני.

$$P_B(B) = 1.25\% * 100 * PVFA(2.4114\%, 13) * (1 + 10\%)^{\frac{2}{12}} + 100 * (1 + 10\%)^{-(3+\frac{1}{12})} = 88.57$$

מה היה פה?

ה קופון הרבוני: ריבית נקובה רבונית כפול ערך נקוב	$1.25\% * 100$
היוון סדרת הקופונים רבונניים, בשיעור תשואה לפדיון רבוני, בהתאם במספר הקופונים	$PVFA(2.4114\%, 13)$
הוائل וה קופון הראשון בעוד חודש, ומרווח הזמן בין כל הקופונים העיקריים 3 חודשים, הערך הנוכחי הסדרתי מוביל אותנו 3 חודשים לפני התזרים הראשון, והוائل והתזרים הראשון בעוד חודש – מגיעים בזמן - 2 (מינוס שתיים, בחודשים). כדי לתקן את התוצאה בזמן 0 נכפול באחת ועוד הריבית בחזקה רלוונטי. השתמשתי כאן בריבית להיוון שנתית, בחזקת $2/12$ משום שגורם ההיוון הוא לחודשיים קדימה.	$(1 + 10\%)^{\frac{2}{12}}$
ערך הנוכחי של הקופונים נסיף את הערך הנוכחי מוכפל ב-1 ועוד שיעור תשואה לפדיון במונחים שנתיים, מותאם בזמן 0 בחזקה שלילית בסכום ייחיד של 3 שנים. וחודש (מועד קבלת התזרים הבודד ביחס להיום).	$100 * (1 + 10\%)^{-(3+\frac{1}{12})}$

**שאלה 9.3 – חישובי אג"ח בסיסיים (לTRGLול בית)** ת מהו אג"ח בנקודות זמן מאוחרות ממועד הנפקה להלן נתונים לגבי אגרת חוב שערכה הנקוב 100 ש"ח אשר הונפקה ב-1.9.2020: האג"ח מבטיחה ריבית שנתית נקובה בשיעור 10%, כאשר תשלום הריבית מדי שנה בסוף חודש אוגוסט. במועד הפדיון הסופי 30.8.2028 המשקיע יקבל גם את הקמן.

נדרש: מהו המחיר המרבי שהוא מוכן לשלם המשקיע עבור האגרת בתאריך 1.1.2022, אם ידוע ששיעור התשואה לפדיון של אג"ח דומות הוא 17% אפקטיבי לשנה?

פתרון:

$$P_B = 100 * 10\% * pva(17\%, 7) * (1 + 17\%)^{\frac{4}{12}} + 100 * (1 + 17\%)^{-(6+\frac{8}{12})} = 84.62$$

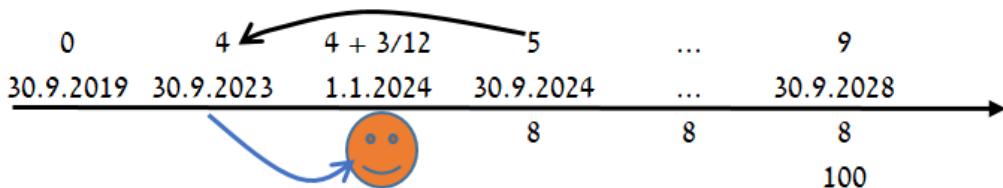
**שאלה 9.4 – חישובי אג"ח (לבית)**

חברת "גינוי שועלם" הנפקה ב-30.9.2019 אגרת חוב שערכה הנקוב 100 ש"ח. אגרת החוב נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 8% אשר מושלמת מדי שנה בסוף חודש ספטמבר. במועד הפדיון הסופי 30.9.2028 יקבל המשקיע גם את הקאן. מהו המחיר המרבי שהייה מוכן לשלם המשקיע עבור האג"ח ב-1.1.2024, בהנחה ששיעור התשואה לפדיון של אג"ח דומות במועד זה הנזק 12% לשנה?

#### פתרון שאלה 9.4

אגרת החוב הונפקה ב-30.9.2019 משלם בהגדלה תשולמי קופון שנתיים ב-30.9.30 של כל שנה. סכומו של קופון שנתי הוא כריגל המכפלה הפחותה של הריבית הנקובה (8%) בערך הנקוב (100) וMSC סכומו 8 ש"ח. בנוסף, יבוצע תשלום אחד וחיד של סך הערך הנקוב ב-30.9.2028 לידי המחזיק באג"ח (100). שיעור התשואה להיוון – ריבית להיוון – 12%.

נקודות התמחור (ההוויה לצרכי השאלה) היא ה-1.1.2024. נכוון לנקודת זמן זו המיצגת את מועד התמיהיר, נותרו עוד 5 תזרימי קופון לביצוע, ב-30.9. של כל אחת מהשנים: 2028, 2027, 2026, 2025, 2024.



מהוון לאחר בריבית	9
מטרימה: זמן	9
ערך נקוב, תשלום אחד	
בתום התקופה	
זמן 4+3/12	
כלומר 4+9/12 לאחר	
$PB = 8 * PVFA(12\%, 5) * (1 + 12\%)^{3/12} + 100 * (1+12\%)^{-(4+9/12)}$	
נותרו עוד 5	
תזרימי קופון, זמן:	5
קופון	
לצורך	
תקופתי	
היון	
ריבית נקובה	
זמן	5
ריבית נקוב	
כפול ערך נקוב	
את שיעור	6
התשואה	7
8% * 100	8
לפדיון	9

$$PB = 88.04$$

הסבר: עליינו לדעת כי מחיר אגרת חוב הוא תמיד הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים העתידיים שיקבל המשקיע כתוצאה מרכישתה במועד החישוב. במקרה שלנו, אנו נדרשים לתמחר את האג"ח ליום 1.1.2024, נקודת זמן המאוחרת ב-4 שנים ו-3 חודשים ממועד הנפקתה הנוכחי. נכוון למועד זה האג"ח צפוי לשלם למחזיקיה 5 תזרימי מזומנים שנתיים בגובה הקופון, ב-30.9. של כל שנה עוקבת, וכן ב-30.9.2028 תקובל חד פעמי בגובה הערך הנקוב.

הערך של סדרת הקופונים מוביל בהגדלה תקופת תשלום אחת אחרת (שנה אחרת) ביחס למועד התקובל הקרוב ביותר נכוו למועד החישוב. הויל וה קופון הקרוב יחולק ב-30.9.2024, חישוב הערך הנוכחי בהתבסס על PVFA מוביל ל-3.09.2023. מכאן, עלינו לקדם את התוצאה על ידי דחיפה קדימה של התוצאה במשך 3 חודשים, ולהוסיף לכך את הערך הנוכחי של הסכום היחיד המתkeletal בתום התקופה (הערך הנוכחי).

שים לב, שכל הערכים מהוונים בשיעור התשואה לפדיון. לעולם לא מהוונים בריבית הנקובה. הריבית הנקובה קבועה תזרימיים, אופן היוגם תלוי בריבית שמקפת את התשואה הנדרשת / מחיר ההון.

## פרק 2: חישובי תמחור מניות (יח' 11)

- **מני רצוי:** שווי אג"ח / מחיר הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שהוא משלהם למשקיעים. באופן כללי – שווי נכס הוא הערך הנוכחי של התזרימיים הנקיים שיתקבלו בידי רוכשיו.
- גם לגבי מניות – אנו ניחסים את אותו עיקרונו – **שווי מניה הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שצופים המשקיעים במניה לקבלת.**
- בעוד שבאג"ח תזרימי המזומנים מוגדרים היטב: כוללים קופון וערך נקוב.
- לעומת זאת, במניות (מכשיר פיננסי שנקנה כוחה לחברה) – תזרימי המזומנים של המשקיעים כוללים **דיבידנדים** (הרווח שמחולק למשקיעים, ואם יש מידע על מכירת המניה – גם התקובל במכירתה).
- המודל הבסיסי לפחות באופן ההסבר העקרוני שלו, יצא מנקודת הנחה שההשקעה במניות היא השקעה לטוחה ארוך. ובתוך הארוך הזה, לא זו בלבד לנו צופים כמשקיעים לקבל דיבידנדים – אנו מצלפים שסכום הדיבידנד יעלה עם הזמן (בהתאם לקצב התפתחות החברה).

ואם זה כך, התהיליך הטכני שמלואה תמחור מניות יישען תכל'ס על שני עקרונות:

- **שווי מניה הוא ערך נוכחי של סדרת דיבידנד אינסופית (למניה אין תוקף / פרעון מוגדר).**
- **סדרת תזרימי הדיבידנד האינסופית – במקרים רבים – צומחת, ושיעור צמיחתה – נתון.**

### הנוסחה הטכנית לתמחור מניה – מודל היון הדיבידנדים – גורדון

$$P_S = \frac{DIV}{k_E - g}$$

כאשר :

סימן	משמעות
$P_S$	מחיר המניה – Price of Share
$DIV$	הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחורי שיעור הצמיחה קבוע
$k_E$	מחיר ההון העצמי, התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות

דges חשוב: כמו בכל נוסחה של חישוב ערך נוכחי סדרתי (וכאן – מדובר בערך נוכחי של סדרה אינסופית צומחת), התוצאה המתקבלת מיישום הנוסחה מובילה אותנו לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד תזרים המזומנים הראשון בסדרה.

**אופן חישוב מחיר ההון העצמי  $k_E$ :**

- אם מחיר המניה נתון, יחד עם פרמטרים נוספים, אפשר לחוץ את מחיר ההון העצמי על בסיס הצבה בנוסחה.
- בנוסף – חיבור ליה' 8: התשואה הנדרשת על מניה בודדת נקבעת על ידי קו ה-SML. לכן, אם קיימים נתונים רלוונטיים, ניתן גם לחשב את ה- $k_E$  כך:

$$k_E = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_E$$

- ביה' 11-10 (בחלון העיקרי שדן במבנה ההון והשפעתו על שווי החברה) קיימים משפט נוסף שנקרה "המשפט השני של מודיליאני ומילר" והוא מאפשר לחשב את מחיר ההון העצמי בחברה. נגיעה לזה.

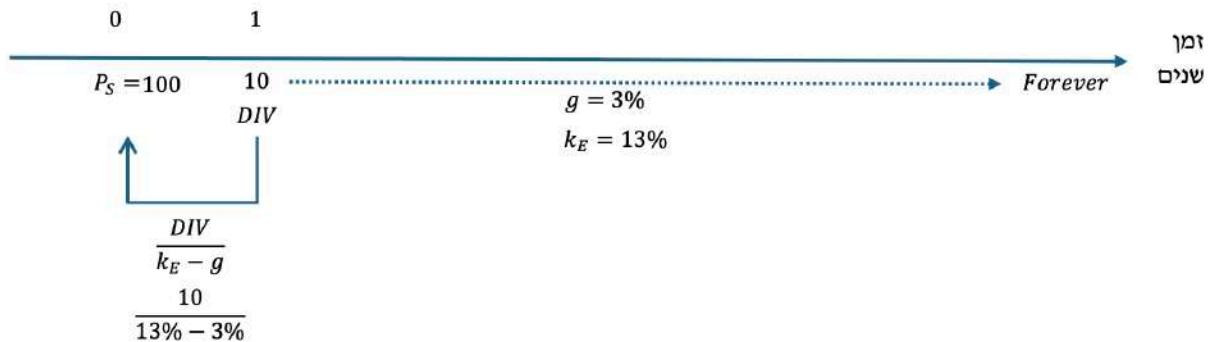
#### שאלה 11. תមhor מניות בסיסי – מודל גורדיון

מניה AM היא מניה הנסחרת בבורסה לניראות ערך בתל אביב. על פי תחזיות האנליסטים, המניה צפוייה לחלק לבני המניות בעוד שנה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה. שיעור הדיבידנד צפוי לצמיחה כל שנה ב-3%. התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה היא 13%.

- מהו מחיר המניה היום?
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הקרוב ביותר, בסך 10 ש"ח, יתקבל מחר?
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד האחרון בסך 10 ש"ח חולק אטמול?
- מהו מחיר המניה אם, בשונה מהנתון, הדיבידנד הקרוב ביותר בסך 10 ש"ח צפוי להתקבל בעוד 8 שנים (כלומר, בתום כל אחת מהשנים 1-7 אין תקופי דיבידנד בכלל).
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הצפוי הוא 10 ש"ח בעוד שנה, 20 ש"ח בעוד שנתיים, 30 ש"ח בעוד 3 שנים, 48 ש"ח בעוד 4 שנים, ובכל שנה עוקבת, יצמוך סכום הדיבידנד בשיעור קבוע של 3%?

פתרונות:

## פתרון סעיף א

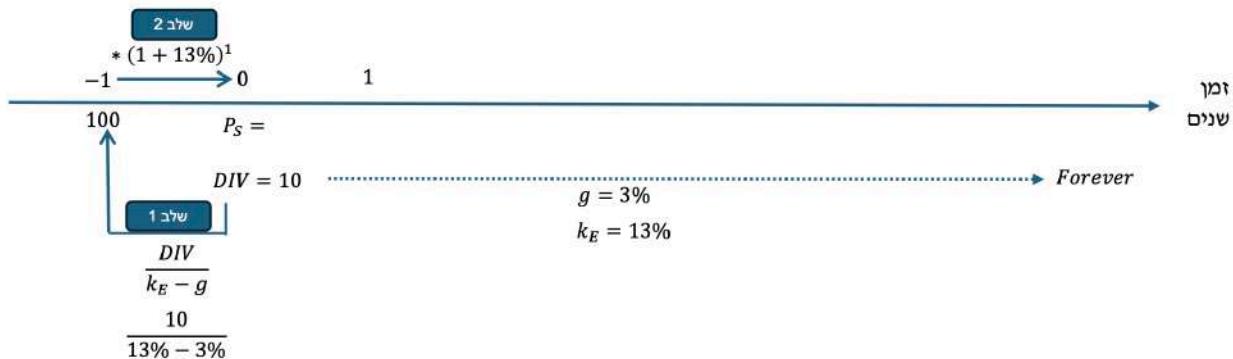


אופן החישוב:

$$P_S = \frac{DIV}{k_E - g} \rightarrow P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} = 100$$

הוائل והדיבידנד הקרוב ביותר הוא בעוד שנה, ומרווח הזמן בין כל שני תזרימי דיבידנד עוקבים הוא שנה, אני מוקף "אחת אחרת" ביחס למועד הדיבידנד הקרוב. אם הדיבידנד עוד שנה, קפיצה אחת אחרת מובילה לזמן 0 וסיימת. בקיצור: תזרימי "תום תקופה" בקטע הכיר רגיל שיש.

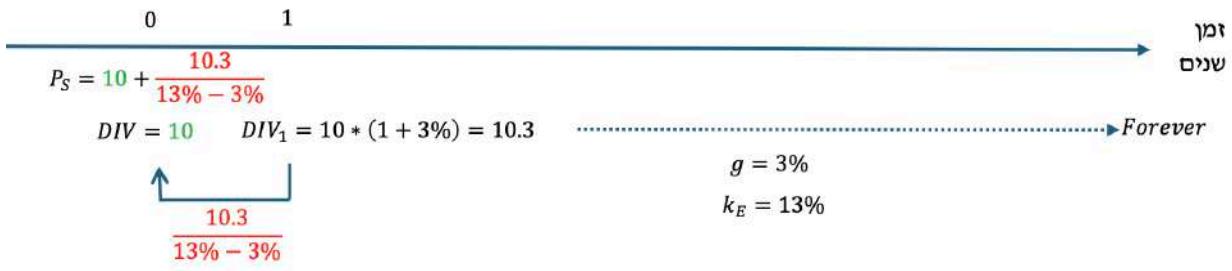
## פתרון סעיף ב



"מחר" מבחןינו = "עוד דקה" כלומר התזרים העתידי הקרוב ביותר הוא בזמן 0 (תזרימי תחילת תקופה). לפיכך, חישוב הערך הנוכחי שמקפיד אוטומטית את אחת אחרת – מוביל בזמן -1. עליי לתקן על ידי מכפלה באחת ועוד הריבית (מחיר ההון העצמי) פעם אחת:

$$P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%) = 113$$

דרך נוספת היא להתבסס על משווהת היון אשר נוטלת את התזרים הראשונים בנפרד, ואת יתר התזרמים מזמן 1 צפונה בנפרד:



$$P_S = 10 + \frac{10 * (1 + 3\%)}{13\% - 3\%} = 113$$

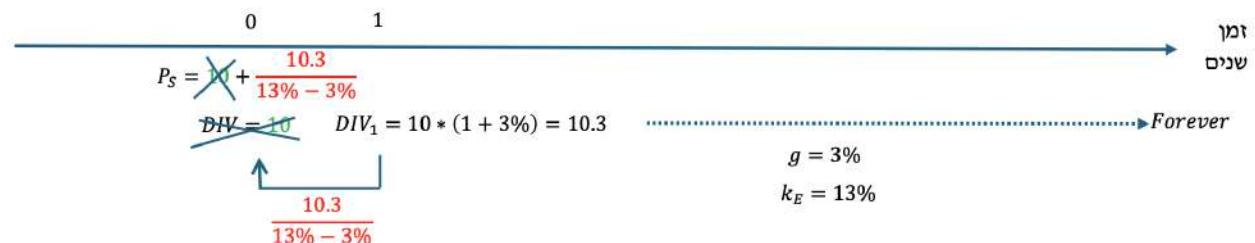
מה עשיתי כאן? התייחסתי לכך שהتوزרים הראשונים בסך 10 כנתון הוא תזרים מיידי, ולכן ערכו הנוכחי זהה לסכומו. התזרים העוקבים מזמן 1 צפונה, כוללים (במיוחד בהקשר לתזרים בזמן 1) צמיחה בשיעור של 3% (לשנה). לכן המונה מגלם זאת. המכנה נותר זהה, וכך הוא בעצם מהוון סדרת תזרים מזמן 1 צפונה לזמן 0 לפי העיקנון של "אותה אחורה" במצב כזה לא תדרש התאמה (כי מתיחסים לזמן 0 בנפרד, ולזמן 1 צפונה בנפרד).

**מדוע הצגתי דרך זו? בדרך זו (השניה, של פיצול של זמן 0 בנפרד וכל היתר בנפרד) יש יתרון באשר לשאלת מסויימת רוצחים לחלץ את שיעור התשואה להוון העצמי.**

### פתרונות סעיף ג

מהו מחיר המניה אם הדיבידנד האחרון בסך 10 ש"ח חולק אטמול?

תחילה, הצהרה: שווי נכס לעולם לא מגלם שווי של תזרים היסטוריים, אלא רק תזרים עתידיים. התזרים העתידיים הם פונקציה של התזרים ההיסטוריים ושיעור הצמיחה. בפרט, אם הדיבידנד האחרון חולק אטמול, הרי שהדיבידנד הבא צפוי בעוד שנה ועוד לתום אותה שנה, הדיבידנד יצמץ ב-3%.



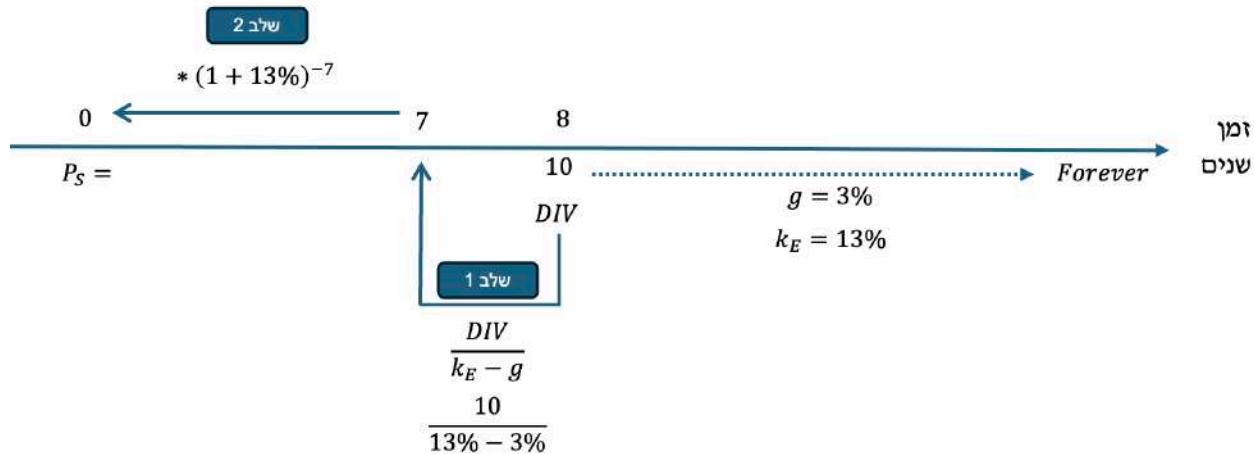
הסימן ב-X כל תכליתו זה להבהיר מעל לכל ספק שחדיבידנד ההיסטורי (מאטמול, אך עדין בעבר) הוא לא רלוונטי כלל לתמוך המניה לאחר קבלתו. מהוונים רק הדיבידנדים שלאחר מכן:

$$P_S = \frac{10 * (1 + 3\%)}{13\% - 3\%} = 103$$

מה עשינו כאן? במנה קיימים התזרים העתידיים הקרובים ביותר, בעוד שנה – 10 ההיסטורי בתוספת צמיחה שנתית. במכנה, ההפרש בין מחיר ההוון העצמי לשיעור הצמיחה. והואיל והדיבידנד הקרוב ביותר הוא בעוד שנה, ערכו הנוכחי שמקפיד את אותה מוביל בדיקות זמן 0 ללא צורך בתאמה.

#### פתרון סעיף ד

מהו מחיר המניה אם, בשונה מהנתנו, הדיבידנד הקרוב ביותר בסך 10 ש"ח צפוי להתקבל בעוד 8 שנים (כלומר, בתום כל אחת מהשנים 7-1 אין תקولي דיבידנד בכלל).



משוואת הפתרון :

$$P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%)^{-7} \approx 42.51$$

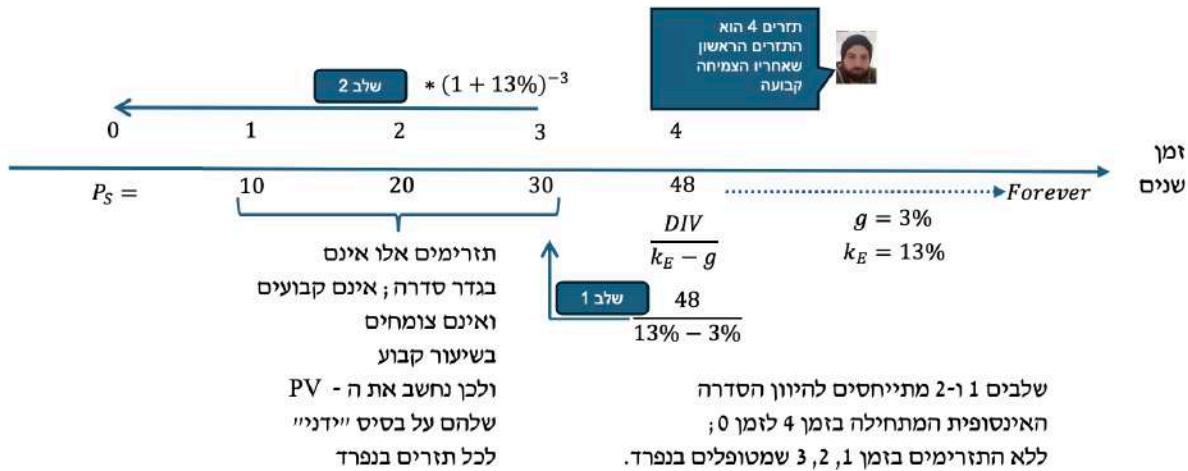
מה עשינו כאן?

מדובר ב-10 ש"ח וזהו הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחריו הצמיחה קבועה. לכן זה המחיר בנוסחה. במכנה – ההפרש בין מחיר ההון לבין שיעור הצמיחה. אלא שהואיל וחישבנו את הערך הנוכחי של סדרה שהחלה בזמן 8, הקפיצה האוטומטית אחת אחרת לא מובילה אליו لأن שאני רוצה אלא לנקודה שהיא "אחד אחרת" כלומר בזמן 7. לכן עליי לבצע חתמה נוספת זמן 7 לזמן 10, וזה על ידי:  $(1 + 13\%)^7$

#### פתרון סעיף ה

מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הצפוי הוא 10 ש"ח בעוד שנה, 20 ש"ח בעוד 3 שנים, 30 ש"ח בעוד 3 שנים, 48 ש"ח בעוד 4 שנים, ובכל שנה עוקבת, יצמץ סכום הדיבידנד בשיעור קבוע של 3%?

סעיף זה מציג בפנינו מצב שבו שיעור הצמיחה משנה 1 לשנה 2 הוא 100%, שיעור הצמיחה מהשנה ה-2 ל-3 הוא 50%, שיעור הצמיחה מהשנה ה-3 ל-4 הוא 60%, ורק לאחר מכן שיעור הצמיחה מתקבע על 3%. כאשר אנחנו מתמכורים מניות לפי מודל גורדון : **תמיד ולעולם נרצה ליזהות את אותו דיבידנד שאחריו הצמיחה קבועה. כאן ספציפית – אחרי התזרים של תום שנה 4, הצמיחה מתקבעת.** לכן, נוכל ליחס את נוסחת גורדון על התזרים בזמן 4.



כǐ מה אומרת ההגדרה? המונח בנוסחת גורדון הוא תזרים הדיבידנד הקרוב ביותר שאחוריו שיעור הצמיחה קבוע. את התזרים הראשונים (לא כולל תזרים זמן 4) נ呼ו "ידנית" בנפרד:

$$P_S = 10 * (1 + 13\%)^{-1} + 20 * (1 + 13\%)^{-2} + 30 * (1 + 13\%)^{-3} + \frac{48}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%)^{-3} \approx 378$$

**באדום** - שלושת המחוברים הראשונים הם התזרים הבודדים בשנים 1, 2 ו-3, טרם התקבועות הצמיחה.

**בירוק** - המחבר הריבעי הוא התזרים זמן 4 שאחוריו הצמיחה קבועה וליו הופעל מודל גורדון (נוסחת ההיוון של הסדרה הצומחת). החישוב מוביל אותה אחריה (כיהה לסדרה) כלומר לזמן 3, ויש צורך לבצע התאמה נוספת זמן 3 לפחות על ידי מכפלה מתאימה.

## שאלה 11.2 – תמהור מניות – המצח המבריק – לבית

מנית "המצח המבריק" חילקה לפני דקה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה. התכנון הוא לחלק דיבידנד כל 5 שנים. שיעור הצמיחה השנתי הוא 4%. התשואה הנדרשת על ידי משקיעים בחברות דומות היא 14% לשנה.

נדרש :

- מהו המחיר המרבי שתסכימו לשלם על המניה היום?
- כיצד, אם בכלל, תנסה תשובהכם בהנחה שאתם מעוניינים להחזיק במניה 8 שנים בלבד?

