

# תורת המימון - ניהול פיננסי של גופים עסקיים

## מחברת הקורס

## סמינר 2025

מנחה: **פרופ' ד"ר שי צבן**

### Table of Contents

מפגש 1 - היברות, מטרת המימון, ערך עתידי .....	2
מפגש 2 - ערך נוכחי.....	41
מפגש 3 - המשך "ישומי ערך נוכחי" - 26.3.2025 .....	79
מפגש 4 – השלמות אופ"ל 01 וכדאיות פרויקטים – 2/4/2025 .....	133
שיעור 7 - כדאיות פרויקטים - השלמת סוגיות .....	202
מפגש 5 – כדאיות פרויקטים המשך – 9/12/2024 .....	219
מפגש 6 – קיצוב הון ויישומים י"ח' 7 – 16/12/2024 .....	224
מפגש 7 – קיצוב הון ויישומים נוספים י"ח' 7 – 23/12/2024 .....	252
שיעור 8 – השלמות בנושא קיצוב הון (י"ח' 7) והתחלת מימון בתנאי סיכון – (י"ח' 8) ...	<i>Error! Bookmark not defined.</i>
מפגש 9 – י"ח' 8 חלק שני – ניהול תיקי השקעות – 6/1/2025 .....	288
מפגש 10 – י"ח' 8 חלק שלישי – ניהול תיקי השקעות מתקדם - CAPM - 13/1/2025 .....	315
מפגש 11 – י"ח' 8 חלק רביעי – ניהול תיקי השקעות מתקדם - CAPM - 20/1/2025 .....	<i>Error! Bookmark not defined.</i>
מפגש 12 – י"ח' 9-11 עולם חדש של נושאים – מקורות מימון 27/1/2025 .....	391
מפגש 13 – י"ח' 10-11 תרגול 2025 – 3/2/2025 .....	414
מפגש 14 – חזרה לבחינה 10.2.2025 .....	438

## מפגש 1 - היכרות, מטרת המימון, ערך עתידי

### מטרות המפגש

- א. היכרות
- ב. מנהלות בתקופה לחימה
- ג. התחלה החומר - יחידה 5, ערך הזמן של הכספי - חישובי ערך עתידי

### אופן הלמידה

החומרים במפגש יצומצמו ויסונכרנו עם המינימום החינוי ללמידה הסטנדרט. לצד זאת, מעת לעת, יקושו חומריו למידה לתרגול נוסף עם פתרונות מלאים.

כל חומריו המפגשים לא יצא מן הכלל, כולל כל הגדירות, הנושאות, הפתרונות - יקושו למסמך מתעדכו זה שייהיה נגיש דרך פורום הלמידה שלנו וכן בתחום החקלאות. אין צורך אמייתי לסכם בעצמכם; אם כי נשתדל לפעול בקצב שיאפשר זאת, למי שmorgal או מורגלת בכך.

אטר הקורס מפורט, מסודר, וככל שרטוטנים לגבי נושאים עיקריים, תרגילים בסיסיים ופתרונות נוספים. בקורס עצמו, עוסק בעיקר ביישומים מתקדמים יותר, מתוך המטרה היא שהמפגש נועד לתת כלים "מיידיים" להתמודדות עם שאלות ברמת המטלה וברמת הבדיקה.

כמובן, נשתדל לא למהר ולהציג הכל באופן סדר ושיתתי; אבל מוטב שייהיה לנו מרכיב במפגשים וסביר במטלות, מאשר מפגשים חביבים בסטיל "פרואה" והתמודדות קשה מכך עם המטלות והביקורת.

### הביקורת

מידע רלוונטי לקריאת הבדיקה יתפרסם כשתתקרב. בכלל, הבדיקה כוללת 20 שאלות, רב-ברירה, כולל דרישת להציג הדרכן מצד אחד, אך התחשבות חלקית בה לצרכי ניקוד מצד שני. **הבדיקה היא עט חומר פתוח.**

### פרטי ההתקשרות עמי

שי צבאו, 050-6551519 [shay.tsaban@gmail.com](mailto:shay.tsaban@gmail.com) [שאלות מקצועיות לגבי אתגרים במטלות - נא להציג דרך הפורומים / קבוצות הדיון הייעודיות למטלות; שאלות לגבי תוכן מפגש הנוכחי - להציג לקבוצתנו]

### התychשות לשאלות הקהיל (הבמה שלכם)

שאלה: עד כמה רוחה השימוש בנושאות וביישומים מתמטיים בקורס זה?

תשובה: רמת המתמטיקה - ברוב התרגילים - כפל, חילוק, והמונח חזקות. ב-90 עד 95% מהקורס אלו היישומים.

**אוקיי, אז מה בקורס? מה זה מימון? ואיך ההבנה לגבי בניית בקורס?**

ענף המימון הוא תחום במנהל עסקים שדן בעיקר בשני נושאים: **ההשקעות** (השקעות בפרויקטים, בנכסים וכיו"ב), וכן **במקורות גiros מימון** (הלוואות, אגרות חוב, מנויות). הכל מנוקודת ראות חברות (גופים עסקיים), ותוך שימוש בקריטריונים שיאפשרו אופטימיזציה להשקעות ולגייס המימון מתוך מטרת העל של המימון:

**השאלה ערך לבאים.**

לפי תורת המימון: המטרה של הפirma (החברה) היא להוביל לכך שהשווי שלה לבעליים (בעלי המניות) יהיה גבוה ככל הניתן.

בשפה פשוטה: אם גיא, מאיה וצליל מקימים חברה (גמ"צ בע"מ) לפי תורת המימון, המטרה של גמ"צ היא להפוך את גיא, מאיה וצליל ל"עשירים".

**השאלה העוקבת:** מה בדיק צרך לעשות ואיך כדי להגדיל את הסיכוי להשתת ערך החברה?

נרצה לדעת (א) מהם תזרימי המזומנים ("הכסף שהחברה עושה") נטו.

(ב) עיתוי תזרימי המזומנים (מתי החברה תקבל את התזרימיים) - ייח' 5, 6.

(ג) רמת הסיכון - ייח' 8.

הקורס עוסק בכליים מתמטיים וקריטריונים לקבע החלטות שידונו בהיבטים הללו. המחזית הראשונה של הקורס עוסקת בהשפעות עיתוי תזרימי המזומנים - בעיקר באופן שבו ריבית משפיעה על ערך כספי בחלוף זמן. והחזית השנייה של הקורס עוסקת במשמעות הסיכון. עד הودעה חדשה, **נתעלם מקיומו של סיכון**.

בהשפעות עיתוי התזרימיים על הערך, נתחיל מסוג החישוב הבסיסי ביותר: **ערך עתידי - Future Value** או FV. לעיתים תראו בחומר הקורס סימונים כגון  $V_t$  (השווי עתידי מסוים  $t$ ). ערך עתידי הוא חישוב שמטרתו לשקף את ההשפעה המתמטית של צבירת ריבית בגין השקעות והלוואות. כאשר משקיעים - הריבית הנצברת מובילה לכך שנקל יותר ממה שהשקענו (בעתיד). כאשר לוים - הריבית הנצברת מובילה לכך שנזיר יותר ממה שקיבלנו.

## יחידה 5 – חישובים פיננסיים: ערך נוכחי, ערך עתידי, ריביות ויישומים

הקורס עוסק בניהול פיננסי (ניהול כספים בחברות ובכלל).

- החלק הראשון שלו מסומן דואקא כ"יחידה 1" והיחידה היא כזו שכוללת מושגי יסוד (ולא חישובים) לגבי מהי חברה (פירמה), מה המטרות שלה, ומה המשמעות הכלכלית של ניהול כספי.
- הויאל ומשקל היחידה נמוך יחסית (אג 5 נקי, בבחן, לפעמים 0) והוא איננה חיונית ממש להבנת העקרונות הכלומטיים של ניהול פיננסי – שהם אלו שנחוו אותנו לאורך כל הקורס, אנו מתחילה מיח' 5 (יח' 2, 3, 4 כלל אין בחומר).
- היחידה עוסקת באופן כללי בחישובים פיננסיים, בעיקר ככלו המגלמים השפעות ריבית.

**מינימבוֹא:**

בעולם המימון והניהול הפיננסי אנו עוסקים בשני רבדים של ידע :

- חישובים פיננסיים – חישובי ערכיים כספיים, חישובי ריביות. חישובים אלו כוללים את ההשפעה של ריבית על ערכיים כספיים והשפעות הזמן הקשורות לכך. **זה המיקוד של ייחידה 5.**
- קבלת החלטות – במה להשקיע, איך חלופה לבחור מבין חלופות אפשרות של השקעות, הלוואות וכיווץ בזוזה.

### הסוג הראשון של החישובים הפיננסיים שכל מנהל פיננסי / אדם צריך לדעת **ערך עתידי – FV** – (Future Value)

הчисוב הפיננסי הפשטוט ביותר – כי הוא מובן אינטואיטיבית. ערך עתידי (FV) בגדול אומר: מהו הסכום הכולל שייצטר בעתיד, כולל ריבית, בגין השקעות / הלוואות.

בעצם: כשהאנו מפקידים היום כסף, אנו צופים לקבל בעתיד את הסכום המופקד בתוספת ריבית.

כשאנו לוים היום כסף, אנו צופים להידרש תשלום בעתיד את הסכום שלוינו בתוספת ריבית.

המשמעות החישובי הזה – איך ריבית מctractata לערכיים כספיים בהשקעות או הלוואות – הוא בעצם ערך עתידי;

אחד מסוגי החישובים הפיננסיים הבסיסיים ביותר שאיתם נתחיל את הקורס.

### סוגי החישובים – מקרים / קטגוריות של חישוב ערך עתידי:

תיאור קצר	משמעות ונוסחה
ערך עתידי של סכום יחיד (בריבית קבועה / משתנה)	אם מפקידים סכום היום או לווים סכום היום (הפקדה חד פעמית, או הלוואה אחת) ומקבלים (או מחזירים) את הערך בנקודה זמן עתידית אחת, מדובר בערך עתידי של סכום יחיד.  $FV = PV * (1 + r)^t$ $FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$
ערך עתידי של סדרת תשלום	אם אני מפקיד סדרה קבועה של הפקדות (למשל: הפקודת חודשיות קבועות לפנסיה), אזי בהנחות מסוימות ניתן לחשב את הערך העתידי הכלול של כל הפקדות כך:  $FV = PMT * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$ $FV = PMT * FVFA(r, t)$
שאלות על חילוצים	כדי לפטור בעיה כלכלית, נצטרך לדעת איזו נוסחה ערך עתידי אם בכלל מתאימה לנו, ואיך לישם אותה כדי לבנות משווהה שתענה על בעיה כלכלית.  למשל: כמה גראפי צריכה להפקיד כל חודש לפנסיה, כדי שתוכל לקבלות בוגאיי בגיל פרישה?  מה צריכה להיות הריבית בחסכון שתאפשר לנו לצבור 1,000,000 ש"ח בסיום התוכנית?

## נושא 1: ערך עתידי (FV) של תזרימי מזומנים ויישומים - תרגול

**שאלה 0 – ערך עתידי של סכום בוודז, בריבית קבועה, ללא התאמת ריבית**  
גרלופי רוצה לקנות למր גROLוף ספינה חדשה. לשם כך הפקידה היום סכום של 400,000 ש"ח בתוכנית חסכו  
המושאת ריבית שנתית בשיעור 8%.

## פתרונות:

$$FV = PV * (1 + r)^t \rightarrow FV = 400,000 * (1 + 8\%)^7 \approx 685,530$$

רצינו לחשב ערך עתידי של סכום ייחד בריבית קבועה.

**שאלה 1 - ערך עתידי של סכום בוודך, בריבית קבועה, ללא התאמת ריבית**  
גיא הפקיד 500,000 ש"ח לתוכנית חסכון הנושאת ריבית שנתית בשיעור 4%. בתום 5 שנים יפרע החסכו. מהו הסכום שיקבל גיא?

## פתרונות:

בutor התחליה, נרצה לזיהות את סוג השאלה והכלי הרלוונטי לפתרונה. לשם כך נמפה את השאלה :

נתון : כמה גיא מפקיד היום - מוצג בתור PV (Present Value) - סכום שמופקד בהווה, ערך הנוכחי  
 מה רוצים? לדעת כמה יהיה לגיא בעתיד - מוצג בתור FV (Future Value) - ערך נוצר כולל ריבית).

במלים אחרות: החישוב הוא של ערך עתידי - FV.  
 עבר מה : הערך מחושב بعد סכום בודד "חיד פומי" שמופקד היום  
 כלומר: אין כאן "סדרת" הפקודות (כמו תכנית חסכון בתשלומים)  
 סביבת ריבית: האם הריבית קבועה / משתנה? הריבית קבועה.

כאשר מטרתנו לחשב ערך עתידי FV של סכום ייחד בריבית קבועה, אנו מניחים שמתיקים עיקרונו של "ריבית דרבנית" - שמשמעותו היא - אנחנו צוברים על הסכום המקורי ריבית בתקופה הראשונה, ובשנתיים הבאות - הריבית נצברת מחדש על כל הסכום כולל הריבית ההיסטורית.

הביתוי הארוך והמייגע שמייצג את צבירת הריבית בשיטת ריבית דרייבית יהיה (שים לב שמספר ההכפלות הוא כמספר תקופות הריבית) :

ובעיצם אנו נזהים לכתוב זאת בקיצור נמרץ באופן הבא:

$$FV = 500,000 * (1 + 4\%)^5 = 500,000 * (1 + 0.04)^5 = 608,326.45$$

### נוסחת ערך עתידי לסכום יחיד בריבית קבועה

از בואו נכליל: כאשר רוצים לחשב ערך עתידי (מה יהיה לנו בעתיד) כתוצאה מהפקדה בודדת כאשר הריבית קבועה, הנוסחה היא<sup>1</sup>:

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

כאשר :

הערך  $FV$  מייצג את הסכום העתידי הנצבר (ערך עתידי, Future Value).  
הערך  $PV$  מייצג את סכום ההפקדה, שמבצעו בהווה (Present Value, הערך הנוכחי).  
הערך  $r$  מייצג את שיעור הריבית.  
הערך  $t$  מייצג את מספר התקופות.

#### **שאלה 1.1 – ערך עתידי של סכום יחיד (בודד), בריבית משתנה, ללא התאמת ריבית**

שמעון החליט להפקיד היום סכום של 150,000 ש"ח לתוכנית חסכוו לתקופה של 6 שנים. הריבית בחסכוו היא בשיעור שנתי של 8% בכל אחת מהשנתיים הראשונות, ו-7% בכל שנה לאחר מכן (במשך 4 השנים הנותרות). מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של שמעון בתום השנה ה-6?

פתרון :

$$FV = 150,000 * (1 + 8\%)^2 * (1 + 7\%)^4 \rightarrow FV = 229,337$$

מסקנה: הסכום הכולל שייצטבר לשמעון בתום השנה ה-6 הוא 229,337 ש"ח. בעצם, ביצענו יישום של הנוסחה הבאה :

$$FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

---

<sup>1</sup> ביחידות הלימוד וברצפים, לעיתים הנוסחה מופיעה באופן מעט שונה:  $V_t = V_0 * (1 + r)^t$

**שאלה 2 - ערך עתידי של סכום בודד, בריבית משתנה, ללא התאמת ריבית**  
 מאיה הכבאית לוותה (נטלה הלוואה) בסך 200,000 ש"ח הנושאת ריבית שנתית בשיעור 7% לשנה בכל אחת מ- 3 השנים הקרובות, ובשיעור 8% לשנה בכל שנה לאחר מכן. ההלוואה תפרע יחד עם הריבית הצבורה בחולף 10 שנים. מהו הסכום הכלול מאיה הכבאית לשלם (קרן+ריבית) בתום 10 השנים?

**פתרון :**

נתון : כמה מאיה לוותה היום (PV), סכום יחיד, וריבית משתנה.  
 מה רוצים לדעת את הסכום העתידי שהיא תחזיר - FV.  
 שימו לב, בהתאם לניסוח השאלה, הריבית הראשונה תקפה 3 שנים. הריבית בהמשך תקפה בכל שנה לאחר מכן, עד לסיום העסקה (שהיא בתום 10 שנים). לכן, הריבית הבאה בתור תקפה 7 שנים (בשנים 4 - 10 כולל).

$$FV = 200,000 * (1 + 7\%)^3 * (1 + 8\%)^7 = 419,901.68$$

**נוסחת חישוב ערך עתידי לסכום יחיד כאשר הריבית משתנה**

$$FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

**כאשר :**

הערך FV הוא הערך העתידי המחשב (הסכום העתידי הכלול, קרן + ריבית).  
 הערך PV הוא סכום ההפקדה או הלוואה "היום".  
 הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה.  
 הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבהן כל ריבית תקפה.

## מינוי רקע – ערך עתידי של סדרה

שאלות 1 ו-2 הציגו ערך עתידי של סכום יחיד, שמתאפשר בחישוב פשוט של מכפלת הסכום בהווה (ערך הנוכחי) ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה. חישוב זה אינטואיטיבי וקל לישום.

יחד עם זאת, רבות מהעסקאות בעולם הכספי אינן עסקאות הפקדה בתשלומים אחד אלא בתשלומים: הפקדות לפנסיה, הפקדות לקרן השתלמות, חסכו נסיעה ליד וכיו"ב – כל אלו ואחרות מהוות דוגמאות למכבים שבהם הפקדות הן רבות, וכל אחת מהן כוברת ריבית פרק זמן שונה.

קיים קיצור דרך "טריקי" לחשב ערך עתידי כולל מctruber בגין הפקדות רבות, באופן שמתיחס בפרק הזמן השונה של כל הפקדה עד למועד הפירעון. קיצור הדרך נקרא "חישוב ערך עתידי סדרתי".

**יש שני אטגרים בחישוב ערך עתידי סדרתי כזה:**

א. מתי מותר להשתמש בנוסחה: כאשר סדרת הפקדות היא מסווג סר"ת קבוע – סכום הפקדה קבוע, ריבית קבועה, תדיות קבועה.

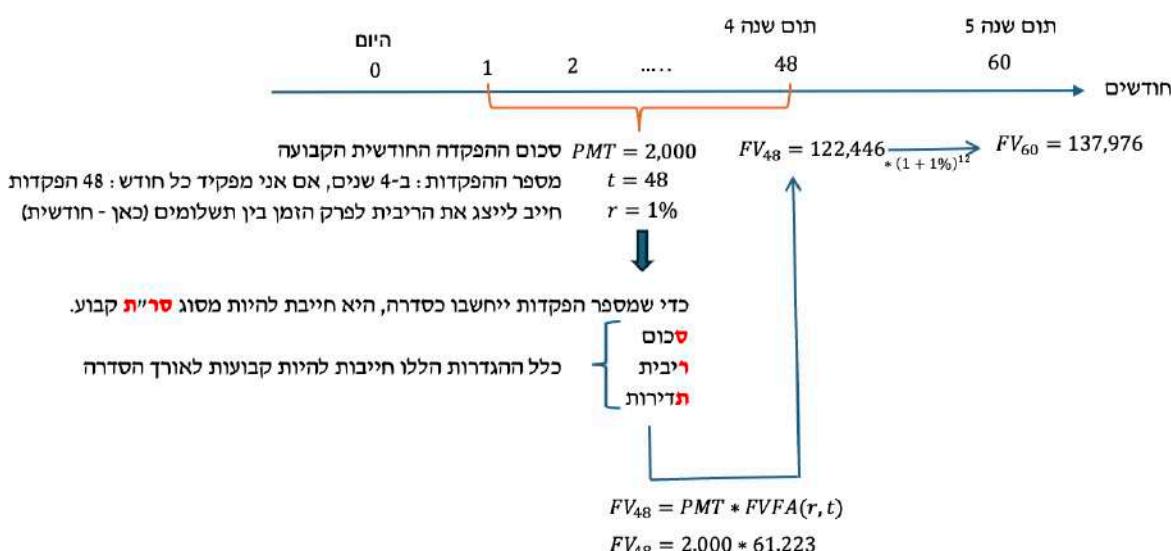
ב. נקודת הזמן אליה מובילת הנוסחה היא נקודת הזמן של ההפקדה الأخيرة. אם מועד החישוב / יעד הפירעון שונה, נצורך התאמת לחישוב.

### שאלה 2.1 – ערך עתידי של סדרה – הבסיס של הבסיס, כולל התאמות

הדר מתכונת להפקיד בתום כל חודש במשך 4 שנים סכום של 2,000 ש"ח. עם סיום ההפקדה الأخيرة, הכספי ימשיך לציבור ריבית בחסכו נספח, כך שהפירעון יחול בתום השנה ה-5.

בנחנה שהריבית החודשית היא 1%, מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של הדר בתום השנה ה-5?

פתרון :



לוח א-2: ערך עתידי מצטבר של 1 ש"ח המתකבל מדי תקופה במשך  $t$  תקופות (המשך)

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
26		29.526	33.671	38.553	44.312	51.113	59.156	68.676	79.954	93.324	109.182
27		30.821	35.344	40.710	47.084	54.669	63.706	74.484	87.351	102.723	121.100
28		32.129	37.031	42.931	49.768	58.403	68.528	80.698	95.339	112.968	134.210
29		33.450	38.792	45.219	52.966	62.323	73.640	87.347	103.966	124.135	148.631
30		34.785	40.568	47.575	56.085	66.439	79.058	94.461	113.283	136.308	164.474
31		36.133	42.379	50.003	59.328	70.761	84.802	102.073	123.346	149.575	181.943
32		37.494	44.227	52.503	62.701	75.299	90.890	110.218	134.214	164.037	201.138
33		38.869	46.112	55.078	66.210	80.064	97.343	118.933	145.951	179.800	222.252
34		40.258	48.034	57.730	69.858	85.067	104.184	128.259	158.627	196.982	245.477
35		41.660	49.994	60.462	73.652	90.320	111.435	138.237	172.317	215.711	271.024
36		43.077	51.794	63.276	77.598	95.836	119.121	148.713	187.102	234.125	299.127
37		44.508	54.034	66.174	81.702	101.628	127.268	160.337	203.070	258.376	330.039
38		45.953	56.115	69.159	85.970	107.710	135.904	172.561	220.316	282.630	364.043
39		47.412	58.237	72.234	90.409	114.095	145.058	185.640	238.941	309.066	401.448
40		48.886	60.402	75.401	95.026	120.800	154.762	199.635	259.057	337.882	442.593
41		50.375	62.610	78.663	99.827	127.840	165.048	214.610	280.781	369.292	487.852
42		51.879	64.862	82.023	104.820	135.232	175.951	230.632	304.244	403.528	537.637
43		53.398	67.159	85.484	110.012	142.993	187.508	247.776	329.583	440.846	592.401
44		54.932	69.503	89.048	115.413	151.143	199.758	266.121	356.950	481.522	652.641
45		56.481	71.893	92.720	121.029	159.700	212.744	285.749	386.506	525.859	718.905
46		58.046	74.331	96.501	126.871	168.685	228.508	306.752	418.426	574.188	791.795
47		59.626	76.817	100.397	132.945	178.119	241.099	329.224	452.900	626.863	871.975
48		61.223	79.354	104.408	139.263	188.025	256.565	353.270	490.132	684.280	960.172
49		62.835	81.941	108.541	145.834	198.427	272.958	378.999	530.343	746.866	1057.190
50		64.463	84.579	112.797	152.667	209.348	290.336	406.529	573.770	815.084	1163.909

### מה בדיקת קרה היא?

чисבונו ערך עתידי לסדרה על בסיס פקטור ייעודי שנייה של שולף מלוח א-2 בנספח א לרך ד (או באופן מתמטי, כפי שיציג בהמשך).

הערך העתידי הנ"ל מוביל תמיד לנקודת הזמן של מועד התזרים האחרון בסדרה, וכך – לזמן 48, ליום השנה ה-4, המועד שבו בוצעה ההפקדה האחוריונה.

חוובה עליינו לבצע התאמה של התוצאה; מזמן 48 לזמן 60 – תום השנה ה-5 שחררי זהו זמן הפירעון. ביצוע ההתאמה הוא על ידי מכפלת פשוטה ב-1 ווד הריבית בחזקת מספר תקופות ההתאמה, כאן – חזקת 12, על מנת לשקף 12 תקופות ריבית נוספות מזמן 48 לזמן 60.

הביתוי בקצרה:

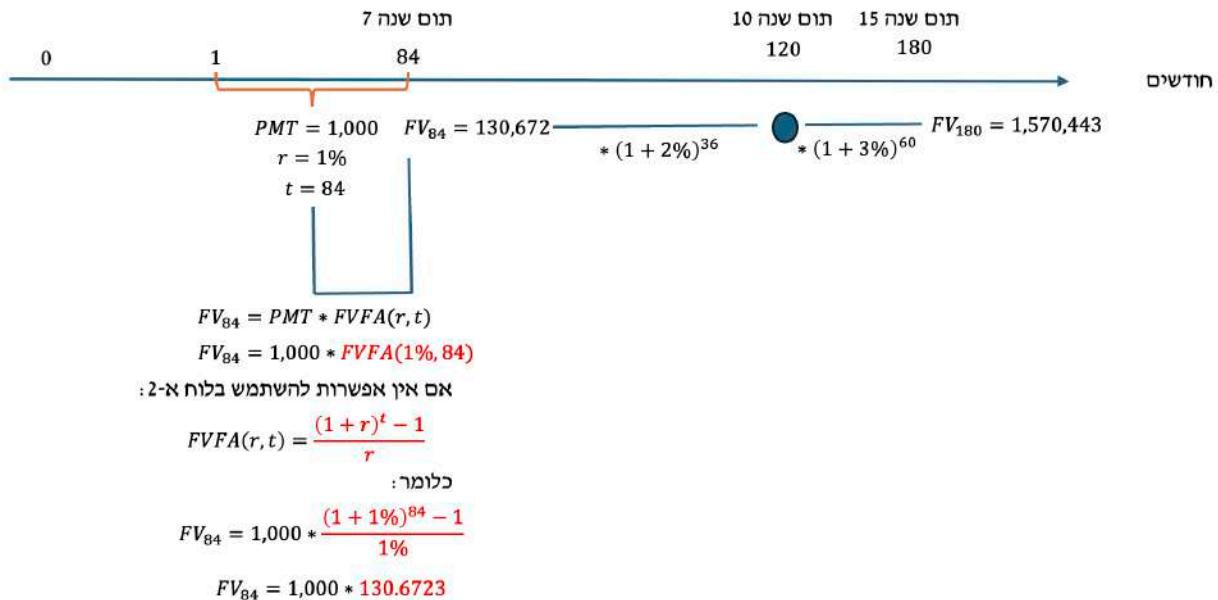
$$FV = 2,000 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^{12} = 137,976$$

**שאלה 2.2 – ערך עתידי של סדרת תשומיתים, עם שימוש בנוסחה מתמטית במקום לוח, והתאמות זמן**

”מור טק בלי עותק” מפקידה בתום כל חודש במשך 7 שנים סכום של 1,000 ש"ח לחסכו. הסכומים שנצברו לתום השנה ה-7 ימשיכו לציבור ריבית עד למועד הפירעון שיחול בתום השנה ה-15 (ביחס להיום).

הרביבית החודשית במשך 7 השנים הראשונות היא 1%, הריביבית החודשית בשנים 8, 9, 10 היא 2%, והרביבית החודשית בכל חודש עוקב היא 3%.

מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של מור טק בתום השנה ה-15?



**הסבר מורחב:**  
 הסדרה הראשונה היא מזמן 1 לזמן 84. הויל ומדובר במספר הפקודות שגדול מ-50, לא יכולנו להיעזר בלוח א-2 (שזה מה שעשויים בדרכן כלל, ב-90% מהשאלות), אלא השתמשנו בנוסחה המתמטית של חישוב הערך העתידי הסדרתי.

ישום נוסחת הסדרה (במקרה זה – המתמטית, ולא מהטבלה), מוביל לנקודת הזמן של סיום הסדרה, ככלمر למועד ההפקודה الأخيرة, זמן 84.

הויל וקיים פער זמני בין עיתויי ההפקודה الأخيرة – זמן 84, לעיתויי הפירעון – תום שנה 15, וב חודשים – תום 180, צריך לבצע התאמה של התוצאה על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריביבית בחזקה רלוונטיות.

הפעם, בתקופת ההתאמה, מ-84 (תום 7) ל-180 (תום 15) יש שתי ריביות שונות; ולכן علينا לישם לצורכי ההתאמה נוסחת ערך עתידי בריבית משתנה – לכפול ב-1 ועוד כל אחת מהריביות השונות, כאשר כל ריביבית תועלה בחזקה מתאימה בהתאם למספר התקופות שבהן היא תקפה. ריביבית 2%, תקפה 3 שנים, קרי 36 חודשים, לכן חזקת 36. ריביבית 3%, תקפה 5 שנים, קרי 60 חודשים, חזקת 60.

**פתרונות מקוצר – במשוואת אחת:**

$$FV_{180} = 1,000 * FVFA(1\%, 84) * (1 + 2\%)^{36} * (1 + 3\%)^{60} = 1,570,443$$

שאלה 3 - ערך עתידי של סדרת תשלוםים (ס"ת), ללא התאמות  
שiran מתכוונת להפקיד בתום כל שנה במשך 8 שנים סכום של 10,000 ש"ח. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה  
של Shiron בתום 8 שנים, אם הריבית השנתית בחסכון היא 4%?

פתרון:

נתון: הסכום שישירן הפקידה כל שנה.

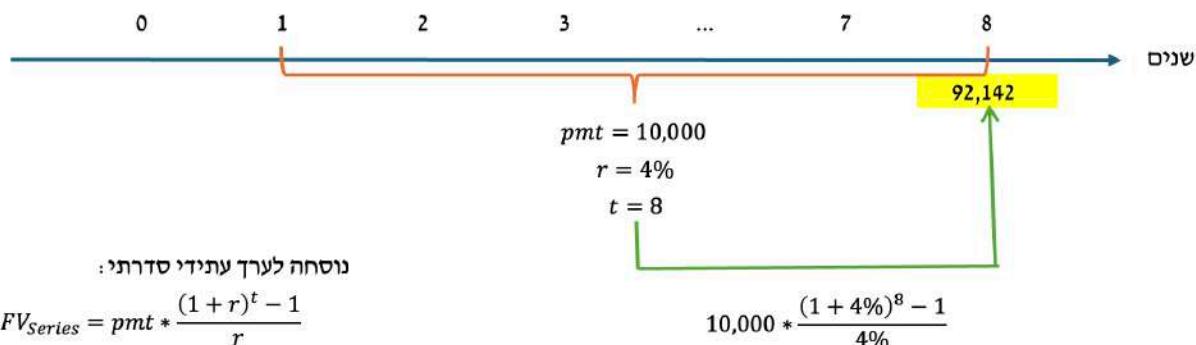
המשמעות "כל שנה" (או כל תקופה): מוביל למסקנה שישירן למשעה הפקידה סדרת תשלוםים קבועה  
זיהיתי סדרה, נבדוק 3 פרמטרים:

סכום תקופתי: הפקידה קבועה של 10,000 PMT = 10,000

ריבית לתקופת תשלום: הפקידה כל שנה, הריבית שנתית  $r = 4\%$

מספר הפקודות: הפקידה כל שנה, 8 שנים لكن  $t = 8$

איור המציג את אופן הפתרון:



האם הסדרה ס"ת: סכום קבוע (PMT קבוע) ריבית קבועה (r) תדיות קבועה (כל שנה)

ערך עתידי של סדרה קבועה (ס"ת)<sup>2</sup>

$$FV_{Series} = pmt * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

כאשר:

הערך FV Series הוא הערך העתידי של הסדרה.

הערך pmt מסמל את ההפקידה / התזרים התקופתי הקבוע.

הערך r מסמל את הריבית **לפרק הזמן בין תשלוםים**.

$$^2 V_t = a * \frac{(1+r)^t - 1}{r}$$

הערך  $t$  מסמל את מספר **התשלומים** בסדרה.

נציין :

$$FV_{Series} = 10,000 * \frac{(1 + 4\%)^8 - 1}{4\%} = 92,142$$

מסקנה : הסכום הכלול שיימוד לרשותה של שירן בתום השנה ה-8 הוא 92,142 ש"ח.

זהירות : לא תמיד הצבה פשוטה בנוסחת ערך עתידי סדרתי תוביל את התוצאה לזמן הנכון. ערך עתידי סדרתי מוביל תמיד לנזונות הזמן שבה מבוצעת הבדיקה האחrownה בסדרה. במקרה פשוט זה, שבו הבדיקה האחrownה בוצעה בתום השנה ה-8, ולבן הערך העתידי הוביל לתום השנה ה-8, גם שאלות על השנה ה-8.

טיפ:

במסגרת ייחדות הלימוד שקיבלתם, **קיימת חוברת** שנקראת "נוסף א' לכרך ד". חוברת זו כוללת לוחות (טבלאות) שמאפשרים לזכור חישובים של סדרה. ספציפית, לוח א-2 שמתחליל בעמ" 23 בחוברת זו הוא הלוות שמציג את הערכיהם של הנוסחה עבור כל צירוף של ריבית ומספר תשלומים. במפגש הבטנו יחד על החוברת וראינו, שעבור ריבית  $r = 4\%$  ומספר תשלומים  $t = 8$  הערך מהטבלה הוא 9.214, והוא נקבע ב-  $FV = pmt \cdot FVFA(r, t)$  בסכום ההפקזה הקבוע. **התוצאה המתבקשת בשימוש בלוח עשויה לסטות מעט (שקלים בודדים) מזו המתבקשת אגב שימוש בנוסחה המתמטית המדוקיקת. זהה בסדר.**

$$FV = 10,000 * \frac{(1 + 4\%)^8 - 1}{4\%} = 92,142$$

חלופה להציבה בנוסחה, אפשר לפתח את לוח (טבלה) א-2 בנוסף א' לכרך ד, ולכפול את התשלום התקופתי  $pmt$  (ה-10,000) בערך המספרי שמתබל עבור עמודות ריבית  $r = 4\%$ , ושורת תשלומים  $t = 8$ .

$$FV_{Series} = 10,000 * 9.214 \approx 92,140$$

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%
1		1.000	1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030	2.040
3		3.030	3.060	3.091	3.122
4		4.060	4.122	4.184	4.246
5		5.101	5.204	5.309	5.416
6		6.152	6.308	6.463	6.633
7		7.214	7.434	7.662	7.898
8		8.286	8.583	8.892	9.214
9		9.369	9.755	10.159	10.583
10		10.462	10.950	11.464	12.006

**נוסחת ערך עתידי של סדרה - כתיב מקוצר ושימוש בלוח א-2<sup>3</sup>**

$$FV_{Series} = pmt * FVFA(r, t)$$

כאשר:

הערך  $pmt$  הוא סכום ההפקזה הקבוע.

הערך  $FVFA$  הוא למעשה התוצאה של הנוסחה / הלוח שמתאימה לריבית בעסקה ( $r$ ) ומספר התשלומים ( $t$ )

<sup>3</sup>  $S_t = a * (r, t)$  (מעשן)

כלומר הפתרון במקרים רבים יוצג כך :

$$FV_{Series} = 10,000 * FVFA(4\%, 8) = 10,000 * 9.214 = 92,140$$

זהירות : ביחידות הלימוד, בנספח אליך ד וכן בחלק מהפתרונות באתר, במקום FVFA הסימן יהיה מע"ס (ראשי תיבות של מקדם ערך עתידי סדרתי).

**שאלה 4 - ערך עתידי של סדרת תלמידים, עם התאמות (דוחיה בפירעון)**

ציל מתכנתת להפקיד **בתום כל שנה** במשך **7 שנים** סכום של **4,000 ש"ח**. בחולף 7 שנים תפסיק ההפקדות, אך החסכו יצבור ריבית עוד 4 שנים נוספות (פירעון בחולוף 11 שנים). הריבית השנתית בחסכו היא 5%. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של ציל בתום 11 שנים?

פתרון :

מטרה : לחשב ערך עתידי

סדרה / סכום ייחד :

סרי"ת קבוע?

כו : סכום קבוע  $PMT = 4,000$  ריבית קבועה  $r = 5\%$ , תזרירות קבועה = כל שנה

**ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד לשך הצבירה למועד ההפקדה האחרון (t=7).**

הדגש :

כו ! נדרש לצבור ריבית נוספת לאחר הסכום הקיימים 4 שנים נוספות.

האם צריך התאמה?

הבה נניח שהפירעון היה בתום שנה 7 (משם בסיום הסדרה). במצב כזה, הדרך לחשב את הסכום בפирעון הייתה :

$$FV_{Series}(7) = pmt * FVFA(r, t) = 4,000 * FVFA(5\%, 7) = 4,000 * 8.142 = 32,568$$

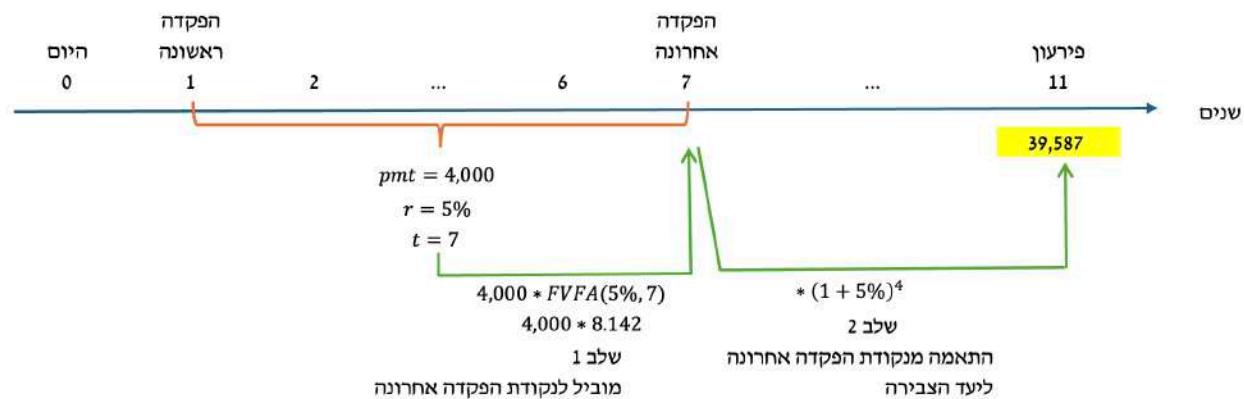
סכום זה, בסך 32,568 ש"ח שנצבר לתום שנה 7, יצבור כעת ריבית נוספת 4 שנים נוספות. האופן שבו נבע צבירת ריבית ללא הפקדות נוספות :

$$FV_{11} = FV_7 * (1 + r)^4 = 32,568 * (1 + 5\%)^4 = 39,587$$

از למשה : כאשר מחשבים ערך עתידי של סדרה, החישוב מוביל אותנו תמיד לנקודת ההפקדה الأخيرة בסדרה. ואם יש צורך בחישוב הערך העתידי לנקודת זמן אחרית - נבצע את ה"התאמה" (את הדחיפה הנוספת קדימה) עם מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת מספר תקופות ההתאמה. זה בעצם אומר שהחישוב מהיר אחד ויחיד הדרך היא :

$$FV_{11} = 4,000 * FVFA(5\%, 7) * (1 + 5\%)^4 = 39,587$$

תרשים יפה המתאר זאת (טוב, לא באמת יפה, אבל אקווה שעושה את העבודה) :



### שאלה 5 - ערך עתידי של "מספר סדרות", עם התאמות

רפאל מתכוון להפקיד בתום כל שנה במשך 8 שנים סכום של 4,000 ש"ח, ובתום כל שנה במשך 4 שנים לאחר מכן סכום של 7,000 ש"ח. לאחר מכן מכון תפסקנה ההפקדות, ורפאל יצבור ריבית נוספת בגין ההפקדות עד למועד הפירעון שיחול בעוד 15 שנים. בהנחה שהריבית השנתית בחסכון 6%, מהו הסכום הכללי שייעמוד לרשותו של רפאל?

פתרון :

גם כאן, רוצים לדעת :

ערך עתידי

של "סדרה"

כאשר חל שינוי בסכום במהלך

אם ניתן לזהות בתוך הסדרה מקרים או תתי סדרות שבהן הערכים קבועים - נוכל להתייחס לכל תתי סדרה כשאליה נפרדת לגמרי, לחשב את ערכה העתידי למועד הפירעון, כולל התאמות רלוונטיות לפי הצורך, ואו לחבר את הערכים העתידיים של תתי סדרות אלו ולקבל  $FV$  מצפפי / כולל.

ובכתב מסודר יותר<sup>4</sup> :

$$FV = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3$$

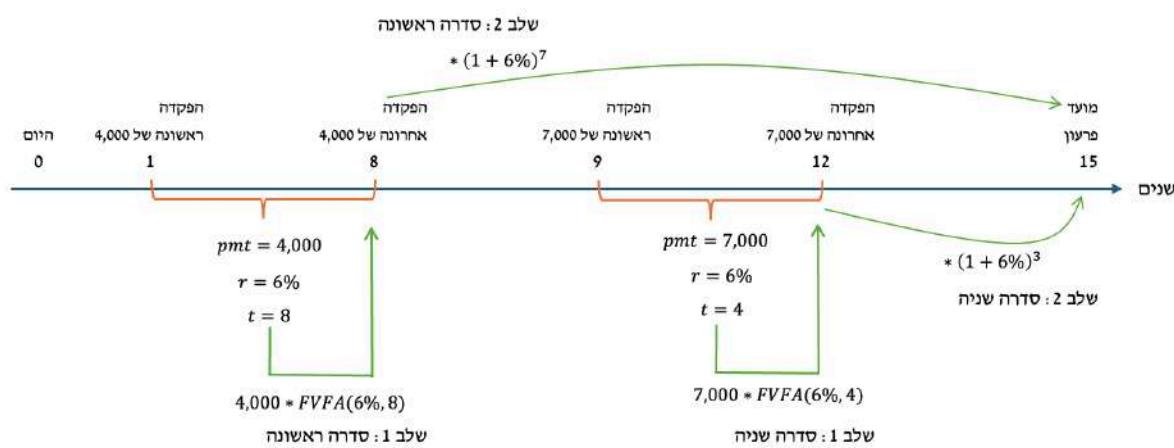
$$FV = 4,000 * 9.897 * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * 4.375 * (1 + 6\%)^3 = 96,000.58$$

<sup>4</sup> את הערך של  $FVFA$  (מעע"ס) ניתן לחשב באמצעות הצגה בנוסחה  $\frac{(1+r)^t - 1}{r}$  או באמצעות הצגה בנוסחה מלאה א-2 בנספח א לכרך ד.

הסבר: כאשר חל שינוי ברכיבי סדרה, אנו נפצל את החישוב, כך שלמעשה, יש לנו סדרה ראשונה עבור 8 הפקודות הראשונות, וסדרה נוספת, שנייה, עבור 4 הפקודות לאחר מכן.

ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד לנקודת ההפקודה الأخيرة. לכן, הערך העתידי של הסדרה הראשונה הוביל בזמן 8. בהינתן שהפירעון איננו בזמן 8 אלא רק בזמן 15, علينا להתאים / "לדוחף" את התוצאה של הסדרה הראשונה עוד 7 שנים קדימה, בזמן 8 לזמן 15. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 7. הסדרה השנייה היא בשנים 9, 10, 11, 12. ככלומר, הערך העתידי של הסדרה שMOVIL למועד ההפקודה الأخيرة מוביל בזמן 12. בהינתן שהפירעון איננו בזמן 12 אלא רק בזמן 15, علينا להתאים / "לדוחף" את התוצאה של הסדרה השנייה עוד 3 שנים קדימה, בזמן 12 לזמן 15. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 3.

להלן איור הממחיש בצורה מפורטת את אופן הפתרון וההתאמות בינו:



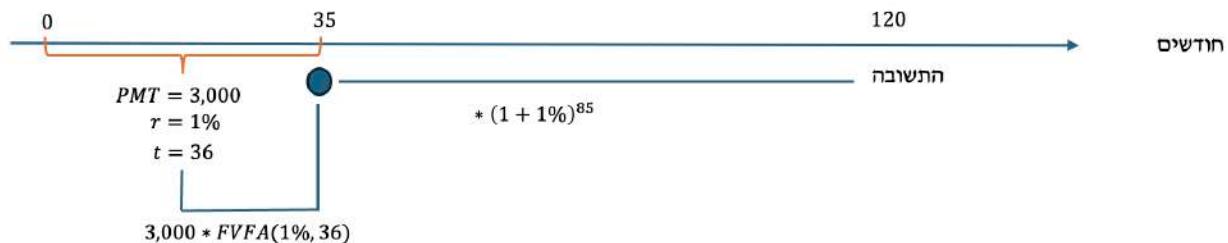
$$FV(\text{Series1}) = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7$$

$$FV(\text{Series2}) = 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3$$

$$FV(\text{Total}) = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3 = 96,000$$

**שאלה 5.1 – ערך עתידי של סדרה, תזרימי תחילת תקופה עם התאמות**

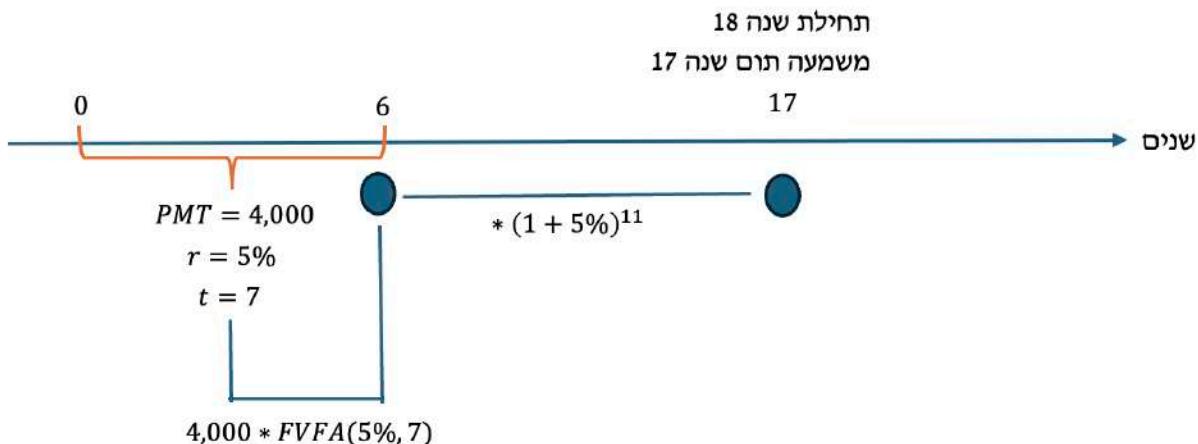
אנна חנה הפקידה בתחילת כל חודש במשך 3 שנים סכום של 3,000 ש"ח. פדיון החסכון הוא בתום השנה ה-10. בהנחה שהריבית החודשית היא בשיעור 1% (והיא נצברת גם לאחר הפקידה האחורית, עד הפדיון), מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של אננה חנה בתום השנה ה-10?



**שאלה 5.2 – ערך עתידי של סדרה, תזרימי תחילת תקופה**

גרולפי מפקידה בתחילת כל שנה סכום של 4,000 ש"ח במשך 7 שנים. החסכו יפרע בתחילת השנה ה-18. הריבית השנתית היא 5%. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של גROLפי במועד הפירעון?

פתרון :



הסבר מפורט :

סדרה שכוללת הפקודות בתחילת כל שנה 7 שנים, כולל 7 תזרימיים שמייקומם על הציג זמן 0 לזמן 6. לגבי עיתוי הפירעון. אמרו שהפירעון בתחילת השנה 18. אני חייב למקם את הצלל על הציג במונחי תום תקופה, שכן אשתמש בטענה שאומרת שתחילת השנה 18 היא תום שנה 17, ובהתאם, אציג את עיתוי הפירעון על גבי זמן 17 על הציג.

לאחר שאחשב ערך עתידי של סדרה וגיעו למועד ההפקודה الأخيرة זמן 6, ואת זה בהתאם קדימה בחזקה מתאימה שמתארת את פרק הזמן שחולף מ-6 ל-17 שהוא 11 שנים נוספות.

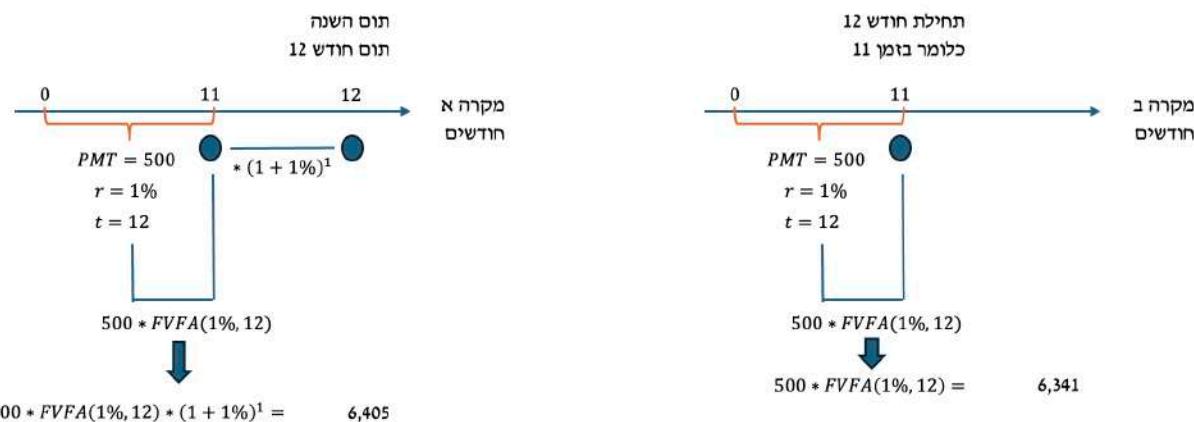
$$FV = 4,000 * FVFA(5\%, 7) * (1 + 5\%)^{11} \rightarrow 4,000 * 8.142 * 1.05^{11} = 55,702$$

**שאלה 5.3 – “האם תמיד כשכטוב תחילת תקופה כופלים ב-1 ועוד הריבית”**

קיליל מפקידה בתחילת כל חודש במשך שנה סכום של 500 ש"ח. הריבית החודשית 1%, והפירעון יבוצע בתום השנה.

- מהו הסכום הכללי שיימוד לרשותה?
- ביצד תשנה תשובתך, אם הפירעון הוא בתחילת החודש ה-12.

**פתרון :**



**הסבר :**

האיור השמאלי מתרגם את המצב שבו ההפקדות בתחילת תקופה, אך הפירעון הוא בתום תקופה. כלומר קיימים זמנים של חודש אחד בין עיתוי ההפקדה האחרונה (תחילת החודש האחרון של השנה, זמן 11) לבין עיתוי הפירעון (תום השנה, תום החודש ה-12). פער זה דורש ביצוע התאמה; קרי, מכפלה של החישוב הסדרתי באחת ועוד הריבית, כדי לגשר על הפער בין מועד התזרים האחרון למועד הפירעון.

האיור הימני מתרגם את המצב שבו ההפקדות עוזן בתחילת תקופה, אך הפירעון גם הוא בתחילת החודש האחרון של השנה הראשונה, כלומר, גם ההפקדה האחרונה וגם הפירעון – בזמן 11 על הציר. הוואיל ואין פער זמנים בין עיתוי ההפקדה الأخيرة לפירעון, אין צורך במכפלה נוספת או התאמה נוספת.

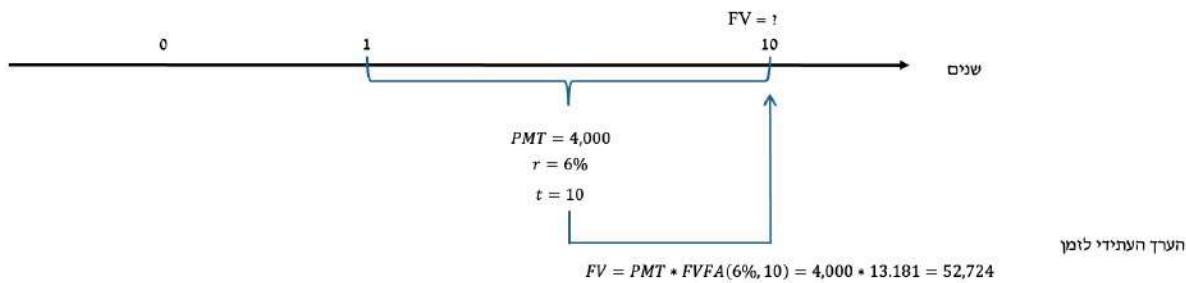
గרלופי: “שייקה, בשני המקרים אנו מדברים על פירעון; אלא שהפירעון במקרה א הוא למעשה  $FV_{12}$  ואילו הפירעון במקרה ב הוא למעשה  $FV_{11}$  וזה מה שיותר את ההבדל בחישוב.

### שאלה 6 - ערך עתידי של סדרה - תזרימי "תחילת תקופה"

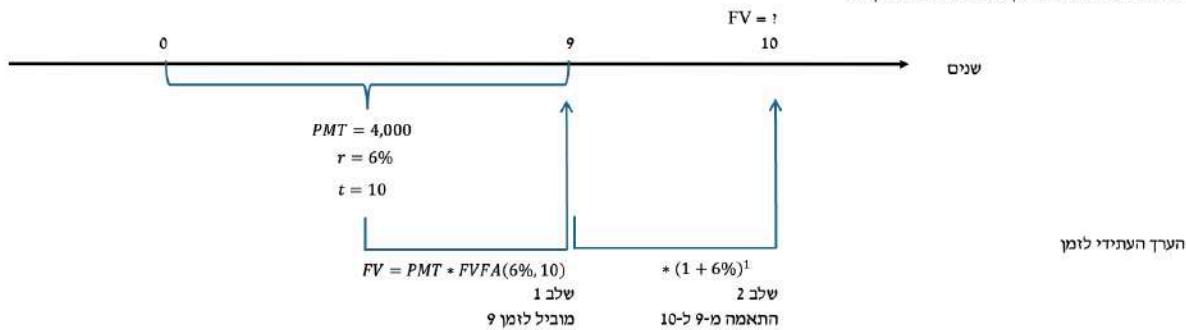
mirb motcnnat lehpkid **בתחילת** كل שנה במשך 10 שנים סכום של 4,000 ש"ח. הריבית השנתית 6%, והפירעון בוצע בתום השנה ה-10. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של מירב במועד הפירעון?

פתרון :

אם חיו אמורים שתחזקדה בתום כל שנה 10 שנים :



אבל התזרמים הם בתחילת כל שנה : תחילת שנה 1 = זמן 0 ; תחילת שנה 10 (הפקדה אחרונה) = זמן 9.  
יחד עם זאת מועד הפירעון לא חשתנה, הוא זמן 10.



$$FV = PMT * FVFA(6\%, 10) * (1 + 6\%)^1 = 4,000 * 13.181 * 1.06 = 55,887$$

וכעת בכתיבת מסודרת יותר :

$$FV = 4,000 * FVFA(6\%, 10) * (1 + 6\%)^1 = 4,000 * 13.181 * 1.06 = 55,887.44$$

הסבירים :

1. כאשר מדובר בסדרה שהפקודות **בתחילת** תקופה, המשמעות היא שגם תחילת הסדרה וגם סיוםה הם בנקודות זמן אחת מוקדמת יותר.  
בשפה פשוטה: סדרה "בתום כל שנה, 10 שנים" תוצג על הציר מזמן 1 לזמן 10.  
סדרה "בתחילת כל שנה, 10 שנים" תוצג על הציר מזמן 0 לזמן 9.  
בכל מקרה, מספר ההפקודות  $t$  לא משתנה והוא עדין 10.
2. כאשר מבצעים את החישוב הסדרתי של הערך העתידי של סדרה זו, הוואיל וההפקדה האחורונה היא בזמן 9, נדרש לבצע התאמה של התוצאה בזמן 9 לזמן 10 (מועד הפירעון). לכן כפלו ב-1 ועוד הריבית.
3. באופן כללי, זכרו: כאשר עוסקים בסדרות ערכו של  $t$  מייצג את מספר ההפקודות / מספר תזרימי המזומנים, לא את מספר התקופות, לא את מועד סיום הסדרה או ערכיהם אחרים. מסיבה זו, גם כעסקנו בסדרה מזמן 0 ל-9, ערך ה-  $t$  עדין 10.

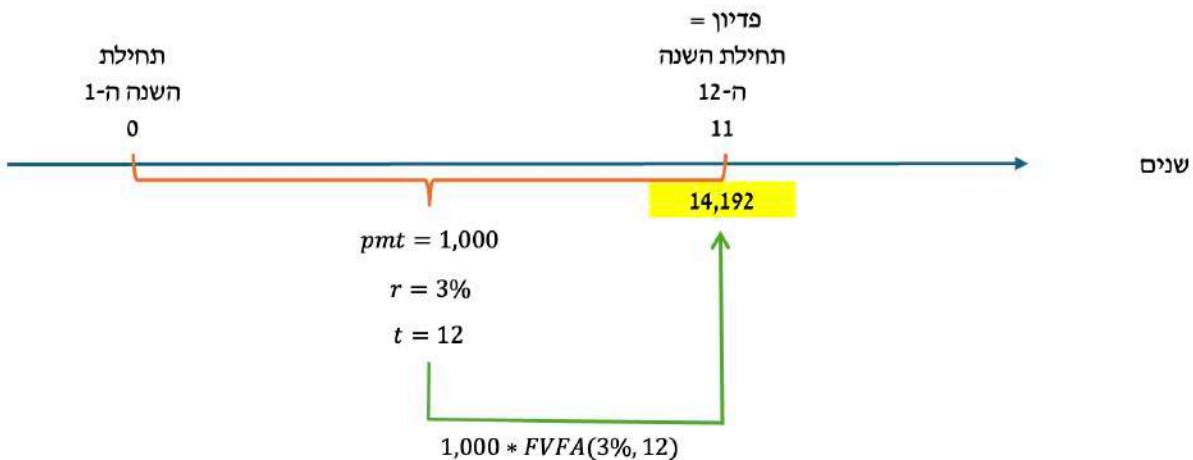
### שאלה 6.1 – ערך עתידי של סדרה, תחילת תקופה – בזיהירות

משה מתכוון להפקיד לחסכוון בתחילת כל שנה במשך 12 שנים סכום של 1,000 ש"ח. הריבית השנתית 3%. מהו הסכום הכולל שיימוד לרשותו במועד הפדיון?

פתרון:

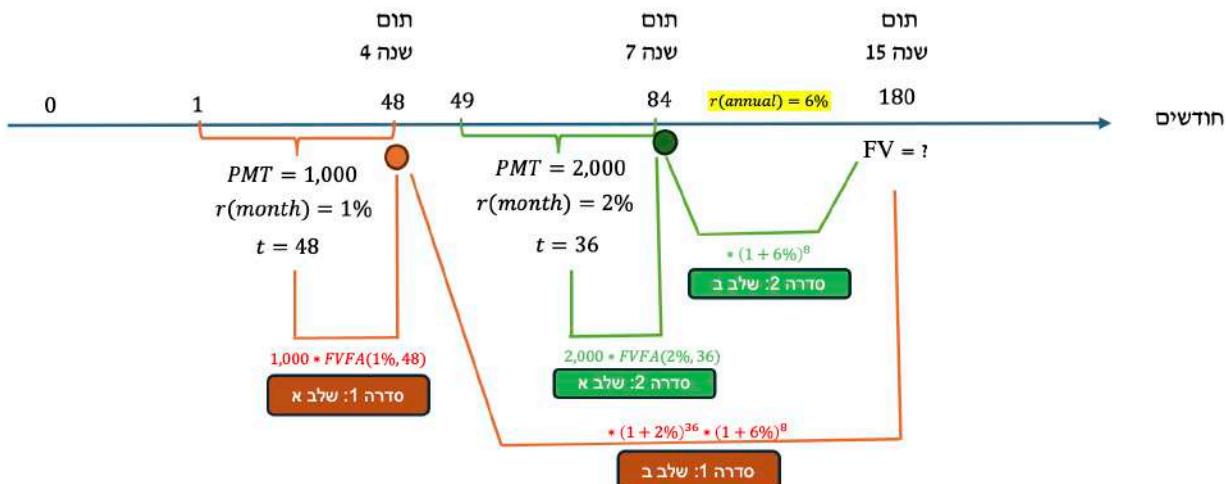
מטרת השאלה פשוטה זו היא להציג בפנינו שאסור לנו להיות נקנקיים ולהשוו שתמיד שכטובה המילה "תחילת תקופה" כופלים ב-1 ועוד הריבית. זה לא נכון. תחילת תקופה זה בסך הכל מונח שעזר לנו להבין שתילת הסדרה וגם סיוונה על הציר – הם במועדים "שונים" (אחת לפני המיקום הטבעי שלהם).

ברגע שמייקמתי על הציר את תזרימי ההפקדה, כל שאצטרך לשים לב אלו הוא נקודת הזמן המדויקת של הפירעון / היעד – אם היא שונה מנקודת הזמן של ההפקדה האחורונה שזוהתה – נבצע התאמה. אחרת (כמו במקרה זה) לא נבצע התאמה.



## שאלה 6.2 – ערך עתידי של מספר סדרות

רוויח צבאי הפקיד בתום כל חודש במשך 4 שנים סכום של 1,000 ש"ח. בתום 4 השנים סיים דוקטורט, שכרו הוקף וד"ר צבאי הפקיד בתום כל חודש עוקב במשך 3 שנים סכום של 2,000 ש"ח. ההפקדה الأخيرة בוצעה בתום השנה ה-7 (ביחס להיום). הכספי נשאר בחסכוון, והמשיך לציבור ריבית במשך 8 שנים נוספות. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של ד"ר צבאי בתום השנה ה-15. אם הריבית החודשית במהלך 4 השנים הראשונות היא 1%, הריבית החודשית במהלך 3 השנים לאחר מכן היא 2%, והריבית השנתית בכל שנה עוקבת היא 6%.



### וआט זה פלייפ?

זיהינו שאלה שבה מפקדים כל חודש סכום מסוים; ובשלב מסוים מפקדים כל חודש סכום אחר. לאור העובדה שהסכוםים שונים – יש כאן 2 סדרות, ולא סדרה אחת.

הסדרה הראשונה (האדומה) כוללת את התזרומים הקבועים מזמן 1 לזמן 48. חישוב הערך העתידי של הסדרה מוביל לזמן 48, ותוצאה זו יש לדוחף עד לזמן 180 – תום שנה 15, זמן הפירעון. הדחיפה (התאמת) הנוספת זו מבוצעת בריבית משתנה. מדוע? בשאלת נתון שהריבית ב-3 השנים לאחר הסדרה הראשונה – בעצם, שנים 5, 6, 7 – היא ריבית חודשית של 2%, ולכן ההתאמת דורשת מכפלה ב-1 ועוד ריבית חודשית 2% בחזקת 36 חודשים, התאמת. את כל זה צריך לכפול ב-1 ועוד הריבית בעשתיים לאחר מכן; אמרו לי שלאחר 3 שנים הנוספות, למעשה, בתים 8-15, הריבית היא שנתית (לא חודשית) בשיעור 6%. לכן, ההתאמת הנוספת בגין תקופה זו (וזכרו – אני עדין בסדרה הראשונה בלבד) היא על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית (שנתית) בחזקת 8 (שנתיים).

בעצם, הערך העתידי של כל הסדרה הראשונה האדומה לתום החודש ה-180 מתקובל באמצעות הביטוי:

$$FV(180) = 1,000 * FVFA(1%, 48) * (1 + 2\%)^{36} * (1 + 6\%)^8 \quad (\text{סדרה 1: שלב א})$$

ומה לגבי הסדרה השנייה? הסדרה זו כוללת את התזרומים הקבועים מזמן 49 לזמן 84. חישוב הערך העתידי של הסדרה מוביל לזמן 84, ותוצאה זו יש לדוחף עד לזמן 180 – תום שנה 15, זמן הפירעון. הדחיפה (התאמת) הנוספת זו מבוצעת בריבית שנתית ידועה של 6% שתקפה מיום השנה ה-7 עד תום השנה ה-15. لكن הביטוי יהיה:

$$FV(180) = 2,000 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 6\%)^8 \quad (\text{סדרה 2: שלב ב})$$

בsek הכל, הערך העתידי המצרפי שמתחשב ב-2 הסדרות, שינוי הריבית וצבירות הריבית הנוספות יהיה:

$$FV = 1,000 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 2\%)^{36} * (1 + 6\%)^8 + 2,000 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 6\%)^8 =$$

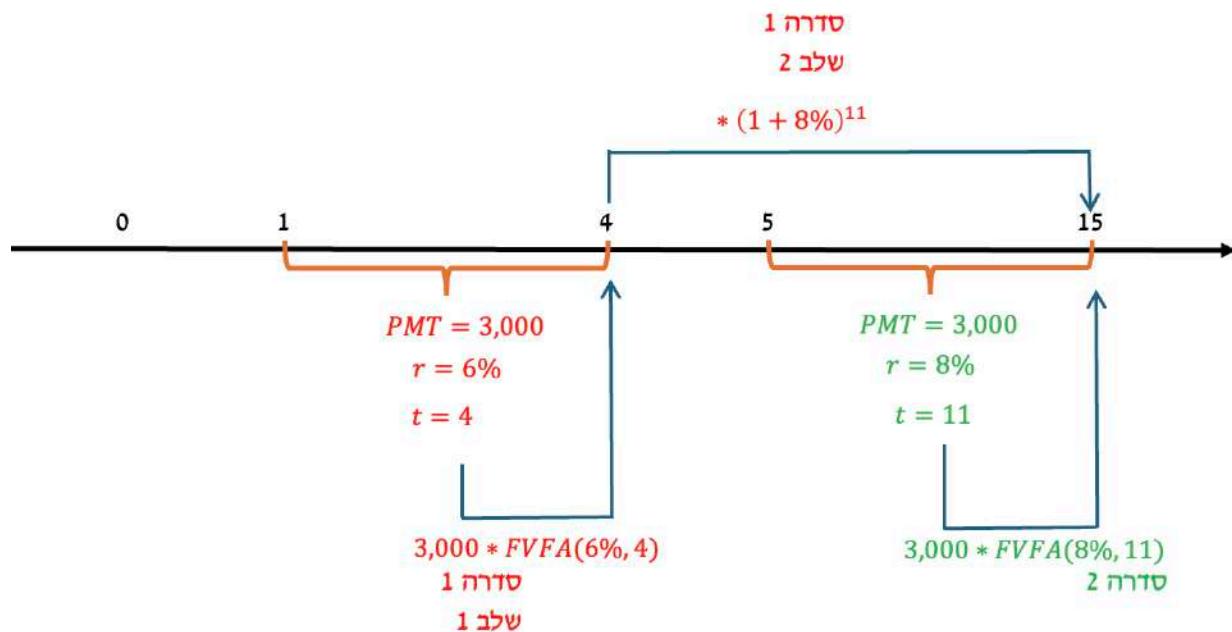
סיכום ביניים לשאלת זו:

אם זיהיתי שאלה שבה קיימות מספר סדרות וצריך לתרגם / לחשב את ערך כולל לנוכח זמן עתידי בודד, עליי לדאוג לחשב ערך עתידי לכל סדרה בנפרד, לדאוג בהתאם לכל סדרה בנפרד למועד הפירעון, ולסכם את התוצאות כדי להגיע לערך העתידי הכלול.

שאלה 7 - ערך עתידי של סדרה - פיצול למספר סדרות בעקבות שינוי ריבית - לבית

שקד מתכונת להפקיד בתום כל שנה במשך 15 שנים סכום של 3,000 ש"ח. הריבית השנתית במהלך 4 השנים הראשונות היא 6% לשנה, ואילו הריבית השנתית בתום כל שנה עוקבת היא 8% לשנה. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של שקד בתום 15 שנים?

פתרון :



בsek הכל, משווהות הפתרון היא :

$$FV = 3,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 8\%)^{11} + 3,000 * FVFA(8\%, 11)$$

ובהתאם התשובה תהיה :

$$FV = 3,000 * 4.375 * (1 + 8\%)^{11} + 3,000 * 16.645 = 80,538$$

הסבר :

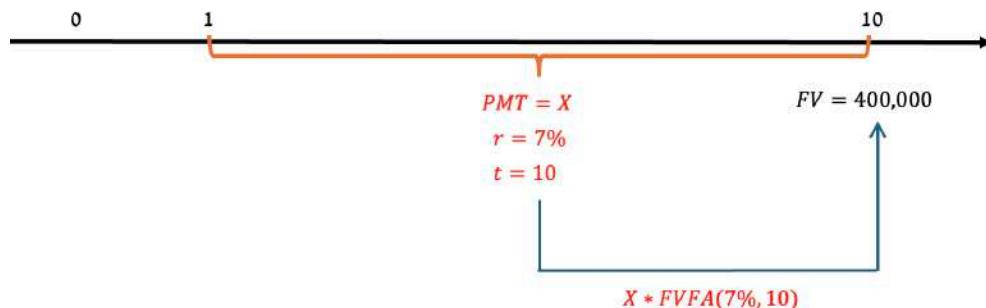
- כאשר בסדרה מסוימת חל שינוי בריבית, חייבים לפחות את הסדרה לשתי סדרות נפרדות. זאת, משום שסדרה לצרכים של חישובינו מוגדרת רק כאשר כל רכיבי הסר"ת קבועים (כלומר : גם הסכום חייב להיות קבוע, גם הריבית חייבת להיות קבועה, וגם התדירות חייבת להיות קבועה). לכן, כאשר שינוי בריבית, הסדרה "נשברת" ומתחילה סדרה חדשה.
- מסיבה זו, علينا להגדיר במקרה זה שתי סדרות : סדרה ראשונה בשנים 1-4 (עד שינוי הריבית), וסדרה שנייה עבור השנים 5-15 (לאחר שינוי הריבית).
- הערך העתידי של הסדרה הראשונה שמשמעותה בזמן 4 הוביל בזמן 4 בהגדירה (למועד ההפקה האחרון), לרבות הריבית המגולמת, עד וכול זמן זה. כדי להתאים אותו בזמן 15, מועד הפרעון - כפלנו ב-1 ועוד הריבית בחזקת 11 (ההפרש בין 15, היעד, ל-4).
- הערך העתידי של הסדרה השנייה שמשמעותה בזמן 15, הוביל בזמן 15 בהגדירה (למועד ההפקה האחרון). לכן, אין צורך להתאים בזמן 15, ואין צורך במכפלה נוספת של ביטוי זה.

שאלה 8 - **חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - לבית**

גיא מתכוון להפקיד בתום כל שנה במשך 10 שנים סכום קבוע כך שבחלוף 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקדה השנתי הנדרש אם הריבית השנתית היא 7%?

פתרון :

בשאלת זו, לראשונה בחייבנו, סך הערך העתידי נתון - הנעלם הוא ב"מקום אחר".  
 כאן, ספציפית, הנעלם הוא ה-  $PMT$  שמייצג את ההפקדה התקופתית בסדרת ההפקדות הנתונה.



כך מתקבל המשוואת הפתרון :

$$X * FVFA(7\%, 10) = 400,000$$

$$X = \frac{400,000}{13.816} = 28,952$$

למעשה יצרנו משווהה לפיה - הערך העתידי של סדרת ההפקדות (מכפלה סכום הפקדה התקופתי בביטוי של ערך עתידי סדרתי) שווה ל- 400,000 ש"ח, ובהתאם חילצנו את סכום ההפקדה הנדרש העומד על 28,952 ש"ח לשנה.

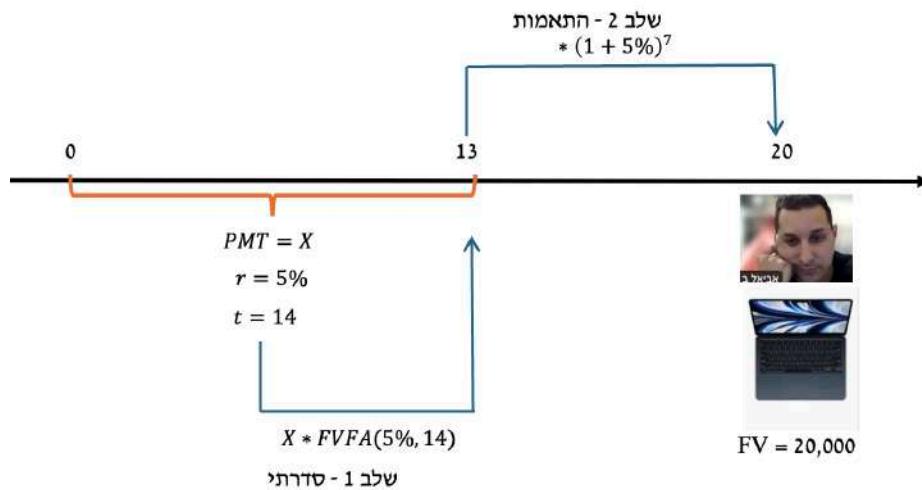
במקרה זה, לא נדרש התאמות - משום שנתון עיתוי הצבירה בסך 400,000 (הערך העתידי) הוא בדיקת מועד ההפקדה الأخيرة (תום השנה ה-10).

### שאלה 8.1 - לבית

אביאל מפקיד בתחילת כל שנה במשך 14 שנים קבוע. לאחר מכן, ישair את הכספי בחסכון עד בסוף השנה ה-20. הריבית השנתית היא 5%. מהו הסכום השנתי שצרכיך אביאל להפקיד, על מנת שיוכל לרכוש Macbook בתום 20 שנים, אם ידוע שבמועד זה צפוי מחירו להיות 20,000 ש"ח?

פתרון :

שאלה זו דומה מאד לקודמת, למעט העובדה שערכיהם בסדרה אל מול עיתוי הפירעון מוביל לכך שתדרשנה התאמות :



ומשווואת הפתרון תהיה :

$$X * FVFA(5\%, 14) * (1 + 5\%)^7 = 20,000 \rightarrow X = 725.22$$

שיםו לב : כאשר עסקנו בסדרה עצמה (בתחילת כל שנה, 14 שנה) על הערך ההציג היא מ-0 עד 13, ומספר תזרימי המזומנים בסדרה שמנדר את ה-  $t$  הסדרתי הוא 14.

לעומת זאת, כאשר עסקנו בתקופת ההתאמות, על פי נתוני השאלה הפירעון הוא **בסוף** שנה 20, ולכן עבור ההתאמה, דחפנו את התוצאה מ-13 ל-20, זו הסיבה לחזקת 7.

**בתקופת ההתאמות =  $h - t$  שווה למספר התקופות (הפרש פשוט)**

**בתקופת הסדרה =  $h - t$  שווה למספר התזרמים (הפרש +1).**

### תרגול נוספת לאחר מפגש 1 בפגוון נושאינו - כולל שיכלולים

לשאלו שהן יחסית פשוטות יש פתרון קצר. לשאלות המורכבות השקעתי בפתרון מורחב. אני זמין לכל שאלת ו לכל אי הבנה לגבי התרגולים ופתרונותיהם, אנו כותב במיוחד שאלות מוקדמות לתכני הסטטן עבורהם בזמן קצר וכן טעויות הקלדה אפשריות מעט לעת, רצוי דרך הפורים ואפשר גם באמצעות אחרים בכל מקרה של אי בהירות.

### שאלה 9 - לבית

לורן הפקידה היום לחסכו סכום של 200,000 ש"ח. תקופת ההפקדה היא 8 שנים, כאשר הריבית השנתית בכל אחת מהשנתים הראשונים היא 4%, הריבית השנתית בכל אחת מ-3 השנים לאחר מכן היא 2%, הריבית השנתית בשנה הששית ובשנה השביעית היא 3% לשנה, והריבית השנתית בשנה השמינית היא 8%. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של לורן במועד פירעון החסכו (בתום 8 שנים)?

פתרון :

$$FV = 200,000 * (1 + 4\%)^2 * (1 + 2\%)^3 * (1 + 3\%)^2 * (1 + 8\%)^1 = 263,024$$

### שאלה 10 - לבית

מוריה החיליטה לחסוך לטובת iPhone חדש. לשם כך תפקיד בסוף כל חודש במשך שנה סכום של 300 ש"ח. הריבית החודשית בחסכו היא בשיעור 1%. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של מוריה בסוף השנה?

פתרון :

$$FV = 300 * FVFA(1\%, 12) = 300 * 12.683 = 3,805$$

### שאלה 11 - לבית

תחל החיליטה לחסוך לטובת לימוד הנדסת נתונים בטכניון. לשם כך תפקיד בסוף כל חודש במשך שלוש שנים סכום של 500 ש"ח. לאחר מכן, תפסיקת ההפקדות, אך הסכום ימשיך לציבור ריבית שנה נוספת. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של תחל בתום השנה הרביעית, אם ידוע שהריבית החודשית הנו 2%?

פתרון :

$$FV = 500 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{12} = 500 * 51.994 * 1.02^{12} = 32,970$$

### שאלה 12 - לבית

פרופ' עפר עציוון החיליט לחסוך סכום של 400 ש"ח בתחילת כל חודש במשך 3 שנים. בתום 3 שנים החסכו ייפדה. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותו בתום 3 שנים אם ידוע שהריבית החודשית היא 1%?

פתרון :

$$FV = 400 * FVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^1 = 400 * 43.077 * 1.01 = 17,403$$

**שאלה 13 - לביה**

פרופ' טל שביט החליט לחסוך סכום של 600 ש"ח בתחלת כל חודש במשך 4 שנים. לאחר מכן הפקידו (הפקידו האחרון בתחלת החודש האחרון של השנה ה-4), אך ימשיכו לציבור ריבית עד תום השנה ה-6. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של טל במועד פירעון החסכוו אם ידוע שהריבית החודשית היא 1%?

פתרון :

$$FV = 600 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^{25} = 600 * 61.223 * 1.01^{25} = 47,109$$

 **שאלה 14 - לביה**

ד"ר איל להב החליט לחסוך סכום של 300 ש"ח בסוף כל חודש במשך 3 שנים, ובסוף כל חודש במשך השנה ה-5 עד תום השנה ה-6. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של ד"ר להב בתום השנה ה-6 אם הריבית החודשית היא 2%?

פתרון :

$$FV = 300 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{36} + 200 * FVFA(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{12}$$

$$FV = 300 * 51.994 * 1.02^{36} + 200 * 30.422 * 1.02^{12} = 39,535$$

 **שאלה 15 - לביה**

פרופ' מוסי רוזנבוים החליט לחסוך סכום של 700 ש"ח בסוף כל חודש במשך 4 שנים. הריבית החודשית היא 2% לחודש בכל אחת מהשנתים הראשונות, ו-3% לחודש בכל חודש לאחר מכן. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של מוסי במועד פירעון החסכוו שיחול בתום השנה ה-4?

פתרון :

$$FV = 700 * FVFA(2\%, 24) * (1 + 3\%)^{24} + 700 * FVFA(3\%, 24)$$

$$FV = 700 * 30.422 * 1.03^{24} + 700 * 34.426 = 67,387$$

 **שאלה 16 - לביה**

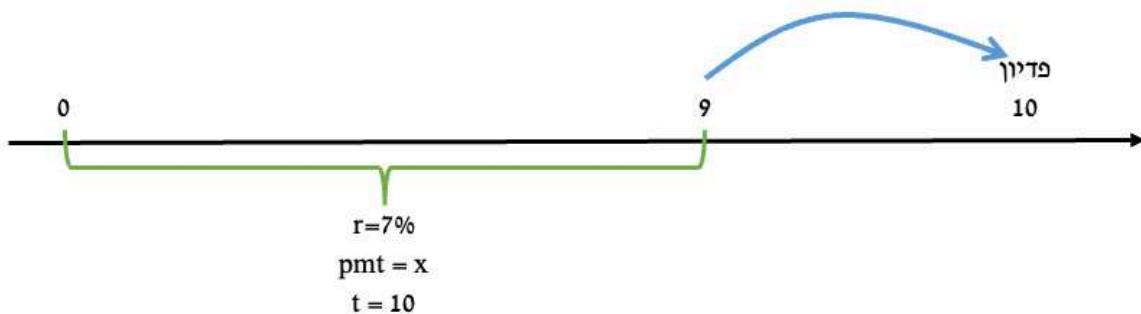
פרופ' אורן ציון החליט לחסוך סכום קבוע בסוף כל חודש במשך 3 שנים. הריבית החודשית היא 1% לחודש. מהו סכום ההפקידו החודשי הקבוע אם ידוע שבסיום תקופת החסכוו (בתום 3 שנים) עומד לרשותו סכום של 500,000 ש"ח?

פתרון :

$$FV = 500,000 = x * FVFA(1\%, 36) \rightarrow 500,000 = 43.077x \rightarrow x = 11,607$$

**שאלה 17 - חילוץ סכום הפקודה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - תחילת תקופה - לבית**  
 שי מתכוון להפקיד בתחילת כל שנה במשך 10 שנים סכום קבוע כך שבחולוף 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקודה השנתי הנדרש אם הריבית השנתית היא 7%?

**פתרון :**  
 בשאלת זו נתון הערך העתידי - הסכום שנצבר לסיום השנה ה-10. בנוסף, ידוע שמדובר בסדרה קבועה (הפקודה בתחלת כל שנה, 10 שנים). יחד עם זאת, הפירעון הוא בסוף השנה ה-10. יש לשים לב, כאשר מדובר בסדרה תחילת תקופה, עיתוי סיוםה הוא "אחת לפני" הסיום הטבעי שלה. במקרים אחרים, אם ההפקודה בתום כל שנה 10 שנים, המיקום על הציר של איברי הסדרה הוא בטווח של 10-1, אלא שכן, לאור העובדה שמדובר בתזרימי תחילת תקופה, המיקום על הציר של איברי הסדרה הוא בטווח של 9-0. נdag להראות זאת גם ויזואלית. הערך שיש לחוץ, סכום ההפקודה החודשי, יסומן כ- x:



$$FV = x * FVFA(7\%, 10) * (1 + 7\%)^1 = 400,000 \rightarrow x \approx 27,057.89$$

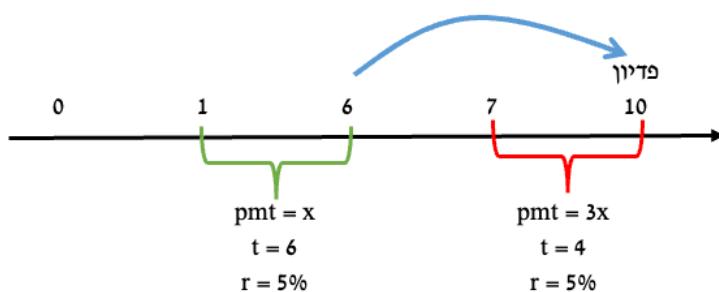
**הסבר לביטוי המתמטי:** ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד למועד ההפקודה الأخيرة. הוайл וההפקודה الأخيرة היא בזמן 9 (תחילת שנה 10 = זמן 9 על הציר, תמיד), הרי שקיים פער זמני של שנה אחד ממועד אליו מוביל הנוסחה (מועד ההפקודה الأخيرة, זמן 9) לבין מועד הפירעון - זמן 10. לכן צריך לכפול את ביטוי הערך העתידי ב-1 ועוד הריבית פעם אחת (בחזקת אחת).

**שאלה 18 - חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - שבלול**  
 שי מוכנן להפקיד בתום כל שנה במשך 6 שנים סכום קבוע, ובתום כל שנה במשך 4 השנים לאחר מכן גובה פי 3, כך שבתום 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקדה בכל אחת מהשנים הראשונות, אם הריבית השנתית היא 5%?

משוואת הפתרון היא:

$$FV = x * FVFA(5\%, 6) * (1 + 5\%)^4 + 3x * FVFA(5\%, 4) = 400,000 \rightarrow x = 18,869.82$$

התרשימים המנמק הוא זה:



והסביר המילולי הוא: יש לנו כאן למעשה שתי סדרות. הסדרה הראשונה היא עבר הפקדות בכל אחת מהשנים 1-6. בתום כל אחת מהשנים. הסדרה השנייה היא עבר הפקדות בתום כל אחת מהשנים 7-10. חישוב הערך העתידי של הסדרה הראשונה מוביל בזמן 6, ואת התוצאה צריך לדחוף 4 תקופות קדימה על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 4 (כך מעבירים את התוצאה מזמן 6 לזמן 10). לעומת זאת הערך העתידי של הסדרה השנייה מוביל בזמן 10 בהגדלה (מועד ההפקדה الأخيرة בסדרה האדומה). את תוצאה חיבור הערך העתידי של שתי הסדרות, הסדרה הראשונה עם התאמת הזמן והסדרה השנייה כמו שהיא, משווים לערך העתידי הכללי הנדרש שהוא 400,000.

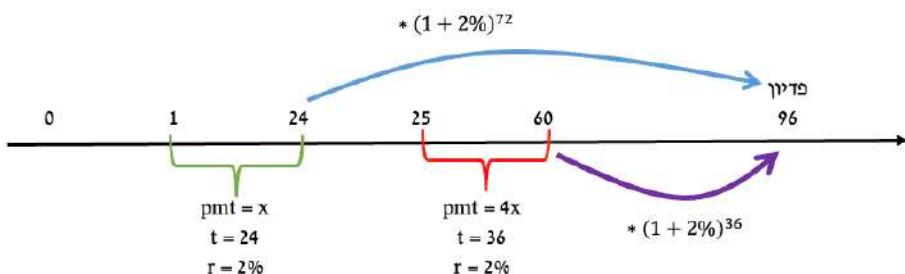
**שאלה 19 - חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון, עם התאמת ריבית נקבות**  
 בונידו מתכנן להפקיד בתום כל חודש סכום קבוע במשך שנים, ובמהלך כל חודש ב-3 שנים לאחר מכן מפקיד סכום גבוה פי 4. לאחר מכן, בשנה הששית, השביעית והשמינית, איננו מפקיד. בסוף 8 שנים ה策טבר אצל בונידו סכום של 550,838 ש"ח. מהו הסכום שהפקיד בכל חודש בשנתיים הראשונות, אם ידוע שהריבית השנתית היא ריבית נקבות בשיעור של 24%?

פתרון :

מעבר לתחום בשאלה זו שקצת מזכיר את הקודמת (לפצל מספר סדרות, לעורך התאמות, סכום ההפקדה כמובן) יש כאן הבדל מרכזיו ועקרוני לגבי נתון הריבית. אנו יודעים שכאשר עורכים חישובי סדרה, מהתסוד הנדרש בהקשר זה, הריבית חייבת להיות לתקופת תשלום. כלומר, אם ההפקדות חודשיות - חובה לייצר ריבית חודשית. לצערנו הריבית הנתונה כאן שנתית, ולכן יש להמירה, משנה לחודש. את האופן שבו מוצאים המרות ריבית עוד נציג בהרחבה בהמשך הרצך, אבל בניתוח, לטובות חישובי סדרות בסיסיים כאלו, רק נאמר משפט: כאשר הריבית הנתונה היא ריבית נקבות שנתית, אזי כדי לתאמ אותה משנה לתקופת תשלום, פשוט מחלקים אותה באופן יחסי בהתאם.

בשפה פשוטה: אם יש נתון על סדרה חודשית, והריבית **הנקובה** שנתית, נחלק את הריבית הנקובה ב-12 וכך נקבל בפשטות רבה את הריבית החודשית.  
 המילה נקבות מודגשת, ולא בצד; בהמשך נראה שכאשר הריבית אינה נקבות, המרתה מבוצעת באופן שונה. בניתוח, הריבית החודשית היא:

$$r = \frac{24\%}{12} = 2\%$$



והנוסחה המביאה לידי ביטוי ערך עתידי של סדרה בתשלומים חודשיים היא:

$$FV = x * FVFA(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{72} + 4x * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{36} = 550,838$$

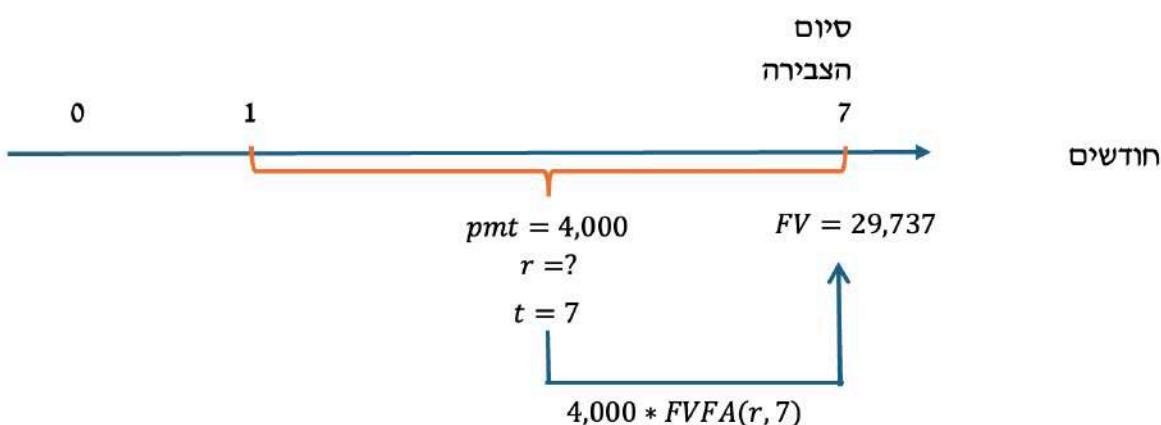
הפתרון ה"סופי" הוא:

$$x = 1,000$$

שאלה 20 - **חילוץ שיעור ריבית מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון**  
 קוזייקרו מתכוון להפקיד בתום כל **חודש** במשך 7 חודשים סכום קבוע של 4,000 ש"ח. מה צריכה להיות הריבית **השנתית** בחסכון אם ידוע שהסכום שנצבר בתום 7 החודשים הוא 29,737 ש"ח?

פתרונות :

גם שאלת זו עוסקת בערך עתידי של סדרה. ההבדל הוא שהריבית איננה ידועה, ולכון היא הערך שנדרש לחלא. חשוב לשים לב: ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד למועד ההפקדה האחידת. ולכון, אם ההפקדה בתום כל חודש במשך 7 חודשים, הערך העתידי הסדרתי אכן מוביל בזמן 7, שהוא נקודת היעד לגביה נתון הערך הנוכחי, ולפיכך אין כל צורך בהתאמות.



משוואת הפתרון תהיה :

$$4,000 * FVFA(r, 7) = 29,737$$

ואיך פותרים מקרה כזה? שבו הנעלם ב-  $FVFA(r, 7)$ ? פשוט מאד. בטור התחלה נгла ספציפית את ה-  $FVFA$ , ככלומר נחלק את שני האגפים ב- 4,000, קיבל :

$$FVFA(r, 7) = \frac{29,737}{4,000}$$

או בעצם :

$$FVFA(r, 7) = 7.434$$

כעת, ניגש לנספח A לכרך D (לוחות היון) ללוח A-2. ננסח למצוא את הערך  $7.434$  בלוח, ונבדוק עזר איזו ריבית הוא מתקיים, כאשר  $r$  (מספר התשלומים) הוא  $7$ . קיבל ש-  $r = 2\%$ . ראו צילום חלקו של הטבלה להלן.

$t$	$r$	1%	2%	3%
1		1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030
3		3.030	3.060	3.091
4		4.060	4.122	4.184
5		5.101	5.204	5.309
6		6.152	6.308	6.463
7		7.214	7.434	7.662
8		8.286	8.583	8.892
9		9.369	9.755	10.159
10		10.462	10.950	11.464

התוצאה שקיבלו היא הריבית לפרק הזמן בין תשלוםם - לחודש. אסור לכפול את הריבית זו ב-12 כדי לתרגם אותה לשנה; משום שריבית זו איננה נקובה. במצבים כאלה, כדי לתאמס את הריבית זו למועדים שנתיים, בגישה של ריבית דרייבית, נדרש לבצע המרה שמתבססת על מערך חזקה מתאים:

$$r_{year} = (1 + 2\%)^{12} - 1 = 26.824\%$$

מה עשינו פה? במקרה הכללי בקורס, יש להניח שמתיקיימת "ריבית דרייבית". המשמעות היא שאם הגענו לריבית לחודש, ורוצים להגיע לריבית שנתיים, אלא אם נאמר מפורשות אחרת - החישוב הוא לפי:

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1$$

הערך  $r_{year}$  מייצג את הריבית השנתית

הערך  $r_{month}$  מייצג את הריבית החודשית

שיםו לב! בשאלת 19 המרת הריבית בוצעה עם חילוק ולא עם חזקה, משום שם נתון מפורש שהריבית נקובה. על המרות ריבית עוד נרחב בהמשך, אך חשוב שתתקדמו עם המרות פשוטות ביןתיים שהן חלק מרכז מכל שאלת ערך עתידי או ערך נוכחי נפוצה בקורס זה.

**שאלה 21 - חילוץ מספר הפקדות מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - לבית**

קוזייקרו מתכוון להפקיד בתום כל שנה סכום קבוע של 14,609.43 ש"ח, כאשר הריבית השנתית 6%. בחולף מספר מסויים של שנים, הסכום שנצח הרשתכם ב-167,877 ש"ח. כמה הפקדות שנתיות בוצעו לחסכו?

פתרון :

הפעם, הנעלם הוא מספר הפקדות (שזהה במספר השנים). ידוע כי משווהת הפתרון המתאימה תהיה :

$$14,609.43 * FVFA(6\%, t) = 167,877$$

בטור התחלה במצבים כאלו, כשהנעלם הוא בתוקן הסוגרים של  $FVFA$ , נחלץ אותו וזאת על ידי חלוקת שני האגפים ב-14,609.43. כך נקבל :

$$FVFA(6\%, t) = \frac{167,877}{14,609.43} = 11.491$$

כעת, ננסה לאתר בלוחות ההיוון בלוח א-2 את הערך 11.491 עבור ריבית של 6%. נמצא ש :  $t = 9$ . כך :

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%
1		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060
3		3.030	3.060	3.091	3.122	3.153	3.184
4		4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375
5		5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637
6		6.152	6.308	6.463	6.633	6.802	6.975
7		7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394
8		8.286	8.533	8.892	9.214	9.549	9.897
9		9.369	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491
10		10.460	10.856	11.261	11.674	12.094	12.521

ולכן תשובהתנו הסופית היא, שיש לבצע 9 הפקדות שנתיות על מנת להגיע ליעד הצבירה הנתון של קוזייקרו.

**שאלה 22 - ערך עתידי של סדרה עם חילוץ תקופות המתנה - לבית**

בolidro יפקיד 1,000 ש"ח כל תחילת חודש במשך שנתיים, כאשר במהלך שנתיים אלו הריבית החודשית היא 1%. לאחר מכן ימשיך להפקיד שנה נוספת 1,000 ש"ח בסוף כל חודש בריבית חודשית של 4% (ריבית זו תשאר קבועה גם בשנים העוקבות). כמה זמן bolidro יטרך לחייב את הפקדה האחונה, אם יעד הצבירה שלו הוא 93,899 ש"ח?