פתרונות :

פרק :

בכלל, תמהור מניה הוא הערך הנוכחי של הדיבידנדים שיתקבלו. כאשר **הדיבידנדים צומחים** (בשיעור קבוע) **לאינסוף**, קיימת נוסחה רלוונטית לחישוב הערך הנוכחי, כדלקמן :

$$P_S = \frac{Div}{k_E - g}$$

כאשר  $Div$  הוא הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחוריו הצמיחה קבועה,  $k_E$  הוא שיעור הצמיחה הנדרש, ושיעור הצמיחה הוא  $g$ . כמו כל נוסחת היוון סדרה, גם נוסחה זו מובילה לנקודת הזמן שהוא "אחד אחריה" ביחס לתזרים הראשונים בסדרה.

פתרונות סעיף א :

$$k_E(5 \text{ years}) = (1 + 14\%)^5 - 1 = 0.925414582 = 92.5414582\%$$

$$g(5 \text{ years}) = (1 + 4\%)^5 - 1 = 0.216652902 = 21.6652902\%$$

$$P_S = \frac{10 * (1 + 4\%)^5}{0.925414582 - 0.216652902} = 17.1659$$

מסקנה : שווי המניה היום, המבטא את הערך הנוכחי של סדרת הדיבידנדים האינסופית הצומחת הוא 17.1659 ש"ח.

שימוש לב : כמו כל היוון סדרה, גם ערך הנוכחי של סדרה אינסופית צומחת מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא תקופת תשלום אחת לפני מועד התזרים הראשונים בסדרה. ספציפית כאן, הדיבידנד הקרוב הוא בעוד 5 שנים (כי התזרויות 5 שנתיות, והאחרון חולק לפני דקה). לכן, כאשר מהוונים סדרה זו, ו קופצים 5 שנים לאחר מועד התזרים הראשונים, מגיעים בדיקן לזמן אפס והכל מצוין.

בוחלט יתכן שהתזרים הראשונים יהיה בנקודת זמן אחרת, ואז תדרשנה התאמות.

**פתרונות סעיף ב:**

מחיר המניה אינו פונקציה של תקופת ההחזקה בה, כאשר הפרמטרים להיוון קבועים. זאת מושם שככל הערך ש"לא מתפרק" לאור המכירה המוקדמת (דיבידנדים לאחר זמן 8), יփוך להיות מוגלים במחיר המכירה. מטעמי קוצר היריעה לא נוכיח משפט זה (יש על זה דיון רחוב יותר בחלקים אחרים במחברת).

**שאלה 11.3 בנושא שימוש במחיר מניה כדי לאמוד את מחיר ההון העצמי של החברה – לבית רוחוי** חברת "סקט לומדים" גדלו בשנים האחרונות בקצב של 8% בשנה. בתום השנה הם הסתכמו ב-2 ש"ח למניה. מחיר המניה בשוק הוא 30 ש"ח והחברה החליטה לחלק דיבידנד בסכום של 1.2 ש"ח בסוף שנת הפעולות הקרובה.

מהו מחיר המון העצמי של החברה, לפי מודל הצמיחה של גורדון, בהנחה ששיעור צמיחה הדיבידנד שווה לשיעור הנידול ברוחוי החברה?

**פתרונות :**

מחיר המניה הוא הערך הנוכחי של תזרימי הדיבידנד ובהינתן ההנחה שהם קבועים בשיעור קבוע לאינסוף, הנוסחה הרלוונטית להיווןם היא :

$$P_s = \frac{DIV}{k_E - g}$$

המונח  $k_E$  מייצג את שיעור התשואה הנדרש על המון העצמי, ולתשומתיכם שמלעתים מסומן כ-  $s$  וכן משקף את מחיר המון ( $k$ ) הנדרש بعد השקעה במניות החברה ( $s = \text{shares}$ ).

כך או אחרת, בהצבת נתוני השאלה נקבל :

$$30 = \frac{1.2}{k_E - 8\%} \rightarrow k_E = 12\%$$

ואשר על כן, מחיר המון העצמי של החברה הוא 12%.

### פרק 3: ההשפעה של תמהיל מקורות המימון על שווי החברה ועל מחיר הון (יח' 11-10)

הגדירות התחלתיות... המשך יבוא...

#### מיini רציו:

לאחר שדנים באופן החישוב הבסיסי של מחיר מניה (ערך נוכחי של דיבידנדים) ומחיר אג"ח (ערך נוכחי של קופונים וערך נקוב) – נשאלת השאלה – אבל איך זה קשור לניהול פיננסי? גם בספרי הקורס נכתב בכוורת: "תורת המימון – ניהול פיננסי של גופים עסקיים". קיים דגש עקרוני בהזון הקורס לגבי התפקיד של מימון בחברות, לא רק בהקשר השקעתי.

ומה שאנו רוצים לגלו ביחסות האחורה של הקורס זה את התשובה לשאלת – כיצד מימון במניות ו/או בחוב משפיע על החברה עצמה (לא על המשקיעים במניות והאג"ח דזוקא; ממש על השווי של החברה כולה) ואייך זה מתבטא לקבלת החלטות פיננסיות מצדה.

למעשה, זה א-ב של ניהול פיננסי. סמן"ל הכספי של החברה אמון בין היתר על בחירת מקורות המימון לחברה, והשאלה האם לגיס הון עצמי (מניות) או חוב היא שאלה משמעותית גדולה גם מצד החברה המגיסת.

#### בקצרה:

"תכליס, ד"ר צבן, אם החברה שלי צריכה כסף... אנפיק מניות? אנפיק אג"ח? מהם שיקוליהם?" זה הבסיס ליח' 10-11.

#### גיוס מימון בהון עצמי / הון זר – והשפעות על הסיכון למשקיעים (בעלי המניות)

- כדי להבין מה המשמעות של הנפקת מניות או אג"ח על החברה, צריך להביט קודם כל על ההשפעות הקשורות לסיכון.
- נטילת הלואות ו/או הנפקת אג"ח מבונה גם "מינוֹף פִינְסִי". פועלות המינוֹף ממשעה – לבצע פעולה שיכולה להניף את החברה למעלה (כלכליות – להגדיל את תשואתה) אבל גם עלולה להוריד אותה למטה (להקטין את תשואתה). ולכן יוצרת סיכון ממשמעותי יותר למשקיעים במניות החברה.
  - איך? מודיע?
- נניח שחברה רוצה להתרחב ולשם כך מגייסת חוב בהיקף 100,000 ש"ח בריבית 10%. ונניח שהפרויקט הנ"ל רוחchi בשיעור 2%. המשמעות הפרקטית היא שהפרויקט הפסדי – כי אם הפרויקט עצמו נתן 2% ועלות המימון היא 10%, הפסדו (הצד השלילי של המינוֹף הכספי) – אם נוטלים חוב, את הריבית משלמים גם כשנכשלים).
- נביט בuest על הצד השני והחיובי של המطبع. נניח שהחברה מגייסת חוב בהיקף זה בריבית זהה, אבל הפרויקט שאליו ישמש החוב היה רוחchi בשיעור של 22%. המשמעות הפרקטית היא שלא זו בלבד שהפרויקט רוחchi – אלא הועיל והגדיל את התשואה לבני המניות. מודיע? כי הבנק דורש 10% בלבד מהרווח (לפי הריבית שנקבעה בהסכם) וכל היתר – זורם לכיסם של בעלי המניות ומגדיל את תשואתם.
- בקצרה:** כשותלים חוב, תשלומי הריבית ישולמו בכל מקרה, והם קבועים. אם הרוחחים הנובעים מהפרויקט גבוהים מריבית זו – התשואה תגדל. ואם הם נמוכים ממנה – התשואה תקטן. העבודה

שניטילת החוב יכולה להרים את התשואה למטה או להוריד אותה לרצפה – היא הלב של סיכון הנובע מניטילת חוב.

אוקי, אז אם מגייסים חוב במקום הון עצמי, הסיכון לבעליים גבוה יותר... זה אומר שזה לא כדאי?

- לא בדיק.
- ככל שנותלים התחייבות בהיקף גבוה יותר הסיכון לבעליים (בעלי המניות) גדול.
- העלייה בסיכון לבעלי המניות מتبטאת בכך שהם ידרשו תשואה גבוהה יותר על ההשקעה.
- מה זה אומר שהתשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות גדולה?  $\uparrow k_E$
- לצד זאת, במקביל, החברה ממנה את עצמה באחזו גבוה יותר של התחייבות, בריבית שהיא הריבית על החוב  $k_D$ .
- איזו השקעה היא מסוכנת יותר? במניות ( להיות בעליים) או בחוב של החברה?
- התשובה היא: חד משמעות השקעה במניות. מודיע? כי פירות ההשקעה במניות תלויים ברווחיות החברה ובהחלטותיה על חלוקת דיבידנד. אין דרך לדעת זאת מראש. לעומת זאת, השקעה בחוב תקינה לנו במקרה את התזרמים שהובתו (אלא אם כן יהיה תרחיש קיצוני של קריסת החברה).
- ולכן: בהינתן שהחוב מסוכן פחות מההשקעה במניות משקיעי החוב דורשים תשואה נמוכה יותר ממשקיעי ההון:  $k_D < k_E$ .
- מה משפייע בצורה חזקה יותר על עלויות המימון בחברה? האם העלייה בתשואה הנדרשת על ידי בעליים (הצד הרע של המינוף) או העובדה שהכנסנו עוד הון (זר, התחייבות) זול לחברה (הצד הטוב של המינוף)?
- התשובה היא שלא ניתן להכיריע ללא עזרה חיצונית. למזלנו, יש לנו עזרה חיצונית מהמודל האחרון של הקורס... מודל מודיליאני ומילר M&M (כמו הסוכריות).

**תכליס – מה זה עשה לשוי החברה בשנותלים חוב? מה זה M&M?**  
מודל מודיליאני ומילר הוא מודל שמניח סבבנה כלכלית שאין בה סיכון פשיטת רגל. בcpfuf להוכחות מתמטיות שלא Learned (צריך לידע רק את יישומיה), הם הסיכון שבמצב כזה מתקיים:

המשפט הראשון של מודיליאני ומילר:

- מינוף פיננסי לא משפייע על שווי חברה אם היא פועלת בעולם ללא מסים.

$$V^L = V^U$$

כasher :

סיכון	משמעות
$U$	שווי חברה לא מונופת, שאין בה כלל הון זר או חוב, אלא רק הון עצמי
$U$	שווי חברה מונופת, שגייסה חוב / אג"ח / הלוואות

- מינוף פיננסי מגדיל את שווי החברה אם **היא פועלת בעולם עם מסים**.  
לאור העובדה שבעולם עם מס, חברת זכאות לקבל מון מס (זיכוי מס) על עלויות המימון, הרי שבעולם עם מסים שווי החברה בהינתן מינוף יגדל עוד יותר (לאור שווי מגני המס על עלויות הריבית).

$$V^L = V^U + t * D$$

סימון	משמעות
$U$	שווי חברת לא ממונפת, שאין בה כלל הון זר או חוב, אלא רק הון עצמי
$V$	שווי חברת ממונפת, שגייסה חוב / אג"ח / הלוואות
$t$	שיעור המס
$D$	שווי החוב (השווי הכללי של האג"ח שהחברה הנפקה ו/או שווי הלוואות שגייסה)

#### המשפט השני של מודיליאני ומילר:

- מינוף פיננסי מגדיל את מחיר ההון העצמי גם בעולם עם מסים וגם בעולם ללא מס.

$$k_E^L = k_E^U + (k_E^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{E}$$

סימון	משמעות
$k_E^L$	מחיר ההון העצמי (התשואה שדורשים בעלי המניות) בחברה עם מינוף פיננסי (עם חוב)
$k_E^U$	מחיר ההון העצמי (התשואה שדורשים בעלי המניות) בחברה ללא מינוף פיננסי (ללא חוב)
$t$	שיעור המס
$D$	שווי החוב (השווי הכללי של האג"ח שהחברה הנפקה ו/או שווי הלוואות שגייסה)
$E$	שווי ההון העצמי (השווי הכללי של מניות החברה)

## מפגש 13 – י"ח' 10-11/2025 תרגול

### מינוי דעתו:

לאחר שבמפגש הקודם עסקנו בתמהור מנויות ואג"ח על בסיס נוסחאות הערך הנוכחי, הגיע הזמן לעבור להשפעות של מבנה ההון (מהו הרכב גיוס המימון בחברה – שיעור ההון העצמי במימון מנויות, ושיעור ההון הזר בימיון אג"ח) על :

א. שווי החברה.

ב. התשואה הנדרשת על ידי משלקאים – בסך הכל וברמת בעלי המניות (החלטות ניהול).

יח' 10 ו-11 ביה' הלימוד מחולקות כך שיח' 10 עוסקת בעיקר בהשפעות על שווי החברה, ויח' 11 בתשואה הנדרשת / מחיר ההון הכלול. אנחנו נתיחס להכל כ"מקרה אחת".

לשם כך עליינו להגדיר מספר הגדרות עקרוניות וזו לתרגול לעייפה:

### מחיר ההון הממוצע המשוקל

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

מחיר ההון הממוצע המשוקל הוא בעצם חישוב ממוצע של התשואות הנדרשות על ידי כל המשלקאים בפירמה. למעשה, בפירמה יש שתי אוכלוסיות משלקאים :

המשלקאים בהון עצמי – שהתשואה הנדרשת על ידם מסומנת כ- $k_S$ .

המשלקאים בהון זר (רוכשי האג"ח) – שהתשואה הנדרשת על ידם מסומנת כ- $k_D$ .

במסגרת מחיר ההון המשוקל, אנו כופלים כל תשואה נדרשת על ידי משלק היחסי של משלקאים אלו בסך מקורות המימון בחברה – כך שאט  $k_S$  אני כופל ב-  $\frac{S}{V}$  ככלומר בחלוקת שמהווה ההון העצמי בסך מקורות

הימיון בחברה, ואת  $k_D$  אני כופל ב-  $\frac{D}{V}$  ככלומר בחלוקת שמהווה ההון הזר / האג"ח בסך מקורות המימיון בחברה.

מעניין לראות שرك את רכיב עלות המימיון בהון זר אנו כופלים ב-1 פחות שיעור המס  $t$  כאשר הסיבה לכך היא שהוצאות מימיון הון הוצאה מוכרת לצורך מס.

יש עוד דרך, עיקפה יותר, להגעה למחיר ההון הממוצע המשוקל. אנחנו טוענים ש :

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

למעשה הטענה היא – שאם חברת נמצאת ב"שוויי משקל" הרי שהיחס שלה בין הרווחים התפעוליים (נקראים גם הכנסה תפעולית נקייה, NOI, ראשי תיבות של Net Operating Income) בניכוי מס לבין סך ההון שגייסה. אמור לספק את דרישות התשואה של המשלקאים בגורף (WACC).

המשפט הראשון של מודיליאני ומילר M&M – הקשר בין מינוף פיננסי ושווי החברה :

$$V^L = V^U + t * D$$

ambil להוכיח – כאשר חברה פועלת בעולם ללא סיכון פשיטת רגל ועם מסים – ככל שרכיב המימון בהתחייבויות/non זר / אג"ח גבוהה יותר, כך שווי החברה הכלל גבוהה יותר (לאור מגן המס על עלויות המימון). אם שיעור המס 0 – שווי החברה הכלל הוא בلت תלו依 באופן המימון של החברה.

**המשפט השני של מודיליאני ומילר – הקשר בין מינוח פיננסי ושיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות:**

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כולם יודעים שככל שנוטלים התחייבויות בהיקף משמעותי יותר, הסיכון לבעליים (במונחי ההשתנות האפשרית של רוחיהם) גבוה יותר. לכן, הם (בעלי המניות בחברה עם רכיב חוב גבוה יותר) ידרשו תשואה גבוהה יותר. הקשר בין שיעור המינוח לשיעור התשואה מבוטא במשווה זו, כאשר  $k_S^L$  מבטא את התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה ממונפת (עם מינוח פיננסי = עם חוב), ואילו  $k_S^U$  זה מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה זהה בכל מובן למעט העובדה שאינה ממונפת.

**שאלה 9.1 – רענון לגבי אג"ח**

נתונה אג"ח שערכה הנקוב 500 ש"ח. האג"ח משלם ריבית בשיעור 15% בתום כל אחת מ-5 השנים הקרובות, כאשר הקרע נסדיית יחד עם התשלום האחרון.

נדרש:

- א. מהו מחיר האג"ח בהנחה שהריבית האפקטיבית בשוק היא 12%, 15% ו-27% בהתאם. הסבירו ממה נובעים הפרסים שגיליתם.
- ב. הניחו כי הריבית האפקטיבית בשוק היא 15%. מהו מחיר האג"ח חצי שנה לפני התשלום השני?
- ג. הניחו כי המשקיע מעוניין למכור את האג"ח רגע לפני מועד פרעונה. מהי התמורה שצפואה להתקבל? האם הדבר תלוי בריבית השוק במועד זה? נמקו.

**סעיף א: מחיר האג"ח בהנחה שהריבית האפקטיבית בשוק היא 12%, 15% ו-27% בהתאם**

שווי אג"ח הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים הנובעים ממנו (הקראים – קופון וערך נקוב) במחיר ההון הזר (שנקרא גם – ריבית השוק או שיעור תשואה לפדיון). אנחנו צריכים לחשב כאן את שווי האג"ח 3 פעמים בהתאם לריבית השונה להיוון המופיעה בסעיף.

$$P_B(k_D = 12\%) = 15\% * 500 * PVFA(12\%, 5) + 500 * (1 + 12\%)^{-5} = 554.07$$

$$P_B(k_D = 15\%) = 15\% * 500 * PVFA(15\%, 5) + 500 * (1 + 15\%)^{-5} = 500$$

$$P_B(k_D = 27\%) = 15\% * 500 * PVFA(27\%, 5) + 500 * (1 + 27\%)^{-5} = 345.04$$

(\*) מי שעבד עם לוח 4 (לוח PVFA או מענ"ס) יכול לקבל תוצאות שונות במקצת לאור הפרשי עיגול.

(\*\*) כפי שהוצע במפגש קודם, במצבים שבהם הריבית הנקובה (15%) גבוהה מהריבית הנדרשת (נניח 12%) שווי האג"ח יהיה גבוה מערכה הנקוב ולהפוך (אג"ח בפרמייה / נכון / פארי – ראו עמי 294 במועד כתיבת שורות אלו).

**ב. הינו כי הריבית האפקטיבית בשוק היא 15%. מהו מחיר האג"ח חצי שנה לפני התשלום השני?**  
אנחנו נמצאים חצי שנה לפני התשלום השני, כלומר: בזמן 1.5 (בשנתיים).  
התשלום הקרוב הוא בזמן: 2.

פרק הזמן בין תשלומיים הוא שנה שלמה.  
מצד אחד, נותרו 4 קופונים (כי רק אחד בוצע). מצד שני, כאשר אני מחשב בגנים ערך נוכחי כסדרה (PVFA) אני מגיע לנקודת הזמן שהיא אחת לאחרת לפני התזרים הראשון בסדרה, כלומר שנה לפני זמן 2, בזמן 1. זה לא מתאים לי, כי נקודת הזמן היא 1.5, לכן יש לדוח **קדימה** חצי שנה.  
הסכום החד פעמי (הערך הנוכחי) שמתකבל בזמן 5 יהו (PV) של **סכום חד פעמי מזמן 5 לזמן 1.5**, כלומר **3.5 שנים לאחר**.

$$P_B = 15\% * 500 * PVFA(15\%, 4) * (1 + 15\%)^{0.5} + 500 * (1 + 15\%)^{-3.5} = 536.19$$

**ג. הינו כי המשקיע מעוניין למכור את האג"ח רגע לפני מועד פרעונה. מהי התמורה שצפוייה להתקבל? האם הדבר תלוי בריבית השוק במועד זה? נמקו.**

הוائل ושאלים מה השווי "שניה לפני" התשלום האחרון, אין מרחק זמן / השפעות היוון לשווי, ובכך הכל נctrיך לחבר את סכום הקופון האחרון עם הערך הנוכחי שלהם יתקבלו בעוד רגע.

$$P_B = 15\% * 500 + 500 = 575$$

### שאלה 9.2 – רענון לגבי אג"ח

אג"ח שערכה הנוכחי 800 ש"ח משלמת ריבית רבונית של 4% במשך 10 שנים. תשואת אג"ח דומות היא 1.5% לחודש. מהו שווי האג"ח בחולוף 5 שנים רגע לפני תשלום הריבית?

פתרונות:

$$P_B = 4\% * 800 * PVFA(4.5678375\%, 21) * (1 + 4.5678375\%) + 800 * (1 + 4.5678375\%)^{-20}$$

$$P_B = 4\% * 800 * \frac{1 - \frac{1}{(1 + 4.5678375\%)^{21}}}{4.5678375\%} * (1 + 4.5678375\%) + 800 * (1 + 4.5678375\%)^{-20}$$

$$P_B \approx 773.25$$

הסבירים: סכום התקובל התקופתי הסדרתי הוא לפי מכפלת הריבית הנוכחי התקופתית בערך הנוכחי כולם 4% כפול 800 כל רביעון. מספר הקופונים שנותרו נכון לנקודת התמחור הוא 21, הוайл וה קופונים כל רביעון. נותרו 5 שנים, ובנוסף – נותר התשלום החד פעמי (המיידי) של תום שנה 5. בסך הכל  $21 - 5 = 16$ .

לגביה ריבית להיוון – אם תדיירות תשלומי האג"ח היא רבעונית, גם הריבית להיוון (תשואת אג"ח דומה בשוק / ריבית השוק / שיעור התשואה לפדיון) צריכה להיות מתואמת למונחים רבעוניים, ותמיד את הריבית להיוון בהתאם עם מעריך חזקה:

$$k_D(\text{quarter}) = (1 + 1.5\%)^3 - 1 = 4.5678375\%$$

כמו כן, הרכיב הסדרתי שצווין:

$$4\% * 800 * PVFA(4.5678375\%, 21)$$

כולל היוון תזרימי מזומנים שהראשון שבהם בדיק בזמן 5, ולכן ההקפצה האוטומטית אחת אחרת (תקופת תשלום אחת אחרת) מובילה בדיק לזמן 4.75 (רבעון אחד אחרת לפני התזרים הראשוני). כדי לתקן לזמן 5, מועד התמחור, קופלים ב-1 ועוד הריבית לרבעון. זו הסיבה להתאמה הנוספת:

$$(1 + 4.5678375\%)$$

**שאלה 10.1 – חישוב שווי חברה על בסיס תמהיל מקורות מימון ומהירות ההון**  
בחברת "פרופסורים עובדים" בע"מ (להלן: "החברה") הרכנויות השנתיות ממכירת סמボסק פלאפל חן 3 מיליון ש"ח לשנה.

ההוצאות המשטנות כוללות שכר לאופה הראשי ד"ר צבן בסך 1 מיליון ש"ח לשנה וחומרו גלם בסך 0.8 מיליון ש"ח לשנה. שיעור הריבית על אגרות החוב של החברה הוא 8% וכמות האג"ח המונפקת היא 2 מיליון ש"ח. שיעור מס החברות הנו 20% (לחברה יש קומביונות ברשות המסים).

שיעור התשואה הנדרש בשוק על אג"ח ברמת סיכון דומה הנו 10%, והחברה נסחרת לפי שווי שוק כולל של 6 מיליון ש"ח.

השיבו לנדרשים הבאים בהתאם למשפטים מודיליאני ומילר:

- מהו שווי השוק של החוב?
- מהו שווי השוק של ההון העצמי?
- מהו שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות?
- מה היה מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?
- מה היה שווי החברה הכוללת בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת ללא מס?
- מה היה שווי החברה הכוללת בחברה מקבילה, בעלת מבנה הון זהה, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?

#### a. מהו שווי השוק של החוב?

שווי השוק של החוב כולם, המסומן D מלשון Debt הוא השווי הכללי (המצרפי) של כל אג"ח החברה יחד. כדי לחשבו, כרגיל, נבצע PV לتوزימי המזומנים מהאג"ח. בשאלה לא נאמר דבר על פרק הזמן של אגרות החוב (אורך חייה). מאם מתקבל בשאלות "גдолות" בקורס לגביה, להניח שמבנה ההון קבוע, מה שאומר שגם האג"ח קבועה / לאינסופי (צמיחה / קונסול). במצב כזה, שווייה ייקבע על ידי היוון תזרימי הקופונים בלבד (כי הערך הנקוב לא נפרע לעולם) ובהתבסס על נוסחת הערך הנוכחי של סדרה אינסופית:

$$D = \frac{r_B * B}{k_D} \rightarrow D = \frac{8\% * 2}{10\%} \rightarrow 1.6$$

מסקנה: שווי השוק של החוב הוא 1.6 מיליון ש"ח.

**ב. מהו שווי השוק של ההון העצמי?**

בURIComponent, יש שלוש דרכים להגעה לשווי השוק של ההון העצמי: (1) אם ידוע מחיר המניה (וכאן הוא לא) ומספר המניות, אפשר לכפול – שווי מניה כפול מספר המניות. (2) אם ידועים התזוזים לבעלי המניות (דיבידנדים) ונitin להוונם – הערך הנוכחי שליהם הוא שווי ההון. (3) אם ידוע השווי הכללי של החברה V – בהיבט השווי הכללי של החוב D וההון העצמי S ביחיד, ידוע שווי החוב – ניתן לחלץ את שווי ההון העצמי כלומר את S.

$$V = S + D \rightarrow 6 = S + 1.6 \rightarrow S = 4.4$$

**ג. מהו שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות?**

אם (ראו סעיף ב, דרך 2) ידוע שהערך הנוכחי של התזוזים לבעלי המניות מהוונם בתשואה הנדרשת על ידם כדי להגעה לשווי ההון העצמי, הרי שמתתקיים, בהנחה שהרווח הנקי צפוי להיות מחולק כדיבידנד, שהיחס בין הרוח הנקי NI לבין מחיר ההון S הוא שווי ההון. הרוח הנקי הוא למשה הרוחה התפעולי (המסומן גם כ- NOI Net Operating Income מלשון NOI) בניכוי עלויות מימון ובניכוי מס:

$$S = \frac{NI}{k_S} \rightarrow S = \frac{(NOI - k_D * D) * (1 - t)}{k_S} \rightarrow 4.4 = \frac{(1.2 - 8\% * 2) * (1 - 20\%)}{k_S}$$

כז שקיבלנו את שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות:

$$k_S \approx 18.91\%$$

ביאור לגבי NOI:

הכנסות תעשיוליות נטוות ב מיליון: 3

הוצאות שכר ד"ר צבן: -1

הוצאות חומר גלם: -0.8

סה"כ רווח תעשיולי: 1.2

**ד. מה היה מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?** ככלל, ככל שבחברה יש מנוון פיננסי גבוה יותר (בעברית: היא ממומנת בחוב בהיקפים גבוהים יותר) היא מסוכנת יותר (סיכון שקשור להשתנות הרוחחים בעקבות עלויות המימון הכבדות בחברה). סיכון זה גורם לכך שככל שבחברה יש יותר חוב בעלי המניות דורשים תשואה גבוהה יותר על השקעתם:  $k_S \uparrow$ .

קיימת משווהה שיוודעת לקשור בין מחיר ההון העצמי (תשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות) בחברה עם חוב, לבין שיעור התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה שהיא זהה עסקית אך נטולת מנוף פיננסי (קרי צו שmmoמונת בהון עצמי בלבד).

הקשר הזה מותבטא במשווהה שנקראת "המשפט השני של מודיליאני ומילר" – M&M :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כאשר :

התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה ממונפת – צו שmmoמונת גם בהון עצמי וגם בחוב.	$k_S^L$
התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה מקבילה אך לא ממונפת – צו שmmoמונת בהון עצמי בלבד.	$k_S^U$
שיעור התשואה הנדרש על ההון הזר (ריבית השוק, שיעור תשואה לפדיון, שיעור תשואה על אג"ח דומות)	$k_D$
שיעור המס (אם אין – מציבים 0)	$t$
היחס בין שווי החוב לשווי ההון העצמי	$\frac{D}{S}$

אנחנו מצאנו כי בחברה הספציפית הנדונה, שבה יש חוב, מחיר ההון הוא :

$$k_S \approx 18.91\%$$

זהו כמובן  $k_S^L$  כי מדובר בחברה שבה יש מנוף פיננסי (יש אג"ח).

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

$$18.91\% = k_S^U + (k_S^U - 10\%) * (1 - 0) * \frac{1.6}{4.4}$$

בהעברת אגפים וחילוץ מתකבל :

$$k_S^U \approx 16.53\%$$

ה. מה היה שווי החברה הכוללת בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת ללא מס? **[בוצע תיקון אחר]**  
**ההפסקה**

אם החברה פועלת ללא מס, רוחוי החברה עצם משתנים (אינם כפופים למס). לכן מעבר למשפט מודיליאני ומילר علينا לחשב ערך נוכחי לזריםים ללא מס כדי להגיע לשווי החברה :

$$S^U(t = 0) = \frac{NOI}{k_S^U} \rightarrow S^U = \frac{1.2}{16.53\%} = 7.259$$

והואיל וזה רכיב השווי היחיד בחברה, זה גם השווי הכולל של החברה הלא ממונפת בעולם ללא מס :

$$V^U = S^U = 7.259$$

כלומר: אם עוברים מעולם עם מס לעולם בלי מס לא ניתן להשתמש במודל מודיליאני ומילר כדי להציג את הקשר בין החברות. צריך לחשב מחדש. אחרי שהחישוב מחדש, אפשר לעבור בין מינוף והיעדרו בעולם בלי מסים.

ו. מה הייתה שווי החברה הכלול בחברה מקבילה, בעלת מבנה הון זהה, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?

$$V^L = V^U = 7.259$$

שווי החברה במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס היה 7.259 מ' ש"ח (זהה לשווי חברה לא ממונפת בעולם ללא מס, לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר).

#### מסקנה מרכזית:

אם החברות זהות בכל מובן, לרבות זה שהן פועלות באותו תנאי מס, אז:

$$V^U = V^L + t * D$$

אבל אם משנים עוד דברים – כגון מסים, הכנסות, הוצאות... אי אפשר להשתמש במשפט זה בלבד, נצטרך לחשב מחדש את שווי החברה בפרמטרים המעודכנים, ורק אז אפשר להפעיל את הנוסחה זו שוב כדי לבצע מערכיים.

### שאלה 11.0 – שווי מניה ומהירות ההון של החברה

חברת "שאראס נקייקס" בע"מ היא חברת ציבורית בעלת מדיניות דיבידנד ידועה. אמש חילקה החברה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה והיא מתכוננת להמשך ולחקל דיבידנד כל 5 שנים, כאשר שיעור הצמיחה השנתי בדיבידנד הוא 5%. התשואה הנדרשת על ידי המשקיעים בחברות דומות היא 10% לשנה.

- מהו שווי המניה?
- מהו שווי המניה בהנחה שתוחזק במשך 10 שנים בלבד?
- בנהנה שבחברה 100 אלף מניות בנות 20 ש"ח ערך נקוב וכן 2 מיליון ע"נ אג"ח בערך נקוב של 10 ש"ח ליחידת אג"ח הנושאות ריבית בשיעור 5% לשנה ומועד פרעון בעוד 7 שנים, ובהתנחת שהריבית במשק היא 8% והחברה לא חייבת במס.
- כמה ייחידות אג"ח הנפיקה החברה?
- מהו שווי ההון העצמי?
- מהו תשלום הריבית ליחידת אג"ח?
- מהו שווי ייחידת אג"ח אחת?
- מהו שווי החוב?
- מהו שווי החברה?
- חשבו את מחיר ההון הכלול של החברה.
- בכמה יקטן מחיר ההון של החברה בגין הטלת מס? הציגו משווה מתאימה.

**פתרונות:**

#### א. מהו שווי המניה?

$$P_s = \frac{Div}{k_s - g} \rightarrow P_s = \frac{12.762816}{61.051\% - 27.6281562\%} \approx 38.186$$

כאשר :

הDİVIDEND העתידי הקרוב ביותר, לאחריו הצמיחה קבועה.	<i>Div</i>
$g(annual) = 5\% \rightarrow g(5years) = (1 + 5\%)^5 - 1 = 27.6281562\%$ ידוע שהDİVIDEND אמש היה : 10 ש"ח. לכן, הדיבידנד הבא בעוד 5 שנים : $Div_5 = 10 * (1 + 27.6281562\%) \approx 12.762816$	
שיעור הצמיחה לתקופת תשלום : 27.6281562%	<i>g</i>
שיעור התשואה הנדרשת לתקופת תשלום 5 שנים : $k_s(annual) = 10\% \rightarrow k_s(5years) = (1 + 10\%)^5 - 1 = 61.051\%$	<i>k<sub>s</sub></i>

#### ב. מהו שווי המניה בהנחה שתוחזק במשך 10 שנים בלבד?

שווי המניה איננו תלוי בתקופת החזקתה. מעבר ליכולת להוכיח זאת מתמטית (שלא נבע) חשבו לרגע על עצםכם קונים מניה של App A בבורסה. האם בשלב כלשהו של הקניה עולה מסך כגון "כמה זמן תרצה להחזיק במניה?" מה פתאום.

האם כאשרת קונה דירה הבעלים ידרוש ממק' מחיר שנשען על פרק הזמן שבו אתה מ暢ה להחזיק בדירה? מה פתאום.

ברמה הטכנית, מועד המכירה רק יגרום לכך שתקבל חלק מהתזרימיים יותר מוקדים ובמסגרם יותר נמוך (במועד המכירה) אבל סך הערך הנוכחי לא משתנה. כאמור, לא נוכיח.

**בקיצור:** גם שואלים על שווי מניה באופן כללי וגם אם שואלים על שווי מניה בהנחה שתוחזק  $\alpha$  שנים, אופן חישוב השווי זהה וمبוצע לפי המודל הנלמד. ויהיה:  $38.186 \text{ ש"ח}$ .

נתון: בהנחה שבחברה 100 אלף מניות בנות 20 ש"ח ערך נקוב וכן 2 מיליון ע"נ אג"ח בערך נקוב של 10 ש"ח ליחידת אג"ח הנושאות ריבית בשיעור 5% לשנה ומועד פרעוןן בעוד 7 שנים, ובהינתן שהריבית במשק היא 8% והחברה לא חייבת במס.

**6.1 כמה יח' אג"ח הנפקה החברה?**

$$N_B = \frac{2,000,000}{10} = 200,000$$

**6.2 מהו שווי ההון העצמי?**

נכפול את מספר המניות (ללא תלות בערך הנקוב) בשווי המניה שחווש בסעיפים א, ב:

$$S = N_S * P_S \rightarrow S = 100,000 * 38.186 \rightarrow S = 3,818,600$$

**6.3 מהו תשלום הריבית השנתית ליחידת אג"ח?**

מכפלת הערך הנקוב בריבית הנקובה:

$$r_B * B = 5\% * 10 = 0.5$$

**6.4 מהו שווי ייחידת אג"ח אחת?**

נחשב ערך הנוכחי לתזרימי האג"ח (יחידה בודדת) אשר נפרעת עוד 7 שנים. נקבל:

$$P_B = 0.5 * PVFA(8\%, 7) + 10 * (1 + 8\%)^{-7} \approx 8.4381$$

**6.5 שווי החוב הכללי**

מכפלת מספר ייחידות האג"ח בשווי ייחידת אג"ח:

$$D = N_B * P_B \rightarrow D = 200,000 * 8.4381 = 1,687,620$$

**6.6 שווי החברה הכלול**

חיבור שווי החוב עם שווי ההון:

$$V = S + D \rightarrow V = 3,818,600 + 1,687,620 = 5,506,220$$

#### ד. חשבו את מחיר ההון הכללי של החברה

מחיר ההון הכללי של החברה לא מייצג חס וחלילה את שווייה או את ערכה הכספי; המונח מחיר הון ב咪ון תמיד משקף תשואה נדרשת באחזוים. העובדה שמדובר במחיר ההון הכללי משמעה שמדובר באחזוי תשואה משוקללים נדרשים, שחררי – ספקי ההון העצמי דורשים תשואה מסוימת באחזוים, ספקי ההון הזר (המלווים, המשקיעים באג"ח) דורשים תשואה אחרת באחזוים, ומחייבים שקלל בין ערכיהם אלו (ממצעם) בהתאם למשקל היחסי של כל אחד מהם בתמיהיל מקורות המימון בחברה.

$$WACC = k_s * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

$$WACC = 10\% * \frac{3,818,600}{5,506,220} + 8\% * (1 - 0) * \frac{1,687,620}{5,506,220} \approx 9.387\%$$

막רא לנוסחה :

מחיר ההון הממוצע המשוקל WACC = Weighted Average Cost of Capital	$WACC$
עתים מסומן כ- $k^*$	
מחיר ההון העצמי – התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות באחזוים	$k_s$
היחס בין שווי ההון העצמי לשווי החברה	$\frac{S}{V}$
מחיר ההון הזר – שיעור התשואה לפדיון / התשואה הנדרשת על ידי מושקיעי האג"ח / ריבית השוק על אג"ח	$k_D$
שיעור המס (cano – אפס)	$t$
היחס בין שווי החוב לשווי החברה	$\frac{D}{V}$

ה. בכמה יקטן מחיר ההון של החברה בגין הטלת מס? הציגו משווה מתאימה.

$$WACC = 10\% * \frac{3,818,600}{5,506,220} + 8\% * (1 - t) * \frac{1,687,620}{5,506,220} \approx 9.387\%$$

בפישוט בסיסי מקבלים :

$$WACC = 6.9351\% + 2.451947\% * (1 - t)$$

או :

$$WACC = 6.9351\% + 2.451947\% - t * 2.451947\%$$

או (תשובה סופית) :

$$WACC = 9.387\% - 2.451947\% * t$$

**שאלה 10.2 – יישום ספציפי של המשפט השני של מודיליאני ומילר**

ידוע ששווי חברה ממומנת בהון עצמי בלבד שהכנסתה התפעולית נטו היא 350 אלף ש"ח לשנה הנוכחית 2,187.5 אלף ש"ח.

נדרש :

- א. חשבו את מחיר ההון העצמי של החברה.
- ב. מהו שיעור התשואה שנדרש על ידי בעלי המניות של חברה זהה ברמה התפעולית ובסדר הגודל אם הריבית בגין האג"ח היא 7% לשנה והחברה ממומנת בחוב בשיעור 30%? הניחו עולם ללא מס.

פתרונות :

**פתרון סעיף א – חילוץ מחיר ההון העצמי של החברה, בהינתן הכנסתה התפעולית ושווייה**

כאשר חברה ממומנת בהון העצמי בלבד, מתקיים :

$$S = \frac{NOI * (1 - t)}{k_S} \rightarrow 2,187.5 = \frac{350 * (1 - 0)}{k_S} \rightarrow k_S = 16\%$$

**פתרון סעיף ב – המירה של מחיר ההון העצמי ללא מנוף למחיר הון עצמי בחברה עם מנוף**  
לפי המשפט ה-2 של מודיליאני ומילר, ניתן לחשב את מחיר הון העצמי בחברה ממונפת כפונקציה של מחיר הון העצמי בחברה מקבילה לא ממונפת והיחס בין החוב להון העצמי :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

בהתבה נקבל :

$$k_S^L = 16\% + (16\% - 7\%) * (1 - 0) * \frac{0.3\cancel{U}}{0.7\cancel{U}} = 19.8571428\%$$

למעשה, כאשר מספרים שהחברה ממוננת בחוב בשיעור 30%, המשמעות היא שהחוב D הוא 30% מסך שוויי החברה כלומר 30% מ-V. המשמעות העולה מכך, בהכרח, היא ששווי הון העצמי S הוא 70% מה-V. היחס בין שוויי החוב לשוויי ההון יוצר אם כך את ביטויו המצתטצם לעיל שמוביל לתוצאה מספרית.

#### שאלה 11.4 – מחיר ההון

בחברה ידוע כי הערך הנוכחי של האג"ח הוא 200,000 ש"ח ביחידות של 100 ש"ח ליחידת אג"ח, והערך הנוכחי

של המניות שנן בנות 1 ש"ח ערך נקוב כל אחת הוא 500,000 ש"ח.

הרווח התפעולי של החברה הוא 150,000 ש"ח לשנה.

החברה כפופה למס חברות בשיעור 20%.

אגרות החוב של החברה הן אג"ח נצחות (קונסול / צמיות) שהריבית השנתית בגין 5%. כמו כן ידוע כי מחיר ייח' האג"ח בשוק הוא 85 ש"ח.

מחיר המניה בשוק הוא 2 ש"ח, והחברה מחלקת בסוף כל שנה את כל רווחיה כדיבידנד.

נדרש:

א. מהו שיעור התשואה על ההון הזר לאחר מס?

ב. מהי עלות (=מחיר) ההון העצמי?

ג. מהו שווי החוב?

ד. מהו שווי ההון העצמי?

ה. מהו ערך החברה הכלול?

ו. מהו מחיר ההון המומוצע המשוקל?

פתרון:

א. מהו שיעור התשואה על ההון הזר לאחר מס?

באופן כללי, שיעור התשואה על ההון הזר הוא הגודל  $k_D$  שמייצג את הריבית להיוון ואת התשואה הנדרשת על ידי מושקיי אג"ח.

אם רוצים את שיעור התשואה על ההון הזר לאחר מס, כל מה שרוצים בעצם זה:

$$k_D^* = k_D * (1 - t)$$

לכן נתחל מחלוקת  $k_D$  על פי נתוני האג"ח ומשם נמשיך.

ערך נקוב – 100 ש"ח ליח' אג"ח –  $B$ .

ריבית נקובה על האג"ח 5% –  $r_B$ .

מחיר האג"ח בשוק:  $P_B$  – 85

הוイル והאג"ח לצמיות, ניתןحلץ על בסיס מחירה את הריבית להיוון / התשואה הנדרשת על האג"ח / מחיר

ההון הזר:

$$P_B = \frac{r_B * B}{k_D} \rightarrow 85 = \frac{5\% * 100}{k_D} \rightarrow k_D \approx 5.88235\%$$

אבל הוイル ורוצים את מחיר ההון הזר אחורי מס (נתון ששיעור המס 20%):

$$k_D^* = k_D * (1 - t) \rightarrow k_D^* = 5.88235\% * (1 - 20\%) \approx 4.7059\%$$

**ב. מהו מחיר ההון העצמי?**

את התשואה על ההון העצמי ניתן לחשב על בסיס נתוני מניה בודדת או על בסיס נתוני ההון העצמי כולם. אנחנו נתחל בчисוב נתונים על מניה בודדת שבהם הרגלו.

הרווח למניה בודדת שנקרא גם EPS ראשי תיבות של Earning Per Share מחושב כך :

$$EPS = \frac{NI}{N_S} \rightarrow EPS = \frac{(NOI - k_D * D) * (1 - t)}{N_S}$$

(\*) במקומות  $k_D * D$  בהנחה שהאג"ח לצמיהות תמיד ניתן לרשום  $r_B * B$  (קרי את סכום הקופון).

ב换כבות הנתונים במקורה שלנו – הרוח למניה בש"ח הוא :

$$EPS = \frac{(150,000 - 5\% * 500,000) * (1 - 20\%)}{500,000} = 0.2$$

הואיל וממחיר המתוון הוא 2 ש"ח (התשואה הנדרשת מצד מושקיעים היא בהתאם להשקעות – מחיר המניה). בנוסף, ההנחה היא שכל הרוח למניה מוחולק כדיבידנד :

$$P_S = \frac{Div}{k_S} \rightarrow 2 = \frac{0.2}{k_S} \rightarrow k_S = 10\%$$

**ג. מהו שווי החוב?**

ערך נקוב מצרפתי של האג"ח :

ערך נקוב ליחידת אג"ח :

מספר יחידות האג"ח :

שווי יח' אג"ח :

שווי החוב כולו :

200,000

100

2,000

85

$D = 85 * 2,000 = 170,000$

**ד. שווי ההון העצמי:**

מספר המניות :

2

$S = 500,000 * 2 = 1,000,000$

מחיר מניה בש"ח :

שווי ההון העצמי :

שווי החברה הכלול :

**ה. שווי החברה הכלול:**

$$V = S + D \rightarrow V = 1,000,000 + 170,000 \rightarrow V = 1,170,000$$

**ו. מהו מחיר ההון הממוצע המשוקל?**

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

$$WACC = 10\% * \frac{1,000,000}{1,170,000} + 5.88235\% * (1 - 0.2) * \frac{170,000}{1,170,000} \approx 9.231\%$$

**שאלה 11.1 – הרעיון הכללי אחורי מחיר ההון המשוקל / תשואה משוקלلت**  
 לחברת "הנקניק הלאומי" אגרות חוב שערכן הנקוב 200,000 ש"ח ו-400,000 מנויות.  
 האג"ח היא צמיתה (לאינסוף) והריבית הנקובה עלייה 6% לשנה.  
 מחיר האג"ח מיד לאחר תשלום הריבית השנתית הוא 80% מערכת הנקוב.  
 מחיר המניה בשוק הוא 2 ש"ח.  
 החברה מחלקת את כל רווחיה כדיבידנד בمزומנים.  
 שיעור המס החל על החברה הוא 25%.  
 הרווח התפעולי של החברה השנה היה 300,000 ש"ח.

נדרש :

- חשבו את שווי ההון העצמי של החברה.
- חשבו את שווי החוב של החברה.
- חשבו את השווי הכלול של החברה והסבירו את משמעותו.
- חשבו את מחיר ההון המשוקלל של החברה.

פתרונות :

#### **סעיף א – שווי ההון העצמי**

שווי ההון העצמי בחברה הוא השווי הכלול של מנויותה. שווי זה הוא הערך הנוכחי של התזוריים המצורפים לצפויים לנbow עלידיהם של בעלי המניות – תזרימי הדיבידנד.  
 בשאלה נתון – שהדיבידנדים זהים לרוח (הכוונה היא לרוחה הנקי אלא אם נאמר אחרת). לכן, אם נוכל לחשב את הרווחה הנקי, נוכל להוון אותו (PV) וכן נקבל את השווי הכלול של ההון העצמי.  
 אלא שכן – האמת היא שאין בכך צורך, כי מסלול חליפי ומהיר יותר במקרים רבים – יהיה מכפלת מחיר המניה במספר המניות :

$$S = N_S * P_S \rightarrow S = 400,000 * 2 = 800,000$$

#### **סעיף ב – חשבו את שווי החוב**

גם כאן אין צורך בהיוונים מיוחדים. ידוע הערך הנקוב של האג"ח וידוע שמחירו הוא 80% מערכת הנקוב :

$$D = 200,000 * 80\% = 160,000$$

#### **סעיף ג – שווי החברה**

כשאנו דנים ביחס 10-11 בשווי החברה, אנו דנים בשווי שמספקת החברה לכל אוכלוסיות המשקיעים בה – בשפה פשוטה, אנו סוכמים גם את שווי ההון העצמי (שווי החברה לבעלי המניות) וגם את שווי ההון הזר (החוב).

$$V = S + D = 800,000 + 160,000 = 960,000$$

#### סעיף 2 – חשבו את מחיר ההון המשוקל של החברה (WACC)

נוסחה 1 :

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

נוסחה 2 :

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

לדעתי, במקרה זה, נוסחה 2 תוביל אותנו למקום הנכון מהר יותר.

$$WACC = \frac{300,000 * (1 - 25\%)}{960,000} = 0.234375 = 23.4375\%$$

וסיימנו, איזה כיף.

**שאלה 10.1 – משחק בין משווהות – שווי החברה, דרגת המינוף והקשר בין חברות**  
חברת "הנקניק" (N) וחברת "הקבב" (K) הן שתי חברות הפעולות באותו ענף, וחויפות לsiccon תפעולי זהה.

להלן נתונים חברת הנקניק :

הרווח הכספי הצפוי בחברה N מותפלג כדלקמן :

200,000 ש"ח בהסתברות 60%.

350,000 ש"ח בהסתברות 40%.

בחברה 100,000 מנויות שערך השוק שלן הוא 60% מהשווי הכללי של החברה, וכן אגרות חוב צמיות (קונסול).  
מחיר ההון הכללי (המוצע המשוקל) של החברה הוא 20%.

הרווח הכספי הצפוי בחברת K הוא רבע מהרווח הצפוי בחברה N בכל מצב טבעי.  
בחברה 80,000 מנויות ואגרות חוב צמיות שערכן הנקוב 50,000 ש"ח והן נושאות ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה. מחיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח.

נתונים משותפים :

שיעור התשואה על אג"ח כל החברות בשוק זהה.

שיעור מס החברות הוא 25%.

נדרש :

- א. מהי תוחלת ה-ROI בכל אחת מהחברות?
- ב. מהו השווי הכללי של חברת N?
- ג. מהו שווי המניות בחברה N? מהו שווי החוב בחברה N?
- ד. הניחו שתאגיד N שינה את מבנה ההון שלו והיא ממומנת בהון עצמי בלבד. מה יהיה שווייה?
- ה. בהמשך לסעיף ד, חשבו את מחיר ההון העצמי בחברה N.
- ו. חשבו את השווי הכללי של חברת K בהנחה שלא הייתה ממונפת.
- ז. חשבו את השווי הכללי של חברת K בהינתן דרגת המינוף שלה.
- ח. חלצו את מחיר ההון המשוקל של חברת K.
- ט. חשבו את מחיר המניה של כל אחת מהחברות.
- י. הצמדו נתונים הבסיס. הניחו כי אתם מחזקים ב-4% מהו שווי המניות של חברת N שמחירה בשוק גבוה ב-10% מזה שמצוותם בסעיף קודם (מניה K מתומחת בשווי הוגן). הראו כיצד ניתן ליצור רווחי ארביטראז'.

פתרון :

**פתרון סעיף א – תוחלת הרווח הכספי בכל חברת :**

חברה N :  
חברה K (רבע מהרווחים) :

50,000 ש"ח בהסתברות 60%	200,000 ש"ח בהסתברות 60%
87,500 ש"ח בהסתברות 40%	350,000 ש"ח בהסתברות 40%

$$E(NOI_N) = 200,000 * 60\% + 350,000 * 40\% = 260,000$$

$$E(NOI_K) = 50,000 * 60\% + 87,500 * 40\% = 65,000$$

#### פתרונות סעיף ב - מהו השווי הכללי של חברת N?

מחיר ההון הכללי (הממוצע המשוקל - WACC) של חברת N הוא 18%. בנוסף ידוע שהיעור מס החברות 25%. כshednim בשווי הכללי של החברה, רוצים לדעת את שווייה מנקודות ראות כל אוכלוסיות השקיעים בה. זה בעצם ביטוי הפוך לנוסחת מחיר ההון המוצע המשוקל:

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

מכך נגזר:

$$V = \frac{NOI * (1 - t)}{WACC} \rightarrow \frac{260,000 * (1 - 25\%)}{20\%} = 975,000$$

#### פתרונות סעיף ג - מהו שווי המניות בחברה N? מהו שווי החוב בחברה N?

נתון: בחברה 100,000 מניות שערץ השוק שלחן הוא 60% מהשווי הכללי של החברה, וכן אגרות חוב צמיות (קונסול).

$$S = 60\% * V \rightarrow S = 60\% * 975,000 = 585,000$$

$$D = V - S \rightarrow D = 975,000 - 585,000 = 390,000$$

#### פתרונות סעיף ד - הניחו בעת כי חברת N שינתה את מבנה ההון שלה והיא ממומנת בהון עצמי בלבד. מה יהיה שווייה?

[מינוי רצוי – המשפט ה-1 של M&M יודיע בצוරהיפה בין שווי חברת ממונפת לבין שווי חברת לא ממונפת. אבל מה עושים כשרוצים לחייב חברת ממונפת אחת לשווי חברת ממונפת אחרת? את זה המשפט לא יודיע בצוරה ישירה. לכן, פועלים בתהיליך חילוץ. משתמשים בשווי הכללי של החברה ממונפת ידועה, מגיעים דרכו לשווי של חברת לא ממונפת – למרות שהיא היפוטטית, ו אז אפשר להשתמש בכך כבסיס לשווי החברה ממונפת השנייה על בסיס נתונים המnof שלה]

בסעיף ב מצאנו כי:

$$V^L(N) = 975,000$$

לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר, הרו שמותקינים:

$$V^L(N) = V^U + t * D \rightarrow 975,000 = V^U + 25\% * 390,000 \rightarrow V^U = 877,500$$

#### פתרונות סעיף ה - בהמשך לסעיף ד, חשבו את מחיר ההון העצמי בחברה N.

"בהמשך לסעיף ד" – להמשיך עם ההנחה לפיה חברת N לא ממונפת.

$$V^U(N) = \frac{NOI * (1 - t)}{k_S^U}$$

מה זה הנוסחה זו? אנו ראיינו שבאופן כללי, שווי חברה כולל מתקבל על ידי היון התזורים התפעולי בניכוי מס במדד הערך החולל WACC. אם בחברה אין מנוּף פיננסי, ה-WACC בעצם זהה למדד הערך העצמי (בחברה הלא ממונפת כאמור) שנחוג לסטנו  $k_S^U$ .

נזכיר:

$$877,500 = \frac{260,000 * (1 - 25\%)}{k_S^U} \rightarrow k_S^U = 0.222222222 \approx 22.22\%$$

#### פתרונות סעיף 1 - חשבו את השווי הכלול של חברה K בהנחה שלא הייתה ממונפת

חברה K היא חברה בעלת סיכון תעופולי זהה לחברה N שנדונה בסעיפים קודמים, אך נבדلت ממנה ברמת הסיכון העסקי / דרגת המנוּף. ספציפית בסעיף זה – נטרלו פער זה, וביקשו לחשב את שווייה בהנחה שמדוברת במדד הערך העצמי בלבד.

$$V^U(K) = \frac{65,000 * (1 - 25\%)}{22.22222222\%} = 219,375$$

מה קרה פה? השתמשנו במונה בתוחלת הרווח התפעולי בחברה K ובשיעור המס הכללי במשק, במכנה כללו את מדיר הערך העצמי של חברה לא ממונפת, אשר תמיד יהיה זהה בין חברות אם הן חשופות לאותו סיכון תעופולי.