פתרון :

לשם נוחות, נחשב תחילת הצבירה לתום החודש ה-36, תום השנה השלישי:

$$FV_{36} = 1,000 * FVFA(1\%, 24) * (1 + 1\%) * (1 + 4\%)^{12} + 1,000 * FVFA(4\%, 12)$$

הסבר :

סדרת הפקדות בשנתיים הראשונות היא בתחלת כל חודש. לכן, על הציג, מדובר בהפקדות בזמן 0 עד 23, ולא 1 עד 24. החישוב הסדרתי מוביל בהתאם למועד הפקדה האחונה - זמן 23.Cut, הוואיל והריבית עד זמן 24 ממשיכה להיות 1%, דוחפים את התוצאה זמן 23 בזמן 24 בריבית 1% על ידי מכפלה ב-1 בתוספת 1%. כך ביטאנו את הערך העתידי של סדרת הפקדות של השנתיים הראשונות בזמן 24. Cut, כדאי מאד לדוחוף את הכל בזמן 36, ובהתאם שהריבית העדכנית היא 4%, כופלים ב-1 בתוספת 4% בחזקת 12. Cut, ניבור לסדרה השנייה. היא בשנה השלישי, אבל בתום כל חודש. לכן היא בטוחה הזמנים של 25-36. הערך העתידי של סדרה זו מוביל בזמן 36, ללא צורך בהתאם.

התוצאה המספרית המתקבלת מהחישוב היא :

$$FV_{36} = 58,643$$

cut השאלה היא: כמה חודשים של צבירת ריבית נוספת (בשיעור 4%) צריכים לחלו, על מנת שנגיע לעד הצבירה המוגדר?

המשווה הפעם תהיה :

$$FV = 93,899 = 58,643 * (1 + 4\%)^t$$

נחלק את שני האגפים ב-58,643 ונקבל :

$$\frac{93,899}{58,643} = 1.04^t \rightarrow 1.601 = 1.04^t$$

ואז, או שנציב את ערכי t שנותונם בשאלה (אם היא אמריקאית) או שנפטרו באמצעות חוקי לוגריתמים :

$$\ln 1.601 = \ln 1.04^t \rightarrow \ln 1.601 = t * \ln 1.04 \rightarrow t = \frac{\ln 1.601}{\ln 1.04} \approx 12$$

ולכן, צריך להמתין כ-12 חודשים (כשנה) לאחר הפקדה האחונה כדי ליצר צבירה זו.

## נוסחאות - ערך עתידי - לאחר מפגש 1

### ערך עתידי של סכום יחיד - ריבית קבועה

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

כאשר :

הערך  $FV$  מייצג את הסכום העתידי הנצבר (ערך עתידי, Present Value, PV, הערך הנוכחי).

הערך  $r$  מייצג את שיעור הריבית.

הערך  $t$  מייצג את מספר התקופות.

### ערך עתידי של סכום יחיד - ריבית משתנה

$$FV(\text{Lump Sum}) = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

כאשר :

הערך  $FV$  הוא הערך העתידי המוחשב (הסכום העתידי הכללי, קרן + ריבית).

הערך  $PV$  הוא סכום ההפקדה או ההלוואה "היום".

הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה.

הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבנה כל ריבית תקפה.

### ערך עתידי של סדרה - נוסחה מתמטית

$$FV_{\text{Series}} = pmt * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

כאשר :

הערך  $FV_{\text{Series}}$  הוא הערך העתידי של הסדרה.

הערך  $pmt$  מסמל את ההפקדה / התזרים התקופתי קבוע.

הערך  $r$  מסמל את הריבית **לפרק הזמן בין תשלוםויות**.

הערך  $t$  מסמל את מספר התשלומים בסדרה.

ערך עתידי של סדרה - כתיב מקוצר (את הערך אפשר גם לשלוּף מלוּח א-2 בנספח א לכרך ד)

$$FV_{series} = pmt * FVFA(r, t)$$

כאשר :

הערך  $pmt$  הוא סכום ההפקדה הקבוע.

הערך  $FVFA$  הוא למשה התוצאה של הנוסחה / הלוח שמתאימה לריבית בעסקה (i) ומספר התשלומים (t). בספרים ובחוברת נקרא גם מע"ס (ראשי תיבות של "מקדם ערך עתידי סדרתי"). אנחנו לא אוהבים להגיד מע"ס בקבוצה שלנו אז תמיד נרשום  $FVFA$ . מקווה שזה יהיה בסדר מצדכם.

התאמות ריבית בסיסיות - הרחבה בהמשך :

בשאלה על סדרות, בשנותונה ריבית נקובה שנתיות ללא מידע נוסף, ויש להתאים משנה לחודש :

$$r = \frac{R}{12}$$

כאשר :

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקבוה

הערך  $r$

בשאלות על סדרות, כאשר רוצים לתאם ריבית כללית (שלא כתבו שהיא נקבוה), מחדש לשנה :

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1$$

## מפגש 2 - ערך נוכחי

### נושא חדש – ערך נוכחי (PV)

הסבר מילולי סופר תמציתי:

הנושא הקודם - FV - משקף ומחשיב של צבירת ריבית שמתווספת לקרן הלוואה או השקעה, כך גל הסכום בעתיד (שכן הוא מגלם את הסכום הראשוני בתוספת ריבית).

פעולה הפוכה לחישוב ערך עתידי - חישוב ערך נוכחי PV, האופן שבו אנו מסוגלים לתרגם ערכיהם שיתקבלו בעתיד לשווים היום, בזמן / מידי.

הנוסחאות המתמטיות יוצגו באופן אקסיומתי, ללא הוכחות, ועיקר הדיוון יהיה בפתרון בעיות כלכליות ותרגילים מרובים המציגים את הבעיות השונות והיישומים של נושא מורכב זה.

שאלה 23 - ערך נוכחי של סכום יחיד, ריבית קבועה

סרגיי שוקל לרכוש נכס שצפוי להניב לו בעוד 10 שנים סכום של 10,000 ש"ח. מהו המחיר המירבי שישכים סרגיי לשלם עד הנסך היום, אם הריבית השנתית היא 4%?

פתרון :

אני מ庫ווה שאתם מסכימים איתי כשהאני טוען שהסכום בסך 10,000 ש"ח הוא למעשה ערך עתידי FV. השאלה שואלת - כמה שווה לשלם / להשקיע היום PV.

הערך העתידי נתנו כאן - מתקבל בסכום אחד במועד נתון ספציפי. הערך העתידי הוא סכום יחיד.

תזכורת: חישוב ערך עתידי FV של סכום יחיד בRibbit קבועה - כמו בדוגמה 1:

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

אם אציב את נתוני השאלה מקבל:

$$10,000 = PV * (1 + 4\%)^{10} \rightarrow PV = \frac{10,000}{1.04^{10}} = 6,755.64$$

דרך אחרת למדל (נוסחה) את החישוב שערכנו:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r)^t}$$

כאשר :

הערך PV הוא הערך הנוכחי / השווי היום

הערך FV הוא הערך העתידי (סכום יחיד)

הערך  $r$  הוא הריבית התקופתית

הערך  $t$  הוא מספר תקופות הריבית

אני מעדיף את הגרסה זו של אותה הנוסחה בדיק:

$$PV = FV * (1 + r)^{-t}$$

למה זה מוגניב בرمות קשות? כי מעכשו אתה יודע, שכדי לחשב ערך עתידי - לדוחף סכומים קדימה אתה כופל ב-1 ועוד הריבית בחזקה חיובית, וכך לזכור אחרה ברוורס - חישוב ערך נוכחי - אתה כופל באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית.

נציג את הנוסחה בגרסה שאנו אוהב בנתוני השאלה, שכזכור שאלות מהו הערך הנוכחי של 10,000 ש"ח שנתקבל בעוד 10 שנים, בהנחה שהריבית 4%:

$$PV = FV * (1 + r)^{-t} = 10,000 * (1 + 4\%)^{-10} = 6,755.4$$

שאלה 24 - **ערך נוכחי של סכום ייחיד, ריבית משתנה**

מהו הערך הנוכחי של 500,000 ש"ח שאלכסיי צפוי לקבל בעוד 7 שנים, אם הריבית השנתית בכל אחת מהשנים הראשונות היא 4% ואילו הריבית השנתית בכל שנה לאחר מכן היא 6%?

פתרון:

הנוסחה לחישוב ערך נוכחי של סכום ייחיד כאשר הריבית משתנה היא:

$$PV = FV * (1 + r_1)^{-t_1} * (1 + r_2)^{-t_2}..$$

כאשר:

הערך PV הוא הערך הנוכחי

הערך FV מייצג את הסכום העתידי שצפויים לקבל

הערכים  $r_1$  ו- $r_2$  מייצגים את הריביות השונות בעסקה

הערכים  $t_1$  ו- $t_2$  מייצגים את מספר התקופות שבחן כל ריבית תקופה

$$PV = FV * (1 + r_1)^{-t_1} * (1 + r_2)^{-t_2} = 500,000 * (1 + 4\%)^{-2} * (1 + 6\%)^{-5} = 345,441$$

דרך הצגה חלופית של הפתרון:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * ...} \rightarrow PV = \frac{500,000}{(1 + 4\%)^2 * (1 + 6\%)^5} = 345,441$$



### שאלה 24.1 – ערך נוכחי של סדרה – Let the games begin –

אביישי מעוניין להשקיע במפעל ענקו לחיימים נקניק. המפעל כרגע בקמה; ואשר על כן ייבן לו לראשונה בעוד 8 שנים סכום של 50,000. בכל שנה עוקבת, בשנים 15-9, יקבל אביishi מפעילות חיים נקניק סכום זהה בתום כל שנה.

בהתה שהריבית האלטרנטטיבית של אביishi היא 5% לשנה, מהו הסכום המירבי שישככים אביishi לשלם היום بعد זכויותיו במפעל הנקי?

פתרון :

תחילה, נשים לבנו לכך שאלה מהו הסכום המירבי שאבישי יהיה מוכן לשלם היום بعد הנכס. עצם המינוח "כמה זה שווה היום" / "כמה מוכן לשלם היום" מוביל אותנו לעולמות הערך הנוכחי.

כמובן שמדובר בערך נוכחי של סדרה – שŁemaשא כוללת תשלוםמים קבועים (בריבית קבועה ותדירות קבועה) החל מזמן 8 עד זמן 15.

כשרוצים לחשב ערך נוכחי של סדרה קבועה, הכל הRELONTE הוא מענ"ס (ובאנגלית – PVFA). Factor (Factor). זהה נוסחה שams כופלים אותה ב- PVFA היא מבטא את הערך הנוכחי של כל התשלומים כולם לנקודת הזמן שהוא "אתה אחרה" ביחס למועד תחילת הסדרה.

הנוסחה :

$$PV_{Series} = PMT * PVFA(r, t)$$

דרך הצגה שאני אוהב (זהה לגמרי, פשוט ביטוי שיותר כיף לומר) :

$$PV_{Series} = PMT * PVFA(r, t)$$

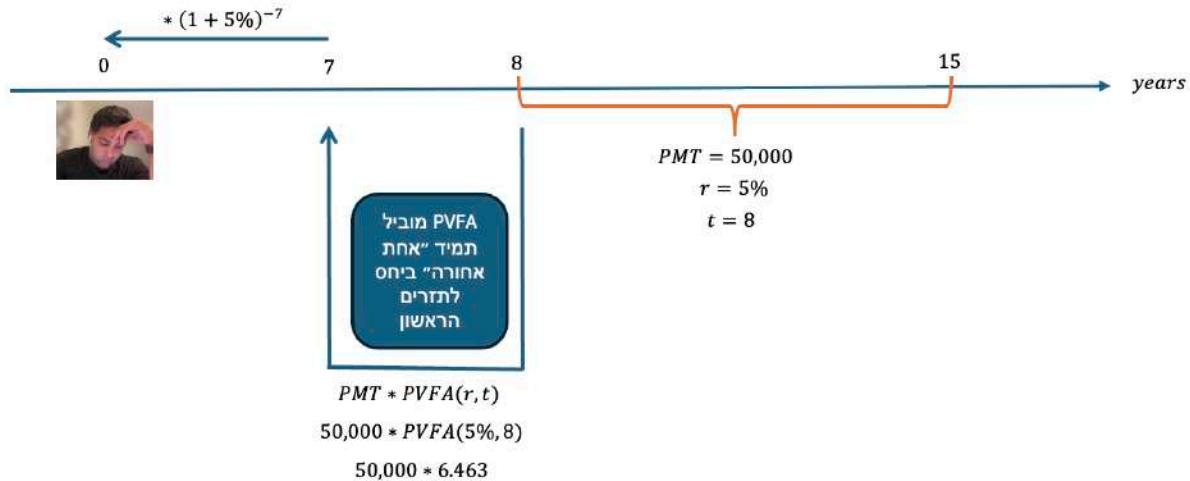
את המענ"ס (או ה-PVFA) אפשר לשולף מלוח שנקרא לוח א-4 לנספח א בכרך ד (עמ' 45 ואילך) או לחילופין, לחסבו באמצעות הנוסחה המתמטית הבאה :

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כאשר :

תשלום תקופתי קבוע	$PMT$
הRibbit לפרק הזמן בין תשלוםמים	$r$
מספר תזרימי המזומנים בסדרה	$t$

איך זה עובד פה?



יש כאן סדרת תשלומים שמתחלת בזמן 8 וכוללת 8 תשלומים (עד וככלז זמן 15, שימו לב – זו סדרה, אני סופר מספר תשלומים ולא מספר שנים). הואיל והסדרה קבועה (סכום קבוע, ריבית קבועה, תדיירות קבועה) חישבנו תחיליה את ערכה הנוכחי באמצעות נוסחת הסדרה, מה שמתבטה בביתי:

$$50,000 * PVFA(5\%, 8) \rightarrow 50,000 * 6.463$$

הבעיה:

ערך הנוכחי של סדרה לא מוביל אוטומטית לזמן 0, אלא – הוא מוביל תמיד לנקודת הזמן שהוא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה.

בשפה פשוטה: אם התשלומים כל שנה, והראשון שבאים בתום שנה 8, הביטוי הבסיסי של הערך הנוכחי הסדרתי מבהיר את הערך הנוכחי לזמן 7.

זה לא מספיק טוב, ונדרשת התאמת נוספת, מ-7 ל-0.

את ההתאמת נוספת נבע בזמנים של ערך הנוכחי של סכום חד פעמי: נכפול את הביטוי כולל ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית שמקפת את מספר תקופות ההתאמת הנדרשות מזמן 7 ל-0 (חזקת 7-), ולכן, ביטוי הפתרון כולל:

$$50,000 * 6.463 * (1 + 5\%)^{-7} = 229,656.67$$

זו התשובה – זהו השווי של הנכס שגם משקף את הסכום המירבי שאיהו מוכן להשקיע.

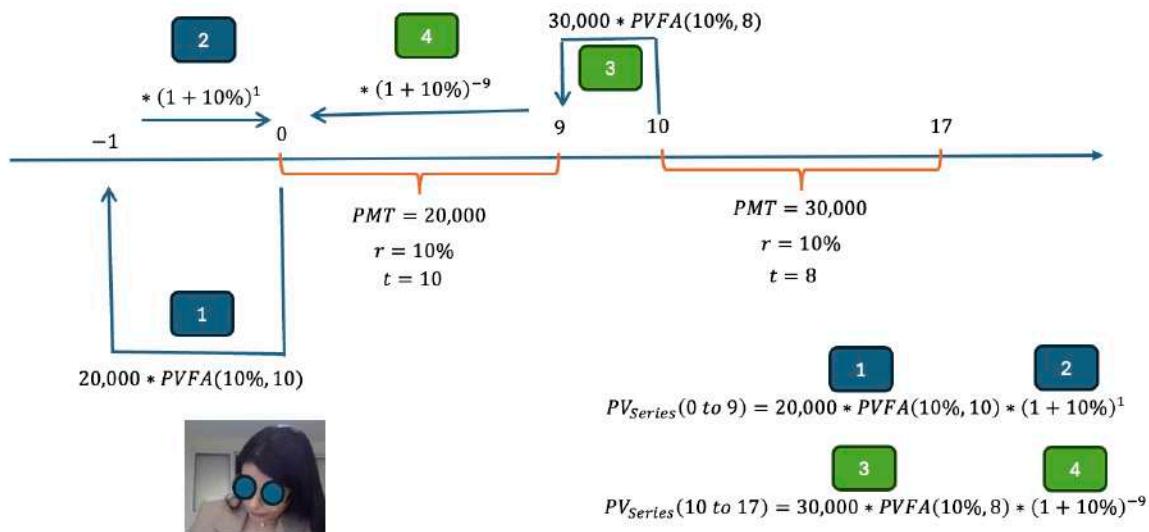
## שאלה 24.2 – ערך הנוכחי של מספר סדרות ותזרימי תחילת תקופה

דור התיעצה עם אבישי וכעת גם היא שוקלת לרכוש מפעל ענק לחימום נקי. המפעל צפוי להניב לה בתחילת כל אחת מ-10 השנים הקרובות סכום שנתי של 20,000 ש"ח ובתחילת כל אחת מ-8 השנים לאחר מכן סכום שנתי של 30,000 ש"ח.

בנחה שהריבית השנתית היא 10%, מהו הסכום המירבי שתsecsים דור תשלום بعد המפעל היום?

פתרון :

ראשית, שואלים על הסכום שדור תsecsים תשלום היום – קלומר שואלים על ערך הנוכחי. הערך הנוכחי אמר לבטא את השווי של שתי סדרות; משום שערכי התקבולים אינם זהים, ולמעשה יוצרים 2 סדרות נפרדות, האחת של 20,000 והאחרת של 30,000. ראשית, יש מקום את הסדרות על הציר. הואיל והתזרימים הם בתחילת תקופה, הסדרות הן מ-0 עד 9 ולאחר מכן מ-10 עד 17.



כעת אפשר לגשת לחישוב. החישוב יתייחס לערך הנוכחי של כל סדרה בנפרד, כאשר רק בתום התהליך לחבר את הערכיהם הנוכחיים של הסדרות יחד, כדי להגיע לתוצאה הסופית. הסדרה שכוללת תזרימי תחילת תקופה מ-0 עד 9 – כאשר נכפול את ערכיה ב-PVFA המתאים, קופצת בהגדלה "אחת אחרת" ביחס לתחילת הסדרה, קלומר לזמן 1- (אחת אחרת לפני זמן 0). כדי לתקן עיוות זה, علينا לכפול ב-1 ועוד הריבית פעם אחת (כדי לתקן מ-1- ל-0 את ערכיה של סדרה זו). המכפלה וההתאמה מתבצעות בשלבים 1, 2 באIOR.

סדרה שכוללת תזרימי מ-10 עד 17, כאשר נכפול את ערכיה ב-PVFA המתאים קופצת בהגדלה "אחת אחרת" ביחס לתחילת הסדרה, קלומר לזמן 9 (אחת אחרת לפני זמן 10). כדי לתקן את התוצאה ולתאים אותה בזמן 9 לזמן 0 אנו נמשיך ונכפול ב-1 ועוד הריבית, הפעם בחזקה שלילית (התאמה אחרת) של 9. המכפלה וההתאמה מתבצעות בשלבים 3 ו-4 באIOR.

התוצאה הסופית תתקבל על ידי סכימת הערכיהם בנוסחאות אלו – בעמוד הבא :

$$PV_{Total} = 20,000 * PVFA(10\%, 10) * (1 + 10\%)^1 + 30,000 * PVFA(10\%, 8) * (1 + 10\%)^{-9}$$

$$PV_{Total} = 20,000 * 6.145 * (1 + 10\%)^1 + 30,000 * 5.335 * (1 + 10\%)^{-9}$$

$$PV_{Total} = 203,066.82$$

מסקנה: הערך הנוכחי שמשקף את הסכום המירבי שתסכים דור לשולם היום بعد הנכס הוא כ- 203,066.82 ש"ח.

**שאלה 25 - ערך נוכחי של סדרה, מקרה פשוט (תום תקופה)**  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה הכוללת התקבולים בתום כל חודש במשך שנתיים בסכום של 2,000 ש"ח, אם הריבית החודשית היא 2%?

**פתרון:**

כasher למדנו ערך עתידי של סדרה (מפגש 1) אמרנו: אם אני מזוהה סדרה (תקבולים / תשלוםים כל חודש, כל שנה, כל רביעון...) - אז, אם הסדרה היא מסווג סר"ת (סכום, ריבית, תזרות) קבוע - אמרנו שקיים נוסחה שיוודעת לבטא "בבetta אחת" את הערך העתידי הכולל של סדרה זו. והוא נכוון לנקודת הזמן של ההפקדה האחידונה.

כעת, בובאנו לחשב ערך נוכחי של סדרה  $PV_{SERIES}$ , נפעיל כדלקמן:

- נזזה את הסר"ת הקבוע: כאן - מתקיים: סכום קבוע (2,000 לחודש), ריבית קבועה (2% לחודש),  
 תזרות קבועה (כל חודש).
- נגידר את הפרמטרים של הסדרה:
  - סכום תשלום תקופתי קבוע =  $PMT$
  - מספר התשלומים בסדרה =  $t$
  - ריבית לתקופת תשלום =  $r$
- נזכיר:  $PV$  של סדרה מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשונים בסדרה (עקרון "אחדת אחוריה").

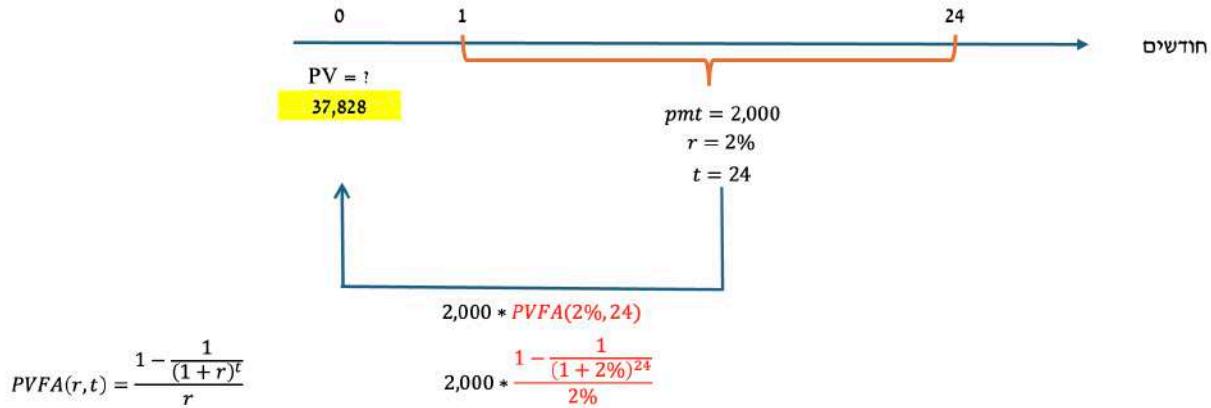
כasher אני מזוהה צריך לחשב ערך נוכחי של סדרה, הנוסחה המושמת היא:

$$PV_{Series} = pmt * PVFA(r, t) = pmt * \frac{1 - \frac{1}{(1 + r)^t}}{r}$$

כasher:

הערך  $PV_{Series}$  מייצג את הערך הנוכחי המכراضי של הסדרה כולה  
 הערך  $t$  מייצג את התשלומים / התקובל התקופתי בסדרה  
 הערך  $r$  מייצג את הריבית לתקופת תשלום  
 הערך  $pmt$  מייצג את מספר התשלומים

הדגמה על הציר :



פתרון מתמטי :

$$PV_{Series} = 2,000 * \frac{1 - \frac{1}{(1 + 2\%)^{24}}}{2\%} = 37,828$$

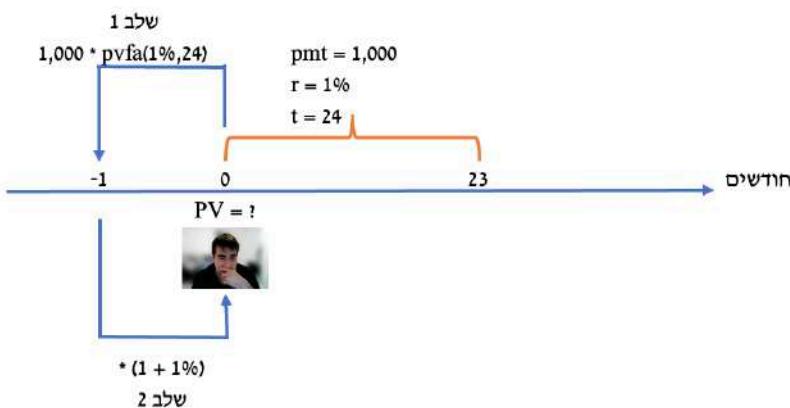
ומה לגבי חישוב באמצעות הלוח - קלומר :  $PV_{Series} = pmt * PVFA(r, t)$  ? הסימנו  $PVFA(r, t)$  נקרא בלשון הספר מענ"ס : מקדם ערך נוכחי סדרתי. ניתן למצוא את ערכו בנספח א' לכרך ד' של ייחידות הלימוד, בלוח שמספרו א-4. הלוח מופיע החל מעמ' 45 בנספח, וערך במקורה זה 18.914 נמצא בפינה הימנית התחתונה של צילום המסך להלן.

$$PV_{Series} = 2,000 * PVFA(r = 2\%, t = 24) = 2,000 * 18.914 = 37,828$$

**שאלה 26 - ערך נוכחי של סדרה, מקרה פשוט (תחילת תקופת)**

מהו הערך הנוכחי של סדרה הקיימת תקבולית בתחלת כל חודש במשך 24 חודשים בסכום של 1,000 ש"ח, אם הריבית החודשית היא 1%?

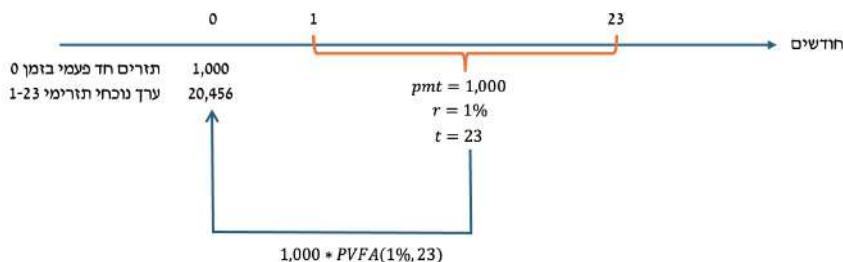
פתרונות :



$$PV_{Series} = 1,000 * pvfa(1\%, 24) * (1 + 1\%)^1 = 1,000 * 21.243 * 1.01 = 21,455.43$$

מה קרה פה? התחנו מכפול את התשלום התקופתי 1,000 ב- $pvfa$  הרלוונטי. אלא שבמקרה זה, הסדרה החלה בזמן 0. לכן העיקרון המחייב שלפיו חישוב  $pvfa$  תמיד מניב את התוצאה لنקודת הזמן שהוא "אתה אחורה" ביחס לתחילת הסדרה (כאן: אתה אחורה ביחס בזמן 0), קיבלנו בהתאם שהتوزאה עדכנית בזמן -1. לא רלוונטי! לכן علينا לבצע תיקון ש"ידחף" את התוצאה (התאמת) קדימה, דהיינו קדימה תמיד מבצעים ע"י מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה, כאן חזקת 1, דוחפים חדש קדימה.

דרך נוספת לחישוב ערך נוכחי של סדרה שמופיע איברה הראשון בזמן 0 הוא לפצל אותה: התזרים של זמן 0 בנפרד כמו שהוא, בתוספת הערך הנוכחי של הסדרה מזמן 1 ואילך :

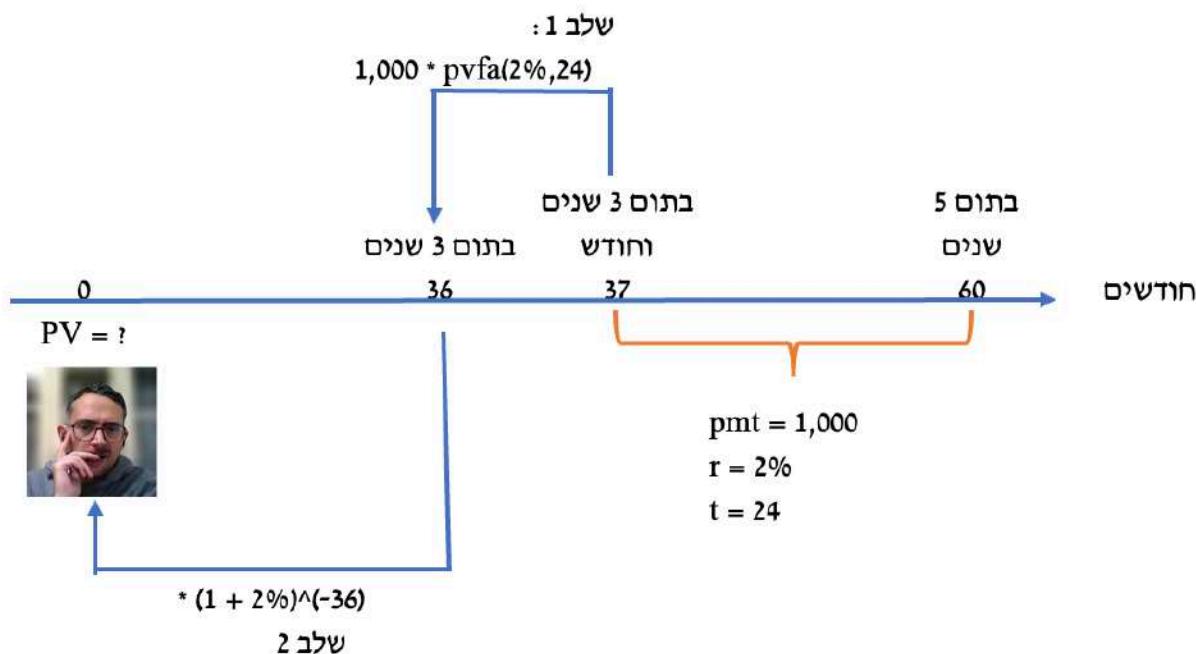


$$Total PV = 1,000 + 20,456 = 21,456$$

שיטה זו תהיה רלוונטית בעיקר במקרים שבהם נדרש לחלץ ריבית. נדגים בהמשך.

שאלה 27 - ערך נוכחי של סדרה דחיפה, עם התאמות זמן  
מהו הערך הנוכחי של סדרה הרכולת התקבולים בסך 1,000 ש"ח בתום כל חודש במשך שנתיים, כאשר התקובל  
הראשון הוא בערך 3 שנים וחודש, אם הריבית החודשית היא 2%?

### פתרונות:



$$PV = 1,000 * pva(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{-36} = 1,000 * 18.914 * 1.02^{-36} = 9,272.08$$

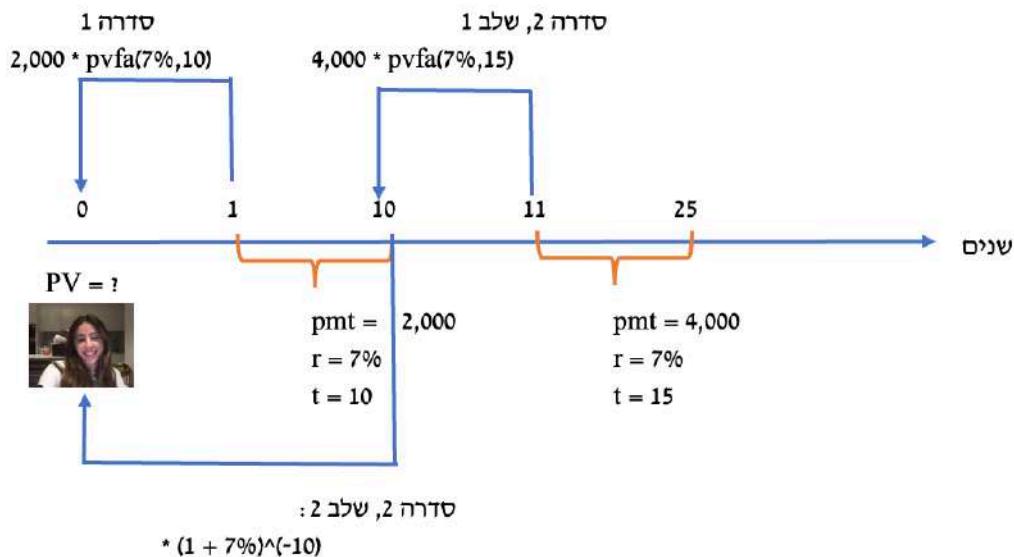
## הסבר:

תחילה כפלנו את התזוריים התקופתיים 1,000 ב-  $pvfa$  הרלונטי. כזכור, חישוב  $pvfa$  מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא תקופת תשלום אחת לפני התזוריים הראשוני בסדרה. כאן, התזוריים הראשונים בתום החודש ה-37, והתדירות היא חודשית. לכן, ה-  $pvfa$  הקפיז "אחד אחריה" ל-36, ובהתאם, יהיה עליינו לבצע התאמה נוספת, מ-36 ל-0. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית (כי זו התאמה לאחר) של 36

שאלה 28 - ערך נוכחי של מספר סדרות, עם התאמות זמן

מהו הערך הנוכחי של סדרה הכוללת 10 תשלומים שנתיים בסוף כל שנה בסך של 2,000 ש"ח לתשלום, ולאחר מכן 15 תשלומים שנתיים בסוף כל שנה בסך 4,000 ש"ח לתשלום? הניחו שהריבית השנתית קבועה בשיעור 7%.

פתרון :



$$PV = 2,000 * pva(7\%, 10) + 4,000 * pva(7\%, 15) * (1 + 7\%)^{-10}$$

ובהצבה נקבל :

$$PV = 2,000 * 7.024 + 4,000 * 9.108 * (1 + 7\%)^{-10} = 32,568$$

הסבר :

הסדרה הראשונה החלה בזמן 0. לכן, כאשר כפלנו אותה ב -  $pva$  הרלונטי, ולפיכך הקפכנו את כל ערכיה, הגיענו בדיקות לזמן 0, וזה מציין - אין צורך בהתאמות עבור הסדרה ה-1. לעומת זאת, הסדרה השנייה החלה בזמן 11. לכן, כאשר כפלנו אותה ב -  $pva$  הרלונטי, ולפיכך הקפכנו את כל ערכיה, הגיענו לזמן 10 (שנה אחרת ביחס לזמן 11). כדי לתרגם את התוצאה מזמן 10 לזמן 0 (כי אני רוצה ערך נוכחי לזמן 0), אכפול את התוצאה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית של 10.

### שאלה 28.1 – ערך נוכחי של סדרה אינסופית, עם התאמות

גרלופי שוקلت לרכוש מפעל לייצור דמויות מלאכותיות. המפעל צפוי להניב לה סכום חצי שנתי של 30,000 ש"ח נטו, בתום כל חצי שנה, לנוכח, כאשר התשלומים הראשונים יתקבלו בעוד 10 שנים. בהנחה שהריבית החצי שנתית היא 7% מהו המחיר המרבי שתascaים גרלופי לשלם بعد מפעל הדמויות?

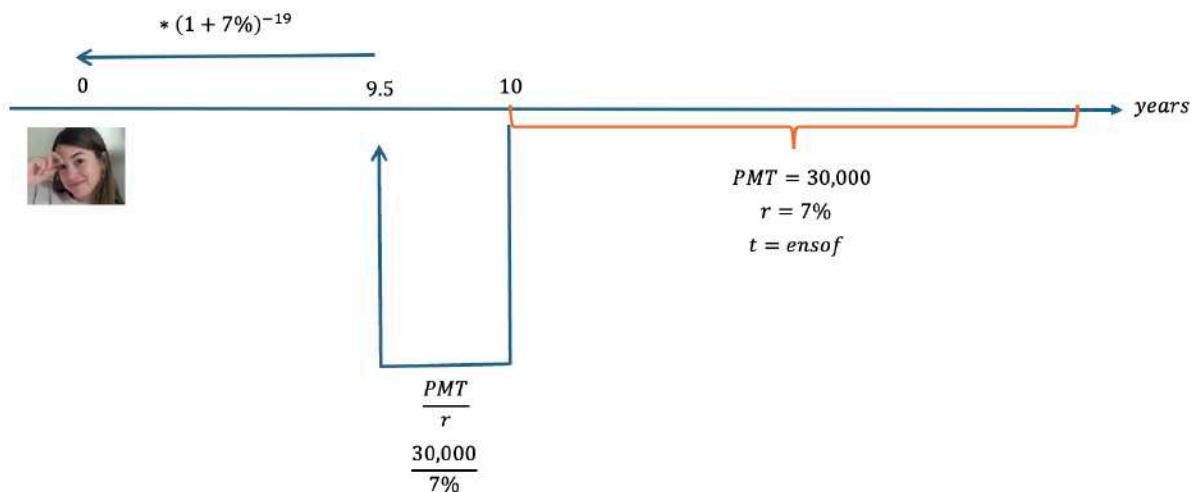
פתרון :

כמובן שורוצים לחשב כאן ערך נוכחי. אלא, שמדובר בערך נוכחי של סדרה אינסופית, מושג שלא נתקלנו בו בצורה ישירה עד לנוקודה הזו. למרבה השמחה, ערך נוכחי של סדרה אינסופית קבועה ניתן לחישוב על בסיס הפרופורציה הפשטית שבין התשלומים התקופתיים לשיעור הריבית התקופתית.

דא עתה שכמו כל נוסחת ערך נוכחי סדרתי מסדרה, גם הפעם נקבעו לנו בסוג של אינוס תקופת תשלום אחד אחרונה ביחס למועד התזרים הראשונים הראשונים ; ובהינתן שהתזרים הראשונים בעוד 10 שנים ; ותדירות התשלומים חצי שנה, נקבעו לנו לא יכולת מחאה זמן 10 לזמן 9.5 (חצי שנה אחריה, תקופת תשלום אחד אחרונה).

נשאלת השאלה. כיצד נמצא דרך לתקן מ-9.5 ל-0? התשובה : התאמאה שכמו תמיד תבוצע על ידי מכפלה ב- 1 ועוד הריבית בחזקת מתאימה.

אלא ש גם כאן דאגו לדפק אותנו. ציינו שהריבית היא חצי שנתית. פרק הזמן להתקאה לאחר הוא **9.5 שנים** ולא **9.5 חצי שנים**. כאשר אני מבצע התקאה, עלי לדאג שמעיריך החזקה ישקף את מספר תקופות הריבית להתקאה. וכך, אם הריבית חצי שנתית, והתקאה היא 9.5 שנים לאחר, עלי לתקן את תקופת התקאה למועדים של חצי שנה. אם עושים זאת אגלה, שב-9.5 שנים יש **19 חצי שנים**, וזה יהיה מעיריך החזקה להתקאה.



$$PV = \frac{30,000}{7\%} * (1 + 7\%)^{-19}$$

התשובה הסופית :

$$PV = \frac{30,000}{7\%} * (1 + 7\%)^{-19} \approx 118,504$$

**שאלה 28.2 – ערך נוכחי, סדרה אינסופית, תקופות מוזרות וההתאמות ריבית**

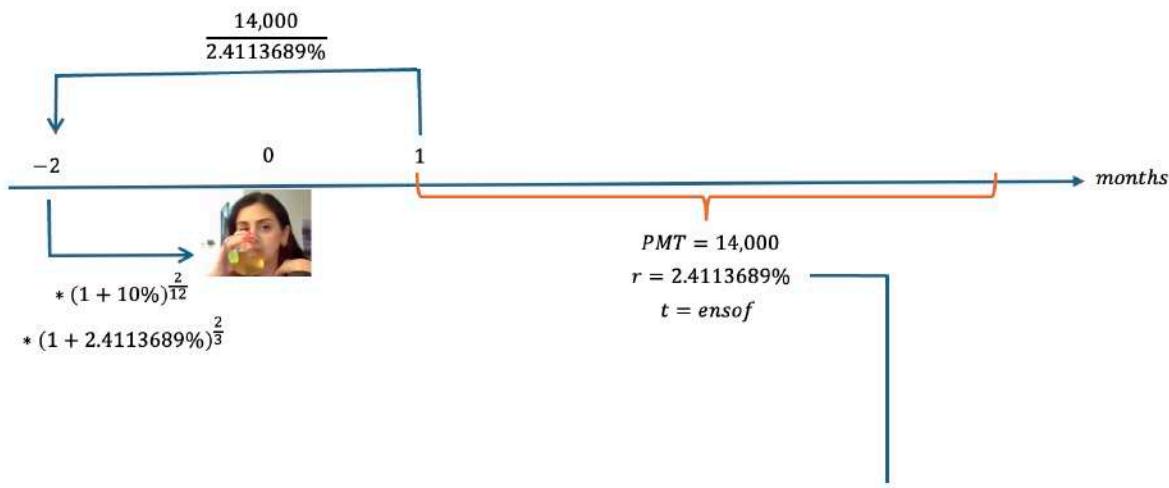
אבייטל שוקלת להשקיע בנכס שצפוי להניב לה כל 3 חודשים סכום של 14,000 ש"ח. התקובל הראשון יתקבל בעוד חודש. הריבית השנתית היא 10%. תקופת התקובלים – לנוכח מהו המחיר המרבי שתsecsים אבייטל לשלם היום עד הנכס?

פתרון :

יש שתי סוגיות יסוד בשאלה זו.

האחת, חישוב ערך נוכחי סדרתי מכל סוג (לרבבות ערך נוכחי של סדרה אינסופית) דורש הצגה של ריבית שתקופתיה זהה לפך הזמן בין תשלומים.

כאן : הריבית הנתונה שנתית. יש לתאם אותה לתקופת תשלום – 3 חודשים (רבעון). כבירות מחדל, את ההתאמות הריבית יש לבצע באמצעות מערך חזקה מתאים (הנחת ריבית דרייבית) ראו להלן. הסוגיה הנוספת : לאחר שיישמו את הנוסחה, וקפצנו 3 חודשים לפני התשלום הראשון – לזמן 2 – בחודשים, את ההתאמה קדימה לזמן 0 אפשר לבצע באיזו ריבית שנרצה ; מדוע? כי בשלב ההתאמה כבר לא עוסקים בסדרה. כל עוד מערך חזקה יתאים לריבית שモוגנת בשלב ההתאמה, נסגור את זהיפה. ספציפית כאן, בשלב ההתאמה אני בחרתי לכפול ב – 1 ועוד ריבית שנתית בחזקת 2/12, מערך שmbטא את מספר תקופות הריבית השנתית בחודשיים.



בчисובי סדרות ה-*t* המשרת את החישוב  
מייצג את הריבית לפרק הזמן בין תשלומים.  
כבירות מחדל ההתאמות הריבית נשענת  
על העקרון של ריבית דרייבית ומערך חזקה  
מתאים :

$$r_{3months} = (1 + r_{annual})^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$r_{3months} = (1 + 10\%)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2.4113689\%$$

$$PV = \frac{14,000}{2.4113689\%} * (1 + 10\%)^{\frac{2}{12}} \approx 589,879$$

שאלה 29 - ערך הנוכחי של סדרה אינסופית, המקרה פשוט (תום תקופה)  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה אינסופית שתניב לכמ 6,000 ש"ח בתום כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית השנתית היא 5%?

פתרון :

רעיון :

בכלל, ערך הנוכחי של סדרה רגילה (סופית, ערך מספרי של תזרימיים) מתקבל באמצעות הנוסחה :

$$PV_{SERIES} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כאשר :

סימן	משמעות
$PV_{SERIES}$	הערך הנוכחי של הסדרה כולה
$r$	הריבית לפרק הזמן בין תשלומים בסדרה (כאן – תדיות התזרימיים שנתית, הריבית שנתית)
$t$	מספר תזרימי המזומנים (הקבועים) בסדרה

כאשר עסקים בסדרה אינסופית :  $t \rightarrow \infty$

נקבל :

$$PV_{SERIES\infty} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^\infty}}{r} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{r} = PMT * \frac{1 - 0}{r} = \textcolor{red}{PMT * \frac{1}{r}}$$

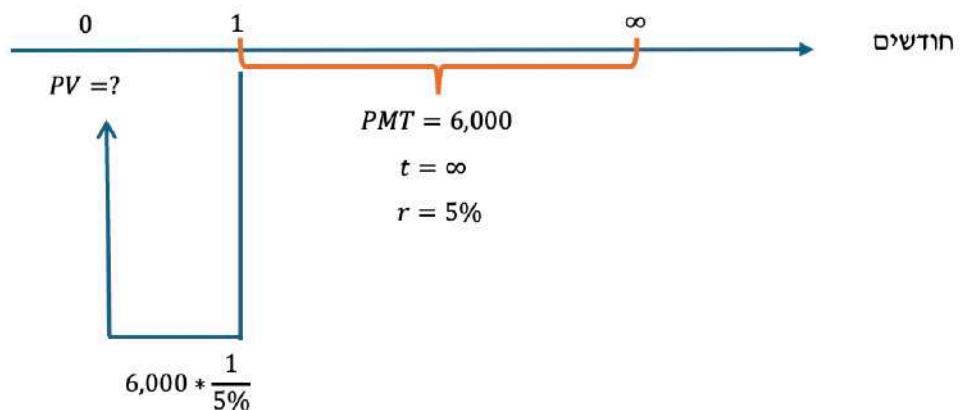
הנוסחה לחישוב ערך הנוכחי של סדרה אינסופית היא מקרה פרטי של ערך הנוכחי של סדרה רגילה :

$$PV_{SERIES\infty} = PMT * \frac{1}{r}$$

ואם כך : ערך הנוכחי של סדרה אינסופית הוא מקרה פרטי של ערך הנוכחי של סדרה במובן הכללי ; בהתאם – הוא סובל מאותן מגבלות (נדרש סר"ת קבוע – סכום, ריבית, תדיות קבועים, וגם – החישוב מוביל לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחד ממועד התזרימיים הראשון בסדרה).

תזכורת – נסח השאלה – מהו הערך הנוכחי של סדרה אינסופית שתניב לכמ 6,000 ש"ח בתום כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית השנתית היא 5%?

נייצג את התזרימיים על ציר הזמן (הציר בשנים ולא בחודשים) :



$$PV_{Ensofit} = 6,000 * \frac{1}{5\%} = 120,000$$

זכרו: ערך נוכחי של סדרה, גם אם היא אינסופית, לוקח אותך תמיד את Achot Achotra ביחס לתזרים הראשונים. במקרה זה, התזרים הראשונים הוא בעוד שנה (כי זה בתום כל שנה). לכן, הקפיצה "את Achot Achotra" הובילה בדיקת זמן 0, ואין צורך בהתקופה. במקרה מורכב יותר, עם התאמה, ראו שאלה 30.

שאלה 30 - ערך הנוכחי של סדרה אינטופית, המקרה פשוט (תחילת תקופה)  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה אינטופית שתניב לכמ 8,000 ש"ח **בתחילת** כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית  
 השנתית היא 7%?

פתרון :

$$PV = 8,000 * \frac{1}{7\%} * (1 + 7\%)^1 = 122,286$$

שלב 1 :

$$8,000 * 1/7\%$$



$$pmt = 8,000$$

$$r = 7\%$$

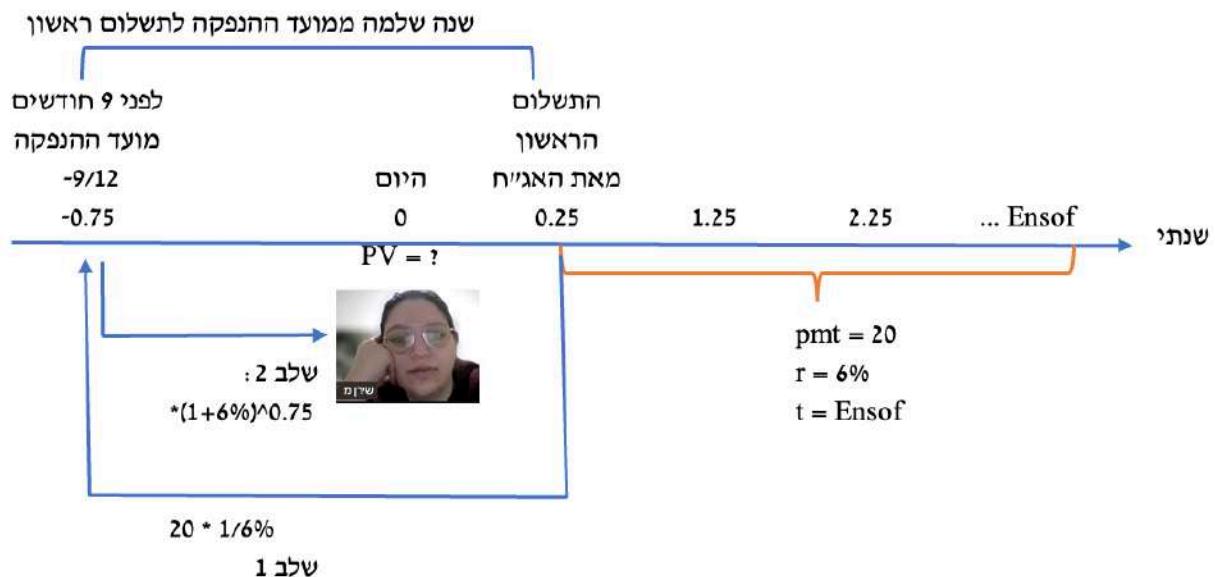
$$t = \text{Ensof}$$

הסבר :

הויל והסדרה כללת איבר ראשון בזמן 0, חישוב ערך הנוכחי הסדרתי שמקפיד "תקופת תשלום אחת אחרת" הובילנו בזמן -1. נדרש לבצע התאמה שנה קדימה מ-1- ל-0 וזאת על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה חיובית של 1.

שאלה 31 - ערך נוכחי של סדרה אינטופית - שימוש בתמוך אג"ח קונסול והתאמת זמן  
 אג"ח קונסול (شمשלמת תלולים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משמשת ריבית בסכום של 20 ש"ח בתום כל שנה (ביחס למועד הנפקתה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחיר האג"ח היום?

פתרון :



$$PV = 20 * \frac{1}{6\%} * (1 + 6\%)^{0.75} = 348.22$$

הסבר :



תחליה, יש לשים לב שהוואיל והאג"ח הונפקה לפני 9 חודשים, הרי שעל הציר, נקודת יצירת הנכס היא 9/12 בסימן שלילי. זה חשוב, הויל והאג"ח משמשת ריבית כל שנה ביחס להנפקתה. לכן, אם היא הונפקה לפני 9 חודשים, תשלום הריבית הקרוב הוא בעוד 3 חודשים. זה חשוב מאד, כי עליי להגדיר את מועד התשלומים הקרוב בצורה נcona.

כעת, אני פועל לחשב ערך נוכחי של סדרה אינטופית, זאת, ע"י מכפלת התשלומים התקופתי 20 ב-1 חלקי הריבית. אלא שכמו כל סדרה, חישוב זה תמיד מופיע "תקופת תשלום אחת אחרה" ביחס לתזירים הראשונים. אם התזירים הראשונים הוא בעוד 3 חודשים, והקופיצה אחרת היא שנה שלמה, התוצאה של המכפלה הזו היא לזמן מינוס 9/12. כדי לתקן קדימה 9 חודשים, לזמן 0 - נכפול ב-1 ועוד הריבית בחזקת 9/12 ( $9/12 = 0.75$ ).

שאלה 32 - ערך הנוכחי של סדרה אינטופית - שימוש בתמchor אג"ח קונסול והתאמת זמן וריבית מורכבת  
אג"ח קונסול (שלםת תשולמים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משולם ריבית בסכום של  
20 ש"ח בתום כל 4 שנים (ביחס למועד הנפקה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחיר  
האג"ח היום?

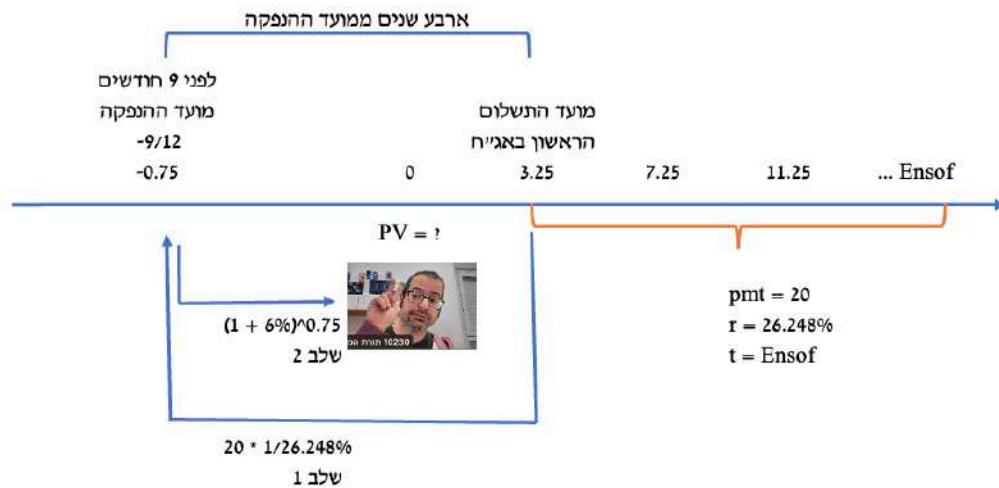
פתרון:  
אנו הגדכנו שביחסobi סדרה - הריבית (r) חייבת להתאים לפרק הזמן בין תשולמים. במקרה זה, פרק הזמן בין  
תשולמים הוא 4 שנים. לרובה הצער - הריבית הנenna היא שנתית בלבד. לכן, חובה עליי לתקן ולהתאים את  
שיעור הריבית ל-4 שנים.  
איך עושים זאת? כבירות מחדל, מנגנון התאמת הריבית בקורס מוטביס על ההנחה שקיימת ריבית דרייבית. לכן,  
גם התאמות הריבית תבוצע עם חזקה רלוונטיות:

$$r_{4\text{years}} = (1 + r_{\text{year}})^4 - 1 = (1 + 6\%)^4 - 1 \approx 26.248\%$$

מדוע חישוב מעצבן זה נדרש בשאלה זו ולא בקודמות? עם "1-" שאינו ברור? התשובה לכך היא שזו ה שאלה  
הראשונה היום שבה תקופת הריבית שהייתה נתונה (שנתית) שונה מפרק הזמן בין תשולמים (4 שנים). לכן, זו  
הפעם הראשונה שנאלצנו לבצע בה התאמת ריבית, וזה הנוסחה הרלוונטית עבורה.

чисובי ריבית אפקטיבית יידונו בהרחבה מרובה במפגש 4. לכן זה בסדר ללמידה כרגע את הנושא הזה טכנית.

אג"ח קונסול (שלםת תשולמים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משולם ריבית בסכום של  
20 ש"ח בתום כל 4 שנים (ביחס למועד הנפקה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחיר  
האג"ח היום?



$$PV = 20 * \frac{1}{26.248\%} * (1 + 6\%)^{0.75} \approx 78.903$$

הסבר שלבים :

תבילה השתמשנו בנוסחת ערך נוכחי של סדרה אינסופית. התוצאה הקפיצה אותנו "תקופת תשלום אחת אחורה" ביחס למועד התזרים הראשוני. עיתוי התזרים הראשוני הוא ב-25, ותקופת תשלום היא 4 שנים. לכן התוצאה תקפה לזמן 0.75 - 4 שנים לפני (3.25). יש לתקן את התוצאה, לפיכך, 0.75 שנים קדימה. לשם כך, כפלנו ב-1 ועוד ריבית שנתית של 6% בחזקת 0.75 (בסיון חיובי).

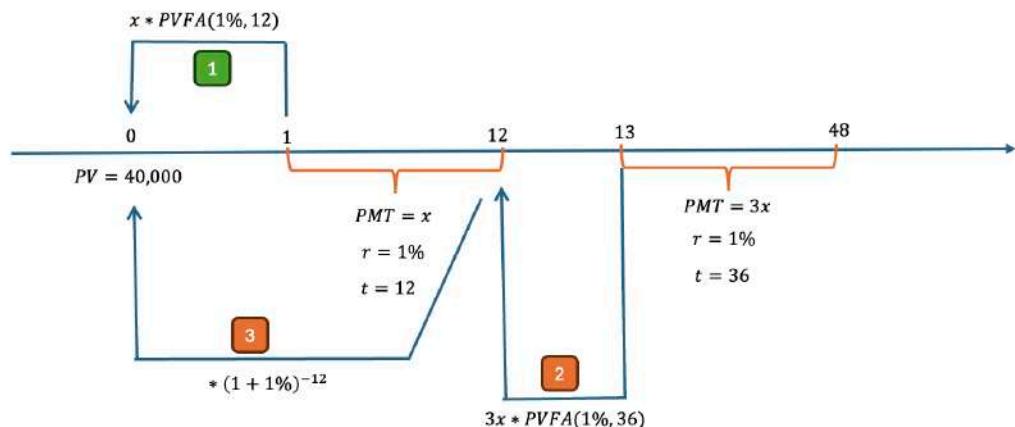
### שאלה 32.1 – יישומים של ערך נוכחי – חילוץ סכום תשלום תקופתי בהלוואה

אבייחי נטל הלוואה בסכום של 40,000 ש"ח לתקופה של 4 שנים. הלוואה מסולקת בתשלומים חודשיים קבועים במשך שנה, ובכל אחד מהחודשים העוקבים, סכום התשלום יהיה קבוע אך גבוה פי 3 מהסכום החודשי בשנה הראשונה.

בנחתה ששיעור הריבית החודשית הוא 1%, מהו סכום ההחזר החודשי במהלך 3 השנים האחרונות?

פתרון :

אכן נשאלת השאלה – במה השאלת זו עוסקת בכלל? ובאמת, כשדינם ביישומים כלכליים, במקרים רבים תהליך הזיהוי של המקרה דורש חשיפה (קשה לדעת בלבד מראש). לשם כך נשתמש בעת במשפט שעיליכם לדעת: **סכום הלוואה הוא תמיד ולוולות הערך הנוכחי של החזירה**. ממשפט זה נובע שאם נצליח לבטא את הערך הנוכחי של התשלומים העתידיים באמצעות נעלם, נוכל להשוו אותו לסכום הלוואה, וכך לחוץ נעלם זה. הسلط הגדול נוצר הואיל ויש כאן שתי סדרות החזרים, שאחת מהן גם סובלת מה צורך בהתאם, בהתאם לכללים הרגילים של ערך נוכחי סדרתי.



$$40,000 = x * PVFA(1\%, 12) + 3x * PVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^{-12}$$

תוצאת משוואת הפתרון המבוטאת בחלק התיכון של התרשימים בקירוב :

$$x = 437.24$$

מסקנה : בתום כל חודש במהלך השנה הראשונה, סכום ההחזר החודשי הוא 437.24 ש"ח. יחד עם זאת, لأن שאלנו נקודתית על התשלומים ב-3 השנים העוקבות, שבחן התשלום גבוה פי 3 ולכן התשובה הסופית לשאלה היא **1,311.72** ש"ח.

שאלה 33 - **יישומים של ערך נוכחי: חילוץ סכום החזר תקופתי בהלוואה, המקרה פשוט**  
נטלتم היום הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-10 תשלומים שנתיים שווים (כברירת מחדל - התשלומים הם בתום כל שנה). מהו סכום התשלום הקבוע (ה-PMT) אם הריבית השנתית 7%?

פתרון :

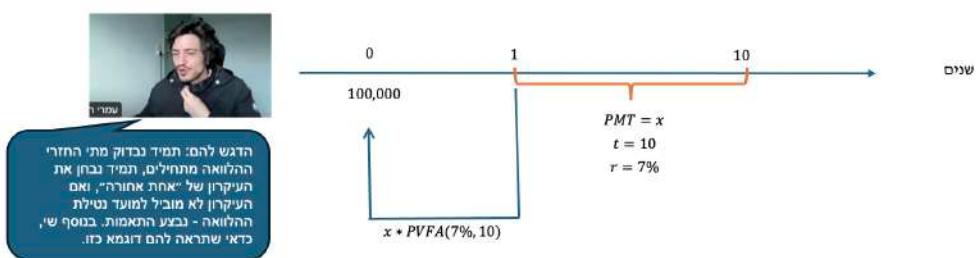
משפט: סכום הלוואה שווה תמי"ץ לערך הנוכחי (PV) של החזרה.

לכן, אם נתון לי סכום הלוואה, ואוכל לבטא את החזרה כסדרה (סוי"ת), אוכל לבנות משווה שמתווכת אחלץ את הנדרש.

$$Loan = PV(PMTs)$$

הערך  $Loan$  הוא סכום הלוואה.

הסימן  $PV(PMTs)$  הוא הביטוי המתמטי המשקף את הערך הנוכחי של החזרים.



בהינתן המשווה של סכום הלוואה = ערך הנוכחי החזרים, והעובדת שבמקרה זה לא נדרשות התאמות :

$$Loan = PV(PMTs)$$

$$100,000 = pmt * pvfa(7\%, 10)$$

$$100,000 = pmt * 7.024 \rightarrow pmt = 14,236.9$$

מסקנה : סכום התשלום התקופתי הקבוע הוא 14,236.9 ש"ח.

הסבר : סכום הלוואה - 100,000. זהו הערך הנוכחי של התשלומים בגין הלוואה, והוא נתון. סכום התשלום התקופתי, ה -  $pmt$ , איננו נתון, ולכן הוצב כנעלם.

בשונה מהשאלות הקודומות האחרונות, כאן - לא מדובר בערך הנוכחי של סדרה אינסופית, אלא סדרה "רגילה" (סופית) שכוללת 10 תשלומים. הדרך לבטא את ערכה הנוכחי - היא על בסיס מכפלה ב -  $pvfa$ . כברירת מחדל, אם לא נאמר אחרת - תשלום שנתיים הם "בסוף כל שנה", כלומר האיבר הראשון בסדרת החזרים הוא בדיקוק בעוד שנה. לכן, שאלה זו דומה מאד לשאלה 26, ואין צורך בהתאמה.

ס

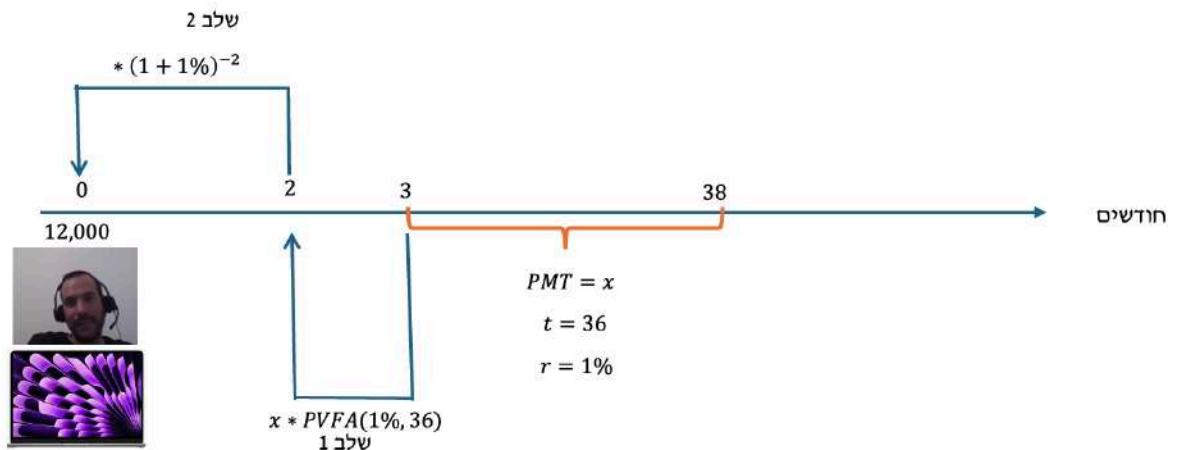
### שאלה 33.1 - חילוץ תשלום התקופתי מהלוואה עם התאמת זמן

יקיר מאס במחשבו היין והוא מעוניין לרכוש MacBook Air M3 חדש. לשם כך, לווה סכום של 12,000 ש"ח מנק המועלים. הלוואה תוחזר ב-36 תשלומים חודשיים קבועים, שהראשון שבהם בעוד 3 חודשים. הריבית החודשית בהלוואה היא 1%.

נדרש : מהו התשלומים החודשי הקבוע שיצטרך יקير לבצע?

פתרון :

גם כאן, הכלי העיקרי הוא המשפט : סכום הלוואה = ערך נוכחי של החזרים.



$$LOAN = PV(PMTs)$$

$$12,000 = x * PVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^{-2}$$

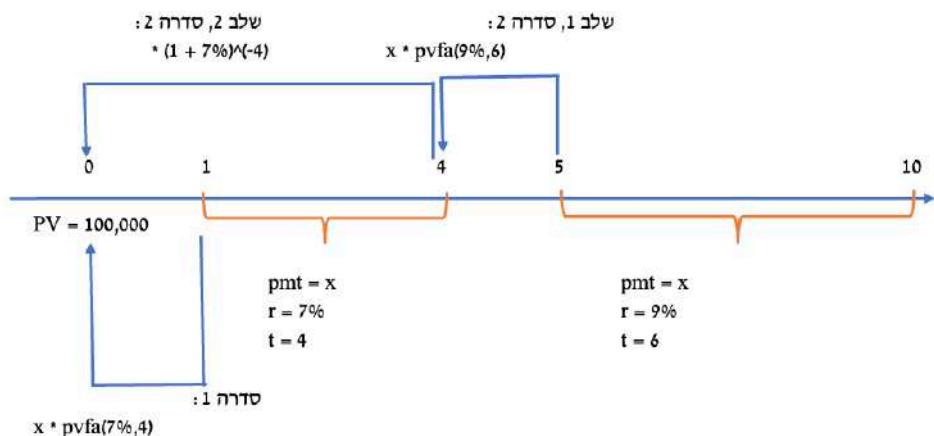
$$12,000 = x * 30.108 * (1 + 1\%)^{-2} \rightarrow x = 406.58$$

הסבר קצר :

הערך הנוכחי של סדרת ההחזרים שמתחלים בזמן 3 מופיע אוטומטית "אחת אחרה" כЛОMER לזמן 2, יש לתאום את התוצאה לזמן 0, מועד נטילת ההלוואה, ורק אז - לבנות את המשוואה ולהלץ את הנעלם בהתאם.

שאלה 34 - **יישומים של ערך הנוכחי: חילוץ סכום החזר תקופתי בהלוואה, מקרה מורכב יותר**  
 נטלתם היום הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-10 תשלומים שנתיים. הריבית השנתית בכל אחת מ-4 השנים הראשונות היא 7%, והריבית השנתית בכל אחת מהשנים העוקבות היא 9%. מהו סכום התשלומים הקבוע?

**פתרון:**  
 כזכור, כאשר מזוהה הלוואה שהחזרה עוננים לגדר סדרה, אני משתמש במשפט: סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. להלן תיאור סדרות החזרים:



$$100,000 = x * pvfa(7\%, 4) + x * pvfa(9\%, 6) * (1 + 7\%)^{-4}$$

$$100,000 = x * 3.387 + x * 4.486 * (1 + 7\%)^{-4} \rightarrow x \approx 14,686$$

הסבר מפורט:

הלוואה עצמה היא בסך 100,000 ש"ח (אנף שמאלי).  
 הביטוי המייצג את הערך הנוכחי של סדרת החזרים הראשונה, טרם שינוי הריבית, הוא  $x$  מוכפל ב-  $pvfa$  שמתאים לריבית לתקופת הסדרה הראשונה שהיא 7%, ול-4 תשלומים. הואיל וסדרה ראשונה זו החלה בזמן 1, ותדירות התשלומים כל שנה, חישוב ערך הנוכחי סדרתי זה מוביל "אחת אחרת" כלומר בדיקת זמן 0 ללא כורך בהתאם.

הביטוי המייצג את הערך הנוכחי של סדרת החזרים השנייה (לאחר שינוי הריבית) מורכב יותר. מדוע? משום שתחילה כופלים את החזר הקבוע  $x$  במספר התשלומים העדכני 6 שנותרו, והריבית העדכנית 9%, אלא שהפעם החישוב שמקפיד "אחת אחרת" ביחס לתחילת סדרה זו, שהיא בזמן 5, מוביל בזמן 4. ולכן יש לתקן 4 שנים נוספות לאחר.

תיקון 4 שנים נוספות לאחר - חייב להתבצע בריבית השונה שמתקנית ב-4 שנים אלו, שהיא 7%. וכך, ההתאמה היא על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית 7% בחזקת -4.

### שאלה 34.1 – יישומים של ערך הנוכחי, חילוץ שיעור הנחה רלוונטי

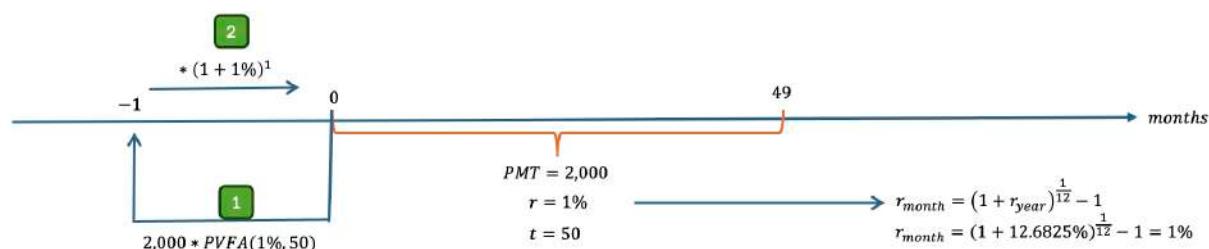
אבל שוקלת לרכוש 100 טון תה ירוק. באפשרותה לשלם בעד המוצר ב-50 תשלום מינימליים חודשיים שווים בסכום של 2,000 ש"ח כל אחד.

לחילופין, היא יכולה לשלם היום סכום ייחד בזמן לטובת ביצוע הרכישה. אם תעשה זאת, כך ציין הספק, היא תזכה בהנחה ביחס למחיר הכלול של התה, שהוא 100,000 ש"ח. נדרש: מהו שיעור הנחה המינימלי שיגרום לאבטל להעדיף את התשלומים בזמן, אם ידוע ששיעור הריבית השנתית של אבטל הוא 12.6825%.

פתרון:

משפט: אם אני יכולה לרכוש מוצר בהסדר תשלום עתידי או בתשלום מיידי היום, הסכום המרבי שאסכים לשלם היום הוא הערך הנוכחי (PV) של ההסדר העתידי.

בציר הזמן להלן תוכלו לראות את הבסיס לחישוב הערך הנוכחי (כולל התאמות) של הסדר התשלומים המוצע.



מה קרה פה? הואיל והסדרה החלה בזמן 0, ערכה הנוכחי הסדרתי הוביל ל-1-, מה שהצדיק התאמה של תקופה אחת קדימה לזמן 0. בנוסף, הריבית 1%, לאור הכל הקובל ששיעור סדרתי חייב להתבסס על הריבית לפרקי הזמן בין תשלום, שכן – היא ריבית חודשית (לכן המרנו את השנתית לחודשיות).

$$PV_{Series} = 2,000 * PVFA(1\%, 50) * (1 + 1\%)$$

$$PV_{Series} = 2,000 * 39.196 * (1 + 1\%) = 79,176$$

כדי להסכים לשלם בזמן, נדרש שיווזילו לנו את המחיר הקטולוגי מ-100,000 ל-79,176 ש"ח. במלים אחרות, יש ליציר הנחה של 20,824 ש"ח מה ששיעור הנחה של 20.824%.

מסקנה: רק אם מוצע לנו הנחה בשיעור של לפחות 20.824% נסכים לשלם בזמן מיד. זו התשובה הסופית.

שאלה 35 - **יישומים של ערך נוכחי, בחירה בין חלופת תשלוםים להנחת מזומנים, ללא התאמת ריבית**  
שי מעוניין לרכוש את המחשב הבא:

הסל של

 1	Apple - MacBook Pro 16 / Apple M3 Max / 48GB Ram / 1TB SSD ₪ 38,877.97	
₪ 38,877.97	סכום בגין	₪ 38,877.97
₪ 38,877.97	סה"כ	₪ 38,877.97

החברה מציעה לשכור את המחשב, לשלם בעדו במזומן ובכך לזכות להנחה בשיעור 10% מהמחיר הנוכחי לעיל. לחילופין, ניתן לפרט עלות הרכישה ל-36 תשלומים חדשים שווים בסך 1,079.94 ש"ח כל אחד. בהנחה שהריבית החודשית האלטרנטיבית של שי היא 1%, האם יעדיף לרכוש את המחשב במזומן או בתשלומים?

## פתרונות:

- **מבחן סגנון השאלה ויזיהו הכללי:**

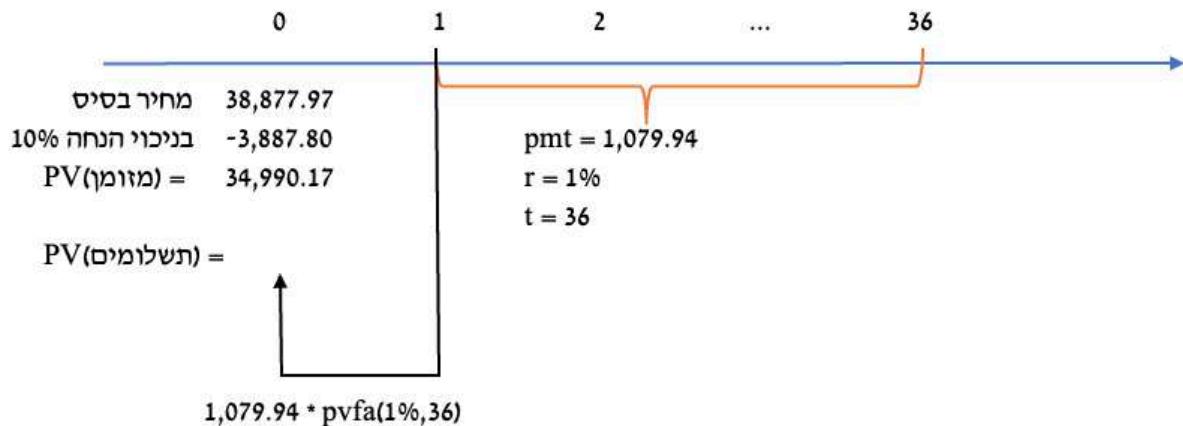
  - כאשר מזהים שעליינו לבחור בין :
  - (א) אפשרות לרכוש מוצר בתשלומים או
  - (ב) בתשלום אחד במזומן (מיידי).

העיקרונו הוא לבחור מהו הערך הנוכחי של כל חלופה - לבחור בזולה יותר.

### באופו ספצייפי:

העלות בזמן של מוצר - במונחי ערך נוכחי, אחרי הנחה, היא למעשה  $PV_{CASH}$ .

העלות של מוצר בתשלומים במועדי ערך הנוכחי - ידרוש חישוב:  $PV(PMTs)$



או בעצם, בחלוקת התשלום בזמן משלם :

$$PV_{CASH} = 38,877.97 * (1 - 10\%) = 34,990.17$$

ולעומת זאת, בחלוקת התשלומים החודשיים, מבצעים תשלום שערכם הנוכחי המכרי הוא :

$$PV_{Payments} = 1,079.94 * PVFA(1\%, 36) = 1,079.94 * 30.108 = 32,514.83$$

ומסקנה : החלוקת הזולה יותר בזמנים של ערך הנוכחי, אשר תועדף - **היאחלוקת התשלומים**.

סיכוםו : **לשם בירהה בין תשלום בזמן לבין הסדר תשלום נדחים, נחשב את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים, ואם הוא נמוך מהעלות בזמן נטו (אחרי הנחה) נעדיף אותו.**

שאלה 36 - **יישומים של ערך נוכחי, בחירה בין חלופות תשלום והנחות, עם התאמת ריבית שי מעוניין לרכוש את ה-iPad הבא:**



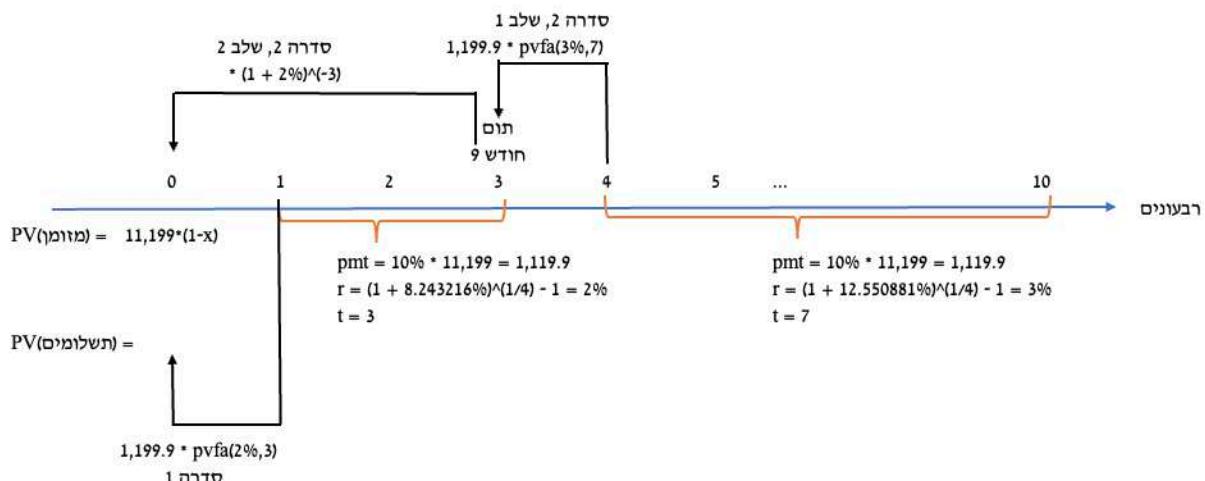
ניתן לרכוש את ה-iPad באחד מבין שני מסלולים:

א. 10 תשלום**ים קבועים** שוגבה כל אחד מהם מחושב לפי 10% מהעלות הנוקובה לעיל.

ב. תשלום **בזמן,** המקנה הנחה.

בהתהה שהריבית **השנתית** התקפה **ב-9 החודשים** הראשונים היא 8.243216%, ואילו הריבית השנתית לאחר מכן 12.550881%, מהו שיעור ההנחה המינימלי הנדרש שיביל לכך שיירכוש בזמן?

פתרון:



$$PV_{Payments} = 1,119.9 * PVFA(2\%, 3) + 1,119.9 * PVFA(3\%, 7) * (1 + 2\%)^{-3}$$

$$PV_{Payments} = 1,119.9 * 2.884 + 1,119.9 * 6.230 * (1 + 2\%)^{-3} = 9,804.35$$

(\*) את התאמת הריבית משנה לרבעון ביצענו על ידי הנוסחה הבסיסית ביותר למספר ריביות, שתשרה אותנו כביררת מחדל במצבים כאלו:

$$r_{required} = (1 + r_{natun})^t - 1$$

מקרה :

הרכיבית  $\gamma$  היא הריבית הנדרשת, כאן - לתקופת תשלום בסדרה (רביעו).

הרכיבית  $\gamma_{natun}$  היא הריבית הנוכחי.

המערך  $t$  - את החלק היחסית מהתקופה הנדרשה שחייב לבטא. כאן - חייב רביעון אחד מתוך שנה (4 רביעונים).

הערך הנוכחי של הסדר התשלומיים "סקול" לתשלום היום של 35,804.9 ש"ח. כדי לבדוק מהו גובה הנחיה שיצדק תשלום מיידי בזמן, נשווה את המחיר בזמן אחד אחרי הנחיה לנצח האז.

$$PV_{CASH} = 11,199 * (1 - x) = 9,804.35 \rightarrow x \approx 12.45\%$$

**הסבירים נוספים :**

גם בשאלת זו, בדומה למועדת, עוסקים בבחירה בין תשלום בזמן (בניכוי הנחיה) לבין הסדר התשלומיים. כמו תמיד, נרצה לבטא הן את הערך הנוכחי של הסדר התשלומיים, והן את הסכום בזמן נטו (אחרי הנחיה).

- הסכום בזמן נטו, אחרי הנחיה, הוא למעשה :  $(1 - x) * 11,199$

- לגבי הערך הנוכחי של סדרת התשלומיים הרביעוניים, נציג ציר זמן כדי לבנות בצורה נcona את הערך הנוכחי של התזוריים.

**הסבירים לציר הזמן :**

הסדרה ה-1 תקפה במשך 9 חודשים (3 רביעונים) עד למועד שינוי הריבית הנוכחי בשאלת (הריבית הראשונה השנתית בשיעור 8.243216% תקפה במשך פרק זמן זה). בתקופה זו, מבוצעים 3 תשלום, הראשון שבזמן 1. חישוב הערך הנוכחי של סדרה זו מוביל בהגדרה תקופת תשלום אחת אחרת (רביעון אחריה) ביחס למועד התשלום הראשון (ביחס לתום רביעון 1) ככלומר לזמן 0, ללא צורך בהתאמה.

הסדרה ה-2 תקפה במשך 7 רביעונים נוספים (לאחר שינוי הריבית הנוכחי בשאלת). הריבית השנתית הנוכחי ובתקופת סדרה זו היא ריבית שנתית בשיעור 12.550881%. בתקופה זו, מבוצעים 7 תשלום, והראשון שבזמן בתום הרביעון ה-4. חישוב הערך הנוכחי של סדרה זו מוביל גם הוא בהגדרה אחת אחרת (רביעון אחריה) ביחס למועד התשלום הראשון (ביחס לתום רביעון 4) ככלומר לזמן 3, ונדרשת התאמת נוספת נספה אחורנית זמן 3 לזמן 0. התאמות לאחר נבעו נקבע על ידי מכפלה נוספת ב-1 ועוד הריבית שבתקופת (הריבית הרביעונית הקודמת) בחזקת שלילית של מספר תקופות ההתאמה.

והמשמעות : הערך של  $x$  המיצג את שיעור הנחיה בחלוקת הזמן הוא 12.45%. קרי, אם תשלום בזמן מזכה בהנחיה בשיעור 12.45% או יותר, כדי לשלם בזמן.

**שאלה 37 - חילוץ סכום תשלום בעסקת תשלום בגין מוצר הכללת מקדמה**

גיא שוקל לרכוש היום מחשב שנתרנו להלו :

הפל של



עלות המחשב שמעוניין גיא לרכוש היא 14,129.07 ש"ח. גיא נדרש לשלם באופן מיידי 30% מעלות העסקה, ואת היתריה עליו לשלם ב-36 תשלומים שווים שיבוצעו בתדירות תלת חודשית (כל 3 חודשים), שהראשון שבהם יבוצע בעוד חודש מהיום. הריבית החודשית היא 1%. בתנאים אלו, מהו סכום התשלום התלת-חודשי שגיא נדרש לשלם?

**פתרונות :**

בשאלות שהבחן אני מזזה צריך בחילוץ תשלום תקופתי קבוע בעד מוצר, שמחירו הכלל נתון - ובנוסף משולמת מקדמה בעדו, אנו טוענים שמדובר למעשה בעסקת "הלוואה". ולמה הכוונה? הספק למעשה מעניק לגיא הלוואה בוגבה עלות מוצר בגין המקדמה.

**משפט :** סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזירה. לכן, אם אני יודע מהם הפרמטרים בעסקה :

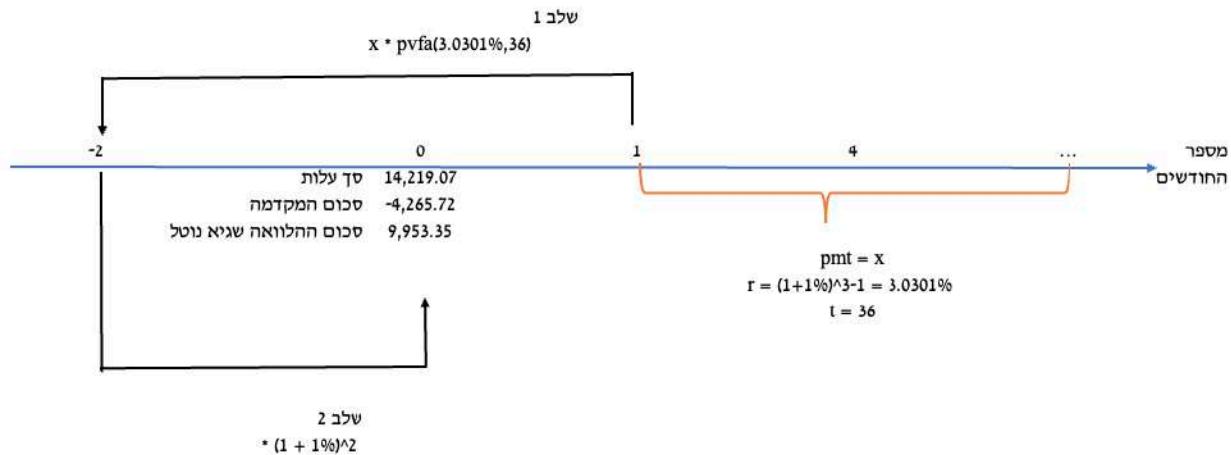
מהו סכום הלוואה : עלות מוצר בגין המקדמה. -

כמה תשלום יישם בהסדר. -

מהו שיעור הריבית. -

אוכל לחץ את נעלם התשלום התקופתי.

הוצאות המחשב שמעונייןgia לרכוש היא 14,129.07 ש"ח. גיא נדרש לשלם באופן מיידי 30% מעלות העסקה, ואת היתריה עליו לשלם ב-36 תשלומים שווים שיבוצעו בתדירות תלת חודשית (כל 3 חודשים), שהראשון שבהם יבוצע בעוד חודש מהיום. הריבית החודשית היא 1%. בתנאים אלו, מהו סכום התשלומים התלת-חודשי שגיא **צריך לשלם?**



המשפט היה: סכום ההלוואה (הוצאות המוצר בNICIO המקדמה בעדו) שווה תמיד לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של התשלומים הנותרים.  
סכום ההלוואה:

$$PV_{LOAN} = 14,219.07 * (1 - 30\%) = 9,953.35$$

הביטוי המיצג את הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו:

$$PV_{Payments} = x * PVFA(3.0301\%, 36) * (1 + 1\%)^2$$

הויל והריבית איננה שלמה, נציב בנוסחה המתמטית של PVFA:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} \rightarrow \frac{1 - \frac{1}{1.030301^{36}}}{0.030301} \approx 21.735$$

וכך קיבל בגין הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו:

$$PV_{Payments} = x * 21.735 * (1 + 1\%)^2$$

ובsek הכל, כדי לפטור:

$$PV_{LOAN} = PV_{Payments}$$

$$9,953.35 = x * 21.735 * (1 + 1\%)^2 \rightarrow x \approx 448.92$$

מסקנה: התשלום התקופתי שעל גיא לבצע הוא כ-448.92 ש"ח.

סיכוםון: אם זיהיתי שאלה שבה עלה צורך לחשב את התשלומים הקבועים לרכישת מוצר שעבورو משולמת גם תשלוםים אבל גם מוקדמת בזמן, נתייחס לסכום של המחיר בגין המוקדמת כל הלוואה, שאט סכומה נשווה לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של סדרת התשלומים (מתואם לזמן אפס לפי הכללים הרלוונטיים).

אויל, ואבוי ליווצרי

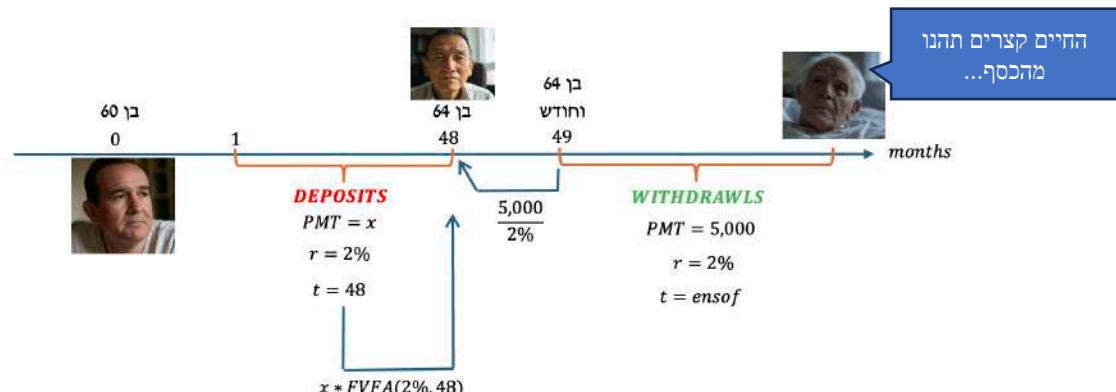


שאלה 37.1 – **יישום כלכלי: שילוב של ערך עתידי וערך הנוכחי – איזון אקטוארי**  
 עם בן 60 היום. בכוונתו להפקיד בתום כל חדש במשך 4 שנים סכום קבוע. בגיל 64 בדיק יצא לפנסיה ובתום כל חדש לאחר מכן ולנצח בכוונתו למשוך סכום קבוע של 5,000 ש"ח.  
 בהנחה שהריבית החודשית בקרן הפנסיה שאליה מפקיד נعم היא 2%. מהו הסכום החודשי שייצטרך נעם להפקיד?

פתרון:

באופן כללי, אני מזזה כאן שאלה שעוסקת בסדרת הפקודות שלאחריה סדרת ממשיכות. שאלות מטיפוס זה נקראות "איזון אקטוארי" (МОונח שמאד מקובל בתחום הפנסיה והביטוח).  
 שאלות איזון אקטואריanno פותרים על ידי כך שבונים משווהה שבה – אגף אחד מיציג את הצבירה העתידית ערב הפרישה (למועד סיום ההפקודות), והאגף השני שווה לו – הוא הערך הנוכחי של המשיכות לאותה נקודת זמן.

בתרשים מטה ניתן לראות את התקופות הרלוונטיות ואת התאמת הזמן של ההפקודות (בכלים של ערך עתידי) והמשיכות (בכלים של ערך הנוכחי) לזמן 48.



משוואת הפתרון תהיה:

$$x * FVFA(2\%, 48) = \frac{5,000}{2\%} \rightarrow x = 3,150.46$$

**שאלה 41 - איזון אקטוארי - תכנון פיננסי:** מקרה שבו קיימת סדרת הפקדות למיון סדרת מישיות בונינו מפקיד 500 ש"ח בסוף כל חודש במשך 4 שנים. מיד לאחר סיום ההפקדות בונינו יושוק בסוף כל חודש במשך 4 שנים סכום קבוע. בהנחה שהריבית השנתית בתקופת ההפקדות היא 26.82418% ואילו הריבית השנתית בתקופת המישיות היא 12.6825%, מהו הסכום החודשי שיוכל בונינו למשוך?

**פתרון :**

המשמעות של המונח "איזון אקטוארי" הוא זה שאליו אני מקטלג שאלות שבחן אני מזזה סדרת הפקדות שאחריהן סדרת מישיות.

כאמ' מפקדים כל חודש 4 שנים, ולאחר מכן מושכים כל חודש 4 שנים – איזון אקטוארי. טכנית הפתרון היא לייצר ביטוי שמשווה בין הערך העתידי (המצטבר) של ההפקדות, לבין הערך הנוכחי של המישיות **לאותה נקודת זמן**.

אני אישית (ד"ר צבאן) אוהבת לבטא את הערכים לנקודת הזמן שהוא המיצגת את מועד ההפקדה האחרונה.

$$(משיכות) = PV = FV$$

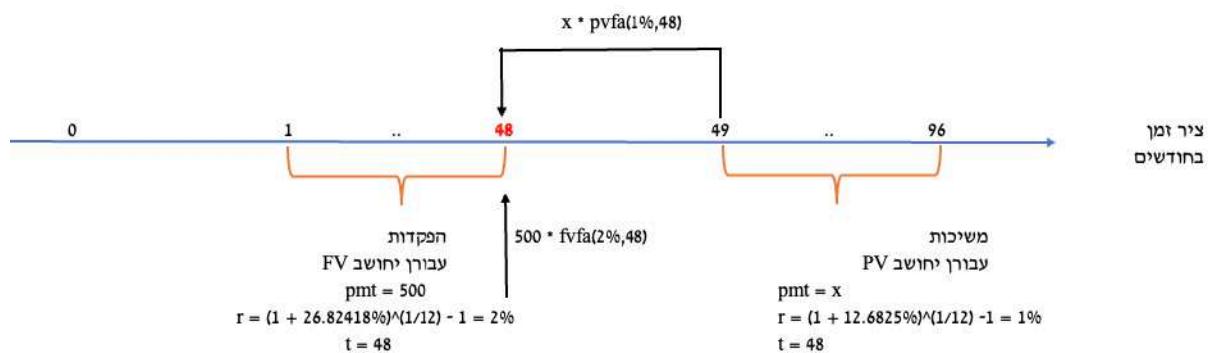
הוائل וסדרת ההפקדות היא בתדרות חודשית, ואילו הריבית הנתונה לתקופת ההפקדות היא שנתית, עליינו לבצע התאמה של תקופת הריבית משנה לחודש כדי לבטא את הערך העתידי של הסדרה. הריבית בתקופת ההפקדות היא 26.82418% ולא נאמר מאייזה סוג היא. כבירית מחדל, אם לא נאמר אחרת, הריבית הנתונה היא אפקטיבית – שעיבודה (אופן ההמרה שלה) מבוצע לפי העקרון של "ריבית דרייבית" (מעיריך חזקה מתאים ולא עם חלוקה פשוטה):

$$r_{month} = (1 + 26.82418\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 2\%$$

גם בתקופת המישיות, תדרות התזרים חודשית, אך נתונה ריבית שנתית. כבירית מחדל אופן המרתה משנה לחודש היא עם מעיריך חזקה מתאים:

$$r_{month} = (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1\%$$

בהתנתק משווה כזו, ניתן לפעול כדי לבצע חילוצים רלוונטיים.



$$500 * FVFA(2\%, 48) = x * PVFA(1\%, 48)$$

כלומר :

$$500 * 79.354 = x * 37.974 \rightarrow x \approx 1,045$$

סיכום :

- כאשר אני מזזה סדרת הפקודות שלאחריה סדרת משליכות, חילוץ ערכים רלוונטיים (כגון גובה הפקודה / גובה משיכה / שיעור הריבית) יישען בדרך כלל על משווהה שאגפיה הם הערך הנוכחי של הפקודות והערך הנוכחי של המשיכות בהתאם.

חשיבות מוד לבטא את הערכים של שני האגפים לאותה נקודת זמן בדיק.

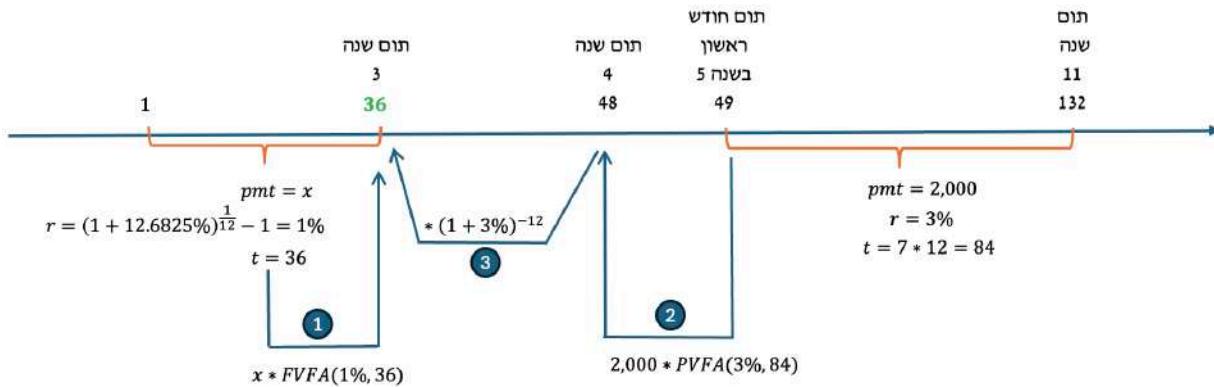
- אני אישית (שייקה) מוד אהוב לבחור נקודת זמן משותפת שהיא נקודת הזמן של הפקודה האחרונה (לכן, כאן בחרתי לבטא את כל הערכים במנוחי זמן 48). און חובה כזו, וכל עוד תייצרו משווהה שבה שני האגפים יוצרים ערך לאותה נקודת זמן בדיק, ניתן לפטור אותה ולקבל תוצאה זהה.

#### שאלה 41.1 – שאלת נוספת על איזון אקטוארי להתנסות כיתה הדורגיתית יותר עם התאמות זמן

ירין מתכוון לחסוך בתום כל חודש במשך 3 שנים סכום קבוע. הריבית השנתית בתקופת הפקודות היא 12.6825%. לאחר מכן, החל ממועד החודש הראשון של השנה ה-5 יתחיל לשזק סכום של 2,000 ש"ח בתום כל חודש במשך 7 שנים (כך שהתשולם האחרון יבוצע בתום החודש האחרון של השנה ה-11). הריבית החודשית לאחר תקופת הפקודות 3%.

מהו הסכום החודשי שירין צריך לחסוך על מנת לעמוד ביעד המשיכות?

פתרונות :



משוואת הפתרון :

$$FV_{36} = PV_{36} \quad (\text{ mishיכות (הפקודות) })$$

$$x * FVFA(1\%, 36) = 2,000 * PVFA(3\%, 84) * (1 + 3\%)^{-12}$$

לצורך חישוב ה- PVFA אי אפשר להשתמש בלוח א-4 במספק א לכרך ד, שכן מספר התזוריים גבוה מ-50. לכן נפעיל עם נוסחת PVFA המתמטית :

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + r)^t}}{r} \rightarrow PVFA(3\%, 84) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 3\%)^{84}}}{3\%} = 30.55$$

נחזיר ונשלים :

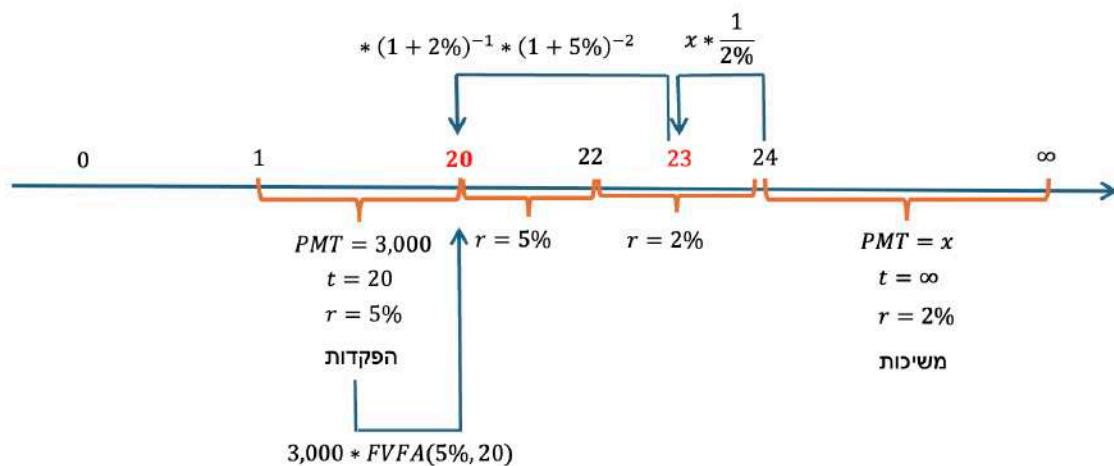
$$x * 43.077 = 2,000 * 30.55 * (1 + 3\%)^{-12} \rightarrow x \approx 995$$

מסקנה : סך הסכום הכספי שייצרך ירין להפקיד כל חודש כדי לעמוד ביעד הוא 995 ש"ח.

שאלה 42 - **יישומי ערך נוכחי - איזון אקטוארי: תכנון פיננסי - סדרת הפקודות שאחריה משיכות אינסופיות**  
 ניתנו להפקיד לפנסיה סכום של 3,000 ש"ח כל שנה במשך 20 שנים. הניחו כי החל מסוף השנה ה-24 תקבלו סכום שנתי קבוע, לאינסוף. מהו סכום שנתי זה, אם הריבית היא 5% לשנה במשך 22 השנים הראשונות, ולאחר מכן צפואה הריבית לרדת ל-2% לשנה?

פתרון :

שאלה זו בmphות דומה מאד לקודמתה, רק שנעשה שימוש בערך נוכחי של סדרה אינסופית עבור תקופת המשיכות. הוайл וגם כאן מומנים סדרת משיכות באמצעות סדרת הפקודות, נמייך להצמד לעיקרון לפיו הערך העתידי של ההפקודות הוא הערך הנוכחי של המשיכות.



תחילה, נבטא את הערך העתידי של ההפקודות. באופן אישי, אני מאד אוהב לבטא את הערך העתידי של ההפקודות למועד ההפקדה الأخيرة, כלומר ליום השנה ה-20. אין חובה כזו, וכל עוד מבטאים גם את ההפקודות וגם את המשיכות לאותה נקודת זמן, זה יעבוד. לעסוק :

$$FV = 3,000 * FVFA(5\%, 20)$$

כעת נבעור לערך הנוכחי של המשיכות. במקרה זה, סדרת המשיכות היא לאינסוף, ואשר על כן, הערך הנוכחי צריך להיות לפי הנוסחה :

$$PV = PMT * \frac{1}{r} \quad (\text{משיכות})$$

חשוב לשים לב. המשיכות הן בתום כל שנה, והמשיכת הראשונה היא בתום שנה 24. לכן, כאשר מוחשבים ערך הנוכחי לסדרת המשיכות, הקפיצה ה"אוטומטית" אחת אחרת, מובילה לכך שתוצאת החישוב בהצבה פשוטה בנוסחת ערך נוכחי סדרתית את הערך הנוכחי לזמן 23. הוайл וביתאנו את ההפקודות למועד זמן 23, נרצה שגם המשיכות תותאמנה לזמן 23, ולכן נדרש התאמת נוספת של הנוסחה הבסיסית של הערך הנוכחי הסדרתי 3 תקופות לאחר (זמן 23 לזמן 20). חשוב לשים לב שבהתאם לנתוני השאלה, הריבית בשנים 21 ו-22

היא 5% ואילו הריבית בשנת 23 היא 2%, ולכן ההתאמה צריכה להיות פעמים בריבית 5% ופעם אחת בריבית 2%, נקבע :

$$PV = x * \frac{1}{2\%} * (1 + 2\%)^{-1} * (1 + 5\%)^{-2}$$

וכעת כל שנותר הוא להשוות בין הערך הנוכחי של המשיכות לבין הערך העתידי של ההפקדות, כשההכל מתואם במועד זמן 20 :

$$\begin{aligned} FV &= PV \\ 3,000 * FVFA(5\%, 20) &= \frac{x}{0.02} * 1.02^{-1} * 1.05^{-2} \\ 3,000 * 33.066 &= \frac{x}{0.02} * 1.02^{-1} * 1.05^{-2} \rightarrow x \approx 2,142.82 \end{aligned}$$

וכך מצאנו את ערך  $x$  שהוא סכום המשיכת התקופתית<sup>5</sup>.

#### שאלה 43 - יישומי ערך נוכחי לחילוץ נעלמים

פרויקט דורש השקעה בסך 2,000 ש"ח וידוע שהערך הנוכחי הנקי נטו (NPV) המכypy הוא 300 ש"ח. הפרויקט מניב סכום קבוע חיובי כל שנה במשך 3 שנים. בהנחה שהריבית בשנת הראשונה היא 20%, ובכל שנה עוקבת הריבית היא 60% מהריבית בשנת הקודמת, מהו הסכום הקבוע החיובי השנתי?

פתרון :

ראשית, בדומה לשאלה 40, ההגדרה של ערך נוכחי נקי (שתובחר בהרחבה רובה בmph 6 ולכון אני דן בה פה בסיסית בלבד) היא הסכום של הערכים הנוכחיים של כל תזרימי הפרויקט, בסימן חיובי עבור תקבולים ובסימן שלילי עבור תשולומים. אם נסמן את הסכום הקבוע החיובי באוט  $x$  הרי שתתקבל המשוואה הבאה, שבה ההשקעה הראשונית בסימן שלילי, התקבול הראשון מהוון שנה אחריה בריבית ספציפית, התקבול השני מהוון שנים אחוריה ב-2 ריביות שונות (ראו הסבר מתחת לחישוב), והתקבול השלישי מהוון 3 שנים אחוריה ב-3 ריביות שונות :

$$\begin{aligned} NPV &= -2,000 + x * (1 + 20\%)^{-1} + x * (1 + 20\%)^{-1} * (1 + 12\%)^{-1} + x * (1 + 20\%)^{-1} \\ &\quad * (1 + 12\%)^{-1} * (1 + 7.2\%)^{-1} = 300 \rightarrow x = 1,013.01 \end{aligned}$$

הסביר לגבי ריביות :

<sup>5</sup> הגדרת החישוב התקין של איזון אקטוארי לא דורשת באופן מחייב לבטא את כל הערכים דזוקא למועד ההפקודה الأخيرة / לזמן 20. בהחלה אפשר במקומם למקנן את הערך הנוכחי של המשיכות "עוד אחריה" מזמן 23 לזמן 20, לדוחף את הערך העתידי של ההפקודות מזמן 20 לזמן 23. התוצאה הייתה זהה, ונניתן לבחור בדרך הנוחה לכם.

ריבית השנה הראשונה : 20% 20% כנתון.

ריבית השנה השנייה : 12% 12% \* 60% = 7.2% לפ"י.

ריבית השנה השלישי : 7.2% 7.2% \* 60% = 2.0% לפ"י.

### לקראת המפגש הבא (מפגש 3):

- ראשית, והכי חשוב ( מבחינתי זה חובה ), צריך לחזק את הידע, גם לגבי תכני מפגש זה, לסגור אותם פיקס, גם לגבי תכני המפגש הקודם והשאלות הנוספות לגבי תכני שהוספרי למחברת במסגרת מערך השיעור הקודם בנושא ערך עתידי כולל חילוצים. במיוחד חשובות השאלות שיש להן תשובה מפורשתות - שאלות אלו מראות יישומים שנשענים על הנלמד אך כוללות כל מיני טרייקים, וחשוב מאד להעמיק בהן ולשאול.
- שנית, מומלץ מאד כבר להתחילה באופ"ל, ל Kapoor בין שאלות ולחפש שאלות דומות בכותרת ובמהות למה שעשינו. שימו לב לכלל שאלה נתני כותרת, لكن סביר מאד ששאלות אחדות (כרבע אופל) לגמרי ניתן לפטור על סמך הקיימים וההמחשות.
- שלישית, אפשר ללמוד מהרצפים באתר, ולסגור את כל הנושא של ערך נוכחי (לא ריביות ולא הלוואות).
- רביעית, אם מצליחים, שווה לפטור עוד שאלות ממחברת הקורס שלי של הסטודנטים הקודמים. קישור למחברת הישנה תמצאו [כאן](#) (קליק וזה נפתח), ובבחינתי אפשר לפטור עד וככל עמי 167. נשמע לכם יותר מדי? אין בעיה. בזמנכם החופשי, ציינו לעצמכם שאם רוצים לחזק ולתרגל, אפשר גם ממש.

## נוסחאות מפגש 2 - ערך נוכחי

**ערך נוכחי של סכום יחיד, כהרייבית קבועה**  
הגרסה של הספר :

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$$

הגרסה של שי (אותו עיקרונו) :

$$PV = FV * (1+r)^{-t}$$

הערך PV הוא הערך הנוכחי / השוויי היום

הערך FV הוא הערך העתידי (סכום יחיד)

הערך  $r$  הוא הריבית התקופתית

הערך  $t$  הוא מספר תקופות הריבית

## ערך נוכחי של סכום יחיד, כהרייבית משתנה

הגרסה של "הספר" :

$$PV = \frac{FV}{(1+r_1)^{t_1} * (1+r_2)^{t_2} * \dots}$$

הגרסה של שי (אותו עיקרונו) :

$$PV = FV * (1+r_1)^{-t_1} * (1+r_2)^{-t_2} \dots$$

כאשר :

הערך PV הוא הערך הנוכחי

הערך FV מייצג את הסכום העתידי שצפויים לקבל

הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה

הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבהן כל ריבית תקפה

## ערך נוכחי של סדרה סופית (בשונה מסדרה אינסופית, לגבייה נוסחה נפרדת מטה)

$$PV_{Series} = pmt * PVFA(r, t) = pmt * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כאשר :

הערך PV Series מייצג את הערך הנוכחי המऋפי של הסדרה כולה

הערך  $pmt$  מייצג את התשלומים / התקבול התקופתי בסדרה

הערך  $r$  מייצג את הריבית לתקופת תשלום

הערך  $t$  מייצג את מספר התשלומים

הסימון  $PVFA(r, t)$  נקרא בלשון הספר מענ"ס : מקדם ערך נוכחי סדרתי. ניתן למצוא את ערכו בנספח א' לכרך ד של ייחדות הלימוד, בלוח שמספרו א-4. הלוח מופיע החל מעמ" 45 בנספח

ערך נוכחי של סדרת תשלוםמים אינסופית

$$PV(Infinte_{Series}) = pmt * \frac{1}{r}$$

התאמת ריבית (כasher לא ציינו את סוג הריבית) משנה ל-4 שנים:

$$r_{4years} = (1 + r_{year})^4 - 1$$

התאמת ריבית (כasher לא ציינו את סוג הריבית) משנה לחודש:

$$r_{Month} = (1 + r_{year})^{\frac{1}{12}} - 1$$

חילוץ סכום תשלום קבוע בהלוואה הנפרעת בתשלומים קבועים

$$Loan = PV(payments)$$

כלומר: סכום ההלוואה שווה לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של החזרה. דרך אחרת לבטא זאת, שגם תקציב ביטוי בפגש 3 (ושם תיקרא - החזר תקופתי בלוח שפיצר) היא:

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

### מבחן 3 - המשך יישומי ערך נוכחי - 26.3.2025

**רקע – לוחות סילוקין (אופן הטיפול בחישוב החזרי הלוואות) – "שפיצר" ו"רגיל"**  
בתרגילים הקודמים, כאשר עסקנו בהלוואות הנפרעות בתשלומיים, סכום התשלומים התקופתי היה קבוע. אלו הלוואות נפרעות שלא הענקנו להן שם – אבל מוכבל לקרוא להן "הלוואות הנפרעות לפי לוח סילוקין שפיצר".  
הבנה מלאה של לוח זהה תדרושים מאייתנו לא רק לדעת מהו הסכום הכללי של תשלום השחזרים כל תקופה, אלא גם כיצד נפצל את סך החזר בין הרכיב המהווה החזר קרן לבין הרכיב המהווה תשלום ריבית.  
במילים אחרות – לוח סילוקין באופן כללי לא עוסק רק בתשובה לשאלת "מהו החזר התקופתי" אלא הוא מפרט את מכלול נתוני הלוואה והתפתחותה.

לוח סילוקין וגיל שנקרא גם – הלוואה הנפרעת בתשלומי קרן שווים – הוא חישוב שונה שኒיצר בעט. מודיעו חשוב לנו לדעת את אופן הפיצול של החזרי הלוואה בין קרן וריבית? מעבר לעניין הכללי – כshedim בחברות ובעסקים, רכיב הריבית מהו הוצאה מוכרת (מקבלים בגין זיכוי מס) ורכיב הקרן – לא (נדון בזה בהמשך).

כרגע נציג את הצד הטכני של הלוואה.

#### שאלה 38 – לוח סילוקין [פירוט החזרי הלוואה] שפיצר מול לוח סילוקין רגיל

נטלתם הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-5 תשלומיים שנתיים. הריבית השנתית היא 6%. הציגו את לוח הסילוקין באופן השוואתי כאשר הוא מחושב לפי שיטת שפיצר (החזרים שווים) ולפי שיטת לוח רגיל (החזרי קרן קבועים). הסבירו בקצרה באופן מילולי את ההבדל בין הלוחות.

פתרונות :

נושא הלוואות הוא נושא שכדי ללמידה את כדי להבין לעומק, גם בחיים. מצד שני, אי אפשר לתפור עליו שיעור שלם מחמת משקלו. לכן נציג היבטים בסיסיים בלבד, וכך לדאוג לכם, מקשר לכם לה [חומר נוספת](#) ללימוד מעמיק של הנושא.

#### נתחל מלוח סילוקין שפיצר – הגדרה ואופן בנייה

ובקצרה: החזרי הלוואה בשיטת שפיצר משמעם **שהתשלומים התקופתיים המהווים את החזר הלוואה קבוע, ובעצם יוצר סדרה קבועה. כפועל יוצא, לאור ההגדרה שלפיה סכום הלוואה LOAN הוא הביטוי המהווה את הערך הנוכחי של ההחזרים הקבועים (PMT).** במקרה הקלאסי, שבו התשלומיים הם בסוף כל תקופה :

$$LOAN = pmt * PVFA(r, t) \rightarrow pmt = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

از בעצם, בהגדרה: התשלומים התקופתיים קבועים בגין הלוואה שפיצר ניתן לחישוב על בסיס היחס בין סכום הלוואה ל - PVFA המגדיר את הריבית התקופתית  $r$  ומספר החזרים  $t$ . בשאלה נתון – סכום הלוואה 100,000, תשלום שנתיים כאשר הריבית השנתית 6%, במשך 5 שנים וכך :

$$PMT = \frac{100,000}{PVFA(6\%, 5)} = \frac{100,000}{4.212} \approx 23,742$$

לאחר שהתשלום התקופתי ידוע בלוח שפייצר, לעיתים נדרש לבדוק מתיoco את החלק היחסית המהווה את תשלום הריבית. זכרו: בהלואות הנפרעות בתשלומיים, כל תשלום מבצע תשלום בגין הריבית וגם החזר בגין חלק מהקרן. התשלום בגין ריבית  $INT$  הוא המכפלה הפשטוטה של יתרת ההלוואה לתקופה קודמת באחוז הריבית. כך למשל, הריבית המשולמת במסגרת התשלום ה-1 תהיה (לפי יתרת הלואה מקורית לזמן 0 שהוא 100,000 ש"א כפול שיעור הריבית 6%):

$$INT_1 = 100,000 * 6\% = 6,000$$

ואם נרצה לדעת מהו הרכיב מתוך התשלום הכלול המהווה החזר קרן  $PRN$ , علينا לנכונות מהתשלום הכלול  $PMT$  את רכיב תשלום הריבית:

$$PRN_1 = PMT - INT_1 = 23,742 - 6,000 = 17,742$$

יתרת ההלוואה לאחר כל תשלום היא ההפרש בין יתרת ההלוואה לתקופה קודמת - לבין תשלום הקרן:

$$BAL_1 = BAL_0 - PRN_1 = 100,000 - 17,742 = 82,258$$

ואם כך: בלוח שפייצר, תמיד נחשב תחילת את התשלום התקופתי הקבוע (נוסחה). לאחר מכן נחשב את תשלום הריבית (מכפלה ב-% הריבית), לאחר מכן את ההפרש בין התשלום התקופתי לתשלום הריבית (החזר קרן), החזר הקרן ינוכה מההלוואה כדי לקבוע את יתרה לתקופה הבאה.

נציג את השלבים הראשונים בבנית לוח סילוקין מלא על בסיס עקרונות אלו. לוח סילוקין עם תוצאות מלאות כולל לשנים האחרונות שאוطن לא חישובי כאן, יופיע לאחר מכן.

שלב 4	שלב 3	שלב 2	שלב 1	שלב בתהילך
יתרת הלוואה $BAL_{t-1} - PRN_t$	ע"ח קרן $PRN_t$ $PMT - INT_t$	ע"ח ריבית $INT_t$ $BAL_{t-1} * r$	סכום התשלומים מחושב פעם אחת $PMT = \frac{LOAN}{PVFA}$	זמן
100,000				0
$100,000 - 17,742 = 82,258$	$23,742 - 6,000 = 17,742$	$100,000 * 6\% = 6,000$	$\frac{100,000}{PVFA(6\%, 5)} \approx 23,742$	1
$82,258 - 18,807 = 63,451$	$23,742 - 4,935 = 18,807$	$82,258 * 6\% = 4,935$	23,742	2
$63,451 - 19,935 = 43,516$	$23,742 - 3,807 = 19,935$	$63,451 * 6\% = 3,807$	23,742	3
.	.	.	23,742	4
0	.	.	23,742	5

#### המשך ללוח סילוקין "רגיל" = החזרי קרן שווים: הגדרה ואופן בנייה

החזרי הלוואה המבוצעים בשיטת "החזרי קרן שווים" (לוח סילוקין רגיל), דורשים בטור התחלה חישוב של התשלומים הקבוע על **חשבון הקרן**, המסומן PRN, וזאת על בסיס הפרופורציה בין סכום הלוואה למספר התשלומים (כאן: 100,000 קרן במנה, ו-5 תשלומים שנתיים לנתחו במכנה):

$$PRN = \frac{LOAN}{t}$$

$$PRN = \frac{100,000}{5} = 20,000$$

הוail והתשלום על **חשבון הקרן** קבוע, יתרת הקרן תמיד פוחתת בסכום קבוע זה. יתרה ליום שנה ראשונה (לאחר תשלום ראשון):

$$BAL_1 = 100,000 - 20,000 = 80,000$$

והיתרה לאחר התשלום השני:

$$BAL_2 = 80,000 - 20,000 = 60,000$$

רק בשלב הזה - מחשבים בלוח הרגיל את התשלום ע"ח ריבית, לפי יתרת הקרן לתקופה קודמת, כפול אחוז הריבית:

$$INT_1 = 100,000 * 6\% = 6,000$$

וכן:

$$INT_2 = 80,000 * 6\% = 4,800$$

לבסוף, השלב האחרון בעיסוק בלוח הסילוקין הרגיל הוא לטעון שהתשלום התקופתי הכלול מורכב מסיכום התשלום ע"ח הקרן יחד עם התשלום על חשבון הריבית:

$$PMT_1 = PRN_1 + INT_1 = 20,000 + 6,000 = 26,000$$

נרכז את כל שלבי העבודה בבניית לוח "רגיל" בטבלה:

שלב בתחילת תקופה	שלב 1	שלב 2	שלב 3	שלב 4	שלב 5
יתרת ההלוואה (קרן) $BAL_{t-1} - PRN$	תשלום על חשבון הקרן מחושב פעם אחת $PRN = \frac{LOAN}{t}$	$INT_t = BAL_{t-1} * r$	התשלום הכלול $PRN + INT_t$	הגדרה	
100,000					0
80,000	$\frac{100,000}{5} = 20,000$	100,000 * 6% = 6,000	6,000 + 20,000 = 26,000		1
60,000	20,000	80,000 * 6% = 4,800	24,800		2
40,000	20,000	60,000 * 6% = 3,600	23,600		3
20,000	20,000	40,000 * 6% = 2,400	22,400		4
0	20,000	20,000 * 6% = 1,200	21,200		5

כדי לסקור את ההבדלים בין לוחות הסילוקין, נציגם זה מול זה האחד ליד השני<sup>6</sup>:

לוח רגיל					
	שלב 2	שלב 1	שלב 3	שלב 4	
BALANCE	PRN	INT	PMT		
יתרת	טלול כולל	טלול כולל	טלול כולל		
100,000	0				
80,000	20,000	6,000	26,000	1	
60,000	20,000	4,800	24,800	2	
40,000	20,000	3,600	23,600	3	
20,000	20,000	2,400	22,400	4	
0	20,000	1,200	21,200	5	

לוח שפייצר - הערככים מעוגלים שכן אין איפוס בתא האחרון					
	שלב 4	שלב 3	שלב 2	שלב 1	
BALANCE	PRN	INT	PMT		
יתרת	טלול כולל	טלול כולל	טלול כולל		
100,000	0				
82,258	17,742	6,000	23,742	1	
63,451	18,807	4,935	23,742	2	
43,516	19,935	3,807	23,742	3	
22,385	21,131	2,611	23,742	4	
51	22,334	1,408	23,742	5	

מעבר לשלב החישובי על בסיסו נקבעו טבלאות אלו, שעיקריו הומחשו בתהיליך המתמטי לעיל, והרחבות אודוטיו תמצאו פה [בתקליטה נוספת](#), לעיתים עשויות להישאל שאלות תאוריה לגבי הלוחות וההבדל ביניהם. בהקשר זה, ניתן לשים לב **שלבוח סילוקין שפייצר סך כל אחד מהתשלומים הראשוניים, קרי PMT** (פאו): **התשלום הראשוני והשני**, יותר נוכחים מאשר במקבילה של הלוח הרגיל. למשל:

$$PMT_1(\text{Shpizer}) = 23,742 < 26,000 = PMT_1(\text{Ragil})$$

<sup>6</sup> לוח סילוקין שפייצר מסתיים תמיד בערך 0; ההפרשים שיכולים להיותו הפרש עיגול (שנובעים מן מתשלומים בש"ח לא שלמים, והן מהעבודה שלוחות 4-5) אינם מדויק אלא מוקרב).

לעומת זאת, בתשלומים האחרנים / המאוחרים, התשלום בלוח הרגיל נמוך יותר מסך התשלום התקופתי בשפייצר. כך למשל, בתשלום ה-4:

$$PMT_4(\text{Shpizer}) = 23,742 > 22,400 = PMT_4(\text{Ragil})$$

בנוסף ניתן לטעון ש:

- א. בלוח שפייצר, תשלום הריבית התקופתית, בכל תקופה, גבוהה יותר מאשר בלוח רגיל (למעט בתשלום הראשון, שבו קיים שוויון).
- ב. בלוח שפייצר, סך תשלומי הריבית גבוהה יותר מאשר בלוח סילוקין ורגיל.
- ג. בלוח שפייצר סך התשלומים גבוה יותר מאשר בלוח סילוקין רגיל.
- ד. לגבי איזה לוח עדיף: רק כאשר עברו לדין בפרויקטם (יחידה 6) ובבהיר את מחיר ההון של המשקיע, נוכל לדון בכך. בינהים, אלו מתמקדים רק ביכולת לחשב את הערכיהם בלוח ולהבין את "סדרי הגודל" שלהם (מהו גדול ממה וכיו"ב).

#### שאלה 38.1 - קיצורי דרך בלוחות סילוקין

עמרי נטל הלוואה בסך 200,000 ש"ח הנפרעת בתשלומים חודשיים במשך 4 שנים. הריבית בהלוואה היא ריבית שנתית פשוטה בשיעור 12%.

- א. מהו התשלום ה-20 בגין קרן, אם לוח הסילוקין שפייצר?
- ב. מהו התשלום הכללי ה-12, אם לוח הסילוקין "רגיל"?

פתרון:

#### פתרון סעיף א - תשלום ספציפי בלוח שפייצר

ברגע שאני נתקל בלוח סילוקין שפייצר, תמיד ולעולם השלב הראשון הוא לחשב את התשלום התקופתי הקבוע. במקרים "פשוטים", התשלום התקופתי מחושב לפי הנוסחה:

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

במקרה שלנו - סכום הלוואה נתון 200,000, מספר התשלומים הוא 48 (כל חודש, 4 שנים) ולגבי הריבית? כמו כל חישוב סדרתי (ושפייצר - זו סדרה) אלו זוקקים לרכיבת פרק הזמן בין תשלומים. התשלומים כאן כל חודש, ולכן נדרש חישוב ריבית חודשית, לצערנו ציידו אותן בריבית שנתית פשוטה.

כאשר הריבית הנתונה פשוטה<sup>7</sup>, אז המרתה מתוקפה אחת לאחרת מבוצעת עם חלוקה ולא עם חזקה. כלומר:

$$r_{month} = \frac{12\%}{12} = 1\%$$

<sup>7</sup> אם הריבית הנתונה לא הייתה מחושבת כריבית פשוטה, או המרתה משנה לחודש הייתה באמצעות חזקה:  $1 - (1 + 12\%)^{\frac{1}{12}}$

נזהר לנוסחת חישוב התשלום התקופתי ונציב :

$$PMT = \frac{200,000}{PVFA(1\%, 48)} = \frac{200,000}{37.974} \approx 5,266.76$$

זה רק השלב הראשון, מצאתי רק את סכום התשלום הקבוע. רצוי שנחשב את סכום התשלום על חשבונו הקrho PRN בתשלום ה-20, אלא שלבנות לוח סילוקין עם 20 שורות זה מזעزع ולא יעיל. לכן, אם זה מה שרצוי (לטפל בהחזר ספציפי בלבד עם הרבה תשלוםים), אפעל בדרך קיצור שמאפשרת לגלוות PRN ספציפי ללא שימוש בטבלה כלל.

השלב ה-1 בחילוץ PRN (תשלום ע"ח קrho) ללא טבלה - לחשב את יתרת ההלוואה ל"תקופה אחת אחרת" (כאו שאלות על תשלום בגין קrho בזמן 20, אך נחשב את יתרת ההלוואה בזמן 19).

יתרת ההלוואה היא תמיד הערך הנוכחי של יתרת התשלומים:

$$BAL_t = PMT * PVFA(r, n - t)$$

כאשר :

הערך  $BAL_t$  הוא יתרת ההלוואה בזמן  $t$ .

הערך  $PMT$  הוא התשלום התקופתי בהלוואת השפיצר שדנו בה.

הערך  $r$  הוא הריבית לתקופת תשלום.

הערך  $n$  הוא מספר התשלומים הכלול בהלוואה.

הערך  $t$  הוא הזמן הספציפי / מספר התשלום הספציפי.

במקרה זה בהצבה המתבקשת נקבל שהיתרה בזמן 19 (אחת לפני המועד שעליו שאלו) היא :

$$BAL_{19} = 5,266.76 * PVFA(1\%, 48 - 19) = 5,266.76 * 25.066 \approx 132,017$$

עוד שני צעדים קטנים - תחילת, הריבית המשולמת בזמן 20 היא מכפלה היתרה בזמן 19 בשיעור הריבית התקופתית :

$$INT_{20} = BAL_{19} * r = 132,017 * 1\% \approx 1,320.17$$

התשלום על חשבונו קrho בזמן 20 הוא ההפרש בין סך התשלום PMT לבין התשלום על חשבונו ריבית :

$$PRN_{20} = PMT - INT_{20} = 5,266.76 - 1,320.17 = 3,946.59$$

**סקירת שלבי העבודה באופן תמציתי - חישוב תשלום ספציפי ע"ח קרן בשפייצר:**

- חשב את היתריה לתקופה קודמת, על בסיס מכפלת ה -  $PMT \cdot PVFA$  של מספר ההחזרים הנותר למועד זה.
- כפלי את היתריה לתקופה קודמת (א) בשיעור הריבית. כך תקבלי את תשלום הריבית הספציפי.
- הפחיתי מהתשלום התקופתי הכללי  $PMT$  את תשלום הריבית הספציפי. תקבלי את התשלום הספציפי על חשבו הקרן נדרש.

יש דרך קצרה יותר? ספציפית  
להישוב החזר ע"ח קרן בשפייצר  
בתשלום ספציפי?



**דרך חלופית / קצרה – יותר נוחה אבל פחות הבניתית לחישוב PRN ספציפי בלוח שפייצר:**  
ה-PRN הוא למעשה הירידה ביתרת הקרן (BAL) בין התקופה הקודמת  $t-1$  לבין התקופה הנוכחית  $t$  היא בהגדלה התשלום על חשבו הקרן בזמן  $t$ . כלומר :

$$PRN_t = BAL_{t-1} - BAL_t$$

אנו יודעים שיתרת הקרן לכל אחד ממועדים אלו היא הערך הנוכחי של התזרומים שנותרו לכל אחד מהמועדים :

$$PRN_t = PMT * PVFA(r, n - t + 1) - PMT * PVFA(r, n - t)$$

בביסום, קיבלנו שבעור הלוואה שהחזרה התקופתי  $5,266.76$  ש"ח ומספר החזרה הכללי  $48$ , והריבית החודשית  $1\%$ , ושאלים על תשלום הקרן בזמן  $20$  :

$$PRN_{20} = 5,266.76 * PVFA(1\%, 48 - 20 + 1) - 5,266.76 * PVFA(1\%, 48 - 20)$$

כך קיבל :

$$PRN_{20} = 5,266.76 * PVFA(1\%, 29) - 5,266.76 * PVFA(1\%, 28)$$

בהתבה נקבע :

$$PRN_{20} = 5,266.76 * 25.066 - 5,266.76 * 24.316 \approx 3,946$$

**פתרון שאלה 38.1 סעיף ב - מהו התשלום הכללי ה-12, אם לוח סילוקין "רגיל"?**  
בלוח סילוקין "רגיל", אפשר לקצר את תהליך העבודה בחישוב התשלום הכללי. כך ש :

$$PRN = \frac{LOAN}{n}$$

במילים : התשלום ע"ח קרן הוא קבוע לפי היחס בין סכום ההלוואה לבין מספר ההחזרים הכללי.

$$BAL_t = LOAN - PRN * t$$

במלים: יתרת הקרן לכל מועד היא סכום ההלוואה הכלול, בኒכוי תשלום הקרן הקבוע, מוכפל במספר תשלומי הקרן שbowtzu.

$$INT_t = BAL_{t-1} * r$$

במלים: תשלום על חשבו ריבית הוא היתרתו לתקופה קודמת כפול שיעור הריבית.

$$PMT_t = PRN + INT_t$$

במלים: התשלום הכלול הוא לפי תשלום הקרן הקבוע בתוספת תשלום הריבית בתקופה הספציפית.

אפשר בקיצור דרך להשתמש בנוסחה הבאה לחישוב תשלום כולל בלוח רגיל:

$$PMT_t = \frac{LOAN}{n} * [1 + (n - t + 1) * r]$$

נתחל מפתרון בדרך הארוכה:  
הלוואה בסך 200,000 ש"ח, נפרעת ב-48 תשלומים שוויי קרן, ריבית חודשית 1%, ורוצים לדעת מהו התשלום הכלול בזמן 12.

שלב 1 – חישוב התשלום על חשבו הקרן (קבוע בכל תקופה):

$$PRN = \frac{LOAN}{n} = \frac{200,000}{48} = 4,166.67$$

שלב 2 – חישוב היתרתו לתקופה "אחת אחרת" (אני בזמן 12 - נחשב את היתרתו בזמן 11):

$$BAL_{11} = 200,000 - 4,166.67 * 11 = 154,166.67$$

שלב 3 – נחשב את הריבית בזמן 12:

$$INT_{12} = BAL_{11} * r = 154,166.67 * 1\% = 1,541.67$$

נחשב את התשלום הכלול בזמן 12:

$$PMT_{12} = PRN + INT_{12} = 4,166.67 + 1,541.67 = \boxed{5,708.34}$$

ונסה את הדרך הקצרה:

$$PMT_t = \frac{LOAN}{n} * [1 + (n - t + 1) * r]$$

בhzvba:

$$PMT_t = \frac{200,000}{48} * [1 + (48 - 12 + 1) * 1\%]$$

תוצאה:

$$PMT_t = \frac{200,000}{48} * [1 + 37 * 1\%] = \boxed{5,708.34}$$

**שאלה 39 - הלוואות ושינויים בהן: לוח סילוקין שפייצר וריגל, דרך מקוצרת לחילוץ ערכיים (לא טבלאות)**  
 נטלתם הלוואה בסכום של 100,000 ש"ח הנפרעת בתשלומים חדשניים שווים (לוח שפייצר) במשך 3 שנים. הריבית בגין הלוואה היא ריבית שנתית **פשוטה (נקובה)** בשיעור של 24%. בחולוף שנה, הציע הבנק **לקווח לשנות את אופן החזר ללוח סילוקין וריגל, והלקוח הסכימים.**

נדרש :

- מהו החזר ה-13, כפי שהוא צפוי לפני השינוי.
- מהו החזר ה-13 בעקבות השינוי?
- מהו החזר ה-19 לאחר השינוי?

#### **רקע - אופן התיאחות לשינויים באופן החזר של הלוואה נתונה**

אם שאלה עוסקת בהלוואה הנפרעת בתשלומים – הנושא הוא "לוחות סילוקין" ובדרכם כלל – לוח סילוקין שפייצר / לוח סילוקין "רגיל" (החויר קרכן שווה).

בנוסף, ניתן שה שאלה תכלול התיאחות לשינוי אופן החזר משלב מסוים – ככלומר מעבר מלוח סילוקין וריגל לשפייצר או להפוך.

כאשר ב שאלה על לוחות סילוקין שונים את אופן החזר שלה (לרובות סוג הלוואה, מספר תקופות החזר, ריבית) علينا לטפל בשלבים – "עד השינוי" ו"אחריו".

- בשלב הראשון, נחשב את יתרת הלוואה  $BAL_t$  ערב השינוי (רגע לפני השינוי).
- בשלב השני – יתרת הלוואה ערב השינוי היא מעין הלוואה "חדשה" שיש לפרוס מאותה נקודת קדימה לפי התנאים העדכניים.

#### **פתרונות סעיף א - החזר 13**

ידוע שסכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. לכן, עבור לוח שפייצר הנפרע בתשלומים שווים בתום כל חודש, מתקיים שסכום הלוואה הוא בהגדלה הערך הנוכחי של החזרה הקבועים. כך מתקבל הביטוי הבא:

$$PV = LOAN = pmt * PVFA(r, t)$$

שمنו אפשר לגזור את הנוסחה הבאה :

$$pmt = \frac{LOAN}{PVFA(r, t)}$$

בטור התחלה, וטרם שינוי התנאים, השאלה עוסקת בהלוואה בסך 100,000 ש"ח, הנושאת ריבית שנתית **פשוטה** בשיעור 24%, ונפרעת ב-36 תשלומים חדשניים במשך 3 שנים :

$$pmt = \frac{100,000}{PVFA(2\%, 36)} = \frac{100,000}{25.489} \approx 3,923$$

מדובר ריבית 2%?

ראשית, נתנו שהריבית 24% היא **שנתית**, אם החזרים חדשניים – נדרש ריבית חודשית.  
 שנית, אם הריבית פשוטה, אז ההמרה שלה משנה לחודש היא ע"י חלוקה פשוטה :

$$r = \frac{24\%}{12} = \textcolor{red}{2\%}$$

シמו לב, כל הסדר הלוואה בשיטת שפייצר, מתייחס בחישוב התשלומים התקופתי הקבוע בשפייצר. הוואיל ובלוח שפייצר, כל התשלומים הם קבועים, המשמעות היא **שההחזר ה-13 יהיה צפוי אלמלא השינוי הוא 3,923**.

#### פתרונות סעיף ב - החזר 13 לאחר שינוי תנאים

כל שינוי תנאים דורש חישוב יתרת הלוואה טרם השינוי.

בשאלה נאמר: **בחלוף שנה (12 תשלומים חדשים)**, הצע הבנק ללקוח לשנות את אופן החזר ללוח סילוקין רגיל, ולקוח הסכימים.

יתרת הלוואה (שתהווה את הבסיס לפרישה מחדש) רגע לפני השינוי (זמן 12) היא הערך הנוכחי של יתרת החזרה - אלו שטרם בוצעו. לעיתים אני אוהב לסמן זאת כך:

$$BAL_t = pmt * pva(r, n - t)$$

כאשר:

הערך  $BAL_t$  מסמל את יתרת הלוואה השפייצר לאחר התשלום שמספרו הסידורי  $t$ .

הערך  $t$  מייצג את התשלום התקופתי הקבוע.

הערך  $z$  מייצג את הריבית התקופתית (لتקופת תשלום).

הערך  $n$  מייצג את מספר התשלומים הכלול בהלוואה.

הערך  $r$  מייצג את מספרו הסידורי של התשלום הספציפי שעליו שוואלים.

בופן ספציפי: הלוואה כאמור כוללת 36 תשלום בסך הכל, בריבית חודשית 2%, סכום כל תשלום 3,923 ש"ח, ולכן יתרת הלוואה לאחר 12 תשלום:

$$BAL_{12} = 3,923 * pva(2\%, 36 - 12) = 3,923 * pva(2\%, 24) = 3,923 * 18.914 \approx \textcolor{yellow}{74,200}$$

מפה והלאה – הסכום הנ"ל עבר השינוי (יתרה של 74,200 ש"ח) תפרס על שארית חיי הלוואה לפי התנאים החדש: לפי לוח סילוקין רגיל, ל-24 תשלום חדשים שנותרו ובריבית חודשית של 2%. אנחנו מחפשים את התשלום ה-13, שהוא למעשה מעשה התשלום ה-1 לאחר שינוי התנאים.

#### כל תשלום בלוח סילוקין רגיל כולל שני חלקים:

א. התשלום קבוע על חשבון הקrho.

ב. תשלום הריבית – שנשען על יתרת הקrho לתקופה הקודמת מוכפלת בשיעור הריבית.

בלוח רגיל ידוע שהתשלום התקופתי ע"ח הקון הוא היחס בין סכום ההלוואה ("החדש", שהוא היתרה ערבית שינויי התנאים) לבין מספר התשלומים (שנותר, ערבית שינויי התנאים):

$$PRN = \frac{LOAN}{t}$$

נציב ונקבל את התשלום על חשבונו הקון, PRN, בלוח רגיל בתשלום ה-13, לאחר השינוי:

$$PRN_{13} = \frac{74,200}{24} \approx 3,092$$

כדי לחשב את הריבית בזמן 13, علينا לכפול את יתרת הקון לזמן 12 (היתרה לתקופה קודמת) בשיעור הריבית:

$$INT_{13} = BAL_{12} * r$$

נציב ונקבל:

$$INT_{13} = 74,200 * 2\% = 1,484$$

כך שהתשלום הכלול ה-13 בהינתן שינויי התנאים:

$$PMT_{13} = PRN + INT_{13} = 3,092 + 1,484 = 4,576$$

הציגת תמציתית של סעיפים א-ב בטבלה:

BAL	INT	PRN	PMT	לוח שפיצר סעיף א
יתרה	ע"ח ריבית	ע"ח קון	סכום התשלומים	זמן
100,000				0
			3,923	1
			3,923	2
			3,923	.
			3,923	.
			3,923	12
			3,923	13

BAL	INT	PRN	PMT	לוח רגיל סעיף ב אחרי זמן 12
יתרה	ע"ח ריבית	ע"ח קון	סכום התשלומים	זמן
100,000				0
			3,923	1
			3,923	2
			3,923	.
			3,923	.

74,200			3,923	12 ערך השינוי
	$74,200 * 2\% = 1,484$	$\frac{74,200}{24} = 3,092$	$1,484 + 3,092 = 4,576$	13 לאחר השינוי

דרך הציגה מבוססת הטבלה איננה חיונית, אך לעיתים מסויימת לסטודנטים שרצוים לראות את התהליך הדרמטי כאשר כל רכיב מופיע בסמוך לשני ובאותה שורה. התוצאה: 4,576. הערך של היתרה בצהוב – חושב לעיל.

**פתרונות סעיף ג – חישוב התשלום ה-19 לאחר שינוי התנאים**

התשלום ה-1 לאחר שינוי התנאים הוא התשלום של זמן 13.

התשלום ה-2 לאחר שינוי התנאים הוא התשלום של זמן 14.

אם אמשיך בלוגיקה זו...

התשלום ה-19 הוא התשלום ה-7 לאחר שינוי התנאים (השינוי החל בזמן 12).

הואיל ומחזיננו בזמן 12 ההלואה "נוצרה מחדש" לתקופה של 24 חודשים, מה שאנו רוצחים זה בעצם "לחשב את התשלום הכללי בהלוואה בסך 74,200, בלוח רגיל-24 תשלום, בריבית חודשית של 2%". התשלום הכללי בלוח רגיל מורכב מהתשלום הקבוע ע"ח הקرون, יחד עם התשלום התקופתי על חשבון ריבית:

א. תשלום קבוע (בלוח רגיל) בגין קרן:

$$PRN_{13} = PRN_{14} = PRN_{15} = \dots = PRN_{19} = \frac{74,200}{24} \approx 3,092$$

ב. תשלום הריבית של זמן 19 (שהוא הריבית המוכפלת ביתרה לזמן 18, לתקופה קודמת):

$$INT_{19} = BAL_{18} * r = (74,200 - 3,092 * 6) * 2\% = 1,113$$

רגע שי, מה עשית פה? לקחתי את יתרת ההלואה לזמן 12, ערך שינוי התנאים שהוא בסך 74,200, וממנה הפחתי את 6 תשלוםיה הקבועים בלוח החדש, בסך 3,092 ש"ח כל אחד, בגין התשלומים שבוצעו בתום כל אחד מה חודשים 13-18 כולל. כך מגעים ליתרת ההלואה העדכנית לזמן 18, שהיא בהגדרה הבסיס לחישוב תשלום הריבית בזמן 19.

$$PMT_{19} = PRN_{19} + INT_{19} = 3,092 + 1,113 = 4,205$$

התשובה הסופית: 4,205 ש"ח.

**סיכום למה שלמדנו בשאלת 39:** כאשר אני מזזה שאלה שבה קיים לוח שפיצר שבמבחן מבוצע שינוי תנאי ללוח רגיל, אפעל כדלקמן:

- אחשב את התשלום התקופתי הקבוע בשפייר (PMT של שפייר). 😊
- אחשב את יתרת ההלוואה ערבית (רגע לפני) שינוי התנאים, זאת בתור הערך הנוכחי של תשלום השפייר
- "שטרם בוצעו" (סך התשלומים בኒוקי התשלומים שבוצעו עד שינוי התנאים). 😊
- אתייחס יתרת ההלוואה כל "הלוואה חדשה". 😊
- אפרוס אותה וACHINE את תשלוםיה מאותה נקודה ואילך בהתאם לגישת הלוח הרגיל (תשלומי קרו<sup>ב</sup>רים, ריבית לפי מכפלת שיעור הריבית ביתרת הקרון של התקופה קודמת). 😊

#### שאלה 40 - שווי הלואה מסובסדת

קיבלתם הלואה לעידוד עסקים בסכום של 500,000 ש"ח לתקופה של 10 שנים. הלואה נושא ריבית שנתית בשיעור 3% ("מסובסדת") והיא מוחזרת בתשלומים שנתיים שווים (לוח שפייר). ידוע שהריבית האלטרנטיבית שבה יכולתם ליטול אשראי מהבנק היא 8% ("ריבית בנקאית"). בנסיבות אלו, מהו שווי ההטבה?



פתרון :

בثور התחלה – מעוניין לשאול את עצמו – מה בדיקות יכול להיות כל כך "הטבה" בהלוואה שבסוף משלמים את כל הקרון שלו וגם ריבית? התשובה היא – הכל תלוי באלטרנטיבת. במקרה זה סיפרו לנו על סיטואציה מוגדרת היטב, שבה אנו זכאים ליטול הלואה בשיעור 3%, במקומות בשיעור 8%. כМОון שההוזלה בשיעור הריבית יוצרת ערך לחברת (לגורם הלואה). והשאלה, איך מחשבים ערך זה.

כאשר רוצים לחשב את השווי הכספי של הלואה מסובסדת / מוזלת / בשיעור ריבית נמוך, נפע בשלבים הבאים :

שלב 1 : אתייחס להלוואה עצמה כפי שניתנה לי – כולם לקרון ולריבית בפועל.  
שלב 2 : נחשב ערך נוכחי PV לשלומי עסקת ההלוואה בפועל, כאשר הריבית שתשרת אותנו בחישובי PV יהיה הריבית האלטרנטיבית.

שלב 1, כמו תמיד בשפייר, נביט על נתוני ההלוואה בפועל, ונחשב את התשלום התקופתי הקבוע בגין ההלוואה (ה - PMT) לפי הריבית עלייה בפועל. כאן אמרו שאנו זכאי ליטול הלואה בסך 500,000 ש"ח שתפרע ב-10 תשלומים שנתיים שווים, כאשר הריבית השנתית היא 3%. لكن התשלום התקופתי בפועל לפי הנוסחה יהיה :

$$PMT = \frac{LOAN}{pvfa(r, n)} = \frac{500,000}{pvfa(3\%, 10)} = \frac{500,000}{8.5302} \approx 58,615$$

שלב 2 : הטבה / ערך נטו שගולם בכל סדר הוא כזה שambilא בחשבו את הערך הנוכחי נטו (NPV) של ההסדר. במסגרת ההלוואה, אנו כלואים מקבלים היום (זמן 0, ערך הנוכחי) סכום של 500,000 ש"ח. כמו כן, אנו מתחייבים לשלם כל שנה במשך 10 שנים סכום של 58,615 ש"ח (ראו לעיל). כמובן שאת התשלומים השנתיים צריך להוון (PV) – ההיוון יבוצע בריבית האלטרנטיבית (הריבית שהייתי צריך לשאת בה אם הייתה נוטל את ההלוואה מהבנק).

$$NPV = +500,000 - 58,615 * PVFA(8\%, 10) = 500,000 - 58,615 * 6.71 \approx 106,693$$

הסימן NPV הוא קיצור של Net Present Value, או במלים אחרות - ערך הנוכחי "נקי" או "כולל" של כל התזרים, משומש שבעצם עליינו להתייחס גם לתזרים החיובי של ההלוואה עצמה, וגם לערך הנוכחי של התזרים השיליליים, כדי לקבל את השווי נטו. למעשה, ממעבר להצהרה הכללית לפיה שווי הנטה הוא 106,693, אנו טוענים שערך זה מבטא את העובדה שהחזר התקופתי בסך 58,615 כבר מגלם את הריבית בפועל 3%, אך המכפלה ב - PVFA הרלוונטי ל-8% עוזר להבין כמה ריבית "חוסכים". הואיל וחוסכים ריבית גבוהה מזו שמשלמים, הערך הכלול חיובי.

הרחבת בדבר המשמעות הכלכלית של ריבית להיוון על מנת לקבוע את השווי הכלול של הנטה המגולמת בפרויקט - נציג במסגרת הדיוון ביחידה 6 בהמשך הדרץ.

**תקציר מהיר לשווי הנטה מגולמת בהלוואה שפיצר שבה הריבית בפועל נמוכה מהריבית האלטרנטיבית:**

$$Value = PMT_{Actual} * PVFA(r_{alternative}, n)$$

מקרה – שווי הנטה מגולמת בהלוואה שפיצר בריבית מסובסדת :

שווי הנטה	Value
התשלום התקופתי בפועל (מתבסס על הריבית בפועל – <b>המסובסדת</b> )	$PMT_{Actual}$
הריבית האלטרנטיבית	$r_{alternative}$
מספר התשלומים בהסדר	$n$

### נוסחאות מפגש 3 - יישומי ערך נוכחי

חילוץ תשלום תקופתי קבוע: הלוואה הנפרעת בשיטת שפייצר, תשלוםית תום תקופה

$$LOAN = pmt * PVFA(r, t)$$

או בניסוח אחר:

$$pmt = \frac{LOAN}{pvfa(r, t)}$$

יתרת הלוואה שפייצר:

$$BAL_n = pmt * pvfa(r, t - n)$$

כאשר:

הערך  $BAL_n$  מסמל את יתרת הלוואה השפייצר לאחר התשלומים שמספרו הסידורי  $n$ .

הערך  $t$  מציין את התשלומים התקופתי הקבוע.

הערך  $r$  מציין את הריבית התקופתית (لتקופת תשלום).

הערך  $n$  מציין את מספר התשלומים הכלל בהלוואה.

הערך  $pmt$  מציין את מספר התשלומים השנתי שעליו שואלים.

שאלה 44 - **יישומי ערך נוכחי - סדרה עם ערכים שבועיים - מתחכם ממש... [פינה... לדעתי 😊]**

ד"ר צבאן קונה כבלי טעינה לאייפון מלאי אקספרס לעתים קרובות.

המחיר הרגיל לקבל הוא 10 ש"ח, ובדרך כלל שי מאבד 4 כבלי טעינה כל שבוע (ולכן קונה 4 כבלי טעינה חדשים כל שבוע).

כמה כבילים כדאי לרכוש במצב שמתקיים באופן חד פעמי (עכשו, היום בלבד) ומאפשר לו לרכוש כבילים במחיר של 6 ש"ח בלבד, אם הריבית השבועית של שי היא 2%?

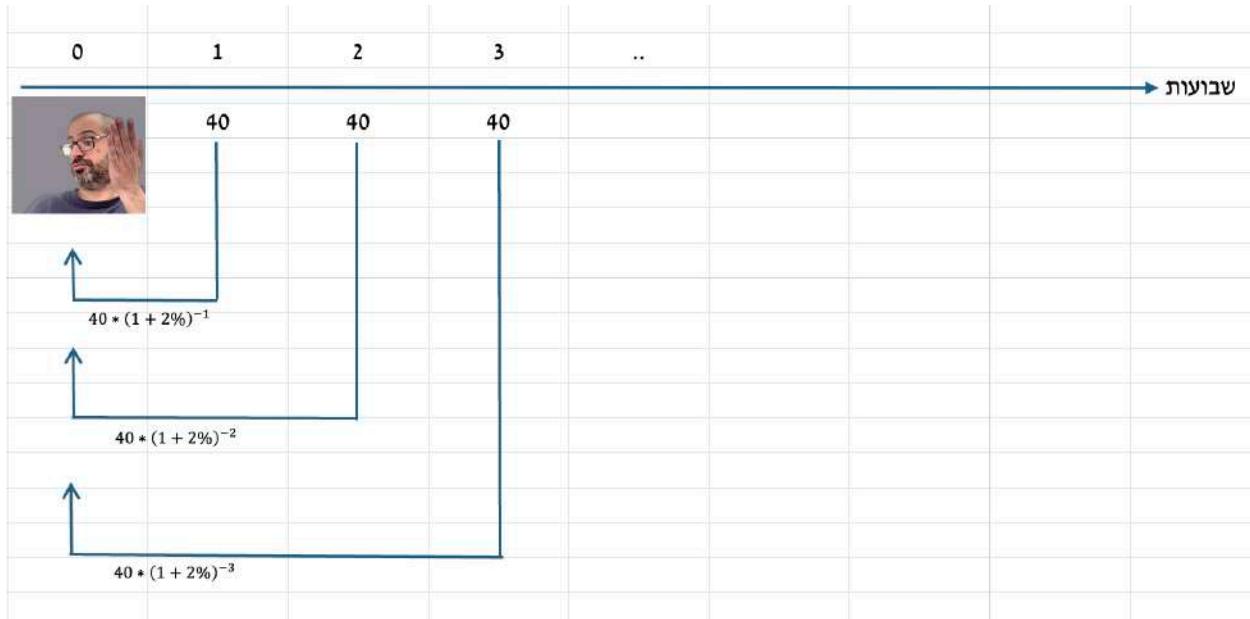
פתרון :

השאלה הכי קשה בפער בפגש זהה. היא נשענת על הרצינול ששקוניםicut, הערך הנוכחי שהוא העלות הכלכלית של כל יחידה נרכשת הוא קבוע בסך 6 ש"ח, ואילו השקונים בעתיד, הערך של כל יחידה נרכשת הוא בהתאם לעיתוי רכישתה, שהולך ופוחת (כי ככל שהתשלום רחוק יותר, ערכו הנוכחי נמוך יותר). כך נוצרת משווהה שמנסה לבדוק מתי הרכישה בעתיד הופכת להיות משתלמת יותר מהרכישה היום, שמתוכה נחלץ את נעלם הזמן, שכאשר יוכפל ב-4, יוביל למספר היחידות שנרכוש היום. נשמע סופר מורכב ולא ברור, אז ננסה להמchioש لكم קודם התהלהיך איטרטיבית באקסל, ואז נובר להדגמה על בסיס נוסחה מתמטית.

אני בונה נוסחה מתמטית בעלת שני אגפים :

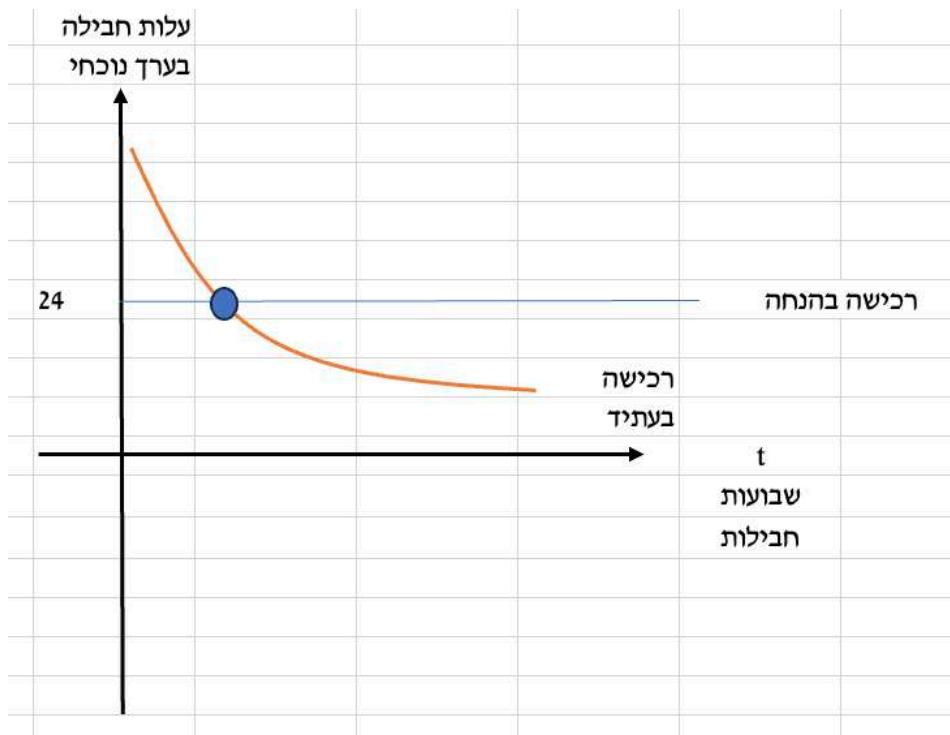
אגף שמאלו הוא הביטוי המיצג את הערך הנוכחי של רכישה בעתיד. רכישה בעתיד של חבילה כבילים (לא הנחה) היא עלות של 10 ש"ח לקבל \* 4 כבילים = 40 ש"ח. את העלות העתידית זו יש להוון (לחשב לה ערך נוכחי) בריבית של 2% בחזקה שלילית של מספר התקופות. כמה תקופות? לא יודע! זה הנעלם.

אגף ימי הוא הביטוי המיצג את הערך הנוכחי של רכישה של חבילה כבילים בזומן (במבחן) עולה לנו 6 ש"ח לקבל \* 4 כבילים = 24 ש"ח. עלות זו היא כבר במונחי ערך נוכחי, וזאת - הוואיל ומשולמת מיד. הסיבה לכך היא: שבקניה בעוד מספר רב של שבועות, החישוב של הערך הנוכחי יוביל לכך שגם ללא ההנחה, ערך התשלום היום של הקניה בעתיד יהיה זול יותר בנקודת מסויימת.



למעשה: מטרתנו לחשב את נקודת החיתוך בגרף המצורף מטה, אם אני קונה היום בהנחה – על פי הנתון מדובר בכבלים שאני משלם עליהם היום 6 שקלים לכבל (ולכן לחבילה הכוללת 4 כבלים העלות 24). כדי לקנות במחair המבצע, חייבים לשלם היום. ולכן, הערות במנוחי ערך נוכחי של חבילת כבלים במבצע גם החבילה הראשונה, גם השניה... היא 24. לעומת זאת אם אני לא קונה היום אלא בעתיד, הערך הנוכחי של הערות של כל חבילה הולך ופוחת כפי שראינו בעומת זאת.

בתרשים מעלה.



משוואת הפתרון בעצם אומרת: "נעוצר" ונפסיק לקנות במצע, כאשר הערך הנוכחי של רכישה בעתיד (אגף שמאל) משתווה לעלות היום של רכישה במצע:

$$40 * (1 + 2\%)^{-t} = 24$$

בפיתוח נקבל:

$$(1 + 2\%)^{-t} = \frac{24}{40}$$

$$(1 + 2\%)^{-t} = 0.6$$

כדי לחץ מעריך שהוא נעלם, יש להיעזר בחוקי לוגריתמים ולהוציאו מ- ln לשני האגפים:

$$\ln(1 + 2\%)^{-t} = \ln 0.6$$

בצורה כזו, מעריך החזקה "קופץ" קדימה (המינוס t) לפני ה- ln :

$$-t * \ln(1 + 2\%) = \ln 0.6$$

אחלק את שני האגפים ב-2.02 :

$$-t = \frac{\ln 0.6}{\ln 1.02}$$

וכך מקבלים

$$-t = -25.796 \rightarrow t \approx 25.8$$

ולכן כדאי לקנות 25 חבילות של כבילים. החבילה ה-26 כבר תעלה פחות מ- 24 ש"ח במונחי ערך הנוכחי. שימוש לבכל חבילה כוללת 4 כבילים ולכן שי יקנה מיד 100 כבילים וישלם עליהם 600 ש"ח (לפי מחיר בהנחה של 6 ש"ח לכביל).

**שאלה 45 - ערך נוכחי עם השתנות ריבית תקופה**

מהו הערך הנוכחי של 2,000 ש"ח שיתקבלו בתום כל חדש לצמיתות (לנצח) אם ידוע שהריבית החודשית בכל חדש אי-זוגי היא 3% ואילו הריבית החודשית בכל חדש זוגי היא 4%?

**פתרון :**

ראשית, יש לחשב ריבית לחודשיים (משום שהתייחסות לסדרה כבעלת ערכים חדשניים - לא אפשר שימוש בנוסחה סדרתית, לאור שינויי הריבית).

לעומת זאת, הריבית לחודשיים היא קבועה (בכל חודשים שנאוז בהם, הריבית הכוללת בהם היא ציורף הריביות לעיל).

שנית, יש לפצל את סדרות התזרימיים כך שיגלמו ערכיהם דו חדשניים בהתאם (ערכים תזרימיים במרוחקים של אחת לחודשיים).

**נקבל 2 סדרות :**

סדרה 1 תשלוםים בחודשים אי-זוגיים, כל חדשניים : כוללת תזרימיים בזמן 1, 3, 5, 7 עד אינסוף.

סדרה 2 תשלוםים בחודשים זוגיים, כל חדשניים : כוללת תזרימיים בזמן 2, 4, 6, 8 עד אינסוף.

הריבית לחודשיים סמכיים / צמודים תהיה (שימו לב, הערך של 1- נדרש הואיל והמטרה היא לשקף ריבית בלבד, ולא ערך עתידי כולל), בהנחה ברירת מחדל של ריבית דרייבית :

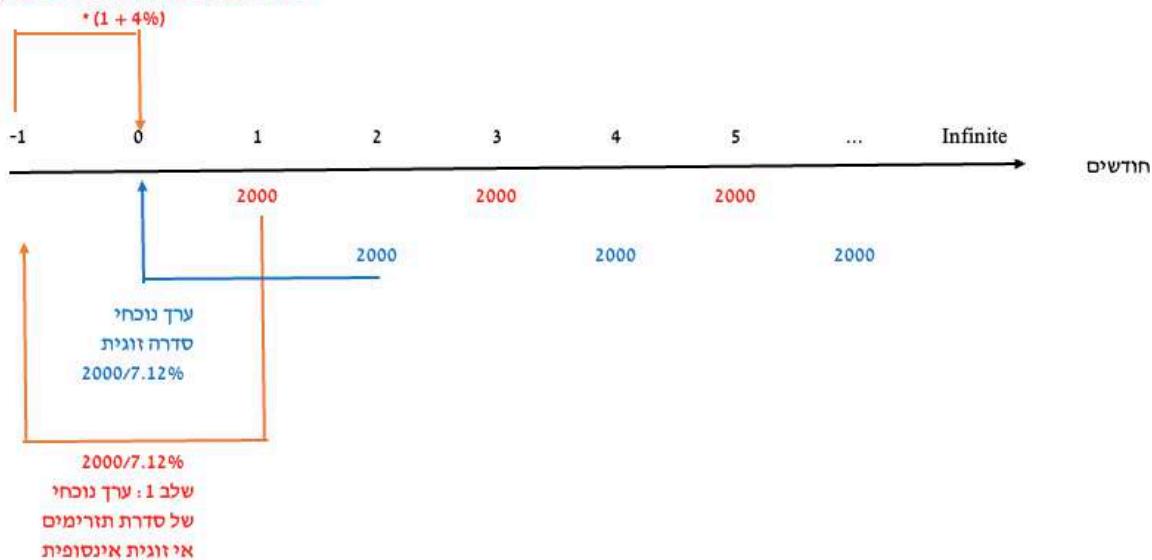
$$(1 + 3\%) * (1 + 4\%) - 1 = 7.12\%$$

כאשר מחשבים ערך נוכחי לסדרה בזמן 2, 4, 6 וכן הלאה, החישוב פשוט. משום שאוטומטית מתואימים בזמן 0, וסיימנו.

כאשר מחשבים ערך נוכחי לסדרה בזמן 1, 3, 5 וכן הלאה, לצערנו הקפיצה האוטומטית תקופת תשלום אחת לאחריה ביחס לתזרים הראשון מובילה בזמן 1-. לכן יש לתאמם את התוצאה מזמן 1- לזמן 0, וזאת על ידי המכפלה בריבית שחלה מזמן 1- לזמן 0 שהיא הריבית בחודש ה-12 של השנה הקודמת (חודש זוגי) ולכון 4%.

**בתרשים :**

שלב 2: התאמת הסדרה האיזוגית לזמן 0



הערך הנוכחי של הסדרה ש כוללת 2,000 בתום כל חודשים בזמנים 2, 4, 6 וכו', לנצח (הכחולה), הינו (ערך הנוכחי של סדרה אינסופית מחושב לפי סכום תקופתי מוחלט בריבית תקופתית) :

$$PV_{Zugit} = \frac{2,000}{r_{\text{חודשיים}}}$$

על פי נתונים השאלה, בכל שני חודשים עוקבים, הריביות חן 3% לאחד מה חודשים, ו-4% לחודש נוסף. הריבית הכוללת לחודשיים אם כך, בהתייחס לעקרון "ריבית דרייבית" :

$$r_{\text{חודשיים}} = (1 + 3\%) * (1 + 4\%) - 1 = 7.12\%$$

נחזיר לנוסחתה  $PV$  של הסדרה הזוגית :

באופן כללי, ערך הנוכחי של סדרה אינסופית מתכנס לביטוי

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

במקרה זה :

$$PV_{Zugit} = \frac{2,000}{7.12\%} \approx 28,090$$

הוائل והסדרה הזוגית הכחולה הchallenge בזמן 2, והוائل ותדירות איבריה כל חודשים, הרי שיחסוב הערך הנוכחי הסדרתי מוביל "חודשיים אחריה" (תקופת תשלום אחת אחרת) קרי לזמן 0, ואין צורך בהתאמת נוספת כדי לבטא הערך הנוכחי של הסדרה הכחולה.

נמשיך בביטוי הערך הנוכחי של הסדרה ש כוללת 2,000 בתום כל חודשים, אך בזמנים אי זוגיים, 1, 3, 5 וכו' :

$$PV_{E-Zugit} = \frac{2,000}{7.12\%} * (1 + 4\%) = 29,213$$

הסביר: גם כאן, ערך הנוכחי של סדרה שתידירות איבריה כל חודשים, מוביל חודשים חדשים לפני התזרים הראשון קרי חדשים לפני זמן 1, כלומר זמן 1-. כעת יש לתקן מ-1- ל-0. נשאלת השאלה: באיזו ריבית? אנו יודעים שהריבית לחודשים אי זוגיים (מ-0 ל-1) היא 3%. זה אומר שהריבית לחודש הקרוב" (מ-1- ל-0) היא ריבית לחודש זוגי, קרי 4%, ובאמצעותה נבעת את ההתאמה מ-1- ל-0 כאמור.

$$TOTAL PV = 28,090 + 29,213 = 57,303$$

## מבוא קצר - חישובי ריבית אפקטיבית

"מה נזכרת עכשוו  
בריביות, תשע בלילה"



ריבית אפקטיבית = ריבית כוללת / "אמיתית" בעסקה. היא כוללת תהליכי חישובים ונוסחאות שיביאו בחשבון בכורה נכונה את כל ההשפעות הנלוות לעסקה על הריבית המשולמת / המתבלט ביחס לקרן הראשונית.

ככל - ריבית אפקטיבית צריכה לבטא השפעות של הריבית הנטו (לעתים נקראת ריבית נקובה), תזרות חישוב הריבית (ריבית דריבית) וגם ריביות מראש. מעבר לזה, ריבית אפקטיבית צריכה לגמל ולהתיחס גם לעמלות, דמי פירעון, מענקים כספיים ו"אותיות קטנות".

מטרתנו בדיאון בריבית אפקטיבית היא להיות מסוגלים לנתח ולבודד את נתוני השאלה בהיבט ריביות, ולהתיחס לנוסחאות / תחשייב נכון שיביא בחשבון את הדרך המתאימה לחישוב הריבית האפקטיבית על פי הנסיבות.

### שאלה 46 - יישום בסיסי של מהותה של ריבית אפקטיבית

נתלווה הלוואה בסכום של 800,000 ש"ח. במועד העמדת הלוואה שילמה שילמת ערך מסוימים בשיעור של 10% מסכום הלוואה. הלוואה תפרע בחלוフ שנה אחת (קרן וריבית כבורה) כאשר ידוע שהריבית **האפקטיבית** בגין הלוואה היא ריבית שנתית של 28%.

בנתונים אלו, מהו סכום הריבית שתצטרכו לשלם בסוף השנה ביחס לקרן הלוואה המשפטית / הראשונית?

פתרון :

**מבוא למשמעות של ריבית אפקטיבית:** כפי שנדגים גם בשאלות המשך - ריבית אפקטיבית היא למעשה הכנוי לריבית **הכוללת** בעסקה. במלים אחרות, אם לוויתי 100 ש"ח לשנה, ריבית אפקטיבית של 20%, סימן שאני מחזיר בתום השנה 120 וזהת - גם אם הבנק טוען שמדובר בריבית של 15 ש"ח ועמלת פירעון של 5 ש"ח. לכן הריבית האפקטיבית היא חשובה מאד, משום שזו הריבית ה"כלכליות" שעל בסיסה נשפות כדאיות עסקיות. כאשר אני מזוהה עסקה שסכומיה הכספיים נתונים, במצב שבו אני יכול לחשב מהו סכום הנטו שקיבלתி (או שילמתי) בזמן אפס, והעסקה נפרעת בתשלום אחד הרי שאם נתונה הריבית האפקטיבית תמיד יתקיים :

$$PV * (1 + r_{ef}) = FV$$

במלים : הסכום נתן שקיבלו בהווה (בהלוואה) כפול 1 ועוד הריבית האפקטיבית, שווה לסכום טוטאל שנשלם בסוף התקופה.

שלב 1 : נציג על הציג בזמן 0 את סכום הלוואה המשפטית, 800,000, בኒוקי עמלת ערך מסוימים המהווה 10% מסכום זה - קרי 80,000. כך מקבלים תזרום נטו בזמן 0 של 720,000.

שלב 2 : הואיל וננתנו שהריבית האפקטיבית (הכוללת / הכלכליות) שתמיד מחושבת ביחס לקרן נטו הראשונית היא 28%, הרי שהמשמעות היא שבתום התקופה מחזירים 28% יותר מהתזרום נטו בזמן 0. או, במשוואה :

$$720,000 * (1 + 28\%) = 921,600$$

שלב 3 : התייחסות לנדרש. הנדרש ביקש ממוני לתאר מהו סכום הריבית שאינו משלם בתום התקופה מעלה קרן ההלוואה המשפטית הראשונית (מעל 800,000). במלים אחרות, נדרש לחשב את ההפרש שיחוו את התשובה הסופית:  $921,600 - 800,000 = 121,600$

נטילת הלוואה	0	פירעון הלוואה	1
			פרעון קרן ריבית משפטית
קרן ההלוואה משפטית תשלום עמלת ערך מסמכיים תזרים נטו לידי הלוואה - קרן ההלוואה כלכלית	800,000 -80,000 720,000	800,000 3 121,600 2 921,600	תשלום כולל

#### שאלה 47 - יישום מרכיב של ריבית אפקטיבית

באפשרותכם להפקיד בפיקודון בנקאי לשנתיים באחד מבין המסלולים הבאים:

- ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% מחושבת כל חודש.
- ריבית שנתית נקובה בשיעור 14% מחושבת כל חצי שנה.
- ריבית אפקטיבית שנתית בשיעור 13%.

ד. ריבית שנתית נקובה בשיעור 10% מחושבת כל חצי שנה ובנוסף ריבית נקובה המנוכה מראש בשיעור שנתי של 4% המוחשבת 4 פעמים בשנה.

נדרש: מהי הריבית האפקטיבית לשנתיים בכל אחד מהמסלולים?

המלה מריבית נקובה נתונה לריבית נקובה לתקופת היישוב היא על ידי חלוקה פשוטה, כמו פריסת לחם המהה מתקופת היישוב לתקופה הכוללת – זה דיוון אחר לגמרי

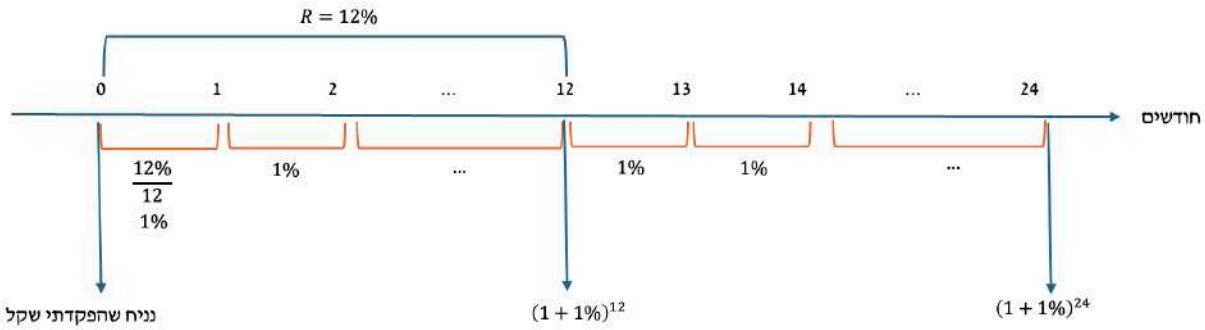


פתרונות:

זהו טיפוס שאלה שבו علينا לחשב אך וرك את הריבית האפקטיבית באחוזים, וכל הנתונים הם באחוזים. לכן, פחותות רלוונטי להציג ציר זמן עם עיתויי תזרימיים וכו' – אין פה תזרימיים.

**פתרונות סעיף א: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הריבית השנתית הנקובה 12% והיא מחושבת כל חודש**

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{24} - 1 \approx 26.973\%$$



$$\begin{aligned} \text{ריבית ב'כף':} \\ (1 + 1\%)^{24} &= 1.269734649 & \text{התקבלות התקופה} \\ &1 & \text{בinciי היסכום שהופקד} \\ &0.269734649 & \text{ריבית בסך כל 1 ש"ח} \end{aligned}$$

ריבית אפקטיבית באחוזים: 26.97346%

$$\begin{aligned} r_{eff} &= \frac{(1 + 1\%)^{24} - 1}{1} & \text{במושואה מתמטית ישירה:} \\ r_{eff} &= (1 + 1\%)^{24} - 1 = 26.97346\% & \text{המשמעות המקורית:} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{eff} &= \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 & \text{הנוסחה המלאה:} \\ r_{eff} &= \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{24} - 1 = 26.7346\% \end{aligned}$$

از בעצם, **כאשר מזינים ריבית נקייה שנתונית ש"מ** חושבת כל **זמן או משולמת כל זמן** המרה לרייבית אפקטיבית המגלמת את העיקרון של ריבית דרייבית תבוצע לפי הנוסחה:

$$r_{eff} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $r_{eff}$  מייצג את הריבית האפקטיבית [ה"אמיתית" / "הכוללת" המתחשבת בכל השפעות]

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקייה [ריבית בחזזה שלא מגלה השפעות נוספות, במקרים רבים - לא אפקטיבית]

הערך  $n$  הוא התשובה לשאלת: **"כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנקייה הנטוונה"**

כאן: הריבית הנקייה השנתונית קרי  $R$  היא 12%. היא מחושבת כל חודש. החלוקת תבוצע בהתאם לתשובה לשאלת: כמה חודשים נכללים בשנה. התשובה 12.

הערך  $m$  הוא התשובה לשאלת: **"כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת"**.

התקופה הנדרשת היא התקופה שאנו רוצים להגיע אליה / התקופה שעלייה שאל. כאן, שאל על שנתיים, תקופת חישוב היא חודש. וכמה חודשים (תקופות חישוב) נכנסים בשנתיים? התשובה 24.

**פתרונות סעיף ב: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הנזונה השנתית 14% מוחשבת כל חצי שנה**

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{14\%}{2}\right)^4 - 1 \approx 31.08\%$$

ערך ה-R : הריבית הנזונה, 14% לשנה.

ערך ה-n : כמה תקופות חישוב ריבית [חצי שנה] נכללות בתקופה הנזונה [שנה]. לכן : 2.

ערך ה-m : כמה תקופות חישוב ריבית [חצי שנה] נכללות בתקופה הנדרשת [שנתיים]. לכן : 4.

**סיכום ביןים :** אז למעשה, בשני המקרים בסעיפים א ו-ב, הריבית הנזונה היא סוג של ריבית "חויזית" המופיעה בהסדר, אבל היא לא באמת הריבית ה"אפקטיבית" / ה"כלכלית" שמשקפת את הסכום האמתי שנשולם. כדי לחשב את הסכום הכלול שנשלם, צריך להתחשב בהשפעות נוספות, ובפרט - בהשפעת הריבית דרייבית. הנוסחה שהצנו לעיל (המרה מנזונה לאפקטיבית, במצב ריבית דרייבית) יודעת לגלם את ההשפעות הנוספות של ריבית דרייבית, כדי להגיע לריבית השלמה, המלאה, הנזונה - ריבית אפקטיבית.



**פתרונות סעיף ג: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הריבית האפקטיבית הנתונה היא 13% לשנה**  
כאשר הנתון בשאלת הוא בדבר ריבית אפקטיבית (ואגב, זו ברירת מחדל, אם לא אמרו שהריבית נקובה / פשוטה), אז אין צורך לחלק או לכפול את הריבית, אלא רק למתאם את תקופתיה עם מערך חזקה מותאים :

$$r_{ef} = (1 + r)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $r$  הוא הריבית האפקטיבית לתקופה הנדרשת (כאן - לשנתיים).

הערך  $m$  הוא הריבית האפקטיבית הנתונה (כאן - ריבית אפקטיבית שנתיות).

הערך  $z$  הוא התשובה לשאלת : כמה תקופות ריבית  $z$  נכללות בתקופה הנדרשת.

והתשובה :

$$r_{ef} = (1 + 13\%)^2 - 1 = 27.69\%$$

הערה :

כל המבואר לעיל הוא בהיבט הטכני של אופן חישוב הריבית כתלות בסוג ה- *surto* (אם הריבית הנתונה היא נקובה או אפקטיבית) ולפניהם התייחסות להחלטה המתקבלה.

**פתרונות סעיף ד:**



חשב ריבית אפקטיבית לשנתיים אם נתון שהריבית השנתית הנקובה בשיעור 10% מוחושבת כל חצי שנה  
ובנוסף ריבית נקובה (שנתית) המנוכה מראש בשיעור שנתי של 4% המוחושבת 4 פעמים בשנה.

$$r_{ef}(2 \text{ years}) = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^4}{\left(1 - \frac{4\%}{4}\right)^8} - 1 \approx 31.73\%$$

מידול לנוסחה - חישוב ריבית אפקטיבית (כוללת) עבור מקרה שבו ישנה ריבית נקובה המוחושבת מספר פעמים (ריבית דרייבית) וכן ריבית מראש :

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

הערך  $r_{ef}$  מייצג את הריבית האפקטיבית

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקובה

הערך  $a$  הוא התשובה לשאלה: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנකובה הנזונה"

הערך  $b$  הוא התשובה לשאלה: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת".

הערך  $R_d$  מייצג את שיעור הריבית המנוכה מראש

הערך  $d$  הוא התשובה לשאלה: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנකובה של ריבית מראש"

הערך  $m$  הוא התשובה לשאלה: "כמה תקופות חישוב ריבית מראש נכללות בתקופה הכוללת הנדרשת"

#### 47.1 – המרות ריבית למועד ריבית אפקטיבית בזמנים שונים – תרגול נוסך לכיתה

אלכסיי מעוניין להפקיד לפקדון לתקופה של 3 שנים.

מציעים לו לבצע את ההפקודה אחד מ בין 3 מסלולים:

מסלול א: ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל חודש.

מסלול ב: ריבית רבונונית בשיעור 4%.

מסלול ג: ריבית שנתית נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל רבעון, ובנוסף ריבית שנתית נקובה המוחשבת

ומשולמת מראש בשיעור 4% לשנה, בtdiroת חישוב חצי שנתית.

מהי הריבית האפקטיבית ל-3 שנים בכל מסלול?

פתרון שמחיש את כל העבודה המתאימים בחישוב ריבית אפקטיבית ל-3 שנים:

$$r_e(a) = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{36} - 1$$

$$r_e(b) = (1 + 4\%)^{12} - 1$$

$$r_e(g) = \frac{\left(1 + \frac{6\%}{4}\right)^{12}}{\left(1 - \frac{4\%}{2}\right)^6} - 1$$

#### שאלה 48 - יישומי ריבית אפקטיבית

اري החמוד פנה לשיבוקה לבקשת הלוואה בהיקף של 500,000 ש"ח. שי הציג בפני ארי את האפשרויות הבאות:

מסלול 1: מסלול הדורש תשלום של עמלת הקצת אשראי (ריבית מראש) בשיעור של 3% לחצי שנה, ובנוסף גובה גם ריבית נקובה בשיעור 16% לשנה, המשולמת בסוף כל חצי שנה.

מסלול 2: תשלום ריבית נקובה שנתיות בשיעור של 24%, המוחשבת מדי חדש.

נדרש: חשבו את הריבית האפקטיבית<sup>8</sup> בכל אלטרנטיבה ובהתאם, קבעו מהי החלופה שאותה יעדיף ארי.

פתרון:

נתחיל דזוקא מסלול 2, לאור העובדה שהוא פשוט יחסית ועקבו מכך עס רוב הדיוון בשאלת הקודמת. כאשר אני מזהה ריבית נקובה בשיעור כך וכך המוחשבת "כל \_\_\_\_\_ או "מדי \_\_\_\_\_" איזו הנוסחה לחישוב הריבית האפקטיבית. נשים לב שכאנו לא ציינו לאיזה פרק זמן הלוואה. כבירות מחדל, הריבית שתוחשב היא שנתיות.

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^{12} - 1 = 26.824\%$$

נעבור למסלול 1: במסלול זה, בדומה למסלול ד בשאלת הקודמת, ישנו שילוב בין ריבית מראש (או תשלום מראש) לבין "ריבית דרייבית" - "ריבית נקובה המוחשבת / משולמת כל \_\_\_\_". מסלול הדורש תשלום של עמלת הקצת אשראי (ריבית מראש) בשיעור של 3% לחצי שנה, ובנוסף גובה גם ריבית נקובה בשיעור 16% לשנה, המשולמת בסוף כל חצי שנה.

הנוסחה לחישוב ריבית אפקטיבית בהתקנים ריבית "רגילה" (המשולמת בתום תקופה -  $R$ ) וכן ריבית מראש / עמלת מראש (המנוכה בתחילת התקופה -  $R_d$ ) היא:

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

ובהצבה:

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{16\%}{2}\right)^2}{\left(1 - 3\%\right)^2} - 1 = 23.97\%$$

הסבר: במונה התייחסנו לכך שהריבית המשולמת "בסוף" היא ריבית נקובה, והעובדה שהיא שנתיות ומחושבת כל חצי שנה, גורמת לנו לחלק אותה ב-2, ולאחר מכן להעלות בחזקת 2 כדי לבטא ריבית אפקטיבית שנתיות (כברירות מחדל).

<sup>8</sup> כלל: ריבית הן במנוחים שנתיים, אלא אם יש דרישת מפורשת אחרת. לפיכך, בשאלת זו שדרישה ריבית אפקטיבית - ההנחה היא שנדרשת ריבית אפקטיבית שנתיות. בדרך כלל, מרכז ההורה נהגדה ומציין לאיזו תקופה הריבית הנדרשת.

במקרה התייחסנו לכך שהריבית "מראש" נתונה כ-3% ולא ציינו שהיא נקובה, ולא אזכיר שהיא "מחושבת כל כך וכך". לכן, את הצעד הראשון של לחלק ריבית זו בערך כלשהו, לא מבצעים (בשונה מסעיף ד של השאלה הקודמת). ההתאמנה היחידה במערך של המקרה היא חזקה שתבטא את העובדה שהוואיל והריבית מראש היא 3% לחצי שנה, צריך חזקת 2 כדי להעביר חוזה לשנה.

**לענין קבלת החלטה (מה הבחירה שתועדף):**

כאשר יש לבחור בין חלופות הלואה, תועדף הבחירה שבה הריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר. כאן, מדובר במסלול 1 משום שהריבית האפקטיבית בגינו (23.97%) נמוכה מהריבית האפקטיבית במסלול 2 (26.824%).

כਮובן שבמידה והיה מדובר בחסכוון / פקדון (השקעה), היינו מעדיפים את המסלול בריבית הגבוהה יותר.

#### שאלה 49 - חילוץ ריבית אפקטיבית מסדרת תשלוםים

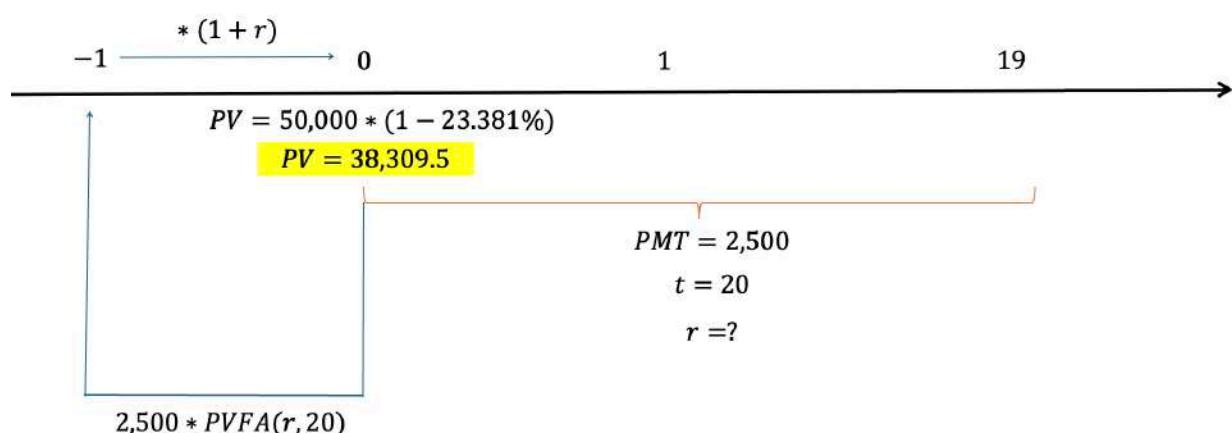
מכונה לחימום נקייקות ניתנת לרכישה בעלות של 50,000 ש"ח ב-20 תשלוםים חודשיים שווים בסך 2,500 ש"ח כל אחד, כאשר התשלום הראשון מבוצע היום. לחילופין, ניתן לקבל במסלול רכישת מכונית לחימום נקייק במזומן (מיידית) הנחתת מזומן בשיעור של 23.381%.

נדרש: מהי הריבית השנתית האפקטיבית הגלומה באלטרנטיבת האשראי?

**פתרון:**

שיםו לב בבקשתה בטור התחלת להבדל המהותי מאי שאלת (חילוץ ריבית המגולמת בהסדר תשלוםים, עם ערכים כספיים) זו לבין הקודמות לה (חילוצי ריבית על פי ערכים אוחזים).  
בשאלות הקודמות קיבלנו ריבית נקובה (עם נתונים נלוויים) בעסקאות "פשיות" (הנפרעות בתשלום אחד) והיינו צריכים לחשב בעצמנו (לפי נוסחאות מוגדרות) את הריבית האפקטיבית (הכוללת) בהתייחס לריבית דרייבית וריבית מראש.

לעומת זאת בשאלת זו אין שום אזכור של ריבית נתונים, ובנוסף - הנתונים בשאלת לא מוצגים כעסקה פשוטה (עם תזרים אחד בהתחלה ותזרים נוסף בסוף) אלא כסדרה.



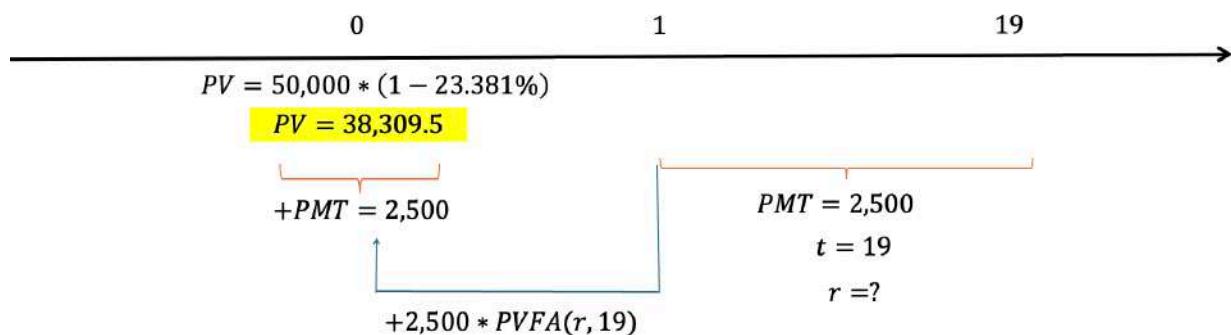
כדי לחץ ריבית המגולמת בהסדר תשלומים אלו נשתמש במשפט הטוען **שמחיר נכס במזומן/נתו** (אחרי הנחה ככל שיש) הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים בהסדר התשלומים המשולם בעדו. מחיר זה מחושב בתורו המחיר הכללי הנוכחי כפול אחת פחות שיעור הנחה:

$$PV_{CASH} = 50,000 * (1 - 23.381\%) = 38,310$$

כעת נבטא את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים שהוא בוגדר סדרה קבועה:

$$PV_{HESDER} = 2,500 * PVFA(r, 20) * (1 + r)$$

מה עשינו כאן? ישנה סדרה שמתחליה בזמן 0 (כ噫 התשלום הראשון היום). היינו סדרה מקפץ תמיד "אחד אחרה" ביחס לתזרים הראשון בסדרה. כמובן, הביטוי  $PVFA(r, 20) * 2,500$  מוביל בזמן 1-. כדי לתקן קדימה علينا לכפול ב-1 ועוד הריבית (כך חזרים מ-1- לזמן 0). אלא שלאור העובדה שהנעלם  $z$  מופיע במצב כזה בשני מקומות, גם ב-  $PVFA$  וגם בביטוי ההתאמה, זה קצר מbas. כדי להתגבר על זה, נפעל בדרך הבא:



$$PV_{HESDER} = 2,500 * PVFA(r, 19) + 2,500$$

הביטוי  $2,500 * PVFA(r, 19)$  מייצג את הערך הנוכחי של 19 התזרומים מזמן 1 עד זמן 19, שkopצת אוטומטית מזמן 1 לזמן 0 איזה כיף, ומה לגבי התזרים בזמן אפס? אוסף אותו בפרד.

וכעת נפתרו:

$$PV_{CASH} = PV_{HESDER}$$

או בעצם:

$$38,310 = 2,500 * PVFA(r, 19) + 2,500$$

נעביר אגפים:

$$38,310 - 2,500 = 2,500 * PVFA(r, 19)$$

נחלק את שני האגפים ב-2,500 :

$$\frac{38,310 - 2,500}{2,500} = PVFA(r, 19)$$

או בעצם :

$$14.324 = PVFA(r, 19)$$

וכאשר נחפש בלוח א-4 בנספח א לערך  $D$  (לוח PVFA) עבור איזו ריבית  $r$  מתקיים שההינטן  $t=19$  הערך הוא 14.324 - נגלה שהדבר מתקיים עבור ריבית של 3%.

$$r = 3\%$$

אלא שריבית זו כיאה לסדרה היא ריבית לתקופה המיצגת את פרק הזמן בין תשלומים :(Clomer, זהה ריבית חודשית. כדי להמיר אותה למונחים שנתיים, כפי שדרשה השאלה, נתבسط על הנוסחה הבסיסית להמרת ריבית

- מעריך חזקה מתאים, ונקבל **תשובה סופית - ריבית אפקטיבית سنوية** :

$$r_{ANNUAL} = (1 + 3\%)^{12} - 1 = 42.576\%$$

אופנו החילוץ של הריבית (החודשית, לפני התאמת לשנה) מהלוח מובא לנוחותכם בצלום המופיע בעמוד הבא.

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%
1		0.990	0.980	0.971	0.962	0.952
2		1.970	1.942	1.913	1.886	1.859
3		2.941	2.884	2.829	2.775	2.723
4		3.902	3.808	3.717	3.630	3.546
5		4.853	4.713	4.580	4.452	4.329
6		5.795	5.601	5.417	5.242	5.076
7		6.728	6.472	6.230	6.002	5.786
8		7.652	7.325	7.020	6.733	6.463
9		8.566	8.162	7.786	7.435	7.108
10		9.471	8.983	8.530	8.111	7.722
11		10.368	9.787	9.253	8.760	8.306
12		11.255	10.575	9.954	9.385	8.863
13		12.134	11.348	10.635	9.986	9.394
14		13.004	12.106	11.296	10.563	9.899
15		13.865	12.849	11.938	11.118	10.380
16		14.718	13.578	12.561	11.652	10.838
17		15.562	14.292	13.166	12.166	11.274
18		16.398	14.992	13.754	12.659	11.690
19		17.226	15.678	14.324	13.134	12.085
20		18.046	16.331	14.877	13.590	12.462
21		18.857	17.011	15.415	14.029	12.821
22		19.660	17.658	15.937	14.451	13.163
23		20.456	18.292	16.444	14.857	13.489

## שאלה 50 - חילוץ ריבית אפקטיבית בעסקה משולבת

שייקה פיננסים בע"מ מציע למפקידים בתוכנית חסכו הלוואה בשיעור של 80% מסכום ההפקדה בחסכו. הלוואה ניתנת לתקופה זהה לתקופת החסכו, והיא נושא ריבית שנתית בשיעור 8% לשנה. החסכו נושא ריבית בשיעור 12% לשנה, וסכום ההפקדה בחסכו הוא 20,000 ש"ח. תקופת ההפקדה היא 8 שנים.

נדרש: מהו שיעור התשואה השנתי האפקטיבי בעסקה זו?

פתרון:

קודם כל בرمת המונחים: שיעור תשואה שנתי אפקטיבי = ריבית אפקטיבית. בטור התחלה, נבדוק: האם זו עסקה שנפרעת בתשלומים, ואז נctrיך לעבוד עם סדרות, או שמדובר בעסקה שבמסגרתה יש תשלום הום, תשלום בעתיד בנקודה אחת ויחידה זהה? והתשובה היא שבמקרה זה ישנה הפקדה בנקודה בודדת, ופירעון בנקודה בודדת, והיחס בין התזרומים נטו (תזרים בסוף, חלקי הערך המוחלט של התזרים ההתחלתי), פחוות אחת, ישקף את הריבית:

	0	8
הפקדה	-20,000	פרעון ההפקדה 49,519
קבלה הלוואה	16,000	פרעון הלוואה -29,615
סה"כ נטו	-4,000	סה"כ נטו 19,904

$$r_{ef}(8 \text{ Years}) = \frac{19,904}{4,000} - 1 = 397.6\%$$

הסברים נוספים:

בזמן 0: מפקידים (בסכום שלילי) 20,000, ומיד מקבלים (בסכום חיובי) הלוואה בשיעור 80% מסכום זה, קרי 16,000 ש"ח, כך שסכום התזרומים נטו בזמן אפס הוא  $-4,000 = -20,000 + 16,000$ .