בעלי המניות דורשים תשואה על השקעתם אם אין מנוּף פיננסי (אם אין התחריביות) רק בגין הסיכון התפעולי. וכך, אם הסיכון התפעולי זהה לנטו, הם ידרשו תשואה זהה. אך מדיר הערך העצמי בהנחה אי מנוּף בשתי החברות – זהה.

#### פתרונות סעיף 2 - חשבו את השווי הכלול של חברה K בהינתן דרגת המנוּף שלה

בשאלה נתון: מדיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח. לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר, מתקיים כי:

$$V^L = V^U + t * D$$

$$V^L(K) = 219,375 + 25\% * 45,000 = 230,625$$

#### פתרונות סעיף 3 - חלצו את מדיר הערך המשוקל של חברה K

$$WACC(K) = \frac{NOI * (1 - t)}{V} \rightarrow WACC(K) = \frac{65,000 * (1 - 25\%)}{230,625} \rightarrow WACC(K) = 21.138\%$$

**פתרונות סעיף ט - חשבו את מחיר המניה של כל אחת מהחברות**

$$S(N) = 585,000$$

$$N_S(N) = 100,000$$

$$S(K) = V^L(K) - D \rightarrow S(K) = 230,625 - 45,000 \rightarrow S(K) = 185,625$$

$$N_S(K) = 80,000$$

מחיר המניה של כל חברת יחולש לפי היחס בין השווי הכללי של ההון העצמי בה (שהוא השווי של מנויותיה) מחלוקת במספר המניות :

$$P_S(N) = \frac{S(N)}{N_S(N)} = \frac{585,000}{100,000} = 5.85$$

$$P_S(K) = \frac{S(K)}{N_S(K)} = \frac{185,625}{80,000} = 2.3203125$$

**פתרונות סעיף י - הגדדו לנוטוני הבסיס. הניחו כי אתם מחזיקים ב- 4% מהן המניות של חברת N שמחירה בשוק גבוה ב- 10% מזה שמצוותם בסעיף קודם (מניה K מתומחרת בשווי הוגן). הראו כיצד ניתן ליצור רווחי ארביטראז'.**

שינוי בתזרים העתידי	תזרים בהווה	
$-\left(\frac{1}{9} * 390,000\right) * (1 - 25%) * 4\%$	$585,000 * (1 + 10%) * 4\% = 25,740$	מחירה של הנכס המתומחר ביתר (N)
$+\left(\frac{1}{9} * 45,000\right) * (1 - 25%) * 16\%$	$-185,625 * 4\% * 4 = -29,700$	קונה את הנכס המקורי (K) שמתומחר בשווי הוגן
-700	$+ \frac{700}{\frac{1}{9}} = +6,300$	הלוואה
0	2,340 זה, ורך זה – רווח הארביטראז'	סך הכל

בחברה K ידוע :

ואגרות חוב צמיהות שערוך הנקוב 50,000 ש"ח והן נשאות ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה. מחיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח.

הוイル וזו אג"ח צמיהה (לנצח), מתקיים שווייה (מחיר) הוא הערך הנוכחי של תזרימי הריבית הנקובה האינסופיים :

$$D = \frac{r_B * B}{k_D} \rightarrow 45,000 = \frac{50,000 * 10\%}{k_D} \rightarrow k_D = \frac{1}{9}$$

כברהה, אפשר להגיע לרוח הארביטראז' גם כך (התמהoor ביתר) אבל זה לא מחליף בשום צורה ואופן את החישוב הישיר:

$$585,000 * 10\% * 4\%$$

**שאלה 10.3 – המשפט השני של מודיליאני ומילר, יישום נוסף**

בחברה קיימים מחיר הון משוקל בשיעור 25% לאחר מס. החברה ממומנת ב-55% חוב ו-45% הון עצמי, וכפופה למס בשיעור 30%. החוב נושא ריבית בשיעור 5%.

נדרש :

- מזה מחיר הון העצמי של החברה?
- מה היה מחיר הון העצמי בחברה, במידה והיא הייתה נטולת מנו?

פתרון :

**פתרון סעיף א – מהו מחיר הון העצמי של החברה?**

מחיר הון משוקל, הנ吐ן בשאלה, הוא בעל ההגדרה הבאה :

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

כאשר מספרים לנו שהחברה ממומנת ב-55% חוב וב-45% הון עצמי, למעשה מבשרים לנו ש :

$$\frac{D}{V} = 0.55 \quad \text{and} \quad \frac{S}{V} = 0.45$$

נציב נתון זה יחד עם יתר הנתונים הבולטים בשאלה במשוואת ה-WACC :

$$25\% = k_S * 0.45 + 5\% * (1 - 30\%) * 0.55 \rightarrow k_S = 51.27777\%$$

**פתרון סעיף ב – מה היה מחיר הון העצמי בחברה, במידה והיא הייתה נטולת מנו?**

מעבר ממחיר הון העצמי בחברה עם מנוף למחיר הון העצמי בחברה נטולת מנוף ולהפך – נשען על המשפט ה-2 של מודיליאני ומילר :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

$$51.27777\% = k_S^U + (k_S^U - 5\%) * (1 - 30\%) * \frac{0.55}{0.45} \rightarrow k_S^U = 29.33\%$$

**דיבונים נוספים והבהרות - שווי החברה, מחיר ההון, סיכוןים ומודל מודיליאני ומילר**

א. מה ניתן לומר על השינוי בסיכון לבעלי המניות כאשר חברת פיננסית (גדול / קטן / לא משתנה)?

התשובה: הסיכון תמיד גדול כתוצאה מנטילת חוב, שבעקבותיו – רויבץ על החברה נטול תשלום עלויות מימון ללא תלות בהצלחתה העסקית.

ב. כיצד תגדירו את הסיכון הנובע ממינוף פיננסי / סיכון פיננסי בעולם שאין בו אפשרות רגל (הנחה היסודית של מודל מודיליאני ומילר)?

אם חברה לעולם לא יכולה להתפרק ולהפוך לחדלות פרעון, אזי הסיכון הנובע ממינוף הוא אך ורק העלייה בשונות של הרווח לבעליים כתוצאה מנטילת התחייבויות.

ג. כיצד תגדירו את הסיכון הנובע ממינוף פיננסי / סיכון פיננסי בעולם שיש בו אפשרות לפשיטת רגל (מודל מעשי, שתקף כל אימת שלא צריך לשימוש / לא מציינים בשאלת התיאורטית את מודיליאני ומילר)?

זה נכון שבדרך כלל אנו בוחנים סיכון במונחי שונות / סטיית תקן; אבל אם עוברים לעולם עם סיכון פשיטת רגל, אנחנו למשה מושגים למטרית הסיכון את הסיכון לפשיטת רגל שסבירותנו נדלה ככל שהמיןוף הפיננסי גדול.

ד. לפי משפט מודיליאני ומילר, עליה בדרגת המינוף הפיננסי משמעה עלייה בשיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות, וזאת – גם בעולם עם מסים וגם בעולם ללא מסים

התשובה נכונה; בrama הטכנית – אפשר ממש להציג את נוסחת המשפט השני של מודיליאני ומילר :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כאשר חלה עלייה במינוף הפיננסי, ככלmore ביחס בין  $S/D$ , שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות גדול, אבל מעבר לזה – באופן אינואיטיבי – גם בעולם ללא סיכון פשיטת רגל (ראו סעיף ב) השונות של הרווח לבעליים נדלה כתוצאה ממינוף ובהתאם הם ידרשו תשואה גבוהה יותר.

ה. לפי מודיליאני ומילר, ככל שנקטינו את  $k_S^U$  ונקרב אותו יותר ל- $k_D$ , אז השפעת המינוף על העלייה בתשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות תהיה חלשה יותר.

כoon. מודיע?

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

ככל שההפרש המסווג באדום קטן יותר, כאשר כל השאר קבוע – כך פרמיית הסיכון הנובעת ממינוף תהיה קטנה יותר.

ו. לפי מודיליאני ומילר, אם חברת נוטלת על עצמה מינוף פיננסי גבוה יותר (ممמן את עצמה בשיעור גבוה יותר של חוב), הדבר לא ישפיע על שיעור הריבית על החוב.

זכרו: מודיליאני ומילר פועלים בעולם שבו אין סיכון פשיטת רגל/חזרות פירעון. בהינתן הנחה זו, עליה במינוף הכספי איננה מגדילה את הסיכון לכשל פירעון (שהרי הוא אפס תמיד) ובהתאם, התשואה שידרשו המלוויים תהיה זהה – ככלומר, שיעור הריבית על החוב קבוע ובלתי תלוי בדרגת המינוף. הטענה נכונה.

#### דיבונים נוספים והבהרות – משפט מודיליאני ומילר

על פי מודל מודיליאני ומילר, העולם פועל תחת ההנחה הבאות:

- א. אין סיכון פשיטת רגל.
- ב. מחיר ההון הזר  $k_D$  בחברה קבוע, לא משנה כמה הלוואות היא נוטلت / כמה אג"ח היא מנפיקה.
- ג. אין פרמיית סיכון על ההון הזר (כל השקעה באג"ח היא עצם קרובה מאד לרכיבת חסרת סיכון).

הנחהות הללו מובילות למספר ממצאים מעניינים:

א. כאשר חברת נוטلت מינוף ממשועוט יותר (מגדילה את רכיב החוב), הסיכון לבני המניות גדול, אך הסיכון לבני החוב לא משתנה. מדוע!

ו. הסיכון לבני חוב (המשמעותי באג"ח / מלוויים / נושאים) לא משתנה הואיל ואין סיכון פשיטת רגל, ככלומר אין סיכון חזרות פירעון. זו ממש הנחה של המודל שככל החברות תמיד ובהכרח יפרעו באופן מלא את חובן, קרן וריבית.

ו. יחד עם זאת, לגבי בני המניות: גם אם החברה לא מגיעה לסיכון פשיטת רגל, עדין – העבודה שישנן עלויות מימון כבודות עלולות לכרטיס ברוחחים. למשל: נניח חברת שלותה 100,000 ש"ח ברכיבת 10%, והשקייה אותן בפרויקט שמניב 8% תשואה בלבד. היא הפסידה מכ"כ 2,000 ש"ח! בני החוב לא יפסידו (כי אין להם סיכון). מי מממן את הפסד? בני המניות. בשפה גסה, בני המניות סובלים מתנדתיות גבוהה יותר פוטנציאלית ברוחיהם במידה והחברה ממונפת.

ב. הואיל והסיכון לבני המניות קשור בקשר חיובי למינוף – ככלומר: כשהמינוף (מימון בחוב) גדול, הסיכון לבני המניות גדול – התשואה שהם ידרשו בעקבות מינוף פיננסי או הגדלו גדלה בהתאם. ערך זה מותבטא מתמטית במשוואה שנקראת "המשפט השני של מודיליאני ומילר":

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

ג. ברמת מחיר ההון הממוצע המשוקל – WACC: בעולם ללא מס, ה-WACC לא משתנה בעקבות מינוף, והוא קטן בעולם עם מס בעקבות מינוף.

$$WACC = k_S \uparrow * \frac{S}{V} \downarrow + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V} \uparrow$$

לפי המודל (שלא נוכחה) אם אין מסים, ההשפעות המנוגדות מתקזזות, ובכך הכל מחיר ההון הכללי (המומוצע המשוקל בחברה) לא משתנה בעקבות מינוף.

אם יש מסים, מחיר ההון דווקא ירד, לאור מגן המס על עלויות המימון.

ד. שווי החברה יכולה המסומן באות  $V$  איינו משתנה בעולם ללא מס בעקבות מינוף או הגדלו; אך הוא גדול בעקבות מינוף או הגדלו בעולם עם מסים. נקודה זו מתבטאת במשפט שנקרא "המשפט השני של מודיליאני ומילר":

$$V^L = V^U + t * D$$

## מפגש 14 – חזרה לבחינה 10.2.2025

**מטרתנו העקרונית בפגשוניות יפה זו:**

- להתיחס בקטנה למיקוד לבחינה (משם בקטנה, רק בהיבט שאלות קהילתיות).
- لتת תדריך קצר פוטנציאלי למידה לבחינה.
- ובעיקר – לפתור תרגילים.

**מנהלות ומטלות:**

- מישוב המטלות האחרונות יבוצע בזריזות.
- מטלת ההשתתפות تعدכן לאחר מכון – איןכם נדרשים לבצע / לעשות דבר.

**תדריך מסויים לנושאי בחינה:**

- Diskliimer: אין דבר זהה לתדריך מלא או מיקוד בקורס (מעבר למה שציינה מרכזת ההוראה שرون שפרן).
- כלומר, בرمתי כסטודנט, הסתעפויות של הנושאים השונים לסוגיות משנה, ניסוחים ומרקבי קצה, מוביילים לכך שכל ניסיון להכללה רבתני של נושאים ובהתאם טכניקות פתרון (לפחות לפי הניסיון שלי) נדון לכישלון.
- בכל זאת, כדי ל以习近平ו פרימיניג כללי למתחווה הקורס, שאולי ישיע לאחדים מכם, להלן "כיוון" עקרוני לנושאים עיקריים וסוגי הסתעפויות מובהקות.
- הערך עשוי להימצא למיקוד לא מחייב זה ("תדריך") לנושאי הקורס העיקריים הוא כדי לעשות קצר סדר בבלוג, ולפעמים – אחרי שפותרים שאלות רבות בנושא מסוים, אפשר לעבור שנית על התדריך ולראות שאכן הסוגיות ברורות, עושותشكل, מסודרות היטב בדף הנוסחאות או כל הפתרון האחרים שערכתם לעצמכם.
- התדריך גם עשוי לאפשר, ברמה מסוימת, לתכנן את הלמידה – לפי משקל הנושאים היחסי.

יחידה	הסתעפויות (לא ממצה)
1	<p>יחידה זו לא הוצאה במפגשי הנקה והיא עוסקת במטרת הפירמה. יש עליה דיון בחומרו האתר, יש ייחידה לימוד קצרה יחסית שאפשר לסקור ולקחת ממנה את הכותרות או ההדגשים העיקריים, ועשוייה להיות בנושא שאלה אחת (אם כן – <i>Christmas came early</i>).</p> <p>היחידה מדגישה בין היתר (אבל לא רק) את סוגיות מטרת הפירמה כהשאלה ערכה לבליה (בעלי המניות). המסגרת המושגית לדין מותבשת על כך שהערך לבלי המניות הוא בעצם הערך הנוכחי הנקי של תזרימי המזומנים שהפירמה מניבת לבליה, ומתמקדת בהבדל שבין רווח (שאינו משקף ערך, כי הוא לא תזרימי, לא מבטיא זמן, לא מבטיא סיכון...) לבין ערך שהקורס כלו עסק בנסיבות בערך בכלים של ערך נוכחי. כמו כן, היחידה כוללת התייחסות מסוימת לתפקיד המנהל הפיננסי בפירמה.</p> <p>עוד טיפ קטן – אם, כאשר אני עובר על כל המבחנים לדוגמא (ואני עבר על כולם, לא מעוניין אותו), ומשתדל גם לפרט את כולם) אם אני מזזה שאלה העוסקת ביחידה זו – אני מפרק לה את הזרה מבחינת הבנה – כמובן, לא רק עונה לשאלה כפי שרלונטי, אלא מפרק את כל ההיגדים האחרים, מבן לפי היחידות מה שגוי בהיגדים האחרים (ואם לא, שואל) וכן הלאה.</p> <p>מדוע? כי דוקא ביחידה שלגבי מספר השאלות מצומצם, אני רוצה להיות ערוץ על בסיס המיצוי המשמעותי ביותר של החומר הקיים.</p>
5	<p><b>ברובד הבסיסי – חישובי FV ו- PV וחישובי ריבית:</b></p> <p>הרובד הבסיסי מתייחס לשאלות ש"די ברור" כיצד לגשת אליהן: ממש שואלים – מהו ערך העתידי, מהו הערך הנוכחי, מהו השווי היום, מה הסכום שייצטר ביחסו... ניסוחים שמקרבים אותנו במידה רבה לדיוקת הכלים הרלונטי לחישוב.</p> <p>הישומים כוללים – חישובי ערך עתידי <b>FV</b> – של סכום ייחיד, של סדרה (מע"ס - FVFA,لوح א-2 בנספח A לכרך ד), לרבות מצב שבו מחשבים ערך עתידי למספר סדרות, התאמות זמן ותקופה, צבירת ריבית בתקופת הפסיקות מסדרה, התאמות לתזרימי תחילת תקופה / תום תקופה, התאמות ריבית (כי הריבית חייבת להתאים בחישובים סדרתיים לפך הזמן בין תשלומים).</p> <p>חישובי ערך נוכחי <b>PV</b> – (שנקראים גם חישובי שווי / חישובי מחיר – מע"ס - PVFA –لوح א-4 בנספח A לכרך ד) – כנ"ל (של סכום ייחיד, של סדרה, כולל התאמות זמן, תחילת תקופה, סוף תקופה, סדרה אינסופית).</p> <p>חישובי ריבית (בעיקר – <b>חישובי ריבית אפקטיבית</b>) – על בסיס מגוון נוסחאות – המרת ריבית נקובת לאפקטיבית ("ריבית דרייבית"), התיחסות לריבית מראש (שמחושבת פעמיים או מספר פעמיים), שילוב של ריבית דרייבית וריבית מראש (יש ברצפים, יש במחברת גם אם לא על כולם עברנו), וגם חילוץ ריבית מנתוני סדרות ("לוויות 100,000... 100,000... אתה מחזיר כל חודש 2,000 במשך 55 חודשים... מהי הריבית המגולמת בעסקה במונחים שנתיים" כMOVEN שהניסוח לא כל כך פשוט, אבל מבחינת סגנון).</p> <p><b>ברובד המורכב יותר – יישומים:</b></p> <p>המדובר בשאלות שבנון, במקרים רבים לא ניתן לי מהו הכליל שעליי לישם. לא ניתן בהכרח במפורש שעליי לחשב דוקא ערך עתידי או דוקא ערך נוכחי, ואני אctrיך להסיק זאת מסוג השאלה. לשאלות מורכבות אלו יש כל מיני וריאציות (מקרים). נציג כמה מהם.</p>

<p><b>בחירה בין חלופות</b> – חלופות לרכישת מוצר (על ידי חישוב הערך הנוכחי PV של כל חלופה – ובחירה במשתלמת יותר, זו שה-PV שלה בערך מוחלט נמוך יותר) ו/או חלופות לקבלת כסף או תקציבים, גם נשענות על PV באופן זהה (בחירה בגובה).</p> <p><b>הפקודות ומשיכות</b> (אני אוהב לקרוא לה "אייזון אקטוארי") – מצב שבו אני מפקיד סכום או סכומים מסוימים אשר צוברים ריבית ומאפשרים למשוך סדרת תקציבים / קצבות.</p> <p>כשמדובר בסדרת הפקודות שאחריה סדרת משיכות – מחשבים FV להפקודות ומשווים אותן לביטוי המיצג את ה-PV של המשיכות.</p> <p>כשמדובר בהפקודה בודדת שERICA לממן את המשיכות – אפשר פשוט לחשב PV למשיכות זהה.</p> <p><b>חילוצי ערכבים</b> מトーוק נתונים המרמזים על ערך נוכחי / עתידי: למשל – שאלות שבחן ידוע הערך הנוכחי, יש לחץ ריבית; שאלות שבחן ידוע הערך העתידי – יש לחץ מספר תשומות; שאלות שבחן ידוע מהו הסכום שיצטרב בעתיד בחסכוון, יש לחץ את סכום ההפקודה (או הריבית) וכיו"ב.</p> <p><b>הלוואות</b> – במיוחד (אבל לא רק!) הלוואות שפיצר (החזירים קבועים) שבחן תהליכי העבודה מתחילה מחלוקת – PMT, והלוואות הנפרעות בהחזרי קרן שווים (לוח סילוקין רגיל).</p> <p>כולל שינויים בלוח – אם ההלוואה בתנאים מסוימים, ובשלב מסוים משתנה אחד או יותר מהתנאים (סוג הלוואה, תקופת ההחזר, תדריות ההחזר, ריבית וכו'), ואו אז – צריך לחשב את יתרת ההלוואה ולפרוס אותה כ"הלוואה חדשה" לפי התנאים החדשניים.</p>	
<p><b>ברובד הבסיסי:</b></p>  <p>קריטריונים לבחינת כדיות השקעות לפרויקטים שונים במצבים שונים. הרובד הבסיסי ידרשו ידיעה מוחלטת (בזרזות מהירה) של חישוב PV – עניין (שווי פרויקט), גם כאשר הפרויקט בעל תזרימים קבועים, גם כשם משתנים. חישוב IRR – שט"פ (שיעור התשואה הפנימי בפרויקט), חישוב PI – ממד רוחניות, חישוב החזר הון שנתי. כדיות לפי כל קритריון. הcadיות תקבע לפי סוג הפרויקטים והקשר ביניהם.</p> <p>ספקטיבית, בפרויקטים בלתי תלויים (שאין קשר ביניהם) :</p> <p>קונבנציונליים של השקעות – ניתן לקבל החלטה לפי כל קритריון, ועוקם ה-PV יורד משמאל לימין. קונבנציונליים של נטילת הלוואות – ניתן לקבל החלטה לפי PI, PV ו-IRR בגרסה ההפוכה, עוקם ה-PV PV עולה משמאל לימין.</p> <p>לא קונבנציונליים – שמספר הפוקי הסימן של תזרימיים שונה מ-1: ההדגש המרכזי הוא היעדר היכולת (במקרים רבים) לקבל החלטה לפי IRR.</p> <p>לדעת אילו קритריונים רלוונטיים / לא רלוונטיים ובאיזה מצב.</p> <p><b>ברובד המורכב יותר:</b></p>  <p>הצגה גרפית של פרויקטים (צורת הגרפ מושפעת מהיותו השקעה קונבנציונלית, הלוואה, לא קונבנציונלית).</p> <p>בחירה ודרוג בין פרויקטים במצבים שונים :</p> <p><b>בלתי תלויים</b> (אפשר לעשות מה שchnpoz, לא מגבלות) – הראיינו לעיל את הקритריונים.</p>	6

<p>מו<sup>ץ</sup>יאים זה את זה - יש לדוגמה, ולבחר אחד מתוכם בלבד, לכל היותר, כאשר צריך להכיר את הגורמים לסתירה בין העניין – NPV לבין השטי"פ IRR (אפק שונה; השקעה שונה; שיעור תשואה על השקעות חוזרות ועוד, ראו כרך ד) לדעת שסתירה ביניהם אפשרית, אם מבקשים להכריע לפי קרייטריון ספציפי, נעשה זאת ונאמר אמן, אבל אם שואלים באופן כללי מה עדיף, נליך תמיד על שיפוט לפי NPV שלא טועה אף פעם במקרה זה.</p> <p><b>מגבלת תקציב</b> (פחות נפוץ ב מבחנים לדוגמא - ניתן לבצע מספר פרויקטים, כל עוד תקציב ההשקעה בזמן אפס לא חורג מסכום נתון מוגדר – לבדוק מה הקומבינציה שמניבת NPV מרבי).</p>	
<p><b>בסיסי – נכסים בודדים; שילוב של שניים/שלושה מסוכנים; CAPM "קלאסי" לעילים:</b></p> <p>חישוב תוחלת תשואה וסטיית תקן – <b>נכסים בודדים</b></p> <p>בחירה בין נכסים מסוכנים בודדים לפי תוחלת-שונות (קרייטריון שמניה שנתא סיכון), על פי התוחלת וסטיית התקן שלהם. חשוב מאד להכיר היטב את הקרייטריון הנ"ל וכן את המשמעות של שנתא סיכון (שונה סיכון הוא לא תמיד זה שיבחר בנכ"ס / בתיק בעל רמת הסיכון הנמוכה ביותר אלא בית גם על התוחלת...).</p> <p>לודא בכל שאלה האם קיימות הסתברויות – שהסיכון שלחן מתכנס ל-100%, אם לא – ההסתברות המשלימה היא לערך 0.</p> <p>לשים לב היטב האם ניתן לזוזה את המקרה הפנימי – מצב שבו נכס מסוכן מסוים עדיף על חברו בכל מקרה (למשל: נכס שמניב 100 או 200, לעומת נכס אחר שמניב 300, 900 או 1,000). ואז ההעדרה היא לכל סוג המשקיעים ללא תלות ביחסם לסיכון.</p> <p>המשמעות של שילוב בין <b>נכסים מסוכנים בלבד</b> – גישת תיקי ההשקעה (נוסחאות סטטיסטיות):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>תוחלת תשואת תיק המורכב משני נכסים מסוכנים</b> (לפי משקל ההשקעה בכל נכס).</li> <li>- <b>סטיית תקן</b> של תיק המורכב משני נכסים מסוכנים (לפי משקלים ומקדם מתאם או על השונות המשותפת).</li> <li>- <b>תיק מינימום סיכון</b> – "פופייק" – האם ניתן לשלב בין נכסים, להקטין סיכון – מה משקל ההשקעה בכל נכס בתיק זהה (משקל שאותו ניתן לחזוץ ולהציג לשם חישוב התוחלת וסטיית התקן).</li> <li>- <b>היכולת להציג גרפית את עקומת תמהיל ההשקעה האפשרים ולקבוע איזה חלק הוא יעיל</b> (בחירה הפוטנציאלית).</li> </ul> <p><b>מודל ה – CAPM</b> – אם שאלת דנה בצור המפורשת במודל זה, ו/או כאשר מזזה נתונים הרלוונטיים רק למודל כגון נכס חסר סיכון, תיק השוק, אג"ח ממשתנית (נכס חסר סיכון במילאים אחרים), ביטא... אז אני יודע שאני במודל בצורה די ברורה.</p> <p>החלק היחסית "פשטוט" במודל הוא במצב שבו נתון שהתיק ייעיל.</p> <p>תיקים ייעילים (לא בירית מחדל) מקיימים את נוסחת קו ה-CML ואת כל יתר הנוסחאות בעולם עם ייעילות (תוחלת שמורכבת מנכ"ס חסר סיכון ותיק השוק, סטיית תקן שזזה לסיכון השיטתי וכו'). חלק גדול מהשאלות דורשות בעצם חילוץ מהמשוואות המתמטיות של התקיקים הייעילים הללו של פרמטרים שונים: ריבית חסרת סיכון, תוחלת התקיק, סיכון התקיק, תוחלת השוק...</p> <p><b>תיקי ההשקעה מורכב – מבחינתי, זה בעייר CAPM בעולם "ללא יעילות":</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>מודל ה – CAPM</b> כשהධינו הוא לא רק בנכ"ס ייעילים / תיקים ייעילים – עולם ה – SML</li> <li>- <b>משוואת ה – SML</b> וחשיבות הביטא כמדד סיכון (גם את ההגדרה – "מקדם הסיכון השיטתי" במקומות חשיבות סטיית התקן כמדד סיכון).</li> <li>- <b>הנתית יסוד</b> – קיום שוויי משקל וקיים משוואת ה-SML על ידי הנכסים בשוק, אלא אם נתנו אחרת או שמכוחים אחרים, על ידי הצבה במשוואת ה-SML ובודקים שהיא לא מתקינה.</li> </ul>	8

<p>- רכיבי הסיכון : סיכון שיטתי (אינו ניתן לפיזור – קיים גם בתיקים ייעילים וגם בתיקים לא ייעילים) וסיכון לא שיטתי (ניתן לפיזור – קיים בתיקים לא ייעילים בלבד, הוא למעשה מה שיווצר את חוסר הייעילות).</p> <p>- הבדלים עקרוניים בין תיקים ייעילים ולא ייעילים.</p> <p>- חילוצים מגוונים מאד מכל סוגים המשוות – כולל חילוצי ביתא ומשוואת הביתא, חילוצי פרמטרים של השוק וריבית חסרת סיכון, חישוב ערכים של נכסים ספציפיים, בדיקת שוויי משקל.</p> <p>- חישוב מועד מתקדם / שונות הקשורות עם השוק (שאלה אורך מועד).</p>	
---	--

#### מתווה אפשרי להכנה:

מעבר לטיפים הכלליים – סידור נסחאות, מחברת בחינה, שימוש ברכפי האתר, פתרוון מבחנים כמו שכולנו עושים... יש הרבה מאד חומר ויחסית מעט זמן. ואני אספק מנסיוני הלא מייצג (כל אחד אחרה) מתווה הכנה ל-2 קייסים – הקيس האחד הוא לתלמיד / ה במסוגים להקדיש זמן משמעותייחסת ללמידה, והקיס הנוסף – לבני אילוצי חיים קשיים (שלמים אגב, אם לא היו בספר פוקוס כל הסטט, בענוה הרבה הייתה גם אולי מציע לשקל לגשת במועד אחר).

#### להלן לוי' אפרי – למי שבעניינים ותפר את החומר במהלך הסטט:

זמן עבודה	נושא עיקרי	דגשים והערות
יום אחד	סגירת פינה בריביות - יחי 5	בabit המעברים – ריבית נקובה, ריבית מראש, ריבית דריבית, ריבית אפקטיבית...
יום אחד	סיום כל יחי 5 ללא יצא מן הכלל	שאלות קשות מהמחברת בחן את עצמך ברכפים מטלת אופ"ל קצת שאלות מ מבחנים על יחי 5
יום אחד	יחידה 6 - פרויקטים יחידה 8 – החלק הקל – סטטיסטיות (תוחלת ושונות) פרויקטים בוודדים ובחירה ביניהם, שילוב בין 2 נכסים מסוכנים, כולל גרפם, כולל ייעילות, כולל תיק מינימום סיכון, חילוצים...	יח' 6 - להבין היטב את צורת הגրפים : לא רק את הקרייטריונים טכנית, אלא גם את סוגים הפרויקטים ואת ההשפעה על איזה קרייטריון רלוונטי וכו'. לתוכה דגש לשאלות תאורייה! בחן את עצמך ברכפים שאלות מ מבחנים על יחי 6 שאלות במחברת (הकצרות)
יוםיים	יחידה 8 - מודל CAPM - תיקים ייעילים, תיקים לא ייעילים, ריכוז נסחאות של כל הממצבים	דגש מרכז – יחי 8 CAPM : הבחנה בין המקרים (יעילות / אי יעילות, ביתא מול סטטית תקן, הגרפים הרלוונטיים). להתמקד בשאלות הקשורות לחילוץ

פתרונות מבחןים – בrama אלגברית ויזהוי נוסחה מבחןים, סדר גודל של 4-3 שאלות יכולות להיות בנושא זה, תגינו "לרוואה"	פתרונות מבחןים – בראמה אלגברית ויזהוי נוסחה מבחןים, סדר גודל של 4-3 שאלות יכולות להיות בנושא זה, תגינו "לרוואה"	
התאמת דפי נושאות לטיעוות נפוצות כשאנחנו פתרים מבחןים – במיוחד בשאלות תאוריה לא להסתפק ב"צדkti, להה" אלא לנסות להבין גם את ההיגדים השגויים.	נתו מבחןים כשאנחנו פתרים מבחןים – במיוחד בשאלות תאוריה לא להסתפק ב"צדkti, להה" אלא לנסות להבין גם את ההיגדים השגויים.	יומיים
גם מי שלא מאמין בנושא תפילה ב hasilחה גדולה		

**אם אין לי זמן ללמידה ולא הייתי מספיק בעניינים? האם המחברת בלבד מספקת?**  
 קודם כל – אין תרופות פלא; לא ניתן לגשת רק על סמך המחברת או רק על סמך הרცפים, צריך הכל ובעיקר  
 צריך זמן להטמע ולהיחשף למגוון רחב של סגנונות של שאלות.  
 ובכל זאת, אם אין ברירה. ויש לי רק יומיים...

זמן עבודה	נושא עיקרי	dagshim והערות
חצי יום	מייפוי מלא של כל הנושאים, כל הנושאות ותבניות לשאלות הנפוצות ביותר	לקחת ממש את המיפוי הלא ממצה שערכנו למעלה, ליצר מיני תבניות לשאלות העוננות להגדלה, ולודא שאנחנו مبינים את התהליך בתוכן.  זה יהיה לא ממצה, זה יהיה טכני, אבל אם יש לי רק יומיים (זה עייתי, אבל מי שמתעקש) אין ברירה.
יום וחצי	חצאי יום – פתרון של שאלות שליח' 5 בלבד, ואז ואת ההבנה על בסיס הסקירה הנוספת הזה, אני מודע לכך שאגע עם לשון בחוץ, ואלא אם כן מימון בלבבי ו/או היתי סופר חד כל הטעmaster, אני יודע שאני בסיכון גבוה מאד.	אני משלים את התבניות ואת דפי העזר ויום שלם נוסף – פתרון של מבחןים שלמים, כולל תקינות ובחנה בין נושאים

#### המלצת השף:

לא לגשת אם יש לך פחות מ-4 ימים נתו. אבל זו המלצה חברית, זו הדעה האישית שלי, לא ערכתי מחקר, אני  
 מספר לכם על החוויה שלי כסטודנט. אני לוקחתי בזמןנו שבוע רגילה מהצבא ואחרי כ-4 ימים פתאום הרגשתי  
 שדברים מתחילהים טיפה להתיישר.

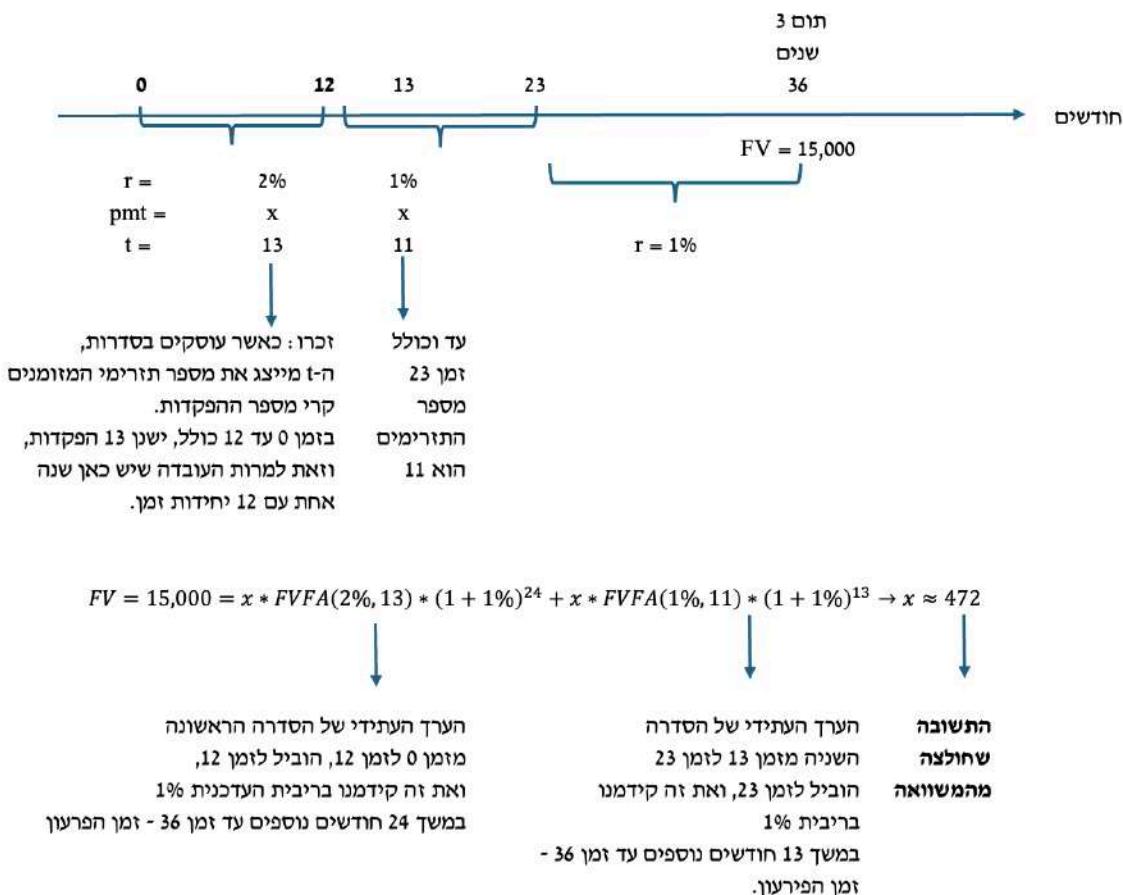
## שאלה 22 – שאלה 5

### שאלה 5

חווסף פתח תוכנית חיסכון. בתום 3 שנים קיבל 15,000 ש"ח. מהי ההפקדה החודשית בתכנית החיסכון, אם ההפקדות הtbodyו בתחילת כל חודש במשך 3 שנים הראשונות בלבד והתכנית נשאת ריבית של 2% לחודש במשך השנה הראשונה ולאחר מכן הריבית צפופה לרדת ל-1% לחודש?

- א. 472 ש"ח.
- ב. 760 ש"ח.
- ג. 479 ש"ח.
- ד. 572 ש"ח.
- ה. 474 ש"ח.

פתרונות :



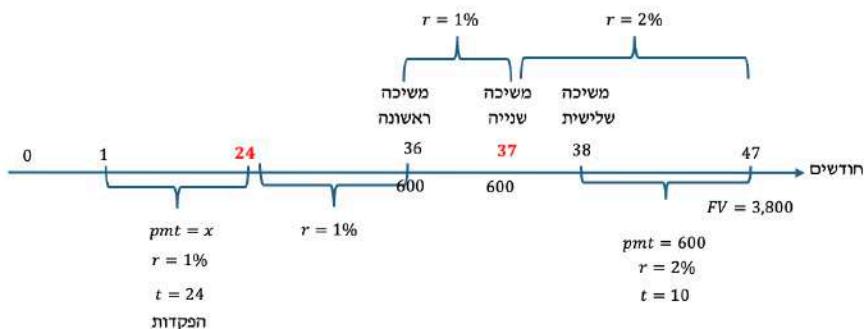
שאלון 19 – שאלה 3

### שאלה 3

אם ידוע כי מיד לאחר המשכיה השנייה מהתקנית, עולה תשואת התוכנית ל-2% לחודש וכי בתום המשכיות ותוך חשבון החיסכון סכום של 3,800 ש"ח, מהו הסכום החודשי שחייב מר כהן מפקיד בתכנית חיסכון המבטיחה תשואה של 1% לחודש, סכום קבוע כל חודש במשך שנתיים. שנה לאחר ההפקדה الأخيرة החל למשוך סכום של 600 ש"ח מדי חודש, במשך שנה (סה"כ 12 משיכות).

- א. 215 ש"ח  
ב. 316 ש"ח  
ג. 645 ש"ח  
ד. 429 ש"ח  
ה. 414 ש"ח

## פתרונות:



באופן כללי, כדי להחל סכומי הפקה, עלינו לבעט את החקיקות ואת המשיקות לאותה נקודת זמן ולחשוטות ביןיהם. אין יותר מאשר ערך של כל הפקותם במונחים נקודת הזמן של החקיקה האורורה - קאו - זמ' 24.

$$FV_{\text{DUTY}}(24) = x * FVFA(1\%, 24)$$

הסיפור המורכב יותר הוא עם יסויו ערך הנכחי של המשיכות לאוותה נקודת זמן ערך נוכחי - כדי לבטא אחורנית במונחי זמו, 24, למרות שמתחלות בambil (36):

$$PV_{\text{משיכות}}(24) = 600 * (1 + 1\%)^{-12} + 600 * (1 + 1\%)^{-13} + 600 * PVFA(2\%, 10) * (1 + 1\%)^{-13} + 3,800 * (1 + 2\%)^{-10} * (1 + 1\%)^{-13}$$

המשיכה הראשונה בזמן 36	המשיכה השנייה בזמן 37	כל יתר המשיכות מזמן 38 עד זמן 47	היתרה בחסכוּן לאחר
------------------------	-----------------------	----------------------------------	--------------------

המשמעות האחרונית מונאות לאחרו למשך 24 שעות לפחות בסביבת ריבית גם היא מותאמת לאחרו כולל תוך 10 מישיות שכולן בסביבת ריבית.

נתונה כ-3,800 ואנו	נזהר מלהזין דין מוגזם	בהתאם ל-2%	של 2%, ולכון גם הקפיצה האוטומטית	בחזקת 13- כדי להגעה	מודע כסכום בודד? כדי לא לא
--------------------	-----------------------	------------	----------------------------------	---------------------	----------------------------

השניה בריבית 2% לזמן 24 חודשים אחריה הוא ביביתת 2%疵היה

ריבית כבונה, רוק ציריך תלכו עד אחרור  
אל מישחה נספת.

37 מותאמים אותה לזמן 13 תקופות בוגרים 3% גלאמת מרכז

מ-37 ל-24 בריבית 1% לחודש.

וון הסופית יהיה:

24) משיכותן  $\tau = (24) \text{ הנקודות}$

משוואת הפתרו הסופית תהיה:

$$FV(24) = PV(24) \text{ משיכות הפקודות}$$

$$x * FVFA(1\%, 24) = 600 * (1 + 1\%)^{-12} + 600 * (1 + 1\%)^{-13} + 600 * PVFA(2\%, 10) * (1 + 1\%)^{-13} + 3,800 * (1 + 2\%)^{-10} * (1 + 1\%)^{-13}$$

$$x \approx 316$$

וכעת נעבור לסקירת שאלות נוספות.  
שאלות אלו אינן מבחנים, אך הן בוחנות מבחנים, והן בנושאים שונים הקשורים לעולם התוכן שלנו בסמסטר הנוכחי.

נקובה

3. ל淮南 משכנתא של 600,000 ש"ח בריבית ~~של~~ 6% לשנה. המשכנתא מוחזרת במשך 20 שנים בתשלומים סוף חודשיים שווים. לאחר 7 שנים ממועד ליקחת המשכנתא (מיד עם התשלום האחרון של השנה השביעית), החזרת סכום של 100,000 ש"ח (בנוסף לתשלום הקבוע בגין המשכנתא). מהו התשלום החודשי החדש אם הריבית השנתית נותרה ללא שינוי, ומספר התשלומים הכלול נותר ללא שינוי?
- א. 3,244 ש"ח.  
ב. 41,014 ש"ח.  
ג. 3,374 ש"ח.  
ד. 4,298 ש"ח.  
ה. 2,414 ש"ח.

פתרון :

**התשובה הסופית - ג. להלן פירוט:**

להלן חישוב תמציתי ומקוצר מאד, שבמונח שלו – מבטאים את החזרה התקופתי המקורי, מהוון למועד שינוי התנאים, בנסיבות התשלום התקופתי, והכל (במונח) נפרש על יתרת התקופה במכנה.

$$PMT = \frac{\frac{600,000}{PVFA(0.5\%, 240)} * PVFA(0.5\%, 156) - 100,000}{PVFA(0.5\%, 156)} \approx 3,374$$

**אם לא ברור בכלל, הנה חפירה:**

ישומי ייחידה 5 הם מגוונים: הם כוללים חישובי ערך עתידי ("כמה תצבור בעתיד בהנחה שתפקיד..."), חישובי ערך נוכחי ("מהו הערך הנוכחי / מהו השווי היום"), חילוצים המתבססים על הגדרות אלו, חישובי ריבית אפקטיבית ויישומים נוספים.

ספציפית כאן מדובר באחד היישומים הפחותים יותר של ערך נוכחי: הלוואות. ומדובר? מושם שלמעשה ניתן לומר את שני המשפטים הבאים, **שכום יפה במיוחד להלוואות הנפרעות בתשלומים שווים** ("שפיכר"):

- משפט 1 : סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי (PV) של החזרה.
- משפט 2 : יתרת הלוואה היא הערך הנוכחי (PV) של יתרת החזרה.

זיהינו כאן הלוואה שתשלומיה קבועים (עלים לגדר סדרה קבועה). הדבר הראשון שארצה לעשות הוא לחזק את ערכיה, ובמיוחד את התזוריים התקופתיים בעדה "טרם השינויים המתוארים". ואם כך, בהינתן שסדרת התשלומים קבועה, ניתן לטעון שמתיקיימת המשוואה הבאה:

$$LOAN = PMT * PVFA(r, t)$$

הערך LOAN הוא סכום הלוואה.  
הערך PVFA הוא בעצם ערך מען"ס (לוח א-4) שמתאים למספר התשלומים  $t$  ושיעור הריבית  $r$

$$600,000 = PMT * PVFA(0.5\%, 240)$$

בעצם: מס' התשלומים כאן הוא כמספר החודשים - ב-20 שנים ישנו 240 תשלום חודשיים. בנוסף, אנו זוקקים לריבית החודשית (הריבית לפרקי הזמן בין תשלום). הואיל והריבית הנתונה - 6% - היא שנתית, יש לחלקה ב-12 כדי להגיע לריבית חודשית  $= 0.5\% = 6\% / 12$  (הנחה היא שהריבית נקובה).

בhininten העובדה שלא ניתן לחזק מלוחות ההיוון (לוח א-4) מקדמים בריבית שהיא שבר ובמספר תשלום קבועים כאמור, ניעזר בנוסחה המתמטית של PVFA, כדלקמן:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

בhzvba akbel:

$$PVFA(0.5\%, 240) = \frac{1 - \frac{1}{(1+0.5\%)^{240}}}{0.5\%} \approx 139.581$$

שיםו לב, ערך ריבית של 0.5% במנוחי שבר עשרוני הוא 0.005. ככלומר:

$$PVFA(0.005, 240) = \frac{1 - \frac{1}{(1+0.005)^{240}}}{0.005} \approx 139.581$$

נחזיר לנוסחת המקור של סכום הלוואה כערך הנוכחי של החזירה

$$600,000 = PMT * 139.581 \rightarrow PMT \approx 4,298.58$$

כעת לאחר שטיפנו בחישוב החזר הבסיסי, נחזיר לשאלת ולהשタルות שלה שאומרת שאחרי 7 שנים בדיקון, רגע לאחר התשלום בזמן זה, סילקנו עוד 100,000 ש"ח. מה שזה אומר בעצם, שנרצה לבדוק את יתרת הלוואה לאחר 7 שנים, ממנה להפחית (לנכחות) 100,000 ש"ח, ואת יתרה הניל' לפROSS על פני יתרת חיי הלוואה.

משפט 2 : יתרת הלוואה לכל מועד היא הערך הנוכחי של יתרת החזירה. יתרת הלוואה ערב השינוי היא היתרה לאחר 7 שנים או - לאחר 84 תשלומיים נוספים :

$$BAL_{84} = 4,298.58 * PVFA(0.5\%, 240 - 84)$$

או בעצם :

$$BAL_{84} = 4,298.58 * PVFA(0.5\%, 156)$$

נציב בנוסחה המתמטית של PVFA או מענ"ס :

$$PVFA(0.5\%, 156) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.5\%)^{156}}}{0.5\%} \approx 108.14$$

נזור לחישוב היתרה :

$$BAL_{84} = 4,298.58 * 108.14 = 464,850$$

מיותר זו עליינו לנכوت את התשלום המידי החד פעמי שמצוע מיד לאחר התשלום ה-84 :

$$BAL_{84}(Net) = 464,850 - 100,000 = 364,850$$

נוצע פרישה מחדש של יתרה עדכנית זו משל מדובר היה בהלוואה חדשה בסכום זה אשר נפרשת על פני 156 תשלומיים (התשלומיים שנותרו ; אלו שבמספרם הכללי אין שינוי כאמור) :

$$364,850 = PMT_{New} * PVFA(0.5\%, 156) \rightarrow 364,850 = PMT_{New} * 108.14$$

וכך מגאים לסכום התשלום הקבוע החדש / העדכני והنمוך. יותר, כאמור :

$$PMT_{New} = 3,374$$

(\*) הערכה : יש הטוענים שבמוקם לציין שסכום הלוואה שווה לערך הנוכחי של החזירה, ומכך לחוץ את PMT אפשר פשוט לחלק את סכום הלוואה ב- PVFA. זה נכון, אבל זה לא יבודד בהלוואות הנפרעות בתזרימי תחילת תקופה, או במספר נתוני סדרות וכן הלאה.

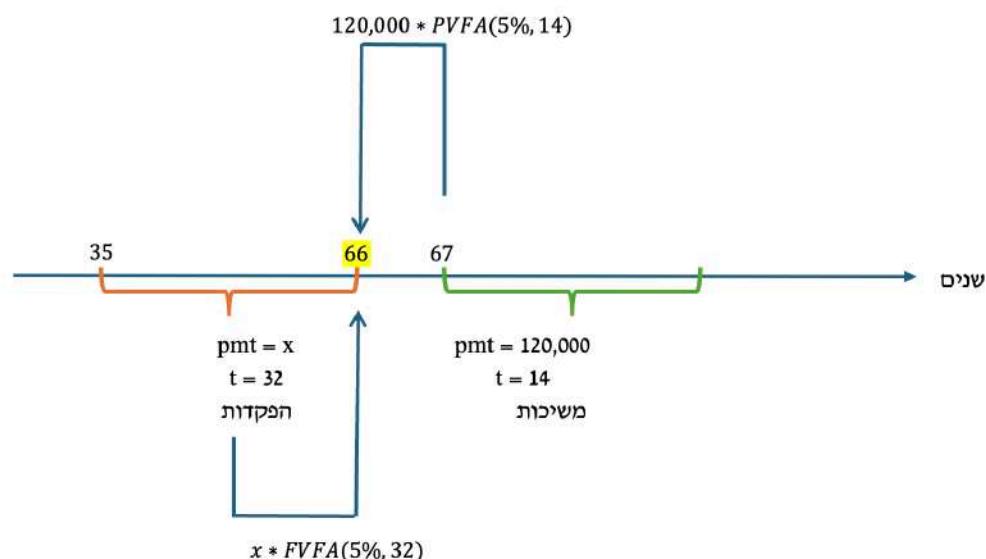
4. הניחו כי היום הנוכחי חוגגים את יום ההולדת ה- 35 שלהם. הנוכחי פותחים היום קרן פנסיה שבה תפקדו הפקדות שנתיות שווות שיימשו עד שתחגגו יום הולדת 66 (כולל). ההפקודה הראשונה בקרן היא היום. המשיכות מקרן הפנסיה יחולו כאשר תחגגו את יום ההולדת ה- 67 שלהם. אתם מעריכים כי תמשכו 14 משיכות שנתיות בגובה של 120,000 ש"ח כל אחת מקרן הפנסיה. מהי ההפקודה השנתית הנדרשת בשנים שבחן תפקדו את ההפקודות אם ידוע כי קרן הפנסיה מניבת תשואה של 5% לשנה, ותשואה זו תימשך כל עוד יש כסף בקרן הפנסיה?

- א. 15,775 ש"ח.
- ב. 16,563 ש"ח.
- ג. 15,023 ש"ח.
- ד. 52,500 ש"ח.
- ה. 54,251 ש"ח.

פתרון :

התשובה א.

כאשר מדובר בועלמן של סדרת הפקדות שלאחריהן סדרת משיכות - מתקיים המשפט הבא: הערך העתידי של הפקודות הוא הערך הנוכחי של המשיכות, לאותה נקודת זמן. אישית, אני אוהב לקרוא לשאלות אלו "אייזון אקטוארי" שכן תחסיבים מעין אלו מקובלים מאד בפנסיה וביבטוחים. אני מאד אוהב לעבוד בשאלות כאלה עם ציר הזמן.



ספציפית במקרה זה, הערך העתידי של ההפקדות הובילנו לבדוק לזמן 66 (כי ערך עתידי של סדרה מבטא את התוצאה במנוחי נקודת הזמן של התזרים האחרון / ההפקדה האחרון), וגם הערך הנוכחי של המשיקות הסדרתיות הובילנו לאותו הזמן (כי ערך הנוכחי של סדרה מבטא את התוצאה במנוחי נקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה. למעשה, הויאל וסדרת המשיקות החלו בזמן 67, ההיוון שלה (PV) כסדרה בהגדירה מוביל "אחד אחריה" קרי לזמן 66. והואיל ובמקרה זה, לפיכך, מתקינה זיהות בתזמנוניים בין חישוב PV הפקדות ל- PV משיקות, כל מה שנותר לעשות הוא להשוות בין הערכים לאותה נקודת זמן - ולחוץ את החסר :

$$x * FVFA(5\%, 32) = 120,000 * PVFA(5\%, 14)$$

: כלומר :

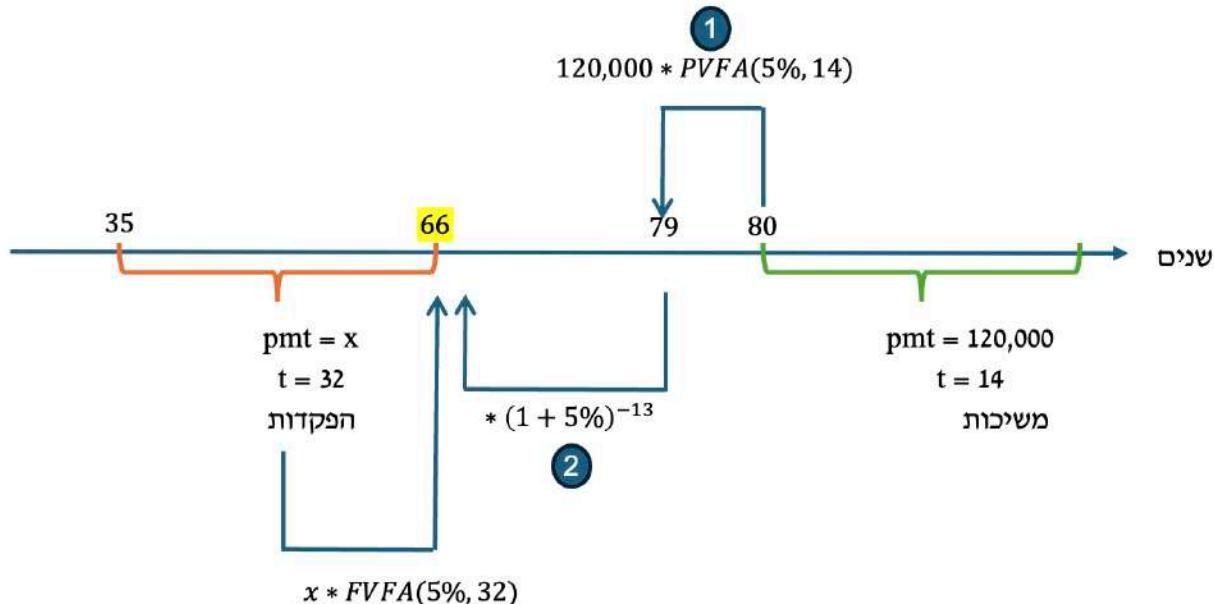
$$x * 75.299 = 120,000 * 9.899 \rightarrow x = 15,776$$

(\*) הערכה : בחישובי איזון אקטוארי, הערך החיווני הוא לבטא גם את ההפקדות וגם את המשיקות במנוחים של אותה נקודת זמן בדיקוק. את נקודת הזמן אתם למורי יכולם לבחור בעצמכם : אני מאד אוהב להציג את הערכים "באמצע". לפעמים זה גם חוסך כמה מהלכים חישוביים. מי מביניכם שמעדיף תמיד לבטא ערך הנוכחי לזמן "0" גם של ההפקדות וגם של המשיקות, ורק אז להשוות ביניהם - זה יעבוד גם.