בזמן 8: פירעון ההפקדה מתחשב בסכום ההפקדה שהוא 20,000, בריבית על ההפקדה 12% לשנה ובמספר התקופות שהנו 8:  $20,000 * (1 + 12\%)^8 = 49,519$ .

בנוסף, באותו הזמן, יש גם לפירעון את הלוואה. פירעון הלוואה מתחשב בסכום הלוואה 16,000, בריבית בגין הלוואה 8% ובמספר התקופות שהנו 8. כך מקבלים שסכום החזר בסכום שלילי בגין הלוואה הוא:  $-16,000 * (1 + 8\%)^8 = -29,615$ .

בהתחשב בשני ערכיהם אלו - התקובל מפדיון הפקדו, והתשלום בעד פירעון הלוואה - הרי שהתזרומים נטו בזמן 8 הוא  $49,519 - 29,615 = 19,904$ .

כעת, הריבית האפקטיבית לכל תקופת העסקה היא היחס בין סכום התשלום בתום התקופה לבין הערך המוחלט של ההשקעה נטו:

$$r_{ef} = \frac{19,904}{4,000} - 1 = 397.6\%$$

חשוב לשים לב שטיבית זו שקיבלו היא לתקופה של 8 שנים. על מנת למצע אותה קרי לתרגם אותה לרכיבית אפקטיבית שנתיות, כפי שדרשה השאלה. את ההמרה מבצעים עם מעיריך חזקה מותאים (ההמורות המשועגות שחולות גם חלוקה וכיוצא בזה, מתחומות למצבים של ריבית נקובה המוחשבת מספר פעמים, או ריבית מראש וכן על זה הדרך, ראו תרגילים קודמים):

$$r_{ANNUAL} = (1 + r_{8YEARS})^{\frac{1}{8}} - 1$$

או בהצגה, קיבל כי הריבית האפקטיבית השנתית היא:

$$r_{ANNUAL} = (1 + 397.6\%)^{\frac{1}{8}} - 1 \approx 22.21\%$$

מעיריך חזקה הוא למעשה היחס בין "הרצוי למצוי". כמובן, אני רוצה לחשב ריבית אפקטיבית לשנה (1) - הרצוי, המצוי - מה שיש לי - זו ריבית אפקטיבית ל-8 שנים. כך שהיחס בין הרצוי למצוי הוא  $1/8$  ובהתאם זהו מעיריך חזקה.

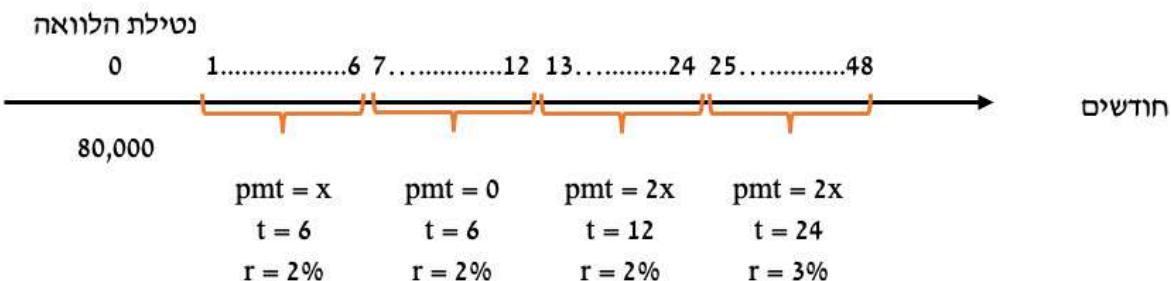
#### שאלה 5 - יישומי הלוואה עם פיגורים בתשלומים ושינויי ריבית

אבנر נטל הלוואה בסכום של 80,000 ש"ח. הוא מחזיר, לפי ההסכם, סכום קבוע בכל סוף חודש. ב-6 החודשים האחרונים של השנה ה-1, לא הצליח לעמוד בחזוריים. בכל אחד מהחודשים העוקבים בשנים 2, 3, 4, ביצע החזוריים בסכום כפול מההחזר ב-6 החודשים הראשונים. הריבית החודשית היא 2% בגין השנתיים הראשונות 1-3% בכל חודש לאחר מכן.

נדרש: מהו סכום ההחזר החודשי בשנה ה-1, בכל אחד מ-6 החודשים הראשונים?

**פתרון:**

תמיד ולעולם - ולכפי כל הלוואה - סכום ההלוואה הוא ערך הנוכחי של החזירה. במקרה זה, החזוריים כוללים 2 סדרות: סדרה ראשונה בסכום מסוים, וסדרה נוספת, בסכום כפול (גובה פי 2) לאחר מכן.



$$80,000 = x * PVFA(2\%, 6) + 2x * PVFA(2\%, 12) * (1 + 2\%)^{-12} + 2x * PVFA(3\%, 24) * (1 + 2\%)^{-24}$$

$$80,000 = x * 5.601 + 2x * 10.575 * 1.02^{-12} + 2x * 16.936 * 1.02^{-24}$$

$$80,000 \approx 43.3366x \rightarrow x \approx 1,846$$

הוائل זה - x מייצג את התשלום החודשי בחודשים הראשונים שלגביו נשאלנו - זהה גם התשובה הסופית.

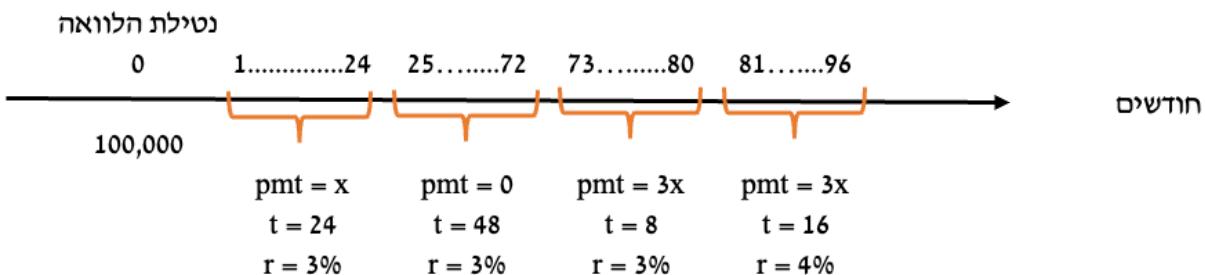
**שאלה 52 - יישומי הלואה עם פיגורים בתשלומים ושינויי ריבית תרגול נוסף**

קוקי נטל הלואה בסכום של 100,000 ש"ח. הוא מছיר, לפי ההסכם, סכום קבוע בכל סוף חודש. בשנים 3, 4, 5-6 לא ביצע החזירים. בכל אחד מהחודשים בשנים 8, 7 ביצע החזירים בסכום גבוה פי 3 מסכום החזר החודשי בשנתיים הראשונים הריבית החודשית היא 3% במהלך 6 השנים ו-8 החודשים הראשונים ו-4% בכל חודש לאחר מכן.

נדרש: מהו סכום החזר החודשי הקבוע בשנתיים הראשונים?

פתרון:

שאלה זו דומה מאד לקודמתה - גם היא דורשת חילוץ הנשען על המשפט "סכום הלואה הוא ערך הנוכחי של החזרה". ההבדל היחידי בין שאלה זו לקודמתה, הוא במספר השנים וכן בתקופות הריבית שאינן מבטאות שנים שלמות.



$$100,000 = x * PVFA(3\%, 24) + 3x * PVFA(3\%, 8) * (1 + 3\%)^{-72} + 3x * PVFA(4\%, 16) * (1 + 3\%)^{-80}$$

$$100,000 = x * 16.936 + 3x * 7.02 * (1 + 3\%)^{-72} + 3x * 11.652 * (1 + 3\%)^{-80}$$

$$100,000 \approx 22.7282x \rightarrow x \approx 4,400$$

לקראת המפגש הבא:

- לסגור הרמתית את ייחידה 5 ברכפים כולל בוחן מסכם.
- יש לחזור היטב על כל השאלות והסוגיות ולמצוא ככל שניתן הקובלות באופ"ל.
- רשות שטחיות לחלק מהסטודנטים/סטודנטיות: המחברת הינה שבאות עדי עמי 170 כולל המחוות רבות נוספות עם פתרון מלא.
- אם תתקלו בשאלת המציביעה על פרויקטים המוצאים זה את זה / פרויקטים בלתי תלויים / פרויקטים לא קובנציאנליים) - דלו גם, נגיעה במפגש הבא (מבוא ליחידה 6 לגבי פרויקטים).

**שאלה 53 - חישובי ריבית והמשמעות של ריבית מראש וריבית פשוטה**  
שי יכול ליטול הלואה ל-4 שנים באחד מבין המסלולים הבאים :

- ריבית דרייבית לפי שיעור של 10% לשנה.
- ריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית) בשיעור חצי שנתי של 5%.
- ריבית מראש בשיעור של 4% לחצי שנה, המוחשבת לפי תשלום ריבית בתחילת החציון.
- ריבית מראש בשיעור כולל לתקופה כוללת של 8% ובנוסך ריבית שנתית נקובה בשיעור 4% המוחשבת כל חצי שנה.

נדרש : מהי הריבית האפקטיבית בכל חלופה, ובהתאם - איזו חלופה תועדף?

פתרון :

שאלה זו מתמקדת בנושא שהוצג בפגש קודם (4) - חישובי ריבית אפקטיבית. בנוסף, הואיל ומדובר בהלוואה, נuant לחזור בחלופה שבה הריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר. ההבדל העיקרי בין שאלה זו למקבילותיה משיעור 4 קשור לניסוח של חלופות ב-ו-ג.

הריבית האפקטיבית שנחשב, בכל החלופות, היא ל-4 שנים (תקופת העסקה).

**א. ריבית דרייבית לפי שיעור של 10% לשנה**  
חישוב "ריבית דרייבית" הוא למעשה חישוב "ברירתה המחדל" שלנו בקורס, והוא נועל לפחות אלא אם נאמר אחרת. כאשר ריבית מוחשבת כ"ריבית דרייבית" אין שום אזכור של היותה "נקובה המוחשבת כל..." ואין שום אזכור של "מושלמת מראש/מוחשבת מראש" אזי הנוסחה הרלוונטית היא למעשה נוסחת המרת ריבית אפקטיבית - כך נצליח לחשב ריבית אפקטיבית כוללת לכל 4 השנים, שאותה נשווה אל מול הריביות האפקטיביות ל-4 שנים בمسلולים האחרים.

$$r_e = (1 + r)^m - 1 = (1 + 10\%)^4 - 1 = 46.41\%$$

ואם כך - כבירותת מחדל: ריבית לשנה מומרת ל-4 שנים באמצעות 1 ועוד הריבית השנתית 10% בחזקת מספר שנים (4) וכל זה - פחות אחת.

**ב. ריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית) בשיעור חצי שנתי של 5%**

רקע: החישוב הבסיסי של ריבית (ראו סעיף א) מניח בהגדירה "ריבית דרייבית". זו הסיבה לכך שיש חזקה בנוסחה. במקרה החרג שבו נאמר מפורשות שהריבית היא ריבית פשוטה ללא ריבית דרייבית, אזי הריבית לתקופה הכוללת היא המכפלה הפשוטה (כפל, לא חזקה) של הריבית התקופתית במספר התקופות.

$$r_e = 5\% * 8 = 40\%$$

נתמכת את ההבדלים בטבלה הבאה :

ריבית חצי שנתית בשיעור 5%	ריבית פשוטה בשיעור 40%
---------------------------	------------------------

חboro ריבית אפקטיבית ל-4 שנים המקרה הנדון כאן (יחסית נdry)	חboro ריבית אפקטיבית ל-4 שנים (המקרה הנפוץ מady)
$r_e = 5\% * 8 = 40\%$	$r_e = (1 + 5\%)^8 - 1 = 47.74\%$

ג. ריבית מראש בשיעור של 4% לחצי שנה, המוחשבת לפי תשלום ריבית בתחילת החציון.

המשמעות של ריבית מראש - היא ניכוי המבוצע מקרן ההשקעה או ההלוואה מיד במועד ביצוע העסקה (זמן 0). ולכן, בrama החישובית, ריבית מראש מקבלת ביטוי בסימן שלילי דרך מכנה הריבית האפקטיבית. במלים אחרות, כאשר אני מזזה שאלת עם ריבית מראש, החישוב "הכללי" במקרה הקל ביותר יהיה:

$$r_e = \frac{1}{1 - R_d} - 1$$

אם מדובר בRibit מראש שהיא אחת ויחידה לכל התקופה, ואניינה מוחשבת "מספר פעמיים", כל מה שצדך לעשותות הוא לנכונות אותה במכנה וסימנו. למשל, אם היו אומרים: "מהי הריבית האפקטיבית בעסקה ל-4 שנים שבה מנוכה ריבית מראש לכל 4 השנים בשיעור 28%" החישוב יהיה:

$$r_e = \frac{1}{1 - 28\%} - 1 = 38.88\%$$

אבל אם מדובר בRibit מראש המוחשבת "כמה פעמיים" - זה מקרה כאן - ריבית מראש, 4% לחצי שנה, אבל העסקה יכולה להיות ל-4 שנים. ולכן התשובה היא:

$$r_e = \frac{1}{(1 - r_d)^m} - 1 \rightarrow \frac{1}{(1 - 4\%)^8} - 1 = 38.62\%$$

(\*) שימוש לב, בשונה משאלת 47, את הריבית מראש במכנה אין "לחולק" בשום דבר. וזאת מפני טעמיים: ראשית, משום שהריבית הזאת אינה נקובה. שנית, משום שיש חפיפה מלאה בין תקופת הריבית לבין תקופת חישוב (כל הרעיון של חלוקת ריביות נוצר במצבים שבהם הריבית הנתונה נקובה, ויש לחלק אותה כדי להגיע לריבית לתקופת חישוב אחת - למשל "ריבית נקובה שנתיות המוחשבת כל חודש").

ד. ריבית מראש בשיעור כולל לתקופה של 8% וריבית שנתיות נקובה בשיעור 4% המוחשבת כל חצי שנה.

ראשית, הפרדת רשותות:

- יש כאן גם ריבית מראש, וגם ריבית שנתיות נקובה המוחשבת כל חצי שנה ומשולמת "בסוף". במלים אחרות, יש כאן גם ניכוי מהמכנה (ריבית מראש) וגם תוספת במונה (ריבית "בסוף").
- לענין הריבית מראש: על פי הנתון כאן, השיעור שלה, 8% הוא לכל התקופה. כמו כן, ריבית זו אינה מוחשבת "כל א זמן", ושיעורה הוא **לכל התקופה** - לא צריך להשתמש בחזקה כלשהי כדי להמיר אותה לתקופה ארוכה יותר.
- לענין הריבית השנתית הנקובה המוחשבת כל חצי שנה: علينا להתבסס על חלוקת הריבית הנקובה כדי להמיר אותה לתקופת חישוב אחת ( $\frac{R}{2}$ ) ולאחר מכן علينا לשאול את עצמנו: כמה תקופות חישוב ריבית (כמה חצאי שנים) נכללים בתקופת העסקה (4 שנים) - מעריך חזקה של 8.

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{1 - R_d} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{4\%}{2}\right)^8}{1 - 8\%} - 1 = 27.35\%$$

רכיבי הממצאים והכרעה - מדובר בהלוואה - אעדיף המסלול הנושא את הריבית האפקטיבית הנמוכה ביותר :

חלוקת	ריבית אפקטיבית
א	46.41%
ב	40%
ג	38.62%
ד	27.35% [הנמוך ביותר, בהלוואות - יעדן]

#### שאלה 54 - חילוץ הפקודות מסדרה הכוללת תשומות ריעוניים

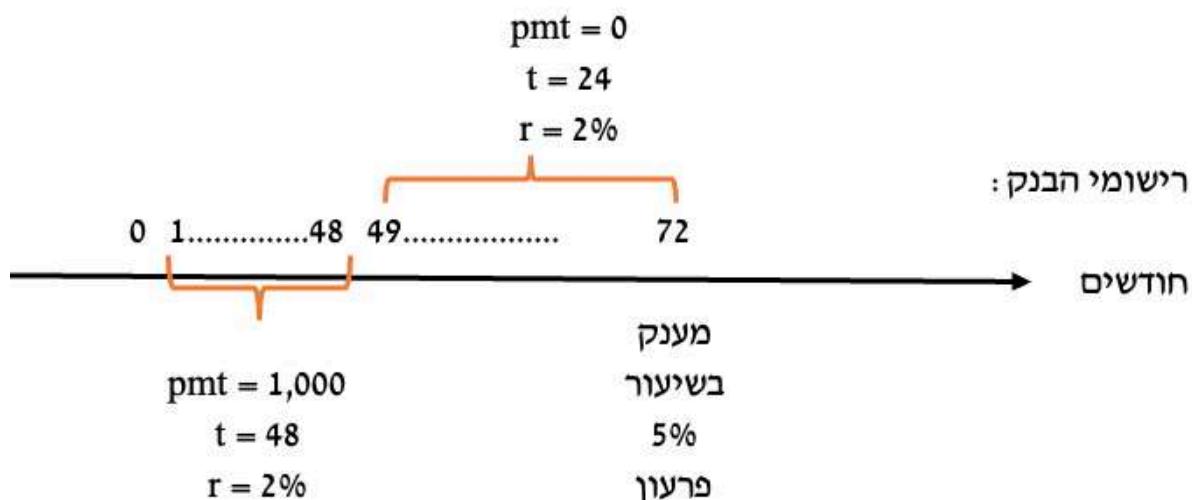
בנק צילוש מציע למשקיעיו להפקיד (בפועל) בכל תחילת חודש במשך 4 שנים סכום קבוע. הבנק יתיחס לשקעה זו באופן ריעוני, כך שבספריו ירשום את הפקודות לפי הפקודות סוף חודשיות בסכום של 1,000 ש"ח. הסכום הריעוני שרושם הבנק בספריו נושא ריבית חודשית בשיעור 2%. בחלוף שנתיים מסיום החסכו (סוף שנה 6), ניתן לקבל את כל הסכום שנצבר ונרשם ריעוניית לunganם, בתוספת מענק בשיעור של 5% מהסכום.

בנהנזה שההשוואה השנתית האפקטיבית של התכנית היא 60.10322%, מהו הסכום שיופקד בכל תחילת חודש?

פתרון :

השאלה זו מורכבת, משום ש מבחינה אינטואיטיבית קשה לנו לחשב על מצב שבו נפקיד סכום מסוימים במועדים מסוימים והבנק יבצע את רישובי הצבירה על סכום "אחר" שMOVFKD בעיתוי "שונה". יחד עם זאת, אלו הנזונים. וכך לפך את השאלה, בטור התחלת, נתייחס אך ורק לאותם סכומים שהבנק מתייחס אליהם בחישוב הצבירה. כלומר - לאותה סדרה של 1,000 בתום כל שנה 4 שנים, עם צבירת ריבית נוספת של שנתיים עד הפירעון (ריבית חודשית קבועה 2%), ועם בONUS של 5% על הסכום הכלול.

כלומר, מנקודת ראות הבנק וציבורת הסכום הריעוני :



והסכום הריעוני הכלול שנצבר, כולל צבירת ריבית נוספת וכולל מענק פירעון :

$$FV = 1,000 * FVFA(2\%, 48) * (1 + 2\%)^{24} * (1 + 5\%)$$



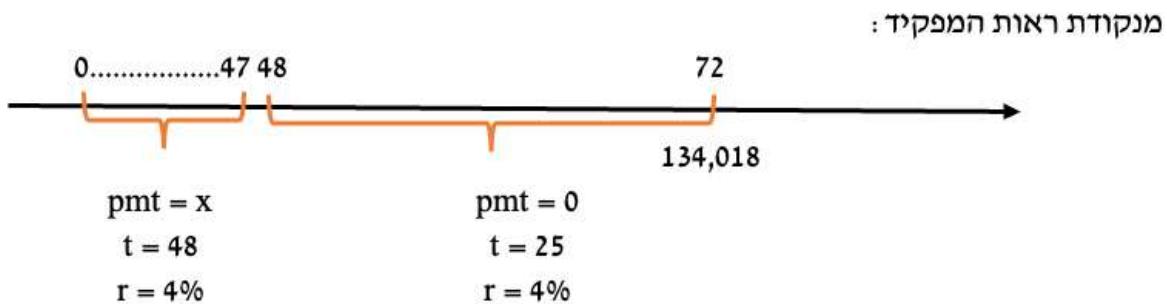
בבחבה :

$$FV = 1,000 * 79.354 * 1.02^{24} * 1.05 = 134,018$$

המסקנה היא שמנקודת ראות הבנק, הסכום שהוא מחייב להעניק למשקיע בתום השנה ה-6 (בתום החודש ה-72) הוא 134,018 ש"ח. אם כל מה שהייתי רוצה לדעת הוא הסכום שיינבע לידי המשקיע, סיימתי. אבל כאן השאלה שונה...

כעת, אני יודע בדיקות מה המפקיד מקבל בתום התקופה (ה-FV שלו). כדי לדעת כמה הוא מפקיד בפועל, סכום שאינו ידוע אני חייב להציג את ערכו ההפקדה בפועל על ציר הזמן בצורה נcona. על פי נתוני השאלה, ההפקדות בפועל הן בתחילת כל חודש 4 שנים (כלומר בזמן 0-47 ולא 1-48). כמו כן, סכום ההפקדה בפועל לא ידוע - ולכן יסומן כ- $x$ . FV בתום 6 שנים הוא 134,018 ש"ח. לגבי הריבית בפועל - על פי נתוני השאלה הריבית האפקטיבית היא 60.10322%. כדי לפעול בריבית מתאימה (חודשית) לחישובי סדרה חודשית, علينا להמיר אותה משנה לחודש. להלן הריבית החודשית :

$$r_e = (1 + r)^m - 1 = (1 + 60.10322\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 4\%$$



למעשה, הסכום המופקד בפועל  $x$  בתוספת הריבית האפקטיבית והתאמות לפירעון על בסיס ריבית אפקטיבית, חייב להצטבר לסכום שבו יזוכה המשקיע בפועל, ואשר חושב לפי הצבירה הרוועונית של הבנק.

$$x * FVFA(4\%, 48) * (1 + 4\%)^{25} = 134,018$$

ערך עתידי סדרתי של ההפקדות בפועל - מוביל למועד הפקודה אחרונה, זמן 47

צברת ריבית נוספת של 4% לחודש, 25 חודשים נוספים (מן 47 עד 72)

סך הצבירה שנתתקבלה על פי הנוסחה של הבנק

התשובה הסופית :

$$x * 139.263 * (1 + 4\%)^{25} = 134,018 \rightarrow x \approx 361$$

המשקיע צריך להפקיד בפועל בתחילת כל חודש במשך 4 שנים כ-361 ש"ח.

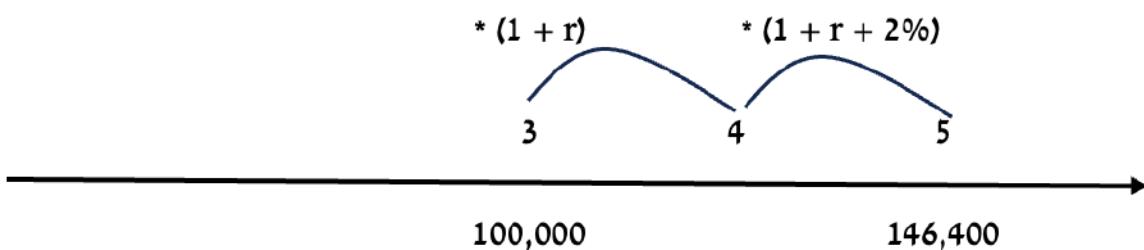
### שאלה 55 - חילוץ ריבית עם שינויי ריבית ובהתאם סכום השקעה

פוקינדה השקעה סכום מסוים, ובחלוף 3 שנים עמד לרשותה סכום של 100,000 ש"ח. בחלוף שנתיים נוספות עמד לרשותה סכום של 146,400 ש"ח. בהנחה שהריבית עלה מדי שנה ב-2%, מהו הסכום שהפקידה פוקינדה?

פתרון :

ידוע שהפקדנו סכום מסוים, אך הוא לא נתון בערך מסוימי. כלומר:  $PV = x$ . בנוסף אני יודע, שבחלוף 3 שנים הסכום שנცבר הוא 100,000. הבעייה: אני לא יודעת מה הריבית. הואיל ואני תקוע, אנסה להציג על ציר הזמן את מה שאני CAN יודעת: אני יודעת שבזמן 3 הסכום הוא 100,000. אני יודעת שבזמן 5 (שנתיים נוספות לאחר מכן) הסכום הוא 146,400.

ולמרות שהריבית לשנה 4 (בין 3 ל-4) ולשנה 5 (בין 4 ל-5) לא ידועה, אני CAN יכול לבטא אותה כנעלם אחד - כי הריבית בכל שנה גובהה ב-2% ביחס לקודמתה; ולכן, אם סימנתי ריבית לשנה 4 כ- $r$ , הריבית לשנה 5 תהיה  $r+2\%$ .



המשווה המשוואת המבטאת את הקשר בין הסכום שנცבר לזמן 3 לבין הסכום שנცבר לזמן 5 תהיה, לפיכך:

$$100,000 * (1 + r) * (1 + r + 2\%) = 146,400$$



אחלק את שני האגפים ב-100,000:

$$(1 + r) * (1 + r + 2\%) = \frac{146,400}{100,000}$$

$$(1 + r) * (1.02 + r) = 1.464$$

נפתח סוגרים :

$$1.02 + r + 1.02r + r^2 = 1.464$$

נסדר את זה :

$$r^2 + 2.02r + 1.02 - 1.464 = 0$$

כלומר :

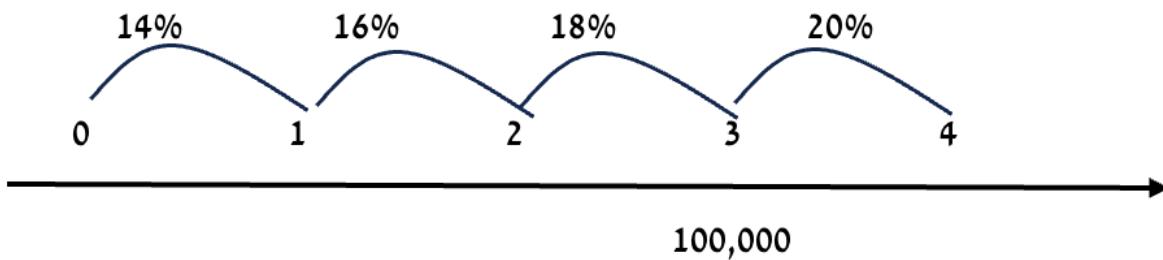
$$1 * r^2 + 2.02r - 0.444 = 0$$

כעת נוכל לפטור משווה ריבועית :

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2.02 \pm \sqrt{2.02^2 - 4 * 1 * (-0.444)}}{2 * 1} = \frac{-2.02 \pm 2.42}{2} = 20\%$$

אמנם יש שני פתרונות - אחד חיובי ואחד שלילי, אבל בקורס שלנו, ריבית חייבת להיות חיובית. לכן שוללים מיד את התוצאה השלילית.

וכעת, בהתבסס על חילוץ הריבית, נוכל לדעת מהי הריבית לשנים המוקדמות יותר, ובהתאם לחישב ערך נוכחי בזמן 0 על בסיס ריביות אלו, ובכך לגלו את סכום ההשקעה.



משוואת הפתרון שתענין תוצאה סופית תהיה :

$$PV = FV * (1 + r_1)^{-t_1} * (1 + r_2)^{-t_2} * (1 + r_3)^{-t_3}$$

$$PV = 100,000 * (1 + 18\%)^{-1} * (1 + 16\%)^{-1} * (1 + 14\%)^{-1} = 64,085$$

הסכום שהופק בזמן אפס הוא לפיכך 64,085 ש"ח. זהה התשובה הסופית.

טיפ שאני לומד מהשאלה, באופן כללי : אם אני יודע את הערך העתידי בזמן מסוים (כאן - בזמן 3) ובזמן מאוחר יותר (כאן - בזמן 5) אוכל להשתמש בהם כדי לחלק את הריביות השוררות ביניהם, ולקבל מכך אינדיקציה לריביות עבר.

**שאלה 56 - חילוץ סכום הנחה מבוסס ערך נוכחי, כשהריבית משתנה והסכום לא ידוע?**

גוזלינדה שוקלת האם לשלם היום בעד מחשב סכום מסוים בגין הנחה, או לשלם בעדו ב-10 תשלומים רבעוניים שווים (בהתבסס על המחיר המקורי, ללא הנחה), בתום כל רביעון.

בהתנה שבסנה הראשונה הריבית השנתית האפקטיבית  $16.985856\%$  וายלו בכל שנה עוקבת הריבית השנתית האפקטיבית  $12.550881\%$ , מהו שיעור הנחה שיווביל להעדפת התשלום במזומן?

**פתרון:**

אחד האתגרים בשאלות כאלה גלום בעובדה שהסכום הכספי לא נתון. מדובר על "סכום מסוים" זהה יכול למסכלל... כדי להתגבר על הבעיה, אפשר להתייחס לסכום הכלול כ-  $x$  (מחיר המחשב לפני הנחה) או להציב ערך מספרי כלשהו.

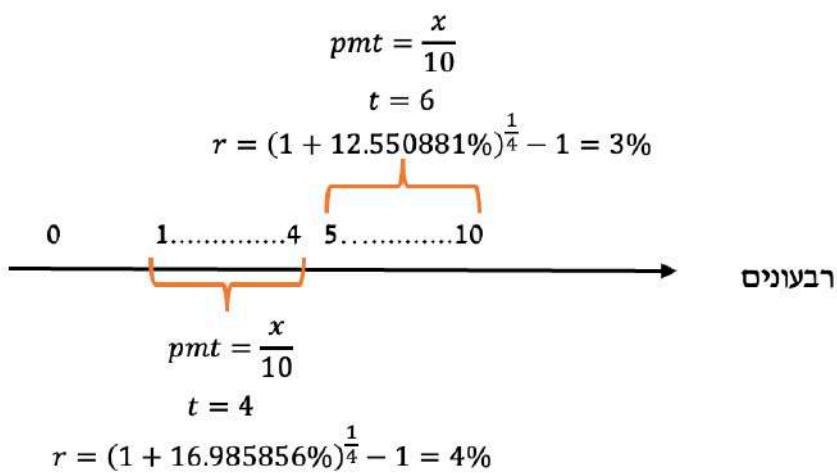
פריסת המחיר ללא הנחה ל-10 תשלומים שווים מובילה לתשלום תקופתי  $\frac{x}{10} = pmt$ .

בהתאם, ועל בסיס הנתונים המתאימים לריביות, אני יכול להציג את הסדר התשלומים על ציר הזמן. כשהאני עושה זאת, חשוב לשים לב שהריבית משתנה, ובנוסף - שלמרות שהסדר התשלומים כולל תשלומים רבעוניים, הריביות הנתונות הן אפקטיביות שנתיות.

**זה אומר שני דברים:**

- כשנתיאחס על הציר לסדרת התשלומים - עליי לפצלה לשניים (שינוי ריבית = מתחילה "סדרה חדשה").
- עלינו לבצע התאמה של הריבית משנה לרבעון לפחות הריבית האפקטיבית בגין כל סדרה.

**ציר הזמן המבטא את סדרת התשלומים **רבעוניים** והריביות יהיה, לפיכך:**



אנחנו טוענים שכשאנחנו משלמים על מוצר בתשלומים, אנחנו למעשה "משלמים פחות". כי לשלם בעתיד אומר שהכספי בינוינו, אנחנו לא מפסידים ריבית. זה כל הרעיון של ערך נוכחי; לשלם בעתיד זה יותר זול מאשר לשלם היום. לכן, בכל חישובי הערך ה- $PV$  שביבינו, הסכום של הערך הנוכחי נזוק מערך העתידי. זה אומר שאם רוצים לשכנע אותנו לשלם במזומן, צריכים לפצות אותנו על הקדמת התשלומים, או במלים אחרות - לחתת ליל הנחה. והנהנה צריכה להיות כזו שתפיצה אותנו על ההזלה שנובעת מהתשלום בעתיד.

לשם כך אני בונה ביטוי הביטוי המיציג את **הערך הנוכחי** של התשלומים :

$$PV = \frac{x}{10} * PVFA(4\%, 4) + \frac{x}{10} * PVFA(3\%, 6) * (1 + 4\%)^{-4}$$

בהמשך פיתוח מגלים שלשלם את הסדר התשלומים הניל זה כמו לשלם היום (ערך הנוכחי) :

$$PV = \frac{x}{10} * 3.63 + \frac{x}{10} * 5.417 * 1.04^{-4} = 0.826x$$

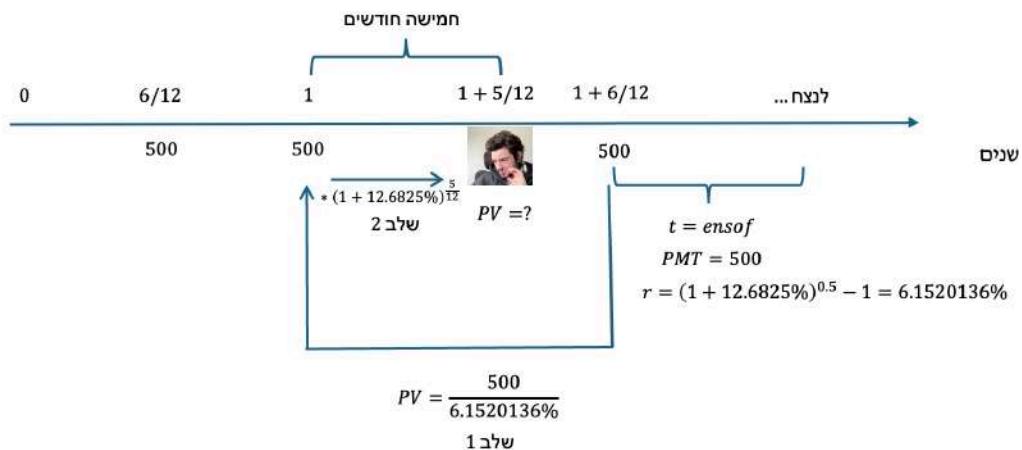
כלומר, עלות המוצר בתשלומים היא למעשה  $82.6\%$  מהמחיר המקורי המלא  $x$ . המשמעות היא שההנחה שתדרש היא לפחות  $17.4\% = 100\% - 82.6\%$  זה יהיה שיעור ההנחה המינימלי הנדרש שיבילל לכך שחולופת המזומנים תועדי.

שאלה 56.1 - ערך נוכחי של סדרה אינסופית עם חלקית תקופת והתאמות [לבקשת נופר]

נופר שוקלת לרכוש מכונה לחימום נקי שצפואה להניב למחזיק בה תזרים מזומנים נקי בסכום של 500 ש"ח בתום כל חצי שנה, לנצח. ידוע כי התקבול האחרון מכונת הנקי התקבל לפני 5 חודשים. בהנחה שהריבית האפקטיבית היא 12.6825% לשנה, מהו שווי הנכס היום?

פתרון:

הבסיס של השאלה פשוט באופן יחסית. חישוב ערך נוכחי =  $PV$  כי זו המשמעות של כל שאלה שבה שואלים מה השווי "היום". למעשה, הדיוון המרכזי כאן הוא בסוג ההתאמות המתבקשות - לריבית, לתקופות ולתוצאת הסדרה.



מה קרה פה?

אנו יודעים שהתשלום האחרון בוצע לפני 5 חודשים. ובנוסף, שפרק הזמן בין תשלוםיהם הוא חצי שנה (6 חודשים). המשמעות היא שהתשלום הקרוב הוא בעוד חודש אחד. כאשר מחשבים ערך נוכחי לסדרה האינסופית (ועושים זאת בריבית אפקטיבית המתואמת לחצי שנה - פרק הזמן בין תשלוםיהם) בהגדרה קופצים תקופת תשלום אחת אחרת לפני התשלום הקרוב, ככלمر חצי שנה אחרת (ולא חודש אחרת).

זה אומר שצורך לתקן את התוצאה 5 חודשים, באמצעות רלוונטיות (התשובה הסופית בצהוב):

$$PV = \frac{500}{6.1520136\%} * (1 + 12.6825\%)^{\frac{5}{12}} = 8,542$$

הערך הנוכחי של הסדרה האינסופית בהגדרה:  
סכום התקובל חלקית הריבית התקופתית

התאמת של התוצאה 5 חודשים קדימה לנוכח התמיהור

## שיעור בית

- לתחון את כל מה שלמדנו, כולל שאלות שדילגנו עליהם, ולחפש שאלות מקבילות באופל, לפטור גם אותו.
- ללמידה את כל הרצפים בנושא ערך הנוכחי, עתידי והלואות.
- לצפות בסרטון זהה להעמקת הידע בנושא הלואות - [הקלטה נוספת](#).
- במחברת הקורס הישנה / המורחת [כאן](#), אפשר כזכור לפטור הכל עד עמ' 170.
- אופל – עבודה מורכבת. לא להתייחס.
- שאלות שאין מובנות מהאופל (שאינו שאלות בנושא חישובי ריבית מורכבת), ניתן להציג אלינו בפורום את "סגנון" השאלה. אני לא אפטור אותה מני הסתמן, אבל אוכל לתת בהתאם בזמן וליכולה קווים. וכיון להתייחסות.

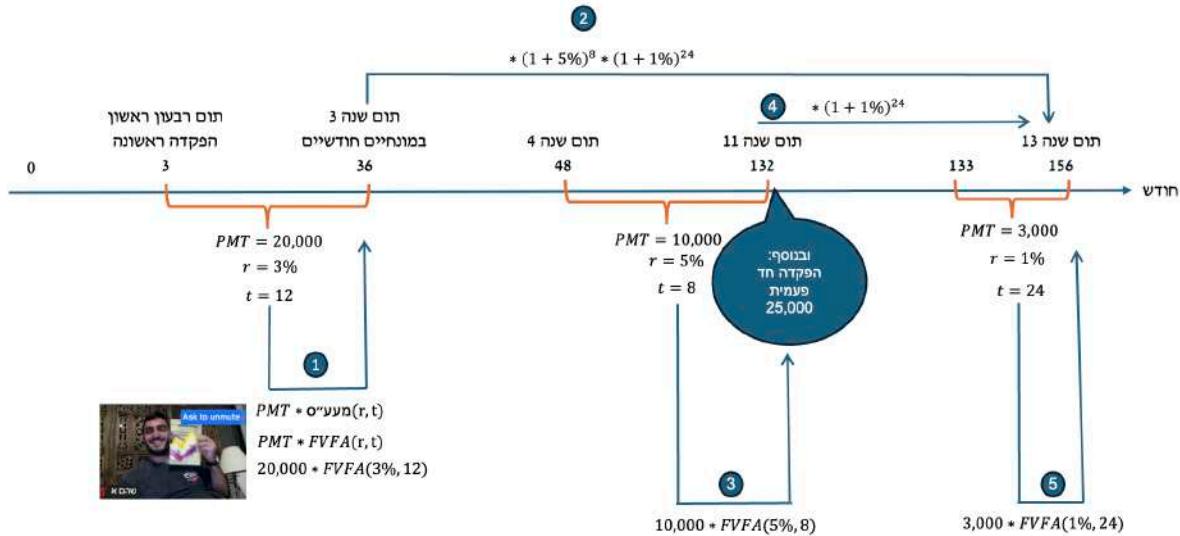
## תרגילים נוספים – מיעדים לתלמידי הנחיה וגילה (הנחיה מוגברת מזומנים להשתמש – לבריאות)

### שאלה 1001 – ערך עתידי מורכב

משה מתכוון להפקיד בתום כל רביעון במשך 3 שנים סכום של 20,000 ש"ח. בתום כל שנה עוקבת ובמשך 8 שנים בכוונתו להפקיד 10,000 ש"ח. מיד במועד ההפקדה השנתית האחרון בסך 10,000 ש"ח יוסיף סכום חד פעמי של 25,000 ש"ח ובנוסף, בתום כל חודש עוקב, במשך שנתיים, יפקיד 3,000 ש"ח. בהנחה שהריבית השנתית היא 3% לרבעון במהלך 3 שנים הראשונות, 5% לשנה, בכל אחת מ-8 השנים לאחר מכן, ו-1% לחודש בכל חודש עוקב, מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של משה במועד פדיון החסכו?

פתרון :

כמובן ששאלים כאן על ערך עתידי – הסכום שייעמוד לרשותו של משה במועד פדיון החסכו. הנקודה היא שמדובר בערך עתידי של מספר סדרות, עם אינטראול (מרוחק) זמן שונה, סכומים שונים וריביות שונות. חישוב ערך עתידי במצב כזה דורש מאייתנו לפצל את התחשבוןarlo לסדרות משנה; כל סדרה תכלול ערכיהם קבועים של ריבית, סכום ותדירות. וזה מה שבוצע בציר הזמן להלן.



כעת, נתיחס ונחשב את הערך העתידי של כל סדרה בנפרד.

הлогיקה תהיה: ערך עתידי של סדרה מוביל אותנו תמיד לנקודת הזמן שזזה לעיתוי תזרימה האחרון. במידה ועתוי תזרימה האחרון שונה מנקודת הפירעון / היעד, יש לבצע התאמה בדרך של צבירת ריבית נוספת (שבדרך כלל תבוצע במכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה).

ספציפית:

שלב 1: לוקח את נתוני הסדרה הראשונית, ש כוללת תשלום רבעוניים במשך 3 שנים (לכן 12 תשלום). הביטוי הוא:

$$20,000 * FVFA(3\%, 12)$$

ביטוי זה הוביל אותנו לנקודת הזמן של ההפקה האחורי בסדרה הרבעונית, כלומר לתום השנה ה-3. אבל הפירעון הוא רק בתום השנה ה-13. לכן, נדרש לבצע לערך זה כדי לבטא את הצבירה הכוללת הנובעת מסדרה הראשונית למועד הפירעון.

שלב 2: למעשה מהו המשך ישיר של שלב 1. הוא כופל את הביטוי של שלב 1 ב-1 ועוד הריבית השנתית השוררת ב-8 השנים הקרובות בחזקת 8, אז, ב-1 ועוד הריבית החודשית בחזקת 24, על מנת לבטא את הצבירה נוספת במהלך השנים הבאים לאחר.

$$* (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24}$$

בכך הכל: הערך העתידי הכולל הנובע מסדרה הראשונית בלבד למועד הפירעון הוא:

$$FV_{SERIES1} = 20,000 * FVFA(3\%, 12) * (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24}$$

שלב 3: לוקח את נתוני הסדרה השנייה, ש כוללת תשלום שנתיים במשך 8 שנים (לכן 8 תשלום). הביטוי:

$$10,000 * FVFA(5\%, 8)$$

ביטוי זה מוביל אותנו לנקודת הזמן של ההפקה האחורי בסדרה השנתית, כלומר לתום השנה ה-11 (מדוע 11? כי לפניה הייתה סדרה עד תום שנה 3 ודברים כאן ב-8 שנים נוספת). לכן, נדרש לבצע לערך זה כדי לבטא את הצבירה הכוללת הנובעת מסדרה השנייה למועד הפירעון.

שלב 4 : למעשה מהו זה המשך ישיר של שלב 3. הוא כופל את הביטוי של שלב 3 ב-1 ועוד הריבית החודשית השוררת בשנתיים הבאות בחזקת 24.

$$* (1 + 1\%)^{24}$$

בsek הכל : הערך העתידי הכלול הנובע מהתדרה השניה בלבד למועד הפירעון הוא :

$$FV_{SERIES2} = 10,000 * FVFA(5\%, 8) * (1 + 1\%)^{24}$$

נשים לב, שפרט לסדרה הנ"ל במועד סיוםה (טרם החתמות, מיד בתום שלב 3) קיימת הפקודה חד פעמיות נוספת של 25,000. אפשר לחשב לה ערך עתידי בנפרד, או להכניס אותה לחישוב הקודם.

$$FV_{\text{תוספה}} = 25,000 * (1 + 1\%)^{24}$$

שלב 5 : הסדרה האחרונה כוללת 24 תשלומים חודשיים, שמועד סיוםם הוא במועד הפדיון. לכן, בגין ערך עתידי לסדרה זו אין צורך בחתימה.

$$FV_{SERIES3} = 3,000 * FVFA(1\%, 24)$$

בsek הכל :

$$FV = 20,000 * FVFA(3\%, 12) * (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24} + 10,000 * FVFA(5\%, 8) * (1 + 1\%)^{24} + 25,000 * (1 + 1\%)^{24} + 3,000 * FVFA(1\%, 24)$$

וחתומה :

$$FV = 20,000 * 14.192 * (1 + 5\%)^8 * (1 + 1\%)^{24} + 10,000 * 9.549 * (1 + 1\%)^{24} + 25,000 * (1 + 1\%)^{24} + 3,000 * 26.973 = 766,386$$

שאלה 1002 – ערך נוכחי

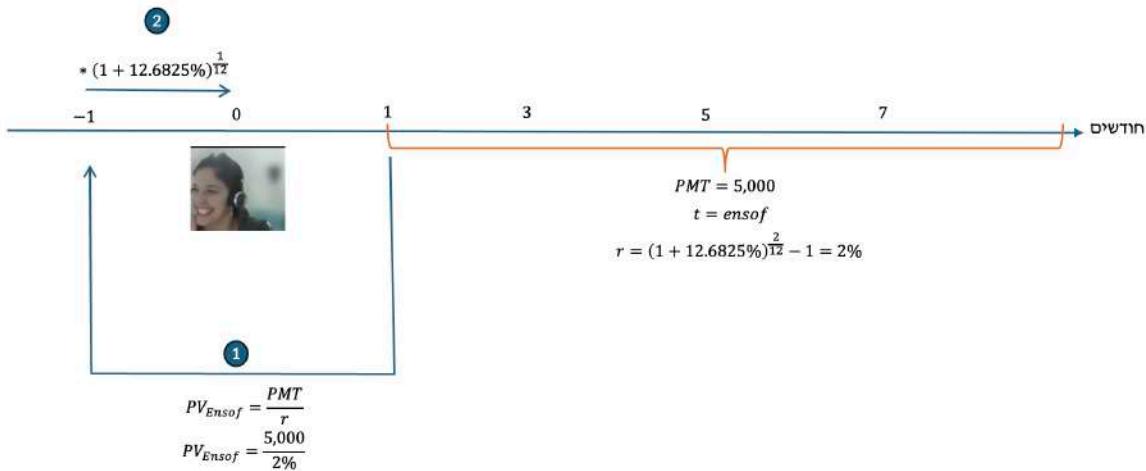
מציעים לענת לרכוש נכס שצפוי להניב לה בתום כל חודשים לנצח סכום של 5,000 ש"ח. הסכום יתקבל לראשונה בעוד חודש.

ידוע שהריבית השנתית היא 12.6825%.

נדרש : מהו המחיר המירבי שענת תסכים לשלם היום بعد הנכס?

פתרון :

ערך נוכחי הוא למעשה שווי – שווי בהווה. ביחידות הלימוד אהובים לסמןו כ- $V_0$ . אני מסמןו כ-PV מלשון Present Value. בדומה לחישובי ערך עתידי, גם חישובי ערך נוכחי יכולים להתבצע בגין סכומים בודדים וכן בגין סדרות. אלא שבשונה מערך עתידי, בחישובי ערך נוכחי קיימים גם המקרה של סדרה אינסופית. זה למעשה המקרה שמצוג כאן. מדובר בסכום שמתකבל בתום כל חודשים לנצח.



יש שאלה זו כמה נקודות החזקה ליבון : מה פשר חישוב הריבית עם החזקה בתוצאות נתוני הסדרה? כאשר מדובר בסדרה קבועה – סופית או אינסופית, אין זה משנה... עיבוד הסדרה (ביטהה במנוחי ערך נוכחי או עתידי) מחייב הזנת הריבית לפרק הזמן בין תלולים. בשאלת זו פרק הזמן בין תלולים הוא חודשיים ולרבה ה策ר צודתי בריבית שנתית בלבד. כבירות מחדל, המרת ריבית נתונה מתקופה אחת לאחרת מבוצעת באמצעות מערך חזקה מתאים בביטוי הבא (מבטא ריבית דרייבית) :

$$r_{\text{חדשיאים}} = \frac{1 - (1 + r_{\text{מצווי}})^{-12}}{r_{\text{מצווי}}}$$

בחבבה כאן – ידוע שהריבית המצויה קרי הנתונה היא 12.6825% ותוקפה לשנה (זו התקופה המצויה). אני רוצה ריבית לחודשיים, משום שהוא פרק הזמן בין תלולים שיאפשר לי לעבד את נתוני הסדרה. במלים אחרות, אני זקוק לחודשיים (רצו) מתקף שנה (12 חודשים) :

$$r_{\text{חדשיאים}} = \frac{(1 + r_{\text{מצווי}})^{\frac{1}{12}} - 1}{(1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} - 1} \approx 2\%$$

מה פשר שלב 1 שהשתמש בנוסחה :

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

המדובר בנוסחת ערך נוכחי של סדרה אינסופית. חשוב מאד – ערך נוכחי של סדרה, גם אם היא סופית וגם אם היא אינסופית, מוביל תמיד לנקודות הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד תרים המזומנים הראשונים בסדרה. לכן, אם סדרה החלת בזמן 1, ותדרות תשלום כל חודשיים, החישוב הנ"ל, בהבזה רלוונטי, יובילנו חודשים לאחר מכן זמן 1, כלומר לזמן -1 :

$$PV_{-1} = \frac{5,000}{2\%}$$

cut (שלב 2) עלינו לדחוף ערך זה קדימה ; על מנת לבטא את הערך הנוכחי במנוחי זמן 0 (זה מה שצרכיך). לשם כך, נכפול ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה. מדובר בתוצאות זמן ולכן כל עוד מערך החזקה בהתאם יהיה נכון, נגיע לתוצאה נכונה.

אני בחרתי להשתמש בריבית השנתית, ולכפול ב-1 ועוד שיעורה, בחזקת פרק הזמן היחסי של הריבית – אני זוקק לחודש צבירה מתוך שנה :

$$PV_0 = PV_{-1} * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} \rightarrow PV_0 = \frac{5,000}{2\%} * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} \approx 252,500$$

תשובה סופית : ענת תשככים לשלם היום בעד הנכס לכל היותר 252,500 ש"ח.

### שאלה 1003 – ערך נוכחי כשווי פריט הנרכש בתשלומים

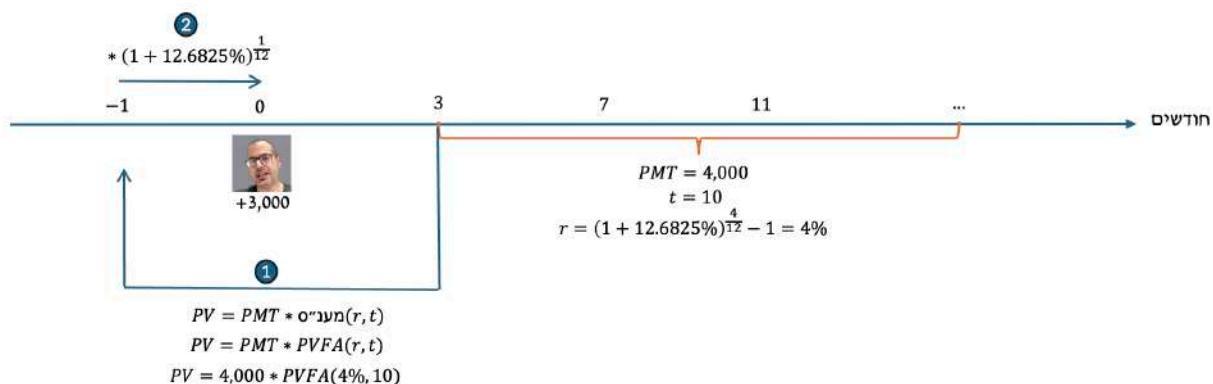
שם הוא ספק מכונות לחימום נקי. הוא יצא בтикוטו במבצע "בעל הבית השתגעו! מחונת חימום נקיין חחי טובہ שיש במחיר חבלי הזמן" : תשלום היום 3,000 ש"ח ואחר לכך תשלום לי כל 4 חודשים סכום של 4,000 ש"ח אבל את התשלום הראשון תקדים ותשלם עוד 3 חודשים". הריבית ששחם גובה היא בשיעור שנתי אפקטיבי של 12.6825%.

נדרש : מהו שווי המכונה / העלות שלה במידה ותירכש במזומן?



פתרון :

השאלה זו מז דומה לקודמתה – היא שואלת על השווי היום. יש כאן עניין קטן של סכום חד פעמי היום ודיוון נוסף בהתאם לריבית. בנוסף, השאלה מראה וריאציה ניסוחית שבה לא שאלו ברמת המונח על "השווי היום" אלא שאלו מה העלות שלה במזומן.



הביתוי הפותר את השאלה :

$$PV = 4,000 * PVFA(4\%, 10) * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} + 3,000$$

$$PV = 4,000 * 8.111 * (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} + 3,000$$

$$PV = 35,768$$

ולכן, זהה עלות המכונה במזומן : 35,768 ש"ח.

הסבירים נוספים :

ראשית, ערך הנוכחי של סדרה אינטואטיבית (שיש לבצע כדי להגיע לשווי הרכישה היום) מתקבל (במקרה של סדרה קבועה) על ידי מכפלת סכום התשלומים התקופתי : 4,000 ב��וי המתאים לערך הנוכחי של סדרה. יש נוסחה מתמטית לכך, אך בדרך כלל מיעזר בלוח שנקרא לוח א-4 לנשפח א-כרכז ד. לוח זה שנקרא גם לוח מענ"ס יודע לשולף על בסיס ערכי הריבית ומספר התשלומים את הפקטור שאמנו כפול בו את סכום התשלומים התקופתי נגיעה לערך הנוכחי הכללי.

אלא, שערך הנוכחי כולל זה הוא תמיד לנקודת הזמן המוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה. כאן, ממועד התזרים הראשון בסדרה הוא זמן 3, ומרוחק הזמן בין תזרים הוא 4 חודשים. לכן, הנוסחה מובילה בלי שנרצה לזמן 1- (4 חודשים לפני זמן 3). כדי לתקן את העיוות, כופלים ב-1 וודר הריבית בחזקה מתאימה של חודש.

על כל זה הוספנו סכום של 3,000 רק לאור העובדה שנתייני העסקה מבהירים מפורשות שפרט לסדרה דוחיה משלמים היום סכום נוסף שווה ערכו הנוכחי.

#### שאלה 1004 – בחירה בין תשלום במזומן והנחה לבין תשלום דוחי

ענת יכולה לרכוש במזומן מכונה לחימום נקניק. במידה ותעשה זאת, תזכה בהנחה בשיעור 10% מהמחיר הקטלוגי, שהוא 10,000 ש"ח.

אפשרות נוספת העומדת בפני עצמה היא לשלם את מלאה המחיר הקטלוגי, ללא הנחות, אך לזכות האשראי "ללא ריבית" לתקופה של 8 חודשים.

הנicho כי הריבית שענת משלם לבנק היא בשיעור 1.4% לחודש.

איזה חלופה تعدיף ענת?

פתרון :

כאשר נדרש לבחור בין תשלום בעתיד שגובה יותר לבין תשלום נמוך יותר בהווה, לא ניתן לבצע השוואה ברורה בין הערכיהם.

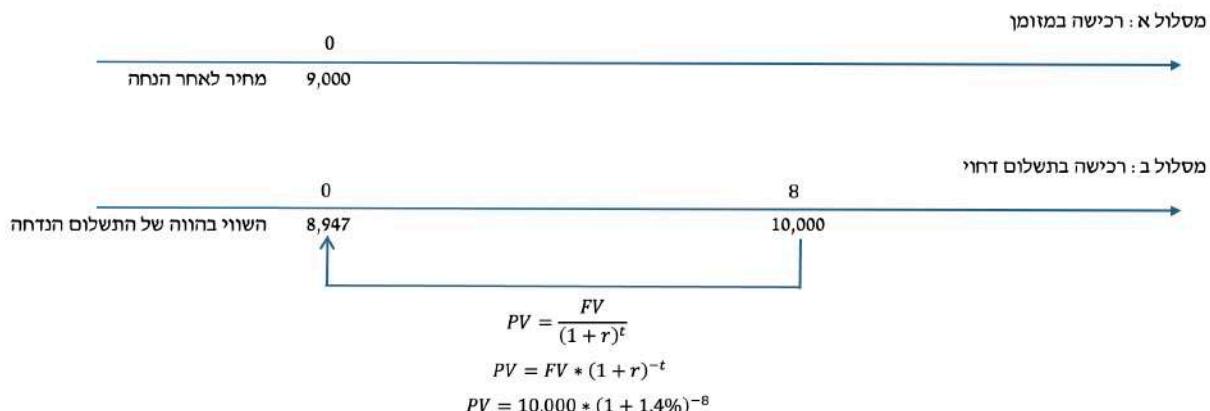
מה שעליינו לעשות כדי להחליט הוא לבטא את השווי בהווה (PV) של ההסדר העתידי, על מנת לבטא את עלותו ב"מונייה מזומן".

רק לאחר שנחשב PV להסדר האשראי הוא למעשה מעשה מומר ל"מונייה מזומן" ונitin להשותו למחיר המידי במזומן וכך לקבוע האם הוא כדאי יותר (הכבדות תיווצר מעשה עבור ההסדר שהערך הנוכחי של התשלומים בעדו הוא הנמוך ביותר).

להלן נציג שני צירום: הציר העליון קצר מיותר. הוא רק ממחיש את העובדה הטריביאלית של שלם היום בזמן – זה למעשה הערך הנוכחי; אבל כמובן שצורך לבטא בתשלום בזמןן את הנטו לתשלום, לאחר כל הנחה ללוונתית במידה וקיימת.

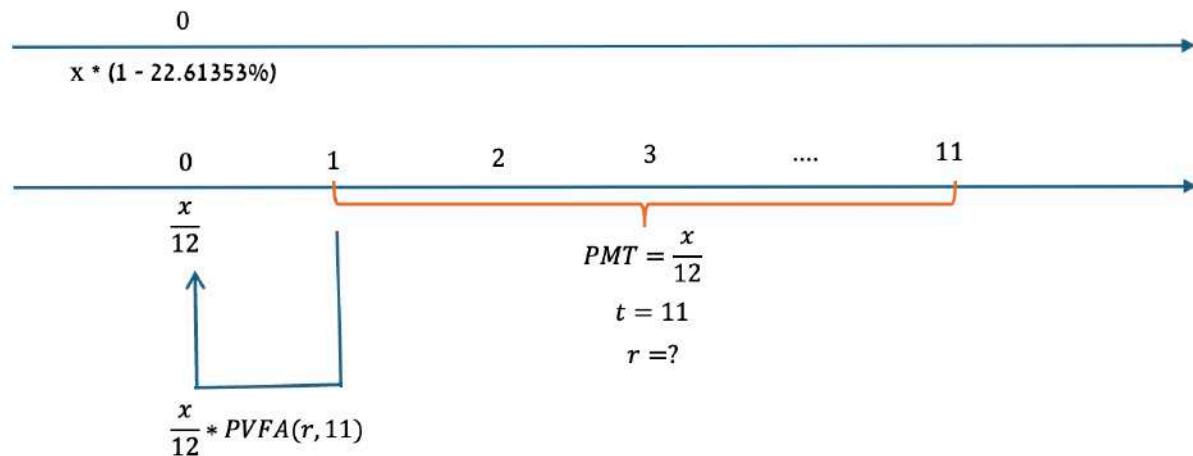
הציר התיכון הוא לב הדיוון שלו. הוא למעשה שוכן שכדי לבטא את העלות במונחי ההווה, עליו להשתמש בכלים של ערך נוכחי של סכום חד פימי; למעשה התשלום העתידי לספק הוא ערך העתידי החד פימי והוא נתון, ובכדי לבטאו במונחי זמן אפס נחילקו ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה (או כפול באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית מתאימה). שמו לב, שאין כאן כל שימוש ב-PVFA או מענ"ס, הוואיל ולא מדובר בהסדר תשלומים סכול סדרה קבועה אלא בתשלום בודד בעתיד.

לאחר שהיחסנו את הערך הנוכחי של הסכום הבודד, הגענו לתוצאה המיצגת את העבודה שהתשלום בעתיד זויל יותר בMONTH הנקחי מהתשלום הנוכחי, אך יש להעדייפו. יש להעדיף את מסלול B.



### שאלה 1005 – חילוץ ריבית המגולמת בהסדר תשלום

ידוע לכם שנייתן לקנות היום מכונה לחימום נקי במזומן. לחילופין, ניתן לשלם بعد המכונה ב-12 תשלום מושווים, כאשר התשלומים הראשונים מבוצע היום, והתשלומים הבאים ככלל, הם מדי חודש. בהנחה שרכישת מזומן מקנה הנחה בשיעור של כ-22.61353%, מהי הריבית השנתית האפקטיבית המגולמת בהסדר התשלומים?



решת המשפט לפתרון שאלות הדורשות חילוץ ריבית מותק הסדר תשלומים הוא המשפט הבא: "שווי המוצר בזמן נטו (לאחר כל הנחה קשורה) הוא הערך הנוכחי של הסדר התשלומים".

$$x * (1 - 22.61353\%) = \frac{x}{12} + \frac{x}{12} * PVFA(r, 11)$$

אפשר לחולוטין לחלק את כל המשווה ב- $x$ :

$$1 * (1 - 22.61353\%) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} * PVFA(r, 11)$$

נמשיך להשתעשע:

$$0.7738647 = 0.0833333 + 0.0833333 * PVFA(r, 11)$$

כדי לחוץ ריבית מביטוי של ערך נוכחי או עתידי של סדרה, علينا להתייחס לכל הביטוי של PVFA כנעלם בפני עצמו.

$$PVFA(r, 11) \approx 8.286$$

างש ללוח א-4 בנספח א לכך ד, ובשורה של 11 תשלומים אבט ימינה ואמצא עבור איזו ריבית הערך המתקיים הוא בקירוב 8.286.

לוח א-4: ערך נוכחי מוצابر של 1 ש"ח המתקבל מדי תקופה במשך  $t$  תקופות

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1		0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909
2		1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736
3		2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487
4		3.902	3.808	3.717	3.630	3.546	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170
5		4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791
6		5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355
7		6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868
8		7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335
9		8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759
10		9.471	8.783	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145
11		10.368	9.787	9.253	8.760	8.306	7.887	7.499	7.139	6.805	6.495
12		11.253	10.375	9.934	9.385	8.863	8.384	7.943	7.536	7.161	6.814
13		12.134	11.348	10.635	9.986	9.394	8.853	8.358	7.904	7.487	7.103
14		13.004	12.106	11.296	10.563	9.899	9.295	8.745	8.244	7.786	7.367
15		13.865	12.849	11.938	11.118	10.380	9.712	9.108	8.559	8.061	7.606
16		14.718	13.578	12.561	11.652	10.838	10.106	9.447	8.851	8.313	7.824
17		15.562	14.292	13.166	12.166	11.274	10.477	9.763	9.122	8.544	8.022
18		16.398	14.992	13.754	12.659	11.690	10.828	10.059	9.372	8.756	8.201
19		17.226	15.678	14.324	13.134	12.085	11.158	10.336	9.604	8.950	8.365
20		18.046	16.351	14.877	13.590	12.462	11.470	10.594	9.818	9.129	8.514
21		18.857	17.011	15.415	14.029	12.821	11.764	10.836	10.017	9.292	8.649
22		19.660	17.658	15.937	14.451	13.163	12.042	11.061	10.201	9.442	8.772
23		20.456	18.292	16.444	14.857	13.489	12.303	11.272	10.371	9.580	8.883
24		21.243	18.914	16.936	15.247	13.799	12.550	11.469	10.529	9.707	8.985
25		22.023	19.523	17.413	15.622	14.094	12.783	11.654	10.675	9.823	9.077

לע

גיליטי שהריבית המגולמת בהסדר היא 5%.

כאן צריך מגד להיזהר, ריביות בחישובי סדרות – בין אם מחולצות ובין אם מחושבות באופן ישיר מהוות תמיד ריביות לתקופת תשלום.

כאן, תקופת תשלום היא חודש. לכן, הריבית אותה חילצתי היא לחודש אחד.

הנקודה היא שדרשו ממנה ריבית שנתית. זה אומר שצרכיך לבצע התאמת ריבית.

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 \rightarrow r_{annual} = (1 + 5\%)^{12} - 1 \approx 79.586\%$$

מסקנה: הריבית האפקטיבית השנתית היא 79.586%.

לקראת המפגש הבא:

• עוברים ליה' חדשה. May the force be with us.

## נושא ראשון: השלמות שונות מהאופ"ל

**שאלה 1006 – העדפת מבצע המכר (היצרנו) לגבי מכירה בזמן מזמן או בתשלום נדחה**  
 גROLIFI היא יצרנית גודלה של מכונות לחימום נקיין. כאשר היא מוכרת מכונות נקיין בזמן, על מנת להיות תחרותית בתנאי השוק שבו היא פועלת עלייה להעניק הנחה בשיעור של 20% מהמחיר ה"רגיל".  
 במקרה זה, קיימת אפשרות להעניק ללקוח אשראי "לא ריבית" לתשלום הסכום המלא (לא הנחה) בעוד 8 חודשים. הניחו שהריבית השנתית האלטרנטיבית היא 30% במנוחים אפקטיביים.  
 נדרש: מהי החלופה אותה تعدיף גROLIFI (המוכרת)?

**פתרון:**  
 כאשר המטרה היא לבחור מנקודת ראות המוכר (מקבל התשלום) בין קבלת תשלום בזמן לבין קבלת תשלום נדחה, העקרון הכלכלי המנחה אותו הוא שהמוכר מעוניין לבחור בחלופה שבה שווי התקובל הוא "הגבוה ביותר". כאשרנו מגדירים שווי של התקובל אנו מדברים על ערך נוכחי (כמה זה שווה היום). ולכן, במצבים אלו, הרצינן הוא להעדיף את אפיק התשלום שיניב ערך נוכחי גבוה יותר.  
 במסלול הזמן, המוכר מקבל את הכספי היום. לכן, הסכום נטו שמקבל המוכר היום במסלול זה, הוא הערך הנוכחי.

במסלול של התשלום הנדחה, נצטרך לחשב את הערך הנוכחי של התשלום העתידי.  
 שאלת מהסוגיות המעניינות: סכום המכירה הכספי לא נתון. השאלה האם ועד כמה זה מפריע לי? התשובה היא שאם נצליח לבטא את הערך הנוכחי – גם באמצעות נעלם – עדין נוכל, במקרים רבים, לדעת איזה ערך נוכחי הוא הגבוה יותר (של הזמן או של התשלום הנדחה).  
 נסמן את מחיר המוכר המלא, לפני הנחה, באות  $X$  ונקבל שוויו של התשלום בזמן מיידי:

$$PV_{CASH} = X * (1 - 20\%) \rightarrow PV_{CASH} = 0.8X$$

כמובן אין צורך בהתאמה או תחשיב נוסף, משום שתשלום בזמן זהה בערכו לערך הנוכחי שלו (כי הוא מיידי, אין צורך בהתאמות זמן לזמן 0).

החלופה האחרת היא לקבל את מלאה התשלום המסומן כאמור כ- $X$  בעוד 8 חודשים כסכום יחיד. התאמה ערך הסכום למועדים של ערך נוכחי תבוצע באמצעות נוסחת PV של סכום יחיד:

$$PV_{CREDIT} = X * (1 + 30\%)^{-\frac{8}{12}} \approx 0.8395X$$

מעיריך החזקה מבטא את העובדה שרצינו לתאם את התוצאה 8 חודשים לאחרו. והויאל והריבית הנתונה היא לשנה שלמה (12 חודשים) אפשר לבצע את התרגום לאחרור עם חזקה של  $8/12$ .  
**הויאל ושווי התקובל הנדחה  $X \cdot 0.8395$  גבוה יותר מאשר התקובל בזמן אובייחדי  $X \cdot 0.8$  המוכר יעדיף את החלופת התקובל הנדחה.**

**שאלה 1007 – חילוץ ריבית אפקטיבית המגולמת בהסדר תשלוםים עם הנחה**  
 מכונה לחימום נקייק ניתנת לרכישה באחד משני המסלולים הבאים:  
 מסלול 1: תשלום של 10 ש"ח בתחלת כל חודש במשך 10 חודשים.  
 מסלול 2: קבלת הנחה מזומן בשיעור 10% מהסכום המלא שהוא 100 ש"ח.  
 נדרש: מהי הריבית האפקטיבית השנתית המגולמת בהסדר התשלומים (מסלול 1)? חלצו תשובה מkorbert.

פתרונות:

באופן כללי, אם אני מקבל מידע שכולל אפשרות תשלוםים עד מוצר (תשלומים דוחויים) אל מול תשלום במזומן, המשמעות היא שבהכרח קיימת ריבית בעסקה, בכל מצב שבו סך התשלומים גבוה יותר מעלות המוצר במזומן.

תכליס – אם אומרים לי: "בוא קח את המוצר,שלם עכשו 90 ש"ח".  
 כל עוד בהסדר התשלומים הסכום הכלול הוא מעל 90 ש"ח – ברור שקיימת ריבית בהסדר התשלומים.  
 אם אני רוצה לחוץ את הריבית המגולמת בהסדר במקרה זה, אני נזעך במשפט שאומר: שווי המוצר במזומן הוא הערך הנוכחי של הסדר התשלומים הדוחויים: בעצם אני בונה משווה אחת, שאגף אחד שהוא שווי / מחיר המוצר במזומן, והางף השני שהוא הביטוי המייצג את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים.

از בעצם: אם הריבית נתונה ורוצים לדעת מהי החלוקת העדיפה – נחשב ערך הנוכחי לכל החלוקת ונבחר בהתאם (הכי גבוה עבור המוכר, הכי נמוך עבור הרוכש) – זה מקרה שהווגב בשאלות הקודמות (לא כאן).  
**אלא שכן: רצים לחוץ את הריבית המגולמת בהסדר, لكن בונם משווה שהריבית תהיה הנעלם היחיד**  
**שלה, על בסיס השווה בין מחיר במזומן לביטוי הערך הנוכחי של התשלומים, אז פותרים.**

$$PV_{CASH} = PV_{CREDIT}(r = ?)$$

הינו מקבלים באופן כללי:

$$r * (1 - 10\%) = 10 * PVFA(r, 10) * (1 + r)$$

כאשר אגף ימין מייצג ערך הנוכחי של סדרה תקופתית, שכוללת 10 תזרומים בזמן 0 עד 9. ערך הנוכחי של סדרה כזו מופיע אוטומטית "אחת אחרת" ביחס לתזרים הראשונים, שהוא 0 והוא בזמן 0, מוגעים ל-1. כדי לתקן בזמן 0, כופלים ב 1 ועוד הריבית. אבל כך מגיעים לנעלם הריבית בשני מקומות, וזה מזעע.

לכן, כטיפ טכני: אם המטרה היא לחוץ ריבית, והסדרה היא סדרה תקופתית, עדיף לפצל אותה: התזרומים של זמן 0 יוצג בנפרד, ונחשב ערך הנוכחי רק ל-9 התזרומים הבאים בזמן 9-0, ונחבר. בדומה כזו, הביטוי של הסדרה בזמן 9-1 מוביל בזמן 0 ללא צורך בהתאם:

$$100 * (1 - 10\%) = 10 + 10 * PVFA(r, 9)$$

נמשיך לפתח:

$$90 - 10 = 10 * PVFA(r, 9)$$

הלאה:

$$80 = 10 * PVFA(r, 9)$$

נחלק את שני האגפים ב-10 :

$$8 = PVFA(r, 9)$$

נעביר ללוח א-4 (לוח מענ"ס / PVFA) בנספח א לכרך ד של לוחות ההיוון, נעביר לשורה של  $t=9$ , ונחפש עבורה את הערך שהוא הקרוב ביותר ל-8. ואז נקבע איזו ריבית מתקיים ערך זה. הערך הקרוב ביותר שמצוותם לمعני בלוח היה 8.162 אשר התקיים עבור ריבית של 2% (עמ' 45 בנספח).

לכן מצאתי :

$$r = 2\%$$

זהו ריבית לתקופה של פרק הזמן בין תשלום. כאן התשלומים כל חודש, לכן הצלחנו למצוא ריבית אפקטיבית חודשית.

כדי להמיר ריבית חודשים לשנה, כבירית חודשים, נתבאס על מערך חזקה מתאים :

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 \rightarrow r_{annual} = (1 + 2\%)^{12} - 1$$

וההשובה הסופית :

$$r_{annual} = 26.824\%$$

שאלה 1008 – **חילוץ ריבית המגולמת בתכנית חסכון, לצורך חישוב צבירה למועד מאוחר יותר**  
לקחו שמנמן השקיע סכום של 40,000 ש"ח בפקדון בנקאי לתקופה של 4 חודשים. ידוע שבתום החודש השני, הסכום הכלול שנצבר ללקוח היה 47,952 ש"ח.

עוד ידוע שהריבית מתחילה בשיעור מסוים, אך היא עולה מחדש לחודש ב-3%.

נדרש :

מהו הסכום הכלול שייעמוד לרשותו של הלקוח השמנמן בתום החודש ה-4?

פתרון :

השאלה דורשת באופן ברור מודד את הסכום הכלול שייעמוד לרשות הלקוח בעתיד, בגין הפקדה בודדת. במלים אחרות, מדובר בחישוב ערך עתידי של סכום ייחד.

בנוסף ידוע, שבתום החודש ה-2 ללקוח נצברו בתוכנית 47,952 ש"ח. כל מה שנוצרך לעשות כדי להגיע לסכום הכלול שייצטב בתוכנית בתום החודש ה-4 הוא להוסיף לתוכנית אם הריבית בחודשים ה-3 וה-4. הבעה – איני יודע מהו שיעור הריבית בחודשים ה-3 וה-4 כאמור.

הנתון שיעור לי – הסכום שנצבר בתום החודש ה-2, וכן העובדה שהריבית עולה מחדש לחודש ב-3%.

הסכום שנצבר לתום החודש השני מבטא את הפקדה הראשונית, יחד עם צבירת הריבית של החודש הראשון ושל החודש השני בהתאם :

$$FV_2 = 47,952 \rightarrow 47,952 = 40,000 * (1 + r_1) * (1 + r_2)$$

לכוארה, יש כאן שני געלמים, אבל יש נתון שעזר לי. הנתון אומר שהריבית עולה מחדש לחודש ב-3%. או, במלים אחרות :

$$r_2 = r_1 + 3\%$$

אחזור למשווה המקורית ואציג במקום 2 את הביטוי הזה :

$$47,952 = 40,000 * (1 + r_1) * (1 + r_1 + 3\%)$$

אחלק את שני האגפים ב-40,000 :

$$1.1988 = (1 + r_1) * (1 + r_1 + 3\%)$$

נפתח סוגרים :

$$1.1988 = 1 + r_1 + 3\% + r_1 + r_1^2 + r_1 * 0.03$$

נכns לפורמט של משווה ריבועית :

$$r_1^2 + 2.03r_1 - 0.1688 = 0$$

נפתר ונקבל את שני הפתרונות הבאים :

$$r_1 = \frac{-2.03 \pm \sqrt{2.03^2 - 4 * 1 * (-0.1688)}}{2} = \{0.08; -2.11\}$$

קיבלונו 2 ריביות : 8% ומינוס (חחח) 211%. אין בקורס ריבית שלילית, ואנו נשלול מיד פתרון זה. לכן, אנו גילינו את הדבר החשוב מכל: הריבית לתקופה הראשונה בהסדר היא ריבית חודשית של 8%, ובהינתן שהיא גדרה בכל חודש ב-3%, הרי ש :

הריבית לחודש 1 :

8% + 3% = 11%

הריבית לחודש 2 :

11% + 3% = 14%

הריבית לחודש 3 :

14% + 3% = 17%

הואיל והסכו שנצבר לתום חודש 2 : 47,952, נצבור עליו ריביות לחודשים 3 ו-4 לפי 14% ו-17% בהתאם ונקבל את הערך העתידי בתום 4 החודשים כנדרש :

$$FV_4 = 47,952 * (1 + 14\%) * (1 + 17\%) \rightarrow FV = 63,958$$

**שאלה 1009 – בחירה בין חלופות הלואה על בסיס חישובי ריבית אפקטיבית בכל חלופה**  
בנק דורודרים מציע הלואות ייעודיות לרכישת מכונות נקניק. כל ההלואות מסולכות בתשלום אחד בחלוקת 5 שנים מנטילתן.

להלן מסלולי ההלוואה הרלוונטיים :

- מסלול 1 : ריבית נקובה בשיעור 15% לשנה, המוחשבת כריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית).
- מסלול 2 : ריבית נקובה בשיעור 12% לשנה, המוחשבת מדוי חדש.
- מסלול 3 : ריבית בשיעור 11% לשנה, המוחשבת כריבית דרייבית.
- מסלול 4 : ריבית מראש בשיעור של 20% ובנוסח ריבית שנייה נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל חודשים.
- מסלול 5 : ריבית מראש בשיעור של 8% לחצי שנה, המוחשבת מדוי חצי שנה (= "בתחילת כל חצי שנה").

נדרש : מהו המסלול שיעודף על ידי הלואה?

פתרון :

בשאלות שכל מה שנזהה בהן אלו ערכי ריבית באחזים ; ללא סכומים / הנחות או הסדרות כספיות אחרות – הבחירה ביןיהן / דירוגן תבוצע על בסיס חישוב הריבית הכוללת (האפקטיבית) בכל חלופה. בדרך כלל, בשאלות אלו, נזהה גם מילים כגון "ריבית מראש", "ריבית המוחשבת כל...".

עבור הלואה, כਮון שתועד חלופה שהריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר (אם היו שואלים על המלואה – כמובן שיש לו העדפה למסלול הנושא את הריבית האפקטיבית הגבוהה ביותר, אבל זה לא המצב כאן).

**מסלול 1 : ריבית נקובה בשיעור 15% לשנה, המוחשבת כריבית פשוטה (לא ריבית דרייבית)**

כאשר הריבית מוחשבת כריבית פשוטה, ללא ריבית דרייבית – המשמעות היא שהריבית לתקופה הכוללת (האפקטיבית, הכוללת) היא מכפלה פשוטה של הריבית התקופתית במספר התקופות הנדרש. במילים פשוטות : 15% לשנה, אבל העסקה ל-5 שנים, לכן הריבית הכוללת האפקטיבית ל-5 שנים :

$$r_{5\text{years}} = 15\% * 5 = 75\%$$

**מסלול 2 : ריבית נקובה בשיעור 12% לשנה, המוחשבת מדוי חדש**

$$r_e = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{60} - 1 = 81.67\%$$

מה קרה כאן?

כאשר מדובר בריבית נקובה "המוחשבת כל" ואינה ריבית מראש (שהה נטפל בנפרד), תהליך העבודה כולל שני שלבים שמשלבים נוסחה אחת :

**השלב הראשון** (ב奏 הסוגרים) לוקח את הריבית הנקובה הנתונה, ומחלק אותה בערך כלשהו – כדי להגיע לריבית לתקופת חישוב אחת. כאן : הריבית הנקובה הנתונה 12% לשנה, תקופת החישוב היא חדש, לכן חילקתי את הריבית הנקובה ב-12.

**השלב השני** (מערך החזקה) לוקח את הביטוי כולם (1 ועוד ריבית לתקופת חישוב) ומעלה אותו בחזקת מספר תקופות החישוב בתקופה הנדרשת. בהינתן שהמטרה שלו בסופו של יומם היא להגיע לריבית אפקטיבית ל-5

שנתיים, הרי שאני זקוק ל-60 תקופות חישוב ריבית (60 חודשים ב-5 שנים) כדי להגיע לרכיבית האפקטיבית לתקופה הכוללת.

מסלול 3 : ריבית בשיעור 11% לשנה, המוחשבת כרכיבית דריבית

אם לא נאמר דבר לגבי הריבית (או שנאמר שהיא מוחשבת כרכיבית דריבית / ריבית אפקטיבית) אז המרת הריבית מתקופה לתקופה מבוצעת על ידי מערך החזקה בנוסחה הנפוצה שלנו – עם חזקה בלבד, ללא כפל, ללא חילוק :

$$r_{5\text{years}} = (1 + r_{\text{annual}})^5 - 1$$

וכאן :

$$r_{5\text{years}} = (1 + 11\%)^5 - 1 = 68.51\%$$

מסלול 4 : ריבית מראש בשיעור של 20% ובנוסף ריבית שנתית נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל חודשים

$$r = \frac{\left(1 + \frac{6\%}{6}\right)^{30}}{1 - 20\%} - 1 = 68.48\%$$

במונוה : החתיכשות לריבית ה"רגילה" (זו שאינה ריבית מראש). התבססו על הביטוי הקליני שלוקח 1 ועוד הריבית לתקופת חישוב אחת. זאת, על ידי חילוק הריבית הנקובה לשנה ב-6, כדי לבטא ריבית לתקופת חישוב שהיא חודשים. לאחר מכן, במערכות החזקה החתיכשתו במספר תקופות חישוב הריבית (חודשיים) בתקופה העסקה כולה (5 שנים = 60 חודשים). תקופה של חודשים נכללת 30 פעמיים ב-60 חודשים, וכך המשיך. במכנה : הריבית מראש הנתונה כאן היא ריבית מראש "חד פעמי". לא לשנה, לא לחודש, לא מוחשבת כל... פעם אחת מנכדים, וזהו. לכן המכנה יהיה פשוט, ויכלול 1 פחות הריבית זו.

מסלול 5 : ריבית מראש בשיעור של 8% לחצי שנה, המוחשבת מדי חצי שנה (= "בתחילת כל חצי שנה")

כאשר אני מזוהה בשאלת ריבית מראש, המוחשבת מספר פעמים, תהליך החישוב של הריבית האפקטיבית / הכוללת הוא שונה ; במקום להתיחס ל-1 ועוד הריבית כמו שמקובל ברוב המקרים, ריבית מראש עובדת בדרך של ניכוי (מקטינה את הסכום המקורי) ונכללת במכנה :

$$r = \frac{1}{\left(1 - \frac{8\%}{1}\right)^{10}} - 1 = 130.21\%$$

מה הlk פה?

אם הריבית היא מראש, ואין ריבית בתום התקופה, התפיסה היא שבתום התקופה מחזירים רק את הקrho הראשונית (מייצג 1 במונוה). במכנה מעניקים ביטוי לניכוי מראש ; וכך הוא בניו מביטוי של אחת פחות הריבית מראש לתקופת חישוב.

במקרה זה, הריבית מראש היא 8% לחצי שנה. היא גם מוחשבת כל חצי שנה, וכך אין צורך אמתי למתאם אותה לתקופת חישוב (אם היא הייתה מוחשבת כל רבעון, הייתה מחלוקת אותה ב-2).

מערך החזקה (במכנה) הוא התשובה לשאלת: כמה תקופות חישוב ריבית מראש (כמה חצאי שנים) נכללים בתקופת העסקה. כזכור, העסקה ל-5 שנים, ומספר החצאים בה 10. לכן זה המערך.

ריכוז הממצאים והכרעה :

ריבית אפקטיבית מסלול 1 :	75%
ריבית אפקטיבית מסלול 2 :	81.67%
ריבית אפקטיבית מסלול 3 :	68.51%
ריבית אפקטיבית מסלול 4 :	68.48%
ריבית אפקטיבית מסלול 5 :	130.21%

החלופה המועדפת היא זו שבה הריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר (מצד הלווה) – **מסלול 4**.

### שאלה 1010 – ערך עתידי

גרלופי הפקידה 1,000 ש"ח בתחלת כל חודש במשך 4 שנים. לאחר מכן הפסיק את החפקות לתקופה של 3 שנים. לאחר מכן, בתחלת כל חודש (ולראשה בתחלת השנה ה-8) החליטה גרלופי להפקיד כל חודש 800 ש"ח במשך 4 שנים. מהו הסכום הכללי שייעמוד לרשותה של גרלופי בתום השנה ה-11, אם ידוע שהריבית החודשית ב-5.5 השנים הראשונות היא 3% ואילו הריבית החודשית בכל חודש לאחר מכן היא 1%?

פתרון :

השאלה זו היא שאלת ערך עתידי קלאסית, והמטרה היא לגלות את סך הצבירה ליום השנה ה-11, קרי ליום החודש ה-132. להלן מבנה ציר הזמן הרלוונטי:



כיצד נחשב ערך עתידי לכל הסדרות, כולל הריבית שנצברת בתקופת ההמתנה וכל הערכים האחרים הרלוונטיים? לפיה חלקים.

נסמן – הסדרה המוקדמת (השמאלית) = סדרה 1. הסדרה אחראית (המצעית) = סדרה 2. הסדרה האחורית = סדרה 3.

סדרה 1 :

$$FV_1 = 1,000 * FVFA(3\%, 43) * (1 + 1\%)^{90}$$

מילולית :

כפלנו את סכום ההפקדה הקבועה במע"ס (FVFA) הרלוונטי. חישוב זה מוביל אותנו תמיד לנקודת הזמן של תזרים המזומנים האחרון בסדרה (זמן 42). כדי לדוחף את התוצאה מזמן 42 למועד הפרעון – זמן 132, השתמשנו בריבית שבתוקף לאחר זמן 42 שהיא 1%. החזקה היא 90, לאור הפרש הזמן מזמן 42 (עיתוי סיום הסדרה) לזמן 132 (עיתוי הפרעון).

סדרה 2:

$$FV_2 = 1,000 * FVFA(1\%, 5) * (1 + 1\%)^{85}$$

ሚollowית:

כפלנו את סכום ההפקדה הקבוע במע"ס הרלוונטי לריבית השונה. חישוב זה מוביל אותנו למועד ההפקדה האחרוןונה, שהיא בתחילת החודש האחרון של השנה ה-4, ככלומר בזמן 47 בחודשים. כדי לדוחף את התוצאה מזמן 47 למועד הפרעון – בזמן 132, כפלנו ב-1 ועוד הריבית החודשית בטוחה הזה, בחזקת ההפרש בין התקופות:  $132 - 47 = 85$ .

סדרה 3:

$$FV_3 = 800 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^1$$

ሚollowית:

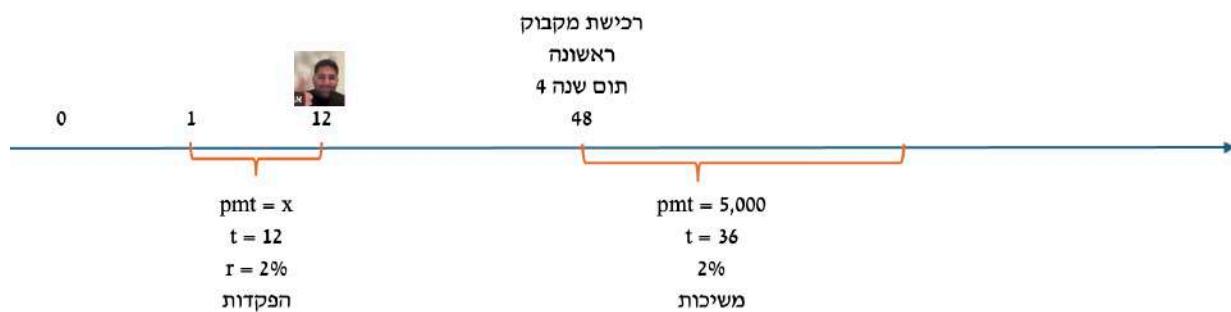
כפלנו את סכום ההפקדה הקבוע החדש במע"ס הרלוונטי. חישוב זה מוביל אותנו למועד ההפקדה האחרוןונה, שהיא בתחילת החודש האחרון של השנה ה-11, ככלומר בזמן 131 בחודשים. כדי לדוחף את התוצאה ממועד זה למועד הפרעון – תום שנה 11 (זמן 132 בחודשים) כפלנו ב-1 ועוד הריבית לחודש אחד.

**התשובה הסופית היא למעשה חיבור פשוט של הביטויים שבנינו עבורה סדרה 1, סדרה 2, סדרה 3. תוכלו לחשב זאת לבד.**

**שאלה 1011 – איזון אקטוארי להפקיד בתום הפקדות ומשיכות, ותחילת תקופה "סמייה"**  
 אבישי מעוניין לקנות בתום כל חודש מקבוק במשך 3 שנים, כאשר המקבוק הראשון יירכש בעוד 4 שנים. לשם כך בכוונתו להפקיד בתום כל חודש במשך שנה סכום קבוע.  
 אם הריבית החודשית 2%, ומהירות מקבוק קבוע בסכום של 5,000 ש"ח, מהו הסכום החודשי שאבישי יצטרך להפקיד?

**פתרון :**

באופן כללי, כשננים בסדרת הפקדות שאחריה סדרת משיכות, הכללי שאנו אוהב להציג הוא לבצע  $FV$  להפקדות ו- $PV$  למשיכות, וכן התאמות שיאפשרו ביטוי שני סוגי הערכים במנוחי אותה נקודת זמן.  
 נקודת הזמן המשותפת שאנו אוהב, היא זו של סיום ההפקדות, המוצגת מטה ע"י אבישי.



ערך עתידי הפקדות למועד ההפקדה الأخيرة (לשם מגעiem אוטומטי בערך עתידי סדרתי) :

$$FV_{Deposits} = x * FVFA(2\%, 12)$$

ערך נוכחי משיכות המבוטא במנוחי אותה נקודת זמן (זמן 12). הואיל וסדרת המשיכות החלה בזמן 48, הערך הנוכחי הסדרתי שלהן מקפיד "אחת אחרת" ביחס לתחילת הסדרה, כלומר בזמן 47, ועלינו לתאמס את התוצאה בזמן 47 לזמן 12 כלומר 35 תקופות לאחר, כך שהביטוי של הערך הנוכחי של המשיכות :

$$PV_{Withdrawls} = 5,000 * PVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{-35}$$

בסק הכל, משוואת הפתרון תהיה :

$$x * FVFA(2\%, 12) = 5,000 * PVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{-35}$$

מפה ממשיכים לחלץ את  $x$ , ומתפללים.

### שאלה 1012 – התאמות ריבית נקובה בחישובי ערך נוכחי

חמיינדוס יכול לקבל בתחלת כל חדש סכום של 300 ש"ח במשך 4 שנים. לחילופין, יכול לבחור לקבל סכום חד פעמי בזמן.

בנهاה שישור הריבית הוא בשיעור נקוב של 36% לשנה במהלך 3 השנים הראשונות ו-48% לשנה במונחי ריבית נקובה לאחר מכן, מהו הסכום החד פעמי בזמן שחמיינדוס יסכים לקבל במצב שבו הוא אדיש בין החלופות?

פתרון :

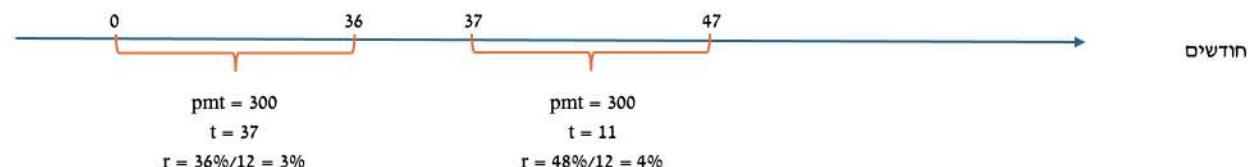
כאשר נתונים ביצירת "אדישות" (שקלות, זהות ערך כלכלי) בין חלופה בזמןן לבין חלופת תשלוםם, הרי ששאלות זו תתקיים כאשר הערך הנוכחי של חלופת התשלומים זהה לסכום הזמן. או במלים אחרות – כל מה שצריך לעשות כאן זה לחשב ערך נוכחי להסדר התשלומים המוצע, וזהו למעשה הסכום בזמןן שיביל לאדישות.

נשים לב, בדרך כלל בשאלות על ערך נוכחי ועתידי וככלי, הריבית (או התשואה) משקפת ערך של "ריבית אפקטיבית" או "ריבית דרייבית" כבירית מחדל, שהמטרה מתקופה לתקופה (למשל, משנה לחודש) מבוצעת באמצעות מערך חזקה מתאים בלבד.

אלא שבמקרה זה, הריבית הנתונה היא נקובה. והשאלה העוקבת – אם היא נקובה, הרי שבדרך כלל אנו רגילים לקבל נתון שמייצג כל כמה זמן הריבית מחושבת, כדי להמיר אותה. כאן, אין לנו כזו.

**ברירת מחדל: אם יש בשאלת ריבית נקובה והשאלה כוללת סדרת תשלוםם, יש להניח שהריבית הנקובה מחושבת כל מועד תשלום.**

זה הציג, לפיכך :



ערך נוכחי לזמן 0 סדרה ראשונה (שמאלית) :

מדובר בסדרה שמתחלת בזמן 0. הערך הנוכחי של הסדרה מקפיא לזמן 1 - ("אחת אחרת"). נתקן קדימה חודש אחד על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית פעם אחת.

$$PV_0(\text{Series1}) = 300 * PVFA(3\%, 37) * (1 + 3\%)^1$$

ערך נוכחי לזמן 0 סדרה שנייה (ימנית) :

מדובר בסדרה שמתחלת בזמן 37. הערך הנוכחי של הסדרה מקפיא לזמן 36 ("אחת אחרת"). נתקן עוד לאחר מכן 36 חודשים, כדי לבטא את התוצאה במונחי זמן 0 :

$$PV_0(\text{Series2}) = 300 * PVFA(4\%, 11) * (1 + 3\%)^{-36}$$

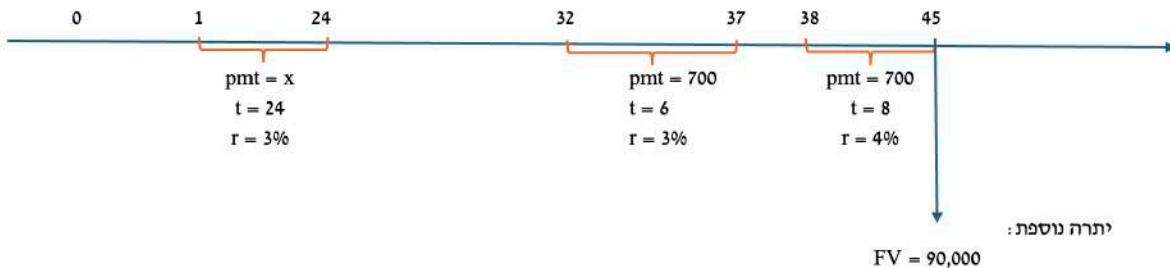
חיבור שני ביטויי העריכים הנוכחיים הוא הסכום בזמןן שיביל לאדישות.

### שאלה 1013 – הפקודות, משיכות ויתרה (בונוס: תשואה = ריבית)

ד"ר צבאן מפקיד בפקדון סכום המקנה תשואה בשיעור 3% לחודש, סכום חודשי קבוע, וזאת במשך שנתיים. לאחר 8 חודשים מההפקדה الأخيرة, הוא מתייחס למשך 14 משיכות בסכום של 700 ש"ח לחודש. לאחר 6 משיכות שיעור התשואה עולה ל-4% לחודש ובתום המשיכות נותר לד"ר צבאן בפקדון סכום של 90,000 ש"ח. מהו הסכום החודשי שהד"ר חסך?

פתרון :

גם שאלה זו עוסקת באיזון אקטוארי: סדרות הפקדה שלאחריהן סדרות משיכה. אמנם יש כל מיני שינויים והגדירות מילוליות שמסבכות את הציג, אבל זה טכני ותכל נטמודד. בין היתר – עניין נוסף: כאשר אומרים שבסיום התקופה נותר סכום נוסף בפקדון, פשוט מתייחסים אליו כאל משיכה נוספת, ובבטאים גם אותה במונחי נקודת הזמן של ההפקדה الأخيرة.



להלן הביטוי המשווה בין הערך העתידי של הפקודות לערך הנוכחי של המשיכות :

$$x * FVFA(3\%, 24) = 700 * PVFA(3\%, 6) * (1 + 3\%)^{-7} + 700 * PVFA(4\%, 8) * (1 + 3\%)^{-13} + 90,000 * (1 + 4\%)^{-8} * (1 + 3\%)^{-13}$$

אגף שמאל מבטא את הערך העתידי של הפקודות למועד ההפקדה الأخيرة, זמן 24. המחבר הראשון באגף ימין מבטא את סדרת המשיכות הראשונה (32-37) לאותה נקודת זמן. הואיל וסדרה זו החליה ב-32, חישוב ערכה הנוכחי מוביל אוטומטית לזמן 31, וכך לתקן לזמן 24 (נקודת הזמן המשותפת) ביצעונו מכפלה נוספת עם חזקה שלילית של 7.

המחובר השני באגף ימין מבטא את סדרת המשיכות השנייה (38-45) בסביבת ריבית אחרת. חישוב ערכה הנוכחי של הסדרה מוביל "אחת אחרת" ביחס לתחילת הסדרה, כלומר לזמן 37, וההתאמה מ-37-32-24-24 צריכה להתבסס על הריבית לפרק הזמן בין שתי נקודות אלו – ריבית של 3%, ומספר תקופות התאמה של 13.

המחובר השלישי באגף ימין מבטא את היתרה. אמרנו שליתרה צבורה לאחר סיום המשיכות מתייחסים כל משיכה נוספת, שגム אותה צריך לבטא כמו כל המשיכות האחרות במונחי נקודת הזמן המשותפת – נקודת ההפקדה الأخيرة. לכן, לקחנו סכום של 90,000 כסכום חד פעמי, והתאמנו אותו לאחר: 8 תקופות לאחר ריבית 4% ו-13 תקופות נוספות לאחר ריבית 3%. יש לפטור את המשואה ולהלץ.

**שאלה 1014 – הלוואה בתשלומים שווים, עם ריביות משתנות (לימוד עצמי)**

פרופ' להב נטל הלוואה בסך 100,000 ש"ח, הנפרעת בתשלומים חודשיים שווים (לוח סילוקים שפייצר) במשך 3 שנים.

בהתאם לתנאי ההסדר, ההלוואה נושא ריבית חודשית בשיעור 3% במהלך השנה הראשונית, ובשיעור חודשי של 4% בשנה הנותרת.

בחלוף שנתיים וחודש (רגע לאחר התשלום ה-25) העניק הבנק ללקוח הטבה למשרתי מילואים. בהתאם לתנאי הטבה, הריבית החודשית בגין הלוואה בתקופה הנותרת תהיה 1% בלבד.

נדרש: מהו החסוך החודשי של המילואימניק בכל אחד מהתשלומים 36-26 (11 התשלומים האחרונים) בגין הטבה לה זכה?

**פתרון :**

ידוע לנו שסכום הלוואה הוא ערך הנוכחי של החזירה. כאן, מדובר בערך הנוכחי של 2 סדרות תשלום, שבכלן התשלום קבוע (ולכן יסומן כ-א). סדרה ראשונה כוללת 24 תשלום קבועים שעבורם חשב ערך הנוכחי בריבית 3%, והסדרה השנייה כוללת 12 תשלום נוספים שעבורם חשב ערך הנוכחי בריבית 4%. אלא שעבור הסדרה השנייה זו (אם תאיירו ציר ותוכלו לראות בклות) הערך הנוכחי של הסדרה מוביל בזמן 24, ולכן יש לתרום את התוצאה מ-24 ל-0 בריבית 3%. כך מקבל:

$$x * PVFA(3\%, 24) + x * PVFA(4\%, 12) * (1 + 3\%)^{-24} = 100,000$$

ממשוuat פתרון זו ניתן לחץ את סכום החזר המקורי, שהוא x. מתקבל בקירוב הערך הבא (טיעיות חישוב ייתכנו, עדכנו אותו אם זה קרה, אבל הרצינול לעיל תקין):

$$x \approx 4,634$$

כעת מספרים לנו שלאחר התשלום ה-25 מבוצעת פרישה מחדש של ההחזרים בריבית שונה. לשם כך علينا לחשב את יתרת הלוואה למועד זה, שמדובר מרכיבת מהערך הנוכחי של 11 התשלומים הנותרים למועד זה, מהווים בריבית טרם השינוי (הערך הנוכחי של התשלומים המקוריים 36-26, מתואימים ל-25, עבר השינוי):

$$BAL_{25} = 4,634 * PVFA(4\%, 11)$$

כך מקבלים:

$$BAL_{25} \approx 43,211$$

כעת, נפרוס יתרה זו על פני 11 תשלוםים ובחתבסט על הריבית החדשה:

$$43,211 = y * PVFA(1\%, 11)$$

מתתקבל שגובה התשלום החדש שהוא y:

$$y \approx 4,170$$

מה שמצויב על חסוך חודשי בסכום של:

$$x - y = 4,634 - 4,170 = 464$$

## נושא חדש - עולם חדש: יח' 6 - כדאיות פרויקטים - מבוא בסיסי מאד

הואיל ואופ"ל 01 עוסק רובו ככולו ביחס' 5, בה התמקדנו עד כה. יחד עם זאת, האופ"ל כולל גם התייחסות ליחס' 6 בנושא כדאיות פרויקטים (בדרך כלל - בrama של שאלת תיאורטית ספציפית).  
לכן, נציג כאן את ה"בסיס" להבנה של מהות פרויקט והגדרתו, כבסיס להגדרת הקритריונים והחישובים על בסיסם נבחן את כדאיותם במפגש הבא.

### שאלה 57 - מבוא לפרויקטים

הסביר מהו פרויקט בהתאם להגדרות הקורס.

התשובה:

פרויקט הוא הגדרה ברורה של סכומי תזרימי מזומנים (חיוביים ושליליים) שניבאו מעסקה שחברה שוקלת לבצע. למשל, בהחלט יכול להיות ייצוג של פרויקט שנראה כך (באלפי ש"ח):

זמן	2	1	0	3
תזרים	80	40	-100	90

### שאלה 58 - סוגי הפרויקטים הקיימים

הסבירו מהם סוגי הפרויקטים האוטונומיים (כמפורטים על פרויקט בודד<sup>9</sup> - מאיזה סוג הוא יכול להיות).

התשובה:

פרויקטים **"קונבנציונליים"** של השקעה. שתזרימייו הראשון / הראשונים שליליים, ולאחר מכן, כל התזרמים חיוביים. למשל:

זמן	2	1	0	3
תזרים	80	40	-100	90

זמן	2	1	0	3
תזרים	300	-200	-100	400

פרויקטים **"קונבנציונליים"** של הלואה (נטילת הלואה). שתזרימייו הראשון / הראשונים חיוביים, ולאחר מכן, כל התזרמים שליליים. למשל:

זמן	2	1	0	3
תזרים	-80	-40	100	-70

זמן	2	1	0	3

<sup>9</sup> בהקשר זה - "פרויקט בודד" = פרויקט ספציפי, שבמבחן נבש כלים לבחינת כדאיותו, בשונה ממרקמים אחרים שבהם נדרש לדרג או לתעדף בחירה בין קבוצת פרויקטים.

-50	-90	40	60	תזרים
-----	-----	----	----	-------

בשני סוגי הפרויקטים **הكونבנציונליים**, תזרים המזומנים משנה את סימנו (משלילי לחובי או להפץ) **פעם אחת בלבד**, ופעם אחת בדיקות.

פרויקטים **"לא קונגנציונליים"** = כל פרויקט שלא עונה להגדרות לעיל, בעצם : פרויקט שתזרימי המזומנים שלו הופכים סימן יותר מפעם אחת (או שלא הופכים סימן כלל- מקרה פינתי שפחות מדברים עליו בקורס). נunik כמה דוגמאות לפרויקטים לא קונגנציונליים :

4	3	2	1	0	זמן
4,900	-100	1,200	-800	-500	פרויקט ד
-100	700	900	700	-500	פרויקט ה
-1,700	10	-500	900	800	פרויקט ו
50	-1,900	-900	1,500	1,000	פרויקט ז

**שאלה 59 - הקשרים בין סוגי פרויקטים - כמשמעותם לנו "קבוצת" פרויקטים (זוג פרויקטים או יותר) הסבירו מהם סוגי הקשרים הקיימים בין פרויקטים?**

התשובה :

א. **פרויקטים "בלתי תלויים" [מאד נפוץ]** = שיביזוע הפרויקט האחד או אי ביצועו לא משפיע על الآخر.

למשל, שירן שוקלת לפתח פרויקט פיצריה בעפולה, ופרויקט המכירות נקבע בטהילנד.

כאשר הפרויקטים הם בלתי תלויים, ניתן לבצע רק אחד מהם, את שניים או אף אחד - ללא שינוי בתנאים המספריים שלהם.

ב. **פרויקטים "משלימים" (פחות נפוץ)** = שיביזוע הפרויקט האחד תורם או עוזר להכנסות מפרויקט אחר.

למשל, שירןפתחה פיצריה בעפולה, והיא מוכרת פיצות בלבד.

היא שוקלת לבצע פרויקט "נוסף" ולהתחליל לבשל במסעדה גם פסטה.

מאד יכול להיות שבעקבות הפרויקט הנוסף קהל היעד של שירן יגדל - מעכשו, יבואו לשם גם זוגות חובבי פסטה לאור נרות וגם ילדים צוחנים שרצו פיצה בלי זיתים.

ונוצרת איזושהי "סינרגיה" או "יתרונו" מביצוע משותף של הפרויקטים יחד "השלם הגדל מסך חלקיו".

ג. **פרויקטים "המוחזאים זה את זה" [מאד נפוץ]** = שיביזוע הפרויקט האחד מונע / מחשיל את האפשרות לבצע את הפרויקט האחר.

למשל, לשירן יש דוכן אחד בשוק, ולפי החלטה העירייה היא יכולה למכור בו או נקניות או תחתוניות.

היא לא יכולה למכור גם נקניות וגם תחתונות, ולכן היא צריכה לבצע אחד מבינן שני הפרויקטים בלבד.



לעיל: דוגמא למכונה לחימום נקייה מתוכרת Selmor. להשג בסופרפארם ובחניות האלקטרוניקה המובילות.

## מפגש 5 - כדאיות פרויקטים (יח' 6) – (מפגש 3 בהנחייה רגילה 10.4) 9/4/2025

### הגדלת קרייטריונים לבחינת כדאיות השקעה בפרויקטים

- נושא הפרויקטים – ייחידה 6, עוסק במצבים שבהם תזרימי המזומנים המשולמים (ההשקעות) או מתוקבים (תקבולים והכנסות) בדבר פרויקט ידועים ומוגדרים.
- בהתבסס על הנתונים וכליים של ערך נוכחי (PV), מותגים קרייטריונים שימושיים לבחינת כדאיות ההשקעות ודרוגן במצבים שונים.
- הקרייטריונים (הכלים) שימושיים לקבלת החלטה ומענה לשאלת: "האם פרויקט הוא כדאי?" וכן לשאלת "UMBין כמה פרויקטים - מי מהם כדאי?" המ 4 במספר:

קייזר באנגלית	קייזר בעברית	שם מלא אנגלית	שם מלא בעברית	משמעות
NPV	ענין	Net Present Value	ערך נוכחי נקי	שווי הפרויקט בש"ח
IRR	שת"פ	Internal Rate of Return	שיעור תשואה פנימי	שיעור תשואה (%)
PI	-----	Profitability Index	מדד הרוחניות	cdnaiות יחסית
CR	-----	-----	החזר הון שנתי	הכנסה הנדרשת

**שאלה 59.1 – יישום בסיסי של הקרייטריונים – פרויקטים קוגניציונליים של השקעות בפני חברת "הנחר הנצחי" בע"מ עומדות אפשרויות ההשקעה הבאות:**

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

מחיר הון של החברה הוא 4% לשנה<sup>10</sup>.

נדרש:

- 辨זה סוג פרויקטים מדבר? נמקו.
- חשבו את ערכיהם של כל 4 הקרייטריונים לבחינת כדאיות ההשקעות – ענין (NPV), שט"פ (IRR), מדד הרוחניות (PI), החזר הון שנתי (CR).
- בנחתה שהפרויקטים בלתי תלויים, מי מהם כדאי לבצע?
- דרגו את הפרויקטים לפי הקרייטריונים NPV, IRR, PI, CR בנחה שניתן לביצוע אחד מהם בלבד (קרי: שהפרויקטים מוצאים זה את זה).
- הסבירו ממה נובע הדרוג הפרויקטים השונים לפי הקרייטריונים השונים.

<sup>10</sup> מחיר הון משך את התשואה התקופתית הנדרשת מצדם של המשקיעים בחברה. בicular, בחברה יש שתי אוכלוסיות משקיעים: משקיעים הונאים (בעלי מנויות) ומלווים (נושאים). כל אחד מהם דורש תשואה מסוימת על השקעה. מחיר הון הוא בעצם המומוצע של התשואה שדורשים המשקיעים השונים בחברה. בשפה פשוטה: נصفה (במקרה פשוט) שאם מחיר הון 4%, חברת תשאף לביצוע פרויקטים המניבים תשואה של 4% לפחות. בכלל, אנו נתיחס לנתח זה עיקורנית כ"ריבית".

**פתרונות סעיף א - באיזה סוג פרויקטים מדובר? נמקו**

מדובר בפרויקטים קוגניציונליים (שכן הסימן המתמטי של תזרימיים מתחפה פעמי אחד בלבד, משלילי לחוביי במעבר מזמן 0 לזמן 1). תת הסוג של הפרויקט הקוגניציוני אכן הוא פרויקט קוגניציוני של השקעות (כי התזרים הראשונים שלילי וחייבים מתרחשים רק לאחר מכן).

**פתרונות סעיף ב – חשבו את ערכיו כל אחד מ-4 הקריטריונים לבחינת כדאיות ההשקעות**

**начало критерию h-NPV – Net Present Value** – ערך נוכחי נקי (ענ"נ). קרייטריוון זה מביא בחשבון את כל תזרימי המזומנים מהפרויקט ללא יוצא מן הכלל – גם חיוביים וגם שליליים – ומהוון אותם (מחשב עבורם ערך נוכחי) לזמן 0.

הנתונים הם :

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

ובנוספּ נתון מחיר ההון<sup>11</sup> של החברה הוא 4% לשנה – משרות אותנו כריבית להיוון.

$$NPV_A = -100 + 40 * PVFA^{12}(4\%, 4) = -100 + 40 * 3.63 = 45.2 > 0$$

$$NPV_B = -1,000 + 350 * PVFA(4\%, 4) = -1,000 + 350 * 3.63 = 270.5 > 0$$

בעצם : כתלות בהקשר, אנחנו תמיד ניישם את כלי ה-PV שנלמדו ביחידה 5 כדי לחשב את ה-NPV שהוא PV כולל או נתו המביטה את הערך המכרי הנקוי של כלל השפעותיה התזרימיות של העסקה (כולל השקעות, עלויות... כולל הכל).

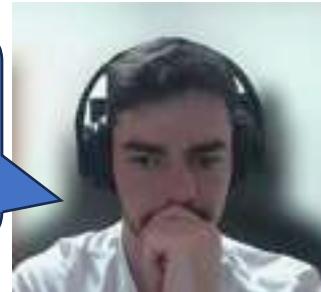
התוצאה המתתקבלת בחישוב ה-NPV היא נקייה במובן זה שערך חיובי שלו משמעו כדאיות הפרויקט נקודה (למעט במצבים של צורך לדרג / לבחור, נראה בהמשך).

<sup>11</sup> מדוע מחיר ההון ולא סטט "ריבית"? משום שכאשר דנים ביחידה 6 בצדאות פרויקטים, דנים בה מנוקדות ראות חברות. בקשר חברות בשונה מפרטיהם יש מגוון מקורות מימון לפירמה – גם הלוואות (ריביות שונות), גם אג"ח, גם מנויות וגם מכשירים פיננסיים נוספים. כל אלו יוצרים מעין כור היתוך של עלויות שונות, שתוצאתן המשוללת נקראת מחיר ההון. בשלב זהה אין שום צורך לדעת כיצד לחשב מחיר ההון זה, זהו רק הסבר מרחיב דעת מודיעיעים המשמשים בחברות במונח מחיר ההון ולא ריבית.

<sup>12</sup> תזכורת : חישוב PVFA או בעברית מענ"ס נוצר מהנוסחה המתמטית של ערך נוכחי של סדרה, או נשלף מלווח א-4 בנספח א' לכרך ד של לוחות ההיוון.

ניבור לקריטריון הקל ביותר להבנה – ה-IRR – שיעור תשואה פנימי (Internal Rate of Return) – שת"פ: בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות משקף את שיעור התשואה התקופתי באחזois בפרויקט. וכיitz נחשבו? מתמטית: נتبסס על משווota ה-NPV, במקום מחיר ההון נציג נעלם (IRR), ונשווה את הכל ל-0.

סבבה. חישב לי עניין טכני ואמר  
שאם זה חיובי כדאי. זה לא זה.  
אני מרגיש שאני רוצה לדעת כמה  
ההשקעה שלי עשו – באחזois!  
מה התשואה שלי!



4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

לאחר הצגת המשוואות של חישוב ערכם הנוכחי של כלל התזרומים לזמן 0, עם מחיר ההון (k) שモzon נעלם –  
חילכנו את ערכי הנעלם (IRR) בכל אחד מהפרויקטים:

$$IRR_A: 0 = -100 + 40 * PVFA(IRR_A, 4) \rightarrow IRR_A \approx 22\% > 4\% = k$$

$$IRR_B: 0 = -1,000 + 350 * PVFA(IRR_B, 4) \rightarrow IRR_B \approx 15\% > 4\% = k$$

כדי לבחון כדיות פרויקט בודד קונבנציונלי של השקעה לפי IRR נדרש שה-IRR יהיה גבוהה יותר ממחיר ההון (k). עצם היותו של ה-IRR ערך חיובי איננה מספיקת. אם אין מוגבלה מיוחדת, והפרויקטים בלתי תלויים, כל עוד מדובר בפרויקטים קונבנציונליים של השקעה, יש לקבל כל פרויקט שתשואהו גבוהה מדרישות התשואה של המשקיעים ( $IRR > k$ ).

**סיכום ביןים:** בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות שהם בלתי תלויים (ללא מוגבלה)

קבל לפי NPV כל פרויקט שמקיים:  $NPV > 0$

קבל לפי IRR כל פרויקט שמקיים:  $IRR > k$

**ניבור לקריטריון האיזוטרי (יותר נדיר) – PI – מזד הרוחניות (Profitability Index):** בדומה ל-IRR, גם קרייטריון זה הוא קרייטריון יחס. אלא שהוא מחשב את הפרופורציה (היחס) בין הערך הנוכחי של התקבולים לבין הערך הנוכחי של התשלומים. אם היחס גדול מ-1, סימן שהפרויקט כדאי. מדוע? אם היחס גדול מ-1, זה אומר שהמונה (ערך נוכחי של מה שמקבלים) גבוהה יותר מהמכנה (ערך נוכחי של מה שמשלמים). בסך הכל, זה אומר שהענין (ערך נוכחי נטו – של התקבולים בNICHOI תשלומים) – חיובי.

יש שתי גרסאות לקריטריון זה בرمת הנוסחאות:

גרסה 1: נוסחה קלאסית לפי ההגדרה - ערך נוכחי תקבולים חלק ערך מוחלט של ערך נוכחי תשלוםים

$$PI = \frac{PV_+}{|PV_{(-)}|}$$

גרסה 2: עניין (NPV) בתוספת סכום ההשקעה (ערך מוחלט) וכל זה חלק סכום ההשקעה (ערך מוחלט)

$$PI = \frac{NPV + I}{I}$$

נדיר את הגדים של הגדרה 2 ונסביר מדוע היא נכונה:

כולם יודעים שהNPV או "ערך הנוכחי נטו" הוא למעשה הערך הנוכחי של התקבולים ביחסו הערך הנוכחי של התשלומים:

$$NPV = PV_+ - PV_{(-)}$$

בפרויקטים פשוטים, הערך הנוכחי של התשלומים הוא בעצם סכום ההשקעה I. לכן ניתן לבטא זאת כך:

$$NPV = PV_+ - I$$

נעביר אגף את ההשקעה.

$$NPV + I = PV_+$$

ואם כך, במקרה פשוט זה, היחס בין הערך הנוכחי של התקבולים (מונה) לבין סכום ההשקעה שהיא התשלום בערך הנוכחי במקרה פשוט (מכנה) הוא:

$$PI = \frac{NPV + I}{I}$$

ניחסם את חישוב מzd הרוחיות:

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

ובנוסף לנו מחיר ההוויה<sup>13</sup> של החברה הוא 4% לשנה – משרות אותנו כריבית להיוון.

חישוב Mzd הרוחיות – נוסחה גרסה 1:

$$PI_A = \frac{40 * PVFA(4\%, 4)}{|-100|} = 1.452 > 1$$

<sup>13</sup> מדוע מחיר הווון ולא סטטוס "ריבית"? משום שכאשר דנים ביחידה 6 בצדדים פרויקטים, דנים בה מנוקדות ראות חברות. בקשר לחברות בשונה מפרטים יש מגוון מקורות למימון לפירמה – גם הלוואות (בריביות שונות), גם אג"ח, גם מנויות וגם מכשירים פיננסיים נוספים. כל אלו יוצרים מעין כור היתוך של עלויות מימון שונים, שתוצאתן המשווקלת נקראת מחיר ההווון. בשלב הזה אין שום צורך לדעת כיצד לחשב מחיר הווון זה, זהו רק הסבר מרחיב דעת מדוון משתמשים בחברות במונח מחיר הווון ולא ריבית.

$$PI_B = \frac{350 * PVFA(4\%, 4)}{|-1,000|} = 1.2705 > 1$$

חישוב מדד רווחיות – נוסחה גרסה 2 :

$$PI = \frac{NPV + I}{I}$$

את ה-NPV של כל פרויקט כבר חישבנו לעיל, וסכוםו שווה ל- 45.2 בפרויקט A ו- 270.5 בפרויקט B :

$$PI_A = \frac{45.2 + 100}{100} = 1.452 > 1$$

$$PI_B = \frac{270.5 + 1,000}{1,000} = 1.2705 > 1$$

הואיל ולשני הפרויקטים מדד רווחיות גבוהה מ-1 בהיעדר מגבלה, שניהם כדאיים. אני אפילו יכול לומר שמתמטית – PI גבוהה מ-1 משמשו בהכרח ערך NPV גבוהה מ-0.

**מעבר לקריטריון האחרון – החזר ההון שנתי (אח חורג) :**

ואם כך, NPV מחשב את שווי הפרויקט לפי נתונו בפועל; ה-IRR מחשב את תשואת הפרויקט בפועל; וה-PI מחשב את היחס בין הערך הנוכחי של התקבולים בפועל לערך הנוכחי של התשלומים (ההשקעה) בערך המוחלט. לעומת זאת, החזר ההון השנתי CR הוא ערך תיאורתי שמייצג את סכום ההכנסה השנתית הנדרשת נטו, כדי שהפרויקט יהיה כדאי.

ברמה טכנית, את החזר ההון השנתי נחשב על ידי חלוקת הערך הנוכחי (המוחלט) של התשלומים הנדרשים לשם הפרויקט, ב-PVFA המתאים למחיר ההון ומספר השנים של הפרויקט :

$$CR = \frac{|PV_{(-)}|}{PVFA(k, n)}$$

כדי שפרויקט יהיה כדאי – ההכנסה השנתית הנובעת ממנו צריכה להיות גבוהה מ (או לפחות שווה ל-) החזר ההון השנתי.

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

מחיר ההון : 4%

$$CR_A = \frac{100}{PVFA(4\%, 4)} = \frac{100}{3.63} = 27.54 < 40 = Actual Annual Income$$

$$CR_B = \frac{1,000}{PVFA(4\%, 4)} = \frac{1,000}{3.63} = 275.4 < 350 = \text{Actual Annual Income}$$

בשני המקרים, קיבלנו שהפרויקטים כדאיים גם לפי קритריון החוזר החני, שכן עבור שני הפרויקטים ההכנסה השנתית המינימלית שתצדיק את הפרויקט (27.54 ו- 275.4 בהתאם) נמוכה יותר מההכנסה השנתית הצפiosa להתקבל בפועל בגין ביצועם.

**פתרונות סעיף ג – ריכוז הממצאים וקבעה מי מביניהם כדאי, בהנחה שהפרויקטים בלתי תלויים**

פרויקטים בלתי תלויים הם פרויקטים שנייתן לבחור לבצע רק אחד מהם, שניהם, או אף אחד – ללא מגבלה מיוחדת. במקרה שכזה, כדי לבצע כל פרויקט כדאי, אין צורך לדרג. להלן ריכוז הנתונים מתוך סעיף המענה הקודמים:

B	A	kritirion	שם בעברית
270.5 כדי! חיובי	45.2 כדי! חיובי	NPV	ענין (שווי)
15% כדי! גבואה ממחירות הון	22% כדי! גבואה ממחירות הון 4%	IRR	שת"פ (תשואה ב-%)
1.2705 כדי! גבואה מ-1	1.452 כדי! גבואה מ-1	PI	מדד רווחיות (פרופורציה)
275.4 כדי! ההכנסה הצפiosa בפועל לשנה (350) גבואה מערך נדרש זה	27.54 כדי! ההכנסה הצפiosa בפועל לשנה (40) גבואה מערך נדרש זה	CR	ה חוזר הון שנתי לא משמש לדירוג (למיידע בלבד)

#### פתרונות סעיף ד – ריבוז הנזונים ודרוג בהנחה שנדרש לבחור בין הפרויקטים לפי NPV, IRR, PI, CR

נתחל בلسמן את הערך הגבוה מבין השניים בכל קритריון וקריטריון :

B	A	קריטריון	שם בעברית
270.5	45.2	<i>NPV</i>	ענ"נ (שווי)
15%	22%	<i>IRR</i>	שת"פ (תשואה ב-%)
1.2705	1.452	<i>PI</i>	מדד רווחיות (פרופורציה)
275.4	27.54	<i>CR</i>	החזר הון שנתי לא משמש לדירוג (למיידע בלבד)

שאלות הקשורות הבאות :

- מדוע בכלל מתקינות סטירה?
- בהתקדים סטירה בין הדירוג על פי הקריטריונים השונים, מי מהם יכריע?

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

ראשית, לגבי הסטירה : הויאל וגם IRR וגם PI הם מגדדים יחסיים, הרי שהם וגביהם לגודל השקעה הראשוני. משל למה הדבר דומה? אם אומרים לי שאני יכול השקיע היום 10agi ולקלב מחר 20agi. ה-IRR הוא 100%. אבל כמובן שהשווי נטו של עסקה כזו הוא מאד נמוך. ואם אני צריך לבחור בין עסקה כזו לאחרת שבה השקיע היום 1,000,000 ש"ח ואקבל עוד חדשניים 1,500,000 ש"ח, די ברור לי שלמרות שהתשואה נמוכה משמעותית באחוזים, העסקה תתרום לערך החברה הרבה יותר.

از בעצם : קритריון ה-IRR הוא בעל מגבלות, שאחת מהן מתקינות כאשר נדרש לבחור בין פרויקטים בעלי גודל השקעה שונה (יש סיבות נוספות, כגון אופק השקעה, שיעור תשואה על השקעות חוזרות וכיו"ב, במסגרת דיוון תיאורטי בich' 6 ורცפיה, שבהם לא עמוק).

אם מבקשים בשאלת הכריע ספציפית לפי IRR או PI : תשובתנו תהיה A.

אם מבקשים להכריע מי עדיף לפי NPV : תשובתנו תהיה B.

אם מבקשים לדעת מה החלטה הנכונה כלכלית? התשובה B.

**שאלה 60 - כדאיות פרויקטים - מدد הרווחיות – עולם עם מגבלת תקציב כספית**

חברה הוצעה להשקעה 5 פרויקטים :

פרויקט	ה השקעה באלפי ש"ח	מדד הרווחיות
א	1,000	1.15
ב	600	1.2
ג	300	0.83
ד	700	1.17
ה	900	1.1

- החברה כפופה למגבלת תקציב של 2,000,000 ש"ח (2,000 אלפי ש"ח). בנסיבות אלו :
- מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה להשקיע לפי קритריון מدد הרווחיות?
  - מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה אם כוונתה היא למקסם את ערכה?

**מיini רציו (בצד תוקפים את הבעייה)**

בתרגיל הבסיסי הקודם הצגנו מקרה קל יחסית שבו علينا לבחור באיזה פרויקט להשקיע מבין שניים. במקרים רבים בעולם האמתי, המבילה מרכיבת יותר ; שכן יש לנו תקציב השקעות נתון, ונשאלת השאלה באילו פרויקטים להשקיע באופן שימצא את מגבלת התקציב בצורה הטובה ביותר – כך שיתרומם לערך החברה במידה המרבית.

השאלה מבקשת מני לבחור את הפרויקטים המומלצים לפי קритריון ממד הרווחיות בתחילת (מהגבוה לנמוך, ובכפוף למגבלת התקציב) ואז לבחור באופן שימקסם ערך (מורכב יותר – וمبוסס על עניין).

**פתרון סעיף א: מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה להשקיע לפי קритריון ממד הרווחיות?**  
 ממד הרווחיות - Profitability Index או PI הוא קритריון לבחינת כדאיות השקעות – שתוצאתו יחסית. ממד זה מחושב בתור הפרופורציה (היחס) שבין הערך הנוכחי של תקציבי הפרויקט לבין הערך הנוכחי של התשלומים בפרויקט / ההשקעה בערך מוחלט.

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבוליים}}}{|PV_{\text{תשולםים}}|}$$

כאשר ערך ה - PI גדול מ-1 הפרויקט כדאי. מדוע? כי זה אומר :  $|PV_{\text{תשולםים}}| < PV_{\text{תקבוליים}}$ , ולכן ההפרש בין סך התקבולים בערך הנוכחי לסך התשלומים בערך הנוכחי הוא חיובי, כלומר בסך הכל לפרויקט יש שווי חיובי – עניין (NPV) חיובי :

$$PI > 1 \rightarrow \frac{PV_{\text{תקבוליים}}}{|PV_{\text{תשולםים}}|} > 1 \rightarrow PV_{\text{תקבוליים}} > |PV_{\text{תשולםים}}| \rightarrow PV_{\text{תקבוליים}} - |PV_{\text{תשולםים}}| > 0$$

כלומר בהכרח מתקיים :

$$\text{כדי! } PI > 1 \rightarrow NPV > 0 \rightarrow$$

נוסחה נוספת המבטאת את ה- PI היא :

$$PI = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

כאשר :

הערך  $NPV$  הוא שווי הפרויקט נטו (ענ"נ).

הערך  $I_0$  הוא סכום ההשקעה הראשונית.

נוסחה זו ניתנת לבטא באמצעות העברת אגפים פשוטה כך שתבטא את הקשר בין PI לבין שווי הפרויקט באופן

כמפורט :

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

לאחר מבוא זה, נחזר לשאלת - אלה הפROYקטים, מגבלת התקציב היא 2,000, והחברה פועלת לפי מודד הרווחיות. אילו פרויקטים היא תבחר לבצע?

פרויקט	ההשקעה באלפי ש"ח	מדד הרווחיות
א	1,000	1.15
ב (נבחר ראשון)	600	1.2
ג	300	0.83
ד (נבחר שני)	700	1.17
ה	900	1.1

תחילה, נבחר בפרויקט ב, שמדד הרווחיות שלו הגבוה ביותר (וכך החברה בוחרת לנטו). פרויקט ב "שורף" (מנצל) 600 אלף ש"ח מיותר מגבלת השקעה של 2,000. לכן יתרת התקציב לניצול יהיה  $1,400 - 600 = 800$  ש"ח. פרויקט "הבא בתור" מבחרית מדי הרווחיות הגבוהים ביותר הוא פרויקט ד. פרויקט זה מנצל השקעה בסך 700 ש"ח, יתרת התקציב לניצול:  $800 - 700 = 100$ . עם יתרת התקציב זו, יוכל לבצע את פרויקט ג בלבד (כי פרויקטים א ו-ה דורשים התקציב גבוה מ-700). אלא, שלאור העובדה שמדד הרווחיות של פרויקט ג נמוך מ-1, בהגדרה הוא אינו כדאי (שוויו שלילי) ולכן הוא "יורד מהפרק".

לכן, החברה תבחר לבצע בהינתן הדירוג לפי מודד הרווחיות את פרויקטים ב ו-ד.

לתשומת הלב: כאשר מבקשים לבצע דירוג או החלטה לפי קרייטריון מסוים ספציפי (כגון מודד הרווחיות) המשמעות היא שיש לבצע את הבחירה או הדירוג כאמור לפי קרייטריון זה בלבד - לא לפי חילוצים הנגזרים ממנו או קרייטריונים אחרים (גם אם קיימת להם רלוונטיות כלכלית).

**פתרונות סעיף ב: מהט הפROYקטיטים שבחור החברה אם כוונתך היא למקסם את ערךה?**  
 בuest, השאלה משתנה: יתרה על הצורך לדרג לפי ממד הרוחניות, עליינו להגיע למסקם ערך. כשמדובר על ערך = ערך נוכחי, או בקיצור - עניין ערך נוכחי נקי - NPV.  
 במקרה אחר, צריך לבנות מתחם הפROYקטיטים האפשריים את אותו צירוף שמקסם את ה-NPV בכספי.

כדי לישם ברמה הטכנית, נפעל בשני שלבים:  
 שלב 1 - נניסם את הקשר המתמטי שהריאנו בין ממד הרוחניות, סכום ההשקעה וה-NPV:

$$PI = \frac{NPV + I}{I} \rightarrow NPV = PI * I - I$$

ולכן תמיד מתקיים הקשר הבא שמאפשר חישוב ה-NPV בהינתן ממד הרוחניות וסכום ההשקעה:

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

שלב 2 - נבחר את הפROYקטיטים שמקסמים את ה-NPV המצרי (בכספי למוגלה).

**שלב 1 - חישוב NPV על בסיס מגבלת תקציב וסכום השקעה:**

פרויקט	ההשקעה באלפי ש"ח	מדד הרוחניות	NPV
א	1,000	1.15	$1.15 * 1,000 - 1,000 = 150$
ב	600	1.2	$1.2 * 600 - 600 = 120$
ג	300	0.83	אין צורך לחשב, שווי שלילי כי $PI < 1$
ד	700	1.17	$1.17 * 700 - 700 = 119$
ה	900	1.1	$1.1 * 900 - 900 = 90$

**שלב 2 - נבחר את הפROYקטיטים שמקסמים את ה-NPV המצרי (בכספי למוגלה)**  
 כדי למקסם את ערך החברה, עליי לבחור בקומבינציה (שילוב) פרויקטים, אשר מאפשר במסגרת תקציב ההשקעה (סך הכל או פחות) וגם מוביל את סיכום ערכיה ה-NPV לערך מירבי.

$$NPV_{\text{א,ב}} = 150 + 120 = 270$$

$$NPV_{\text{א,ד}} = 150 + 119 = 269$$

$$NPV_{\text{ב,ג}} = 150 + 90 = 240$$

$$NPV_{\text{ב,ד}} = 120 + 119 = 239$$

$$NPV_{\text{ג,ד}} = 120 + 90 = 210$$

$$NPV_{\text{א,ג}} = 119 + 90 = 209$$

קיבלנו שהקומבינציה המובילה למקסימום שווי החברה היא **ביצוע פרויקטים א ו-ב**. זו התשובה הסופית **لسעיף ב**.

לעומת זאת, בסעיף א מצאנו שלפי ממד הרוחניות, החברה תבחר לבצע את פרויקטים ב ו-ד. במלים אחרות, הבחירה של החברה בסעיף א **איןנה אופטימלית** ואינה מושימה את העיקרונו להשאת ערך הפירמה לבעליה.

הרחבת הסבר :

מדד הרוחניות הוא ממד כדיות יחסית; הוא בוחן את היחס (הפרופורציה) בין התקבולים לתשלומים. הוא לא משקף ערך כספי, שווי כספי של הפרויקט - אלא הוא מרכיב מפרופורציה.

שאלה שדורשת את השווי של הפרויקטים, את הערך שלהם (ובכך מתמקדים בסעיף השואל כיצד נמקם ערך) למעשה דורשת את ה- **NPV** של כל אחד מהפרויקטים. ברוב המקרים, נחשב **NPV** בעצמו, מתמטית, בלי קשר למדד הרוחניות, על בסיס תזרימי המזומנים הנתוניים של הפרויקט. אלא שכאן, תזרימי המזומנים אינם נתונים (אלא רק ההשקעה) ולכן ניעזר כगלגול חילוץ בנוסחתה **הקשר בין PI, סכום ההשקעה וה- NPV**:

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

כאשר :

הערך **NPV** הוא שווי הפרויקט (ערך נוכחי נקי, ענ"ד).

הערך **PI** הוא ממד הרוחניות (שכאן, נתון).

הערך  **$I_0$**  מייצג את סכום ההשקעה.

### שאלה 59.3 – כיתה (מאפס)

בחברת "גוזלינדה" שוקלים להשקיע בפרויקטים. להלן נתונים הפרויקטיטים המועמדים להשקעה:

1-8 תזרים שנתי	0	
15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B

מחיר ההון של החברה הוא 10% לשנה.

נדרש:

- בהתה שניתן לבצע את שני הפרויקטיטים, איזה (או אילו) מהם יבוצע לפי NPV?
- בהתה שניתן לבצע את שני הפרויקטיטים, איזה (או אילו) מהם יבוצע לפי IRR?
- הניחו כעת כי ניתן לבצע אחד מהפרויקטיטים בלבד, והחברה מעוניינת לבחור לפי IRR. מי יהיה הפרויקט העדיף? האם זו הכרעה נכונה, מבחינה כלכלית? נמקו בקצרה.
- שרטטו את עקומת NPV של הפרויקטיטים וכן את ה-IRR של הפרויקט ההפרשי.
- הסבירו כיצד ניתן להיעזר בפרויקט ההפרשי כדי לפתור את הסתירה בין NPV ו-IRR.

פתרון:

#### פתרון סעיף A – פרויקטים בלתי תלויים – בחינת כדאיות לפי PV

ככל, ה-NPV משקף את שווי הפרויקט נטו בערכים כספיים, במונחים של ערך נוכחי. כל מה שצורך לעשות זה לבטא את כל תזרים הפרויקט – חיוביים ושליליים כאחד, בזמן 0. פרויקט יהיה כдאי בכל מצב שבו ה-NPV גדול מ-0 (מחיר ההון של 10% הוא למעשה הריבית להיוון):

1-8 תזרים שנתי	0	
15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B

$$NPV_A = -50,000 + 15,020 * PVFA(10\%, 8) \rightarrow NPV_A = 30,132$$

$$NPV_B = -150,000 + 37,305 * PVFA(10\%, 8) \rightarrow NPV_B = 49,019$$

המשמעות: התרומה לערך הפirma נטו במונחים של ערך נוכחי כتوزאה מביצוע פרויקט A היא 30,132 ש"ח. ערך זה מביא בחשבון את תזרים הפרויקט, וכן את מחיר ההון (עלות גiros ההון / תשואה אלטרנטיבית). התרומה לערך הפירה נטו במונחים של ערך נוכחי כتوزאה מביצוע פרויקט B היא 49,019 ש"ח. בסעיף זה, הנחת העבודה היא שהפרויקטיטים בלתי תלויים. כלומר, ניתן לבצע מה שנדכה מתוכם. במצב כזה **כדי לבצע את שני הפרויקטיטים הואיל ובשניהם ה-NPV חיובי.**

פתרונות סעיף ב - בהנחה שנייתן לבצע את שני הפרויקטים, איזה מהם יבוצע לפי IRR?



ל-IRR (שת"פ) יש שתי הגדרות: הגדרה אחת היא כלכלית (לפחות בפרויקטים קונבנציונליים של השקעה) והגדרה נוספת היא מעין נוסחה מתמטית שמאפשרת חילצו. בrama הכלכלית: ה-IRR משקף את שיעור התשואה התקופתי המוצע בפרויקט. בהתאם, פרויקטים קונבנציונליים של השקעה יהיו כדאים אם ורק אם שיעור התשואה הгалום בהם גבוה יותר מחירות ההון. בrama המתמטית: כדי לחלק את ה-IRR אנו בונים שנית את משווהת הענין  $NPV$ , בשני שינויים מתחייבים: (1) מחיר ההון מסומן כנעלם  $IRR$ ; (2) משווים את כל המשווהה ל-0.

1-8 תזרים שנתי	0	
15,020	-50,000	<b>תזרים (ש"ח) פרויקט A</b>
37,305	-150,000	<b>תזרים (ש"ח) פרויקט B</b>

$$NPV_A: -50,000 + 15,020 * PVFA(IRR_A, 8) = 0 \rightarrow IRR_A = 25\%$$

מכאן אפשר להיעזר בלוח א-4 בנספח א לכרך ד, בטכנית שהראינו בחלוקת המתיחס להלוואות בשאלות קודומות, ולהגיעו ל-IRR.

$$NPV_B: -150,000 + 37,305 * PVFA(IRR_B, 8) = 0 \rightarrow IRR_B = 18\%$$

כאשר מדובר בפרויקטים קונבנציונליים של השקעה – פרויקט כדאי הוא כזה שתשווהתו (ה-IRR שלו) גבוהה ממחיר ההון של החברה. במקרה זה, מחיר ההון 10% כנתון. לכן שני הפרויקטים כדאים הוואיל והתשואה התקופתית שלהם גבוהה יותר. בהיעדר מגבלה, נרצה לבצע את שניהם.

ג. הניבו כעת כי ניתן לבצע אחד מהפרויקטים בלבד, והחברה מעוניינת לבחור לפי IRR. מי יהיה הפרויקט העדיף? האם זו הכרעה נכונה, מבחינה כלכלית? נמקו בקצרה.

	A	B
NPV	30,132	49,019
IRR	25%	18%

הוائل וצינו מפרשות שהחברה בוחרת ופעלת לפי IRR, הרי שבמצב שבו ניתן לבצע לכל היותר אחד מהפרויקטים (**מווצאים זה זה**), יעדף מצד החברה פרויקט A. לעניין ההחלטה הנכונה כלכלית: אפשר לשים לב שלמרות שה-IRR גבוהה יותר בפרויקט A, אם מביטים על ה- NPV נגלה שהוא גבוהה יותר דזוקא בפרויקט B. זה גורם לנו לתהות: איזה קритריון חשוב יותר, ואיזה פרויקט יבחר כלכלית במקרה של סתירה בין NPV לבין IRR?

זכרו: מטרת הפirma (יח' 1) היא להשיא עשר (להשיא ערך) לבעליה. לא להשיא אחזוי תשואה. להשיא את התוצאות הכספיות. לכן, בחירה בפרויקט A היא תות אופטימלית. עדיף לבצע את פרויקט B.

شرطו את עקומת ה-NPV של הפרויקטים וכן את ה-NPV של הפרויקט הפרשי. עקומת ה-NPV היא ייצוג גרפי של הקשר בין מחיר ההון (ציר אופקי) של החברה לבין ה-NPV שלה (ציר אנכי). בפרויקטים קובנציאונליים של השקעות: ככל שמחיר ההון (עלות גiros ההון) של החברה עולה, ה-NPV של הפרויקט יורד.

לכן עקומת ה-NPV (בפרויקטים קובנציאונליים של השקעות) יורדת משמאל לימין. הציר האנכי הוא ציר ה-NPV, הציר האופקי – ציר מחיר ההון (נוהג לסמן כ-ק.). כדי לשרטטו את עקומת העניין אנו צריכים רק 2 נקודות (1 ו-2, הנקודה ה-3 אופציונלית): נקודה 1: נקודת החיתוך של העוקום עם ציר ה-Y. נקודה זו היא חיבור פשוט של תזרימי המזומנים של הפרויקט. נקודה 2: נקודת החיתוך של העוקום עם ציר ה-X. נקודה זו היא ה-IRR. נקודה 3: (לא קרייטית בדרך כלל) = ערך המינימום של הפרויקט = סכום ההשקה.

שת"פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
18%	37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B
	22,285	-100,00	פרויקט הפרשי B-A

**פרויקט A :**  
נק' חיתוך עם ציר Y (ציר ה-NPV) :  $-50,000 + 15,020 * 8 = 70,016$

הסבר: כדי למצוא נק' חיתוך עם ציר ה-Y אנו צריכים לחשב על מצב שבו ערך ציר ה-X (ציר מחיר ההון) שווה ל-0. כמובן, נק' החיתוך עם ציר ה-Y משקפת עולם דמיוני "ללא ריביות". ואם אין ריביות בעולם – העניין הוא סיכום התזרים.

נק' חיתוך עם ציר X (ציר מחיר ההון) ה-IRR : 25%  
הסבר: כדי למצוא נק' חיתוך עם ציר ה-X אנו צריכים לבדוק מתי ערך  $0 = Y$ . מזכיר שציר ה-Y הוא ה- $NPV$ , וכולנו יודעים שמחיר ההון שמוביל ל- $NPV = 0$  הוא ה-IRR.

ערך מינימלי אפשרי (כשמחיר ההון גבוה במיוחד) – לפי סכום ההשקעה : -50,000  
הסבר: כאשר מחיר ההון מאד גבוה, ערך התקבולים העתידיים במונחים של PV יהיה מאד נמוך, ובהתקשרות, שווי הפרויקט יושפע בעיקר / רק מסכום ההשקעה הראשונית.

#### פרויקט B :

נק' חיתוך עם ציר Y (ציר ה- $NPV$ ) : סכום פשוט של תזרימי הפרויקט :  $-150,000 + 37,305 * 8 = 148,440$   
נק' חיתוך עם ציר X (ציר מחיר ההון) : ה-IRR של הפרויקט : 18%  
ערך מינימלי אפשרי (כשמחיר ההון גבוה במיוחד) סכום ההשקעה : -150,000

#### פרויקט הפרשי B-A

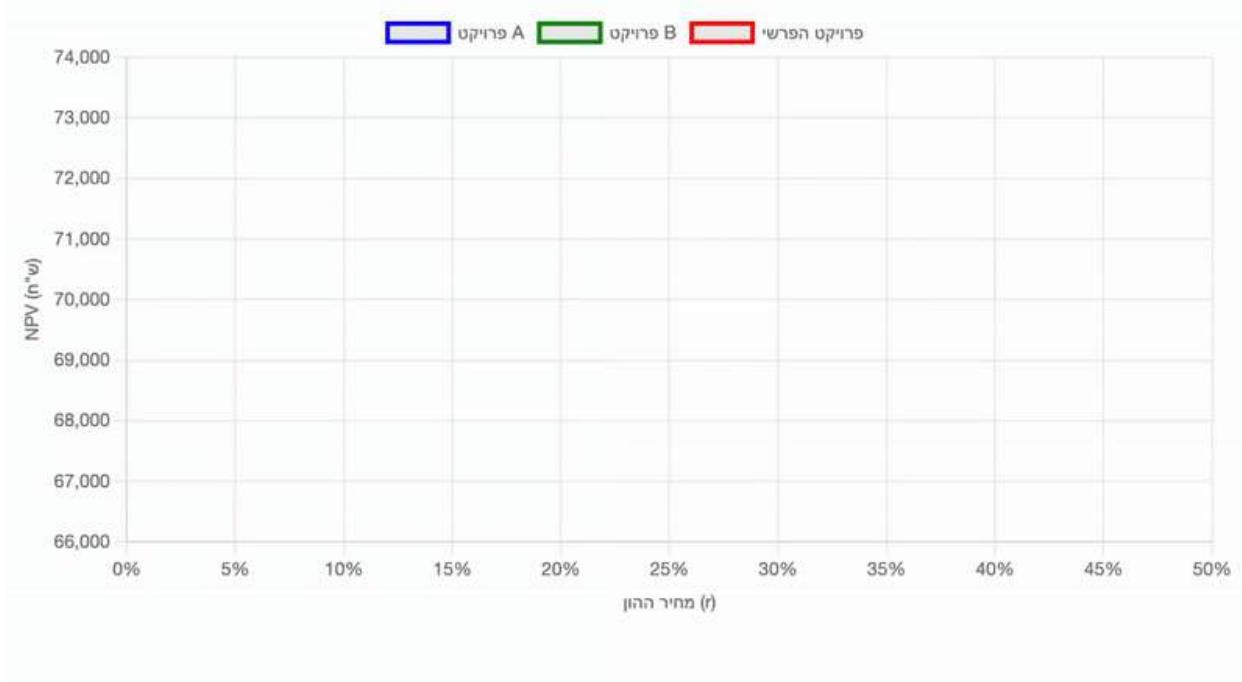
זהו פרויקט "דמיוני" שמודדר מטמטית כזו שתזרימיו בכל נקודת זמן הם הפרש בין תזרימי הפרויקט ה"גדול" בעל ההשקעה הגבוהה והתזרמים הגבוהים, לבין הפרויקט ה"קטן". במקרה שלנו, B-A.

IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
18%	37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B
	22,285	-100,00	פרויקט הפרשי B-A

נק' חיתוך עם ציר Y (ציר ה- $NPV$ ) :  $-100,000 + 22,285 * 8 = 78,280$   
נק' חיתוך עם ציר X (ציר מחיר ההון) : דורשת מאיתנו לחצץ IRR של הפרויקט הפרשי :  
 $IRR_{B-A} \rightarrow -100,000 + 22,285 * PVFA(IRR_{B-A}, 8) = 0 \rightarrow IRR_{B-A} = 15\%$   
ערך מינימלי אפשרי (כשמחיר ההון גבוה במיוחד) : -100,000

IRR של הפרויקט הפרשי חשובות גבוההה; ה-IRR של הפרויקט הפרשי הוא מחיר ההון שבו מתקיים חיתוך (שווין ב- $NPV$ ) של פרויקט A ופרויקט B.  
מזה? כי אם נמצאים ב-IRR של הפרויקט הפרשי, נמצאים במצב שבו ה- $NPV$  של הפרש 0, וזה אומר שהפרויקטים שביניהם חשובים שווים.  
ה-IRR של הפרויקט הפרשי הוא כדי להגיע לנקודת החיתוך של עיקומי העניין בין A ל-B.

אם מחיר ההון גבוה יותר מ-15%, נמצאים מימין לנקודת החיתוך בין עוקומי הפרויקטים, ויש להעדיף את פרויקט A. אם מחיר ההון נמוך מ-15%, נמצאים משמאלי לנקודת החיתוך בין עוקומי הפרויקטים, ויש להעדיף את פרויקט B.



סעיף ה : הסבירו כיצד ניתן להיעזר בפרויקט ההפרשי כדי לפתור את הסתירה בין NPV ו-IRR.

שטי'פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
18%	37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B
15%	22,285	-100,00	פרויקט הפרשי B-A

הפרויקט ההפרשי – הוא פרויקט דמיוני. יש לו 2 מטרות : האחת, ה-IRR שלו מייצג את מחיר ההון (הערך על ציר ה-X) שבו עוקמי העניין של הפרויקטטים המקוריים נחכמים (כדי לקבוע מתי האחד גבוהה מהآخر). המטרה נוספת שבה עסק סעיף זה שונה לחולטין : איך השתמש בפרויקט הדמיוני הזה כדי להוכיח את עליונות ה- NPV על ה-IRR, ולמנוע את הסתירה בין הקriterיוונים.

נשווה בנפשנו שאנו מציעים לאילן המנכ"ל להשקיע אך ורק באחד מבין שני הפרויקטטים הבאים :

ענ"ג NPV	שטי'פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
30,132	25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
49,019	18%	37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B

אני לא מוחן להשקיע אלא אם אתה דואג לי  
לפרויקט עם האיך קוראים אותו שתף הכי  
גבוה. אני מה מעוניין אותך מה ענן מה אני  
בשים תן אחוזים אחוי



למה אחוי? תבחר לפי NPV ככה תהיה הכי  
עשיר ... תמקסם ערך



עוד מילה אחד אני לוקח כל ההשקעות. אני  
אמרתי שתף. סתום תפה

נניח שאנו מתקשים לפעול לפי IRR. האם יש דרך לשכנע אותנו שאנו טוענים בכלים של השטי'פ?  
כו! אם השתמש בפרויקט ההפרשי.

מדוע?

נניח שאמרתי לאליון – סבבה. בוא נלך ספציפית על פרויקט A לאור השת"פ הגבוה יותר שלו.

ענ"ג NPV	شت"פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
30,132	25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
לא ניתן לביצוע אם בחרנו ב-A				תזרים (ש"ח) פרויקט B

ואולי סוף סוף אתה מתחבר איתי.  
רק לפי שurf. תקשיב טוב לאליון  
תגיע רכוק



אני מגיע לאליון ומציע לו פרויקט נוסף, בלי קשר (בלתי תלוי) ואני מספר לו שתזרימי הפרויקט הבלתי תלוי  
הנ"ל הם (מחיר ההון) 10%:

شت"פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
15%	22,285	-100,00	פרויקט C

אם אליון עובד רק לפי השת"פ. האם ירצה לבצע את פרויקט C בנוסף לפרוייקט A? התשובה חיובית כמובן.  
מדוע? מחיר ההון 10%, השת"פ גבוה מכך, ולכן כדאי לבצע גם את C.

אבל... הטריך הוא שפרויקט C הוא פרויקט שתזרימי הם למעשה ההפרש בין תזרימי B לתזרימי A:

לשונו אחרת, המשקיע אומר:

$$A > B$$

אבל אותו משקיע בדיק אומר:

$$A + C > A$$

אלא שלמעשה:

$$C = B - A$$

לכן המשקיע לא עקבי והוא הוכיח בכלים של שת"פ:

$$A + (B - A) > A \rightarrow B > A$$

מה שעשינו זה פיצלנו למשך את פרויקט B (הפרויקט העדיף לפי עניין וממקסם ערך כספי כלכלי) באופן מלאכותי לשני פרויקטים : פרויקט A (שהמשך עדיף לפי שת"פ) ובנוסך הפרויקט ההפרשי. לפי השת"פ המשקיע העדיף לבצע את פרויקט A וההפרשי על פניו ביצוע של A בלבד ; אלא שפרויקט A וההפרשי יחד הם למעשה פרויקט B.

כך יצרנו מצב שהמשך העדיף את פרויקט B על פני A רק בעקבות הצגתו המפוצלת. במלים אחרות, פילוח הפרויקט העדיף לפי עניין לפרוייקט הפרשי והפרויקט הנוטר, גורם להעדפת הפרויקט בעל העניין הגבוה יותר גם תוך שימוש בכלים של שת"פ.

#### מינוי ברייף לשאלת:

השאלה התחליה באופן החישוב הטכני של NPV ו-IRR.

לאחר מכן הבחרנו שאין שום בעיה לקבוע כדאיות לפי הקריטריונים, בהנחה שהפרויקטים בלתי תלויים (בහינתן סוגם כקונבנציונליים של השקעות).

לעומת זאת, כאשר הם מוצאים זה את זה, במקרים רבים עלולה להיווצר סטייה בדירוג לפי NPV לעומת בירוג לפי IRR. במקרה שכזה, כולל ה-NPV הוא המכרייע מבחינה כלכלית. ומעבר לעצם קביעה זו, הראינו זאת גם על ידי שימוש בפירוק וגישה הפרויקט ההפרשי.

לבסוף, הצגנו דרך נוספת לאייר עוקמי ה-NPV של הפרויקטים, ולמרות שימושו זמן לא עסקנו בניתוח התרשים יותר מדי – יש על זה מספיק תרגילים ורחבות במחברת.

### שאלה 59.3 - **כיתה**

מציעים לחברת השקעה לבכונה לחימום נקי. להלן מבנה תזרימי המזומנים השנתיים מהbacונה, כפי שנאמר על ידי כלכלן בכיר :



1-6 תזרים שנתי	0	
10,000	$-x$	תזרים (ש"ח)

נתונים נוספים בדבר הפרויקט :

ידוע  $0 > x$  (כלומר נדרש השקעה ממשית, תזרים שלילי בזמן 0).  
ידוע כי השט"פ (ה-IRR) של הפרויקט הוא 20%.  
בנוסף, ידוע כי מחיר ההון ( $k$ ) של הפירמה הוא 10%.

**נדרש :**

מהו העניין (ה-NPV) של הפרויקט?

**פתרון :**

כאשר חסרים נתונים תזרים בשאלת פרויקטים, בדרך כלל כוונת המשורר היא שנשתמש באחד מהנתונים האחרים כהגדתו (נתון השט"פ ו/או נתון ה-NPV) כדי לבצע חילוץ רלוונטי.  
ספקטיבית כאן, ציינו בפנוי שהשת"פ הוא 20%.

זכור, שת"פ הוא ערך מחיר ההון (הרביה) שאמם נציב אותה במשוואת ה-NPV של הפרויקט, התוצאה 0.

$$-x + 10,000 * PVFA(20\%, 6) = 0 \rightarrow x = 33,255$$

כך הגיעו לבניית התזרימי הבא של הפרויקט, בהתחשב בהשקעה בזמן אפס :

1-6 תזרים שנתי	0	
10,000	$-33,255$	תזרים (ש"ח)

כדי לחשב את ה-NPV, כל שעליינו לעשות הוא להציב את התזרומים ואת מחיר ההון של החברה :

$$NPV = -33,255 + 10,000 * PVFA(10\%, 6) \rightarrow NPV \approx 10,298$$

### שאלה 50.9.5 בחירה בין חלופת הלוואה לבין קבלת ערך היום

אלירן יכול לקבל היום נקי ענק בשווי 15,000 ש"ח. לחילופין, מציעים לאליין לקבל הלוואה ללא ריבית בסכום של 100,000 ש"ח שתוחזר ב-20 תשלומים שנתיים שווים של 5,000 ש"ח כל אחד.

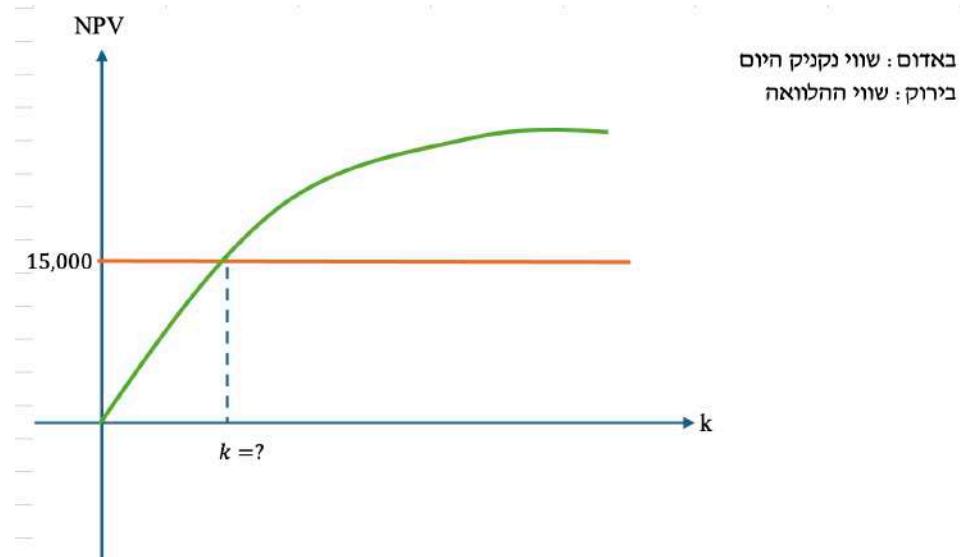


נדרש :

הציגו באופן גרפי את השווי במונחי ערך נוכחי של כל אחת מהחלופות (גרף ה-NPV).  
לאור ההצעה – דוננו – האם ובאיילו מקרים יעדיף אלירן נקי ענק על פני הלוואה ללא ריבית.

פתרון :

נשים לב שהשאלה זו אינן מידע בדבר מחיר ההון, שהוא חיוני לקביעת ערך פרויקטים וגם לקביעת נקודת המעבר ביניהם – כלומר מתי ערך של פרויקט מסוים הופך להיות עדיף / גבוה מערך של פרויקט אחר.  
בקשר זה, נוכל לומר : אם נבטא את השווי במונחי ערך נוכחי של שני הפרויקטים, נוכל להשוות בין הביטויים ולהגיע למחיר ההון שבו הם נחככים, ומכך גם תעלה נקודת המעבר בין כדיות הפרויקטים :



מה זה ?

העוקום האדום מבטא את שווי הנקניק שמתקבל היום. הואיל ונקי זה מתקבל היום, ויש לו שווי במונחי מזמן היום, קבלתו שולחה לקבלת מזמן היום בסכום של 15,000 ש"ח. לקבל היום 15,000 ש"ח – זה אומר עניין של 15,000, ללא תלות במחיר ההון (כפי מקבלים היום, וכך אין משמעות לזמן / היון).

העוקם הירוק מבטא את השווי במונחי ערך נוכחי של ההלוואה. מדובר שהלוואה תיצור בכלל ערך נוכחי? התשובה פשוטה: כאשר נוטלים הלוואה, מקבלים ערך שנובע מריבית נמוכה עליה. בפרט, אם הריבית בהלוואה נמוכה יותר מריבית שאותה משפטת החברה על מקורות המימון שלה (מחיר ההון) ההלוואה ליטרלי חוסכת כסף לחברת ויוצרת ערך חיובי.

עובדזה זו גם מתבטיota בכך שעוקם העניין של נטילת הלוואה דווקא עולה משמאלי לימין; למדנו שככל שמחיר ההון (הריבית שגובים מוסדות אחרים) גבוהה יותר, כך המחיר המוסף – העניין – הנובע משווי הלוואה בריבית נמוכה ממשועוט יותר (עד כה עסקנו בעיקר בפרוייקטים של השקעות, ולכן הכוון היה הפוך).

הביתוי המיציג את עניין הלוואה הוא:

מדובר בהלוואה ללא ריבית בסכום של 100,000 שמשולחת ב-20 תשלום שווים של 5,000 כל אחד:

$$NPV_{LOAN} = +100,000 - 5,000 * PVFA(k, 20)$$

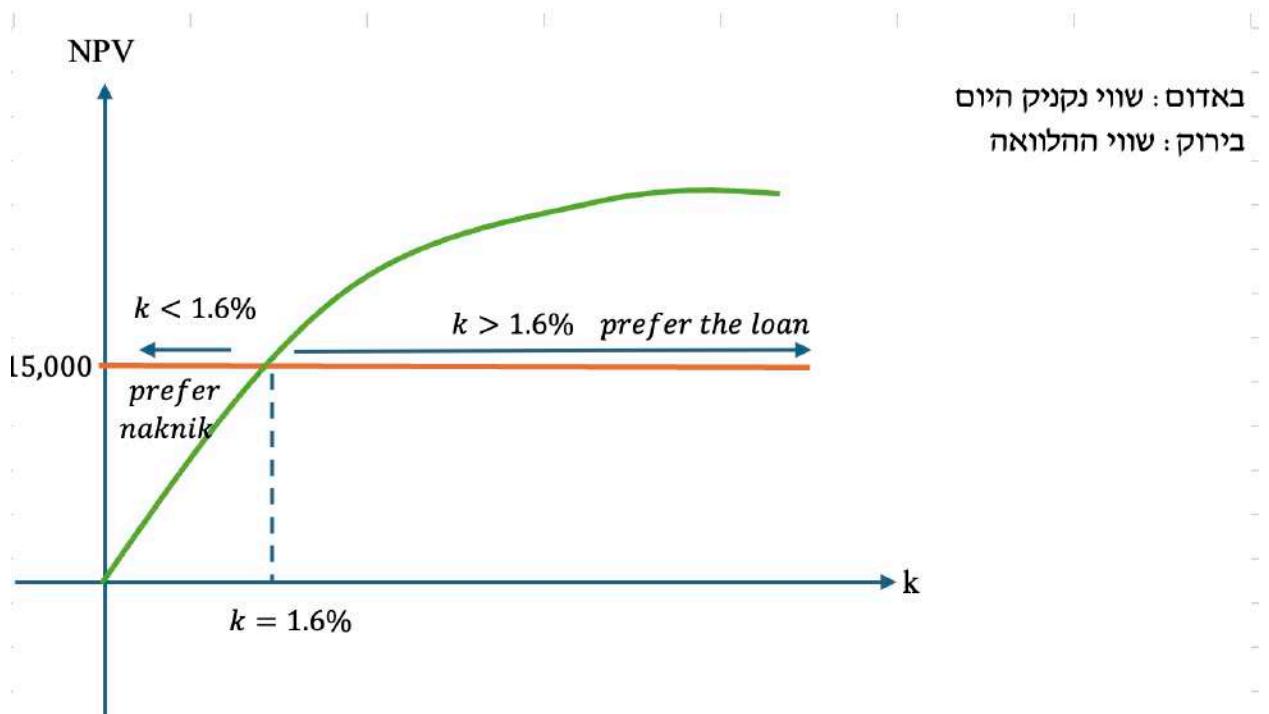
וכעת ננסה למצוא את נקודת החיתוך בין עוקם העניין של ההלוואה כמתואר לעיל, לבין שווי הנקייק בזמן:

$$15,000 = 100,000 - 5,000 * PVFA(k, 20)$$

משוואה כזו אפשר לפתור; אני לא הקפדי כתכתבתי את השאלה על ערכיהם עגולים, ולכן הריבית שמצאתי היא:

$$k = 1.6\%$$

המסקנה שנייתן לזהות גם בתרשים להן היא שבמחרי הון מעלה ערך זה, תועדף ההלוואה ובמחירים הון הנמוכים מעך זה יעדף לקבל נקייק בזמן.



**שאלה 60 – דיוון בהלוואות כפרויקטים (רגיל, שפייצר, בלון)**



מורה אל שוקלת ליטול הלוואה בסך 200,000 ש"ח. מציעים לה את המסלולים הבאים בגין הלוואה.

כל המסלולים ל-4 שנים (בתשלומים שנתיים) וכולם נושאים ריבית שנתית בשיעור 15%.

מסלול א : לוח סילוקין וגיל (החזוי קרן שווים).

מסלול ב : לוח סילוקין שפייצר (תשלומים שווים).

מסלול ג : מסלול "בלון" – תשלום הקרן יחד עם הריבית הצבורה בתשלום אחד בתום 4 שנים.

נדרש :

- א. הציגו את תזרימי המזומנים על ציר הזמן (בטבלה) בגין כל אחת מה haloאות.
  - ב. מהו שיעור התשואה הפנימי (השת"פ – ה-IRR) של כל הלוואה.
  - ג. הציגו בתרשים את הגורפים המיצגים את הקשר בין מחיר ההון לבין ה-NPV. הסבירו את הממצאים.
-

פתרון נדרש א – הצגת תזרימי הלווחות

שם	סימון	0	1	2	3	4
רגיל	א	200,000	-80,000	-72,500	-65,000	-57,500
שפיצר	ב	200,000	-70,053	-70,053	-70,053	-70,053
בלו	ג	200,000	--	--	--	-349,801

רגיל :

$$PRN = \frac{200,000}{4} = 50,000$$

$$PMT_1 = 50,000 + 15\% * 200,000 = 80,000$$

$$PMT_2 = 50,000 + 15\% * 150,000 = 72,500$$

$$PMT_3 = 50,000 + 15\% * 100,000 = 65,000$$

$$PMT_4 = 50,000 + 15\% * 50,000 = 57,500$$

שפיצר :

$$PMT = \frac{200,000}{PVFA(15\%, 4)} = 70,053$$

בלו :

$$FV_4 = 200,000 * (1 + 15\%)^4 = 349,801$$

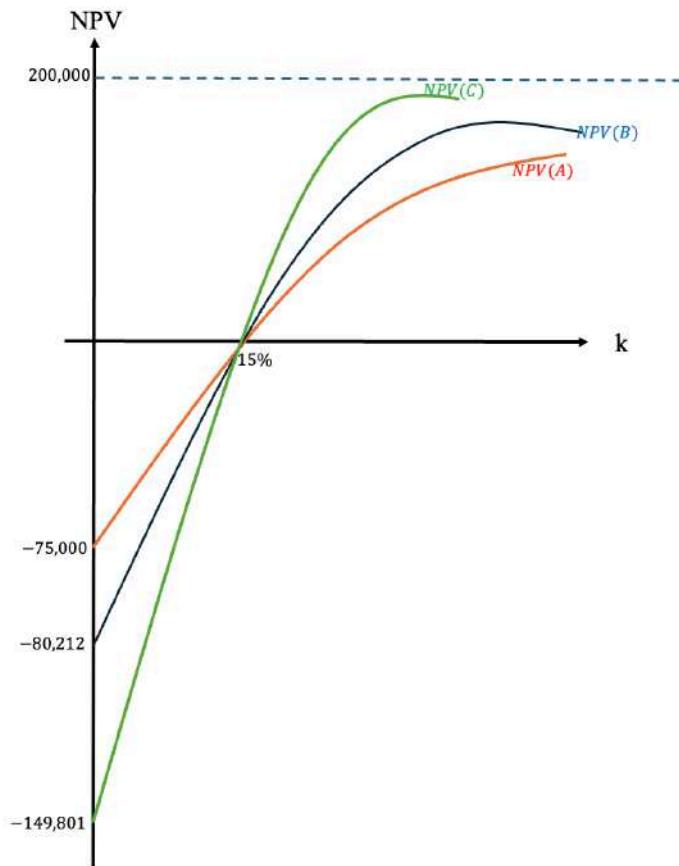
פתרון נדרש ב – מהו שיעור התשואה הפנימי (השת"פ – ה-IRR) של כל הלוואה

решפט : כאשר מדובר בפרויקט קונבנציונלי של השקעה, ה-IRR הוא שיעור התשואה התקופתי של הפרויקט. כאשר מדובר בפרויקט קונבנציונלי של הלוואה, ה-IRR הוא הריבית האפקטיבית בהלוואה (וכאן היא נתונה). לכן, בהינתן שבכל הלוואות הריבית האפקטיבית זהה, זהו גם ה-IRR של כלו.

פתרון נדרש ג – גרפ ה-NPV לכל אחד מהפרויקטים, כפונקציה של מחיר ההון

להלן טבלת התזרומים עם ההגדרות הרלוונטיות של נקי החיתוך ונק' המקסימום החיוני לאפיון התרשימים שיוופיו בעמוד הבא .

נק' מקסימום NPV עם ציר k	נק' חיתוך IRR	נק' מקסימום NPV עם ציר k	נק' חיתוך IRR	סכום הלוואה
רגיל	א	200,000	-75,000	15%
שפיצר	ב	200,000	-80,212	15%
בלו	ג	200,000	-149,801	15%



על בסיס הגרף, ניתן לראות שהשווי הגובה ביותר (ה- $NPV$  המרבי) בחרבות שבחן מחיר ההון מעל 15% הוא של פרויקט ג (פרויקט הלוואת הבלון).

השווי הנמוך ביותר בערכי מחיר ההון אלו יהיה זה של פרויקט הלוואה הרגילה.

כאשר מחיר ההון נמוך מ-15%, התמונה מתחفت: ראשית, כל הלוואות הופכות להיות לא כדיאות (בעלות ערך שלילי, מה שהגינויו במצב שבו מחיר ההון שמייצג ריבית אלטרנטטיבית נמוכה מהריבית בלוואות המוצעת) אך מעבר לכך, הלוואה הגורעה ביותר היא הלוואה ג (בלון).

ההיגיון בכך הוא: אמנם כל הלוואות הן ל-4 שנים ברמה הטכנית; אבל הלוואת הבלון היא ה"ארוכה ביותר". אם זה המצב – כל שקל יוצא מני רק 4 שנים.

בלוואות א-וב מתחילה לחזור מחר, لكن יתרת הלוואה והסכום הכספי העומד לרשותי מצטמך מחר.

אם זה טוב או רע לחזור מחר? תלוי... אם מדובר בלוואה טובה (ריבית 15% והיא נמוכה מחיר ההון) אני רוצה לדבוק בלוואה לכמה שיותר זמן, וכך אעדיף את ג.

אם מדובר בלוואה פח אשפה זבל אקסטי (ריבית 15% והיא גבוהה מחיר ההון) אני רוצה להפטר מהלוואה יותר מחר וכן תהיה העדפה ללוואות האחרות שモוחזרות בממוצע מהר יותר.

**שאלה 60.2 – פרויקטים לא קונבנציונליים – עיקומי ענ"ג ומשמעותם בקבלת החלטות**

פרויקט דורש השקעה מיידית בסך 100, ומנייב תזרים חיובי בסך 400 בחולף שנה ותזרים שלילי בסך 200 בחולף שנתיים.

נדרש :

- באיזה סוג פרויקט מדובר?
- מהו טווח מחירי ההון שבו הפרויקט כדאי?
- האם ניתן לקבל החלטה בפרויקט זה על בסיס ה-IRR? נקי.

פתרון :

המבנה התזרימי של הפרויקט בטבלה:

2	1	0	
תזרים			
-200	400	-100	

**פתרון נדרש א – באיזה סוג פרויקט מדובר?**

הויאל והסימן המתמטי של תזרימי המזומנים של הפרויקט משנה סימנו יותר מפעם אחת (ליתר דיוק – פעמיים) מדובר בהגדרה בפרויקט לא קונבנציונלי.

**פתרון נדרש ב – מהו טווח מחירי ההון שבו הפרויקט כדאי?**

גם בשאלה זו, כמו הקודמת שפתרנו, מחיר ההון של החברה לא נתון. ולכן כדי להבין את הפרויקט וטווחי כדאיותו, נרצה ליצור צורה מקובלת של עקומם העניין – NPV.

ככל, הראינו כבר צורה מקובלת של עקומם עניין של הלואה קונבנציונלית. תוכל לראות בהמשך המחברת צורת עקומם עניין יורדת של פרויקט קונבנציונלי של השקעות.

**הנקודה היא שכאשר מדובר בפרויקט לא קונבנציונלי – אין כללים! لكن דרכנו לפטור מתייחס לחישוב ערכי ה-IRR תחיליה, ואז הבנה כלילית בהתאם לטיפוס הנוסחה – כיצד היא נראית, ומשם להמשיך לכדיות.**

בנייה משווהת העניין ככלל היא :

$$NPV = -100 + 400 * (1 + k)^{-1} - 200 * (1 + k)^{-2}$$

כדי למצוא את ה-IRR, علينا להציב כתוצאה משווהת ה-NPV את ערך 0. כך נקבל :

$$-100 + 400 * (1 + IRR)^{-1} - 200 * (1 + IRR)^{-2} = 0$$

לשם נוחות, נסמן תחילת את הביטוי  $(1 + IRR)^{-1}$  בטור X. נקבל :

$$0 = -100 + 400 * X - 200 * X^2$$

זו משווהה ריבועית שאפשר לסדר אותה :

$$-200X^2 + 400X - 100 = 0$$

לפי ההגדרות, המקודם של X ברכיבו מסומן a, המקודם של X מסומן b והערך החופשי מסומן c.

$$a = -200; b = 400; c = -100$$

פתרון המשווהה הריבועית :

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \rightarrow X_{1,2} = \frac{-400 \pm \sqrt{400^2 - 4 * (-200) * (-100)}}{2 * (-200)} = 1.7; 0.3$$

מתתקבל :

$$X = (1 + IRR)^{-1} \rightarrow X = \frac{1}{(1 + IRR)} \rightarrow 1.7 = \frac{1}{1 + IRR_1} \rightarrow IRR_1 < 0$$

או :

$$0.3 = \frac{1}{1 + IRR_2} \rightarrow 0.3 * (1 + IRR_2) = 1 \rightarrow 0.3 + 0.3IRR_2 = 1 \rightarrow IRR_2 = 2.333 \approx 233\%$$

از רגע שי, מה לעוזל קרה פה?

לקחתתי משווהת עניין של פרויקט לא קונבנציונלי.

ניסיתי לחשב את ערך ה-IRR.

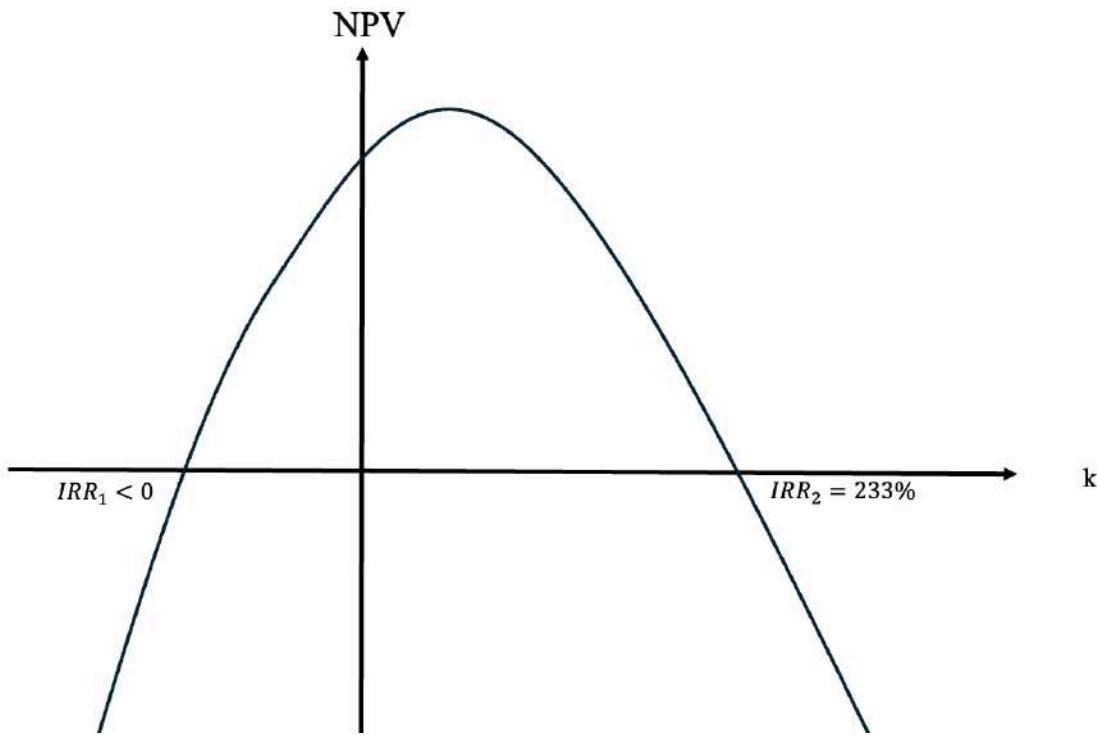
ראשית גיליתי שקיימת מרכיבות יחסית בחישובם.

שנית, גיליתי שאין באמת משמעות כלכלית ל-IRR, משום שם יש לו שני ערכים, הרי שלא באמת נוכל לבוא ולומר מה הם מייצגים.

ספקטיבית : אם קיבלתי ש-IRR אחד הוא 233%, ו-IRR שני הוא 40%, אז מהי התשווהה של הפרויקט? כמובן שאי אפשר לדעת... כי רק מקבילים נקודות חיתוך ללא משמעות כלכלית אמיתית.

במצב כזה, השימוש היחידי שיבוצע ב-IRR זה כדי להעריך את טווח מחירי ההון שבhem יתקיים NPV חיובי.

ספקטיבית כאן, חילוץ ה-IRR כנקודה טכנית של נק' החיתוך עם הציר האופקי עוזר לי להסיק במקרה זה שבמחיר הון של מתחת ל-233% הפרויקט כדאי לפי גראף העניין.



#### שאלה 61 - החזר ההון תקופתי

דונקי שוקל לבצע פרויקט, שתזרימי המזומנים שלו כדלקמן:

תזרים באלפי ש"ח	שנה
-170	1
-180	2
-90	3
200	4
200	5
200	6
200	7

מחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה.

נדרש:

- מהו העניין (NPV) והשת"פ (IRR) של הפרויקט, ומהי כדאיות הפרויקט לאורם של קритריונים אלו?
- הציגו את עקומת העניין של הפרויקט.
- חשבו את החזר ההון התקופתי של הפרויקט ל-4 שנים. חוו דעתכם לאור כדאיות הפרויקט לאורו.

**פתרון סעיף א - מהו העניין והשת"פ של הפרויקט, ומהי כדאיות הפרויקט לאורם של קритריונים אלו?**

הunny (NPV) משקף את שווי הפרויקט במונחים של ערך נוכחי (זמן 0).  
מדובר בערך כספי העקי במהותו עם מטרת הפירמה - השגת ערכה לבאים.

במצבים שבהם תזרימי המזומנים של הפרויקט ידועים במלואם, הענ"נ (NPV) יוחשב לפי הכליל הרלונטי מיחידה 5 לחישוב ערך נוכחי עבור התזרימיים כולם.

תזרים באלפי ש"ח	שנה
-170	1
-180	2
-90	3
200	4
200	5
200	6
200	7

הואילותזרימי המזומנים בכל אחת מהשנים 1, 2, 3 - שונים אלו מאלו, יש להווים (לחשב PV בעבורם) על בסיס חישוב ערך נוכחי לכל תזרים בנפרד (לפי נוסחת ערך נוכחי של סכום יחיד  $-r^{t-1} = PV * (1 + r)^{-t}$  ונסכום את התוצאות).

תזרימי המזומנים לשנים 4-7 מהווים סדרה קבועה סר"ת (סכום קבוע, ריבית = מחיר הון קבוע, תדיות קבועה) ולכן את ערכם הנוכחי המצרי נחשב באמצעות PVFA. ערך נוכחי של סדרה (זו שמתחללה מהזמן 4) מוביל תמיד לנקודת הזמן המוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה. לכן היון הסדרה מ-4 ואילך מוביל בזמן 3, ויש לתקן את התוצאה עוד 3 שנים לאחר.

$$NPV = -170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + 200 * PVFA(5\%, 4) * (1 + 5\%)^{-3}$$

ומקבלים :

$$NPV = -170 * 1.05^{-1} - 180 * 1.05^{-2} - 90 * 1.05^{-3} + 200 * 3.546 * 1.05^{-3} = 209.718 > 0$$

המשמעות: הערך נטו שנוצר לחברת מהפרויקט בהתחשב בכל התקבולים, בכל התשלומים, בעיתויים ובריבית הוא 209.718 ש"ח.

ברמת קבלת החלטה - כושוסקים בפרויקט יחיד (ולא בדיגוג / מגבלות תקציב) כאשר ה- NPV חיובי, כדי לבצע את הפרויקט. במלים אחרות, הפרויקט הספציפי המוצע הוא כדי לפי קритריון הענ"נ.



בעוד ש - NPV מחשב שווי פרויקט נטו, בכספי - השט"פ (IRR) הוא שיעור התשואה המומוצע באחזים בפרויקט (שנתית) - שיעור הרווח השנתי המומוצע על ההשקעה.

כדי לחץ את ה - IRR, علينا להתבסס על משווהת ה - NPV (הענ"נ) המתאימה לפרויקט, בשני שינויים :

1. נזין את מחיר הון (ריבית להיון) כנעלם - IRR.

2. נשווה את המשוואה כולה ל-0.

זכור, משווהת ה-  $NPV$  הייתה:

$$NPV = -170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + 200 * PVFA(5\%, 4) * (1 + 5\%)^{-3}$$

ולאחר שני השינויים (מחיר הון כנעלם  $IRR$  והשוואה ל-0) מתבלת משווהת חילוץ ה-  $IRR$  כלהלן:

$$-170 * (1 + IRR)^{-1} - 180 * (1 + IRR)^{-2} - 90 * (1 + IRR)^{-3} + 200 * PVFA(IRR, 4) * (1 + IRR)^{-3} = 0$$

משווהה כזו (שכלולת נעלמי ריבית גם במסגרת סדרה וגם במסגרת ביטויים נוספים באופן שיוצר משווהה מתמטית מזוועת) פותרים בקורס שלנו רק באמצעות שיטת ה"ניסוי והטעה".

עליכם להציב כמו נינגיוט ריביות שונות עד אשר תגיעו לתוצאה.

הרי אנחנו יודעים שבריבית 5% הערך הנוכחי חיובי. וככל שהריבית עולה, הערך הנוכחי יורד. לכן, ניתן לננות ולהציב למשל ריבית של 10% ולראות האם התוצאה אכן 0.

אם התוצאה עדין חיובית - נמשיך ונגדיל את הריבית. למשל, ל-15%.

ואם התוצאה שלילית - נקטין את הריבית.

הוail ופתרו בניסוי וטעה עשוי להיות מעט מתסכל, והוail ובדרכ' כלל שיטת פתרו כזו אין צורך לישם בבחינה, ניעזר בדרכ' נספת (שאינה זמינה בבחינה) - Excel.

	A	B	C	D
1			תזרים	זמן
2			0	0
3			-170	1
4			-180	2
5			-90	3
6			200	4
7			200	5
8			200	6
9			200	7
10				
11	=IRR(C2:C9)		18%	
12				

בהתאם קבלת החלטה: כשהשאנו בקריטריון הענין ( $NPV$ ) המשקף שווי - הטענה הייתה: כדאי לבצע כל פרויקט בעל עניין חיובי.

לעומת זאת, כשותפים בשתי'פ (IRR) בפרויקט של השקעה (תזרים ראשוניים שליליים ולאחר מכן חיוביים), התוצאה - ה-  $IRR$  מיצגת את שיעור התשואה באחזois על ההשקעה בפרויקט עצמו. علينا לבחון תשואה זו אל מול התשואה שדורשים המשקיעים (מחיר ההון).

בנתוני השאלה, נאמר מפורשות: מחיר ההון = תשואה הנדרשת ע"י המשקיעים = 5%. מקובל מאד לסמן את מחיר ההון באות  $k$ , ובהתאם כלל ההכרעה בדבר קבלת פרויקטים לפי  $IRR$  הוא:

$$IRR > k$$

וכאן מתקיים:

$$IRR = 18\% > k = 5\%$$

כלומר כדי לקבל את הפרויקט, הואיל ותשואתו ( $IRR$ ) גבוהה מציפיות / דרישות המשקיעים ( $k$ ).

**ב. הציגו את עקומת הענין של הפרויקט - ויזואлизציה של הקשר בין מחיר ההון ל- $NPV$**

עוקם הענין מציג את הקשר שבין הענין לבין מחיר ההון.

עלינו לאייר מערכת צירים שצירה האנכי שלה (ה- $y$  שלה) הוא  $NPV$  וציר האופקי (ציר ה- $x$ ) הוא מחיר ההון  $k$ . כאשר מדובר בפרויקטים של השקעות (משלמים, וرك אז מתחילים **לקטוּפַ פִּירּוֹת וְהַכְּנִסּוֹת**) עוקם הענין תמיד בעל שיפוע שלילי (ירד משמאל לימין). מדוע? כי בפרויקטים של השקעה, התקבולים הם בעתיד; וככל שהריבית גבוהה יותר, השווי היום של אותם התקבולים נדחים - נמוך יותר.

---

במו כן, ניתן לאפיין את נקודות החיתוך של עוקם העניין עם הצירים באופנו הבא:

نקודת החיתוך עם הציר האופקי (B) :  $h - IRR$  של הפרויקט (חישוב בסעיף א).

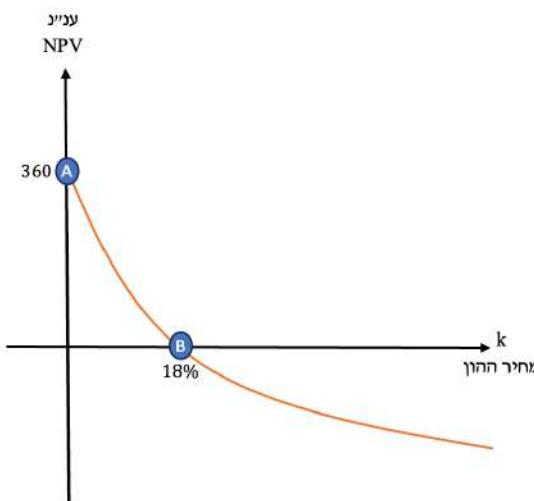
نקודת החיתוך עם הציר האנכי (A) : סיכום פשוט של תזרימי המזומנים של הפרויקט :

תזרים באלפי ש"ח	שנה
-170	1
-180	2
-90	3
200	4
200	5
200	6
200	7

نקודת החיתוך עם הציר האנכי היא הנקודה שבה מחיר ההון שווה לאפס אין משמעותות זמן ולכן במקומות להוון את תזרימי המזומנים בכל  $V$  כדי לחשב את ערכם הנוכחי - אפשר פשוט לסקום אותם:

$$NPV(k = 0) = -170 - 180 - 90 + 200 + 200 + 200 = 360$$

نקודת החיתוך עם הציר האופקי היא הנקודה שבה  $NPV = 0$ . כפי שהראינו קודם, זו הנקודה שמנדרת מתמטית את  $h - IRR$  (השת"פ) ולכן בהינתן שהיחסנו אותו קודם ומצאו  $IRR = 18\%$  זו תהא נקודת החיתוך עם הציר האופקי.



מה למדנו מהתרשים? בפרויקט של השקעה - יש קשר שלילי בין מחיר ההון לשוויי נטו (NPV). ככל שמחיר ההון עולה התשואה שדורשים המשקיעים עולה ("החברה משלם יותר ריבית על ההון המושקע") ולכן הפרויקט מניב פחות ערך נטו.

מעבר לכך, אנחנו גם מבינים שבנייה פרויקט הקשור במידה רבה לזרות המבצע שלו. כלומר, בהחלט ייתכן שהחברה מסויימת בעלת מחיר הון נמוך וחברה אחרת בעלת מחיר הון גבוה - תראה בפרויקט ערך שלילי.

ולבסוף - אמנם זה קצר מוקדם, אבל בהמשך דרכנו המשותפת, כשניחסן לעוד סוגים פרויקטיים (שאינם פרויקטיים של השקעות, ו/או אינם פרויקטיים בודדים) ההבנה של התננויות הגרפיים תהיה משמעותית בשיפוט שלהם.

ג. חשבו את החזר ההון התקופתי של הפרויקט ל-4 שנים. חוו דעתכם לאור כדיות הפרויקט לאורו. החזר ההון התקופתי מוגדר בטור ההכנסה השנתית הקבועה נטו נדרכה להתקיים בפרויקט, על מנת שהיא תהיה כדיי.

כדיות פרויקט מתחילה (במינימום) כאשר ה-  $NPV$  (הענין) 0. לכן, עלינו לבנות את משווהת הענין, לסמן את ההכנסה השנתית כנעלם, ולהשווות לאפס - וכך לחלץ את ההכנסה השנתית כאמור.

שנה	תזרים באלפי ש"ח
1	-170
2	-180
3	-90
4	200
5	200
6	200
7	200

זכור מסעיף א, משווהת הענין הייתה:

$NPV = -170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + 200 * PVFA(5\%, 4)$  על מנת להשתמש בה בשינויים המתחייבים, כדי לחלץ את החזר ההון התקופתי אבצע את השינויים הבאים:

שינוי 1: במקום ההכנסה שנתית של 200, נציב גודל ההכנסה לא ידוע ליחילוץ שיסומן כ-  $x$ .  
שינוי 2: נשווה את כל המשווהה ל-0.

$$-170 * (1 + 5\%)^{-1} - 180 * (1 + 5\%)^{-2} - 90 * (1 + 5\%)^{-3} + x * PVFA(5\%, 4) = 0$$

נחשב ונקבל:

$$-170 * 1.05^{-1} - 180 * 1.05^{-2} - 90 * 1.05^{-3} + x * 3.546 * 1.05^{-3} = 0$$

ונגיע לתוצאה

$$x \approx 131.54$$

מסקנה: החזר ההון התקופתי של הפרויקט (ההכנסה השנתית המינימלית ב-4 השנים האחרונות שתצדיק CDAIות) היא 131.54 ש"ח. והואיל וההכנסה השנתית הצפוי היא 200 ש"ח, סכום גבוה מכ- - הרי שגם לפי קритריון החזר ההון התקופתי הפרויקט כדיי.

לפי קритריון החזר ההון התקופתי, עלינו לחשבו, אז לבדוק - אם ההכנסה השנתית הצפוי בפועל שווה לו או גבוהה ממנו (ואז הפרויקט כדיי) או נמוכה ממנו (ואז הפרויקט לא כדיי).

## שאלה 62 - בחירה בין חלופות - כולל חלופת הלואאה

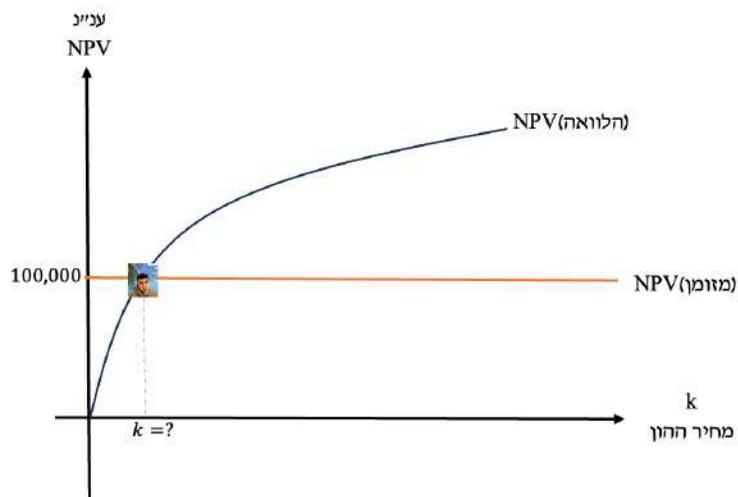
באפשרות החברה לקבל אחת משתי ההצעות הבאות:

- לקבל לחשבון העו"ש באופן מיידי 100,000 ש"ח (מענק, לא מחזירים).
  - לקבל הלואאה בסך 1,000,000 ש"ח **לא ריבית** שתוחזר ב-10 תשלומים שנתיים שווים בסך 100,000 ש"ח כל אחד.
- הציגו את גרפ' העניין של הפרויקטים / החלופות וחווו דעה בדבר הבחירה לאורו.

פתרון :

מחיר החון של החברה אינו נתון. ואם כך, נשאלת השאלה - כיצד נחשב את העניין (NPV) וכייזו חלופה תועדף? אפשר להגדיר את הנסיבות גם לפי גרפ' העניין, ובabhängig למה הכוונה.

הלוואה		
תורים	זמן	
1,000,000	0	
-100,000	1	
-100,000	2	
-100,000	3	
-100,000	4	
-100,000	5	
-100,000	6	
-100,000	7	
-100,000	8	
-100,000	9	
-100,000	10	



הסבר :

באյור עקום העניין **בשאלות הקודמות** - הצגנו שהוא יורד משמאל לימין. זאת, משום שהוא מדובר בפרויקטים של השקעות. ככל שהתשואה שהמשקיעים דורשים بعد השקעות גבוהה יותר, שווי הפרויקט יורד.