---

### הרחבה לשאלת

בנתוני שאלת קודמת, הינו בעת כי את ההפקדות ממשיכים לבצע מזמן 35 עד זמן 66 כולל, אך המשיכות מתחילה רק החל מיום הולצת ה-80. בסך הכל מוצעות 14 ממשיכות בתום כל שנה, ושיעור הריבית עודנו 5%, סכום המשיכת עודנו 120,000 ש"ח לשנה.



משוואת הפתרון תשתנה לतצורה :

$$x * FVFA(5\%, 32) = 120,000 * PVFA(5\%, 14) * (1 + 5\%)^{-13}$$

ואפשר כמובן לחץ את x. ממשיקולי זמן לא נבצע עעת.

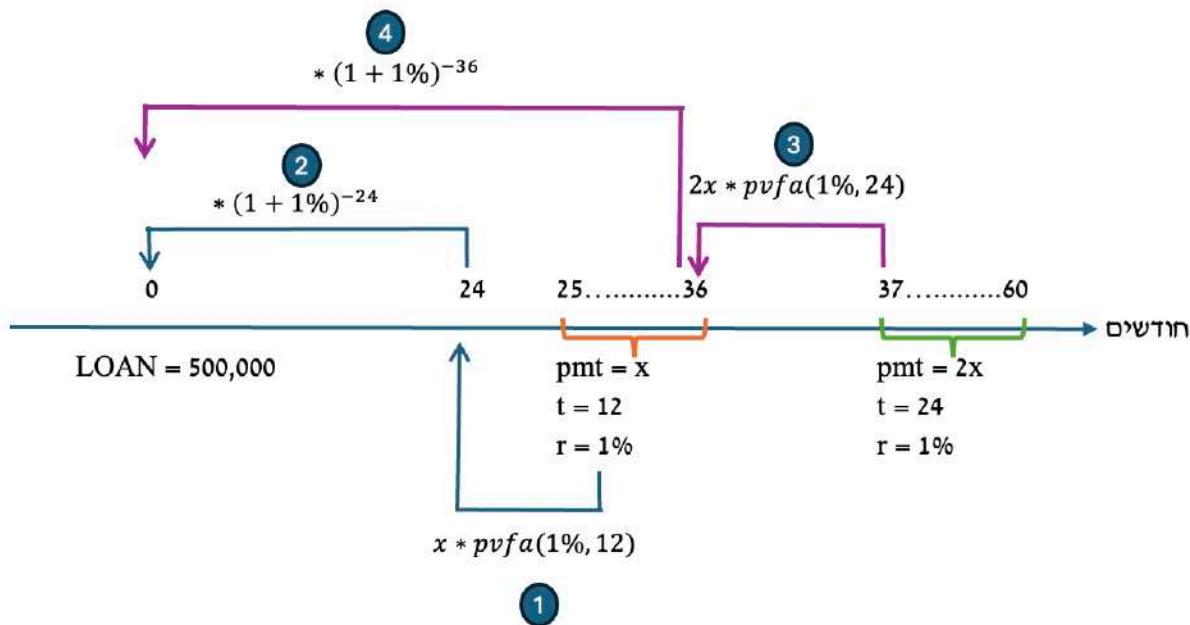
### שאלת בקשת הקהל - הלוואה עם גרייס (דחיה במועד התשלומים והתאמות זמן)

בנק אמונונים בע"מ מציע ללקוחותיו הלוואה בסכום של 500,000 ש"ח שתפרע בתשלומים חודשיים, כלהלן: החל ממועד החודש ה-25 ובמשך שנה (12 תשלומים), יבוצע תשלום חודשי קבוע. החל ממועד החודש ה-37, ובמשך שנתיים, יבוצע תשלום חודשי קבוע בסכום כפול.

מהו ההחזר החודשי במהלך 12 התשלומים הראשונים, אם ידוע שהריבית החודשית 1%?

פתרון:

סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. וכשאני אומר זאת אני מתייחס לכל החזרים, לא יוצאה מן הכלל. לעומתנו, במקרה זה, החזרים אינם קבועים כי אם משתנים; והם כוללים שני חלקים: סדרת החזרים הראשונים, מזמן 25 לזמן 36 בסכום מסוים וסדרת החזרים שנייה מזמן 37 לזמן 60 בסכום אחר. את שתי הסדרות חייבים לחזון (PV) בזמן אפס, על מנת לבטא את המשפט.



המשוואת העקרונית לפיה סכום ההלוואה (בזמן 0) הוא הערך הנוכחי של כלל החזרה (זמן 0) :

$$500,000 = PV(\text{סדרה 1}) + PV(\text{סדרה 2})$$

במצב, כולל התאמות מתבקשות לריביות הסדרות (כדי להובילו לזמן 0), נקבל:

$$500,000 = x * PVFA(1\%, 12) * (1 + 1\%)^{-24} + 2x * PVFA(1\%, 24) * (1 + 1\%)^{-36}$$

$$500,000 = x * 11.255 * (1 + 1\%)^{-24} + 2x * 21.243 * (1 + 1\%)^{-36}$$

והתוצאה המתקבלת:

$$x \approx 12,967$$

מסקנה: כל אחד מ-12 התשלומים הראשונים שסומן כ-  $x$  הוא 12,967 ש"ח.

### שאלה 3

בנק מלאוה סכום חד-פעמי שיוחזר בצוירוף הריבית בתום חצי שנה ממועד מעת ההלוואה. הריבית החצי-שנתית שגובה הבנק היא 20%. פרט לריבית, מנחה הבנק במועד מעת ההלוואה עמלת מראש של 3.75% מסכום ההלוואה. **הריבית האפקטיבית השנתית שגובה הבנק היא :**  
(התשובות מוצגות ברמת דיוק של ספרה אחת אחרי הקודח)

- א. 47.5%
- ב. 55.0%
- ג. 55.4%
- ד. 49.4%
- ה. 24.7%

פתרונות :

קצר וקובלע :

$$r_e(0.5 \text{ years}) = \frac{1 + 20\%}{1 - 3.75\%} - 1 = 24.675\% \rightarrow r_e(\text{annual}) = (1 + 24.675\%)^2 - 1 = 55.4\%$$

כאשר מדובר בהלוואה הנפרעת בתשלום אחד - אם נדע לבטא את הסכום המתקבל נטו (לאחר כל עמלת או ניכוי מקביל), ואת הסכום הכלל המשולם בתום התקופה - נטו, נוכל להתבסס על המשפט הטוען כי: **היחס בין הערך המוחלט של התשלומים בתום התקופה לבין סכום התקובל בתחילת - פחות אחד, הוא הריבית האפקטיבית לתקופת העסקה:**

זמן	סכום נטו	החזר הלוואה	מתן הלוואה
0			
0.5			
שנים			
	$-1.2x$	$-x * (1 + 20\%)$	$+x$
			$-3.75\% * x$
	$0.9625x$	$\text{סכום נטו}$	$\text{סכום ההלוואה המתקבלת}$

הריבית האפקטיבית לחצי שנה (תקופת העסקה) לפי היחס בין הערכים פחות אחד היא:

$$r_e(\text{hazishana}) = \frac{P_{0.5}}{P_0} - 1 = \frac{1.2x}{0.9625x} - 1 = 24.675\%$$

והואיל ושאלו על הריבית האפקטיבית לשנה שלמה - מעבר מריבית אפקטיבית אחת לאחרת מבצעים עם מעריך חזקה מתאים (הנחה ריבית דרייבית) ולא עם כפל פשוט (שני חזאים בשנה) :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{hazishana})^2 - 1 = (1 + 24.675\%)^2 - 1 \approx 55.4\%$$

התשובה ג.

אפשר גם לפטור שאלה זו על בסיס נוסחת הריבית האפקטיבית המשלבת בין ריבית מראש / ניכוי מראש לבין ריבית בתום התקופה :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

כאן :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{20\%}{1}\right)^2}{\left(1 - \frac{3.75\%}{1}\right)^2} - 1 = 55.4\%$$

מה הלק כאן?

המונה כולל את הריבית החצי שנתית, שבהיעדר נתונים בדבר חישוב, מחושבת פעמיים אחת בחצי שנה. העילינו בሪבויו – כי צריך לחזור לשנה.

המכנה כולל את הניכוי מראש, גם הוא חצי שנתי. אמנם לא נאמר שאכן מדובר בשיעור חצי שנתי, אך מהעובדת שזהו הניכוי הכלול בעסקה חצי שנתית מסיקים שאכן מדובר בערך חצי שנתי כאמור.

### שאלה 7

פירמה השקעה 5,000 ש"ח בפרויקט שהענ"ג שלו הוא 7,000 ש"ח. **מהו הערך הנוכחי של זרמי המזומנים?**

- א. 12,000 ש"ח.
- ב. 5,000 ש"ח.
- ג. 7,000 ש"ח.
- ד. אי-אפשר לחשב ללא קבלת נתון לגבי אורך חיי הפרויקט.
- ה. אי-אפשר לחשב ללא קבלת נתון לגבי מחיר ההון של הפירמה.

נתון :

$$NPV = 7,000$$

ידועה-  $NPV$  הוא הערך הנוכחי הנקי נטו של כולל תזרימי המזומנים : החיוביים והשליליים גם יחד. ההשקעה הראשונית בפרויקט נתונה, והיא בוגר תזרים מזומנים שלילי בזמן אפס בגובה ההשקעה. בעצם, אוכל לבטא את ה-  $NPV$  כך :

$$NPV = -5,000 + PV_{\text{יתר התזרימיים}} = 7,000 \rightarrow PV_{\text{יתר התזרימיים}} = 7,000 + 5,000 = 12,000$$

התשובה א.

### שאלה שני המצא

בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסוכנים בלבד, ניתן להשקיע בחact בין שני מניות: C ו- D. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 40%, וטטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וטטיית התקן שלה 35%. אמוננו הוא ממשקיע שונא סיכון הופועל בשוק זה. סמנו את הטענה הנכונה:

- א. אמוננו יבחר להשקיע בנכס C לאור סטיית התקן הנמוכה יותר.
- ב. אמוננו יבחר להשקיע בנכס D לאור תוחלת התשואה הגבוהה יותר.
- ג. אמוננו יהיה אديש באשר לבחירה בין הנכסים (הם שקולים מבחיננו).
- ד. לא ניתן לדעת איזה נכס יעדיף אמוננו.
- ה. אין אף תשובה נכונה.

שיקחה! ברגע שנכס מסויים (C) מנייב תוחלת נמוכה יותר, הוא "נפסל" מיד ואינו עדיף, לפחות לא באופן ודאי. ברגע שנכס אלטרנטיבי D הוא בסיכון גבוהה יותר, גם הוא "נפסל" מיד ואינו עדיף, לפחות לא באופן ודאי. נמצאים פה במקרה קלאסי שבו לכל נכס יש יתרון מסוים וחסרון מסוים. במצב זה, שני הנכסים "יעילים" והמשקיע יתלבט ביניהם, ויבחר לפי טעמיו האינדיבידואליים. התשובה ד.



**שאלה נוספת - לבקשת הקהל - אפשר לשלב ושוואים על ידיותם בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסווגים בלבד, ניתן להשיקיע באמצעות מניות: C ו- D ו/או לשלב ביניהם. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 50%, וסטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וסטיית התקן שלה 35%. שלמה הוא משקיע שונאי סיכון הפעול בשוק זה. וידוע שמקדם המתאים בין הנכסים הוא 0. סמן את הטענה הנכונה:**

- א. ייתכן שלמה יבחר להשקיע 70% מכספיו בנכס D.

ב. בהכרח שלמה יבחר להשקיע 100% מכספיו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית.

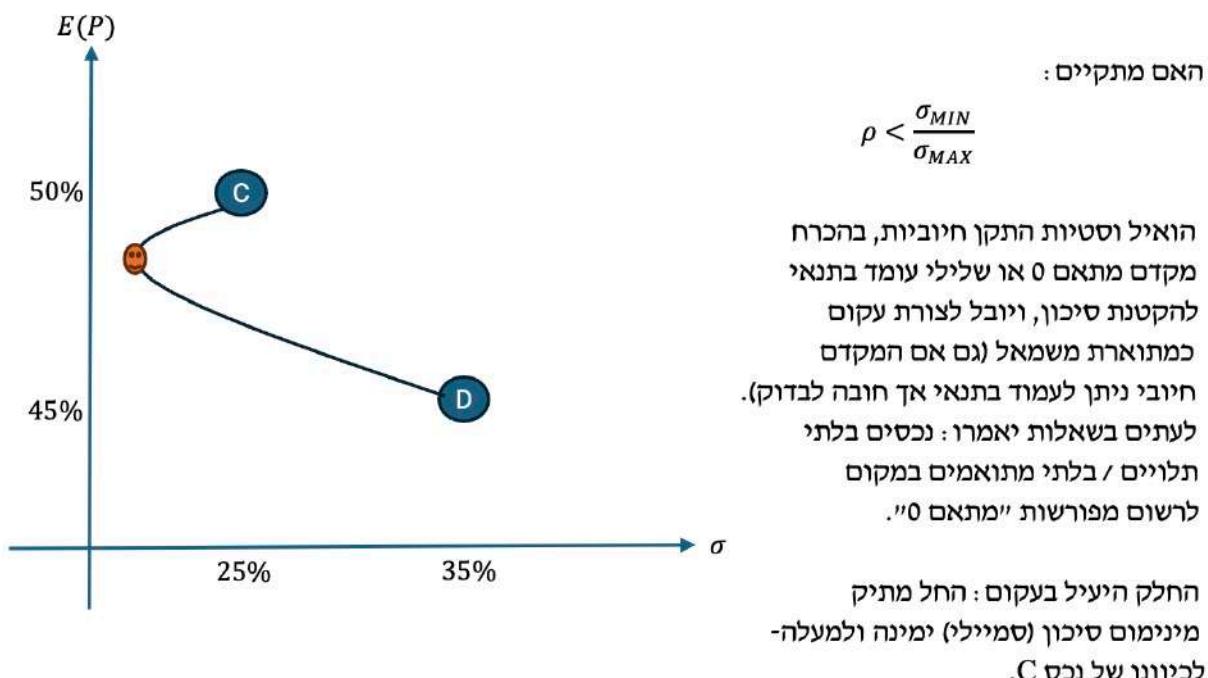
ג. שלמה יבחר בתיק מינימום סיון, כולל חלק מהCASTFSים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D.

ד. ייתכן שלמה יבחר להשקיע 20% מכספיו בנכס D.

ה. כל התשובות שגויות.

פתרונות (התשובה ד, להלן הנמקה מפורטת):

כאשר אני ניגש לשאלת שדנה בבחירה משקיע בעולם הכללי שני נכסים מסווגים בלבד עם אפשרות שלילוב ביניהם, מאי מאי חשוב לאיר את עוקם תמהיל ההשערה האפשריים הנובעים מהשילובים השונים, שכן הדבר ענייק ביטוי חזותי נוח לעיכול בדבר המשמעות של השילובים והיעילותם.



נפאל לחיישוב משקל ההשקאה בכל נכס בתיק מיניימים סיכו (מייניגום שונות/מייניגום סטטיות תקן) :

$$W_C^{MRP} = \frac{\sigma_D^2 - \rho * \sigma_C * \sigma_D}{\sigma_C^2 + \sigma_D^2 - 2 * \rho * \sigma_C * \sigma_D}$$

במצב אקלים:

$$W_C^{MRP} = \frac{0.35^2 - 0 * 0.25 * 0.35}{0.25^2 + 0.35^2 - 2 * 0 * 0.25} \approx 0.6622 = 66.22\%$$

למעשה, בנקודות "סמיילי" משקיעים כ-66% בנכס C. אנו יודעים שההשकעות היעילות הן בהכרח הסמיילי או נקודות קרובות יותר ל- C מאשר שיעור השקעה גבוהה יותר ב- C ביחס לנקודות הסמיילי. בשפה פשוטה: כל שונאי הסיכון יבחרו להשקיע לפחות 66.22% בנכס C. זה גם אומר ששיעור (משכלה) ההשקעה בנכס D (הערך המשלים) יהיה מקסימום 33.78%, כל שונאי הסיכון יבחרו להשקיע 33.78% או פחות בנכס D.

א. ייתכן שלמה יבחר להשקיע 70% מכספיו בנכס D.

שגוי. המקסימום שישקיע בנכס D הוא 33.78%. מדוע? כי בסמיילי ההשקעה בנכס D היא בשיעור 33.78%, וכל שקל נוספת שנשקיע בנכס D יקרב אותנו מהסמיילי ל-D, ככלمر יכניס אותנו לצד התחרותן של העוקום שאיננו עיל. **יעילות מתיקיימת בתיק מינימום סיכון וכן בתיקים הנמצאים ימינה ולמעלה ממנו.**

ב. בהכרח שלמה יבחר להשקיע 100% מכספיו בנכס C, שכן סטיטית התקן שלו היא המינימלית. שגוי. ראשית מושם שבהינתן האפשרות לשלב, הסיכון ב- C איננו מזערני, ניתן להקטין את הסיכון מעבר על ידי שילוב הנכסים (והגעה לנקודות הסמיילי). שנית, מושם שנקודת C היא אمنה יעה (חלק מהעוקום העיל, שמתחיל מהסמיילי ונמשך ימינה ולמעלה) אבל היא איננה הנקודת היעילה היחידה. לכן **ייתכן שתבחר אבל לא בהכרח תבחר.**

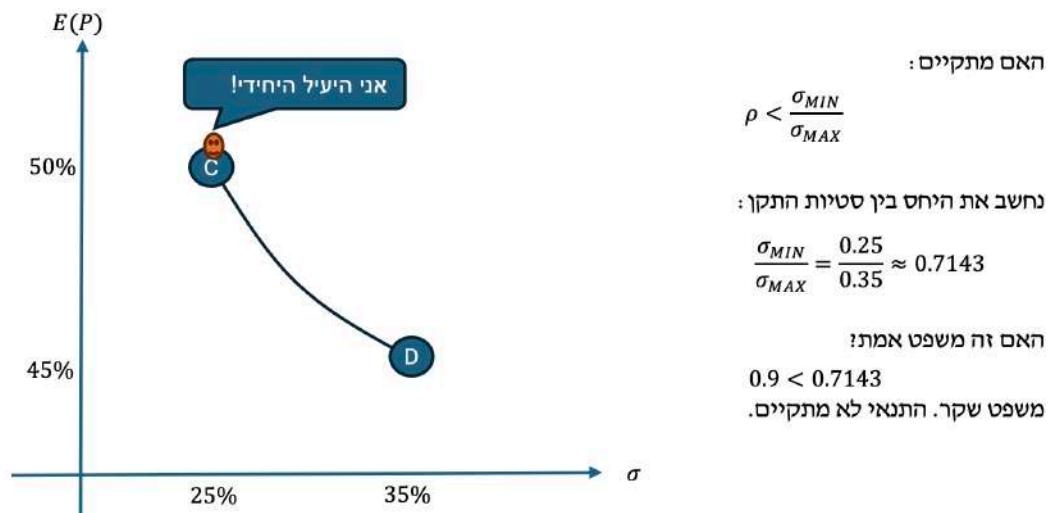
ג. שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, שכולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D. שגוי. כמשמעותם "שלמה יבחר" המשמעות = בהכרח יבחר. וזה כמובן לא נכון, כי למروת שתיק מינימום סיכון (סמיילי) הוא עיל, קיימות אפשרויות השקעה יעילות נוספות שאולי יבחר בהן (כל חלק העוקום מהסמיילי ימינה ולמעלה).

ד. **ייתכן שלמה יבחר להשקיע 20% מכספיו בנכס D.** נכון. ראיינו שההגדרה היא, במקרה זה, שכל שונאי הסיכון ישקיעו 33.78% או פחות בנכס D. משקל השקעה של 20% או פחות בנכס D אכן אפשרי, **ויתכן (לא בהכרח) שייבחר.**

שאלה נוספת - לבקשת הקהיל - אפשר לשלב ושאלים על יעילות  
בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסווגים בלבד, ניתן להשיקע באחת מבינן שתמי מניות: C ו- D ו/או לשלב ביניהן. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 50%, וסטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וסטיית התקן שלה 35%. שלמה הוא משקיע שונא סיכון הפועל בשוק זה. וידוע שמקדם המתאים בין הנכסים הוא 0.9. סמנו את הטענה הנכונה:

- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכיספו בנכס D.
- בhcרכה שלמה יבחר להשיקע 100% מכיספו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, ש כולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכיספו בנכס D.
- כל התשובות שגויות.

פתרון (התשובה הנכונה ב, להלן הנמקה מלאה):



- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכיספו בנכס D.
- ממש לא! השקעה של 100% ב- C היא היחידה הרלוונטית (היעילה) בנסיבות המקרה.
- בhcרכה שלמה יבחר להשיקע 100% מכיספו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית. נכון.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, ש כולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D שגוי. במקרה זה, מינימום סיכון (לאור מבחן מקדם המתאים) מתקבל אגב השקעת 100% מכיספי המשקיע בנכס C בלבד.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכיספו בנכס D. שגוי מאותה סיבה.

3. פירמה משכנתה ריבית  $R\%$  לחודש למקורות המימון שלה. מה שיעור ההנחה המקסימלי אותו מוכנה הפירמה להעניק על מנת שהמימון של הכספי המתkeletal כתוצאה מהקדמתה הגביה יהיה זול יותר מהכספי שתגifyס הפירמה מקורות המימון שלה?

א.  $\frac{I}{I-R}\%$

ב.  $\frac{I}{R}\%$   
ג.  $R\%$

ד.  $\frac{R}{I-R}\%$

ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**תשובה רשמית ורחיבת ההסביר:**

3. תשובה נכונה: ה'  
נניח כי הפירמה מכירה מוצר באשראי לחודש. מחירו של המוצר הוא 100 שקלים. נניח עוד כי הריבית היא 10% לחודש. ערכו הנוכחי של התשלום הוא  $90.9 = \frac{100}{1.1}$ . הפירמה תהיה מוכנה לקבל 90.9 ש"ח בזמן מקום תחת האשראי. לכן שיעור ההנחה המקסימלי שהפירמה מוכנה

لتת הוא  $9.09\%$  או באופן כללי  $\frac{R}{I+R}\%$ .

שאלה זו כוללת שני אתגרים: האתגר הראשון הוא בעובדה שמדובר בשאלת מבוססת פרמטרים ולא ערכיים כספיים. כתוצאה לכך, באופן טבעי, התהיליך של הפתרון והפיתוח שלו מורכב יותר.

האתגר השני - הוא אתגר ניסוחי. הרி דיברור שאים היו שואלים למשל מהו הערך הנוכחי של התזורים המתkeletal, בהינתן תזורים נתון - או אפילו בהינתן נעלמים, יכולנו להתייחס אליו.

כאשר נתונים בהנחה הקשורה להקדמת גביה - בעצם נתונים בשאלת: האם ההנחה (שפוגעת בשווי שהפירמה מקבלת) מובילה לכך שעדין במונחי ערך הנוכחי הסכום המתkeletal בניכוי הנחה גבוהה מ(או לפחות זהה) לערך הנוכחי של התזורים (ללא הנחה) המהוון.

בשפה קצר יותר פשוטה, הביטוי הבסיסי ציל:

$$(תשלום עתידי) PV = (\textrm{מזומן בניכוי הנחה}) PV$$

אחד מהטריקים להתמודד עם העולם הפרטורי בהינתן שכל הערכיים הם האחוזיים, הם לבטא את הסכומים כ- 100 ואת הריבית כשיעור מסוים - למשל, 10%. הואיל והנתונים נתונים בריבית חודשית, ובתקופה של חודש:

$$PV = (\textrm{מזומן בניכוי הנחה}) 100 * (1 + 10\%)^{-1}$$

או:

$$PV = \frac{100}{(1 + 10\%)} = (\text{مزומנים בኒכי הנקה})$$

בהמשך נקבל :

$$PV = \frac{100}{(1 + 10\%)} = 90.91$$

ועכשיו השאלה היא מעט יותר מוגדרת :  
מהו שיעור ההנחה שМОBILE אוטי מ-100 ל-90.91?

$$\frac{90.91}{100} - 1 = -9.091\%$$

ניקח את כל הביטויים האפשרויות התשובה, ונציב בהם את שיעור הריבית הנתונה, ונגלה עברו מי מהם מתקיים הערך של 9.091% :

$$\frac{I}{I-R} \% \quad \text{א.}$$

$$\frac{I}{R} \% \quad \text{ב.}$$

$$R \% \quad \text{ג.}$$

$$\frac{R}{I-R} \% \quad \text{ד.}$$

ביטוי א

$$\frac{1}{1 - 10\%} = 1.11 \text{ Wrong}$$

ביטוי ב :

$$\frac{1}{10\%} = 10 \text{ Wrong}$$

ביטוי ג :

$$10\% \text{ Wrong}$$

ביטוי ד :

$$\frac{10\%}{1 - 10\%} = 0.11 \text{ Wrong}$$

ולכן התשובה ה. ככלומר, ניתן על לנסות לפתח אלגברית ביטויים שאינני בטוח בהם ולהגיע לתוצאות שמידת שקיים המתמטית לאפשרויות המונה מוטלת בספק, המלצתה : לבטא במספרים ולבדוק מה עונה לכלל.

שאלה 6

להלן נתונים זרמי המזומנים של פרויקט מסוים:

זום מזומנים	-60	120	1	2	שנה

סמן את הקביעה הנכונה:

- א. הפירמה תשקיע בפרויקט זה רק אם מחיר ההון הוא 50%.
- ב. לפרויקט זה אין שט"פ.
- ג. לפרויקט זה יש שני שט"פים.
- ד. הפרויקט אינו כדאי השקעה עבור כל מחיר ההון.
- ה. תשובות ב' ו-ד' נכונות.

פתרונות:

ברמת אפיון הפרויקט, תזרימי המזומנים משנים את סימנים משלילי לחובי (פעם אחת) ומחובי לשילי (פעם שנייה).