כאן, **כשאנו דנים בפרויקט של נטילת הלואאה, צורת עקום העניין הפוכה** - והיא עולה **משמאלי** לימין. ומהו? למעשה, מציעים לחברת הלואאה ללא ריבית. כדי שהחברה תבין מה החסכו הכלכלי (הערך הכלכלי) הנובע מכך, היא חייבת להבין כמה ריבית היא משלמת בפועל היום למשקיעים.

כל שהריבית למשקיעים (מחיר הון) גבוהה יותר, כך הרווח / הערך הנובע מקלט הלואאה ללא ריבית ממשמעותי יותר - מה שמתבטא בעניין גבוה יותר.

משל למה הדבר דומה? גיא מקבל רכב צמוד מהעובדת (דלקן). אני טוען: ככל שמחירי הדלק גבוהים יותר, כך החסכו של גיא בזכות הדלקן ממשמעותי יותר. זה מאד דומה - רק שבמקרים לדבר כאן על מחירי הדלק, אנחנו מדברים על מחירי הכספי - ריבית.

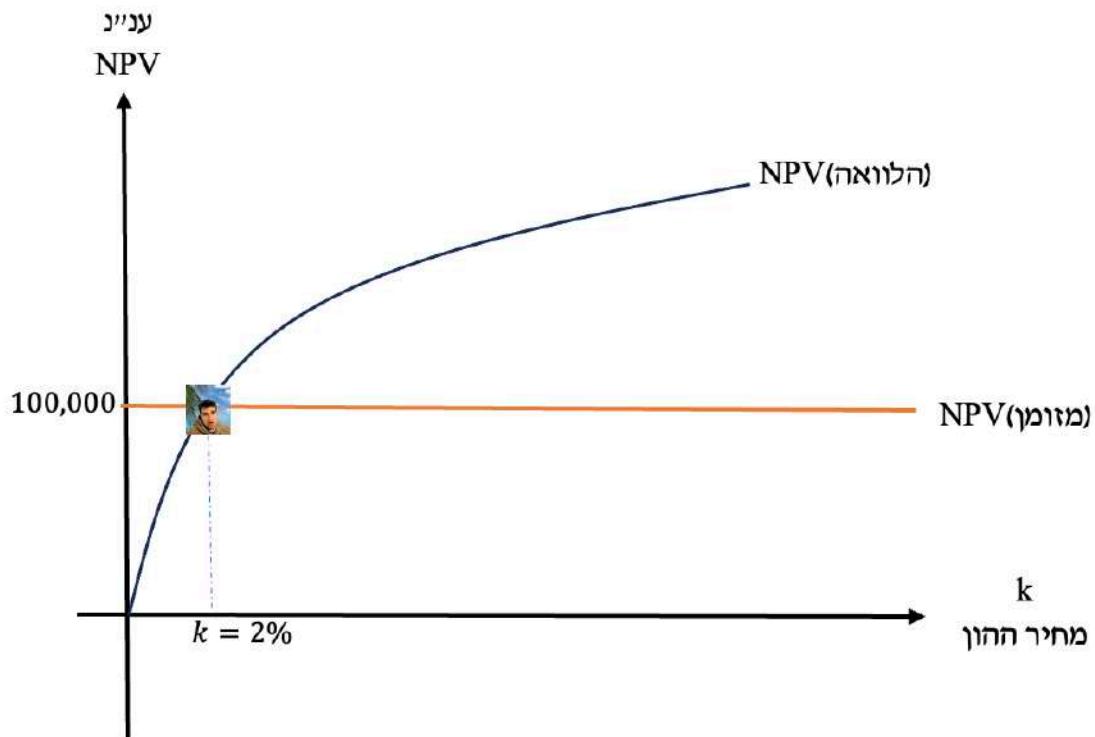
העיקום האדום מייצג את העניין (NPV) של קבלת הסכום במזומן, שהוא כמובן שווה ל-100,000 בכל ריבית (כי הסכום מתקובל בזמן 0).

מטרתנו היא למצוא את נקודת החיתוך בין העוקומים. משמאלו לנקודת חיתוך זו יעדף הפרויקט האדום (המזומן) ומימין לנקודת חיתוך זו יעדף הפרויקט הכהול (ההלוואה המוזלת).

$$NPV_{\text{מזומן}} = NPV_{\text{הלוואה}}$$

$$100,000 = 1,000,000 - 100,000 * PVFA(k, 10)$$

$$PVFA(k, 10) = 9 \rightarrow k \approx 2\%$$



ניתן לומר כי:

יש להעדיף את הסכום במצוון מיידי כאשר  $k < 2\%$ .

יש להעדיף את הלוואה ללא ריבית כאשר  $k > 2\%$ .

כאשר  $k = 2\%$  הבחירה שקולות (אין העדפה ביןיהן / קיימת אדישות באשר לבחירה ביןיהן).

מה למדנו?

א. עקום ה- $NPV$  של הלוואות (תזרים חיובי ואחר כך תזרים שליליים) הפוך בצורתו לעקום ה- $NPV$

של השקעות (שהראינו בשאלת קודמת).

ב. כדאיות הלוואה הולכת וגדלה ככל שמחיר ההון  $k$  גדל.

ג. בחירה בין הלוואה מוזלת (בריבית נמוכה / 0) לבין מענק נקי במצוון - תבוצע בהתייחס לריבית האלטרנטיבית של החברה (מחיר ההון). בכלל, ככל שריבית זו גבוהה יותר, כדאיות הלוואה תהיה גבוהה יותר.

**שאלה 63 - קבלת הכספיים מוקדם / מאוחר - השפעה על כדאיות ועל שט"פ**  
 שני פרויקטים דורשים השקעה ראשונית זזה, ומניחים תקבוליים בסכום כולל זהה.  
 אלא שבפרויקט א התקבוליים הגבוהים מתקבלים בשנים הראשונות, והקטנים בשנים האחרונות.  
 בפרויקט ב התקבוליים הגבוהים מתקבלים בשנים האחרונות, והקטנים בשנים הראשונות.

- איזה פרויקט כдאי יותר?
- לאיזה פרויקט שט"פ גובה יותר?

**פתרון :**

- א. בהגדרה, אם הסכומים הכספיים הכוללים זהים, קבלת עיקר הכספיים מוקדם יותר מגדילה את ערכם הנוכחי (את הע"נ), את שוויים ואת הcadיות. **לכן פרויקט A עדיף**. זה פתרון מלא וזו הנמקה מלאה.  
 יחד עם זאת, הציגו כהמזהה כמותית בשיעור גם את הטבלה הבאה לדוגמה שמחישה עיקרונו זה:

זמן	אלעד	ニア
-100	-100	0
20	80	1
30	50	2
40	40	3
50	30	4
80	20	5

26%                    47%                    **IRR**

- ב. בהגדרה, קבלת הכספיים מוקדם יותר מקטינה את סכום ההשקעה, וגורמת לתשואה להיות מוחשבת ביחס לקרן השקעה קטנה יותר, מה שմגדיל את התשואה באחזois - כלומר, את השט"פ.

**שאלה 63.1 - קבלת הכספיים מוקדם / מאוחר - השפעה על כדאיות ועל שט"פ - ניסוח "בחינתי"**

6	5	4	3	2	1	0	
$x_2$	$x_2$	$x_2$	$x_1$	$x_1$	$x_1$	$-y$	א
$x_1$	$x_1$	$x_1$	$x_2$	$x_2$	$x_2$	$-y$	ב

כמו כן, ידוע כי  $x_1 > x_2$  ושניהם חיוביים. כמו כן ערך  $y$  חיובי. סמן את התשובה הנכונה:

- פרויקט בעדיף על פני פרויקט א.
- פרויקט א עדיף על פני פרויקט ב.
- הויאל ושני הפרויקטים מניבים הכנסות זהות בסך הכל, הם שווים.
- לא ניתן לדעת איזה פרויקט יותר, שכן חסר מידע בדבר מחיר ההון.
- כל התשובות שגויות.

**תשובה ל-63.1**

בהתנחת שהסכוםים הכלולים המתקבלים זהים, מועד הפרויקט שבו הסכומים מתקבלים ככל שניתן מוקדם יותר (הסכוםים הגבוהים קודם) ככל פרויקט ב שכן נתנו  $x_1 > x_2$ .

**שאלה 64 - חוזה על פרויקטים**

באפשרותך להשיקע באחד מבין 3 הפרויקטים הבאים:

פרויקט	0	1	2	3	4	5
א	-100	200	200	200	200	200
ב	-300	150	250	700	200	200
ג	-200	100	200	300	400	500

מחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה.

או מה הקטוע???



: הקטוע

- בחירה בפרויקט א מחייבת לחזור עליו פעמיים
- בחירה בפרויקט ב מחייבת לחזור עליו אינסוף פעמיים
- על פרויקט ג לא ניתן לחזור ( מבוצע פעם אחת בלבד )

**השאלה: מהו הפרויקט שיועזר?**

פתרון :

שימו לב! חשוב מאד להבדיל בין שאלות הדנות בעצם הכספיות של פרויקט בודד העומד בפני עצמו לבין שאלות המבוקשות לדרג מסווג פרויקטים / לבחור ביניהם. בכלל, הקритריון הדומיננטי המוביל למסקנה כלכלית נכונה לצורך זה הוא קритריון הענין בלבד.

שימו לב, ציינו שלפחות על חלק מהפרויקטים נדרש לחזור (לבצע שוב לאחר סיום הביצוע שלהם). כדי לתפעל מצב זה, נתחיל בחישוב נאיי פשוט של ה- NPV הבסיסי של כל פרויקט "למחזור הפעלה אחד". לאחר מכן, נראה כיצד אפשר לתקן אותו כדי לגלם את אפשרות החזרה.

פרויקט	0	1	2	3	4	5
א	-100	200	200	200	200	200
ב	-300	150	250	700		
ג	-200	100	200	300	400	500

**בשלב ראשון** - נחשב את ה- NPV למחזור הפעלה בודד של כל פרויקט (חישוב PV נריגיל). נזכיר שמחיר ההון 5% כנתון בשאלת :

נחשב תחילה את ה- NPV של פרויקט א. תקבוליו הם סדרה, ולכן הביטוי פשוט :

$$NPV_A = -100 + 200 * PVFA(5\%, 4) = -100 + 200 * 3.546 = 609.2$$

עבור לחשב את ה- NPV של פרויקט ב. תקבוליו אינם סדרה, ולכן ההיוון מכוער (כל ערך יהו נפרד) :

$$NPV_B = -300 + 150 * (1 + 5\%)^{-1} + 250 * (1 + 5\%)^{-2} + 700 * (1 + 5\%)^{-3} = 674.3$$

עבור לחשב את ה- NPV של פרויקט ג. גם תקבוליו אינם סדרה, ולכן ההיוון מכוער :

$$NPV_C = -200 + 100 * 1.05^{-1} + 200 * 1.05^{-2} + 300 * 1.05^{-3} + 400 * 1.05^{-4} + 500 * 1.05^{-5}$$

$$NPV_C = 1,056.6$$

כדי לבצע חישוב שווי פרויקטים החוזרים על עצמם (שמבוצע שוב לאחר סיוםו), ניתן להתייחס לכל עניין כאלו תזרים שתדירותו היא כתדיות הפרויקט. ולמה כוונתי?

**نبיט על פרויקט A.** זהו פרויקט ל-4 שנים. העניין שלו (שווי לזמן 0) הוא 609.2.  
אך אם נחזור על הפרויקט הזה פעמיים (מתחילת בדיקת נשוא מסתיים, בזמן 4), המשמעות היא שזמן 4 נוצר שוב עניין זהה בסכום כזה. לעומת, בהינתן שחוזרים עליו פעמיים ננטנו, השווי נגזר מ:

4	3	2	1	0	
609.2 עניין מחזוץ הפעלה 2				609.2 עניין מחזוץ הפעלה 1	A

נתאים את מחיר ההון שהוא 5% לשנה, למשך הפרויקט הפרויקט (4 שנים). מחיר ההון הוא תמיד בMONTHLY ריבית אפקטיבית, ולכן זה יישום של הנוסחה:

$$k(4 \text{ years}) = (1 + k_{\text{annual}})^4 - 1$$

$$k(4 \text{ years}) = (1 + 5\%)^4 - 1 = 21.55\%$$

ואז העניין המצרפי לביצוע פרויקט A פעמיים יהיה:

$$NPV_{\text{A}} = 609.2 * PVFA(21.55\%, 2) * (1 + 21.55\%)$$

ערך הנוכחי של סדרה שמתהילה בזמן 0 מקפץ אותנו "אחדת אחרה" (תקופת תשלום אחדת אחרה - 4 שנים) ביחס למועד התזרים הראשון, כולל הביטוי הבסיסי בירוק מוביל בזמן 4. כתע נרצה לתקן בזמן 0, ולכן קופלים ב-1 ועוד הריבית ל-4 שנים (באודום).

הוайл ושייעור הריבית איננו עגול, נחשב את ערך PVFA באמצעות נוסחאות המתמטיות:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + r)^t}}{r} = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 21.55\%)^2}}{21.55\%} \approx 1.5$$

נציב ונקבל את העניין הכלול לביצוע "פעמיים" של פרויקט A:

$$NPV_{\text{A}} = 609.2 * 1.5 * (1 + 21.55\%) = 1,110.7$$

הסביר:

העניין של מחזוץ הפעלה מהוון כמספר מחזורי הפעלה ובמחיר ההון המתאים לתקופת הפעלה - 4 שנים. אלא, שהוайл והערך של העניין המייצג את "התזרים" הראשון הוא בזמן 0, והוайл וערך הנוכחי של סדרה מוביל תמיד למועד הזמן שהוא "תקופת היון אחדת אחרה" ביחס למועד התזרים הראשון, הרישוקופצים 4 שנים אחדת אחרה, והביטוי  $609.2 * PVFA(21.55\%, 2)$  ייצג את העניין בזמן 4. כדי לתקן בזמן 0, כפלנו שוב ב-1 ועוד מחיר ההון ל-4 שנים.

עבור פרויקט ב - הוא בסך הכל ל-3 שנים, ה - NPV שלו למחוזר הפעלה אחד הוא 3,674.3, ולפי נתוני השאלה  
נדרש לחזור עליו לאינסוף :

	... לאינסוף	6		3		0	
	674.3 ענין מחוזר הפעלה 3			674.3 ענין מחוזר הפעלה 2		674.3 ענין מחוזר הפעלה 1	ב

כדי לחשב ערך נוכחי לסדרה אינסופית זו, שתדירות תזרימיה 3 שנים, נחשב את מחיר ההון התלת שנתי. כזכור,  
הוא היה בשיעור 5% לשנה, ולכן לתקופה של 3 שנים ערכו :

$$k(3 \text{ years}) = (1 + k_{annual})^3 - 1$$

כך שנתקבל את מחיר ההון (לתקופה ביצוע) של 3 שנים :

$$k(3 \text{ years}) = (1 + 5\%)^3 - 1 = 15.7625\%$$

ערך נוכחי של סדרה אינסופית מתקובל על ידי חלוקת התזרים הקבוע (כאן - הערך של מחוזר הפעלה אחד)  
במחיר ההון לתקופת תשלום :

$$PV_{Infinite} = \frac{PMT}{r}$$

ובהצבה נקבל :

$$NPV_{Ens of} = \frac{674.3}{15.7625\%} * (1 + 15.765\%) = 4,951$$

מה עשינו כאן? כאשר חילקנו את התזרים התקופתי שモפעו הראשוני בזמן 0 במחיר ההון התלת שנתי, קיבלנו  
ערך נוכחי במועד נקודת הזמן שהוא "תקופת תשלום אחת אחרת" (כאן - תקופת ביצוע של 3 שנים אחרת)  
ביחס למועד התזרים הראשון. כלומר, הגיעו בזמן 3, ויש לתקן לו זמן 0 ע"י מכפלה ב-1 בתוספת ריבית ל-3  
שנתיים.

כעת, לאחר שיישרנו (התיחסנו לדרישה / לצורך לחזור על חלק מהפרויקטים ולחשב את עניינם המתואם  
בהתאם), התוצאות הן :

פרויקט	ענין
א - ביצוע פעמיים (8 שנים)	1,111
ב - ביצוע לאינסוף	4,951
ג - ביצוע פעם אחת	1,057

ולכן אם אני נאלץ לבחור לבצע אחד מבין 3 הפרויקטים בלבד בכפוף לנסיבות, פרק הזמן לביצוע והחזרה  
האפשרית / הנדרשת, עלינו להעדיף את פרויקט ב. שכן עניינו מירבי.



### שאלה 65 - חזרה על פרויקטים (אולי נשאים לחזרה בסוף)

בפניכם האפשרות להשקיע באחד מבין שני פרויקטים של השקעה קונבנציונלית<sup>14</sup> שסכום ההשקעה בהם זהה. יחד עם זאת, סך התקבולים בפרויקט א גבוה מסך התקבולים (סיכום פשוט של התקבולים) בפרויקט ב.

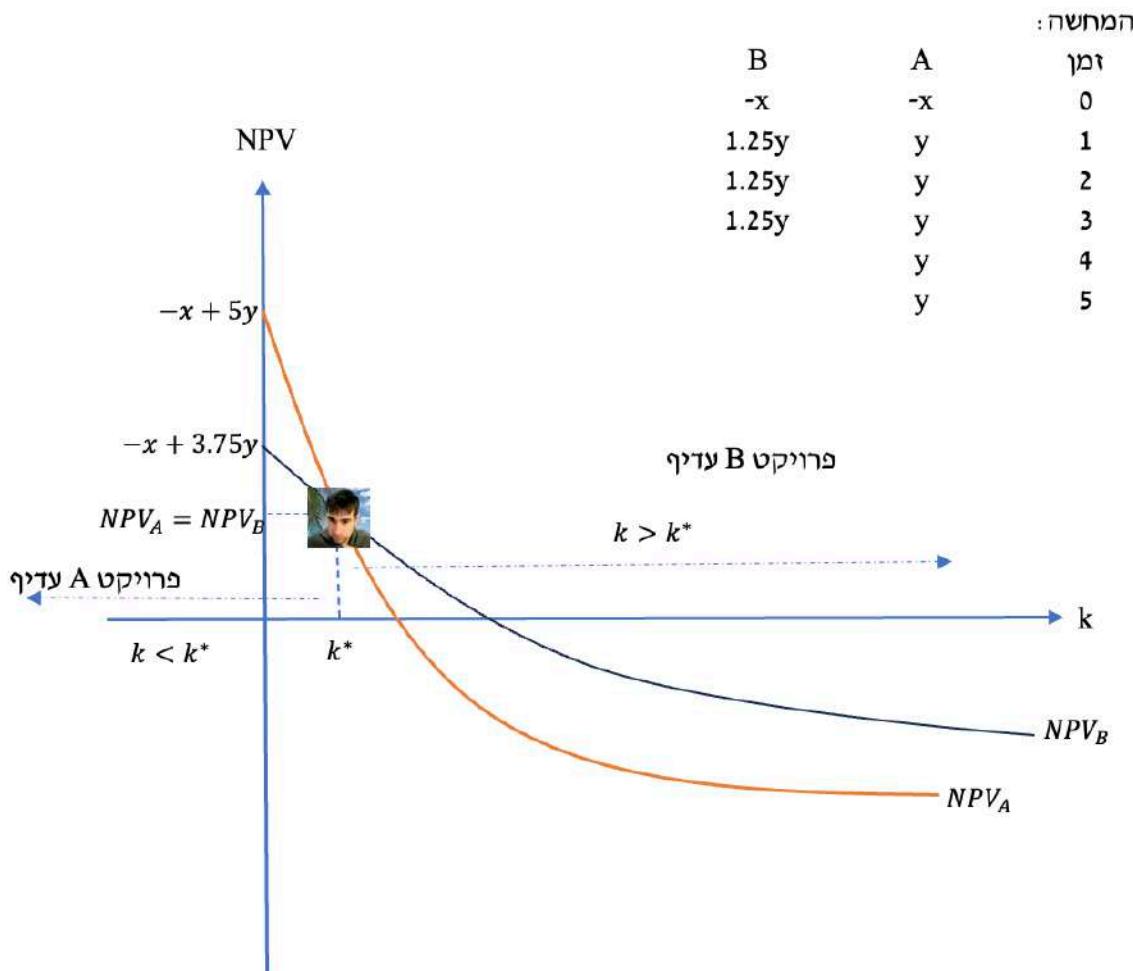
נדרש :

- הציגו את עוקום העניין של שני הפרויקטים באופן סכמטי אם ידוע שבשער ריבית אפס עניין שני הפרויקטים חיובי וידוע שעוקומי העניין של הפרויקטים נחותים בנקודת מסויימת. חוו דעה בדבר דירוג הפרויקטים בהתאם.
- חשבו את ה - IRR של פרויקט א אם ידוע אם ידוע שבשער ריבית אפס עניין פרויקט ב שווה ל-0. חוו דעה בדבר כדאיות הפרויקטים בהתאם.
- הניחו כת שבחינתן מחיר הון אפס בחברה, ה - NPV של פרויקט א הוא 0. האם ניתן לומר במצב כזה שבכל שער ריבית חיובי, ה-NPV של פרויקט ב הוא שלילי?

פתרונות סעיף א :

בהתנחת שסך התזרירמים של פרויקט A גבוה מסך התזרירמים של פרויקט B, בהגדלה - נקודת החיתוך של עוקום NPV של A עם הציר האנכי גבוהה מנקודת החיתוך של עוקום NPV של B עם ציר אנכי זה. לצד זאת, הרי שסכום ההשקעה בשני הפרויקטים זהה. ולכן, ההפסד המירבי בשניהם (במונחי ערך נוכחי) עבר מחيري הון גבוהים מאד - זהה. בעצם : פרויקט B מתחליל בנקודת נמוכה יותר, והוא חייב לחותך את פרויקט A כדי להשתווות אליו בהמשך.

<sup>14</sup> פרויקט של השקעה - כזה שמתחליל בסימן שלילי; פרויקט של השקעה קונבנציונלית - מתחילה בסימן שלילי ומרגע שהתזרירמים הופכים לחויביים, הם נשאים חיוביים לכל אורך הדרכ - החלפת סימן אחת. פרויקטים של השקעה מתאפיינים בין היתר בכך שעוקום העניין שלהם תמיד יורד ממשאל לימין (עליה במחור הון מלווה בירידת שווי) וכשעוסקים בפרויקט בודד (לא בדירוג) כדאיות תיווצר כאשר העניין חיובי / השת"פ גבוה ממחיר הון.



פתרונות סעיף ב :

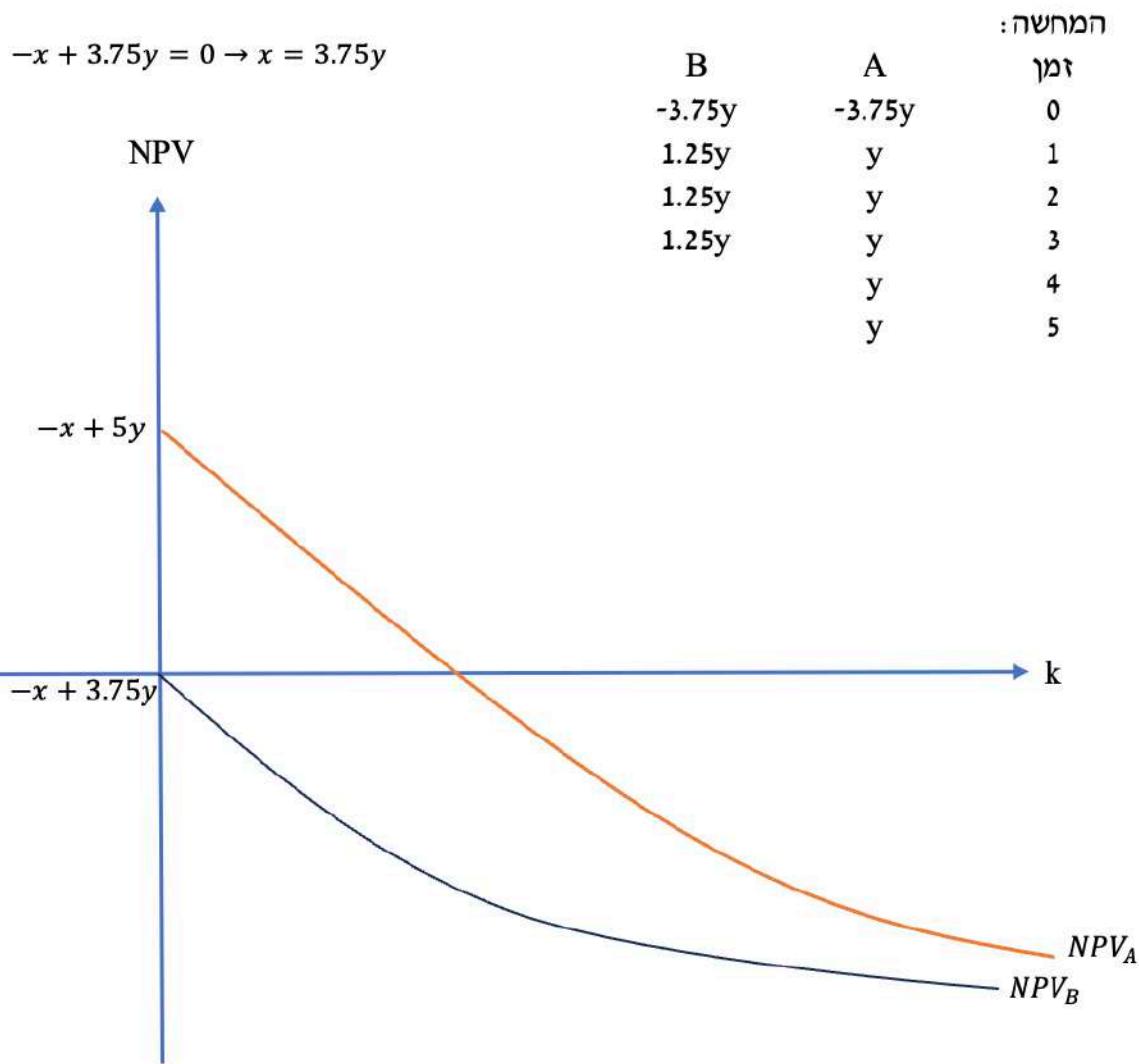
המשוואת המגדירה את ה-IRR של פרויקט ב תהיה משווהה שבה מבטאים את משווהת ה- NPV, אך מייצגים באמצעות נעלם את מחיר ההון, ומשווים את כולה ל-0 :

$$IRR_A = -3.75y + y * PVFA(IRR_A, 5) = 0$$

ניתן לחלק את שני האגפים ב- y :

$$-3.75 + PVFA(IRR_A, 5) = 0 \rightarrow IRR_A = 10.42\%$$

לא לדאוג, במללה ובחינה, יצא לכם שיעור ריבית שלם ויפה.

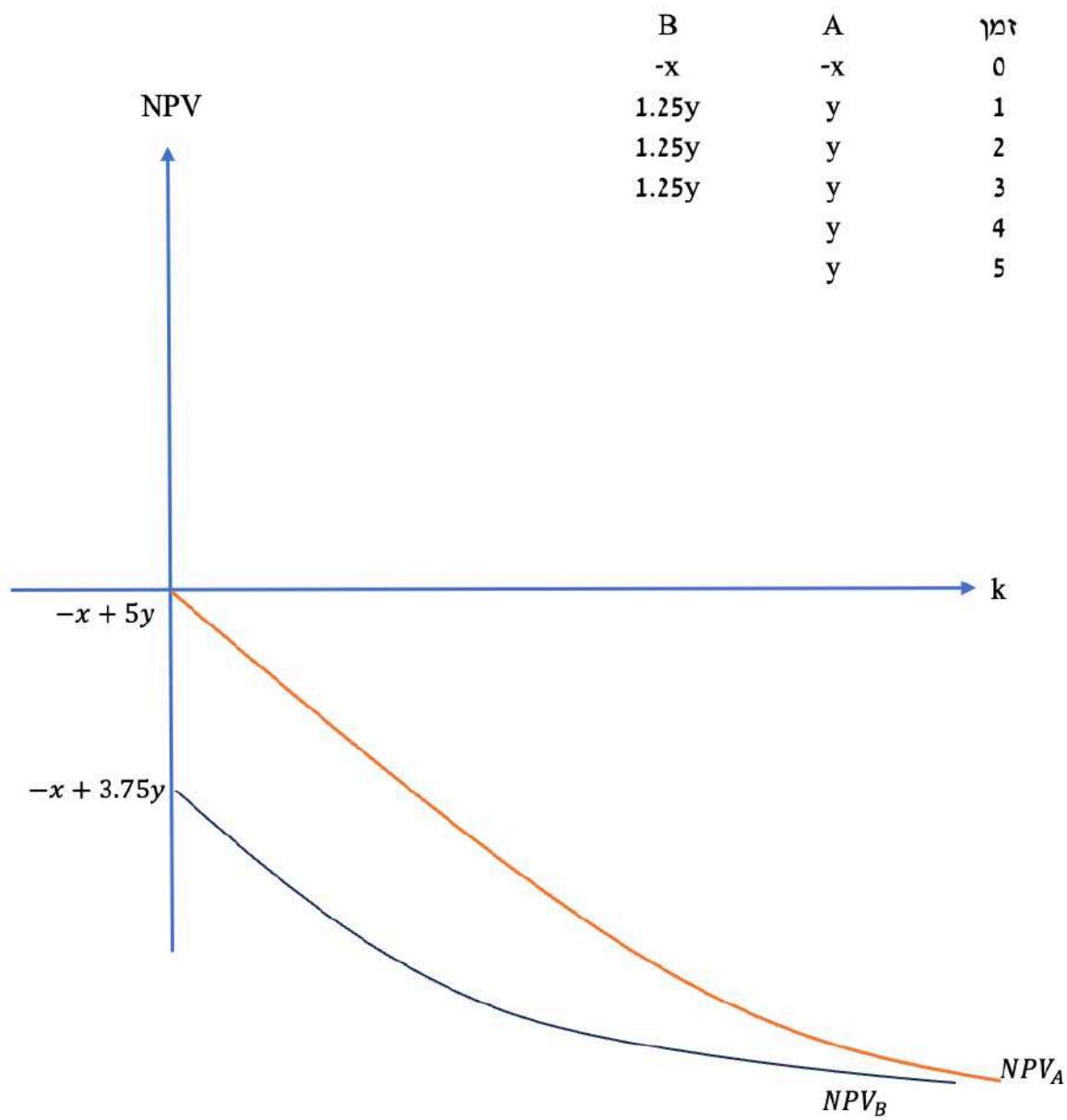


המשוואת המופיעה מעל ציר ה-  $NPV$  היא למעשה המשוואת שנשענת על הנתון שאומר שכאשר מחיר ההון שווה ל-0, ה- $NPV$  של B הוא אפס, ולכן סיכון תזרימי פרויקט B הוא אפס, וזה משווה שמסויימת לבטא את  $x$  באמצעות  $y$ , מה שיוצר לי מבנה תזרימי מבוסס נעלם אחד, שעל בסיסו יכולתי לחלץ את ה-  $IRR$  של פרויקט A. כמובן, שבhibet כדאיות - ברור לי שפרויקט B לא רלוונטי ושלילי תמיד. הוא יוצא מארס - תמיד שלילי.

#### פתרונות סעיף ג:

סיכון התזרמים של פרויקט A הוא מקסימום הענין האפשרי שלו, והוא בוודאות גבוה מסיכון תזרימי פרויקט B. אם הערך המקסימלי של תזרימי פרויקט A (סיכון התזרמים, מתקבל כמחיר ההון אפס) הוא אפס כמובן, ומשם אפשר "רק לרודת", הרי שבכל מחיר הון חיובי שני הפרויקטים (ובפרט, פרויקט B שעליו שאלות) יהיה בעל ערך שלילי.

המחשה:



### שאלה 66 - פרויקטים לא קונבנציונליים וכדאיות לאורם

הסבירו את המונח "פרויקטים לא קונבנציונליים" והדגימו באופן גרפי את הקושי בקבלת החלטות על בסיס כל השת"פ לאורו.

פתרונות :

- מבוא : ככלל, הפרויקט שהוזג בשאלה קודמת הוא פרויקט "קלאסי" (קונבנציונלי) של השקעה. לא העמקנו בכך, אך הוא מתאפיין בתזרים שלילי שלאחריו תזרימים חיוביים בלבד.
- פרויקט קלאסי (קונבנציונלי) מסווג אחר הוא פרויקט של הלואה. פרויקט של הלואה מתאפיין בתזרים חיובי שלאחריו תזרימים שליליים בלבד.
- לעומתם, קיימים גם פרויקטים "לא קונבנציונליים". פרויקטים אלו הם פרויקטים שמספר היפוכי הסימן של תזרימייהם (מסימן חיובי לשילי ולחפץ) שונה מ-1.

דוגמאות :

פרויקט	0	1	2	3	4
א	-400	-100	80	200	900
ב	500	-100	-200	-300	-150
ג	800	800	800	-2,000	-2,000
ד	-400	-800	2,000	-100	-200
ה	-1,000	-2,000	-3,000	-4,000	-5,000
ו	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000

פרויקט א : קונבנציונלי של השקעה. קונבנציונלי = היפוך סימן אחד. והוא של השקעה כי התזרימיים הראשונים שליליים.

פרויקט ב : קונבנציונלי של הלואה. קונבנציונלי = היפוך סימן אחד. והוא של הלואה - כי התזרימיים הראשונים חיובי והתזרימיים העוקבים שליליים.

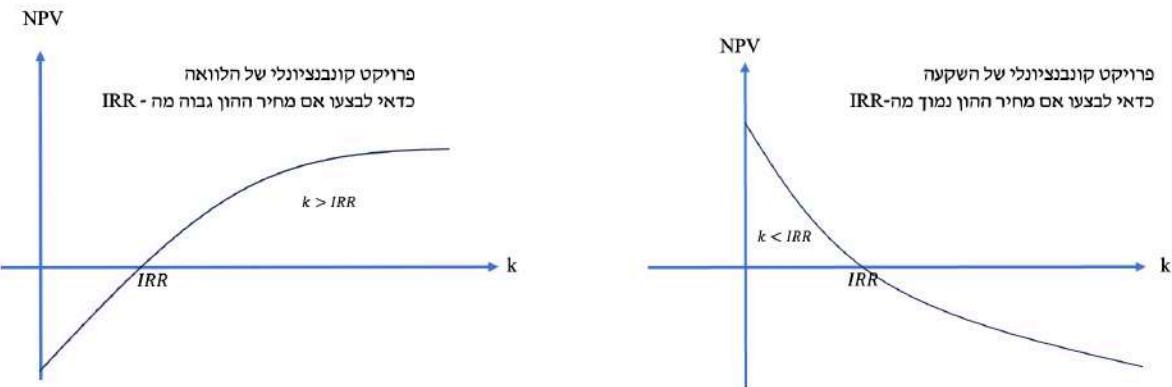
פרויקט ג : קונבנציונלי של הלואה.

פרויקט ד : לא קונבנציונלי (שני היפוכי סימן).

פרויקט ה, ו : פרויקטים לא קונבנציונליים (גם אפס היפוכי סימן = לא קונבנציונלי).

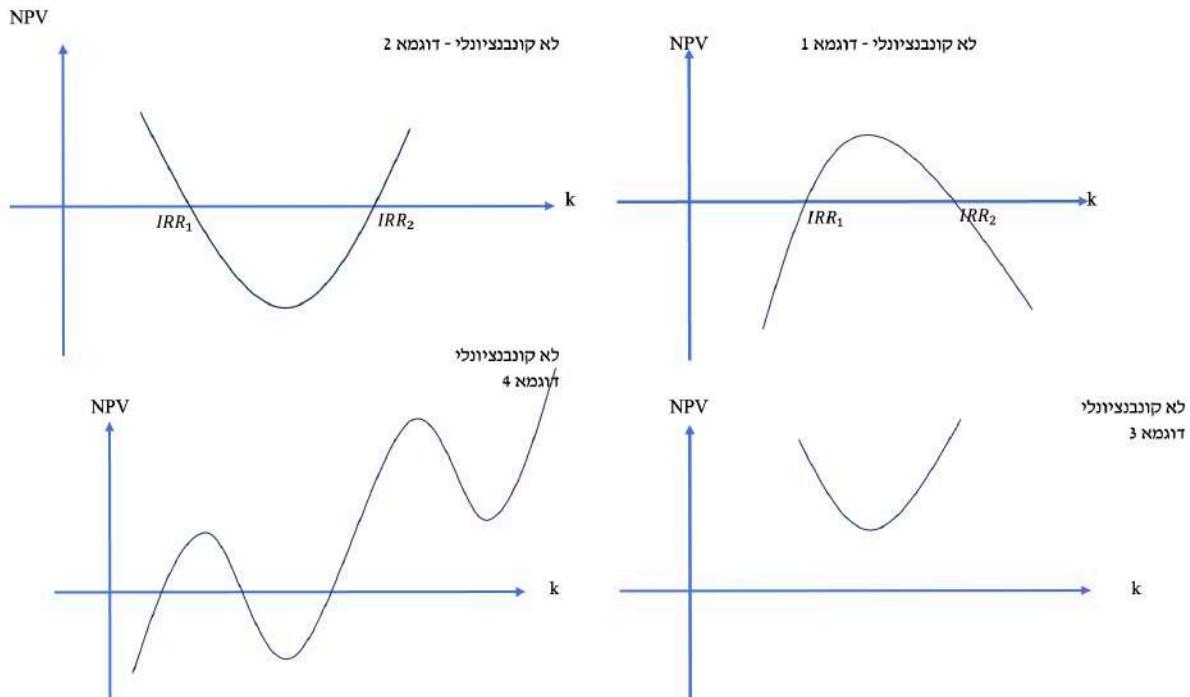
פרויקטים לא קונבנציונליים אינם ניתנים לשיפוט על פי כלל השת"פ / IRR הואיל ומספר השת"פים הוא עד מספר היפוכי הסימן.

להלן תרשים המתאר את התצוגה הגנרטית של פרויקטים קונבנציונליים (של השקעה ושל הלוואה) ושל כדיותם של פונקציית ההפרש בין מחיר החון לשט"פ:



להלן דוגמאות לתרשיים (לא ממצה) לפרויקטים לא קונבנציונליים, הממחישים את הבעייתיות / היעדר האפשרות להכרעה בדבר כדיותם לפי שט"פ - במקרים כאלה לא ניתן לאפיין באופן מלא את צורת העקומה ומספר ה-IRR-ים (נק' **חיתוך של פרויקט לא קונבנציונלי**) עם **הציר האופקי** עלול להיות עד מספר היפוכי **הסימן**.

למשל: אם הסימן של התזרים מתחפה פעמיים, ייתכנו שני שט"פים. אם הסימן של התזרים מתחפה 3 פעמים - ייתכנו 3 שט"פים.



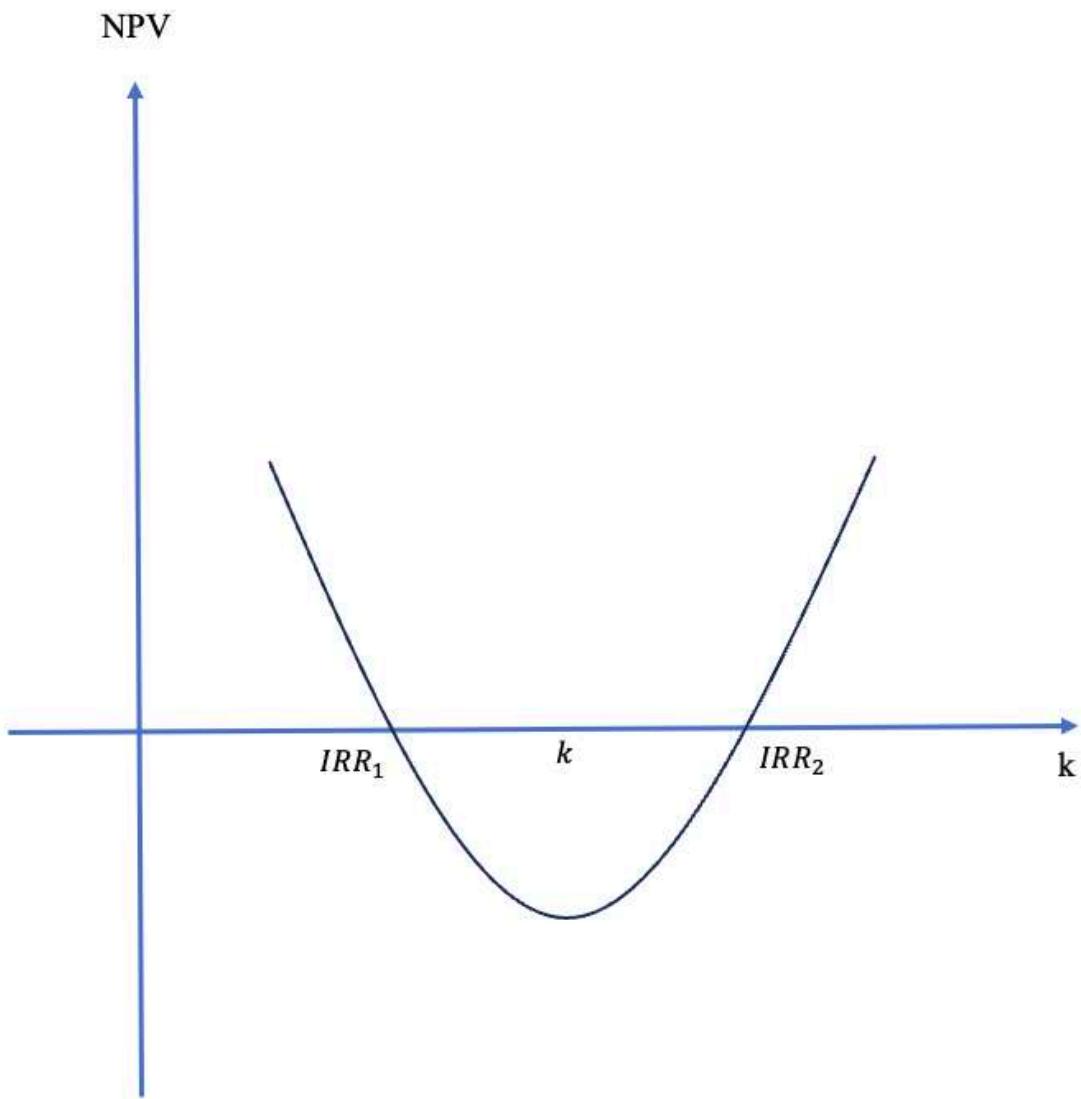
במילים אחרות, שאלות מילוליות (ללא ערכיהם מספריים) העוסקות בפרויקטים לא קונבנציונליים, בדרך כלל ייכללו רמזים מסוימים לגבי הצורה הפוטנציאלית של העקום שכן לא ניתן לאפיינה באופן מלא. הרמזים יכולים להיות במשמעותם (אפשרויות התשובה) ו/או בתיאור השאלה.

שאלה 67 - **פרויקטים לא קוגניציונליים, שאלת ללא מספרים עם שיפוט עקרוני**  
 גיא שוקל לבצע פרויקט לא קוגניציונלי.  
 לפROYיקט ישנים שני שותפ"ים : להלן יסומנו לשם נוחות כ -  $IRR_1$  ו-  $IRR_2$ .  
 בנוספ, הניחו כי ידוע ש :  $IRR_1 < IRR_2$ .  
 ידוע כי במחיר הון  $k$  אשר מקיים  $IRR_1 < k < IRR_2$ , ה- $NPV$  שלילי.  
 בטאו באמצעות המשתנים בשאלת טווח מחירי ההון שבו הפרויקט כדאי. להלן אפשרויות התשובה :  
 א. כאשר מחיר ההון נמוך מ-  $IRR_1$   
 ב. כאשר מחיר ההון נמוך מ-  $IRR_2$   
 ג. כאשר מחיר ההון גבוה מ-  $IRR_1$   
 ד. כאשר מחיר ההון גבוה מ-  $IRR_2$   
 ה. תשובות א-ד נכונות  
 ו. תשובות ב-ג נכונות  
 ז. לא ניתן לקבוע הוויל ומחיר ההון לא ידוע

פתרונות :  
 יש לאייר את התרשימים המתאים למועד תחילת. בהינתן שאמרו שמחיר הון הנמצא בין ה-  $IRR$  וה-  $NPV$  שלילי, הרי שצורת התרשימים היא כמפורט להלן (בדומה לדוגמא 2 בפרק התרשימים לעיל). לפיכך אסיק מצורה זו וערכי  $IRR$  שכדי לבצע את הפרויקט (התרשימים הוא באזרע החיובי, ה- $NPV$  בריבוע הראשון) בשני המקרים הבאים :  
 $k > IRR_2$

או כאשר :

$$k < IRR_1$$



הערה: שימוש לב שגמ אם לא היה נתון מפורש שמדובר בפרויקט לא קונבנציונלי, יכולתי להסביר זאת ישירות  
וזאת מעצם העובדה שהפרויקט כולל שני שטפ"ים (מספר שת"פים שונה מ-1).  
התשובה היא.

**שאלה 68 - לבית (חזרה על הסבר שכבר הענקנו בתחילת השיעור)**

הציגו את נוסחת מzd הרווחיות PI. האם לאורה ייתכן שפרויקט בעל PI גדול מ-1 (כדי) הוא בעל ערך NPV שלילי? בהתאם, האם ייתכן שפרויקט בעל PI נמוך מ-1 (לא כדי) הוא בעל ערך NPV חיובי?

פתרון :

לzd הרווחיות יש שתי הדרות כלהלן.

הדרה 1 : היחס בין הערך הנוכחי של התקבולים לבין הערך הנוכחי (בערך מוחלט) של התשלומים.

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולים}}}{|PV_{\text{תשומים}}|}$$

הדרה 2 : הדרה נוספת שנפוצה יותר בקורס :

$$PI = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

לא משנה לפי איזו הדרה עוסדים, כלל ההכרעה בדבר קבלת פרויקט או דחייתו לפי zd הרווחיות קובע:

קבל את הפרויקט כאשר :  $PI > 1$

דחה את הפרויקט כאשר :  $PI < 1$

היה אדיש כאשר :  $PI = 1$

האם לאורה ייתכנו שפרויקט בעל PI גדול מ-1 (כדי) הוא בעל ערך NPV שלילי?

$$PI > 1 \rightarrow \frac{NPV + I_0}{I_0} > 1 \rightarrow NPV + I_0 > I_0 \rightarrow NPV > 0$$

בשורה התחתונה: **פרויקט בעל zd רווחיות גדול מ-1 (כדי לפי zd הרווחיות) הוא תמיד בעל עניין חיובי (כדי לפי NPV) ולהפך: פרויקט בעל zd רווחיות קטן מ-1 (לא כדי לפי zd הרווחיות) הוא תמיד בעל עניין שלילי (לא כדי לפי NPV).**

## שאלה 69

לחברה הוצע להשקיע בפרויקט ספציפי מסוימים (אחד). הפרויקט הוא מסווג השקעה קובננציאונלית. ידוע שהענין חיובי.

סמןו את הטענה הנכונה :

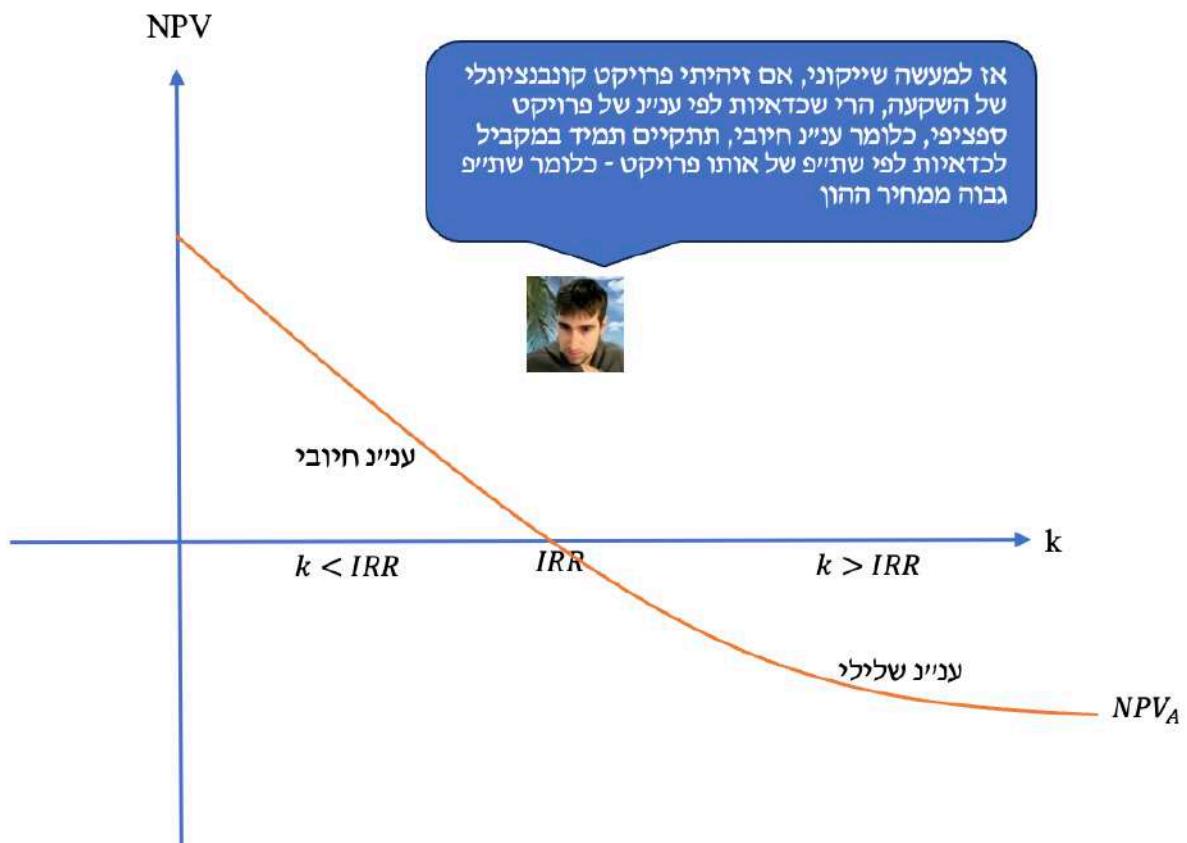
- א. **ייתכן שהפרויקט לא יהיה כדאי לפי מודד הרווחיות.**
- ב. **ייתכן שמדד הרווחיות יהיה נמוך מ-1.**
- ג. **ייתכן שהשת"פ נמוך ממחיר ההון.**
- ד. **לא כדאי להשקיע בפרויקט.**
- ה. **כל יתר התשובות שגויות.**

**פתרונות :**

התשובה ה.

להלן עוקום הענין של השקעה קובננציאונלית. זכרו : בפרויקטים של הלוואות ו/או פרויקטים לא קובננציאונליים, צורת עוקום הענין עשויה להיות שונה.

בכל מקרה, עבור השקעה כאמור, תמיד תתקיים חפיפה בהכרעה לגבי כדאיות פרויקט ספציפי לפי כל הקriterיוונים : כשאני בוחן כדאיות של פרויקט אחד ויחיד, אם הוא כדאי, תמיד מתקיימת כדאיות לפי  $NPV$ , כדאיות לפי  $IRR$  וגם כדאיות לפי מודד הרווחיות.



## שיעור 7 - כדאיות פרויקטים - השלמת סוגיות

### מטרת המפגש:

השלמת סוגיות לצד ריענון וחיזוק תיאורטי, גם ברמת הקритריונים הבסיסיים לבחינת כדאיות השקעות, גם ברמת הסטירה בין עניין - NPV, שט"פ - IRR ואופן יישוב הסטירה, גם ברמת הצגה גרפית וגם ברמת שאלות תאוריה וחלוץ הרלוונטיות להשלמתה המלאה של מטלה 11 (שהכוונה ראשונית לגביה ניתנה כבר בשלבי המפגש הקודם).

**שאלה 1 - 69.1 - חזרה על הקритריונים העיקריים, לצד יישוב סטירה ותרשיים**  
חברת "פלפלוני" ניצבת בפני הזרמוויות ההשקעה (הפרויקטים) הבאים. ידוע שמחיר ההון של פלפלוני הוא 12%. **ערכים שליליים מופיעים בסוגרים.**

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

- א. חשבו עניין, שט"פ ומדד רוחניות לכל אחד מהפרויקטים.
- ב. בהנחה אי תלות בין הפרויקטים, באיזה / באילו מהם תשקיע החברה לפי כל קритריוון?
- ג. בהנחה שהפרויקטים מוצאים זה את זה, באיזה / באילו מהם תשקיעו לפי כל קритריוון?
- ד. מהם הגורמים לסתירה בין עניין לשט"פ ככל שקיים, בהיבט דירוג הפרויקטים מסעיף ג'?
- ה. השתמשו בניתוח הפרויקט ההפרשי על מנת לישב את הסטירה.
- ו. שרטטו את עקומות העניין כפונקציה של מחיר ההון, וכן את עקומות העניין של הפרויקט ההפרשי.

### פתרונות:

בשאלה זו שני חלקים. החלק הראשון, בסעיפים א, ב, ג - מהו זה חזרה על אופן היישום של קритריונים העיקריים. החלק השני, בסעיפים ד, ה, ו - קשרו במחות שלו לסתירה בין עניין לבין שט"פ, הרחבת לגבי משמעותה וגורמיה, לצד איזור תרשימים רלוונטי של עקומי עניין וחיתוכים.

כאשר אני מקבל רשימת פרויקטים ארצתה לדעת כיצד לחשב את ערכי הקритריונים שהוו אינדיקציה לכדאיותם. קיימים 2 אינדיקטורים מרכזיים (ו-2 שליליים יותר). המרכזיים הם :

1. **[מרכזי] עניין - ערך נוחני נקי - NPV - Net Present Value :** שווי בהווה (במועדី ערך נוחאי) של כל תזרימי הפרויקט, חיובים ושליליים כאחד. אם העניין חיובי, זה אומר שהפרויקט כדאי. **שווי כספי נטו.**

2. **[מרכזי] שט"פ - שיעור תשואה פנימי - IRR - Internal Rate of Return :** משקף את התשואה באחזים על ההשקעה בפרויקט. אם השט"פ גבוהה יותר ממחיר ההון (עלות גiros ההון בחברה ; התשואה שדורשים משקיעיה) הפרויקט כדאי. **התשואה על השקעה באחזים.**

3. [שולוי] **מדד הרוחיות** - קרייטריוון יחסי שבודח את הפרופורציה בין הערך הנוכחי של התקבולים לערך הנוכחי של התשלומים (בערך מוחלט). ערך גבוה מ-1 משמעו שהפרויקט כדאי.
4. [שולוי - שלא מופיע בשאלת הספציפית] החזר הון שנתי - קרייטריוון שונה שמחשב את הסכום התקופתי של ההכנסה שתצדיק את הפרויקט.

**א. חשבו ענ"ג, שט"פ ומדד רוחיות לכל אחד מהפרויקטים**

נתון בשאלת - מחיר הון 12%

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
A	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
B	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

**חישוב ענ"ג - ערך נוכחי נקי מצרכי (שווי כספי) לכל פרויקט:**

הענ"ג - NPV, הוא הסיכון של הערך הנוכחי של כלל תזרימי הפרויקט (זמן 0), חיוביים ושליליים. אם התזרים הראשונים (זמן 0) שלילי, ויתר התזרים הם חיוביים וקבועים, ניתן לחשב את הענ"ג באופן הבא - שמתיחס להשקעה בזמן אפס, ולערך הנוכחי של התקבולים מהווים בריבית מתאימה לאחר מכן.

$$NPV_A = -19,946 + 9,000 * PVFA(12\%, 4) = 7,390$$

$$NPV_B = -47,232 + 20,000 * PVFA(12\%, 4) = 13,515$$

**חישוב שט"פ - שיעור תשואה פנימי:**

השת"פ - IRR, הוא שיעור התשואה המוצע התקופתי על ההשקעה בפרויקט באחזois. לשם חילוץ השת"פ, מבצעים את הפעולות הבאות :

א. בונים את משווהת הענ"ג של כל פרויקט - ראו לעיל.

ב. מציבים במקומות מחיר הון (כאן - 12%) את ה - IRR כנעלם.

ג. משווים את כל המשווהה ל-0.

ד. מחלצים את IRR.

$$IRR_A: -19,946 + 9,000 * PVFA(IRR_A, 4) = 0 \rightarrow PVFA(IRR_A, 4) = 2.216 \rightarrow IRR_A = 28.65\%$$

$$IRR_B: -47,232 + 20,000 * PVFA(IRR_B, 4) = 0 \rightarrow PVFA(IRR_B, 4) = 2.362 \rightarrow IRR_B = 25\%$$

הסבר : בנו את המשווהה לפי תנאים א-ד לעיל, העברנו אגף את הערך המספרי, חילקו את שני האגפים במקדם של PVFA וקיבלו את ה - PVFA עצמו. מכאן, צריך ללקת לוח מספר 4- בנספח א לכרך ד, ולבזוק עבור איזה שיעור ריבית מתקיים ערך זה של PVFA (במבחן, הריביות תצאננה שלמות).

**חישוב מדד הרוחיות:**

מדד הרוחניות הוא היחס בין הערך הנוכחי של התקבולים (МОנה) לבין הערך הנוכחי של התשלומים (במכנה).  
ambil להוכיח, ניתן גם לומר שאט היחס ניתן לחשב לפי הפרופורציה בין סכום ה-NPV בתוספת עלות ההשקעה, חלקו סכום ההשקעה, כלומר:

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולים}}}{|PV_{\text{תשלים}}|} = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

כאשר:

הערך  $NPV$  הוא עניין הפרויקט.

הערך  $I_0$  הוא סכום ההשקעה הראשונית בפרויקט, בערך מוחלט.

תזכורת לגבי השאלה:

NPV חוشب לעיל	4	3	2	1	0	פרויקט / שנה
7,390	9,000	9,000	9,000	9,000	(19,946)	א
13,515	20,000	20,000	20,000	20,000	(47,232)	ב

ב换כבות הנתונים הרלוונטיים בנוסחה נקבל:

$$PV = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

וב换כבה נקבל:

$$PI_A = \frac{7,390 + 19,946}{19,946} = 1.37$$

$$PI_A = \frac{13,515 + 47,232}{47,232} = 1.29$$

ב. בהנחה אי תלות בין הפרויקטים, באיזה / באילו מהם תשקיע החברה לפי כל קритריון?  
רכיבוי הממצאים ("בלתי תלויים" = אפשר לבצע מה שנרצה, את שניהם, רק אחד, אף אחד...):

kritiron	מה כדאי לבצע לפי הקритריון?	פרויקט ב	פרויקט א	
ענ"ג - NPV	בנחה אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט שה - NPV שלו חיובי. לכן, יבוצעו שני הפרויקטים.	13,515	7,390	
שת"פ - IRR	בנחה אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט "קונבנציונלי" של השקעה, כדאי לבצע כל פרויקט של השקעה שעבורו השת"פ (התשואה מהפרויקט) גבוהה מחיר ההוו. כאן - שניהם כדים, כי תושאות שני הפרויקטים גבוהות מחיר ההוו, 12%.	25%	28.65%	
מדד הרוחיות - PI	בנחה אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט שעבורו מדד הרוחיות גבוהה מ-1. כאן, שני הפרויקטים כדים.	1.29	1.37	

ג. בהנחה שהפרויקטים מוצאים זה את זה, באיזה / באילו מהם תשקיעו לפי כל קритריון?  
ראינו שכל הפרויקטים כדים עקרונית, ואת כולם כדאי לבצע בהיעדר מגבלה ("בלתי תלויים"). אלא שאם הפרויקטים מוצאים זה את זה - המשמעות היא שניתן לבצע אחד מביניהם לכל היותר - בלבד. לכן, לפי כל קритריון יעדף לביצוע הפרויקט שערך הקритריון המתאים שלו מירבי.

kritiron	מה יעדף לביצוע לפי הקритריון?	פרויקט ב	פרויקט א	
ענ"ג - NPV	פרויקט ב	13,515	7,390	
שת"פ - IRR	פרויקט א	25%	28.65%	
מדד הרוחיות - PI	פרויקט א	1.29	1.37	

נניח שבנשח שאלת חלופי אומרים לי: "משקיע מעוניין לפעול לפי כלל השת"פ. באיזה פרויקט יבחר משקיע זה?" התשובה שלנו תהיה: בפרויקט א. כי השת"פ שלו מירבי.  
נניח שבנשח השאלה אומרים לי: "משקיע מעוניין לפעול לפי מדד הרוחיות. באיזה פרויקט יבחר המשקיע?"  
התשובה שלנו תהיה - בפרויקט א.  
נניח ששאלים אותו "במה יבחר משקיע הפועל לפי כלל הענ"ג" - התשובה שלנו תהיה תהיה ב.

קיבלו סטירה בין תוכאות הדירוג מבוססות הענ"ג לבין תוכאות הדירוג מבוססות הקритריונים האחרים.

ואם ישאלו: "מהי ההחלטה הבונה ביותר בrama הכלכלי?" תשובה תהיה: כלל הענין הוא המלך! הרי מטרת החברה היא להשיא את הערך הכספי לבאים. המטרה היא לייצר כמה שיותר "כספי" (במונחי ערך נוכחי) ולא כמה שיותר אחוזי תשואה.

**ד. מהם הגורמים לסתירה בין ענין לשט"פ ככל שקיים, בהיבט דירוג הפרויקטים מסעיף ג'?**  
הגורםים לכך שנוצרה סתירה בין הפרויקט המקסם ערך כספי (ב) לבין הפרויקט המקסם תשואה באחוזים (א) נובעת מגדל השקעה שונה בפרויקטים. בפרויקט ב, גודל ההשקעה גבוהה יותר, ולכן למروת שהתשואה היחסית באחוזים נמוכה יותר - היא מתרגםת לערך כספי גבוה יותר.

ה. השתמשו בעקרון הפרויקט הפרשי כדי "ליישב את הסטירה" בדירוג בין NPV ו-IRR

תחילה, נזכיר את המבנה התזרימי של הפרויקטים א ו-ב בפני עצם:

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

הפרויקט הפרשי הוא פרויקט **דמיוני** שמודרג בתור פרויקט שתזרימיו הם ההפרש בין תזרימי הפרויקטים "המתחרים" או "המוחזאים את זה".

אנחנו נוהגים לבצע הפקה של הפרויקט ה"קטן" מהפרויקט ה"גדול": כמובן, במקורה זה, נפחית מתזרימי פרויקט ב (הוא הגדל - השקעה גדולה, הכנסות גבוהות) את תזרימי פרויקט ב. כך נקבל:

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000
<b>בבנייה א = הפרשי</b>	<b>(27,286)</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>

הדגמה לאופן חישוב תזרימי הפרויקט:

$$\text{זמן } 0 \text{ (שימו לב - הפרש עם ערך שלילי הופך ל+)}: -47,232 - (-19,946) = -27,286$$

$$\text{זמן } 1-4: 20,000 - 9,000 = 11,000$$

כאשר נתונים בפרויקט הפרשי, מקובל לחשב את ה-IRR. איך נחשב את ה-IRR? עליינו לבנות משווהה המבטאת את הערך הנוכחי של כל תזרימי הפרויקט הפרשי, להציב את מחיר החון (IRR) כנעלם, ולהשווות ל-0:

$$IRR \rightarrow NPV_{\text{הפרויקט}} = 0 \rightarrow -27,286 + 11,000 * PVFA(IRR, 4) = 0$$

במהשך פיתוח נקבל:

$$11,000 * PVFA(IRR, 4) = 27,286$$

ואז:

$$PVFA(IRR, 4) = \frac{27,286}{11,000}$$

ואז בחלוקת מלח א-4 מקבלים בקירוב:

$$PVFA(IRR, 4) = 2.48 \rightarrow IRR \approx 22\%$$

בפתרון הטעיפים הקודמים חישבנו זה מכבר את ה-IRR של הפרויקטים עצם:

IRR	פרויקט ב	פרויקט א	
ענ"ג -	7,390	13,515	
שת"פ -	28.65%	25%	

בנוסף לכך אני יודע ש :

הפרשי	פרויקט ב	פרויקט א	קריטריון
	13,515	7,390	ענ"ג - NPV
22%	25%	28.65%	שת"פ - IRR

בנוסף ידוע שמחיר הערך של החברה הוא 12%.

שלום רב.שמי עמרית ואני עובד רק לפני שת"פ  
איןני רואה בעיניים, רק שת"פ הוא אהובי. لكن  
מבין א-ו-ב שמצויאים זה את זה, אני שבסבצע את  
פרויקט א



אבל אתה יודע שהענ"ג, מיקסום שווי כספי, הוא  
המטרה של כולנו בימון!!! אני אומר לך, בוא  
ニקח את פרויקט ב, אתה לא תתחרט!



אני מכבד את מה שאתה אומר, אבל אתה יכול  
לקפוץ לי. הולכים לפני שת"פ נקודה.



אני צריך לחשב על דרך לשכנע אותו... לפי כלל  
השת"פ.



וננה כעת **ליישוב הסטירה** :

- לפי  $NPV$  מועדף פרויקט ב.
  - לפי  $IRR$  מועדף פרויקט א.
  - נניח שאנו רוצים לבנות קונסטרוקציה שתగורם לכך שגם לפי  $IRR$  פרויקט ב יהיה כדאי.
  - לשם כך, נגדיר את הפרויקט ההפרשי בתור פרויקט "נוספ" שהחברה יכולה לבצע.
  - כאשר נבחן את כדאיות ההפרשי לפי  $IRR$ , אנחנו נטען ש :
    - מבין הפרויקטים א ו-ב (শמווציאים זה את זה) לפי  $IRR$  מועדף א.
    - אבל בנוסף לא, במידה וניתן, כדאי לבצע גם את הפרויקט ההפרשי :
  - מה שהוא אומר בעצם : אם המשקיע יכול לבחור בין "א" בלבד, לבין "א" + "הפרשי", הוא יעדיף לפי  $IRR$  את א+hהפרשי.
  - אבל  $A + \text{הפרשי} = \text{הפרויקט ב}$  ! ומדובר? כי ההפרשי הוא בבניכוי :
- $$IRR_{\text{הפרשי}} = 22\% > 12\% = k$$
- כך קיבלנו שגם לפי השת"פ, אם נפרצל את פרויקט B השלם, לשני פרויקטים שהם בדיקות אותו דבר, פרויקט B (העדיף לפי עניין) יועדף - וכך יישבנו את הסטירה בין עניין לבין השת"פ.

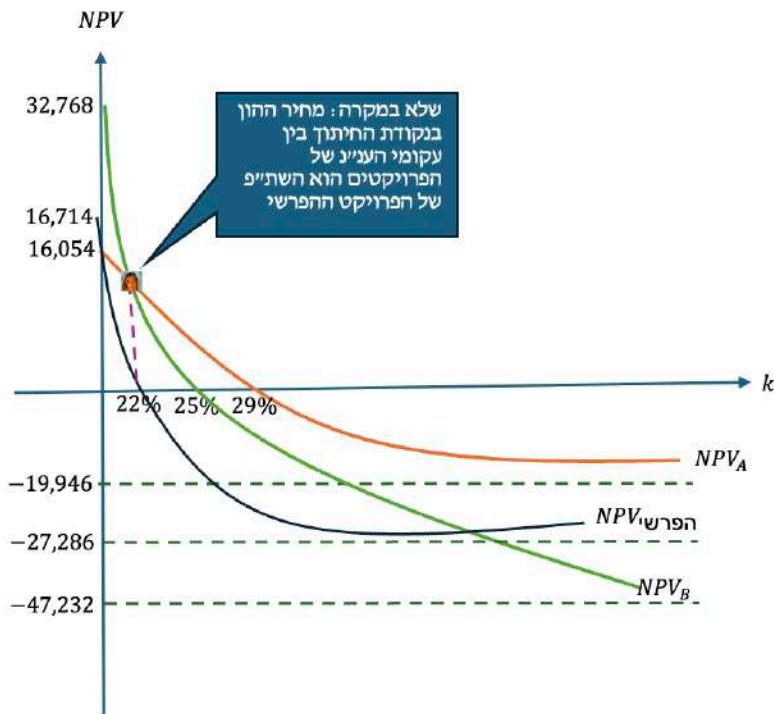
**בתמצית:**

בגישה הפרויקט ההפרשי, מפצלים את הפרויקט העדיף לפי  $NPV$  (ב) לשני חלקים : פרויקט (א) והפרויקט ההפרשי. אז מוכחים שגם (א) וגם ההפרשי כדאיים לפי השת"פ. ובהגדרה, בהינתן  $Sh(A) + Sh(\text{הפרשי}) = Sh(B)$ , מראים שגם לפי השת"פ (ב) למעשה כדאי.

## 1. שרטוט עקומות הענ"ג של כל הפרויקטים כפונקציה של מחיר ההון - לרבות NPV הפרשי

הפרש	ב	א	שנה
-27,286	-47,232	-19,946	0
11,000	20,000	9,000	1
11,000	20,000	9,000	2
11,000	20,000	9,000	3
11,000	20,000	9,000	4

נק' חיתוך עם ציר אופקי ( $k$ )	IRR =	22%	25%	29%
נק' חיתוך עם ציר אכבי ( $k=0$ )	סכום פשוט	16,714	32,768	16,054
סכום ההשקעה	ערך מינימום	-27,286	-47,232	-19,946



**שאלה 69.2 - פרויקטים משלימים (פרויקטים שביצועם בו"ז שללים מעניק ענ"ג מצרפי גובה מענ"ג הרכיבים)**  
לחברה הוצע להשקיע ב-2 פרויקטים שערכיהם באלפי ש"ח הם כדלקמן :

זמן	פרויקט א	פרויקט ב
-500	-800	0
140	180	1
140	180	2
140	180	3
140	180	4
140	180	5

שיעור ההיוון הוא 5%.

הנicho כי קיימת תלות בין ההשקעות, כך שביצוען בו זמנית יוביל לכך שתזרימי פרויקט א יגדלו ב-40 א' ש"ח בשנה (ambil שיחול שניי בתזרימי פרויקט ב).

מכאן שהחברה תעדי :

- להשקיע רק בפרויקט א
- להשקיע רק בפרויקט ב
- להשקיע בשני הפרויקטים
- לדוחות את שני הפרויקטים
- כל יתר התשובות שגויות

רקע ופתרון (התשובה ג - להלן הפתרון) :

כפי שאמרה רים : כאשר הפרויקטים הם **תלויים**, המשמעות היא שביצוע האחד משפיע על الآخر ולהפך. במקרה זה, תיארו את סוג התלות במובן זה שכאשר שני הפרויקטים מבוצעים בו זמנית, תזרימי א' גדלים ותזרימי ב' לא משתנים.

מצב זה של תרומה לתזרים הכלול כתוצאה משילוב הפרויקטים מוביל להגדלת הפרויקטים הרלוונטיים **פרויקטים משלימים**. בהינתן הצורך לבחון את ביצועם, נוצר 3 חלופות לשם החלטה :

- חלופה 1 : ביצוע א בלבד - לפי נתוני הקיימים.
- חלופה 2 : ביצוע ב בלבד - לפי נתוני הקיימים.
- חלופה 3 : ביצוע א + ב - כאשר תזרימי הביצוע המשולב הם סיכום תזרימי הפרויקטים הנתונים בתוספת תזרימי ההכנסה העודפים הנובעים מהביצוע המשולב.

כמו כן, **מבחןת הקритריון שניישם**, הואיל ולא הגבילו אותנו - כמובן שנלך על הקритריון שהוא המלך, על הענ"ג - NPV שמיקסומו הוא מטרת החברה העילונה.

תזרים - א+b (כולל ערך מוסף)	תזרים - b בלבד	תזרים - a בלבד	
על פי הנתון - תוספת תזרים של 40 לסכום ההכנסה של a, ללא שינוי בתזרים השקעתי			
- 800 - 500 = -1,300	-500	-800	<b>0</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>1</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>2</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>3</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>4</b>
180 + 40 + 140 = 360	140	180	<b>5</b>

כמו כן, נתון שמחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה. לכן ניתן לחשב את העניין של כל אחד מהפרויקטים:

$$NPV_A = -800 + 180 * PVFA(5\%, 5) = -800 + 180 * 4.329 = -20.78$$

$$NPV_B = -500 + 140 * PVFA(5\%, 5) = -500 + 140 * 4.329 = 106.06$$

$$NPV_{A+B} = -1,300 + 360 * PVFA(5\%, 5) = -1,300 + 360 * 4.329 = 258.44$$

ולכן מבין האפשרויות - ביצוע A לבדו (זבל קופות), ביצוע B לבדו (חביב, אבל לא מיטבי) והשילוב (סוס), ייעדך ההילוב. הוואיל ומוביל ל-NPV מירבי.



### שאלה 69.3 - סוג פרויקטים - תאוריה

מעבר לחישובים הטכניים של NPV, IRR, PI החזר הון שנתי... כשרוצים לשפט ולהעריך פרויקטים לפי קריטריונים שונים, חשוב מאד לשים לב לסוג הפרויקט ולמערכת היחסים בין פרויקטים שונים (עם מגבלה, מוציאים זה את זה). על רוב הנושאים דיברנו, אבל שווה לעשות סדר בזורה יותר ממודדת. לשם כך נועדה השאלה זו.

1. הסבירו את המושגים הבאים:
  - א. פרויקטים בלתי תלויים כלכליות.
  - ב. פרויקטים "לא קיוב הון".
  - ג. פרויקטים בלתי תלויים כלכליות ללא קיוב הון.
  - ד. פרויקטים המוציאים זה את זה.
2. הסבירו מהו הקריטריון הרלוונטי לדירוג הפרויקטים / החלטה לגבייהם.

פתרון:

#### 1. הסביר המושגים:

א. **פרויקטים בלתי תלויים כלכליות** - אלו הם פרויקטים שנייתן לבצע באופן אוטונומי (כל פרויקט - בפני עצמו), כאשר ביצוע אחד מהם לא משליך על עצמו היכולת לבצע את הפרויקט האחר; וכן לא משפיע לטובה או לרעה על תזרימי הפרויקט האחר. הדוגמה: רותם הוא משקיע עשיר במיוחד; מוצע לו לפתוח בורקס בעפולה ו/או חברת סטארט אפ.

פרויקט/זמן	4	3	2	1	0	
פרויקט בורקס	20	40	30	40	-100	
פרויקט סטארט אפ	900	0	0	0	-300	

ב. **פרויקטים "לא קיוב הון"** - המונח "קיוב הון" הוא מילה אחרת ל"מגבלת השקעה". כאשר לחברת מוצע להשקיע במספר פרויקטים, אבל גובה ההשקעה המצרי שתוכל לבצע מוגבל והוא נאמר שהוא פועלם בעולם עם קיוב הון. לעומת זאת, בעולם ללא קיוב הון - אין מגבלת השקעה. להמחשה נוספת בדבר הבחירה בין פרויקטים בהינתן מגבלת השקעה / קיוב הון - [ראו שאלה 60 כאן](#).

ג. **פרויקטים בלתי תלויים ללא קיוב הון** = לא זאת בלבד שהפרויקטים בלתי תלויים, אין שום מגבלה על היקף השקעה מסוימלי אליו כפופה החברה (היא תעשה "מה שבאה לה" מתוך האפשרויות). דעו לכם, שאם אמרו **שפרויקטים הם בלתי תלויים**, ללא מידע נוסף - המשמעות היא שהם בלתי תלויים ללא קיוב הון.

ד. **פרויקטים המוציאים זה את זה** - פרויקטים אשר ביצוע אחד מהם מבטל (מושcia) את היכולת לבצע את הפרויקט האחר (ראו בין היתר סעיפים ג ו איילך [של שאלה 69.1](#)).

2. קритריונים רלוונטיים לקבלת החלטות / דירוג / הכרעה במצבים השונים (בנהנזה שמדובר בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות) :

PI מדד רוחניות	IRR שנת"פ	NPV ענ"ג	סוג הפרויקט / קритריון
יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $PI > 1$	יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $IRR < k$	יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $NPV > 0$	בלתי תלויים ללא קיצוב הון
עלול שלא להיות תקף : גם קритריון זה הוא בסופו של יומם - יחסית	עלול שלא להיות תקף (או סתירה בין IRR ל- $NPV$ - ב- <a href="#">שאלה 69.1</a> )	יש לבצע את הפרויקט שה- $NPV$ שלו מירבי. הkritריון תקף.	מושגאים זה את זה
עלול שלא להיות תקף : גם קритריון זה הוא בסופו של יומם - יחסית	עלול שלא להיות תקף, מאותה סיבה שאיננו תקף כאשר מושגאים זה את זה	יש לבצע את תמהיל הפרויקטים המוביילים ל- $NPV$ מטרפי כולל מירבי. הkritריון תקף.	פרויקטיםבלתי תלויים אך בתנאי קיצוב הון (מגבלת השקעה מירבית מתאפשרת)



## שאלה 70

פרויקט א דורש השקעה של 42,206.78 ש"ח ואילו פרויקט ב דורש השקעה של 68,234.16 ש"ח. שט"פ פרויקט א הוא 13% וشت"פ פרויקט ב הוא 10%.

שני הפרויקטים מניבים תזרימי מזומנים קבועים בכל שנה במשך 5 שנים, אך התזרים השנתי (הקבוע) של פרויקט א שונה מהתזרים השנתי (הקבוע) של פרויקט ב. חשבו את שט"פ הפרויקט ההפרשי.

פתרונות :

נתחילה בלחיציג את הערכים הקיימים בטבלת תזרימיים, מתמטית ידוע:  $y \neq x$

IRR	5	4	3	2	1	0	פרויקט
13%	x	x	x	x	x	-42,206.78	א
10%	y	y	y	y	y	-68,234.16	ב

זכרו : ההגדרה המתמטית של השט"פ היא מחיר ההון שאים נהוון בו את תזרימי הפרויקט, העניין (ה- $NPV$ ) יהיה שווה ל-0.



בנה את הגדרת  $NPV$  של שני הפרויקטים :

$$NPV_A = -42,206.78 + x * PVFA(k_A, 5)$$

$$NPV_B = -68,234.16 + y * PVFA(k_B, 5)$$

אך ידוע שהשת"פ של א הוא 13%, כלומר אם נציב במקומות k ערך של 13% במשווהה, תוצאה החישוב תהיה 0 כי ה-  $NPV$  המתקיים בהיוון במחיר הון זהה ל-  $IRR$  מוביל לעניין 0, תמיד.

במקביל, הויל וידוע שהשת"פ של ב הוא 10%, הרי שams נציב במקומות k במשווהה ב ערך של 10%, תוצאה החישוב תהיה 0.

$$-42,206.78 + x * PVFA(13\%, 5) = 0 \rightarrow x = \frac{42,206.78}{PVFA(13\%, 5)} \rightarrow x \approx 12,000$$

$$-68,234.16 + y * PVFA(10\%, 5) = 0 \rightarrow y = \frac{68,234.16}{PVFA(10\%, 5)} \rightarrow y \approx 18,000$$

נזכור ונציב ערכים אלו בטבלת התזוריים המתארת את שני הפרויקטים :

5	4	3	2	1	0	פרויקט
12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	-42,206.78	א
18,000	18,000	18,000	18,000	18,000	-68,234.16	ב

הפרויקט ההפרשי מוגדר בתורו פרויקט "חדש" שככל אחד מتوزيعו הוא למעשה ההפרש הפשטוני שבין תזרימי שני הפרויקטים.

מקובל לבצע את החישוב ההפרשי על ההפרש בין הפרויקט ה"גדול" (זה שהשקעתו גדולה וتوزيعו גבוהים) לבין הפרויקט ה"קטן". לא מחייב. אפשר גם לעבוד הפוך (להחסיר מערכי הפרויקט הקטן את ערכיו הפרויקט הגדל). אבל מומלץ תמיד לעבוד לפי ההפרש בין הגדל לקטן.]

5	4	3	2	1	0	פרויקט
12,000	12,000	12,000	12,000	12,000	-42,206.78	א
18,000	18,000	18,000	18,000	18,000	-68,234.16	ב
					-26,027.38	הפרשי : ב
6,000	6,000	6,000	6,000	6,000		בנייה א

כעת, כל שנותר לבצע, בהתאם להנחיות הנדרש, הוא לחשב את השט"פ של הפרויקט ההפרשי (השורה השלישית במקבץ התזרומים לעיל). כזכור, חישוב שט"פ דורש לבנות משווהות ענין, להציב את מחיר החון כנעלם, ולהשווות ל-0.

$$NPV_{\text{הפרשי}} = -26,027.38 + 6,000 * PVFA(IRR_{\text{הפרשי}}, 5) = 0$$

נמשיך את הפיתוח ונגלה :

$$PVFA(IRR_{\text{הפרשי}}, 5) = \frac{26,027.38}{6,000}$$

או בעצם :

$$PVFA(IRR_{\text{הפרשי}}, 5) \approx 4.338$$

שיטוט מחיר בלוח א-4, כמפורט להלן, מובילנו לריבית קרובה ל-5%. וזהי תשובתנו הסופית: ה - IRR של הפרויקט ההפרשי הוא 5%.

ЛОЧ А-4: ערך נוכחי מצבבר של 1 ש"ח המותקבל מדי תקופת המשך  $t$  תקופות

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
1		0.990	0.980	0.971	0.962	0.952	0.943	0.935	0.926	0.917	0.909
2		1.970	1.942	1.913	1.886	1.859	1.833	1.808	1.783	1.759	1.736
3		2.941	2.884	2.829	2.775	2.723	2.673	2.624	2.577	2.531	2.487
4		3.902	3.808	3.717	3.630	3.566	3.465	3.387	3.312	3.240	3.170
5		4.853	4.713	4.580	4.452	4.329	4.212	4.100	3.993	3.890	3.791
6		5.795	5.601	5.417	5.242	5.076	4.917	4.767	4.623	4.486	4.355
7		6.728	6.472	6.230	6.002	5.786	5.582	5.389	5.206	5.033	4.868
8		7.652	7.325	7.020	6.733	6.463	6.210	5.971	5.747	5.535	5.335
9		8.566	8.162	7.786	7.435	7.108	6.802	6.515	6.247	5.995	5.759
10		9.471	8.983	8.530	8.111	7.722	7.360	7.024	6.710	6.418	6.145



#### שאלה 70.1 - החזר הון שנתי

חברה שוקלת לרכוש מזינה לחימום נקי. לפי ההסדר עם היבואן התשלומים בגין המכונה יבוצעו בתחילת כל שנה במשך 4 שנים בסכום של 200 אלף ש"ח לשנה. ההכנסות ממיקרת המוצר צפויות להתקבל החל מtons השנה ה-4 במשך 6 שנים. בהנחה שמחיר ההון של החברה הוא 15%, מהי ההכנסה השנתית המינימלית אשר תצדיק את ביצוע הפרויקט?

רקע ופתרון :

ככל, ההכנסה השנתית המינימלית המצדיקה פרויקט היא זו אשר בהינתנה, ה- NPV הוא אפס (מינימום הכספיות).

לפיכך, אם נבנה את משוואת ה- NPV, נציב את סכום ההכנסה התקופתית כנעלם, ונשווה לאפס - חילוץ הנעלם הוא התשובה לשאלה.

מעבר לעובדה בסיסית זו, המושג הנ"ל = הכנסה התקופתית המצדיקה את הפרויקט - נקרא גם "החזר הון שנתי". במלים אחרות, אם היו דרישים מאייתנו לחשב את החזר ההון השנתי ולקבוע כדאיות לאורו, היהי פועל בדיקת אותה הגישה.



זמן	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
תזרים	x	x	x	x	x	x	-200	-200	-200	-200

הסבירים: הויל ו-4 תזרימי העלות הם בתחילת כל שנה, הרי שבמוקם להציבם על ה"ציר" בזמן 1 עד 4, הם יוצבו בזמן 0 עד 3. שימוש לב שמחיר ההון של החברה ידוע - 15% :  
ניצור כאמור את משווהת הענין - שבח התזרים x הוא נעלם - ונשווה לאפס :

$$NPV = 0 \rightarrow -200 * PVFA(15\%, 4) * (1 + 15\%)^1 + x * PVFA(15\%, 6) = 0$$

מה עשינו כאן?

הביתוי  $(4, 4) * 200$  – מבטא את הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים זמן 0 עד וככל זמן 3. אלא שערך הנוכחי של סדרה מובילה אותנו תמיד "אחד אחרה" ביחס לתזרים הראשון (במקרה זה - ביחס בזמן 0) ולכן התוצאה של הביתוי הניל היא בזמן -1. כדי להחזיר בזמן 0, כפלנו ב-1 ועוד מחיר ההון פעם אחת.

הביתוי  $(6, 6) * x$  מבטא את הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים זמן 4 עד זמן 9 כולל. ערך הנוכחי סדרתנו כזו מקיים את התוצאה אחת אחרת, בזמן 3. לכן יש לתקן 3 שנים נוספות לאחר על ידי מכפלה ב-1 ועוד מחיר ההון בחזקה שלילית של 3.

נפתח ונקבל :

$$-200 * 2.855 * 1.15 + x * 3.784 * 1.15^{-3} = 0$$

במעברת אגפים וחילוץ זרי נקבל :

$$-656.65 + 2.488x = 0 \rightarrow x \approx 263.9$$

המשמעות היא שההכנסה השנתית המינימלית שתצדיק את הפרויקט היא כ-263.9. פרשנות נוספת מצד הטכני היא לומר ש"במקרה זה, החזר ההון השנתי הוא 263.9".

## מפגש 5 – כדאיות פרויקטים המשך – 9/12/2024

מיini רציו:

- במפגש הקודם הצגנו את העקרונות והעיקרים ביה' 6. במסגרת זאת, הבחרנו את מושג ה- NPV (שווי כספי נטו במונחי ערך הנוכחי), ה-IRR (שיעור התשואה בפרויקט / הריבית על ההלוואה, למעט במקרים של פרויקטים לא קובנציאונליים), וכן הצגנו בקצרה את מzd הרווחיות PI ואת החור ההון.
- בחלק הראשון של המפגש הנעים זהה נציג מספר סוגיות נוספות בהקשר ליישום הקритריונים, באופן נקודתי יותר, ואיהнач נתחליל כבר את יה' 7 שעוסקת בהגדרת בינוי תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה.

### שאלה 70.2 – חימום לגבי קритריונים

למשמעות מוצע פרויקט שדורש השקעה של 50,000 ש"ח והוא מניב 19,314 ש"ח בתום כל שנה במשך 4 שנים. מחיר ההון של הפירמה הוא 10% לשנה. האם כדאי לבצע את הפרויקט לפי קритריון הענין? ולפי קритריון השתתיף?

פתרון:

4	3	2	1	0	
19,314	19,314	19,314	19,314	-50,000	תזרים

חישוב עניין והכרעה לפיו:

$$NPV = -50,000 + 19,314 * PVFA(10\%, 4)$$

$$NPV = -50,000 + 19,314 * 3.17 = 11,225.38 > 0$$

מדובר בפרויקט בוודד, עניינו חיובי, כדאי לקבלו לפי קритריון זה.

חישוב שת"פ והכרעה לפיו:

שת"פ מאפשר זיהוי כדאיות פרויקט בוודד אם מדובר בפרויקט קובנציאוני (במקרים אחרים, הוא עלול להטעות).

פרוקטים קובנציאונליים (משמעות מתחפה פעם אחד) יש שני סוגים:

פרויקט של השקעה: סימן שלילי ואחריו חיובי – קритריון ההכרעה בדבר קבלת הפרויקט:  $IRR \geq k$

פרויקט של ההלוואה: סימן חיובי ואחריו שלילי.  $IRR \leq k$

וכעת, נוכל לחשב את ה-IRR על פי נתוני הפרויקט, ובהינתן שהוא פרויקט קובנציאוני של השקעה, נבחר לקבלו אם התוצאה גבוהה ממחיר ההון הנוכחי 10%.

תזכורת – כדיحلץ את השת"פ יש להתבסס על משווהת ה- NPV, להציב במקום מחיר ההון את הנעלם  $IRR$ , ולהשוו את המשווה כולה ל-0:

$$-50,000 + 19,314 * PVFA(IRR, 4) = 0$$

$$PVFA(IRR, 4) = 2.58 \rightarrow IRR = 20\% > 10\% = k$$

מה למדנו?

ראשית, בפרויקט פשוט ובודד זה, בהינתן שהוא קונבנציונלי, ניתן לקבל החלטה גם לפי שת"פ וגם לפי ענ"ג. כמו כן, ההחלטה בדבר כדיות תיותר זהה לגבי השימוש בשני הקריטריונים.

אם נתקلت בפרויקט קונבנציונלי בודד ואומרים שהוא **כדי לפי ענ"ג, אז הוא כדי גם לפי שת"פ ולהפך** (טיפ קטן נוסף – גם הכרעה לפי מدد הרוחניות תהיה חופפת).

**שאלה 70.3 – שאלת שכל מטרתה להטמע את המסקנה הבסיסית לעיל**

בחברת "ירינים ועמרם" בע"מ ידוע כי ניתן להשקיע בפרויקט מסוימים – שהנו פרויקט קונבנציונלי. בחברה חישבו את ענ"ג הפרויקט ומצאו שהוא חיובי.

לפניכם מספר טענות:

טענה 1: הפרויקט לא יהיה כדי לפי מدد הרוחניות.

טענה 2: יתכן שהפרויקט לא יהיה כדי לפי ממד הרוחניות.

טענה 3: הפרויקט לא יהיה כדי לפי שת"פ.

טענה 4: הפרויקט יהיה כדי לפי שת"פ.

הטענה / הטענות הנכונה / הנכונות:

א. טענה 1 בלבד

ב. טענה 2 בלבד

ג. טענה 3 בלבד

ד. טענה 4 בלבד

ה. טענות 2 ו-4

פתרונות:

מדובר בפרויקט בודד קונבנציונלי. כדיותתו תקבע באופן זהה לגבי היישום של כל אחד מהקריטריונים (ענ"ג, שת"פ, ממד הרוחניות, ובסימוניהם NPV, IRR, PI).

כאן: **ענ"ג חיובי <>**

כדי לפי ענ"ג <> וגם בודד קונבנציונלי

<> **תתקיים כדיות (בחכרח!) גם לפי IRR, PI,**

רק טענה 4 נכונה.

#### שאלה 70.4 – קритריונים לגבי פרויקט כולל גם הלוואה

למשמעות פרויקט שדורש השקעה של 100,000 ש"ח והוא מניב 35,027 ש"ח בתום כל שנה 4 שנים. מחיר ההון של החברה הוא 17% לשנה.

א. האם הפרויקט כדאי? נanko לפि קритריון השט"פ ולפי קритריון העניין.

ב. הניחו כי הממשלה מציעה הלוואה מסובסדת למימון 80% מההשקעה בפרויקט. ההלוואה נושאת ריבית שנתית בשיעור 4% לשנה והוא מוחזרת ב-4 תשלומים שנתיים שווים של קרן וריבית. על בסיס

הפרויקט המשולב (כולל היבט המימון בהלוואה) האם הפרויקט כדאי לפি עניין? לפि שט"פ?

פתרון :

פתרון סעיף א – האם הפרויקט כדאי? נanko לפি קритריון השט"פ ולפי קритריון העניין.

4	3	2	1	0	
35,027	35,027	35,027	35,027	-100,000	תזרים

בהתנחתה שהפרויקט בודד וקונבנציונלי, ניתן להכريع בצורה נכונה בדבר קבלה או דחיהה חן לפि IRR והן לפि NPV.

$$NPV = -100,000 + 35,027 * PVFA(17\%, 4) \approx -3,921 < 0$$

לפי עניין, הפרויקט איינו כדאי (عنيין שלילי).

למרות שבורר לי בהינתן סוג הפרויקט שגמ לפि IRR הוא לא יהיה כדאי (קרי, קיבל IRR שנמוך ממחיר ההון), נחשבו כמותית:

$$-100,000 + 35,027 * PVFA(IRR, 4) = 0 \rightarrow IRR = 15\% < 17\% = k$$

גם לפि IRR, הפרויקט לא כדאי.

פתרון סעיף ב – הכרעה בדבר כדאיות פרויקט באופן שטחני גם לתזרימי הלוואה מסובסדת ייעודית  
ככלל, עלויות המימון של פרויקט כבר באות לידי ביטוי במנגנון ההיוון (במסגרת מחיר ההון, שמשיע לחישוב NPV). אלא שבמקרה שבו קיימת הלוואה מסובסדת למימון הפרויקט, שלא במחיר ההון – הרוי שיש לשקוף את תזרימייה בפרויקט, והם ישפרו את העניין ואת הכספיות.

לכן כאשר אני מזוהה פרויקט שבגינו מוצעת לחברת הלוואה מסובסדת, תחילה העבודה יהיה:

שלב 1 : חשב את תזרים ההלוואה בהתאם לנוטוניה, כולל ריבית, בכל תקופה.

שלב 2 : הוסף / נכה את תזרימי הלוואה התקופתיים מتوزרימי הפרויקט הבסיסי הנוטוניים. כך קיבל את תזרים המזומנים נטו.

שלב 3 : הפעילו את קритריון ההכרעה הרלוונטי על התזרים נטו המשולב (כלומר חשבו NPV/IRR/PI על תזרים הנטו המשולב).

שלב 1 – העתק נתוני השאלה וчисוב תזרים הלוואה  
 הניחו כעת כי הממשלה מציעה הלוואה מסובסדת למימון 80% מההשקעה בפרויקט. הלוואה נושאת ריבית שנתית בשיעור 4% לשנה והיא מוחזרת ב-4 תשלומים שנתיים שווים של קרן וריבית. על בסיס הפרויקט המשולב (כולל היבט המימון בהלוואה) האם הפרויקט כדאי לפי עניין? לפי שטי'פ?

סכום ההחזר התקופתי בהלוואה, בהתבסס על סכום הלוואה (LOAN במונה) ועל ה- PVFA המתאים לריבית המסובסדת ומספר התשלומים במכנה :

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, n)} = \frac{80\% * 100,000}{PVFA(4\%, 4)} = 22,039$$

שלב 2 : הוסף / נכח את תזרימי הלוואה התקופתיים מتوزרי הפרויקט הבסיסי הנתונים. כך קיבל את תזרים המזומנים נטו.

4	3	2	1	0	
35,027	35,027	35,027	35,027	-100,000	תזרים פרויקט
-22,039	-22,039	-22,039	-22,039	80,000	תזרים הלוואה
12,988	12,988	12,988	12,988	-20,000	תזרים נטו משולב

שלב 3 : הפעילו את קритריון ההכרעה הרלוונטי על התזרים נטו המשולב (כלומר חשבו NPV/IRR/PI על תזרים הנטו המשולב).  
 נחשב מחדש כדאיות בהינתן  $k=17\%$ .

$$NPV = -20,000 + 12,988 * PVFA(17\%, 4) \approx 15,626 > 0$$

כלומר, בהתחשב גם בערך שנתי מה haloואה המסובסדת, הפרויקט כדאי לפי NPV. כמובן שה כדאיות התקיימית גם לפי IRR (בהתנן שהוא פרויקט בודד שהוא קונבנציונלי).

$$-20,000 + 12,988 * PVFA(IRR, 4) = 0 \rightarrow IRR = 53\% > 17\% = k \rightarrow ^{15}$$

<sup>15</sup> מדובר בתרגיל שאת נתנו אני המצאי, ולכן לא ניתן להלץ IRR מלהלה. בבחינה, סביר שתוכל לחלק מהלה. בכל מקרה, המסקנה לפיה גם לפי IRR מתקיימת כדאיות, בעינה עומדת לאור הערך החיווי של NPV והיות הפרויקט בודד, קונבנציונלי.