כאשר תזרימי המזומנים בפרויקט הופכים את סימנים מספר פעמיים השונה מ-1, אז מדובר בפרויקט שМОדרן ללא קוונציאני.

במקרים רבים זה אומר שלא ניתן לקבל החלטה באשר לכדיות הפרויקט לפי כלל השט"פ. כדי לאפיין את כדיות הפרויקט במצב כזה, מומלץ בחום לנסות לבנות את התצורה של עוקום העניין ועל בסיסו להסיק מסקנות.

הצורה של עוקום העניין מושפעת מנקודות החיתוך של העוקום עם הציר האופקי והאפיון הכללי של עוקום העניין - אני מאמין שת"פ (לא שת"פ) במובן של ערך כלכלי לקבالت החלטות, אלא שת"פ במובן מתמטי גרפי שיעזר להאריך צורת עוקום העניין. תזכורת: מציאות מתמטית של ערכי השט"פ דורשת בנית משווהת ה- $NPV$ , הזנת מחיר ההון כנעלם, והשווה את המשווהה ל-0 כלהלן:

$$NPV = -60 + 120 * (1 + IRR)^{-1} - 100 * (1 + IRR)^{-2} = 0$$

אחד הטכניקות שאני אוהב כדי לפתור משווהה כזו היא לסמן:

$$X = (1 + IRR)^{-1}$$

ואז אקבל את המשווהה הבאה:

$$-60 + 120 * X - 100 * X^2 = 0$$

אני יכול לסדר את זה קצת אחרת:

$$-100X^2 + 120X - 60 = 0$$

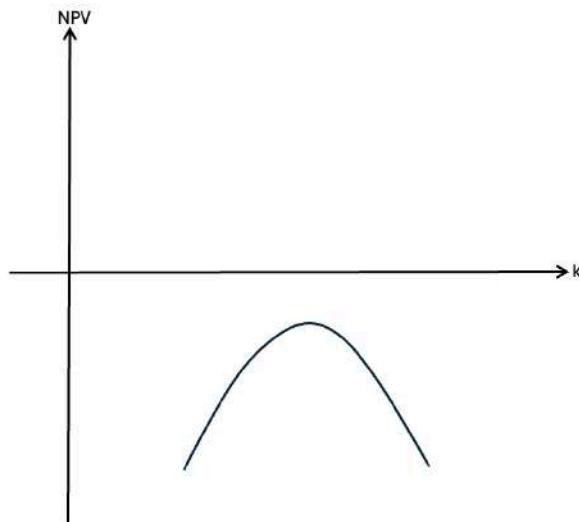
ואז להשתמש בנוסחת משווהה ריבועית כדי לנסות לפתור:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 * (-100) * (-60)}}{2 * (-100)} = \frac{-120 \pm \sqrt{-9,600}}{-200}$$

הואיל והביטוי מתחת לשורש שלילי, זה אומר שאין פתרון למשווהה ריבועית זו. אין שט"פ.

ואם כך, מדובר בעוקום עניין שאיננו חוצה את הציר האופקי כלל בrama הגרפית.

בנוסף בהינתן שזו משווהה ריבועית, חשוב (לצרכים כלליים) לדעת את הצורה הכללית שלה : בוכה או מחייבת? בהינתן המקדם השילילי של הערך בריבוע, הפרבולה בוכה (כmono).



- א. הפירמה תשקיע בפרויקט זה רק אם מחיר הון הוא 0%.
- ב. לפרויקט זה אין שת"פ.
- ג. לפרויקט זה יש שני שת"פים.
- ד. הפרויקט אינו כדאי השקעה עבור כל מחיר הון.
- ה. תשובה ב' ו- ד' נכונות.

וחמענה המסכם בהתייחס להיגדים אלו יהיה :

- א. שגוי - הפרויקט אינו כדאי אף מחיר הון.
- ב. נכון - ראו הנמקה לעיל
- ג. שגוי - כיב נכוון. ראו חישוב לעיל.
- ד. נכון - בהינתן צורת התרשים ומיקומו בתנאים אלו, העניין שלילי בכל מחיר הון.
- ה. **התשובה המלאה ביותר.**

#### שאלה 4

4. לקחתם הלוואה בגובה של 10,000 ש"ח בריבית שנתית 10% לפחות 5 שנים. החזר הלוואה בתשלומים זהים של קרן וריבית המשולמים בסוף כל שנה. יתרת הקרן לאחר התשלום השני:

- א. 5,512 ש"ח.
- ב. 5,964 ש"ח.
- ג. 4,487 ש"ח.
- ד. 6,560 ש"ח.
- ה. 6,000 ש"ח.

פתרון :

השאלה עוסקת בהלוואה הנפרעת בתשלומים "זהים" = תשלום קבועים, השווים זה לזה (סדרה קבועה). הלוואה הנפרעת בשיטה זו - נקראת גם "הלואת שפייר" (אם טרם עשיתם זאת - בקשה דאגו לעבור על נספח הפניות ללימוד עצמי שדן בנושא הלוואות).

בסיסו הלוואת שפייר הבננה שסכום הלוואה שאני נוטל היום הוא בהגדרה הנוכחי (ערך שאני מקבל היום) של סדרת ההחזרים העתידיים. בעצם, זה אומר שמתיקים הביטוי הבא:

$$LOAN = PMT * PVFA(r, t)$$

כאשר :

הערך LOAN מייצג את סכום הלוואה.

הערך PMT מייצג את התשלום התקופתי קבוע בגין הלוואה.

הערך  $r$  מייצג את הריבית לפרק הזמן בין תשלוםים.

הערך  $t$  מייצג את מספר התשלומים הכלול בהלוואה.

כל שאלה על הלוואה הנפרעת בתשלומים קבועים (שפייר, כאמור) מתחילה מניתוח בסיסי של ההחזר התקופתי הקבוע בהלוואה.

$$10,000 = PMT * PVFA(10\%, 5)$$

ולכן התשלום התקופתי קבוע, כל שנה, הוא :

$$10,000 = PMT * 3.791 \rightarrow PMT \approx 2,638$$

הנדרש דרש את יתרת הקרן לאחר התשלום ה-2. **אנו טוענים שיתרת הקרן היא בהגדרה הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו.**

$$BAL_n = PMT * PVFA(r, t - n)$$

כלומר :

$$BAL_n = 2,638 * PVFA(10\%, 5 - 2)$$

או בעצם :

$$BAL_n = 2,638 * PVFA(10\%, 3) = 2,638 * 2.487 = 6,560$$

התשובה ד.

11. הניחו כי שוק ההון נמצא בשווי משקל לפי CAPM. נתונים שני תיק השקעות **יעילים** A ו-

B. תיק B צפוי להניב תשואה  $(E(R_B))$  כפולת מזו של תיק A  $(E(R_A))$  אולם סטיית התקן של

תיק B  $(\sigma_B)$  גבוהה פי שלוש מזו של תיק A  $(\sigma_A)$ . על פי נתונים אלו שער ריבית נטול סיכון

הוא:

א.  $E(R_B)/2$

ב.  $E(R_A)/2$

ג.  $\sigma_A/3$

ד.  $\sigma_B/3$

ה. לא ניתן לקבוע ללא נתונים על תוחלת תשואת תיק השוק.

פתרון :

שיעור משקל לפי CAPM בהיעדר נתונים נוספים - אין משמעו ייעילות; משמעו ש- SML בודאות מתקיים (ברירות מחדל).

ספקטיבית כאן, לצד נתונים שיעורי המשקל גם דאגו לצין בפניו שקיים שני תיקים השקעות **יעילים** המסומנים כ-A ו-כ-B בהתאם.

$$E(B) = 2E(A)$$

$$\sigma_B = 3\sigma_A$$

נדרש :

$$R_F = ?$$

בהתנחת שהתיקים **יעילים**, ב-CAPM, בהינתן גם ערכי תוחלת וגם ערכי סטיית התקן שהקשר ביניהם מבוטא בקו ה - CML, אנסה לעובוד עמו.

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

אם שואלים ספקטיבית על  $R_F$ , ואין צורך אמיתי לחלץ את יתר הפרמטרים מהנוסחה, נוח מאד ליציג את שיפוע קו ה CML כעלם אחד.

$$(I) \quad E(A) = R_F + \alpha * \sigma_A \rightarrow \text{multiply by 3} \rightarrow 3E(A) = 3R_F + 3\alpha * \sigma_A$$

$$(II) \quad E(B) = R_F + \alpha * \sigma_B \rightarrow 2E(A) = R_F + \alpha * 3\sigma_A$$

נחסיר את משווהה (II) ממשווהה (I) ונקבל :

$$3E(A) - 2E(A) = 3R_F + 3 * \alpha * \sigma_A - [R_F + \alpha * 3\sigma_A]$$

ובהמשך פיתוח קיבל בהתאם לתשובה ב :

$$E(A) = 2R_F \rightarrow R_F = \frac{E(A)}{2}$$

## שאלה מתוך הרצפים באתר

### יחידה 8

קטגוריות "בחן את עצמך"

### שאלה 10

בחרו את הטענה הנכונה, בהינתן התפלגות תשואות שני נכסים פיננסיים, לפי המצב הכלכלי במשק -

מצב כלכלי	הסתברות	תשואת נכס 1	תשואת נכס 2
גאות	16%	0.25	4%
ריגיל	12%	0.50	6%
מיתון	8%	0.25	8%

### שאלה 10

לא חסתיים

ניקוד השאלה:

5.00

3 סימן שאלה

יש לבחור תשובה אחת:

- א. נכס מס' 1 עדיף מנכס מס' 2 לפי קритריון תוחלת שנות.
- ב. נכס מס' 2 עדיף מנכס מס' 1 לפי קритריון תוחלת שנות.
- ג. אי-אפשר לקבל החלטה בין הנכסים, ללא ידיעת סוג המשקיע.
- ד. אפשר ליצור תיק שwonothו שווה ל-0, על-ידי שילוב של נכס 1 ונכס 2.
- ה. לא ניתן לדעת דבר לגבי אפשרות שילוב שני הנכסים, מאחר שאין נתונים לגבי המתאים ביניהם.

פתרון :

האתגר המרכזי בשאלה זו טמון בהיגד ד. בהתאם להיגד, הר依 שלפחות עקרונית, ניתן לשלב בין הנכסים. על מנת לבחון את השפעות השילוב בין נכסים מסוימים, علينا לדעת מקדם המתאים בין תשואות הנכסים, כאשר מקדם מותאם זה איננו נתון בשאלה.

חישוב מקדם המתאים בעצמנו על בסיס נתוני התפלגות תשואות הוא אקט מעט אכזרי וארוך, אך ניתן לבצעו בהתאם לפירוט שסיפקתי בפתרונם למבון 6 שאלה 7 כאמור בפרק שיעור 6.

באופן כללי :

תחילה علينا לחשב את התוחלת של כל נכס :

$$E(1) = 0.25 * 0.16 + 0.5 * 0.12 + 0.25 * 0.08 = 0.12 = 12\%$$

$$E(2) = 0.25 * 0.04 + 0.5 * 0.06 + 0.25 * 0.08 = 0.06 = 6\%$$

סטיתת התקן של כל נכס :

$$\sigma_1 = \sqrt{0.25 * (0.16 - 0.12)^2 + 0.5 * (0.12 - 0.12)^2 + 0.25 * (0.08 - 0.12)^2} = 2.8284\%$$

$$\sigma_2 = \sqrt{0.25 * (0.04 - 0.06)^2 + 0.5 * (0.06 - 0.06)^2 + 0.25 * (0.08 - 0.06)^2} = 1.4142\%$$

נכס 1 מניב תוחלת גבוהה יותר מנכס 2, אך גם סיכון גבוה יותר. לכן לא ניתן לקבוע מי מבין הנכסים עדיף לפי תוחלת שונות.

בבקשר לשאלת - מהי משמעות השילוב, علينا לחשב את מקדם המתאים. מקדם המתאים הוא היחס בין השונות המשותפת לבין מכפלת סטיות התקן של הנכסים.

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A * \sigma_B}$$

השונות המשותפת בפניהם עצמה היא סיכון המכפלה של כל הסתברות (משותפת) בשני הפרושים : ההפרש בין תשואת הנכס הראשון לתוחלת הנכס השני, וההפרש בין תשואת הנכס השני לתוחלת הנכס השני :

$$COV(1,2) = P_1 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + P_2 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + \dots$$

מקדם המתאים מחושב כך על בסיס התפלגות תשואות הנכסים :

$$\rho_{1,2} = \frac{P_1 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + P_2 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + \dots}{\sigma_1 * \sigma_2}$$

ב换בנה :

$$\rho_{1,2} = \frac{0.25 * [0.16 - 0.12] * [0.04 - 0.06] + 0.5 * [0.12 - 0.12] * [0.06 - 0.06] + 0.25 * [0.08 - 0.12] * [0.08 - 0.06]}{0.028284 * 0.014142} = -1$$

כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסווגים הוא 1-, בהגדרה ניתן לבנות מושילוב כלשהו שלהם נכס חסר סיכון / נכס בעל סטיית התקן אפס.

התשובה הנכונה: ד.

#### שאלה 4

נכס כלשהו צפוי לחת למשכיע הכנסה בגובה 100 ש"ח בעוד שנה. ידוע כי מחיר הנכס בעוד שנה (מייד לאחר קבלת הכנסה) יהיה 600 ש"ח. בהנחה שהמשכיע דורש מהנכס תשואה בגובה 15% לשנה, מהו המחיר המרבי שיהיה מוכן לשלם עבור הנכס היום?

- א. 700 ש"ח.
- ב. 535 ש"ח.
- ג. 609 ש"ח.
- ד. 522 ש"ח.
- ה. 622 ש"ח.

פתרון :

מנקודת ראותי היום, כשהאני מביט על הערך שצפוי לנבוע מהנכס בעתיד, אני מבין שהוא מורכב מ-2 חלקים: בעוד שנה קיבל (אם נשקיע היום) 100 ש"ח, בנוסך נחזיק בנכס שווה (לעתם אותה שנה) 600.

סך הערך העתידי שניבע לי כמשכיע בעוד שנה מהנכש הוא  $700 \text{ ש"ח} = 100 + 600$ . כל מה שצריך לעשות הוא להוון ערך זה שנה אחת לאחריה במחיר ההון הנוכחי - וקיים שווי להיום :

$$PV = 700 \times (1 + 15\%)^{-1} \approx 609$$

**מעתה אדע: אם מבקשים שווי נכס, ונותנים גם תזרימי המזומנים העתידיים, וגם את שוויו לאחר תזרימיים עתידיים אלו, אתייחס לתזרימי המזומנים וגם לשווי העתידי בתור העריכים שצריך להוון (לחשב PV בוגנים) כדי לדעת מה השווי היום / מה המחיר המירבי שמכנים לשלט בעד הנכס היום.**

### בחן את עצמך - יח' 8

אם ידוע כי תוחלת תשואת תיק השוק היא 20% וריבית חסרת סיכון היא 4%, מה יהיה הרכב התקיק שתוחלת תשואתו היא **36%**?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. חסרים נתונים סיכון בשוק.
- ב. חסירה ה- $\beta$  של התקיק.
- ג. 200% בתיק השוק ו-100% הלוואה בשער ריבית חסר סיכון.
- ד. מדובר בתיק המורכב ארכ רוק מהשקרה בתיק השוק.
- ה. לא ניתן להגיע לתיק כזה.

**הגשת תשובה**

<b>7</b>	שאלות
לא סתמיים	
ביקוד השאלה:	5.00
סימון שאלה	3

השאלה כוללת מידע בדבר תיק השוק וריבית חסרת סיכון.  
אוטומטית אני במודל ה - CAPM.

במודל זה, אלא אם יש מגבלות מיוחדות - המשקיע צפוי לבחור בתיקים ייעילים, אלו המקיימים את הנוסחאות המוגנות לעולם ייעיל.

אחת מبن הנוסחאות הקשורות במידה רבה לשיעור (משקל) ההשקעה בתיק השוק ובנכש חסר סיכון בהתאם בתיק ייעיל היא :

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

אם נציב את ערכי השאלה הרלוונטיות :

$$0.36 = W_F * 0.04 + (1 - W_F) * 0.2$$

$$0.36 = W_F * 0.04 + 0.2 - 0.2W_F$$

$$0.36 - 0.2 = -0.16W_F \rightarrow W_F = -1$$

כאשר משקל ההשקעה ב-  $WF$  שלילי, המשמעות היא שהמשקיע נוטל הלוואה. ההלוואה מבוטאת ביחס להוון העצמי של המשקיע; לעומת זאת, המשמעות היא  $WF = -100\%$  כלומר המשקיע נוטל הלוואה בשיעור

100% מהוננו העצמי הראשוני, ומשכיע את כל 200% הכספיים (כספי המקורי פלוס כספי הלוואה) בתיק השוק.

כך שבסך הכל התשובה ג:

הלוואה בשיעור 100%, והשיקעת מלאה הכספיים - 200% בתיק השוק.

## שאלת שני בובו - ריבית נקובה והמטרה

שואלת בובו: אם אני צריכה לעשות התאמה של נניח ריבית נקובה של 24% שנתית לחודשית על מנת לחשב PVFA או FVFA, אז ברגע שעשיתי לה חלק 12 וקיבלתי את ה-2 אני מציבה אותה בנוסחאות הרלוונטיות בלי חשש נכוו?

התיחסות:

ככל - את צודקת. אם הריבית היא נקובה, התהליך הבסיסי שנרצה לבצע הוא להמיר אותה לנקובה לתקופת חישוב אחת, על ידי חלוקה.

הרי באופן כללי, כאשר רצינו להמיר ריבית נקובה לאפקטיבית (ריבית דרייבית):

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

אם למשל מספרים לי על צורך בדיאן בהלוואת שפיצר (הנפרעת בחזרים קבועים), כאשר תזרות החזר היא חודשית והריבית הנקובה היא 24%, לאורה - אני צריכה להמיר אותה לאפקטיבית:

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{n}\right)^m - 1$$

איך אשלים נוסחה זו ומה הקשר לשאלת שלי?

ראשית, אם עסקה נפרעת בתשלומים חודשיים הרי גם אם לא אמרו - המשמעות היא שהריבית מחושבת כל חודש.

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^m - 1$$

אבל מה מעריך החזקה? ובכן, הוайл ואנחנו עובדים עם סדרה שהיא חודשית, למעשה אנחנו רוצים ריבית לחודש אחד. לכן מעריך החזקה 1.

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^1 - 1 = \frac{24\%}{12} = 2\%$$

לכן את צודקת, אבל הגישה המפורטלת הזו לתשובה נועדה לעזור לנו להבין שהחלוקת ב-12 אינה סוג של "נוסחה חדשה". היא למעשה התוצאה של מקרה פרטי שבו הריבית מחושבת כל חודש, ואני זוקים לריבית לחודש אחד בלבד.

## שאלה 6

שת"פ של פרויקט מסווג השקעה, המניב תזרים מזומנים שנתי קבוע, הוא 20%. אורך חיי הפרויקט הוא 8 שנים. מכאן **שמדד הרוחיות של הפרויקט במחיר הון של 15% הוא:** (התשובות מופיעות ברמת דיקן של 2 ספרות אחרי הנקודה)

- א. 1.33
- ב. 1.04
- ג. 1.17
- ד. 0.86
- ה. אי-אפשר לחשב עקב מחסור נתונים.

**פתרון :**

אמנם הערכים אינם נתונים, אבל תזרימי המזומנים של הפרויקט קבועים. חלק מהתהליך של חישוב מדד הרוחיות מערב במרקם ובאים את חישוב ה-  $NPV$ , בהתאם, להלן ניסיון לחשב את הענ"ג בהתאם. בחישוב הענ"ג, תמיד מתבססים על מחיר ההון של החברה בפועל - המטרה היא לחשב את שווי הפרויקט מנקודת ראות החברה הספציפית ובשים לב עלות גiros ההון (מחיר ההון) בחברה הספציפית כאמור. מחיר ההון כאן 15%, וכך נקבל :

$$NPV = -X + CF * PVFA(15\%, 8)$$

ニיצב אני בפני שוקת שבורה, נעלמי רבים מדי.

לעומת השימוש במחיר ההון לחישוב הענ"ג, שלא סיפק אותנו, יש גם נתון בדבר השט"פ. על פי ההגדרה, בשונה מהענ"ג שהוא מחיר ההון של החברה הספציפית, השט"פ הוא אותו מחיר הון (תיאורטי) שMOVIL לאיפוס משווהת הענ"ג.

$$0 = -X + CF * PVFA(20\%, 8) \rightarrow 0 = -X + CF * 3.837 \rightarrow X = 3.837CF$$

נחזיר לנוסחת ה-  $NPV$  ונציב ערך זה של  $X$ :

$$NPV = -X + CF * PVFA(15\%, 8)$$

$$NPV = -X + CF * 4.4873$$

$$but X = 3.837CF$$

therefore:

$$NPV = -3.837CF + CF * 4.4873$$

$$NPV = -3.837CF + 4.4873CF$$

אחת ההגדרות שהעננו במחברת הקורס למדד הרוחיות היא :

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולי}}}{|PV_{\text{תשומתי}}|} = \frac{4.4873\text{€}}{3.837\text{€}} \approx 1.17$$

מתוך "בחן את עצמך" ביחידה 5:

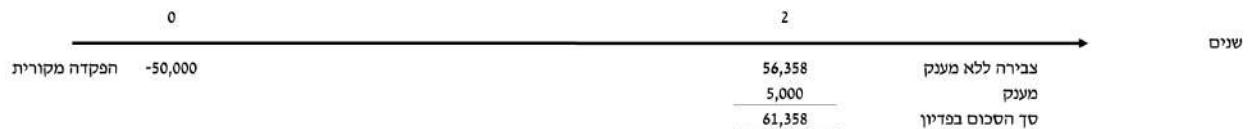
### שאלה 5

בנק "הידיד" מצוי למפקדים 50,000 ש"ח מענק בשיעור 10% מסכום ההפקדה המזוכה מידית בחשבן הפיקדון. בנוסף מציע הבנק ריבית של 0.5% לחודש על סכום ההפקדה המקורי בלבד, דהיינו המענק אינו צובר ריבית. תכנית החיסכון סגורה לשנתיים.

#### מהי הריבית השנתית האפקטיבית שהבנק מעניק?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 16.2%
- ב. 6.2%
- ג. 10.8%
- ד. 22%
- ה. 11.9%



הסברים נוספים :

הפקדה המקורית היא 50,000 כנותן. לכאורה נשאלת השאלה - אם מתකבל מענק מיידי, האין הדבר מקטין את הערך המוחלט של ההפקדה בזמן אפס (בסיימון חיובי)? בכלל, התשובה לכך הייתה "כן" אם היה ניתן שהמענק מתකבל ישירות לעו"ש / בזמן. אבל כאן - אלו לא פני הדברים. המענק מזוכה בחשבן הפיקדון עצמו, ובהתאם, יתקבל רק במועד הפיקדון עצמו - בעוד שנים, וזה בשיעור של 10% מסכום ההפקדה המקורי של 50,000 ולמן הסכום הנ"ל  $5,000 = 50,000 * 10\%$  **הוא אחד מרכיבי התקובל במועד הפיקדון.**

פרט לכך וכנותן, קיבל המשקיע את הסכום המקורי ללא המענק - 50,000, בתוספת צבירת ריבית חודשית נתונה של 0.5%, אשר תצטבר במשך שנים. בהינתן שבמהלכן של שנים אלו ישנים 24 חודשים, סך הצבירה בגין ההפקדה לתום שנים :

$$50,000 * (1 + 0.5\%)^{24} \approx 56,358$$

סך התקובל כולל מענק שזוכה לחשבן הפיקדון, וכ כולל הפיקדון עם צבירת ריבית בגיןו, מוביל לסכום בפדיון שהוא בסך הכל :  $56,358 + 5,000 = 61,358$

ואם כך : המשקיע מפקיד 50,000 ומקבל בעוד שנים 61,358.

הרכיבת האפקטיבית לשנתיים, לכל תקופת העסקה, המגולמת בכך ניתנת לחילוץ לפי היחס בין הערכיהם :

$$r_{ef}(2 \text{ years}) = \frac{61,358}{50,000} - 1 = 22.716\%$$

הוائل ונדרשה ריבית אפקטיבית לשנה אחת, אפשר לתקן את הריבית זו באמצעות חזקה מתאימה (זו לא ריבית נקובה, היא אפקטיבית) :

$$r_{ef}(\text{annual, 1 year}) = [1 + r_{ef}(\text{2 years})]^{\frac{1}{2}} - 1$$

ובהצבה :

$$r_{ef}(\text{annual, 1 year}) = [1 + 22.716\%]^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 10.8\%$$

#### שאלה 11 - בוחן את עצמן - יח' 8

בשוק נסחרות שתי מניות ונכס חסר סיכון. תשואת נכס חסר סיכון 3%. מקדם המתאים בין שתי המניות (א ו-ב) הוא 0.2.

מניה א - בעלת תוחלת תשואה של 10% וסטיית תקן של 4%.

מניה ב - בעלת תוחלת תשואה של 18% וסטיית תקן של 6%.

משקיע בונה תיק המשלב 20% ממניה א, 70% ממניה ב ו-10% השקעה בנכס חסר סיכון. **התיק שנתקבל הינו בעל סטיית תקן של** - (התשובות מופיעות ברמת דיק של ספרה אחת לאחר הנקודה)

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 4.1%
- ב. 4.6%
- ג. 4.4%
- ד. 4.3%
- ה.

לא ניתן לחשב, שכן חסר נתונים לגבי סטיית התקן של הנכס חסר הסיכון והמתאים בינו לבין נכסים א ו-ב.

פתרונות :

כאשר שאלת דורשת ממני להתייחס לשילוב ספציפי של נכסים מסוימים - גם אם משורבב גם נכס חסר סיכון למשחק - אני לא נמצא במודל ה - CAPM אלא במודל שיקול נכסים מסוימים. בדרך כלל, מודל ה - CAPM עוסק בתיקים לא ייעילים, או בתיקים ייעילים המהווים שילוב של תיק השוק ונכס חסר סיכון בלבד. כמובן, בסך הכל, זו שאלה טכנית יחסית - לשלב בין נכסים ולהגיע לסטיית התקן של התקיק המשולב. מה שלכארה מטריד אותי - זו העובדת שמדובר בשילוב 3 נכסים, בעוד שרוב הזמן עסקנו בשילוב 2 נכסים מסוימים בלבד.

סטיית התקן של תיק השקעות המורכב מ-2 נכסים בלבד :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

כשיש שלושה נכסים מסוכנים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

הוائل וכאן נכס אחד מהשלושה הוא חסר סיכון והואיל וסתיתת התקן של נכס חסר סיכון הינו 0 בהגדרה, מתקיים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

או בעצם :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

כלומר בהצבה נקבל :

$$\sigma(P) = \sqrt{0.2^2 * 0.04^2 + 0.7^2 * 0.06^2 + 2 * 0.2 * 0.7 * 0.04 * 0.06 * 0.2} \approx 4.4299\%$$

**בקירוב, התשובה ג.**

#### חידה 8 - בוחן את עצמן - שאלה 13

$$E(r_M) = 10\%, \sigma(r_M) = 10\%, r_f = 6\%$$

בנהננה שהמשקיעים בוחרים להשקיע את כספם בתיק **יעיל** המורכב ממשקיעה בתיק השוק ובנכסים נטול סיכון. **משקיע א** בוחר בתיק **יעיל** עם תוחלת תשואה של 7% ואילו **משקיע ב** בוחר תיק **יעיל** עם סטיית התקן תשואה של 7%.