**70.5 – קרייטריון החזר הון שנתי במצב שבו התקובל הראשוני נדחה**  
 שקיי שוקלת לרכוש מכונה ענקית לחימום נקיין שעולותה היום 300,000 ש"ח ובנוסף היא תדרוש תשלום בעוד שנתיים בסכום של 200,000 ש"ח ובוד 4 שנים בסכום של 250,000 ש"ח. החל מתום השנה ה-7 ובמשך 10 שנים המכונה תניב הכנסה שנתיית קבועה. בתנאים אלו, ובנחה שמחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה, מהו סכום הכנסה השנתית שיצדק את ביצוע הפרויקט?

פתרון :

תזכורת: החזר הון שנתי מושמעו תזרים המזומנים התקופתי החיווי הקבוע שיצדק את כדאיות הפרויקט. במלים אחרות, זהו אותו תזרים שהנבטו באופן קבוע במהלך התקופות שבוחן הפרויקט מניב הכנסה – תוביל את הענין ל-0 (נק' מינימום כדאיות).  
 במלים אחרות, כאשר הפרויקט "מורכב", נציג את מכלול הרכיבים התזוריים על ציר זמן / בטבלה, נסמן את התזרורים כנעלם בהתאם, ונבטא את משווהת הענין בהתאם, אגב השוואתה ל-0. תזרים הנעלם מסומן עם הפרטוף הנאה של ירין.

16 ...	8	7	...	4	3	2	1	0	
				-250,000		-200,000		-300,000	תזרים

   
 X =

$$NPV = 0 = -300,000 - 200,000 * (1 + 5\%)^{-2} - 250,000 * (1 + 5\%)^{-4} + X * PVFA(5\%, 10) * (1 + 5\%)^{-6} = 0$$

משווהה זו ניתן לחלץ את X שיהווה את החזר ההון השנתי.

$$-687,082 + X * 7.722 * (1 + 5\%)^{-6} = 0 \rightarrow X = 119,238$$

כלומר, הפרויקט יהיה כדאי אם הכנסה הקבועה בכל אחת מהשנים 16-7 תהיה 119,238 ש"ח לפחות. זה החזר ההון השנתי.

זהו! אנחנו מוכנים למן 11 ולסופגניות



## מבחן 6 – קיצוב הון ויישומים יי' 7 – 7/5/2024

### מיני רציו:

ביחידה 6 – העוסקת בבחינת כדאיות השקעות ופרויקטים שתזרימים נטורניים, עסקנו (בעיקר) בעיבוד ערבי טבלאות תזרימים על בסיס קרייטריונים מוגדרים, על מנת לקבוע כדאיות ולדרג. אלא שבדרכ' כלל, תזרים אלו אינם ניתנים לנו "מן המוקן". בדרך כלל, אנחנו מקבלים נתונים גלים בסיסיים של הכנסות / הוצאות, של מסים והשפעות נוספת, ובאחריותנו לפועל כדי ליצור מבליל הנתונים את הערך התזרימי הרלוונטי – ובממש : את הענ"נ<sup>16</sup> (NPV) כבסיס לקבלה החלטות (cadaiot ha-shkua).

### עקרונות בסיסיים באפיון תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה

עקרון	פרשנות
תזרים תוספתיים	אנו מתעניינים אך ורק בתזרימי המזומנים העתידיים שצפויים לנבוע ספציפית מההחלטה על ביצוע הפרויקט. כך למשל, עלויות קבועות (אלו שאין ניתנות לשינוי ולbijtol, בין אם הפרויקט יבוצע בין אם לאו) עשויים לא תובנה בחשבון בתחזית תזרימי המזומנים של הפרויקט על מנת לקבוע את כדאיונו.
מנקודת ראות כלל היפרמה	אם פרויקט מסוים מגדיל / מקטין תזרים של פרויקט אחר בחברה, יש להתחשב בכך כהנשה נוספת / הוצאה נוספת לפי העניין. נניח שביצוע פרויקט תשתיות בחברה צפוי להניב לה לקוחות נוספים גם בתחום הייעוץ. כנסקול את כדאיות פרויקט התשתיות, נתיחס גם לעלייה הצפוייה כתוצאה ממנו בתחום הייעוץ.
התעלמות מעליות שקוות (sunk cost)	כל עלות שנובעת מאירוע / פעילות היסטורית, טרם קבלת החלטה, לא תובא בחשבון בתזרימי הפרויקט ולא תכלל בשיקולים להחלטה בדבר הפרויקט. למשל, אם ביצענו סקר שוק מקדים ל佗ת איסוף נתונים פרויקט – עלות סקר השוק עשויים לא תכלל בתזרימי המזומנים לשם בחינת כדאיות הפרויקט.
לא כולל עלויות מימון (למעט חריג...)	למעט המקרה של הלואה מסוימת ייעודית לטובת הפרויקט, כלל עלויות המימון כבר מובאות לידי ביטוי במסגרת ההיוון / מחיר הון. לכן, למעט המקרה הספציפי הנ"ל, אם מספרים על הלואה שהחברה נטלה לצורך הפרויקט – אין להתחשב בתזרימה.
בהתחשב בתזרימי מסים על ההכנסה	עד כה, התעלמנו באופן מלא מעליות הקשורות למסוי הכנסות החברה ורווחה. בעת, חשוב להתייחס אליהן על מנת שהתמונה בדבר תזרימי הפרויקט תהיה מלאה.

<sup>16</sup> אם התזרמים נבנו על ידנו כהלכה, בהחלט נוכל לחשב גם את השט"פ ומדד הרווחות וכו'. יחד עם זאת, ביה' 7, הקרייטריוון המרכזי ובפער גדול הוא קרייטריוון ה- NPV.

**שאלה 70.6 – הציג מקרה בסיסי של תזרימי מזומנים לתכניות השקעה וחישוב ענ"ג**

חברה שוקלת לרכוש מכונה לחימום נקייק עלות של 500,000 ש"ח. המכונה בעלת אורך חיים שימושיים של 4 שנים, והוא מופחתת על פני תקופת זו גם לצרכי מס. לאורך תקופת השימוש במכונה צפויות להיווצר הכנסות שנתיות בסך 200,000 ש"ח והוצאות שוטפות שנתיות של 30,000 ש"ח.

בנחלה שמחיר ההון של החברה לאחר מס 10% לשנה ושיעור המס החל על החברה הנ"ו 20%, וכי כלל תזרימי המזומנים (למעט רכישת המכונה) הם בתום כל שנה, האם הפרויקט כדאי? נזכיר.

**פתרון :**

כאשר אני מזזה שאלה שכוללת רכיבים שונים של תזרימי מזומנים (הכנסות, הוצאות, מסים, פחת) – אני יודע שאני בICH 7, ואחד האתגרים המרכזיים שלי יהיה לתרגם את המלול הרוב לציר זמן ועליו תזרימי מזומנים. נבצע זאת כאן :

	0	1	2	3	4
עלות השקעה	-500,000				
מגן מס - פחת		$\frac{500,000}{4} * 20\%$ 25,000	25,000	25,000	25,000
הכנסות שנתיות		200,000	200,000	200,000	200,000
הוצאות שנתיות		-30,000	-30,000	-30,000	-30,000
השפעת מס		-20%*(200,000-30,000) -34,000	-34,000	-34,000	-34,000
סה"כ	-500,000	161,000	161,000	161,000	161,000

**הסבירים נוספים ללוח התזרימיים :**

- ההשקעה עצמה (במכונות, ציוד, וכו – במכונית נקייק) היא בזמן 0 אלא אם נאמר אחרת. היא בגין תזרים שלילי, ובהתו השקעה (רכישת נכס) היא לא מהוות הוצאה לצורך מס, ולכן לא יוצרת השפעת מס מיידית.
- בכל שנה עוקבת למועד ביצוע ההשקעה, علينا לחשב את הוצאות הפחת. הוצאות אלו אינן תזרימיות ואף על פי כן, כן מזוכות במגן מס (זיכוי מס) שהוא בגין תזרים חיובי. כדי לחשב זיכוי זה, נחלק את עלות ההשקעה בתקופת הפחתה (הוצאות פחת) ואת התוצאה נכפול בשיעור המס.
- להכנסות השנתיות ולהוצאות השנתיות השוטפות (שאינם פחת) נתייחס בסימן המתמטי המתאים במועד התרחשותן.
- מס יכול גם על ההפרש בין הכנסות השנתיות לבין הוצאות השנתיות – והשפעתו התזרימית בסימן הפוך (כפי אם מדובר ברווח, ההשפעה שלילית, ואם מדובר בהפסד – השפעת המס חיובית).

בוחלת אפשר לחשב את הענין על בסיס חישוב ה- NPV לזרימי הסה"כ,omid נבצע זאת. יחד עם זאת, מקובל יותר מטעמי זמן / ירידעה / התאמה לפתרונות קיימים, לייצר גם משווהות פתרון מוקצתה. קודם כל על בסיס הלוות:

סה"כ	0	1	2	3	4
	-500,000	161,000	161,000	161,000	161,000

ידוע שמחיר ההון 10%, ולכן חישוב ה- NPV על בסיסו נוכל לבחון כדאיות הפרויקט:

$$NPV = -500,000 + 161,000 * PVFA(10\%, 4) = 10,370 > 0$$

את ההחלטה בדבר כדאיות הפרויקט קיבל "כרגיל" לפי ענין חיובי / שלילי. כאן, הפרויקט הכספי.

נעביר עת לטכניקת הפתרון המקבולות. לשם נוחות נעתיקכאן שנית את כל הנתונים:

חברה שוקלת לרכוש מכונה לחימום נקבע בעלות של 500,000 ש"ח. המכונה בעלת אורך חיים שימושים של 4 שנים, והוא מופחתת על פני תקופת זמן למשך מס. למשך תקופת השימוש המכונה צפויות להיווצר הכנסות שנתיות בסך 200,000 ש"ח והוצאות שוטפות שנתיות של 30,000 ש"ח.

בהתה שמחיר ההון של החברה לאחר מס 10% לשנה ושיעור המס החל על החברה הנז 20%, וכי כלל זרים מזומנים (למעט הרכישה של המכונה) הם בתום כל שנה, האם הפרויקט כדאי? נזכיר.

להלן משווהות הפתרון המלאה, המובילה לתוצאה זהה:

$$NPV = -500,000 + \frac{500,000}{4} * 20\% * PVFA(10\%, 4) + (200,000 - 30,000) * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 4) = 10,370$$

ואם מישו / מישוי צריכים הסברים מפורטים על כל איבר, להלן:

$$NPV = -500,000 + \frac{500,000}{4} * 20\% * PVFA(10\%, 4) + (200,000 - 30,000) * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 4) = 10,370$$

עלות ההשקעה  
בזמן 0  
לכן אין צורך להזונה

הערך הנוכחי של מגני המס על הפחתה.  
הוא מוחשב על ידי הוצאות הפחתה (היחס בין עלות ההשקעה לתקופת ההפקה)  
לצורך מס):

כל זה מוכפל בשיעור המס - 20%,  
משום שזהו שיעור הזיכוי שיתקבל על בסיס שנתי.  
ובהינתן שמדובר לדוח על פחת זיכויים במשך כל  
תקופת ההחזקה של הפרויקט (או תקופת הפחתה - מה שיותר קצר),  
הרי שיש להזון סדרת זיכויים אלו ב- PVFA של 4 זרים

הדרך המהירה להגעה להזורה  
התפעלי נטו והוא לנכונות מההכנסה  
השנתית הקבועה (אם היא קבועה),  
את ההוצאות השנתית הקבועה,  
על כן יהוננו כסדרה  
עם PVFA של 4

גם זרים הרוחות התפעולי  
אחרי מס מותקבלים בכל  
שנה במשך 4 שנים,  
על כן יהוננו כסדרה  
עם PVFA של 4

גם זרים הרוחות התפעולי  
ההפעלי נטו והוא לנכונות מההכנסה  
השנתית הקבועה (אם היא קבועה),  
את ההוצאות השנתית הקבועה,  
כasher הפרש חניל (רווח תעופלי  
חייב במס) יוכפל ב-1 פחות שיעור  
המס קרי ב- (1-20%)  
כדי להגעה לערך התזרימי נטו  
אחרי מסים

**שאלה 70.7 – בניית תזרימי מזומנים לתוכניות השקעה, רק בגיןה מוקצתת ופחות בתקופה שונה**

שרון שפרן שוקלת להתחדש במכונה חדשה לחימום נקייק עבור עובדי המשרד שלו בחברת "ספרנים בע"מ". החלטתה עומדת על הפרק לאור ממצאים של מחקר רחב היקף שערך החברה בשיתוף חברת ייעוץ חיצונית בעלות של 150,000 ש"ח ששולם זה עתה, ולפיו אכילת נקייק צפופה להגדיל את תזרימי החברה. עלות מכונת הנקייק 800,000 ש"ח. העלייה בתזרימי ההכנסה של החברה בעקבות הפרויקט צפופה להיות בסכום של 400,000 ש"ח בכל אחת מהשנתיים הראשונות ובסכום של 200,000 ש"ח בכל אחת מ-4 השנים לאחר מכן. העליות השנתיות השוטפות הן בסכום של 40,000 ש"ח, עיקרן לשם ניקוי מכונת הנקייק משאריות כרבותות ופופיקס. מכונת הנקייק מופחתת בשיטת הקו ה ישיר לצרכי מס במשך 4 שנים. החברה כפופה למס בשיעור 20% ומהיר ההון של החברה לאחר מס הוא 5%. האם הפרויקט כדאי? נマー.

**פתרון:**

התוצאה המתתקבלת להלן היא התוצאה של סיכון כולל הערות בכל השירות (זו מושואה אחת שرك פופולרי לשורות לאור אורה).

$$\begin{aligned}
 NPV = & -800,000 + \frac{800,000}{4} * 20\% * PVFA(5\%, 4) \\
 & + (400,000 - 40,000) * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 2) \\
 & + (200,000 - 40,000) * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 4) * (1 + 5\%)^{-2} = 289,032 > 0 \text{ do it!}
 \end{aligned}$$

עלות הסקר היא עלות של פעולה היסטורית. זהה עלות שקוועה, שכבר נתהוותה, שלא ניתן להשיבה, ואשר על כן איננה חלק מהתזרימים שישינו לקבל החלטה לגבי הפרויקט מפה ולהלאה. לגבי הוצאות הفاتה: הן מוחשבות במרקחה הפסוט (אם אין ערך שיר / גרט לצרכי מס, הדבר על זה בהמשך) לפי הפרויקט הפשוט שבין עלות ההשקעה לתקופת ההפקה **לצרכי מס**. מידע זה מופיע רק בשורה הלפניהם אחרונה.

לGBTי מסpter תזרימי מגני המס על הفاتה (4 PVFA(5%, 4) מדוע? מסpter מגני המס על הفاتה באופן כללי נקבע תמיד לפי הנמוך מבין שני הרכבים: א. תקופת החזקה בפרט בשנים (כאן – 6). ב. תקופת ההפקה של הפרט לצורכי מס (כאן – 4 שנים).

לGBTי הביטוי (1 – 20%) \* (400,000 – 40,000) מדווח בהכנסה השנתית בכל אחת מהשנתיים הראשונות, בגין הוצאות השוטפות, וכל זה (רווח תפעולי שנתי בשנתיים הראשונות) בגין מס.

לGBTי הביטוי:  $(1 + 5\%)^{-2} * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 4) * (400,000 - 40,000) + (200,000 - 40,000)$  הוא מייצג את תזרימי ההכנסה נטו (הכנסות בגין הוצאות ובנטול מסים) בכל אחת מ-4 השנים העוקבות, קרי בשנים 3, 4, 5, 6. כאשר סדרה זו מהוונת באמצעות PVFA מגיעים לזמן 2 (אחד אחרת ביחס לתזרים הראשונים). כדי לתאם הכל לזמן 0, כופלים ב-1 ועוד הריבית בחזקת 2.

#### שאלה 70.8 – פרויקט שבו תזרימי ההכנסה אינם ידועים, ויש לחצות על מנת לבחון כדאיות



ד"ר צבן שוקל להשקיע במכונה לחימום נקניק בעלות של 300,000 ש"ח. המכונה צפופה להניב הכנסה שנתית קבועה, בתום כל שנה, במשך 8 שנים. המכונה מופחתת על פני 8 שנים גם לצרכי מס ושיעור המס אליו כפופה לחברת הנז. כמו כן, מחיר ההון השנתי של החברה, אחרי מס, הנז 10%. מה צריכה להיות ההכנסה השנתית הקבועה על מנת שהפרויקט יהיה כדאי?

פתרון :

כדי שפרויקט יהיה כדאי, הכנסה המינימלית הנדרשת היא זו שתוביל לאייפוס הענ"ג.

$$NPV = -300,000 + \frac{300,000}{8} * 20\% * PVFA(10\%, 8) + X * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 8) = 0$$
$$NPV = -259,987.5 + 4.268X = 0 \rightarrow X \approx 60,915$$

מסקנה : כדי להצדיק את הפרויקט ההכנסה השנתית צריכה להיות 60,915 ש"ח.



יופי ריגשת קח בלון  
תעזוב אותו בשקט

#### שאלה 70.9 – פרויקט שבו נדרש לחץ את תזרימי ההכנסה, במקרה יותר מורכב



מוראל שוקל לרכוש מכונת חימום נקניק לחברת. מחיר ההון של החברה לאחר מס הוא 12% משך הפרויקט הוא 10 שנים. עלות מכונת הנקניק היא 400,000 ש"ח. הכנסה השנתית בכל אחת מ-4 השנים הראשונות קבועה, ובכל אחת מ-6 השנים לאחר מכן, מהוות 80% מההכנסה השנתית ב-4 השנים הראשונות. ההוצאה מהוות 60% מההכנסה במהלך 4 השנים הראשונות, ו-30% מההכנסה במהלך 6 השנים לאחר מכן (הוצאות אלו אינן כוללות פחות). פרט להוצאות השוטפות הניל, מוראל תעסיק בפרויקט חימום הנקניק עובד קבוע, שלא ניתן לפטרו, ואשר עלות שכרו השנתית היא 240,000 ש"ח. הנסיבות הכספיים של הפרויקט התקבלו לאחר סקר שוק מעמיק שנערך בעלות של 30,000 ש"ח.

רשות המסים מתירה לחברת הוצאות פחות בגין הפקחת פריטי נקניק, לפי תקופת הפקחת של 4 שנים.

שיעור המס אליו כפופה החברה הוא 30%.

נדרש : מהו סכום ההכנסה השנתי בכל אחת מ-6 השנים הקרובות, אשר יוביל להצדקה הפROYיקט?

פתרונות :

למרות שגישת הפתרון שניים בהחלט תבצע שימוש בנוסחה ובחילוץ, הרי שלאור ריבוי רכיבי התזרים, נציגים לפחות ברמה הבסיסית (לפני מס) את החלקים העיקריים של התזרים. לשם נוחות, הערכים יוצגו באלפי ש"ח.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
הכנסה 4-1		X	X	X	X						
הוצאה 4-1		-0.6X	-0.6X	-0.6X	-0.6X						
סה"כ רווח שנתי 4-1 לפני מס		0.4X	0.4X	0.4X	0.4X						
הכנסה 10-5						0.8X	0.8X	0.8X	0.8X	0.8X	0.8X
הוצאה 10-5						-0.3*0.8X =-0.24X	-0.24X	-0.24X	-0.24X	-0.24X	-0.24X
סה"כ רווח שנתי 5-10 לפני מס						0.56X	0.56X	0.56X	0.56X	0.56X	0.56X

$$NPV = -400 + \frac{400}{4} * 30\% * PVFA(12\%, 4) + 0.4X * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 4) + 0.56X * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 6) * (1 + 12\%)^{-4} = 0$$

קייבלי:

$$X = 164.76$$

אבל זו רק הכנסה השנתית ב-4 השנים הראשונות, ושאלו אותו על הכנסה השנתית דזוקא בכל אחת מ-6 השנים האחרונות מהו % 80 מסכום זה, והיא באלפי ש"ח:

$$164.76 * 0.8 = 131.8$$

וב שקלים שלמים: **131,800 ש"ח**

הסבירים נוספים:

כאשר מציגים בפרויקט מקרה שבו הוא דורש עסקה של עובד קבוע, הנחתנו הפרשנית היא שמדובר בעובד קיים (קבוע) שפשות מוקצת לפרויקט לאורך תקופת קיומו. שכר שכזה, בהיותו תזרים קבוע, לא נובע מעצם ביצוע הפרויקט, אלא מהעובד – ואיןנו ניתן למניעה. לפיכך, שכרו של עובד כזה איננה חלק מגורמים המזומנים של הפרויקט.

לגביו סקר השוק – גם הוא מהוות פעילות היסטורית נכוו לנקודת הזמן שבה מתאפשרה החלטה, ואשר על כן איןנו תזרים מזומנים שיווא בحسابו.

## גישה ישירה

מוראל שוקלת לרכוש מכוון חיים נקי לחברה. מחיר ההון של החברה לאחר מס הוא 12% לשנה. משך הפרויקט הוא 10 שנים. עלות מכוון הנקי היא 400,000 ש"ח. ההכנסה השנתית בכל אחת מ-4 השנים הראשונות קבועה, ובכל אחת מ-6 השנים לאחר מכן, מהוות 80% מההכנסה השנתית ב-4 השנים הראשונות. ההוצאה מהוות 60% מההכנסה במהלך 4 השנים הראשונות, ו-30% מההכנסה במהלך 6 השנים לאחר מכן (הוצאות אלו אינן כוללות פחת). פרט להוצאות השוטפות הניל', מוראל תעסיק בפרויקט חיים נקי עובד קבוע, שלא ניתן לפטרו, ואשר עלות שכרו השנתית היא 240,000 ש"ח. הנתונים הכספיים של הפרויקט התקבלו לאחר סקר עמוק שעריך עלות של 30,000 ש"ח.

רשوت המסים מתירה לחברת הוצאות פחות בגין הפקחת פריטי נקי, לפי תקופת הפקחת של 4 שנים. שיעור המס אליו כפופה לחברת הוא 30%.

נדרש: מהו סכום ההכנסה השנתית בכל אחת מ-6 השנים האחרונות, אשר יוביל להצדקה הפרויקט?

הчисוב באליי ש"ח – והואיל והכנסות הן נעלם דאגנו להתייחס אליו בנפרד למטרת הנתונים:

$$NPV = -400 + \frac{400}{4} * 30\% * PVFA(12\%, 4) + x * (1 - 60\%) * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 4) + 0.8x * (1 - 30\%) * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 6) * (1 + 12\%)^{-4} = 0$$

קיבלתי את ה- $x$  המיצג את ההכנסה בכל אחת מ-4 השנים הראשונות, אבל שאלות על ההכנסה בשנים לאחר מכן שווה 80% מכך, באליי ש"ח:

$$X = 164.76 \rightarrow CF(5.10) = 80\% \rightarrow CF(5.10) = 80\% * 164.76 \rightarrow Answer: 131.8$$

לגביה מגני המס על הפקחת:

$$\frac{400}{4} * 30\% * PVFA(12\%, 4)$$

למרות שהפרויקט ל-10 שנים, הרי שרשوت המסים מתירה להפחית את הנכס על 4 שנים בלבד. לכן, לא יוכל לייצר PVFA של 10 תזרימיים. בשפה פשוטה: כאשר מבצעים PVFA עבור היון מגני מס על הפקחת, ה- $x$  (מספר התזרימיים) תמיד יהיה הנזוק מבין תקופת ההחזקה של הפריט לבין תקופת הפקחתו. ספציפית כאן: הפריט מוחזק 10 שנים, אבל מופחת על 4, לכן יש 4 מגני מס על הפקחת.

לגביה רוח נטו בניכוי מס:

$$+x * (1 - 60\%) * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 4) + 0.8x * (1 - 30\%) * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 6) * (1 + 12\%)^{-4}$$

ההכנסה לא ידועה, לכן  $x$ , מנכים ממנה הוצאות שוטפות בשיעור 60% ו-30% מס בשיעור 30% סכום נטו זה לאחר מס יתקבל בתום כל שנה 4 שנים כנתון

בנawy, ההכנסה ב-6 השנים לאחר מכן היא 80% מההכנסה המקורית (0.8). ומזה מנכים הוצאות בשיעור 30% (שוטפות) וגם מסים בשיעור 30% נספחים. כל זה בתום כל שנה, 6 שנים, אבל האיל והסדרה מתחילה בזמן 5, הקפיצה אחת אחרת מוביילה ל-4 ויש לבצע התאמה

לגביה עלויות עובד קבוע וסקר שוק מקדים:

עלויות היסטוריות (סקר שוק) ועלויות שאינן תלויות כלל ביצוע הפרויקט (עלויות עובד קבוע שלא ניתן לפטר) לא יובאו בחשבון כלל אומדן תזרימי המזומנים של תכנית ההשקעה.

**שאלה 70.91 – חישוב ענין לפריט שיש לו ערך גרט / שייר, במקרה כללי שבו קיים פחות מואץ**

חברה שוקלת לבצע פרויקט, לשם כך ערכה בדיקה מקדימה כדי לבדוק כיאותו, עלות של 150,000 ש"ח ששולמו ליועץ הכלכלי אשר מסר את הפרטים הבאים: לשם ביצוע הפרויקט, נדרש השקיע במחשבים MacBook עלות של 300,000 ש"ח. אורך החיים של המחשבים הוא 5 שנים (במשך הפרויקט) וערך השיר / הגרט שלהם הוא 90,000 ש"ח. הפרויקט צפוי להניב הכנסות בסך 200,000 ש"ח בשנה הראשונה, 300,000 ש"ח בשנה השנייה ו-400,000 ש"ח בשנה בכל אחת מהשנים 3-5.

המחשבים מופחתים לצרכי מס בשיטת הקו ה ישיר במשך שנתיים, כאשר שיעור המס 30% ומהיר ההון לאחר מס 10%.

**נדרש: מהו ענין הפרויקט?**

**פתרון:**

יש בשאלה זו מספר דגשים: ראשית, תקופת ההפחטה שנתיים, למרות שאורך החיים ארוך יותר, ועליו לשים לב לכך. שנית, לפריט יש גרט. זה אומר שכשנחשב הוצאות פחות – נוכה מההוצאות גרט זה, ורק אז נחלק בתקופת ההפחטה. שלישית, עצם קיומם גרט ממשמעו שהפריט צפוי להימכר בסיום הפרויקט בתמורה זהה.



בבואי לנתח תזרימי פרויקט בעולם עם מסים לשם חישוב ענין, אני אוהב להתחיל במיפוי עלויות שאינן רלוונטיות ועל כן, לא יזכו להתייחסות כלל במסגרת התחשב. בהקשר זה בולטת בא-רלוונטיותה עלות הבדיקה המקדימה. מדוע? משום שבבואהנו לבדוק את תזרימי המזומנים לשם קבלת החלטה, אנו מתעניינים אך ורק באותם תזרימיים שנייתן להשפיע עליהם, ככלمر – הכנסות והוצאות, או ערכיהם אחרים, שככל קיומם נובע מההחלטה על ביצוע הפרויקט בנקודת הזמן הנוכחית. במילים אחרות – עלות היסטורית לעולם לא תהווה חלק מתזרימי המזומנים של הפרויקט, היא בגדר עלות שקופה.

**עלויות ההיסטוריות שאינן ניתנות להשבה / ביטול לא תכלנה בתזרימי המזומנים.**

השלב הבא שאני אוהב לטפל בו – הוא סוגיית השקעה. עלות השקעה בזמן אפס, מגן המס (זיכוי המס) بعد הפחטה על פני השנים הרלוונטיות, ובמידת הצורך – מכירת השקעה בסיום הפרויקט.

נתחיל מהתיחסות להשקעה ומגini המס על הפחתתה :

$$-300,000 + \frac{300,000 - 90,000}{2} * 30\% * PVFA(10\%, 2)$$

מגן המס על הפחתה דורש חישוב הוצאות הפחתה לצורך מס תחילת. מדובר במחובר השני במשווהה. הוא מורכב מהעלות 300,000 בኒוכי השייר / הגרט לצורך מס (רק אם מונח זה נכלל מפורשות; שכן שווי הפריט בסיום חייו איננו עונה להגדלה). כל זה מחולק בתקופת הפחתה לצרכי מס, ומוכפל בשיעור המס.

תמורה מכירת ההשקעה ומיסוייה בתום הפרויקט :

בשאלה לא נאמר מפורשות שהפריט צפוי להימכר בתום הפרויקט. בנוסף, למורות שניתן מידע בדבר ערך הגרט / השייר לצרכי מס, אין מידע מפורש בדבר שווי השוק הצפוי לפריט בתום הפרויקט. יחד עם זאת, עליינו להניח שהbijדר נתונים סותרים, פריטי רכוש קבוע תמיד יימכרו בתום הפרויקט בהתאם לערך הספרים (העלות המופחתת שלהם) אם יש צו.

על פי נתוני השאלה – הפריט מופחת על פני שנתיים לצרכי מס. לכן, עלותה המופחתת בתום הפרויקט (לאחר 5 שנים) היא ערך הגרט / השייר בלבד :

	300,000	עלות הפריט ההיסטורית
$(300,000 - 90,000) / 2 * 2 =$	<u>210,000</u>	פחית נცבר לתום 5 שנים
	90,000	ערך ספרים = עלות מופחתת

בתום 5 שנים, אנו מניחים שהפריט נמכר בתמורה זו. כמו כן, הואיל והוא נמכר בתמורה זהה לערך הספרים, לא יכול להיווצר רווח / הפסד במכירה.

90,000	עלות הפריט לאחר סיום תקופת הפחתתו, אלא אם נאמר אחרת :
<u>(90,000)</u>	بنيוכי ערך הספרים = עלות מופחתת
0	רווח / הפסד ההון

**בקיצור:** אם פריט נמכר לאחר שתקופת הפחתתו לצורך מס תמה בתמורה לערך הספרים שלו (ברירת מחדל, אם אין נתון אחר על שוויו), אז התמורה זהה לגרט, ואין מס.

$$90,000 * (1 + 10\%)^{-5}$$

יש לבטא את המכירה והتوزרים בגין במנחי עניין, והואיל והמכירה היא תזרים חד פעמי, ההיוון לאחר הוא על ידי חלוקה ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה, או ע"י מכפלה באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית.

ערך הנוכחי של תזרימי הכנסה מהפרויקט (שנתיים, אחרי מס) :

נתון: "הפרויקט צפוי להניב הכנסות בסך 200,000 ש"ח בשנה הראשונה, 300,000 ש"ח בשנה השנייה ו-400,000 ש"ח בשנה השלישי ו-5. ש"ח לשנה בכל אחת מהשנתיים".

$$200,000 * (1 - 30%) * (1 + 10\%)^{-1} + 300,000 * (1 - 30%) * (1 + 10\%)^{-2} \\ + 400,000 * (1 - 30%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2}$$

מה עשינו כאן?

ה-200,000 הם סכום בודד בעוד שנה. נטרלנו ממנו מס והיוונו אותו כסכום בודד שנה אחרת. גם ה-400,000 הם סכום בודד בעוד שנה. נטרלנו גם מהם מס והיוונו אותם כסכום בודד שנה אחרת. ה-300,000 מייצגים סדרה שמוסיפה איברה ראשונה בזמן 3. היוונו אותה לאחר מס כסדרה, והואיל וההתיקשות היא כל סדרה, הגיעו לנקודת הזמן של "אחד אחרת" לפני תחילת הסדרה(Clomer) בזמן 2. לכן, את כל הביטוי עליינו להתאים על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית 10% בחזקה שלילית של 2.

אחד הכל האלמנטים לנוסחת NPV אחת (הכלב "שורה אחת", פיצול השורות רק מטעמי מקום):

לשם ביצוע הפרויקט, נדרש להשקיע במחשב Macbook בעלות של 300,000 ש"ח. אורך החיים של המחשבים הוא 5 שנים (כמשך הפרויקט) וערך השיריה/הגרט שלהם הוא 90,000 ש"ח. הפרויקט צפוי להניב הכנסות בסך 200,000 ש"ח בשנה הראשונה, 300,000 ש"ח בשנה השנייה ו-400,000 ש"ח לשנה בכל אחת מהשנתיים 3-5.

המחשבים מופחתים לצרכי מס בשיטת הקו ה ישיר במשך שנים, כאשר שיעור המס 30% ומהירות ההון לאחר מס 10%.

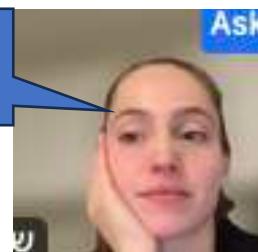
$$NPV = -300,000 + \frac{300,000 - 90,000}{2} * 30\% * PVFA(10\%, 2) + 90,000 * (1 + 10\%)^{-5} \\ 200,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 300,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-2} \\ + 400,000 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2}$$

והתוצאה:

$$NPV = 686,849$$

הואיל וה-NPV חיובי, כדאי לבצע את הפרויקט שזה עניינו.

אם כל התרגילים כל כך ארוכים בתחום זה?





לא. לצד התרגילים הבוחנים על עניין מלא, ישנים  
תרגילים הבוחנים על השפעת אירוע ספציפי

#### שאלה 70.92 – המשמעות של **הון חוזר** והשפעתו על העניין

אלון פרידמן שוקל לבצע פרויקט ממשמעותי בתחום חימום הנקייק. עניין הפרויקט הוא חיובי בסך 548,000 ש"ח. בבדיקה של התחשב שנוירך, התברר כי ההתייחסות לתזרימי הפרויקט לא כללה השקעה נדרשת **הון חוזר** בסכום של 120,000 ש"ח. מדובר בהשקעה במלאי קבוע, שתבוצע בתחילת הפרויקט ואשר תושב לחברת במלואה עם סיוםו בסכום זהה. משך הפרויקט 8 שנים, החברה כפופה למס בשיעור 30%, ומהיר ההון של החברה 10%.

נדרש: מהו ערך העניין המתוקן?

פתרון:

חחח... אין השפעה על העניין בכלל! החברה משלםת 120,000 ש"ח  
היום, ומקבלת את הכל חוזה בסוף. אז אין פה רוח, אין פה  
הפסד – תכליס לא קרה כלום אין השפעה על העניין!



במימונו יש השפעות זמן,نعم היקר. אם תפסיק לאכול נקייק תשים לב לכך  
שכאשר משלמים היום ומקבלים זהה את אותו סכום בעתיד – ההיוון  
יוביל לכך שמדובר בערך כולני שלילי. לכן חייבים להתייחס להשקעה  
בהתווה ולעדך הוכחי של התקבול החוזר בסוף

השאלה הראשונית העולה והמתבקשת, ולפעמים גם יש עליה מגוון שאלות והיגדים תיאורתיים היא: אם חברת צדקה להשקיע סכום, והיא מקבל אותו במלואו חוזה, בחלוף מספר שנים – האם זה רלוונטי בכלל לחישובי עניין וכדאיות, או שנכון יותר לומר שהואיל והשפעה הכוללת אפס, אפשר להתעלם מזה?

התשובה היא: כמובן שאסור להתעלם! הרי כל הרעיון במימון וניהול פיננסי הוא ההשפעה של עיתויי תזרימי המזומנים על הערך. ולכן, חייבים לבטא את השפעות התזרימיים ואת ההשלכות הנובעות על הערך בצורה של היון.

$$\Delta NPV(Working Capital) = -W + W * (1 + k)^{-t}$$

$$\Delta NPV(Working Capital) = -120,000 + 120,000 * (1 + 10\%)^{-8} = -64,019$$

שימוש לב שאין השפעת מס לאירועים מסוימים שבתפיסה הבסיסית, רשות המסים לא רואה כן רווח/הפסד חשבוני  
החייב במס, למורות שכמובן נוצר כאן הפסד כלכלי.

כאשר :

השינוי בעמ"ג הנובע מההשקעה בהון החוזר	$\Delta NPV$
סכום ההשקעה הנדרשת בהון החוזר, תזרים שלילי מיידי	$W$
מחיר ההון של החברה (הሪיבית להיוון)	$k$
פרק הזמן (בדרך כלל בשנים) שבסיוומו קיבל חזרה את ההון (החזו)	$t$

ענין שוחשב בהתעלם מההון החוזר  
 ההשפעה השלילית של הכללת ההון החוזר בחישוב  
 הענין הנכון / המתוקן

548,000	
<u>(64,019)</u>	
<b>483,981</b>	

תשוביי הסופית לשאלת

**שאלה 70.93 – חישוב שווי השקעה על בסיס תזרימי מזומנים שנותרו, לנקודת תמחור מסויימת**  
 חברת שוקלת לבצע פרויקט שדורש השקעה בצד בעלות של 200,000 ש"ח. אורך החיים של הצד 4 שנים, ולצרכיו מס הוא מופחת על פני שנתיים.

ההכנסות השנתיות הצפויות הן: 300,000 ש"ח בשנה הראשונה, 330,000 ש"ח בשנה השנייה, ובכל שנה עוקבת – ההכנסות יגדלו ב-15% ביחס לשנה קודמת. העלות השנתיות (לא כולל חת) הן קבועות בסך 80,000 ש"ח לשנה בגין הפרויקט. מחיר החון לאחר מס הוא 5% לשנה ושיעור המס החל על כל סוגי העסקאות בחברה הוא 20%.

נדרש:

- חשבו את ה-NPV.
- הניחו כתה כי בתחלת השנה ה-3 של המיזם הציעו לחברת רכוש אותו ממנה. מהו המחיר שהיא תדרוש בנקודת זמן זו?

### פתרונות סעיף א – חישוב NPV

הערכמים באלפי ש"ח:

$$NPV = -200 + \frac{200}{2} * 20\% * PVFA(5\%, 2) + 300 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-1} + 330 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-2} \\ + 330 * (1 + 15\%) * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-3} + 330 * (1 + 15\%)^2 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-4} \\ - 80 * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 4) = 627.77$$

מקרה צבאים:

**אדום: השקעה; ירוק: מגן המס על הפחת; כחול: תזרימי הכנסה לאחר מס; שחור: עלויות לאחר מס.**

### פתרונות סעיף ב – שווי המיזם בתחלת שנה 3

איך נחשב שווי פרויקט לאחר שכבר התחילו  
 אותו, לנקודת זמן עתידית כלשהי?



ראשית, אור, זו לא נקודת זמן עתידית. מבחינתי, כבר התחلت בפרויקט, וההוויה שלי לטובת השאלה הוא תחלת שנה 3: רגע לאחר תזרים המזומנים של השנה השנייה. במבט קדימה – כי כל פרויקט מתומח לכל נקודת זמן לפי התזרים שנותרו ממנו – אם אנו נמצאים בתום שנה שנייה, אנו זכאים (במידה ונמשיך להחזיק בפרויקט) לקבל את התזרים של השנים 3 ו-4. למעשה, המחיר המינימלי שנדרוש בגין המיזם בתחלת שנה 3 הוא הערך הנוכחי של הצד 3 וסוף 4 לנוכח זה.

**תזכורת:** בהתאם לנתוני השאלה, ההכנסות בשנה הראשונה הן 300, בשנה השנייה 330, בשנה השלישייה 330, ובשנה הרביעית 330. יותר מהשנה השלישייה. לכן, נティיחס לתזרים המהווים הבאים:

$$NPV = 330 * (1 + 15\%) * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-1} + 330 * (1 + 15\%)^2 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-2} \\ - 80 * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 2) = 486.821$$

פירוט :

$$330 * (1 + 15\%) * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-1}$$

זהו התזריםים הצפוי בתום שנה 3, מהוון לתום שנה 2 (מועד התמחור).

$$330 * (1 + 15\%)^2 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-2}$$

זהו התזריםים הצפוי בתום שנה 4, מהוון לתום שנה 2 (מועד התמחור).

$$-80 * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 2)$$

על פי הנתון, תזרימי ההוצאה הם קבועים בסך 80 לשנה. לכן במסגרת התמחיר, נתייחס גם לתזרימי ההוצאה בסך 80, אחרי מס, לתום כל אחת מהשנתיים.

הערה : מגני המס על הפקת הסתניהם במקורה זה בתום השנה ה-2. אם היו מגני מס על הפקת לאחר מועד התמחור, היינו מתייחסים גם אליהם.

אם תרצה שאמוך לך את הפרויקט לאחר  
שנתיים, תעניק לי פיצוי בהתאם לתזרימי  
שעליהם אוטר – תזרימי השנים 3 ו-4 (כי  
הפרויקט כולם ל-4 שנים)



**שאלה 70.94 – סוגיה: חילוץ הכנסה שנתית ברוטו שמצדיקה את הפרויקט בעולם עם מסים – לבית**  
 מציעים לחברת "שי פ" בע"מ לרכוש מחשב Mac Pro בעלות 50,000 ש"ח שאורך חייו 10 שנים אך הוא מופחת לצרכי מס על פני 5 שנים. הוצאות התפעול השנתית בגין המחשב הן 3,000 ש"ח. שיעור המס החל על החברה הוא 20% ומהירות ההון לאחר מס הוא 10%. מה צריכה להיות ההכנסה השנתית שתצדיק את הרכישה?

פתרון :

נקודות מינימום הכספיות, באופן כללי אצלנו, היא נקודת "ענין 0". לכן, נבנה על בסיס התזרימיים המזוהים את משווהת הענין, נציב בה את סכום ההכנסה המתבקש כנעלם, ונשווה אותה ל-0.

$$NPV = -50 + \frac{50}{5} * 20\% * PVFA(10\%, 5) - 3 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 10) + X * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 10) = 0$$

$$X = 11.629$$

כאשר :

**באדום:** עלות ההשקעה, בירוק – מגן המס על הפקחתה, בשחור – עלויות שוטפות, ובכחול – הכנסות שוטפות.  
 יש לשים לב שלמרות שההפקחת היא על פני 5 שנים, מבחןינו אלא אם נאמר אחרת, הפרויקט מתmeshך בהתאם לאורך החיים השימושיים של הנכס.

מסקנה: על מנת להצדיק את הפרויקט, נדרש כי ההכנסה השנתית הממוצעת (ברוטו, לפני מס) תהיה 11,629 ש"ח.

**שאלה 70.95 – חילוץ מחיר מינימלי ליחידת מוצר עם שינויי בהיקפי המכירות להצדקת פרויקט**

באפשרותך ללמוד 1,000 קורסים בשנה הקרויה (הניחו שמקבלים את התקובל בתום כל שנה), 2,000 בשנה לאחר מכן, ו-3,000 קורסים בכל אחת מהשנתיים, 3, 4 ו-5. לשם כך תצטרכי לרכוש מכונת נקניק לסטודנטים בהשקעה של 2,000,000 ש"ח. הוצאות המשתנה לקורס היא 500 ש"ח. אורך חיי מכונת הנקניק 5 שנים והוא מופחתת לפי שיטת הקו ה ישיר. בתום הפרויקט ניתן מכור את מכונת הנקניק בתמורה ל-200,000 ש"ח. מחיר ההון לאחר מס הוא 10% לשנה, שיעור מס החברות הוא 40% ושיעור מס רווחי ההון הוא 20%. נדרש: מהו המחיר המינימלי לקורס (בנחתה שהקורסים אחידים) אשר יצדיק את הפרויקט?

פתרונות:

חייב עוד קורסים לאמן את הנקניק



העריכים באלפי ש"ח:

הIllegalArgumentException: כאשר מזוהה השקעה, אני רוצה להתייחס לכל רכיביה טרם הדיוון ב יתר חלקו השאלה והנתונים. במסגרת זאת, אתייחס לעלות ההשקעה, למגוון המס על הפחתה, ולמכירת ההשקעה (במצביים שבהם יש מידע על שווייה בתום הפרויקט)



הנתונים באלפי ש"ח:

$$NPV = -2,000 + \frac{2,000}{5} * 40\% * PVFA(10\%, 5) + 200 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-5} \\ -1,000 * 0.5 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-1} - 2,000 * 0.5 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-2} - 3,000 * 0.5 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2} \\ +1,000 * X * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 2,000 * X * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-2} + 3,000 * X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2} \\ = 0$$

את כל הביטוי הזה יש להשוות ל-0, ולחלץ את ה-X המביטה את המחיר לקורס בודד.

**באדום: עלות ההשקעה באלפי ש"ח (נתונה כ-2,000,000 ש"ח), בירוק – מגני המס על הפחתה (תקופת הפחתה זהה לאורך החיים אם נתון סותר), בטורקיז – תמורה המכירה בתום הפרויקט נשוא ההשקעה (מכונת הנקניק) הינו 200,000 ש"ח ברוטו, והביטוי מייצג זאת לאחר מס [ראו הרחבה בעמוד הבא אם מעוניינים]. מה רואים שם? שמקבלים 200, אבל הוויל והפריט הופחתת למגררי (כל 5 שנים הפחתתו תמו) ואין לו ערך שייר / גרט לצורך מס, הוא אמרו להיות שווה 0. לכן, כל ה-200 שצופים לקבל בעדו הם לא רק תזירים – אלא גם רווח / הכנסה החייבות במס, ולכן הדרך להגעה לנטו במקרה כזה היא על ידי מכפלה ב-1 פחותת המס.**

בשחור – עלויות משתנות בכל שנה, בהתאם למספר הקורסים (0.5 חמש מאות 500 ש"ח באלפים).  
**בכחול – ההכנסות מהקורסים. המחיר לקורס הוא X.**

משיקולי זמן, לא פתרתי עם חילוץ ה-X, nisiyi להיעזר בצ'אט GPT לפתרון זוירז, לטענתו (לא בדוקתי) התוצאה 1,059.6 ש"ח לקורס. אתם מוזמנים לבדוק. בכל מקרה, הדגש הוא מבון הדין.

הרחבה לגבי מכירת המכונה בתום הפרויקט והשפעות המס בשאלת 70.95 :

כדי לחשב בצורה מדויקת את ההשפעה של מכירת רכוש קבוע בתום הפרויקט על תזרימי המזומנים והענין, יש לפעול בשלבים.

בשלב הראשון נחשב את העלות המופחתת של הפריט – עלותה הכוללת בגין הפקת הנცבר בגין. מדוע? משום שהמס במכירה מוחשב על רווח ההון, ושלב חיוני בחישוב רווח ההון הוא חישוב העלות המופחתת:

חישוב עלות מופחתת:

		<u>אלפי ש"ח</u>
עלות הפריט		2,000
פחית נცבר בחלוף 5 שנים	= <u>(2,000)</u>	
ערך הספרים (עלות מופחתת)		0

(פחית לשנה, כפול שנים שחלפו עד המכירה)  
 (שווי הפריט מנוקדת ראות רשות מסים)

רווח / הפסד ההון הוא ההפרש בין תמורת המכירה לבין ערך הספרים (עלות מופחתת) ערב המכירה:

		<u>אלפי ש"ח</u>
תמורה (נתון)		200
בניכוי ערך הספרים	(0)	
רווח ההון – הפרש חיובי		200

נתון ששיעור המס שחל על רווח ההון הוא 20%. לכן, אנחנו מקבלים 200 ברווחו, ובגלל שהרווח זהה לתמורה משלמים מס על ה-200 הללו (שיעור מס רווח ההון חל רק על עסקאות מכירה של רכוש קבוע):

$$200 - 20\% * 200 = 200 * (1 - 20\%)$$

מטרת ההסביר המורחב הזה היא לගרום לנו להבין שבמקרה הכללי (בשונה מהמקרה הפרטני הנדון כאן – שמדובר על פריט ללא גרט שנמכר לאחר סיום חייו) علينا להקפיד ולהשכ卜 "בצד" את רווח / הפסד ההון מהמכירה, ורק בגיןו לחשב את המס.

## תת נושא חדש בעולמה של ייח' 7 – סוגיות השוואת אופק

כאשר אנו רוצחים לבחור בין פרויקטים, אשר אורך חייהם שונה, יש להבדיל בין שני מצבים:

- א. מצב שבו לא ניתן לחזור על הפרויקט – מבצעים פעם אחת וזו: הדירוג יתבסס על NPV "רגיל".
- ב. לעומת זאת, במצב שבו ניתן לחזור על הפרויקט – לא ניתן לבצע השוואת בין ערכיו הענין של כל אחד מהפרויקטים בנפרד, באופן פשוטי. מדוע? משום שאם למשל יש פרויקט שנמשך 8 שנים והענין שלו יותר גבוה מענין פרויקט שנמשך 3 שנים, לא יוכל לדעת האם ביצוע חזור של הפרויקט המתחרה יוביל לענין מצפוני גבוה יותר, בהתחשב בפרק הזמן הכלול להשקעה. לשם השוואת אופק (השוואת זמנים) וחישוב ענין (NPV) לאופק מסוים, ורק על בסיסו (NPV לאחר השוואת זמנים, בהתחשב בחזרות האפשריות) לדרג את הפרויקטים. לאמנות הזו, של השוואת אופק, יש כמה גישות ביחידות הלימוד:

גישה 1 – השוואת אופק לאופק זהה.

גישה 2 – השוואת אופק לאינסוף.

גישה 3 – גישת שווה הערך השנתי (Equivalent Annual Cost – EAC), בסות – מחשבת עלות ממוצעת שנתית לפרויקט. שהיא הгиישה היחידה שאותה נציג, שכן אפשר לישם באמצעותה גם את גישות 1 ו-2.

**בקצרה: אם צריך לדרג בין פרויקטים בעלי אורך חיים שונה שנייתן לחזור עליהם, علينا להשתמש בгиישה מתאימה של "השוואת אופק" (ולא "סתם" חישוב NPV רגיל) ורק לאחר מכן להכريع.**

### שאלה 70.96 – השוואת אופק

במפעל נקי מוחמים נקייק ללקוחות ברחבי הארץ. בעלות החברה מכונת חימום נקייק ישנה שערכה בספרים אפס. המפעל שוקל את החלפת המכונה הישנה במכונה חדשה, ולפניהם 2 אפשרויות:

- אפשרות 1: לרכוש מכונת נקייק של זק"ש בעלות של 100,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המכונה היא 7,000 ש"ח שיישולמו בתום כל שנה, ואורך חייה 8 שנים.
- אפשרות 2: לרכוש מכונת נקייק של סלמור בעלות של 70,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המכונה היא 14,000 ש"ח ואורך חייה 10 שנים.

ידוע שההוצאות השנתיות הצפויות מחימום נקייק הן חיוביות וגובהות מאד. **במו כן, ידוע כי ניתן לרכוש מכונות דומות באותם תנאים גם בעתיד.**

ידוע ששיעור מס החברות הינו 40%, שמחיר ההון לאחר מס הוא 10%, שיטת הפקת הון ישר על פני 4 שנים בלבד, וכן יש להניח שבעוד 40 שנים החברה תוחסן ותפרק מרצון.

נדרש:

- א. מהו ענין הבעיות של כל חלופה לתקופת החיים של החברה? איזו חלופה תועדף, לאור חישוב זה?
- ב. לטובת נדרש זה, התעלמו מההנחה שההכנסה השנתית גבוהה וחובבית. מה צריכה להיות ההכנסה השנתית המינימלית ב-10 השנים הקרובות, אם ידוע ש每隔 אחת מ-30 השנים לאחר מכן, ההכנסה תהיה גבוהה פי 3, אם המטרה היא להוביל לכדיות הפרויקט?

**פתרונות סעיף א – ענ"נ ל-40 שנה לכל אחת מהחלופות:**

נתחיל מהמדובר הכללי – חישוב PV לכל חלופה בנפרד, למחוזור הפעלה אחד. כМОון שלא קיבל במצב כזה את התוצאות המלאות, אך בבחירה זו נקודת פטיחה טובה. שימו לב, אמם ההכנסות לא נתונות, אך נאמר שהן חיוביות וגובהות מאד. המשמעות היא שהענ"נ הסופי גם אם לא ידוע, הוא בהכרח חיובי, וכל המטרה היא למזער את ענ"נ העליות.

- **אפשרות 1 :** לרכוש מכונה נקי של זק"ש בעלות של 100,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המכונה היא 7,000 ש"ח שיישולמו בתום כל שנה, ואורך חייה 8 שנים. שיעור המס 40%, מחיר הון 10%, פחות על המכונה על פני 4 שנים

ענ"נ עליות למחוזור הפעלה אחד, של אפשרות 1 :

$$NPV_1 = -100,000 + \frac{100,000}{4} * 40\% * PVFA(10\%, 4) - 7,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 8) = -90,708$$

- **אפשרות 2 :** לרכוש מכונה נקי של סלמור בעלות של 70,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המכונה היא 14,000 ש"ח ואורך חייה 10 שנים. שיעור המס 40%, מחיר הון 10%, פחות על המכונה על פני 4 שנים

ענ"נ עליות למחוזור הפעלה אחד של אפשרות 2 :

$$NPV_2 = -70,000 + \frac{70,000}{4} * 40\% * PVFA(10\%, 4) - 14,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 10) = -99,425$$

לכוארה, בCHASE לא מתוחכמת, אפשרות 1 זולה יותר ולכוארה תועדף. בפועל, כМОון שלא. משום שאפשרות 1 אולי אכן זולה יותר, אבל גם משרותו אוטמי פחותה שנים. לכן, ככל שניתן לחוזור על הפרויקטם – עליינו לחשב עלות שנתית ממוצעת לכל פרויקט, כאשר הפרויקט שעולתו הממוצעת זולה יותר – יועדף באופן כלכלי.

בעת, נעבור לחישוב עלות שנתית ממוצעת של כל פרויקט – בגישה שנקראת "שווה ערך שנתית" – **EAC** או **Annual Cost**. החישוב הוא פשוט למדי: מחשבים את הפרסומת שבדין ה-**NPV** "הרגיל" בין ה-**PVFA** שמתאים לתקופת ההשקעה.

$$EAC = \frac{NPV}{PVFA(k, t)}$$

למשל: אני יודע שה-**NPV** של חלופה 1 (פרויקט זק"ש) חושב לעיל כ 90,708 ש"ח. בנוסף אני יודע שמחיר הון 10% ואורך חי הפרויקט 8 שנים. בהצבת ערכיהם אלו בנוסחה לעיל, יוכל לחשב את הูลות שנתית ממוצעת – שווה ערך שנתתי של פרויקט זק"ש :

$$EAC_1 = \frac{-90,708}{PVFA(10\%, 8)} = -17,003$$

וככל לחזור על התהילה גם לשם חישוב עלות שנתית ממוצעת של פרויקט 2 (סלמור). ה- $NPV$  שלו חושב לעיל כ- $-99,425$ , מחיר ההון 10% ואורך חיי הפרויקט 10 שנים. בהצבת ערכיים אלו נקבל:

$$EAC_2 = \frac{-99,425}{PVFA(10\%, 10)} = -16,180$$

לכן, כבר עכשו נוכל לומר בהיבט הכספיות:

העלות השנתית בחלוקת 2 זולה יותר, ולכן, למרות  
שעוני בסיסי שלה לתקופת ביצוע אחת גבוהה יותר –  
היא תועדת



במקרים רבים, לא מסתפקים רק בצורך בהכרעה בין הפרויקטים על בסיס עלות השנתית הממוצעת – אלא רוצחים לדעת מהו ה- $NPV$  הכלול של כל חלופה לפרק זמן ארוך – אצלו – פשוט אמרו כנתון שהחברה תתקיים במשך 40 שנה ולאחר מכן תפרק. במקרה כזה, אם נרצה (וזו היטה הדריש) לבדוק את עניין הפעלה של כל חלופה ל-40 שנה, התהילה יהיה מאד פשוט – בגלל שאנו כבר יודע את העלות השנתית בכל פרויקט, אוכל פשוט לכפול אותה ב- $PVFA$  הרלוונטי לפרק הזמן המתאים לתקופה לחישוב:

$$NPV_1(40\text{ years}) = EAC_1 * PVFA(10\%, 40) = -17,003 * 9.779 = -166,272$$

$$NPV_2(40\text{ years}) = EAC_2 * PVFA(10\%, 40) = -16,180 * 9.779 = -158,224$$

#### פתרונות סעיף ב – חילוץ סכום הכנסה שמצדיק את הפרויקט

השאלה דורשת ממוני לחשב את הכנסה השנתית המינימלית (x) אשר תצדיק את הפרויקט (כלומר טוביל ל- $NPV$  שערכו אפס), אם ידוע שההכנסה השנתית בכל אחת מ-30 השנים האחרונות גבוהה פי 3 מההכנסה השנתית ב-10 השנים הראשונות.

ראשית, הכנסה המינימלית להצדיק הפרויקט כМОון תדרש אם נבחר בבחירה חלופה 2. לפיכך, נדרש כי סך הכנסות נטו מהפרויקט, אחרי מס, תהinya לפחות  $158,224 * 3 = 474,672$  ש"ח (ערך חיובי שMOVIL לאיפוס הענ"נה שלילי שנוצר כתוצאה מהעלויות בחלוקת 2 – ראו לעיל).

על פי נתוני השאלה, צפויות הכנסות להמשך 40 שנה: 10 שנים ראשונות הכנסות קבועות, וב-30 השנים לאחר מכן, הכנסות גבוהות פי 3.

$$NPV_{costs} + NPV_{income} = 0$$

$$-158,224 + X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 10) + 3X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 30) * (1 + 10\%)^{-10} = 0$$

ומפה רק נותר לחץ את ה-X. תוצאת החילוץ האוטומטי (לא בדكتרי) היא  $15,460$  אבל העיקר הדרך ☺.

### שאלה 70.97 – השפעות פחת מואץ על כדיות פרויקטים וענ"ג

בחברת החיטט של יוסף פודורובסקי קיימת מכונה לחימום נקייק לעובדי ועובדות המשרד. הפחת השנתי בגין המכונה הוא 5,000 ש"ח. חברת החיטט של יוסף רוחנית מאד, מניבה תזרימי מזומנים חביבים על בסיס שנתי, והוא כפופה לשיעור מס של 20%.

מחיר החון של החברה הוא 10% לשנה.

ערך המכונה בספרים היום הוא 50,000 ש"ח.

נדרש: כמה כדי ליווז לשלם בתור נציג החברה, לכל היתר, בעבור ייעוץ מס שבאורתו תכיר רשות המסים בפחות כפול כל שנה?

פתרון :

פחת כפול = מדווחים לרשות המס על סכומים גבוהים יותר של פחת, אך ממשך פחתות שנים. מה היתרונו? ובכו, לא מקבלים יותר החזרי מס בסך הכל, אך מקבלים אותם מוקדם יותר. ולזמן יש ערך במילון.

כדי לחשב את הערך התוספתי הנובע מפחתת כפו, נבעוד "כפול": נחשב את ההשפעה של מגני המס הקיימים על הענ"ג, ולאחר מכן נחשב את ההשפעה הנובעת מהפחתת הכספי על הענ"ג. כל חישוב – בנפרד.

ההפרש בין הערכיהם הנתרמים כתוצאה מכך (בහנת פחת כפול ובהנת פחת רגיל בהתאם) יהיה ההפרש אשר על בסיסו נקבע את התשלומים המירבי ליעוץ.

טריק: תקופת ההפחיתה כאן (לפניהם הפחת המואץ) איננה נתונה, אך אם ידוע ערך הספרים של הפריט וכן ידועות הוצאות הפחת השנתיות בגיןו, אז הפרופורציה (היחס בין השנתיים) זהה תקופת ההפחיתה הנורטת. כאן – פריט של 50,000 החוצה פחת של 5,000 בשנה, נותרו לו עוד 10 שנים הפחתה, ולפיכך:

$$\Delta NPV_{RegularPhat} = 5,000 * 20\% * PVFA(10,10\%) = 6,145$$

$$\Delta NPV_{PhatMuaz} = 10,000 * 20\% * PVFA(5,10\%) = 7,582$$

וההטבה הנגזרת מהפחתת המואץ תהיה ההפרש:  $7,582 - 6,145 = 1,437$  אבל זו לא התשובה הסופית!

כשאנו משלמים ליעוץ סכום بعد ייעוץ המס שמאפשר הטבה זו, העלות של הייעוץ היא הוצאה המוכרת לצורך מס. לכן, קיבל בוגינה החזר מס. זה אומר שנסכים לשלם ליעוץ בברוטו יותר מ-1,437 ש"ח אם ההטבה שהוא מעניק לנו היא 1,437 ש"ח.

$$X * (1 - 20\%) = 1,437 \rightarrow X = 1,796$$

נסכים לשלם ליעוץ לכל היתר 1,796 ש"ח بعد הייעוץ. זו התשובה הסופית.

از מה למדנו שאלה זו :

1. שאם תקופת ההפחטה לא ידועה, אך ידוע ערך הספרים והוצאות הפחת – ניתן לחלץ את תקופת ההפחטה לפי היחס בין הערכיים.
2. שאם הוצאה מסוימת מובילה לגידול בעניין בערך מסוים, בהנחה שההוצאה מוכרת לצורך מס (ברירת מחדל) נסכים לשלם בעדיה יותר מאשר העלייה בעניין.

#### שאלה 70.98 – פחת בסכומים משתנים

טל שוקל להשקיע במכונה לחימום נקניק לעובדי המשרד :



אם ידוע שעלות המכונה לעיל היא 40,000 ש"ח, שכחוצהה ממנה החברה תוכל להניב תזרימי מזומנים שנתיים (הכנסות בניכוי הוצאות לא כולל פחת ומסים) בסך 20,000 ש"ח, וכן ידוע ששיעור המס החל על החברה הוא 20%, ומהיר ההון של החברה לאחר מס 10%, מה יהיה העניין של רכישת המכונה והשימוש בה 4 שנים אם ידוע ששיעור הפחת השנתי הוא כדלקמן :

שנה	שיעור פחת שנתי
1	10%
2	20%
3	30%
4	40%

#### פתרון שאלה 70.98

$$\begin{aligned}
 NPV = & -40,000 + 40,000 * 10\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-1} + 40,000 * 20\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + 40,000 * 30\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-3} + 40,000 * 40\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-4} \\
 & + 20,000 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 4) = \textcolor{yellow}{16,758}
 \end{aligned}$$

ה”לכורה טרייק” היחיד בשאלה זו טמון בכך שבקום לחשב את הוצאות הפחת על ידי היחס בין עלות השקעה לבין תקופת ההפחטה – בכל שנה חישבנו הוצאות הפחת מחדש על ידי מכפלה עלות המכונה בשיעור הפחת. מכפלה זו היא ההוצאה שכפלנו בשיעור המס, וכך קיבלנו את מגן המס השנתי על הפחת בכל שנה וธนา. הפחת השנתי, כמו תמיד, הוכפל בשיעור המס, והויל והוא משתנה – לא הווים כסדרה, אלא כסכומים בודדים.

### שאלה 70.99 – שיעור פחת משתנה ומכירת הפריט לפני סיום תקופת הפחתתו

בנתוני השאלה הקודמת, שנՀזור עליהם לשם נוחות:

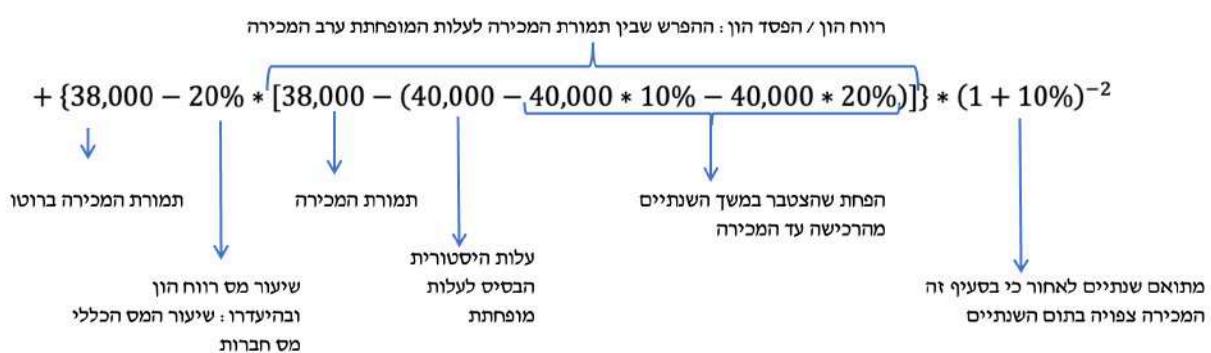
אם ידוע שעלות המכונה לעיל היא 40,000 ש"ח, ושותפה ממנה החברה תוכל להניב תזרימי מזומנים שנתיים (כנסות בניכוי הוצאות לא כולל פחת ומסים) בסך 20,000 ש"ח, וכן ידוע ששיעור המס החל על החברה הוא 20%, ומהירות ההון של החברה לאחר מס 10%, מהו הענין של רכישת המכונה והשימוש בה שנתיים, אם ידוע שבתום השנתיים ניתן יהיה למכור את המכונה בתמורה ל-38,000 ש"ח?

שנה	שיעור פחת שנתי
10%	1
20%	2
30%	3
40%	4

### פתרון שאלה 70.99

$$\begin{aligned}
 NPV = & -40,000 + 40,000 * 10\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-1} + 40,000 * 20\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + \{38,000 - 20\% * [38,000 - (40,000 - 40,000 * 10\% - 40,000 * 20\%)]\} * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + 20,000 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 2) = 19,578
 \end{aligned}$$

בעמוד הבא – הדיוון בשורה ה-2, שהוא הדיוון העיקרי בשאלה זו.



דיוון מפורט, רב-שלבי במכירת המכונה ומייסודה:

אם ידוע שעלות המכונה לעיל היא 40,000 ש"ח, ושותפה ממנה החברה תוכל להניב תזרימי מזומנים שנתיים (כנסות בניכוי הוצאות לא כולל פחת ומסים) בסך 20,000 ש"ח, וכן ידוע ששיעור המס החל על החברה הוא 20%, ומהירות ההון של החברה לאחר מס 10%, מהו הענין של רכישת המכונה והשימוש בה שנתיים, אם ידוע שבתום השנתיים ניתן יהיה למכור את המכונה בתמורה ל-38,000 ש"ח?

בשלב הראשון, נחשב את העלות המופחתת של המכונה – שנkirאת גם ערך ספרים  $I_B$ . ערך זה הוא ההפרש בין העלות ההיסטורית של המכונה לבין כל הוצאות הפקת שנרשמו מרכישתה עד מכירתה. המכירה של הפריט כאן היא אחרי שנתיים – כאשר הפקת בשנה הראשונה בשיעור 10% ובשנה השנייה 20% ובכך הכל 30%:

	40,000	עלות
$40,000 * 30\% =$	<u>(12,000)</u>	פחות נצבר
	28,000	ערך ספרים

השלב השני הוא ליחס את רווח / הפסד ההון אשר מוגדר בתווך ההפרש בין תמורה המכירה לבין ערך הספרים ערב המכירה כפי שחוושב.

תמורה המכירה $I_M$	38,000
ערך ספרים $I_B$	<u>(28,000)</u>
הפרש – ערך חיובי – רווח הון	10,000

תזרים המזומנים נטו במועד המכירה, מורכב מעשרה משני חלקים. החלק הראשון הוא תמורה המכירה ברוטו, שהוא 38,000. החלק השני הוא מס רווח ההון בסימן שלילי. אם אין תנאי מס רווח הון, יש להניח ששיעור המס הכללי החל על החברה תקף גם למסוי רווחים ממכירת רכוש קבוע:

$$38,000 - 20\% * 10,000$$

זהו למעשה תזרים המזומנים נטו בתום השנה ה-2, שמתחשב הן בתמורה המכירה ברוטו, והן במסוי שידיש מרשות המסים בגין מכירה זו.

## תת נושא בich' 7 – מדיניות החלפה אופטימלית

נניח שהקדי קנה מוכנית. היא מעוניינת לתקן מראש – מתי hei משתלים להחליף אותה? יש כאן דילמה ברמה העקרונית. מדוע? בשל הכוחות המנוגדים הקיימים כאשר מתקדים בעיתויי ההחלפה.

מצד אחד – כשלופות השנים – שווי המוכנית יורך;

מצד שני – עלויות תחזוקה – עלות עלות;

מצד שלישי – אם מחזיקים את המוכנית הרבה זמן – לא צריך לקנות חדשה בעלות גבוהה.

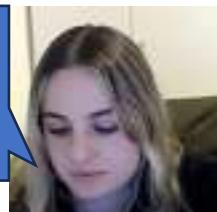
אז בשורה התחתונה – איך יודעים מתי להחליף?

הकושי כאן טמון בעובדה שבעצם, יש כאן לא מעט פרויקטים; כל אפשרות החלפה (בעוד שנה, ועוד שנתיים, ועוד 3) היא פרויקט נפרד. לא רק זה – אפשר גם מלבתachel להקנות מוכנית משומשת, וזה יוצר / פותח סוג פרויקטים נוספים.

הכוון הכללי לפתרון שນמchia בשאלת להן, יתייחס לכל אפשרות הרכישה והמכירה כפרויקטים נפרדים, ויחשב עלות שנתיים ממוצעת (שווה ערך שנתי) לכל אחת מהן. הูลות השנתית הנמוכה יותר – תנצה.

### שאלה 70.100 – מדיניות החלפה אופטימלית

הראש אומר מימון, אבל הלב אומר חיים  
נקניק



בחברה של טל מחזיקים במכנות חיים נקין 3 שנים לכל היותר. בחלוף תקופה זו, שרידי הכרבולות והפופיקים הנתקעים במכונה גורמים לתחלואה רבתית בקרב העובדים. להן הנזונים בדבר מוכנת חיים נקין חדשה, שעלה בתקציב 100,000 ש"ח:

שווי השוק של המוכנה בסוף השנה	עלויות תחזוקה בסוף השנה	סוף שנה
75,000	20,000	1
60,000	30,000	2
40,000	40,000	3

הנicho כי החברה פטורה ממיסים על הכנסה. מהי מדיניות החלפה האופטימלית (הוא אומר – האם לרכוש מכונת חיים נקין חדשה? בת שנה? בת שנתיים? וכמה זמן להחזיק בה)? הנicho לשם החישוב כי מחיר ההון של החברה הוא 10% לשנה.

פתרון:

ראשית, علينا לייצר את כל הקומבינציות האפשרות ללא יוצא מן הכלל:

טיאור	מ' קומבינציה

לקנות מוכנה חדשה ולהחזיק בה 3 שנים	1
לקנות מוכנה חדשה ולהחזיק בה שנתיים	2
לקנות מוכנה חדשה ולהחזיק בה שנה	3
רכישת מוכנה בת שנה והחזקתה שנתיים	4
רכישת מוכנה בת שנה והחזקתה שנה	5
רכישת מוכנה בת שנתיים והחזקתה שנה	6

בתור התחלה נחשב את ה- NPV לכל אפשרות :

$$NPV_1 = -100 + 40 * (1 + 10\%)^{-3} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-2} - 40 * (1 + 10\%)^{-3} = -142.975$$

$$NPV_2 = -100 + 60 * (1 + 10\%)^{-2} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-2} = -93.388$$

$$NPV_3 = -100 + 75 * (1 + 10\%)^{-1} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} = -50$$

$$NPV_4 = -75 + 40 * (1 + 10\%)^{-2} - 30 * (1 + 10\%)^{-1} - 40 * (1 + 10\%)^{-2} = -102.272$$

$$NPV_5 = -75 + 60 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-1} = -47.727$$

$$NPV_6 = -60 + 40 * (1 + 10\%)^{-1} - 40 * (1 + 10\%)^{-1} = -60$$

הויאל והאפשרויות הן בעלות אורך חיים שונה, ומדובר בمدיניות החלפה שנייתן לחזור עליה, הרי שקבלת החלטה נכונה שמתיחסת באורך החיים השונה של הפרויקטים, תדרוך שימוש בכלים של "השוואת אופק".  
במסגרת זאת, עליינו לבצע את הטיפול על בסיס גישת EAC אשר תחלק את הענין למחזור הפעלה של כל פרויקט ב-PVFA הרלוונטי למשך הפרויקט.

$$EAC_1 = \frac{-142.975}{PVFA(10\%, 3)} = -57.489$$

$$EAC_2 = \frac{-93.388}{PVFA(10\%, 2)} = -53.795$$

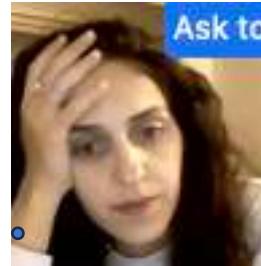
$$EAC_3 = \frac{-50}{PVFA(10\%, 1)} = -55$$

$$EAC_4 = \frac{-102.272}{PVFA(10\%, 2)} = -58.912$$

$$EAC_5 = \frac{-47.727}{PVFA(10\%, 1)} = -52.5$$

$$EAC_{60} = \frac{-60}{PVFA(10\%, 1)} = -66$$

אפשר להבחן בכך שההוצאות השנתית הנמוכה ביותר מתקבלת בחלוקת 5 : חלופה במסגרתה נרכוש מוכנת נקייה משומשת בת שנה, וחזיק בה שנה אחת בלבד.



סיכום ביןים – שלבי עבודה בגיבוש מדיניות החלפה אופטימלית:

1. נגידר את כל הנסיבות האפשרות בכפוף לאיולוצים. למשל, אם לא מחזיקים בפריט מעל כך וכך שנים, או אם החבורה רוכשת רק פרטיים חדשים וכיו"ב.
2. נחשב את ה-NPV לכל חלופה, למחוזר הפעלה אחד ויחיד של אותה החלפה.
3. נבצע השוואת אופק כדי למצוא את החלופה הטובה ביותר. אני אוהב (ורק את זה הריאתי) את גישת שווה הערך השנתי (EAC). לשם יישומה, חשוב להתייחס במכנה למשך החזקת הפריט בחלופה.
4. נבחר בפרויקט / בחלופה שבה ה-EAC הוא המשתלם ביותר (הזול ביותר במקרה של עלויות, או הגובה ביותר במקרה של הכנסות).
5. אם במקרה בשאלת זו שואלים "מהו הענין האינסופי בחלופה האופטימלית" כל מה שצריך לעשות זה להתבסס על ה-EAC שהוא עלות שנתית אופטימלית, ולחילקו במחיר החון (מדוע – כי זו הדרך לחשב ערך נוכחי לסדרה אינסופית).

#### סוגיות נוספות מרכזיות ביה' 7:

עסקאות החלפה "רגילות" חד פעמיות – מכונה חדשה שמחליפה מכונה ישנה (י"ב, י"ג)  
שאלות על השוואת אופק – כאשר חלק מהחלופות אינסופיות (82.3)  
החלטות ייצור או רכישה.  
סוגיות נוספות בהתאם לאופל / בחינות.

**את מפגש 6 עצרנו כאן.**

## מפגש 7 – קיצוב הון ויישומים נוספים יח' 7 – 14/5/2025

### ריענון וחיבור לאחרו:

יח' 7 עוסקת בקיצוב הון – במסגרתה علينا לחשב את תזרימי המזומנים הצפויים מתוכניות השקעה, בשים לב במסים, עלויות רלוונטיות בלבד ובהתייחס להשפעות הזמן וההיוון במסגרת ערך נוכחי. הצגנו את העבודה שאפשר לייצר מעין טבלה שתכלול את תזרימי המזומנים, אבל ברוב התרגילים – חישוב הכספיות שבדרך כלל מבוסס עניין בלבד – עיקר הדיוון מבוצע על בסיס נסחאות היון ארוכות, שככל איבר בהן מייצג התייחסות לרכיב תזרימי מסוימים בפרויקט. מעבר לייצוג עניין של תזרימים מורכבים כאלו, הצגנו גם את העיקרונות של השוואת אופק – מצב שבו קיימים פרויקטים בעלי ערך חיים שונה, והציגו כל שנקרא שווה הערך השנתי EAC לחישוב עלות שנתית ממזעט בפרויקט, מה שמשרת אותנו גם לדירוג פרויקטים במצבים שבהם יש חזרה עליהם, וגם לצורך חישוב עניין לתקופה ממושכת שכוללת חזרה כאמור.

והיום – המשך הדיוון עם **סוגיות נוספות במקרים שונים**.

### שאלה 70.10 – עסקת החלפה (לא עיתוי החלפה / מדיניות החלפה, בלי מסים)

בחברה של רביב מחזיקים במכונות חיים נקי ענקיות. ידוע כי מכונות הנקיוק הקיימות יכולות להמשיך ולפעול עוד 5 שנים ולהניב תקבול שנתי בסוף כל שנה בסך 20,000 ש"ח. לחילוף, ניתן להחליף את המכונות במכונות נקי ש כוללות פיצ'ר מיוחד שמוסיף פופיקים ממוחזרים לנקיוק, ובכך מגדילות את ההכנסות. עלות המכונות המחליפות (החדשנות) 30,000 ש"ח, והתקבולים הצפויים יהיו בסך 40,000 ש"ח (בסיס הכל), בתום כל שנה במשך 4 שנים, וערך השיר屎ן 0. בהנחה שניתן למוכר את הציוד הישן היום תמורת 5,000 ש"ח, מהו עניין ההחלפה בהנחה שמחיר ההון 10% לשנה.

פתרון :

הdeoון בעסקאות החלפה יכול להתבצע ב מגוון מקרים. עד לנקודת זו – הראיינו כבר מצב שבו קיימים נכס ישן, שעליות התחזקה שלו עלות כל שנה, ואז חשובים – מתי כדאי להחליף אותו. מקרה אחר היה מצב שבו חברת מעוניינת לדעת באופן כללי – כל כמה זמן להחליף נכסים (כל שנה / כל שנתיים / כל שלוש). ואז בודקים – מה עלות הפריט, בכמה ניתן למוכר אותו וכיוצא בזיה. המקרה שמצוג כאן הוא מקרה שונה וקטן יותר פשוט – שמדובר על החלפה של פריט כרגע, פעם אחת.

שאלות בנושא ייחידה 7 צריך להפריד בין תחומים: במיוחד חשוב לדעת האם יש בשאלת מידע הקשור לעיתוי החלפה (מתי בדיקת מחליפים פריט) או לגבי מדיניות החלפה (במצב שבו מגבשים מדיניות לפרט מסוים שנחזר עליה שוב ושוב) או לא.

במלים אחרות – אם אני מזזה דיוון המבוצע בהחלטת החלפה מיידית (לא כזו שבה אנחנו צריכים לקבוע את מועד החלפה, ולא כזו שתיעיצר פעילות שנזוזר עליה שוב ושוב), הרי שהדיוון שלנו הוא בסיסי, כזו שמתבסס על PVN לכל תזרימי החלפה, פעם אחת, ללא השוואת אפקט, ללא שווה ערך שנתי.

עיבוד מלול השאלה: כרגע יש בחברה מכונה ישנה עם יתרת חיים של 5 שנים והכנסות שנתיות 20,000. בהנחה שנitinן למכור את הציוד הישן היום תמורה 5,000 ש"ח אם המכונה תוחלף – עלות המכונות החדשות 30,000 ש"ח, הכנסות 40,000 לשנה, בתום כל שנה, 4 שנים וערך השיר שלhn 0. מהו עניין החלפה בהנחה שמחיר ההון 10% לשנה.

באופן כללי, צריך להבין: אם אני מחליף פריט, אני קונה פריט חדש – על כל המשתמע (כמו השקעה רגילה), אבל בנוסף – אני "ሞוטר" על הפריט הישן (לרבבות הכנסותיו וכל ערך אחר שהוא צפוי לנבוע ממנו). לכן, אני אוהב להתחיל בחישוב ערכי ההשקעה, התקבולים וכל מה הקשור לפריט החדש (המחליף) ורק לאחר מכן – לכלול את ההשפעות של הויתור על הפריט הישן, בסימנו הפוך.

$$NPV_{\text{חלפה}} = -30,000 + 40,000 * PVFA(10\%, 4) + 5,000 - 20,000 * PVFA(10\%, 5) = 25.982 > 0$$

הואיל והענין חיובי, עסקת החלפה כדאית.

הסבירים נוספים :

עלות השקעה במכונה החדשה / המחליפה.	-30,000
תזרים מזומנים ברוטו שנתי (אין כאן מסים ופחית) הנובע מהפעלת המכונה החדשה 4 שנים	40,000
מכירת המכונה הישנה היום בעקבות החלפה – כאן אין מסים, ולכן זו התמורה נטו היום	5,000
אובדן תזרימי המזומנים מהנקניק שיכולה להיות לחם המכונה הישנה, 5 שנים נוספות	-20,000

#### תרגיל 70.102 – עסקת החלפה (לא מדיניות החלפה / לא עיתוי החלפה) – עם מסים

חברת מיטלים וברעמים מחממת היום נקיים באמצעות מכונה ישנה שנרכשה לפני 6 שנים בעלות של 100,000 ש"ח.

תקופת ההפחיתה של המכונה הישנה 8 שנים, ואורך חייה השימושיים (תפעולית) ממועד רכישתה 10 שנים. למכונה אין ערך גרט / שיר לצורך מס, אך החברה צופה כי תוכל למכור אותה בתום חייה השימושיים בתמורה ל-20,000 ש"ח.

ההכנסה השנתית מהמכונה הישנה היא 40,000 ש"ח. החברה שוקלת להחליף מכונה ישנה זו במכונה חדשה. עלות המכונה החדשה 150,000 ש"ח ותקופת הפחתה 4 שנים. הערך הצפוי לה בתום חייה השימושיים הוא 20,000 ש"ח.

הכנסות מהמכונה החדשה תהינה בסך 180,000 ש"ח לשנה, והיא מופחתת ללא ערך גרט / שיר לצורך מס. בהנחה שהחברה כפופה למס חברות בשיעור 30%, למס רווחי הון בשיעור 20% ומהיר ההון לאחר מס 10%, וכי ניתן למכור את המכונה הישנה היום תמורה 30,000 ש"ח, מהו עניין החלפה?

פתרונות קצר :

$$\begin{aligned}
 NNPV_{Hahlafa} = & -150 + \frac{150}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4) + 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4} + 180 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4) \\
 & + 30 - 20\% * \left[ 30 - \left( 100 - \frac{100}{8} * 6 \right) \right] - \frac{100}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 2) \\
 & - [20 * (1 - 20\%)] * (1 + 10\%)^{-4} - 40 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4) = 218.8
 \end{aligned}$$

פתרונות :

שאלה זו דומה במהותה לקודמת ; אלא שນctrיך לכלול רכיבים תזרימיים רבים נוספים הנובעים מהשפעות המס.

בדומה לדוגמה הקודם, נתעלם בשלב ראשון מהרכיבים התזרימיים הקשורים למוכנה המוחלפת (לרבות מכירתה, אובדן תזרימיה, מגני המס בגיןה) ונתיחס למוכנה החדשה (המחליפה) בלבד. רק לאחר שנסים עמה, נעבור להשפעות התזרימיות של גրיטת / מכירת הפריט המוחלף על כל המשתמע.

נציין את הערכים באליי ש"ח לשם קיצור הכתיבה, וכן לאור ריבוי הרכיבים התזרימיים, נתאר ביתר פירוט כל אחד מהם בנפרד.

נתיחיל מטיפול במוכנה החדשה, רכיב רכיב :

תיחילה – עלות הרכישה הראשונית בזמן אפס :

–150

בנוסף, יש להתייחס למגני המס על ההפחיתה של המוכנה החדשה. היא מופחתת על פני 4 שנים, ושיעור המס : 30%

$$+ \frac{150}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4)$$

תמורה המכירה העתידית של המוכנה החדשה צפואה להיות 20 אלף ש"ח. היא צפואה להמכר רק לאחר סיום תקופת הפחתתה, בתום 4 שנים, מה שMOVEDIL לכך שהמיסוי בגיןה (שיעור מס רווח הון, 20%) הוא על כל תמורה המכירה :

$$+ 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4}$$

מפורט :

עלות מופחתת מוכנה שנמכרה :

$$\begin{array}{rcl}
 150 & & \text{עלות} \\
 150 / 4 * 4 = & \underline{(150)} & \text{פחית שנცבר ב-4 שנים} \\
 0 & & \text{ערך ספרים}
 \end{array}$$

20	תמורהת המכירה
<u>0</u>	ערך הספרים
20	רווח הון

בהתנון ששיעור מס רווח הון הוא 20%, התמורה נטו בגין מס תהיה :

$$20 - 20\% * 20 \rightarrow 20 * (1 - 20\%)$$

הכנסות שנתיות מהמכונה החדשה אחראים מס :

$$+180 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

מעבר לרכיבים התזרימיים הנובעים מהמכונה הישנה / שנגרטת / מוחלפת / נמכרת :

תחילה, המכונה הישנה נמכרת היום, וקיימת השפעת מס על מכירתה. התמורה ברוטו היא 30 (היום, במועד החלפה) והואיל והמכונה הישנה נמכרת טרם הסתיימה תקופת הפרחתה, עלינו לחשב בצורה מורכבת יותר את ההשפעות של מס רווח / הפסד ההון. עשינו זאת על ידי מכפלת שיעור מס רווח ההון 20% בהפרש שבין תמורהת המכירה 30 לבין הערות המופחתת ערב המכירה. הערות המופחתת היא לפי הערות ההיסטוריות 100 בגין פחות על בסיס 6 שנים שחלפו ממועד 8 :

$$+30 - 20\% * \left[ 30 - \left( 100 - \frac{100}{8} * 6 \right) \right]$$

אפשר גם להציג את החישוב הזה בצורה מפורשת יותר / בטור :

בשלב ראשון, נחשב את הערות המופחתת, לפי הערות המקורית בגין 6 שנים פחות שחלפו ממועד 8 :

עלות	30	
ב בגין פחת נצבר	$100 - 100/8 * 6 = \underline{(25)}$	
ערך ספרים	5	

תמורהת המכירה	25
ערך ספרים ערב מכירה	<u>(5)</u>
ההפרש – רווח הון	20

בסק הכל, התמורה נטו היא לפי התמורה ברוטו בגין שיעור מס רווח הון 20% כפול רווח ההון :

$$+30 - 20\% * 20$$

מעבר לכך, עצם מכירת המכונה הישנה היום מובילת לאובדן מגני המס שנוטרו על הפרחתה. כנתון בשאלת, המכונה מופחתת על פני 8 שנים בסך הכל מרכישתה, ועיטוי ההחלפה הוא בחלוף 6 שנים. המשמעות היא שאנו מונעים מעצמנו את היכולת להכיר בשנתיים של פחות ולכון חל אובדן מגני מס על הפרחת במשך שנתיים כאלו :

$$-\frac{100}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 2)$$

העובדת שמכררים את המכונה הישנה היום (ולכך התייחסנו לעיל) משמעה בהגדרה שאנו למעשה מבטלים את התזרים שחייב ציפוי מהמכירה בעתיד. המכירה בעתיד צפואה הייתה בתמורה ל-20, והיא הייתה אמורה להתבצע לאחר שהפריט סיים את תקופת הפחתתו. ולכן, בתמורה נטו מהמכירה שאותה מאבדים היא לפי 20 בኒקיי מס רווח הון מהוון 4 שנים לאחר מכן (כי המכירה של הישנה צפואה בלבד החלה בעוד 4 שנים) :

$$-20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4}$$

כמו כן, علينا להתייחס לאובדן הכנסות השנתיות מהמכונה הישנה, בסך 40 לשנה, אחרי מס משך כל אחת מ-4 שנים פעילותה התפעולית אשר נותרו :

$$-40 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

$$NPV = -150 + \frac{150}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4) + 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4} \\ + 180 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4) + 30 - 20\% * \left[ 30 - \left( 100 - \frac{100}{8} * 6 \right) \right] \\ - \frac{100}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 2) - 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4} - 40 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

ירין חישב ויצא לו:

$$NPV = 218.8 > 0$$

ולכן עסקת החלפה כדאית.

**שאלה 70.102.2 עסקת החלפה, עם מסים, גרט**  
 פוקי בע"מ שוקלת להחליף מכונה ישנה בחדשה.  
 המכונה הישנה נרכשה לפני 4 שנים תמורת 80 אלף ש"ח, והיא מופחתת על פני 5 שנים. ניתן למכור אותה היום תמורת 25 אלף ש"ח, או בסיום חייה השימושיים (בעוד 3 שנים) בתמורה ל-15 אלף ש"ח.  
 המכונה החדשה תעלה לחברה 100 אלף ש"ח. היא מופחתת על פני 3 שנים, ויש לה ערך שירט / גרט של 10 אלף ש"ח.  
 ההכנסות השנתיות מהמכונה הישנה הן 22 אלף ש"ח לשנה. ההכנסות השנתיות מהמכונה החדשה הן 50 אלף ש"ח לשנה.  
 מחיר ההון 10%, שיעור מס חברות 25%, שיעור מס רווחי הון 20%.  
 נדרש: מהו ערך הוחלפה?

**פתרון:**  
 השאלה זו דומה מאד לקודמתה, כדי להבהיר שוב את הסוגיה החשובה. הפתרון המוצג הוא מקוצר. אם מרכיב – עיינו בפרטים המלאים של הפתרון לשאלה קודמת, ואז חזרו לכאן.

$$\begin{aligned}
 NPV = -100 + \frac{100 - 10}{3} * 25\% * PVFA(10\%, 3) + [10 - 20\% * (10 - 10)] * (1 + 10\%)^{-3} \\
 + 50 * (1 - 25\%) * PVFA(10\%, 3) \\
 + 25 - 20\% * \left[ 25 - \left( 80 - \frac{80}{5} * 4 \right) \right] - \frac{80}{5} * 30\% * PVFA(10\%, 1) - 15 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-3} \\
 - 22 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 3)
 \end{aligned}$$

לא חישבתי את התוצאה אבל זה לא המין אישיו כרגע. צריך להכיר בעיקר את הרכיבים.

רק הערכה קטנה: מה זה  $(10 - 10) * 20\%$  ולמה רושמים את זה? אז האמת היא שלא חיברים לכלול את הביטוי הזה. מטרתו הייתה להמיחש מדויק כאשר פריט נמכר לאחר סיום תקופת הפחתתו בתמורה השווה לגרט שלו – אין מסים. כי כאשר הוא מסים את תקופת הפחתתו ערך הספרים תמיד זהה לגרט; ואם גם התמורה זהה – אין רווח.

### תרגיל 70.103 – פروف' עציו – חישוב ענ"ג מתמך לחולפות שונות, עם מסים

חברת פروف' עציו מעוניינת למצוא פתרון לביעית חימום הנקניק של עובדי המשרד. כלל העובדים לא יוצאים מרגע מוגען לחברה כשםארז נקיינות בתיקם, וכולם צריכים לחמם את כל הנקניק בחלון זמן צר בהפסקת הצליריים. בפני החברה עומדות שלוש אפשרויות להסדרת פעילות החימום:

מספר אפשרות	פרטים
1	לשכור מכונה ענקית לחימום נקייק, כזו שמאפשרת לחםם 5,000 נקיינות בו זמן. הסכם ההשכרה הוא לזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החד פעריים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם מושלים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. החולפה תזרוש עלות התקנה חד פערית בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החד פעריים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקת על פני 10 שנים – בשיטת הקו הישר. עלויות שוטפות נספנות שתיווצרנה בגין הולפה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה – הן בגין ניכוי כרבולות ומוקורים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.
2	לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד. התשלום לנקייק 500 ש"ח בתשלום מראש בתחלת כל שנה. החברה זוקה ל-5,000 מכונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בעלות קבועה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כהוצאה לצרכי מס.
3	לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחלת השנה עברו 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש בעלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהשקה לצרכי מס, הפקת בגין מחושב במשך 10 שנים לפי קו ישר.

נדרש:

- חשבו את העניין לכל הולפה. איזו אפשרות תעדיף החברה בהנחה שאינה משלמת מס ומהירות ההון שלה 10% לשנה?
- חזרו על חישוביכם בהנחה ששיעור המס 25% ומהירות ההון לאחר מס 7%. כמו כן, הניחו כי תשלומי המס הם בסוף כל שנה.

הנחה כללית:

בכל המקרים הנדרנים אין דיון בהכנסה כלל. למעשה, מדובר כאן בדרישה של החברה, כאשר הבחירה הנבונה תהיה כזו המזערת את עניין ההוצאות (ערך נוכחי של עלויות – שיהיה כמה שפחות משמעותית). כמו כן, הויאל וחולפה מס' 1 דנה בנסיבות של עלות שמשרתת את החברה לאינסוף, הנחה קבילה והגיונית היא שגמ את יתר החולפות נחשב בהנחה ביצוע לאינסוף.

טיפול בעולם ללא מסים:

מספר אפשרות	פרטים
1	לשכור מכונה ענקית לחימום נקייק, כזו שמאפשרת לחםם 5,000 נקיינות בו זמן. הסכם ההשכרה הוא לזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החד פעריים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם מושלים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. החולפה תזרוש עלות התקנה חד פערית בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החד פעריים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקת על פני 10 שנים –

	<p>בשיטת הקו ה ישיר. עלויות שוטפות נוספות שתיווצרנה בגין חלופה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה –</p> <p>הן בגין ניכויים כרבות ומקורים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.</p> <p>בעו"ם ללא מסים (באלפי ש"ח) :</p> $NPV = -500 - 100 - \frac{20}{10\%} = -800$
2	<p>לשכור מכונת אישיות לחימום נקייק לכל עובד. התשלום למכונה אישית לחימום נקייק 500 ש"ח בתשלום מראש בתחלת כל שנה. החברה זוקה ל- 5,000 מכונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בעלות קבועה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כהוצאה לצרכי מס.</p> <p>בעו"ם ללא מסים (באלפי ש"ח – لكن 500 ש"ח סומנו כ- 0.5 אלפי ש"ח) :</p> $NPV = \frac{1}{10\%} * 5,000 * (1 + 10\%) - 0.5 * 5,000 = -27,500$
3	<p>לשכור מכונת אישיות לחימום נקייק לכל עובד בעסקה ל- 10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחלת השנה עבורה 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש בעלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהוצאה לצרכי מס, הפקת בגין מחושב במשך 10 שנים לפי קו ישר.</p> <p>בעו"ם ללא מסים :</p> <p>הואיל ומדובר בפרויקט לתקופה קבועה נרצה לחשב תחילתה את הוצאות השנתית הממוצעת, ואז לתרגם אותה לאייסוף על ידי חלוקה במחיר ההון. בעצם, משתמשים כאן בגישה EAC שווה הערך השנתי.</p> <p>וזה הוצאות השנתית הממוצעת, נהו"ן אותה לאייסוף ונקבל :</p> $EAC = \frac{-400}{PVFA(10\%, 10)} = -65.094$ $NPV = \frac{-65.094}{10\%} = -650.94$

מסקנה : בעו"ם ללא מסים, החלופה שתועד היא חלופה 3, שכן לרווחה שהענין שלה שלילי – הוא הכי פחות שלילי מכולם ; וכן אם החברה דורשת את ביצוע הפעולות, החלופה הזולה מבין האפשרויות "תנצה".