#### סמןו את הקביעה הנכונה -

יש לבחור תשובה אחת:

- א. משלם א שונא סיכון יותר מאשר ממשקיע ב.
- ב. משלם ב שונא סיכון יותר מאשר ממשקיע א.
- ג. לא ניתן לדעת מנתוני השאלה מי מהמשקיעים יותר שונא סיכון.
- ד. שני המ muschiים שונאי סיכון במידה זהה.
- ה. שני המ muschiים אוהבים סיכון במידה זהה.

פתרונות :

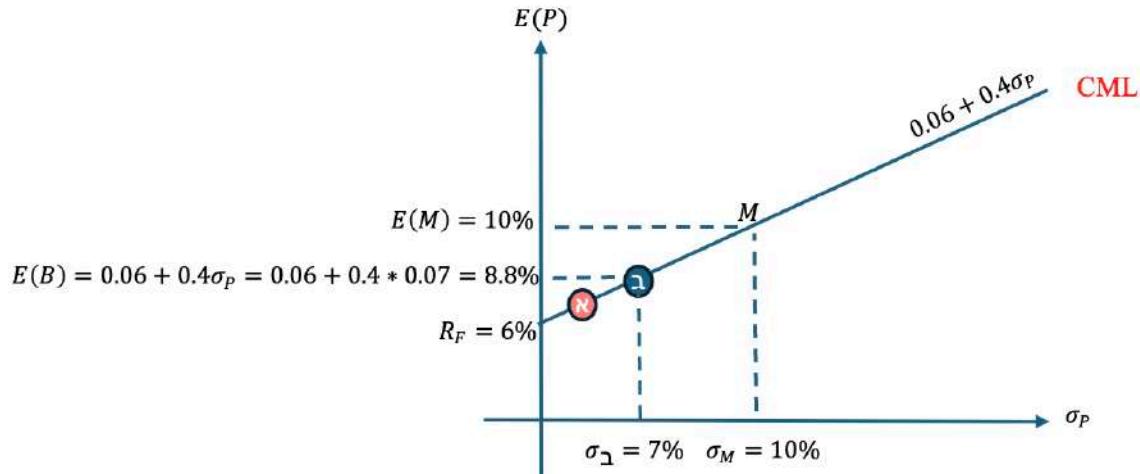
שילוב של תיק השוק ונכס חסר סיכון ליצירת תיק **יעיל** - מודל ה - CAPM. הנוסחה הקלאליסטית ביותר לתיקים **יעילים ב- CAPM** היא קו ה - CML שמציג את הקשר בין סטיית התקן לבין תוחלת התשואה של התקן היעיל.

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

ב换כבות הנתונים הכלליים בשאלה, הנוסחה תהיה :

$$E(P) = 0.06 + \frac{0.1 - 0.06}{0.1} * \sigma_P \rightarrow E(P) = 0.06 + 0.4\sigma_P$$

מעבר כעט לאירור רלוונטי ונסביר את תוצאותיו :



הסביר :

ראשית אירנו את קו ה - CML ורשמו את נוסחאתו.  
 הוכיחו את סטיית התקן של נכס במשוואת ה - CML ומצאו שתוחלת תשואתו 8.8%.  
 בהגדרה, נכס A שתוחלתו נמוכה מכך - 7% בלבד - נמצא משמאל ולמטה ביחס לנכס B, כלומר משקף סיכון נמוך יותר.  
 העובדה משקיע א בחר בתיק בעל סיכון נמוך יותר, למורות ה"מחיר" בדמיות תוחלת תשואה נמוכה יותר - מעידה עליו כזו שהוא "יותר שונא סיכון" מהמשקיע ב.  
 שימו לב: שניהם שונים סיכון, כל המודל מניה שנאת סיכון, אך משקיעים הבוחרים להמצא שמאלה ולמטה יותר, הם בעלי דרגת שנאת סיכון גבוהה יותר בהגדרה.  
 התשובה A.

**שאלת קהל - ריביות והמרתן**

בהמרת ריבית, או חישוב ריבית - כיצד מובצת התאמה של התקופה / הזמן של הריבית האפקטיבית, לפי איזו נוסחה, איך מזחים זאת, וنمנים מבלבול?

משמעות:

הדיון בשאלות הקורס עוסק תמיד בRibbit "אפקטיבית". Ribbit אפקטיבית היא למעשה הריבית ה"כוללת" שמשקפת את כל ההשפעות של עלויות המימון על העסקה (כולל Ribbit דרייבית, עלות, Ribbit מושך וכן הלאה). בדרך כלל, נתקל בחישובי Ribbit והמרתנה ב-3 הקשיים:

**א. מקבלים שאלת שכוללת נתונים של סדרה / סדרות של תזרימי מזומנים, וצריך להתאים את הריבית האפקטיבית כדי "לעבך" ולהשאבת הנדרש באשר לסדרה.**

המחשה:

מהו הערך הנוכחי של סדרת תקבולים הכוללת 100 ש"ח שישולם בתום כל חודש במשך שנה, ו-200 ש"ח בתום כל חודש עוקב במשך שנתיים, אם ידוע שהריבית השנתית היא 12.6825%?

פתרון:

במקרים כלליים, כאשר נתונה הריבית להיוון, כבירות מחדל היא Ribbit "אפקטיבית" ובעצם הפעולה הנדרשת היא למתאים אותה / להמיר אותה מתקופה אחת לאחרת - למשל, כאן: המושך והתזרומים הם כל חודש, והריבית היא שנתית - הנדרשת המרה של הריבית משנה לחודש. את ההמרה מבצעים באמצעות "מערך חזקה" רלוונטי:

$$r_e = (1 + r)^n - 1 = (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1\%$$

למעשה: התבססנו על 1 ועוד Ribbit אפקטיבית שנתית נתונה, ומערך חזקה הוא למעשה היחס בין התקופה הנדרשת (חודש, כי זה פרק הזמן בין תזרימי בסדרות שלגביהם נדרש החישוב) לבין התקופה הנתונה (שנה).

הפתרון עצמו, של השאלה, יהיה:

$$PV = 100 * PVFA(1\%, 24) + 200 * (1 + 1\%)^{-12}$$

כי הסדרה הראשונה החלה בזמן 1, לכן הערך הנוכחי מוביל בזמן 0 (עיקרונו "אחדת אחרת"), הסדרה השנייה מתחילה בזמן 13, לכן הערך הנוכחי מוביל בזמן 12 (עיקרונו "אחדת אחרת") וכך יש לתאם 12 תקופות נוספות לאחר.

טיפ: לקוראים ולקוראות המطلבים לגבי אופן היישום של התאמות הזמן בחישובי ערך הנוכחי ועתידי, מומלץ לעיין בדוגמאות המלויות בגרפים ותיאור מוד מפורט, כאן - [ערך עתידי עם התאמות](#), וכן - [ערך נוכחי עם התאמות](#).

ב. מקבלים נתוניים מפורטים למדи על סדרה, עם או ללא עמלות, ורכיבי תזרימי מזומנים נוספים, וצריך לגנות את הריבית האפקטיבית הגלומה בהסדר.

המקרה: ינו שוקל לרכוש מחשב Macbook Air M3 חדש. עלות המחשב במזמן 5,000 ש"ח. היבואן מציע לשלם על המחשב בפריסת ל-36 תשלומים שווים "ללא ריבית". פרט לתשלום התקופתי הקבוע, נדרש לשלם ליבואן בכל חודש עמלת סliquה בסכום של 30 ש"ח. התשלומים יבוצעו בתום כל חודש.  
נדרש: מהי הריבית האפקטיבית השנתית הגלומה בהסדר?

$$\text{התשלום הקבוע ללא ריבית (לא כולל עמלת סliquה):} \\ \frac{5,000}{36} \approx 138.89 \\ \text{עמלת סliquה:} \\ \frac{30}{168.89} \text{ ש"ח.} \\ \text{סך הכל תשלום חודשי:}$$

כדי לגנות את הריבית בסדרת תשלומים, נשתמש במשפט: **"מחיר המוצר במזמן הוא הערך הנוכחי של התשלומים הנוכחיים (PV) לפי הריבית המגולמת בעסקה".**

$$5,000 = 168.89 * PVFA(r, 36)$$

$$PVFA(r, 36) = \frac{5,000}{168.89}$$

$$PVFA(r, 36) = 29.605$$

נigraph ללוח א-4 בנספח א לערך  $r$ , ונחפש בהינתן 36 תשלומים  $t=36$  את שיעור הריבית  $r$  שמוביל לערך קרוב ככל הניתן ל-29.605. מקבלים 1%.

$$r = 1\%$$

הריבית שהיצנו מותוק נתוני סדרה שאיבריה חודשיים, היא תמיד ריבית אפקטיבית חודשית. הויאל ודרשו ריבית אפקטיבית שנתית, עליינו בהתאם אותה. עם מעיריך חזקה מותאים!

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{\text{monthly}})^{12} - 1 = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12.6825\%$$

וזו תשובהנתנו הסופית: הריבית השנתית היא 12.6825%.

ג. מקרה שבו יש להמיר **ריבית נקובה / ריבית דרייבית / ריבית מראש למונחי ריבית אפקטיבית**.  
 במקרה כזה, בדרך כלל נזהה שאלות שכלי הדיוון שלו הוא בשיעורי ריבית בלבד. לא רק זאת, שאלות אלו נזהה במקרים רבים את המונחים "הריבית מחושבת כל \_\_\_\_\_" או "הריבית מושלמת מראש", ולא נזהה סדרות או סכומים כספיים.  
 זהו המקרה ה"מורכב יותר" שדורש יישום נוסחאות מגוונות לחישוב הריבית האפקטיבית כאמור. נציג מספר אפשרויות.

**המחשה 1 : ריבית דרייבית**  
 מהי הריבית האפקטיבית השנתית אם ידוע שהריבית הנקובה השנתית היא 8% והיא מחושבת כל 4 חודשים?

כאשר נתונה ריבית נקובה המוחושבת כל ייחידת זמן (חודש / רבעון / שבועיים / חצי שנה...), הדבר הבסיסי להמיר את הריבית מנקובה לאפקטיבית היא על בסיס הנוסחה המתאימה לעקרון ה"ריבית דרייבית":

צעד ראשון : לוקח את הריבית הנתונה, ומחלק אותה למספר תקופות החישוב שלה (כדי להגיע לריבית לתקופה חישוב בודדת) :

$$r = \frac{R}{n}$$

במקרה שלנו, נתונה ריבית נקובה שנתית (R) נתון היא מחושבת כל 4 חודשים (3 פעמיים בשנה). לכן כדי ליציר ריבית לתקופה חישוב אחת, נחלק את הריבית הנתונה ב-3:

$$r = \frac{8\%}{3} = 2.66667\%$$

זו הריבית לתקופה חישוב אחת - ל-4 חודשים. בשלב הבא, נרצה להמיר אותה מ-4 חודשים חוזרת לשנה לפי נוסחת הריבית האפקטיבית:

$$r_{annual} = (1 + r_{4\ Months})^3 - 1 = (1 + 2.66667\%)^3 - 1 \approx 8.22\%$$

אפשר גם לאחד את שני צעדי העבודה לביטוי אחד ויחיד :

$$r = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{8\%}{3}\right)^3 - 1 = 8.22\%$$

### המחשה 2 : ריבית דרייבית וריבית מראש

בנק "הנקניקים" מציע لكم הלוואה בסך 100,000 ש"ח לשנה. הלוואה נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל רביעון ומשולמת בתום התקופה, וכן דורש עמלת ערך מסוים בשיעור שנתי של 8% בחישוב חצי שנתי המשולמת בתחילת התקופה. מהי הריבית האפקטיבית השנתית בהסדר?

גם כאן, למרות אזכור הסכום הכספי של הלוואה, מדובר בשאלת ריבית טהורה, הערכיים אחווזיים, אין נתונים בדבר סדרות תשלוםים ונדרשת ריבית באחויזים כן (לא ערך כספי). אני מזהה בשאלת הזו  
שני מוקדי כוח :

ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל רביעון ומשולמת בתום התקופה (בתום השנה). חילק זהה פשוט יחסית :

$$r = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{12\%}{4}\right)^4}{\left(1 - \frac{8\%}{2}\right)^2} - 1 \approx 22.13\%$$

### המחשה 3 : ריבית דרייבית וריבית מראש - דוגמא נוספת

בנק "קובעים" של קש"י מציע لكم הלוואה בסך 500,000 ש"ח לשנתיים. הלוואה נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 10% המוחשבת כל חודש ומשולמת בתום התקופה. כמו כן, נושא ההלוואה עמלת הקמת הלוואה בשיעור שנתי של 5% בחישוב רביעוני המשולמת בתום התקופה. במועד פירעון הלוואה, יש לשלם בנוסף דמי סילוק בשיעור 8% מקרן הלוואה הראשונית (לא עמלות ערך מסוימים או ריבית צבורה). מהי הריבית האפקטיבית השנתית?

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{24} + 8\%}{\left(1 - \frac{5\%}{4}\right)^8} - 1 \approx 43.81\%$$

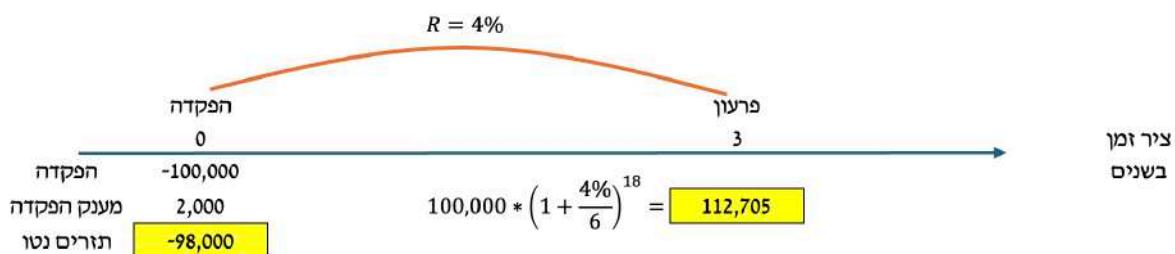
כעת, המרה מריבית אפקטיבית לשנתיים לריבית אפקטיבית לשנה אחת היא פשוטה במינוח :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 43.81\%)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 19.92\%$$

מסקנה : הריבית האפקטיבית לשנה היא כ-19.92%

המחשה 4 : ריבית דרייבית וריבית מראש שמוגדרת באופן כספי הפקדתו בפיקדון סכום של 100,000 ש"ח. בהתאם לתנאי הפקדתו, הוא צובר ריבית שנתית נקובה בשיעור 4% המוחשבת כל חודשים. קרן הריבית והפקדתו תפרעו בתום התקופה - בחלוף 3 שנים. מיד במועד ההפקדה לפיקדון מזוכה בחשבון העו"ש של המפקיד "מענק הפקדה" בסכום של 2,000 ש"ח. מהי הריבית השנתית האפקטיבית המגולמת בעסקת ההפקדה?

השאלה זוו שונה מקודמתה, משום שנתוני הריבית (ומענק הפקדה הוא חלק מכך) הם בחלוקת באחזois ובחלוקם בערכאים כספיים. כאשר אני מקבל בשאלה זוו, אני מעדיף להתייחס לערכאים הכספיים באופן מלא, ולהשאבת הריבית האפקטיבית דוקא לפי היחס ביניהם.



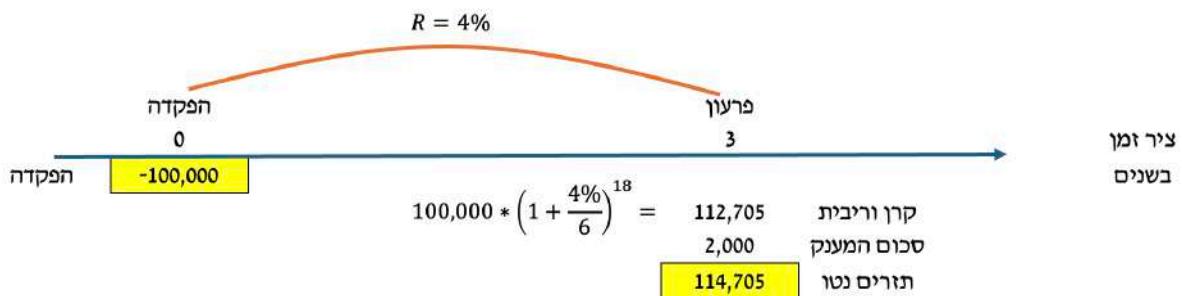
כדי לחשב את הריבית האפקטיבית במצב זה, נתבוס על היחס בין סך התקבול בתום התקופה לבין ההשקעה נטו בתחילת התקופה (ערך המוחלט) :

$$r_e(3 \text{ years}) = \frac{112,705}{98,000} - 1 = 15\%$$

אם ארצה להתאים את הריבית למונחים של שנה אחת :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 15\%)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 4.77\%$$

המחשה 5 : ריבית דרייבית וריבית מרأس, הגדרה כספית - וציבורה לפקדון  
 חזרו על חישוביכם בהמחשה 4 אם ידוע שהבנק קבוע כי מענק ההפקדה **מצטרף לפקדון**, וכי הריבית  
 בפקדון מוחושבת על סכום ההפקדה הראשוני (לא סכום המענק).



ריבית אפקטיבית לתקופת העסקה כולה, 3 שנים :

$$r_e(3 \text{ years}) = \frac{114,705}{100,000} - 1 = 14.705\%$$

אם ארצה להתאים את הריבית למונחים של שנה אחת :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 14.705\%)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 4.68\%$$

שאלה נוספת - מרכיבים - ייח' 5 - בוחן את עצמן - שאלה 7

לחברה מוצעות שתי אלטרנטיבות ללקיחת הלוואה על סך 100,000 ש"ח, למשך שנה:

1. ריבית של 3.5% לחודש, מחושבת כל חצי שנה.

2. ריבית של 21.6% לשנה וניכוי מראש של %X בתחילת השנה.

באיזה שער ניכוי מראש (%X), תהיה החברה אדישה בין שתי האלטרנטיבות?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 19.5%
- ב. 14.4%
- ג. 16.9%
- ד. 24.8%
- ה. 20.4%

**הגשת תשובה**

פתרונות :

כאשר נתונים לירכים של ריבית או ניכוי מראש באחזois, ומקשים שנבחר בחלוקת העדיפה, הדיוון של מtbody על חישוב הריבית האפקטיבית בכל חלופה - בהלוואות נבחר בריבית האפקטיבית הנמוכה ביותר, ובהשקעות - בריבית האפקטיבית הגבוהה ביותר.

יש כאן שני מקרים :

מקרה 1 - כולל ריבית לחודש, מחושבת כל חצי שנה. נדרש להגיע לריבית אפקטיבית לשנה, שהיא תקופת ההלוואה.

כאשר הריבית "מחושבת כל", את המרת הריבית לאפקטיבית נבע בשני שלבים : בשלב ראשון, ניקח את הריבית הנתונה (נקובה) ונכפול או נחלק אותה כדי להגיע לתקופת חישוב. במלים אחרות, אם הריבית הנתונה היא 3.5% לחודש, אבל הואיל ומוחשבת כל חצי שנה, נכפול אותה ב-6. התוצאה : 21%. בשלב השני, מtbody על הריבית לתקופת חישוב ועל העלאה בחזקה רלוונטי, כדי להמיר את התוצאה מתקופת חישוב לתקופה הכוללת הנדרשת.

$$r_e = (1 + R * n)^m - 1$$

בתוך הסוגרים : המרת הריבית הנתונה (חודשית) לתקופת חישוב אחת (חצי שנה) זו את ע"י מכפלה ב- 6.

במעריך החזקה : המרת הריבית לתקופת חישוב (חצי שנה) לשנה (הנדרשת) זו את על ידי חזקה 2.

$$r_e = (1 + 3.5\% * 6)^2 - 1$$

$$r_e(option1) = (1 + 21\%)^2 - 1 = 46.41\%$$

מקרה 2 - כולל ריבית "בסוף התקופה" שמשלמים בשיעור 21.6% וכן ניכוי מראש בשיעור לא ידוע (x). במצב שבו יש שילוב של ריבית "בסוף" וריבית " מראש", ניצרך שבר שבמונה שלו כולל את תוספת הריבית בתום התקופה, ובמקרה - את ניכוי הריבית מראש בתחלת התקופה. הנוסחה תהיה:

$$r_e = \frac{1 + r}{1 - d} - 1$$

$$r_e(option2) = \frac{1 + 21.6\%}{1 - d} - 1$$

אדישות בין ריבית זו לריבית שחלצנו במקרה 1 תתקיים כאשר יהיה שווין בין הריביות, כלומר:

$$r_e(option1) = r_e(option2)$$

$$46.41\% = \frac{1 + 21.6\%}{1 - d} - 1$$

מפה רק נותר לפטור משווה בנים אחד:

$$d = 16.94\% \approx \textcolor{yellow}{16.9\%}$$

המסר העיקרי של השאלה זו הוא: למורות שברוב המקרים כשנתונה "ריבית המחשבת מס' פעמים" שלב הפעולה הראשון הוא חלק (למשל, ריבית שנתית נקובת המחשבת כל חצי שנה – חלק ב-2, ריבית חצי שנתית נקובת המחשבת כל חדש – חלק ב-6 וכן הלאה), הרי שכאשר הריבית הנקובת הנתונה היא "קצרה" יותר בתקופתה מאשר תקופת חישוב – נבצע מכפלה ולא כפל שלה (כלומר: ריבית חודשית המחשבת כל חצי שנה – כפול ב-6. ריבית לחודשיים המחשבת כל 8 חודשים – כפול ב-4).

### שאלה 8 - בוחן את עצמך - ייח' 5

ה השקעה בפרויקט מסויים עולה כיום 100,000 ש"ח ואינה מביאה תקבולות כלשהם במשך מספר שנים. לאחר מספר שנים זה, מתחילת הפרויקט להניב תקבולות של 25,000 ש"ח לשנה, לפחות.

כמה שנים לכל היותר תהיה מוכן לחכotta עד להתחלתו של זרם התקבולות הקבוע, אם שער הריבית השנתי הינו **13%**?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 5
- ב. 9
- ג. 23
- ד. 6
- ה. 18

[הגשת תשובה](#)

פתרונות :

**בשואלים על פרויקט, לגבי "מה אתה מוכן לעשות / לחכotta / לשלם..." בעצם שואלים על המצב שבו  $NPV = 0$  שזו הנקודה המוגדרת בטור "מינימום הכספיות".**

הערך הנוכחי של ההשקעה היום - הוא בסימן שלילי, בגובה עלות ההשקעה.  
הערך הנוכחי של התקבולות, בהיותם סדרה אינסופית, נשען על נוסחת החישוב של ערך נוכחי של סדרה אינסופית בסימן חיובי :

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

במקרה שלנו אם נחבר את העריכים, אלא שיש לזכור שערך נוכחי של סדרה מוביל אותו אחד לפני תחילתה. אז אם נסמן את עיתוי התזרים כ- $t$ , הרי כדי לבטא את התזרים בזמן 0 ובהתאם את ה-  $NPV$  :

$$NPV = -100,000 + \frac{25,000}{13\%} * (1 + 13\%)^{-(n-1)} = 0$$

או :

$$NPV = -100,000 + \frac{\frac{25,000}{13\%}}{(1 + 13\%)^{n-1}} = 0 \rightarrow n = 6.34 \approx 6$$

מפה ואילך - או שפטורים את המשוואה באמצעות שימוש ב- $t=0$ , או שמציבים ב- $t=0$  את כל אפשרויות המענה בשאלת, ובוחנים متى המשוואה מתקינה.

מדוע  $t=0$ ? התזרים העתידי מתחילה בזמן כלשהו, זמן  $t$ . חישוב ערך נוכחי של סדרת תזרים מהראשון שבהם בזמן  $t$  מוביל בהגדה "אחד אחריה" כולם בזמן  $t=0$ . זה אומר שהתאמה נוספת מזמן  $t=0$  בזמן 0 דורשת התאמה של  $t=1$ -ת תקופות נוספות לאחר.

### שאלה 13 - בוחן את עצמו - ייחידה 5

הפקדתם  $x$  ש"ח בתוכנית חסכו. להפתעתכם, כעבור 5 שנים גיליתם כי סכום הכספי גדל ב-40%. **כמה שנים נספנות עלייכם להמתין עד אשר סכום ההפקדה הראשונית יוכפל?**

יש לבחור תשובה אחת:

- א. כ-4.5 שנים
- ב. כ-5.5 שנים
- ג. כ-1.5 שנים
- ד. כ-10.5 שנים
- ה. לא ניתן לחשב שכן גם הסכום וגם הריבית אינם ידועים

הגשת תשובה

לפי נתוני השאלה:

$$x * (1 + r)^5 = 1.4x$$

ניצמצם את שני האגפים ב-  $x$ :

$$(1 + r)^5 = 1.4$$

נמשיך כדי לפטור את הריבית. לשם כך, נוציא שורש 5 (או בחזקת  $1/5$ ) משני האגפים:

$$1 + r = 1.4^{\frac{1}{5}}$$

בשימוש פיתוח:

$$r = 1.4^{\frac{1}{5}} - 1 = 6.961\%$$

עכשו נציב את הריבית זו ונראה כמה תקופות צבירת ריבית יובילו להפיכת  $x$  ל-  $2x$ .

$$1.4 * (1 + 6.961\%)^n = 2x$$

ערבי  $n$  -  $x$  מעתמנים:

$$1.4 * 1.06961^n = 2$$

וההתשובה:

$$n = 5.3 \approx 5.5$$

12. חוסך מעוניין להבטיח לעצמו ולילדיו תקבול חצי שנתי אינסופי קבוע (בכל סוף מחצית שנה) החל מועד 10 שנים (תקבול ראשון בסוף שנה 10), בגובה 8% מהכנסתו השנתית שועומדת על 60,000 ש"ח. ידוע כי תכניות החסוך בبنק נותנות ריבית אפקטיבית שנתית של 8.16% במהלך 5 השנים הקרובות ולאחר מכן הריבית צפואה לעלות ולעומוד באופן קבוע על שיעור של 10.25% אפקטיבי לשנה. מהו הסכום אותו נדרש החוסך להפקיד היום על מנת שיוכל לבצע את תכניותיו?

- א. 37,991 ש"ח
- ב. 39,815 ש"ח
- ג. 41,806 ש"ח
- ד. 19,422 ש"ח

ה. לאחר והריבית משתנה לאורך התקופה ומאיך מדובר בסדורה אינסופית, הרוי שלא ניתן לפתור את השאלה.

הפתרון :

$$PV = \frac{\frac{4,800}{5\%}}{(1 + 10.25\%)^{4.5} * (1 + 8.16\%)^5} = 41,806$$