טיפול בעו"ם עם מסים – שיעור מס 25%, מסים בסוף שנה, מחיר הון 7% :

מספר אפשרויות	פרטים
1	<p>לשכור מכונה ענקית לחימום נקייק, כזו שמאפשרת לחםם 5,000 נקייקות בו זמן. הסכם ההשכרה הוא לזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החודש פעמיים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם משולמים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. החלופה תדרוש עלות התקנה חד פעמית בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החודש פעמיים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקתה על פני 10 שנים –</p> <p>בשיטת הקו ה ישיר. עלויות שוטפות נוספות שתיווצרנה בגין חלופה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה –</p> <p>הן בגין ניכויים כרבות ומקורים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.</p>

	<p>בعالם עם מסים (באלפי ש"ח) :</p> $NPV = -500 - 100 + \frac{100}{10} * 25\% * PVFA(7\%, 10) - \frac{20 * (1 - 25\%)}{7\%} = -796.726$ <p>הסבירים נוספים : העלות הראשונית לא מופחתת – لكن מופיעה בסימן שלילי בלבד, העלות הנוספת בגין התקנה מושלמת מיד אך מזוכה במוגני מס על הפקת שחושבו בהתאם. פרט לכך, הויאל והעלות השנתיות בסך 20 אלף ש"ח הן בתום כל שנה לנצח ("זמן בלתי מוגבל"), לאחר שיכלנו אותן ב-1- פחות המיס חילקנו במחיר ההון (יישום של נוסחת ערך נוכחי של סדרה אינסופית שמתבססת על <math>(PMT/7\%)</math>).</p>
2	<p>לשchor מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד. התשלום למוכונה אישית לחימום נקייק 500 ש"ח בתשלום מראש בתחילת כל שנה. החברה זוקקה ל-5,000 מכונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בעלות קבועה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כהוצאה לצרכי מס.</p> <p>בعالם עם מסים (באלפי ש"ח – لكن 500 ש"ח סומנו כ-0.5 אלף ש"ח) :</p> $NPV = -0.5 * 5,000 * \frac{1}{7\%} * (1 + 7\%) + 0.5 * 5,000 * 25\% * \frac{1}{7\%} = -29,285.714$ <p>הסבירים : כפלנו את העלות למוכונה באלפי ש"ח שהיא 0.5 במספר המכונות 5,000. הויאל וחלופה 1 היא זמן בלתי מוגבל, וחישבנו את עליותיה, גם עלויות חלופה זו צריכות להיות מחושבות לאינסוף. לכן, חילקנו את העלות הכוללת במחיר ההון 7% (<math>7\% / 7\%</math>), אבל :</p> <p>אין מכפלה ב-1 פחות המיס : מדוע? משום שההוצאה היא בתחילת כל שנה, והמיס בתום כל שנה. לפיכך, המס התייחסנו בנפרד.</p> <p>מדוע כפלנו ב-1 ועוד 7%? אם הסדרה החלה בזמן 0 (תחילת תקופת החישוב הסדרתי) מקפייז אחת אחרת זמן 1 – וכך לתקן זמן 0 כופלים ב-1 ועוד הריבית.</p> <p>לאחר מכן התייחסנו להשפעות המיס : סדרת תזרימי המיס כנתון היא בסוף כל שנה. הטבת המיס היא לפי סכום ההוצאה 0.5 כפול 5,000, כפול שיעור המיס שהוא 25%. זה לנצח, שכן חילקנו בריבית. הויאל ותזרימי המיס הם בסוף כל שנה (לראשונה בזמן 1), הקפיצה האוטומטית אחת אחרת מובילה בדיק זמן 0 ללא צורך בהתאם.</p>
3	<p>לשchor מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחילת השנה עבורי 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש בעלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהשקעה לצרכי מס, הפקת בגין מחושב במשך 10 שנים לפי קו ישר.</p> <p>בعالם עם מסים :</p> <p>וואיאל ומדובר בפרויקט לתקופה קבועה (בשונה מפרויקט 1 שהוא לאינסוף, ובשונה מפרויקט 2 שכולל עלויות שנתיות קבועות) נרצה לחשב תחילת את העלות השנתית הממוצעת, ואז לתרגם אותה לאינסוף על ידי חלוקה במחיר ההון. בעצם, משתמשים כאן בגישה EAC שווה הערך השנתי.</p> $NPV_{10 \text{ years}} = -400 + \frac{400}{10} * 25\% * PVFA(7\%, 10) = -329.76$

הדרך למצע עלות לתקופה ארוכה מוגבלת לעלות שנתית, עוברת דרך דרך הביטוי "שוויון ערך שנתית". הטכnika היא לחלק את ה- $NPV$  לתקופת הפרויקט (מנוחה) ב- $PVFA$  המתאים למשך הפרויקט:

$$EAC = \frac{-329.76}{PVFA(7\%, 10)} = -46.947$$

זהו הערך השנתי הממוצע, נהוון אותה לאינסוף ונקבל:

$$NPV = \frac{-46.947}{7\%} = -670.68$$

במקרה פרטי זה, הטלת המס או הידריה לא הובילו לשינוי העדפת חלופה 3 שעודנה הוצאה נוספת מבין המוצעות.

הפסקה, שי



**תרגיל 70.104 – השוואת אופק עם עיתוי החלפה אופטימלית, בהתקיים חלופה קיימת מתיקרת**  
בחברת "אלנים ופרידמנס" המנכ"ל הגדול אילן מחמס לעצמו נKENIK MDI يوم במכונה חבויה שעברו עליה ימים טוביים יותר. ערכה בספרים ושוק של מכונת חיים הנKENIK ZNICH (אפס). הוצאות התחזוקה של מכונת הנKENIK חולכות וגדלות במהלך השנים: הן צפויות להיות בסך 5,000 ש"ח בתום השנה הקרובה, והן תנדרנה בשיעור של 5% לשנה.

אילן שוקל להחליף את מכונת הנKENIK הישנה, במכונה חדשה – ולפניו שתי אפשרויות:  
חלופה 1: מכונת חיים נKENIK תוצרת זקש שעולתה 60,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 5,000 ש"ח ואורך חייה 5 שנים.

חלופה 2: מכונת חיים נKENIK תוצרת סלמור שעולתה 80,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 6,000 ש"ח ואורך חייה 7 שנים.  
בזותה חיים הנKENIK היומי מסוגל המנכ"ל לפעול בעבודתו בעילות מירבית, כך שבסך הכל, העניין מפעילותו חיובי.

כמו כן, הניחו כי ניתן לרכוש מכונות מודגמ 1 או 2 – החדשות – באותוים תנאים גם בעתיד.  
נתונים נוספים:

שיעור מס החברות הוא 40%, מחיר ההון לאחר מס: 10%. שיטת הפקת: קו ישר, כאשר הפקת הוא בהתאם לאורך חייו הנכס.

נדרש:

- א. איזו מכונת חיים נKENIK כדאי לרכוש?
- ב. מתי מומלץ יהא לרכוש את המכונה החדשה (כלומר – זהו את עיתוי החלפה האופטימלי המתchap בעליות התחזוקה של הקאים, שהולכות וגדלות).
- ג. הניחו לטובת סעיף זה שהחלפה כדאית לאחר 4 שנים. בהנחה זו ללא תלות בתוצאות סעיף קודם, מהי עלות ההחזקה של מכונות הנKENIK – מעתה ועד עולם הליליה?

פתרונות:

#### סעיף א – איזו מכונה כדאי לרכוש

למרות שעקרונית ובנתוני השאלה, ניתן להמשיך להשתמש במכונה הישנה עד אינסוף, הרי שהעובדת שעליות התחזוקה שלה עלות משנה לשנה "ללא גבול" מובילה למסקנה לפיה בהכרח, מתייחסו, החלפה תהיה כדאית. מטרת סעיף זה היא לומר – במידה והחלפה כדאית בנסיבות מסוימת, איזו חלופה תועדף – או במלים אחרות: בהינתן אורך חיים שונה של החלופות השונות ואפשריות החזרה על הפרויקטים (ניתן לרכוש מכונות זהות בעליות זהות בעתיד) נחשב את שווה הערך השנתי EAC בכל חלופה – והזולה יותר (זו שווה הערך השנתי שלה הוא גבוה יותר / פחות שלילי) תועדף.

חלופה 1: מכונת חיים נKENIK תוצרת זקש שעולתה 60,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 5,000 ש"ח ואורך חייה 5 שנים. שיעור מס החברות הוא 40%, מחיר ההון לאחר מס: 10%. הפקת הוא בהתאם לאורך חייו הנכס.

чисוב ה- $NPV$  למחזור הפעלה אחד – בהתייחס להשקעה, מגני המש על הפרותה וועלויות תחזוקה:

$$NPV = -60,000 + \frac{60,000}{5} * 40\% * PVFA(10\%, 5) - 5,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 5) = -53,177$$

חילוץ שווה הערך השנתי על בסיס הפרופורציה בין ה- $PVFA$  ל- $NPV$  של משך הפרויקט:

$$EAC_{Zaksh} = \frac{-53,177}{PVFA(10\%, 5)} = -14,028$$

**حلופה 2:** מכונת חימום נקייק תוצרת סלמור שעולותה 80,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 6,000 ש"ח ואורך חייה 7 שנים.

$$NPV = -80,000 + \frac{80,000}{7} * 40\% * PVFA(10\%, 7) - 6,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 7) = -75,271$$

$$EAC_{Selmor} = \frac{-75,271}{PVFA(10\%, 7)} = -15,461$$

התשובה הסופית לסעיף א: יש להעדיף רכישת זקס על פני רכישת סלמור, העלות התקופתיות נמוכות יותר.



**פתרונות סעיף ב – מתי בדוק תבוצע החלפת המכונה?**

אנו יודעים שעלות המכונה החדשה / המחליפה הזולה מבין השתיים היא 14,028 ש"ח לשנה (עלות ממוצעת קבועה).

בשאלה הנוכחית, ציינו גם שכבר היום יש לי מכונה ישנה, תקינה, ופועלת – "בחיננס" – עם טויסט אחד בעיליה-המכונה הישנה (בהתה יונה) דורשת עלויות תחזוקה שתלכנה ותגדלנה ככל שתזדקן - העלות היא 5,000 בתום השנה הנוכחית (לפנוי התחשבות בהשפעות מס) והיא תגדל כנתון ב-5% לשנה.

המשמעות היא שניתן לבטא גם גרפית ובעיקר מתמטית את העלות השנתית של המכונה הקיימת כפונקציה של חלוף הזמן כדלקמן (בערך מוחלט) :

$$\text{Annual CF Old Machine} = 5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 5\%)^{t-1}$$

כאשר :

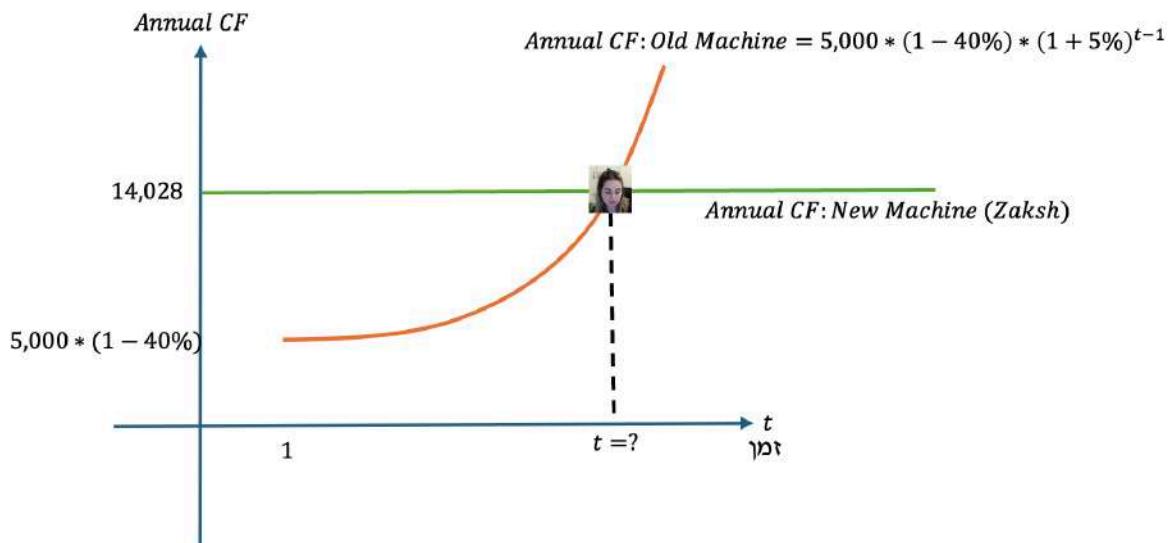
העלות בתום השנה הקרובה בערך מוחלט. 5,000

שיעור המס (מדובר בהוצאה מוכרת, לכן העלות נטו היא בנטרול רכיב המס). 40%

העליה השנתית בעלות. 5%

ערך t השנה (מידת הזמן, time) (time)

הסיבה לצורך ב- $t=1$  היא שהעלות הנותנה בסך 5,000 היא כבר בתום השנה הקרובה – כלומר בזמן 1. לכן, המטרה היא שהפקטור יופיע עבור  $t=1$  ולמעשה הגידול בעלות יתחיל רק מזמן 2.



הפתרון ידרוש ממי להשוות בין העלות השנתית הקבועה בחלוקת זקס לבין הביטוי המיצג עלות שנתית בחלוקת תחזוקה :

$$14,028 = 5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 5\%)^{t-1}$$

$$14,028 = 3,000 * (1 + 5\%)^{t-1}$$

נתחיל לפשט – אחלק את שני האגפים ב-3,000 :

$$\frac{14,028}{3,000} = (1 + 5\%)^{t-1}$$

$$4.676 = 1.05^{t-1}$$

נוציה מ-1 לשני האגפים :

$$\ln 4.676 = \ln 1.05^{t-1}$$

לפי חוקי לוגריתמים :

$$\ln 4.676 = (t - 1) * \ln 1.05$$

זהה כל הסיפור :

$$\frac{\ln 4.676}{\ln 1.05} = t - 1 \rightarrow t = \frac{\ln 4.676}{\ln 1.05} + 1 = 32.61 \approx 33$$

המשמעות : רק בעוד כ-33 שנים כדאי להחליף לפריט החדש (לזקח).

סעיף ג: הניחו לטובת סעיף זה שההחלפה כדאית לאחר 4 שנים. בהנחה זו ולא תלות בתוצאות סעיף קודם, מהי עלות החזקה של מכונות הנקניק – מעתה ועד עולם הללויה? מחיר ההוו 10%, שיעור המיס 40%.

לפי נתוני השאלה, עלינו לחשב את ה-NPV של עליות החימום לאינסוף, בהנחה שב-4 השנים הראשונות ממשיכים להחזיק את המכונה הישנה, ועל כן התזרימיים הם בהתאם לעליותnia ההולכות וגדלות, ולאחר מכן מחליפים את המכונה מחדש, בעלות שנתית שווה למשהו הערך השנתי של מכונת הזקש החדשה :

נתחיל מהbijוטי המיצג את הulot השנתית אחרי מסים לכל אחת מ-4 השנים הקרובות בגין המכונה הישנה :

$$\begin{aligned} NPV = & -5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-1} \\ & -5,000 * (1 + 5\%) * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-2} \\ & -5,000 * (1 + 5\%)^2 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-3} \\ & -5,000 * (1 + 5\%)^3 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-4} \end{aligned}$$

מוסיף את הulot השנתית נטו (במונחי שווה ערך שנתי) מזמן 5 לאינסוף בגין המכונה החדשה. עלות זו תתרוגם לזמן 0 על ידי התאמה של 4 תקופות נוספות לאחר, הוואיל וסדרה שמתחלת בזמן 5 קופצת אחורנית ל-4 ולכן עלינו לבצע התאמות נוספות :

$$-14,028 * \frac{1}{10\%} * (1 + 10\%)^{-4}$$

בכך הכל, סיכום הביטויים לעיל יחד עם ביטוי הערך הנוכחי האינסופי מזמן 5 ואילך מניב את התוצאה :

$$NPV = -106,001$$

### שאלה 70.105 – חילוץ שיעור המס המוביל לכדאיות פרויקט

בחברת "משה" שוקלים להשקיע במכונה לקרור נקניק. עלות המכונה 100,000 ש"ח והיא מופחתת בשיטת הקו הישר על פני 10 שנים. למכונה מוגדר ערך שירט / גרט של 10,000 ש"ח. החברה חייבת במס. מחיר ההון של החברה הוא 8% לשנה. המכונה צפופה להניב הכנסות שנתיות בסכום של 20,000 ש"ח.

נדרש: מהו שיעור המס המרבי שעדיין יצדיק את הפרויקט?

הצדקה פרויקט מתקיימת בהגדלה לכל הפחות (רף מינימלי לכדאיות) כאשר ענין הפרויקט 0. לכן, בניית את משווהת הענין, נקווה מאד שהנעלם היחידי הוא זה שורצים, ונחלץ אותו על בסיס השוואת הענין ל-0.

$$NPV = -100,000 + \frac{100,000 - 10,000}{10} * t * PVFA(8\%, 10) + 10,000 * (1 + 8\%)^{-10} + 20,000 * (1 - t) * PVFA(8\%, 10) = 0 \rightarrow t = 0.526 = 52.6\%$$

מסקנה: שיעור המס המרבי שצדיק את הפרויקט הוא 52.6%. קרי, אם שיעור המס גבוה מכך, הפרויקט לא כדאי.

הסבירים נוספים :

$$\frac{\text{הוצאות השקעה} - 100,000}{\frac{100,000 - 10,000}{10} t} = \frac{\text{שיעור המס}}{\text{תמורה המכירה מהוונת זמן } 0 \text{ מזמן } 10 \text{ מועד המכירה} 10,000 * (1 + 8\%)^{-10}}$$

מדוע אין מסים במכירת הפריט (בעיקר – מס רווח הון)? התשובה היא שבהתחרות בሪית מחדל ובהיעדר נתונים סטטיסטיים, פריט נמכר בתום פרויקט בתמורה לערך הספרים שלו (הוצאות מופחתת) באותו מועד. במקרה זה, תמורה המכירה תהיה זהה לגרט, כי הפריט בעל גרט חיובי וסימן תקופת הופחתתו. **בכל מקרה, המשמעות היא שאין מסים – כי אם פריט אכן נמכר בתמורה לערך הספרים שלו (бриית מוחלט, לא מחייב שכן יהיה בכל שאלה) אז אין הפרש בין תמורה המכירה לבין ערך הספרים ואין מס.**

הרחבת טכנית – כיצד טופלה המכירה, מה הנחות היסוד, מדוע אין מסים?  
נתונה מכונה שאין שום מידע לגבי שווי השוק שלה או מכירתה הצפואה בסיום הפרויקט. יחד עם זאת, למכונה יש ערך גרט מוגדר בסך 10,000 ש"ח. המשמעות היא שעלותה המופחתת של המכונה בסיום הפרויקט היא :

	עלות
$\frac{100,000 - 10,000}{10} * 10 = \underline{\underline{(90,000)}}$	בנייה פחת נצבר
10,000	ערך ספרים

בහיעדר מידע מפורש על תמורה המכירה, ערך הספרים הוא גם תמורה המכירה. ובמצב כזה, רווח / הפסד הווון :

תמורה = ערך ספרים	10,000
בנייה ערך ספרים	<u>(10,000)</u>
רווח / הפסד הווון	0

והמשמעות : אם פריט נמכר בתמורה לערך הספרים שלו (ומקרה פרטי נפוץ הוא מכירת פריט בתמורה זההה לגרט שלו בסיום תקופת הפחתתו) אין מסים – התמורה ברוטו (שהיא הגרט) היא גם התמורה נטו.

**סוגיות למפגש הבא:**

- החלטות ייצור או רכישה
- מענקים למימון חלקי של השקעות בפרויקט (כולל השפעות המס)
- הלוואות מסובסדות (חריג למימון פרויקטיטים)

#### **סוגיה ב' 7 – עידוד דאיות השקעות באמצעותים ממשלתיים – מענקים**

משמעותה לעשותות לחופוץ בכך לחברות תבצענה פרויקטים בעלי עדיפות לאומי, בתחוםים מסוימים, באזוריים מסוימים וכיוצא בהז.

אם הפרויקטים עצמים אינם כדאים, ממשלה יכולה לעודד חברת לבצע את הפרויקט על בסיס מענק השקעה. מענק שכזה יתקבל בידי החברה כתוצרים מזומנים חיובי, ובכך יקטין את ההשקעה הנדרשת לטובת הפרויקט. לצד זאת, העבודה שמדובר במענק למימון השקעה ספציפית – ישפייע גם על מגני המס על הפחתתה, ולעתים גם על מס רווח / הפסד הווון.

לכן, כאשר אנו מתיחסים לمعנקים ממשלתיים והשפעתם על העניין – علينا להביאו לידי ביטוי לא רק את השפעתם הראשונית החיובית – אלא גם את השפעות המס העוקבות.

#### **שאלה 70.105 – מענק השקעה, יישום בסיסי (גוזל המענק נתון)**

חברת "ירינים ועמרים" בע"מ שוקלת לרכוש מענקה ענקית לחימום נקייה. עלות המכונה 400,000 ש"ח והיא צפואה לשרת את החברה במשך 5 שנים. תקופת הפחתתה של המכונה לצורכי מס זהה לאורך חייה הכלכליים. המכונה צפואה להניב הכנסה שנתית נקייה (לפניהם מסים ופחית) בסכום של 110,000 ש"ח.

שיעור המס אליו כפופה החברה הנו 30%, ומהירות ההווון לאחר מס הנו 15% לשנה.

נדרש :

- א. מהו עניין הפרויקט?
- ב. הינו כעת כי הממשלה מעניקה לחברת מענק למימון 75% מעלות המכונה. חשבו מחדש את העניין בהתחשב במענק.

פתרונות :

#### סעיף א – חישוב NPV ללא מענק

$$NPV = -400 + \frac{400}{5} * 30\% * PVFA(15\%, 5) + 110 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 5) = -61.43$$

לאור העניין השלילי, הפרויקט לא כדאי.

#### סעיף ב – חישוב NPV בהתחשב במענק

הדרך הארוכה והמסובלת בהתחשב במענק – חישוב מחדש של כל העניין בשים לב לסקום ההשקעה העדכני, שהוא למעשה סכום ההשקעה הנוכחי בתנאי בNICIO המענק (גם לצרכי פחת) :

$$NPV_{WM} = -400 + 0.75 * 400 + \frac{400 - 0.75 * 400}{5} * 30\% * PVFA(15\%, 5) + 110 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 5) = 178.23$$

הדרך הקצרה יותר – רק השפעה על העניין (השינוי בעניין) הנובע מהמענק :

$$\Delta NPV_M = +0.75 * 400 - \frac{0.75 * 400}{5} * 30\% * PVFA(15\%, 5) \approx 239.66$$

הуниין העדכני ניתן לחישוב בדרך הקצרה (בנחתה שהуниין לפני מענק נתון) בתוור הסיכום של העניין המקורי בתוספת השפעת עניין המענק בלבד :

$$NPV_{WM} = NPV + \Delta NPV_M = -61.43 + 239.66 = 178.23$$

כך שלמעשה: ההשפעה החיובית של מענק השקעה על העניין לעולם תהיה נמוכה יותר מסכום המענק, וזאת, לאור ההשפעה השלילית של המענק על מגני המס על הפחת (ואם הייתה מכירה – ייתכן וגם הייתה השפעה הקשורה אליה).

## שאלה 70.105 – מענק השקעה – חילוץ גודל המענק המינימלי המצדיק את הפרויקט



חברת "שקיידי" בע"מ שוקלת לרכושış מושאות שתסייע מוכנות חיים נקי נקי ברכבי הארץ. עלות המשאות 1,500,000 ש"ח והיא צפופה לשרת את החברה במשך 10 שנים. תקופת הפחתה של המוכנה לצורך מס היא 8 שנים. המוכנה צפופה להניב הכנסה שנתיות נקייה (לפניהם ופחות) בסכום של 170,000 ש"ח. שיעור המס אליו כפופה החברה הנו 30%, ומהיר ההון לאחר מס הנו 15% לשנה. נדרש: הממשלה מעוניינת לעודד רכישת מושאות חיים נקי ולכון מציעה לחברות בתחום מענק השקעה. מהו גובה המענק המינימלי אשר יצדיק את ההשקעה בפרויקט.

פתרונות :

מציג באלפי ש"ח :

אני מתייחס למענק בגודל נעלם אשר מונכה מעלות ההשקעה ואשר מוביל לכך שהענ"ג כולו בהתחשב בהשפעות המענק יהיה 0 (מינימום כדיות).

$$\begin{aligned}
 NPV &= -1,500 + M + \frac{1,500 - M}{8} * 30\% * PVFA(15\%, 8) + 170 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 10) = 0 \\
 -1,500 + M + \frac{1,500}{8} * 0.3 * PVFA(15\%, 8) - \frac{1}{8} M * 0.3 * PVFA(15\%, 8) + 170 * 0.7 * PVFA(15\%, 10) &= 0 \\
 -1,500 + M + \frac{1,500}{8} * 0.3 * PVFA(15\%, 8) - 0.1682 * M + 170 * 0.7 * PVFA(15\%, 10) &= 0
 \end{aligned}$$

מכאן מחלצים משווהה בneutral אחד :

$$M \approx 781.93$$

הערה / טיפ: לגמרי ניתן לחשב את ה- $NPV$  בהתעלם מהענק, ואז לבנות משווהת מענק נוספת ותוספות להשוות אותה לערך הענ"ג השלילי שהתקבל.

## שאלה 70.106 – מענק השקעה – חילוץ גודל המענק המינימלי המצדיק את הפרויקט כולל מכירה



טל שוקלת לרכוש נקניקית נוי ענקית מזכוכית למשרד, שצפואה להגדיל את תעבורת הلكוחות ובהתאם את הכנסות החברה. עלות הנקניקה 300,000 ש"ח והיא מופחתת בשיטת הקו הישר על פני 10 שנים. החברה צפואה להניב מהנקניקה הכנסות של 30,000 ש"ח בתום כל שנה, במשך 11 שנים. החברה כפופה למס חברות בשיעור 30% ולמס רווחי הון בשיעור 20%. מחיר ההון של החברה לאחר מס 15%. מה צריך להיות סכום המענק המינימלי שיצדיק את ההשקעה, אם ידוע שהחברה צפואה למכור בתום הפרויקט את הנקניקה בתמורה ל-40,000 ש"ח.

פתרון :

$$NPV = -300 + M + \frac{300 - M}{10} * 30\% * PVFA(15\%, 10) + (40 - 20\% * 40) * (1 + 15\%)^{-11} + 30 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 11) = 0 \rightarrow M = 162.51$$

**באדום – מס רווח ההון במכירה**, להלן פירוט ההתייחסות למכירה :

במועד המכירה עליינו לבחון את העלות המופחתת ערב המכירה תחילה. הוואיל והפריט מופחת על פני 10 שנים, והמכירה הצפואה היא רק בחלוף 11 שנים, הרי שיתרת ערך הספרים 0 :

$$(300 - M) - \frac{(300 - M)}{10} * 10 = 0$$

רווח / הפסד ההון הוא ההפרש בין תמורת המכירה לבין העלות המופחתת (זהו ימושה לפי שיעור מס 20%) :

$$40 - 0 = 40$$

### דיון מקדים קצר – אמצעי עידוד נוספים – הלואה מסובסדת

באופן כללי, בשאלות "רגילותות", לא נהוג להתייחס לעליות מימון, שהרי עבורן יש את מגנון ההיוון (חישוב PVFA עם ריבית מתאימה).  
חריג כלל הוא המקרה שבו כדי לעודד פרויקט, מוצעת למבצעיו הלואה מסובסדת ספציפית, המותנית ביצוע הפרויקט, ואשר הריבית בגיןה נמוכה במיוחד :

- א. חישוב לוח הסילוקין להלוואה. עליינו לגלות כמה מחזיריים, מתי, ואת החלוקה בין קרן וריבית.
- ב. רכיב הריבית מזכה במגן מס (כמו כל הוצאה), ולעומתו – החזר קרן לא מזכה במגן מס.
- ג. ערכיים אלו (תזרימי קרן ללא השפעות מס, והוצאות מימון עם השפעות מס) יתווסף לתזרימי המזומנים של הפרויקט וישפיעו על העניין שלו.

### שאלה 70.107 – הלואה מסובסדת – יישום בסיסי



ירין עמר שוקל לרכוש לחברת שבת הוא עובד מכונה לניקוי שאריות כרכבות ממכונות חימום הנקיון של החברה. צפוי כי עלות המכונה שתשלול מיידית תהיה 200,000 ש"ח והוא תתרום לחסכו בעליות הניקיון הידניות של מכונת הנקיון בסכום של 22,000 ש"ח לשנה במשך 10 שנים. תקופת ההחפתה של המכונה לצורך מס זהה לאורך חייה השימושיים. החברה כפופה לשיעור מס חברות של 30%, ומהירות ההון של 15%.

נדרש :

- מהו עניין הפרויקט.
- הממשלה מציעה למבצעי פרויקטים מסווג זה הלואה מסובסדת למימון 80% מעלות הרכישה. ההלואה תפרע ב-5 תשלומי קרן שנתיים שווים, והיא נושא ריבית שנתית בשיעור 2%. חשבו את עניין הפרויקט בהתחשב בהלוואה זו.

פתרון :

פתרון סעיף א :

$$NPV = -200 + \frac{200}{10} * 30\% * PVFA(15\%, 10) + 22 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 10) = -92.6$$

פתרון סעיף ב :

נציג תחילת את לוח סילוקין המלא בגין הלוואה = "תשלומי קרן שווים" = לוח סילוקין רגיל סכום הלוואה באלפי ש"ח :  $160 = 200 * 80\%$  והחזר קבוע בגין קרן :  $160 / 5 = 32$

זמן	ע"ח קרן	ע"ח ריבית	יתרה
0			160
1	32	3.2	128
2	32	2.56	96
3	32	1.92	64
4	32	1.28	32
5	32	0.64	0

$$\Delta NPV_{SubLoan} = +160 - 32 * PVFA(15\%, 5) - 3.2 * (1 - 30\%) * 1.15^{-1} - 2.56 * (1 - 30\%) * 1.15^{-2} - 1.92 * 0.7 * 1.15^{-3} - 1.28 * 0.7 * 1.15^{-4} - 0.64 * 0.7 * 1.15^{-5} = 47.81$$

**תזרימי הלוואה מחושבים לפי הריבית בפועל בהלוואה, לעומת זאת חישובי ההיוון (PV, PVFA) של תזרימיים אלו יתבססו תמיד על מחיר ההון.**

הואיל והשפעה החזיבית הנובעת מנטילת הלוואה בריבית הנמוכה היא קטנה יותר (בערכה מוחלט) מהעניין השלילי המקורי, עדין הפרויקט כולל לא כדאי. לשם ההמחשה נציג להלן את העניין הכלול המתחשב בהלוואה על בסיס סיכום העניין המקורי יחד עם שינוי העניין הנובע מההלוואה :

$$NPV_{TOTAL} = NPV + \Delta NPV_{SubLoan} = -92.6 + 47.81 = -44.79$$

### סוגיה נוספת - החלטות ייצור או רכישה

בהחלטה ייצור או רכישה, הדילמה היא בין תשלום עבור מוצר לספק חיצוני (בדרך כלל סכום נתון או כזה שנדרש לחץ), לבין עלות הייצור שלו. במקרים רבים, ל佗ת ייצור עצמי, מתחווות עלויות הקשורות להשקעה בפס הייצור וכיו"ב, ורכישה מספק במקרים רבים כרוכה בעלות משתנה ליח' גובה יותר. צרכי להביא לידי ביטוי את ההפרש התזרימי בין המוצבים, כדי לדעת האם כדאי עבור מייצור עצמי לרכישה ואו להפץ. השאלה גם יכולה לכלול את מספר היחידות כנעלם על מנת לחז הערכים שיובילו לכדיות המעבר.

#### שאלה 70.108 – ייצור או רכישה

חברת "معدני טל – נקניק לכל אגרטל" שוקלת לרכוש מכונה לייצור נקניקיות מסווג חדשני, שתתספר את איכות המוצר ותגדיל את המכירות. עלות המכונה היא 500,000 ש"ח, והיא מופחת בשיטת הקו הישר על פני 8 שנים. החברה מעריכה כי הכנסות השנתיות הנובעות מהנקניקיות שהמכונה מייצרת יעמדו על 80,000 ש"ח בכל שנה במשך 10 שנים. בנוסף, החברה בוחנת אפשרות לרכוש את הנקניקיות מהספק "ניו בע"מ – נקניק ללא טעם", שמציע אותן בעלות של 75,000 ש"ח לשנה (כולל תחזוקה וספקה). עם זאת, שימוש בספק חיצוני יוביל לצמצום מסוים בעלות התפעול של החברה בסך 10,000 ש"ח לשנה. ידוע כי שיעור מס החברות הנז 30%, מחיר ההון של החברה לאחר מס 10%, בתום התקופה החברה צופה כי תצליח למוכר את המכונה בתמורה ל-150,000 ש"ח.

נדרש :

- חשבו את NPV בחלוקת רכישת המכונה (ייצור).
- חשבו את NPV בחלוקת רכישת מספק החיצוני.
- איזו חלופה תועדף?

פתרונות :

#### פתרונות סעיף א – NPV ברכישת המכונה וייצור :

$$NPV_{Own} = -500 + \frac{500}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 8) + 150 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-10} + 80 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) = 266.8$$

#### פתרונות סעיף ב – NPV ברכישת מספק חיצוני :

$$NPV_{Buy} = -75 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) + 10 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) + 80 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 10) = 64.52$$

פתרונות סעיף ג – העדפה

החלופה שתועדף היא זו שה-NPV שלה הוגבאה ביותר, כלומר חלופה א.

## ולקינוח מתוק – שאלת מבחן, שאלון 22, שאלה 11

### שאלה 11

חברת מטמון בע"מ זקוקה לדחפור חדש. עלות הדחפור החדש 1,200,000 ש"ח והוא מופחת לפוי שיטת הנקו הישר בהתאם לאורך חייו במשך 4 שנים.

ההכנסה השנתית הצפiosa ממנה מסתמכמת ב-900,000 ש"ח ועלות הפעלה השנתית הצפiosa להיות של 300,000 ש"ח. הפעלה הדחפור תקืน את הכנסות החברה מדחפור קיים מ-1,000,000 ש"ח ל-900,000 ש"ח לשנה. כמו כן, הפעלה הדחפור תצריך הקשרה של העובדים טרם הפעלה ועלות של 150,000 ש"ח, המוכרת במילואה לצורכי מס במועד ביצועה.

שיעור המס של החברה הוא 35% ומהירות החון שלה, לאחר מס, 12% לשנה. **כדי לחברה:**

א. לרכוש את הדחפור

ב. לא לרכוש את הדחפור

ג. לרכוש את הדחפור, רק אם מחיר החון יעלה ל-15%

ד. לרכוש את הדחפור, רק אם מחיר החון ירד ל-10%

ה. תשובה ב-1-ד נכון

$$NPV = -1,200 + \frac{1,200}{4} * 35\% * PVFA(12\%, 4) + (900 - 300 - 100) * (1 - 35\%) * PVFA(12\%, 4) - 150 * (1 - 35\%) = 8.56$$

השאלה זו פשוטה מאוד, ונוועדה לטעת לבנו עידוד: זו שאלת מבחן יחסית עדכני, ולמרות שהיא לא ממצה היא מעידה על כך שלא כל העולם אופל.

ישנו מידע בדבר עלות השקעה ומגן מס על הפחתתה, כאשר יש לשים לב שהירידה בהכנסות "מדחפור קיים" משמעה למעשה ירידת הכנסות מ"פרויקט אחר" שמטופלת כהוצאה לכל דבר ועניין.

נקודה נוספת פשוטה אך "חכמה" היא העובדה שנוצרה כאן גם הוצאה חד פעמיות נוספת מיידית בזמן אפס בסך 150 עבור הקשרת העובדים. הוצאה זו נרשמת בסימן שלילי, מובילה לניכוי מס (הוצאה מוכרת), ואין צורך להוון אותה (לחשב לה PV) כי היא כבר מיידית – בזמן 0.

הואיל ובסק הכל, לאחר מתן ביטוי לכל התזרים וערכם, ה-NPV חיובי ולכון ההשקעה נכונה. התשובה א.

## שאלון 25 – שאלה 11

### שאלה 11

חברה שוקלת הקמת מפעל חדש בעלות של 20 מיליון ש"ח. המפעל מופחת לפי שיטת "הקו ה ישיר" במשך 10 שנים, ללא ערך גרט. המכירות מהמפעל צפויות להיות בסך 750 אלף ש"ח כל שנה עד לאינסוף. עלות המכירות היא 40% מהיקף המכירות ואין הוצאות נוספות. בණחה שהחברה משלם מס בשיעור 26% ומהיר החון לאחר מס של 10%.

**ענין הפרויקט שווה ל-**

- א. 13,474,600 ש"ח.
- ב. 13,616,800 ש"ח.
- ג. 12,234,400 ש"ח.
- ד. 12,723,910 ש"ח.
- ה. מאחר שהמכירות צפויות להיות עד לאינסוף, לא ניתן לחשב את ענין הפרויקט.

**פתרון :**

$$NPV = -20,000,000 + \frac{20,000,000}{10} * 26\% * PVFA(10\%, 10) + 750,000 * (1 - 40\%) * (1 - 26\%) * \frac{1}{10\%}$$

$$NPV = -20,000,000 + \frac{20,000,000}{10} * 26\% * 6.145 + 750,000 * (1 - 40\%) * (1 - 26\%) * \frac{1}{10\%} = -13,474,600$$

**התשובה א.**

## שאלוֹן 25 – שאלָה 10

### שאלה 10

חברה בוחנת שתי חלופות השקעה ב نفس הייצור של המפעל :

1. השקעה בסך 225,000 ש"ח שתניב תזרים מזומנים נטו (לפניהם מס) של 500 ש"ח לשנה, במשך 3 שנים.
2. השקעה בסך 337,500 ש"ח שתניב תזרים מזומנים נטו (לפניהם מס) של 135,000 ש"ח לשנה, במשך 6 שנים.

החברה משלמת מס בשיעור 30%. **הציווּל מופחת לצורכי מס לפי שיטת "הקו הישר" במשך 3 שנים בלבד ומחיר החון של החברה לאחר מס הוא 12% לשנה.**

**בהתה שמדובר בהזמנויות השקעה חד-פעמיות, מהי הבחירה שתבחר החברה?**

- א. חלופה 1.
- ב. חלופה 2.
- ג. החברה אדישה בין שתי הבחירה.
- ד. לאחר שהפחת מופחת רק במשך 3 שנים ואורך חיי חלופה 2 הוא 6 שנים, אי-אפשר לקבל החלטה לגבי חלופה 2 ולכן נבחר בבחירה 1.
- ה. לאחר שמדובר בחלופות בעלות אורך חיים שונה, אי-אפשר להשוות ביניהן לצורכי קבלת החלטה.

אם אני צריך לבחור בין חלופות בעלות אורך חיים שונה, חשוב לבחין האם ניתן לחזור על הפרויקטים או לא.  
 אם ניתן לחזור עליהם – יש להשתמש בגישה להשוואת אופק (אני אוהב שווה ערך שנתי).  
 אם לא ניתן לחזור על הפרויקטים – לא דנים בהשוואת אופק (LRBOTH EAC) אלא – פשוט מחשבים NPV לכל פרויקט בנפרד, ובוחרים את הגבוה, ואומרים תודה לאלוהים ולשרון.

$$NPV_1 = -225 + \frac{225}{3} * 30\% * PVFA(12\%, 3) + 157,500 * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 3) = 93.86$$

$$NPV_2 = -337.5 + \frac{337.5}{3} * 30\% * PVFA(12\%, 3) + 135,000 * (1 - 30\%) * PVFA(12\%, 6) = 132.057$$

החלופה העדיפה היא חלופה 2.

(\*) מהלוחות:

$$PVFA(12\%, 3) = 2.402 \quad PVFA(12\%, 6) = 4.111$$

## מבחן 16 – שאלה 11

### שאלת 11

להלן מספר פרטים לגבי פרויקט מתוכנן (באלפי ש"ח):  
 המכירות צפויות להיות 2,200 ש"ח לשנה. ההוצאות השנתיות בגין חומרי גלם ושכר עבודה הן 500 ש"ח והפחית השנתי הינו 150 ש"ח. הוצאות הריבית הן 80 ש"ח לשנה ומלבד ההוצאות הניל אין הוצאות צפויות נוספות בגין הפרויקט. בהנחה ששיעור מס חברות 48%, מהו **תזרים המזומנים השנתיים לאחר מס, לצורך חישוב הענין?**

- א. 956 ש"ח
- ב. 1,550 ש"ח
- ג. 806 ש"ח
- ד. 764 ש"ח
- ה. 850 ש"ח

פתרון:

בשאלה זו כלל לא רוצים NPV. אלא את התזרים נטו. התזרים נטו כਮובן מרכיב מההכנסות, בNICOTI ההוצאות, בNICOTI המסים, בהתחשב במגנify המס על הפחית.

מכירות 2,200

בNICOTI הוצאות חומרי גלם ושכר עבודה (500)

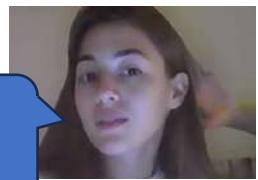
	1,700	רוח לפni מס
1,700 * 48% =	(816)	بنיכוי מס על הרוח 48%
150 * 48% =	<u>72</u>	בתוספת בגין המס על הפחת
1,700 – 816 + 72 =	956	תזרים המזומנים נטו

ומה לגבי ריבית?

כפי שהדgesנו: הלוות, החזרי קרן, ותשלומי ריבית בגיןם – לא יובאו בחשבון באומדן תזרימי המזומנים של תכניות ההשקעה, כי הן מגולמות במסגרת פועלות החיים / מחיר ההון.

החריג היחידי לכל זה, שלא אזכיר בשאלת – הוא המקורה של הלוות מסובסדות (כאן לא הזכירו את המונח הלוואה מסובסדת, ولكن נתנו הריבי הוא נתנו סרק בולט).

הRibit היא  
TRAP



אכן הריבית  
היא  
TRAP



## שיעור 8 – חלק ב: התחלת הדיוון ביה' 8 – עולם עם סיכון – 21.5.2025

**רקע קצר – דיוון בפרויקטים מסוכנים בודדים ודיוגם**  
הדיונים שערךנו עד כה (ביה' 5 – ערך נוכחי, עתידי, יישומיהם וריביות, יה' 6 – כדיות פרויקטים, יה' 7 – קיזוב

הון ואפיון תזרימי מזומנים לתכניות השקעה) **התعلמו מובחן** מקיים של סיכון ;

ובפרט, התعلמו מכך שלכל פרויקט / אובייקט עסקי יש מספר אפשרויות (תרחישים שונים אפשריים לגבי התזרימיים שעשוים לנבוע מהפרויקט). תנודתיות אפשרית זו בתנאים העסקיים היא הלב של סיכון מבחןינו – וקבלת החלטות בתנאי סיכון דורשת לדעת כיצד לכמת את הסיכון, ובהמשך – כיצד לנחל אותו. הדבר שימושי לקבלת החלטות ודיוגם פרויקטים.

את הדיוון שלנו בפרק זה אנחנו נתחיל מחייב שני ערכים סטטיסטיים מאד בסיסיים והגוניים בעולם עם סיכון (עולם שבו לפרויקטים ו/או השקעות יש יותר מוגדרת אפשרות אחת) :

- א. תוחלת – ממוצע משוקל של תוצאות פרויקט – על בסיס מכפלתו בהסתברות התוצאות.
  - ב. סטיית תקן (ושונות) – ממד הסיכון הבוחן את מידת הפיזור / התנודתיות האפשרית בתוצאות – ועבורם נחשב את ערכיו התוחלת וסטיית התקן.
- במשך – נעסק גם בקבלת החלטות על בסיס ממדים אלו, וביחס המשקיעים לסיכון שקובע זאת.

**שאלה 7 – פרויקט מסוכן בודד (הגרלה) – חישובים בסיסיים של תוחלת וסטיית תקן – כسطפת (ש"ח)**  
בהגרלה יש לכם אפשרות לזכות ב-20 ש"ח בהסתברות 30%, ב-40 ש"ח בהסתברות 20%, ובהסתברות של 50% תפסידו 10 ש"ח. מהי התוחלת וסטיית התקן בש"ח של ההגרלה?

פתרון :

תוחלת היא הממוצע המשוקל (שיקול תוצאות בהסתברויות) והיא ניתנת להציג באמצעות הנוסחה הבאה :

$$E(X) = P_1 * X_1 + P_2 * X_2 + \dots$$

כאשר :

הערך  $E(X)$  הוא תוחלת התקבול.

הערכים ...  $P_1, P_2$  מייצגים את ההסתברות (Probability) לכל תוצאה אפשרית בפרויקט.

הערכים ...  $X_1, X_2$  מייצגים את התוצאות (הערכים הכספיים / האחוזיים) שיתרחשו בכל הסתברות.

נישם ונגלה :

הסתברות	תוצאה (ש"ח)
30%	20
20%	40
50%	-10

$$E(X) = 30\% * 20 + 20\% * 40 + 50\% * (-10) = 9$$

שי א שואל: מה לגבי סיכון?  
הרי כאן חישבת רק "ממוחע"...



התוצאה של התוחלת מייצגת את התקבול הממוצע "לאורך זמן" בהנחה והפרויקט יבוצע "שוב ושוב". הויאל והפרויקט לא באמת מנייב 9, אלא ערכיהם הסוטיים ממנה (20 או 40 או הפסד 10), **נרצה לחשב את הסיכון המשתקף בפעריהם האפשריים בין תוצאות הפרויקט לתוחלתו**, ופערים אלו – כשהם משוקלים בהסתברויות, מניבים מודד סיכון, ולכמת אותו סטטיסטית לערך הנקרא **"סטטיסטית תקן"** (שורש השונות) שנוסחתה כדלקמן:

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 * [X_1 - E(X)]^2 + P_2 * [X_2 - E(X)]^2 + \dots}$$

כאשר :

הערך  $(X)$  מיצג את סטטיסטית התקן (מודד הסיכון / הפיזור המקבול בקורס) = שורש השונות.

הערך  $E(X)$  הוא תוחלת התקבול.

הערכים ...  $P_1, P_2$  מיצגים את ההסתברות לכל תוצאה אפשרית בפרויקט.

הערכים ...  $X_1, X_2$  מיצגים את התוצאות (הערכים הכספיים / האחוזיים) שיתרחשו בכל הסתברות.

ניחסם ונגלה :

$$\sigma(X) = \sqrt{30\% * [20 - 9]^2 + 20\% * [40 - 9]^2 + 50\% * [-10 - 9]^2} \approx 20.22$$

בקורסנו, איננו עוסקים בניתוח מבנה התפלגיות. כל שנטע הוא, שבהתאם סטטיסטית התקן מודד פיזור / סיכון, הרי שככל שהערך המתkeletal בגין סטטיסטית התקן גבוהה יותר, הפרויקט מסוכן יותר (ערכיו מפוזרים יותר).

**שאלה 72 – חישוב טכני – תוחלת וסטטיסטית תקן בהגרלה / הטלת קובייה / הסתברויות אינן נתונות במפורש בהגרלה המבוצעת על ידי הטלת קובייה תוכלו לזכות ב-80 ש"ח אם תוצאה הקובייה היא 1 או 2, ב-100 ש"ח אם תוצאה הקובייה היא 3, 4 או 5, ותפסידו 200 ש"ח אם תוצאה הקובייה היא 6. מהי התוחלת וסטטיסטית התקן בש"ח של ההגרלה?**



פתרון :

לקובייה יש 6 פאות (צדדים, תוצאות אפשריות). ההסתברות לכל "פאה" (לכל אחת מ-6 התוצאות) זהה. לכן, כאשר מאורע מתרחש כאשר תוצאה הקובייה היא 1 או 2, קרי 2 פאות מתוך ה-6, ההסתברות המאורע היא  $2/6$  וכך.

לכן :

תוצאה קובייה	ערך כספי
80	1
80	2

100	3
100	4
100	5
-200	6

בהמראה לטבלת הסתברויות:

ערך כספי	הסתברות
80	$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
100	$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
-200	$\frac{1}{6}$

תוחלת התקבול הכספי:

$$E(X) = \frac{1}{3} * 80 + \frac{1}{2} * 100 + \frac{1}{6} * (-200) = 43 \frac{1}{3}$$

סטטיסטית התקן:

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3} * \left(80 - 43\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} * \left(100 - 43\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} * \left(-200 - 43\frac{1}{3}\right)^2} \approx 109.19$$

ג'רלופי: עד כה הבנתי איך אנו מחשבתוחלת וסטטיסטית תקן, אבל בתכליס – רוב השאלות בנושא הן על קבלת החלטות, האם להשקיע... מה להעדיף...



**שאלה 73 – בחירה בין פרויקט מסוכן לבין פרויקט ודאי – מקרה בסיסי**

מציעים לכם להשקיע בפרויקט שיעניק לכם 60 ש"ח בוודאות, או בפרויקט חלופי שיעניק לכם 100 ש"ח בהסתברות של 60% או 0 בהסתברות של 40%.

נדרש: חשבו את התוחלת ואת סטיית התקן של כל פרויקט. Aiזה פרויקט יועד לפיקרייטריוון תוחלת-שונות?

: פתרון

פרויקט B		פרויקט A	
תקבול כספי	הסתברות	תקבול כספי	הסתברות
100	60%	60	100%
0	40%		

בutor התחלה, נחשב את התוחלת ואת סטיית התקן של כל פרויקט. לגבי פרויקט A, התהליך טריביאלי. מודיע? בהינתן שלפרויקט יש רק תוצאה אפשרית אחת - תוחלתו חייבת להיות זהה לתוצאה זו. בנוסף, בהינתן תוצאה אפשרית אחת בלבד, הרי שסטיית התקן (מדד הפיזור של התוצאות) בהכרח אפס.

$$E(A) = 60; \sigma(A) = 0$$

אפשר גם לחשב כמובן:

$$E(A) = 100\% * 60 = 60$$

$$\sigma(A) = \sqrt{100\% * (60 - 60)^2} = 0$$

נחשב את התוחלת וסטיית התקן לפרויקט B ונקבל:

$$E(B) = 60\% * 100 + 40\% * 0 = 60$$

$$\sigma(B) = \sqrt{60\% * (100 - 60)^2 + 40\% * (0 - 60)^2} \approx 48.99$$

נרכז את הממצאים:

B	A	
תוחלת		
60	60	
48.99	0	סטיית התקן

קבלת החלטות בעולם עם סיכון דורשת, כאמור, ידיעת יחס המשקיע לסיכון. ככל, רוב המשקיעים הם אכן שונים סיכון; ככל שבhintן תוחלות זהות יבחרו בפרויקט מסוכן פחות. יחד עם זאת, קיימים גם משקיעים אהבי סיכון – שבמצב של שוויון תוחלות יעדיפו פרויקט מסוכן יותר.

mmm. מה עדיף לי?



בשאלה נדרשנו לדרג את הפרויקטים (ולהכריע מי מביניהם עדיף) לפי קרייטריוון תוחלת-שונות. זהו קרייטריוון שמניה שהמשקיע **שונה סיכון** (=דוחה סיכון).

ולמה הכוונה? מדובר במשקיע ש מבחינתו הסיכון (עליה בסטיית התקן) פוגעת בערך הסובייקטיבי של הפרויקט מבחינתו. משקיעים שונים סיכון פועלים בהנחות הקורס לפי קרייטריוון תוחלת-שונות (או תוחלת-סטיית התקן).

על פי קרייטריוון תוחלת-שונות:

פרויקט A יועדף על פני פרויקט B אם ורק אם מתקיימים כל התנאים המוצטברים הבאים :

$$\text{תנאי 1 : } E(A) \geq E(B)$$

$$\text{תנאי 2 : } \sigma(A) \leq \sigma(B)$$

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים ב"צורה החזקה" (גדול ממש או קטן ממש בהתאם).

נבדוק את התנאים לэт ובудינותו בהינתן ריכוז הממצאים בשאלת זו.

B	A	
60	60	תוחלת
48.99	0	סטיית תקן

$$\text{תנאי 1 : } E(A) = E(B) \text{ מתקיים כי } E(A) \geq E(B)$$

$$\text{תנאי 2 : } \sigma(A) < \sigma(B) \text{ מתקיים כי } \sigma(A) \leq \sigma(B)$$

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה החזקה : מתקיים כי תנאי 2 מתקיים "חזק" (ללא סימן השווה)

בשורה התחתונה : לפי קритריון תוחלת-שונות המתאים לדירוג פרויקטים מסוכנים בהנחה שנאות סיכון, יועדף פרויקט A על פני פרויקט B.

### שאלה 73.1 – חידוד משמעות קритריון תוחלת / סטיית תקן ויחס לסיכון

מיכל ע מתלבטת בין שני הפרויקטים הבאים :

B	A	
8,500	5,000	תוחלת כספית – ש"ח
7,000	2,000	סטיית תקן - ש"ח

סמןו את הטענה הנכונה :

- לפי קритריון תוחלת שונות, מיכל תעדיף את פרויקט A.
- בהנחה שמיכל שונאות סיכון, היא תעדיף את פרויקט A.
- תשובות א-ב נכונות.
- בהנחה שמיכלओחות סיכון, היא תעדיף את פרויקט B.
- בהנחה שמיכל אדישה לסיכון, היא תהיה אדישה בין הפרויקטים.

א+ב+ג : הכרעה לפי קритריון תוחלת שונות משמעה הכרעה מנקודת ראות שונה סיכון. מנקודת ראות שונה סיכון שכזה, אנו נבחן את שני הערכיים :

בפרויקט A התוחלת נמוכה יותר ---> קלומר B עדיף בambilת התוחלת  
בפרויקט A הסיכון נמוך יותר ----> קלומר A עדיף בambilת הסיכון (עבור שונא סיכון כאמור)

מתקינות סתירה בין המידים ; או אם תרצו – קיימת תחלופה בין סייכון ותשואה. חשוב מכך להמנע מטענה שאומרת שתמיד שונא סייכון ורצה למזער סייכון. זה לא נכון. הוא רוצה למזער סייכון אם התוחלת זהה או אפילו גבוהה יותר בפרויקט הבטוח ; אבל אם הפרויקט המסוון מנייב תוחלת גבוהה יותר – יש סיוכו שהוא יבחר.

בקרה : לא יוכל להביט רק על הסייכון בובאנו להחליט עבור שונא סייכון. نتيיחס גם לתוחלת.

לכן, הטענה לגבי העדפת שונא סייכון את פרויקט A **שגויה**.

ד : עבור אוהב סייכון – במידה התוחלת B עדיף (תוחלת גבוהה יותר) וגם במידה הסייכון B גבוה יותר, אבל המשקיע אוהב סייכון). לכן, אוהב סייכון יעדיף את B בהגדרה. הטענה **נכונה**.

ה : הטענה **שגויה**, משקיע אדיש לסייכון מדרג השקעותיו לפי תוחלת בלבד ובהתאם, יעדיף את B שתוחלו הגבוהה מבין השתיים.

**שאלה 73.2 – בחירה בין פרויקטים מסווגים והמשמעות העמוקה של סייכון עבור אוהב סייכון**  
שקדי שוקלט לבצע אחד מבין הפרויקטים הבאים :

B	A	
10,000	10,000	תוחלת כספית – ש"ח
12,000	6,000	סטיטית תקן – ש"ח

לפניכם מספר טענות. יש לבחור בנכונה :

- בנחתה שסקדי אהבת סייכון, היא תעדיף את פרויקט A לאור התוחלת זהה.
- בנחתה שסקדי שונאת סייכון, היא תעדיף את פרויקט B.
- בנחתה שסקדי אדישה לסייכון, היא תעדיף את פרויקט A.
- תשובה א-ג נכונות.
- בנחתה שסקדי אהבת סייכון, היא תהיה אדישה בין הפרויקטים.
- נכין.

**פתרון :**

א : אם שקדי אהבת סייכון, היא מביטה על התוחלת – וראה שהיא זהה. אז, היא ממשיכה ו מביטה על הסייכון, וראה שבפרויקט B הסייכון גבוה יותר. בהיותה אהבת סייכון, העליה בסיכון תורמת לה, ולכן היא מעדיפה את B. הטענה **שגויה**.

ב : אם שקדי שונאת סייכון – היא מביטה על התוחלת – וראה שהיא זהה. היא בוחנת את סטיטית התקן. היא רואה שסטיטית התקן בפרויקט A נמוכה יותר, ולכן תעדיף את A. הטענה **שגויה**.

ג : אם שקדי אדישה לסייכון – היא מביטה על התוחלת בלבד בבואה לדרוג השקעות, ובහינתן זהות התוחלות – הפרויקטים שקולים מבחינתה. לכן הטענה **שגויה**.

ד : **שגויה**.

ה : שגוי. כפי שאמרנו בסעיף א, במצב כזה שקדוי תעדיף את B.  
לכן, התשובה הנכונה היא : **נכין**.

### שאלה 73.3 – לאחר אתכם סופית

בפני המשקיע שי פ הוציאו הפרויקטם הבאים, וعليו לבחור באחד מביניהם בלבד :

הסתברות	ערך כספי A	הסתברות	ערך כספי B
100	20%	120	
	40%	150	
	40%	105	

לפניכם מספר טענות :

טענה 1 : "אם שי שונא סיכון, כמובן שיעדיף את פרויקט A, שהרי זה פרויקט ודאי – חסר סיכון"

טענה 2 : "רק אם שי אהוב סיכון, הוא יעדיף את פרויקט B, שכן לפרויקט מסחרת תוצאות אפשריות וסתירות תקן חיובית"

טענה 3 : "כל סוגים המשקיעים ללא תלות ביחסם לסיכון, יעדיפו את פרויקט B"

הטענה / הטענות הנכונה / הנכונות :

- א. טענה 1 בלבד
- ב. טענה 2 בלבד
- ג. טענות 1 ו-2
- ד. טענה 3
- ה. נכון

טענה 1 : שגوية. פרויקט A הוא אכן פרויקט ודאי – חסר סיכון. אבל תוחלתו נמוכה מזו של B. לכן, כבר בשימוש בຄלים הבסיסיים של תוחלת וסתירות תקן אפשר לומר – A בטוח יותר, אך בתוחלת נמוכה יותר, ובמצב זהה לא ניתן להכריע. זכרו : שונא סיכון אינו אדם ששואף למצער סיכון בכל מחיר ; אלא אדם שכasher התוחלות זהות יבחר בחלופה הבטוחה יותר. אם גם התוחלת נמוכה יותר בחלופה הבטוחה, לא ניתן לומר באופן ברור מה הוא יעדיף.

טענה 2 : שגوية. גם לפי הຄלים היישנים, העדפת B לשוויה להתבצע גם על ידי שונאי סיכון (לאור התוחלת הגבוהה יותר) ובטח שעל ידי אדישים לסיכון.

טענה 3 : נכונה. אמם בຄלים הקודמים שהציגו לא התייחסנו למצב זהה, אבל אם מזיהם מקרה מיוחד שבו פרויקט ספציפי נותן בכל מקרה, בכל מצב טבעי, בכל אפשרות יותר מפרויקט אחר – הרוי שהוא בהכרח יהיה עדיף עליו והדבר אינו תלוי ביחס לסיכון. **תשובה ד נכונה.**

**שאלה 74 - לבית**

מציעים לכם להשקיע בפרויקט שיעניק לכם 80 ש"ח בוודאות, או בפרויקט חלופי שיעניק לכם 100 ש"ח בהסתברות של 60% או 0 בהסתברות של 40%.

נדרש: חשבו את התוחלת של כל פרויקט. מבלתי לחשב כמותית את סטיית התקן, איזה פרויקט יועדף לפי קритיריון תוחלת-שונות?

פתרונות:

$$E(A) = 80$$

$$E(B) = 60\% * 100 + 40\% * 0 = 60$$

נבדוק את התנאים לאט ובעדינות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלה זו.

תנאי 1:  $E(A) \geq E(B)$  מתקיים כי  $E(A) > E(B)$

תנאי 2:  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$  מתקיים כי  $\sigma(A) < \sigma(B)$  גם ללא חישוב: כי A פרויקט ודאי

תנאי 3: לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה החזקה: גם תנאי 1 וגם תנאי 2 מתקיימים חזק.

לכן, לפי קритיריון תוחלת-שונות, יש להעדיף 80 ש"ח בוודאות על פני ההגרלה המוצעת.

**שאלה 75 – כדאיות השתתפות בהגרלה שדורשת תשלום מסויים**

מושיע לכם להשתתף בהגרלה. עלות ההשתתפות היא 500 ש"ח. ההגרלה יכולה להניב לכם ערך חיובי של 800 ש"ח בהסתברות של 40% או ערך חיובי של 300 ש"ח בהסתברות 60%. סמןו את הטענה הנכונה:

- א. אם המשקיע שונא סיכון, כדאי לו להשקיע בתכנית (בהגרלה).
- ב. לפי קритיריון תוחלת-שונות, כדאי לו להשקיע בתכנית (בהגרלה).
- ג. לפי קритיריון תוחלת-שונות, לא ניתן לקבל החלטה האם כדאי להשקיע בתכנית.
- ד. אם המשקיע שונא סיכון, מוטב לו שלא להשקיע בתכנית.
- ה. כל יתר הטענות שגויות.

פתרונות:

מצב שבו מציעים לי להשתתף בהגרלה בעלות מסויימת ושאליהם אם כדאי, שcola להבירה בין הסכום הוודאי (שיש לי בכיס היום, ומהווה את עלות ההגרלה) לבין הסכום ה"מסוכן" שיתקבלו בהגרלה.

פרויקט B - הגרלה		פרויקט A - סכום בכיס היום	
הסתברות	תקבול כספי	הסתברות	תקבול כספי
40%	500	100%	
60%			

$$E(B) = 40\% * 800 + 60\% * 300 = 500$$

$$\sigma(B) = \sqrt{40\% * (800 - 500)^2 + 60\% * (300 - 500)^2} \approx 244.95$$

נבדוק את התנאים לאט ובעדינות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלת זו.

תנאי 1 :  $E(A) = E(B)$  מתקיים כי  $E(A) \geq E(B)$

תנאי 2 :  $\sigma(A) < \sigma(B)$  גם ללא חישוב : כי A פרויקט ודאי

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה החזקה : תנאי 2 מתקיים חזק.

לכן, לפי קритריון תוחלת שונות, מוטב למשקיעו לפחות 500 ש"ח בכיסו, יתרה על החיבור בעסקת ההגרלה. **התשובה ד.**

**שאלה 76 - המלצה נוספת של תוחלת שונות - לבית**

ברק להוא משקיע שונא סיכון. מציעים לביק להשקיע אחד מבין שני הפרויקטים הבאים:

פרויקט B		פרויקט A	
הסתברות	תקבול כספי	הסתברות	תקובל כספי
3,000	50%	1,000	100%
0	50%		

נדרש: לפי קритריון תוחלת שונות, איזה פרויקט יעדיף ברק?

פתרון:

לגביה פרויקט A שיעש לו תוצאה אפשרית אחת בלבד:

$$E(A) = 1,000 \quad \sigma(A) = 0$$

ולגביה פרויקט B בישום רלוונטי:

$$E(B) = 50\% * 3,000 + 50\% * 0 = 1,500$$

$$\sigma(B) = \sqrt{50\% * (3,000 - 1,500)^2 + 50\% * (0 - 1,500)^2} = 1,500$$

ריכוז הממצאים:

B	A	
תוחלת	1,000	
סטיית תקן	0	1,500

נבדוק באופן מלא האם A עדיף על B לפי צבר התנאים המגדירים את קритריון "תוחלת שונות":

תנאי 1:  $E(A) < E(B)$   $E(A) \geq E(B)$

תנאי 2:  $\sigma(A) < \sigma(B)$   $\sigma(A) \leq \sigma(B)$

תנאי 3: לא רלוונטי, לאור אי קיומו של תנאי 1.

נבדוק "הפוך". האם B עדיף על A.

תנאי 1:  $E(B) > E(A)$   $E(B) \geq E(A)$

תנאי 2:  $\sigma(B) \leq \sigma(A)$   $\sigma(B) > \sigma(A)$

תנאי 3: לא רלוונטי, כי תנאי 2 לא מתקיים.

לא הצליחנו להראות ש - A עדיף על B.

לא הצליחנו להראות ש - B עדיף על A.

המשמעות: לא ניתן להכריע לפי קритריון תוחלת-שונות איזה פרויקט יועדף.

## מפגש 8 – יח' 8 חלק שני – ניהול תיקי השקעות – 21.5.2025

### פרק קצר – דיוון במיגור סיכון (הקטנתו) על ידי שילוב פרויקטים מסוכנים – גישת תיקי השקעות

- הדיונים לעיל (בפרויקטים מסוכנים ודירוגם) הניתו שיש לבחור פרויקט אחד בלבד מבין כמה מוצעים. בעולם האמתי, ובעיקר ככל שאמורים הדברים לגבי נכסים סחרים (מניות המרכיבות תיק השקעות, למשל) כמובן שנייתו לשלב בין נכסים מסוכנים, והדבר עשוי לתרום להקטנת הסיכון הגלום בתיק.
- ומדוע? לאור העובדה שרכיבי התקיק "מאזנים זה את זה". משש שם שקרמל מלוח הוא טעם נפלא, כי המלוח מאزن את המתוק, כך בתיק השקעות המאוזן היבש המאפיינים השונים של הנכסים ובעיקר מוקדם המתאים ביניהם (הקובע, בgesot, האם ועד כמה תנועה לכיוון מסויים בנכס אחד מרכיבת עם תנועה בכיוון הפוך בנכס אחר) מאפשרת להקטין סיכון.
- עולם ניהול סיכון בתיקי השקעות הוא ענק. אנחנו נתמקד במספר יישומים סטטיסטיים בסיסיים מiad, שבבסיסם הנוסחאות המקובלות לחישוב תוחלת וסטטיסטית תקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים. נתחיל בהצגה גרפית, כדי לקבל תחושה. לאחר מכן, נציג את היבט הconomic ונתרגל בהתאם.

מינוי מבוא – חיוני :

- בוחלתות החשובות בחיים – רובנו שונאי סיכון; ולכן **לי יכולת להקטין סיכון יש ערך מיוחד**; יכולת זו יכולה להתקיים לא רק על ידי בחירה בנכסים מסוכנים פחות – אלא גם באמצעות שילוב נכסים. פיזור הביצים מקטין את תנדותיות תיק השקעות, ללא פגיעה מתחייבת בתוחלת התשואה וזהו ערכה.
  - איך בדיק פיצול ההשקעה בין מגוון נכסים מסוכנים משפיע על התוחלת?
  - איך אותו פיצול לתיק השקעות משפיע על סטיית התקן / מדרד הסיכון?
- בשלב ראשון: **תיקי השקעות יהיו פשוטים ונאייביים, יעסקו בשילוב שני נכסים מסוכנים בלבד**, ובהתאם הגרפית. בהמשך הדרך, נshall.

**שאלה 77.1.0.2 – שאלת שיעורת להבahir ממש בקטנה את ההגדרות בעולם עם סיכון – שילוב 2 מסוכנים**

בעולם שבו קיימים שני נכסים מסוכנים, ידוע שערכיהם הנמנים:

$$E(A) = 10\%; \quad E(B) = 20\%$$

$$\sigma(A) = 15\%; \quad \sigma(B) = 30\%$$

נדרש:

- מהו טווח תוחלת התשואה האפשרות עבור משקיע המשלב בין שני נכסים אלו? במה הדבר תלוי?
- מהו טווח סטיות התקן האפשרות עבור משקיע המשלב בין שני נכסים אלו? במה הדבר תלוי?
- הציגו ריכוז נסחאות רלוונטיות.

פתרון:

- בעולם שבו קיימים רק שני נכסים, אחד מניב 10% בתוחלת, וחברו 20% בתוחלת, בהגדרה, אם אפצל את כספי בתיק השקעות בין שני הנכסים – התוחלת המשוקלلت תהיה בין 10% לבין 20%. במה זה תלוי? במשקל ההשקעה בכל נכס. אם למשל אשקיע 100% בנכס הראשון – התוחלת: 10%. אם אשקיע 50% בנכס הראשון – ו-50% בנכס השני – התוחלת: 15%. ואם אשקיע 100% בנכס השני, התוחלת: 20%.

**בעולם עם שני נכסים מסוכנים בלבד, תוחלת התשואה של כל תיק היא ב佗וחה שבין תוחלות הנכסים הבודדים, בהתאם למשקל ההשקעה בכל נכס.**

- בעולם שבו קיימים שני נכסים מסוכנים, שילוב ביניהם במסגרת תיק השקעות עשוי להקטין את הסיכון הגלום בהשקעה אפילו אל מתחת לsicco של הנכסים הבודדים. במקרים אחרות, אם סיכון הנכסים הבודדים הוא 15% ו-30% בהתאם, שילוב ביניהם כМОבון יכול להוביל לsicco שבין 15% ל-30%, אך ייתכן גם סיכון נמוך יותר. במה הדבר תלוי? לא רק במשקל ההשקעה בין הנכסים, אלא גם **במקדם המתאים ביניהם**. מקדם המתאים הוא גודל סטטיסטי, הבוחן את עצמת וכיוון הקשר בין הנכסים. ככל שמקדם המתאים קטן יותר (ובשאיפה – שלילי) ירידת בנכס מסוים מואזנת על ידי ירידת חלשה יותר ומעלה בנכס האخر, כך שמנקודת ראות התקיק יכול הסיכון מצטמצם.
- נוסחת תוחלת תשואה של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים בלבד:

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B) \quad \text{whereas} \quad W_A + W_B = 1$$

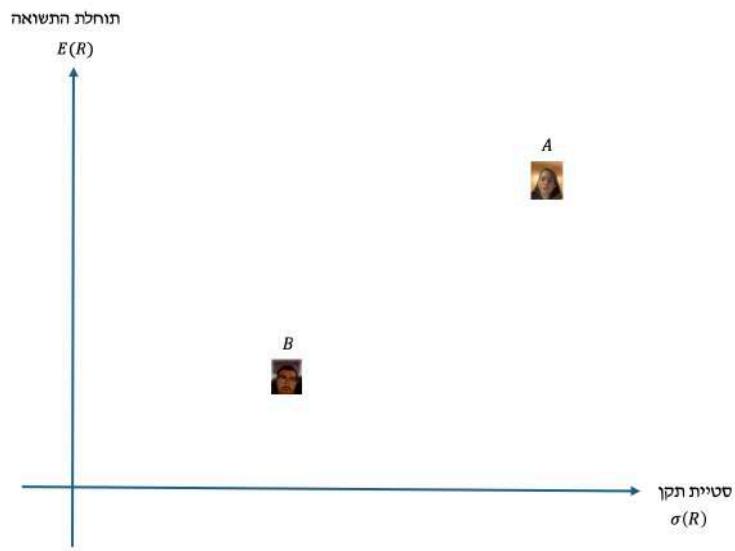
התנאי שמאפשר לתיק השקעות משולב להיות בעל סיכון נמוך יותר מאשר סיכון של כל אחד מהנכסים בפרדסים בתיק:

$$\rho < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$$

נוסחת חישוב סטיית התקן של תיק השקעות בעולם המורכב משני נכסים מסוכנים:

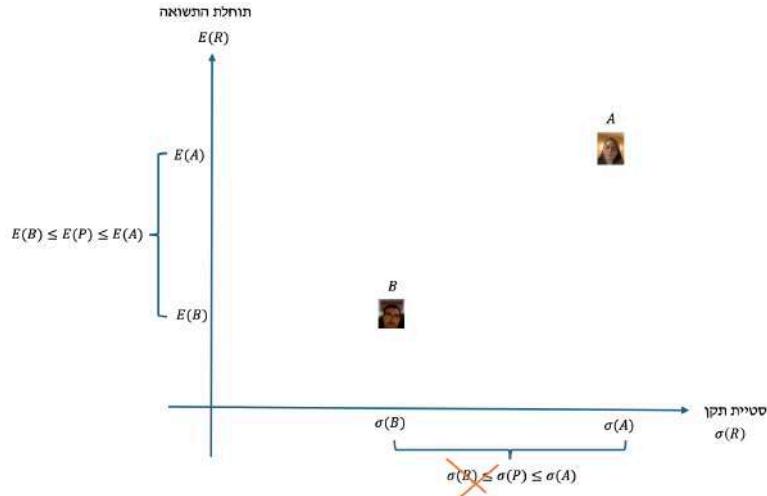
$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho}$$

**מינימלי – מודל שלילוב שני נכסים מסוכנים – והשפעה עקרונית על התוחלת וסטיית התקן – הציג גרפית**  
 בדרך כלל, כשהעסקים בנכסיים מסוכנים בודדים בלבד (החלק הקודם של הדיון) הציג גרפית היא פחותה משמעותית – כי בוחנים תוחלת, סטיית התקן, וזהו עקרונית.  
 לעומת זאת כאשר משלבים בין נכסים מסוכנים אזי נוצרות אפשרויות השקעה רבות – בהתאם לשיעור השקעה בכל נכס.  
 ההתחלת של הציג גרפית של משמעות שלילוב נכסים מסוכנים מתחילה מהצטטם של הנכסים הבודדים על מערכת צירים: כאשר כל נכס מסוכן מוצג במישור שבו הציר האנכי (Y) הוא תוחלת התשואה (%) / ערך, וציר האופקי (X) הוא ממד הסיכון – סטיית התקן.  
 להלן הדוגמה למקומות ייחודי של שני נכסים במערכת צירים זו – נכס A ונכס B, במקרה שבו התוחלת של A וגם סטיית התקן של A גבוהה מזו של נכס B:



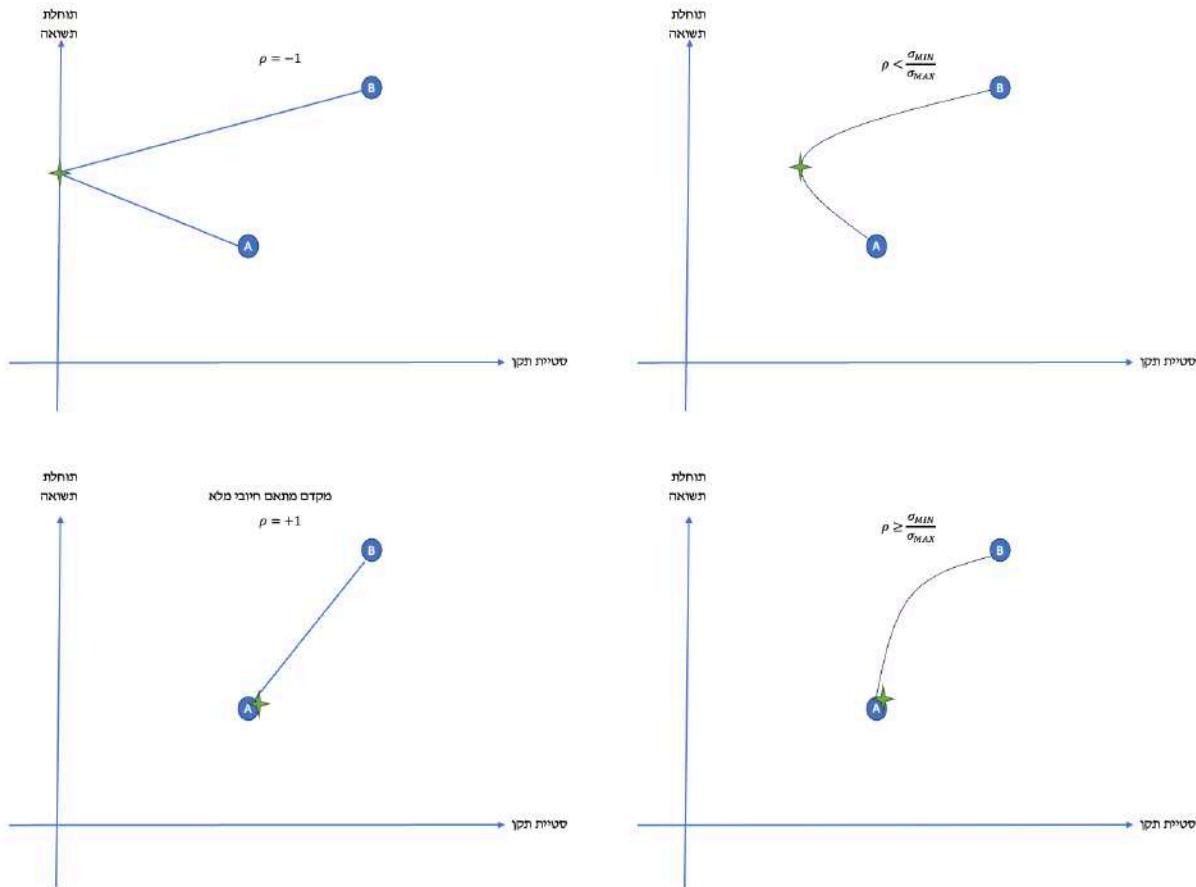
אם השאלה בדיאן שמבצעים עוסקת בשלב בין הנכסים – ככלומר ליצור תיק השקעות על בסיס חלוקת כספי המשקיע בין הנכסים A ו-B עלות שתי שאלות :

- מה תהיה תוחלת התשואה של התקיק המשולב.
- מה תהיה רמת הסיכון של התקיק המשולב.



תוחלת תיק השקעות המורכב משני נכסים תמיד תהיה בין (או שווה ל) תוחלות הנכסים בתיק. לעומת זאת, סטיית התקן תהיה לכל היותר זו של הנכס המסוכן יותר – אבל המינימום שלה לא מוגבל ותלויה ביכולת לפזר את הסיכון (לצמצמו) בזכות פיזור ההשקעה, וזה תלוי בסטטיסטי שנקרא "מקדם המתאים".

שאלה 77 – המחשבה לגבי **צירופי ההשקעות האפשריים** ויכולת פיזור הסיכון כפונקציה של מקדם המתאים ידוע כי בשוק ההון קיימות 2 מניות בלבד : A ו- B. ידוע כי סטיית התקן של מניה B גבוהה יותר מסטיית התקן של מניה A, וכי תוחלת התשואה של מניה B גבוהה מתוחלת התשואה של מניה A. בהתאם, הציgo באופן עקרוני בתרשים שעל צירו האופקי סטיית התקן ועל צירו האנכי תוחלת תשואה, את המקרים האפשריים המציינים את תמהילי ההשקעות האפשריים.



מה בעצם ראיינו כאן? ראיינו שאם קיימים נכסים שניים ליצג במערכת היצירים של תוחלת וסטטיסטית תקן, האופן שבו ישפיעו שילובי הנכסים על תוחלת התשואה וסטטיסטית התקן **שאפשרי להשיג** באמצעות השילוב מותניית בערכו של מקדם המתאים (הקשר בין המשתנים). בעוד שתוחלת התשואה תמיד תהיה בין תוחלות התשואה של הנכסים בתיק, את סטטיסטית התקן (מדד הסיכון) ניתן לפזר (להקטין) אל מתחת לסטיכון שני הנכסים, ובבלבד שמקדם המתאים בינויהם קטן יותר מהיחס בין סטטיסטית התקן הנמוכה לבין סטטיסטית התקן הגבוהה. **דיוון זה לא מציג שום דבר לגבי בחירת המשקיע והעדפותיו. קודם כל חשוב שנבון את אפשרויות ההשקעה, ובשלב הבא נבון כיצד בוחרים.**

### שאלה 77.1.5 – הבהרת הקשר שבין מקדם המתאים לבין היכולת להקטין סיכון

לגביו כל אחת מהאפשרויות הבאות, קבעו האם ניתן ליצור תיק השקעות שני הנכסים שסבירו (סטטיסטית התקן שלו) נמוכה מ-5%:

- א. סטטיסטית התקן נכס א: 10%, סטטיסטית התקן נכס ב: 4%, מקדם המתאים בין הנכסים 1-
- ב. סטטיסטית התקן נכס א: 10%, סטטיסטית התקן נכס ב: 8%, מקדם המתאים בין הנכסים 1-
- ג. סטטיסטית התקן נכס א: 10%, סטטיסטית התקן נכס ב: 5%, מקדם המתאים בין הנכסים: 0.4
- ד. סטטיסטית התקן נכס א: 10%, סטטיסטית התקן נכס ב: 5%, מקדם המתאים בין הנכסים: 0
- ה. סטטיסטית התקן נכס א: 10%, סטטיסטית התקן נכס ב: 5%, מקדם המתאים בין הנכסים: 0.8
- ו. סטטיסטית התקן נכס א: 10%, סטטיסטית התקן נכס ב: 5%, מקדם המתאים בין הנכסים: 1+

פתרונות:

רעיון: תמיד אפשר (בכל מקדם מתאים) ליצור תיק שרמת הסיכון שלו יהיה בין רמות הסיכון של הנכסים בתיק. כדי ליצור תיק שרמת הסיכון שלו נמוכה מזו של שני הנכסים, נדרש שמקדם המתאים יהיה נמוך מהיחס בין סטטיות התקן.

מספר	סטטיסטית התקן סיכון מתחת 5%-ל	האם אפשר להקטין סיכון מתחת 5%	נסיבות
א	כן	לא	תלות במקדם המתאים תמיד ניתן להמצא בטוחה הסיכוןים של הנכסים בתיק כלומר בין 4%-ל ו-10%, והואיל ו-5% בטוחה, זה אפשרי. עצם העבודה שמקדם המתאים 1- רק מעידה על יכולת קיצונית להקטין סיכון, עד לכדי סיכון אפס.
ב	כן	אם	5% הוא ערך נמוך מסיכון שני הנכסים (10%, 8%) אלא שכאשר מקדם המתאים קטן מהיחס בין סטטיות התקן (במקרה זה – קטן מ-0.8) ניתן להקטין סיכון אל מתחת לזו של שני הנכסים, וספציפיתפה – אפשר להקטין סיכון עד לרמתה ה-0 כי מקדם המתאים 1-. הערה: אם מקדם המתאים היה למשל 0.7, יכולנו לומר שאפשר להקטין סיכון אל מתחת ל-8%, אך לא היינו יודעים "עד כמה" אפשר להקטין סיכון.
ג	כן	אם	הואיל ומקדם המתאים 0.4 קטן מהיחס בין סטטיות התקן = $0.5 = 0.5 = 10\% / 5\%$ , ניתן להקטין סיכון אל מתחת לנכס הפחות מסוכן, ככלומר אל מתחת ל-5%.
ד	כן	אם	מאותה סיבה של ג, 0 נמוך מהיחס בין סטטיות התקן
ה	לא	אם	הואיל ומקדם המתאים 0.8 איננו קטן מהיחס בין סטטיות התקן 0.5, אינו מוגבלים לרמת סיכון מינימלי שהיא של הנכס הפחות מסוכן, ככלומר 5% זהו הסיכון המינימלי.
ו	לא	אם	מקדם מתאים 1+ איננו קטן מהיחס בין סטטיות התקן; שוללים את זה בדומה לשילוט טענה ה.

**שאלה 78 – יישום לראשוונה ברמה הכמותית של נוסחת סטיטית התקן של תיק השקעות ספציפי**

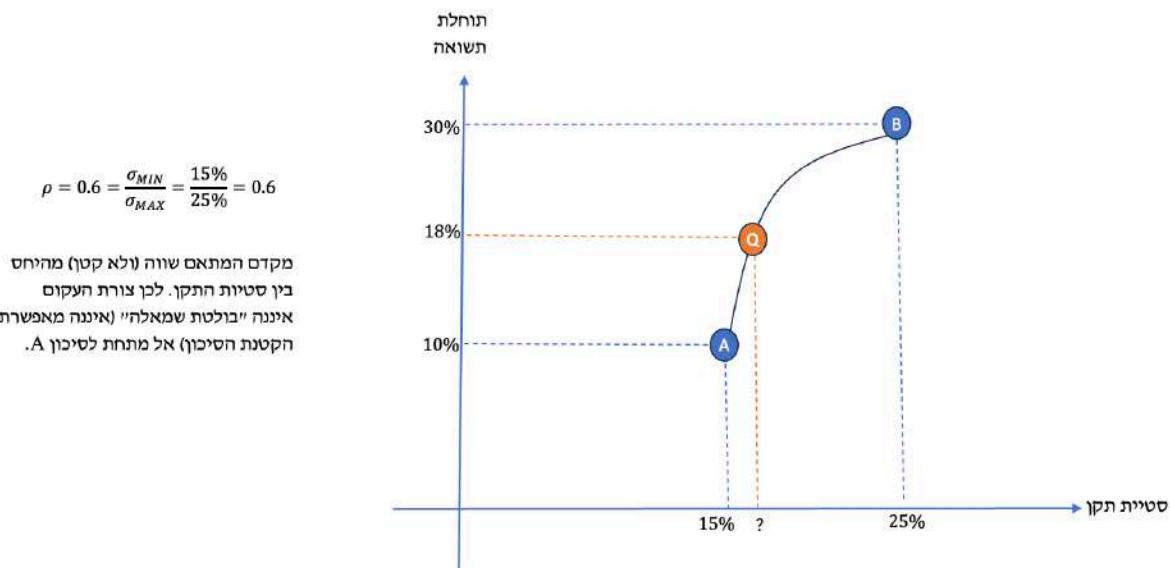
מבוא : תוחלת תיק השקעות (P)

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho}$$

ידוע כי בשוק הhook קיימות 2 מניות בלבד : מניה A שתוחלת תשואתה 10% וסטיטית התקן שלה 15%, ומניה B שתוחלת תשואתה 30% וסטיטית התקן שלה 25%. ידוע שמשקיע מעוניין בתיק השקעות בעל תוחלת תשואת של 18%. מהי סטיטית התקן של תיק ההשקעות, בהינתן שמקדם המתאים בין תשואות הנכדים הוא 0.6?

פתרון :

נאייר את צורת העקום הרלוונטי בנסיבות המקורה, ונציג עליה את הנעלם הרלוונטי ("?").



שאלה כמותית זו דורשת לחשב ממש את סטיטית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכדים מסוכנים. הנוסחאות לחישוב תוחלת וסטיטית התקן במקרים כאלו (של שילוב שני נכדים מסוכנים) :

תוחלת ( $W_A + W_B = 100\% \rightarrow W_B = 1 - W_A$  – מתקיים:  $E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$ )

$$E(P) = W_A * E(A) + (1 - W_A) * E(B)$$

סטיטית התקן :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

נוסחה : תוחלת תשואת תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים היא :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

כאשר :

הערך  $E(P)$  מייצג את תוחלת התשואה של תיק ההשקעות (כאן - P מלשון portfolio).

הערך  $W_A$  מייצג את משקל ההשקעה בנכס A (האחוז מסווגו שיושקע בנכס A).

הערך  $W_B$  מייצג את משקל ההשקעה בנכס B (האחוז מסווגו המושקע ב - B).

ככלל, בעולם עם שני נכסים בלבד, תמיד מתקיים  $W_A + W_B = 100\%$

הערך  $E(A)$  מייצג את תוחלת התשואה של נכס A.

הערך  $E(B)$  מייצג את תוחלת התשואה של נכס B.

נשתמש בנתוני השאלה לפיהם התוחלת של התקיק המשולב  $18\%$ , התוחלת של נכס A היא  $10\%$ , והתוחלת של נכס B היא  $30\%$ :

$$E(Q) = 18\% = W_A * 10\% + W_B * 30\%$$

אך הואילו :

$$E(Q) = 18\% = W_A * 10\% + (1 - W_A) * 30\%$$

נפשט ונקבל :

$$0.18 = 0.1W_A + 0.3 - 0.3W_A \rightarrow W_A = 0.6 = 60\%$$

והמשמעות : משקיע המעוני בתוחלת תשואת תיק של  $18\%$ , ישקיע  $60\%$  מסווגו בנכס A ואת שארית כספו קרי

$$W_A = 60\%; W_B = 40\% \text{ בנכ">\text{ B או בקצרה :}$$

בעת, כאשר משקל ההשקעה בכל נכס ידועים, ניתן להציבם יחד עם יתר נתוני השאלה בנוסחת סטיית התקון של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$



לא נראה מעין, הנוסחה קצרה אובל פשוטה להצבה :

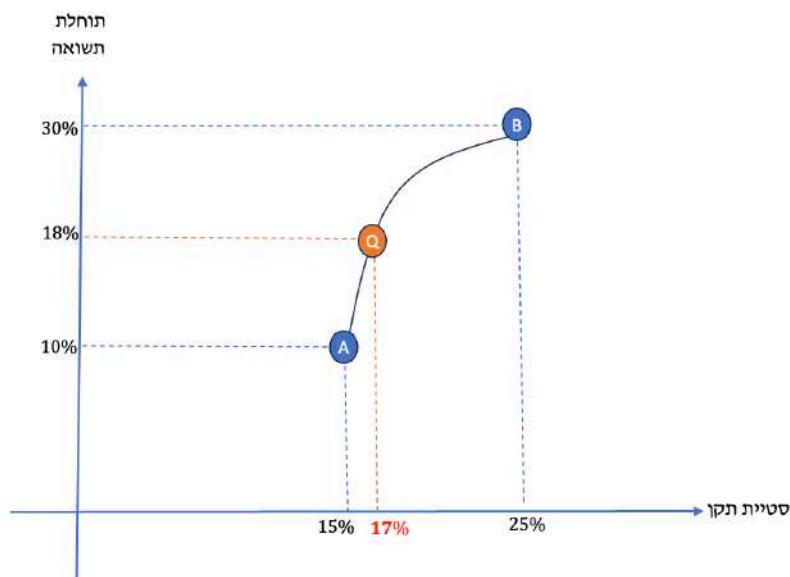
המקרה לכל הערכים זהה כמפורט בתוצאות קודמים, למעט  $\rho_{A,B}$  שמייצג את מקדם המתאים בין התשואה

בשאלה הנדונה נתון שמקדם המתאים 0.6, שטיפות התקן של נכס A היא 15% ושל נכס A היא 25%, כמו כן, דרך נתון תוחלת התקן חילצנו את משקלי ההשקעה. סטיפות התקן של הנכסים הבודדים גם הן נתונות, ולכן כל שנותר לעשות הוא להציב:

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

$$\sigma(P) = \sqrt{0.6^2 * 0.15^2 + 0.4^2 * 0.25^2 + 2 * 0.6 * 0.4 * 0.15 * 0.25 * 0.6} = 17\%$$

המשמעות: בנקודת Q (תיק ההשקעות שבו תוחלת התשואה 18%) סטיפות התקן היא 17%.



מה למדנו מ שאלה זו (78)?

ראשית, השאלה כוללת נתונים מספריים שעוזרו לנו להכריע בדבר צורת העקומה, בהתאם לדין הכללי יותר (הפרמטרי) שנערך בשאלה 77.

שנית, השאלה הציגה בפנינו לראשונה בחינוי את הנוסחאות לחישוב תוחלת התשואה וסטיפות התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסווגים. הנוסחאות מציגות את העבודה שתוחלת תיק כזו מושפעת מותוחלת הנכסים ושיעור ההשקעה ( $W$ ) בכל אחד מהם, ואילו סטיפות התקן של תיק כזו מושפעת מטיפת התקן של הנכסים ושיעור ההשקעה בכל אחד מהם, אבל גם ממקדם המתאים.

בנוסחאות אלו, שתוצגהנו עוד הרבה, אפשר להשתמש גם כדי להציב ערכים ולמצוא נדרשים, וגם כדי לחוץ את משקלי ההשקעה ( $W$ ) שיוובילו לערך סטטיסטי נתון (כأن למשל – רציתי למצוא את משקלי ההשקעה שיוובילו לתוחלת נתונה לתיק).

**שאלות 78 – בחירת משקיעים במצב של שילוב בין נכסים מסוכנים**

בשוק ההון קיימים שני נכסים מסוכנים בלבד :

מניה A : תוחלת תשואה של 10%, וסטיית תקן של 20%.

מניה B : תוחלת תשואה של 5%, וסטיית תקן של 30%.

לפניכם מספר טענות :

טענה 1 : במידה ולא ניתן לשלב בין הנכסים, כל המשקיעים שונים הבחירה יבחרו בנכס A בלבד

טענה 2 : במידה וניתן לשלב בין הנכסים, ותשואות המניות הן בלתי תלויות, כל המשקיעים שונים הבחירה יבחרו בנכס A בלבד

טענה 3 : חלק מסווני הבחירה, במידה וניתן לשלב בין הנכסים, וקדם המתאים ביניהם 0.8+, ישלו בתיקם את הנכסים A ו- B-1

הטענה / הטענות הנכונה / הנכונות :

א. טענה 1 בלבד

ב. טענה 2 בלבד

ג. טענה 3 בלבד

ד. טענות 1 ו-2

ה. כל הטענות שגויות

פתרון :

התשובה הנכונה – א.

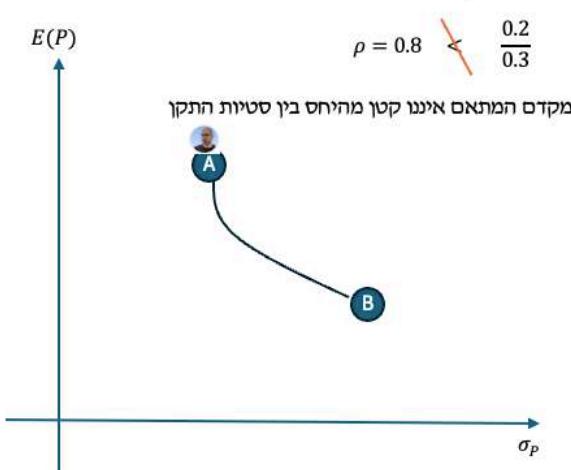
לABI טענה 1 – הדיון פשוט : אם אין אפשרות לשלב בין נכסים כלל, ומדובר נכס שמניב תוחלת גובהה יותר בסיכון יותר נמוך – ברור שהוא יודע. במקרה שלנו זה מתקיים לגבי נכס A שתוחלתו גבוהה יותר וסיכון נמוך יותר.

לABI טענות 2 ו-3 :

כאשר אני נתקל בשאלת שכלה אפשרות של שילוב בין נכסים, עם נתוני מקדמי מתאימים, וההיגדים / הטענות דנים בבחירה המשקיע, עליי ליזהות תחילת מהן אפשרויות ההשקעה (מקום תמהיל ההשקעה האפשריים), ומהו חלקו הייעיל המיציג את בחירותיו האפשריות של המשקיע שונה הבחירה.

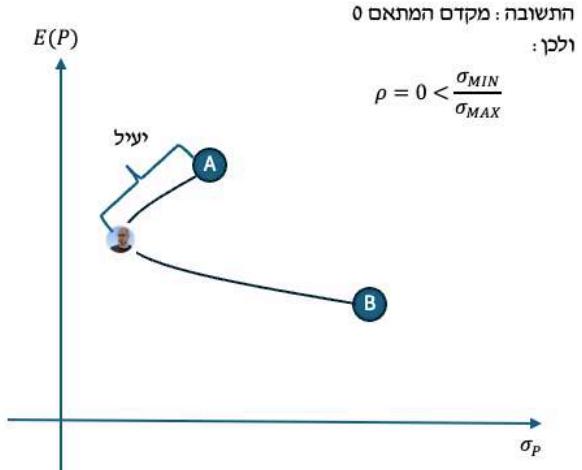
חלק ייעיל זה מתחילה תמיד בミニימים סיכון ונמשך ימינה ולמעלה והוא מוביל כפי שנראה בעמוד הבא לאפשרויות ההשקעה הייעילים הבאות שמהן תגזר התייחסות לטענות 2 ו-3 :

טענה 3 - מקדם מתאים חיובי 0.8



התמונה הckettנה מייצגת את תיק מינימום סיכון. שניים סיכון יבחרו להמציא רק על החלק הייעיל בעקבותה. במקרה זה, מינימום סיכון מתקבל בהשעעה של 100% מכספי המשקיע בנכש A. החלק הייעיל מתחילה ממינימום סיכון וממשיך ימינה ומעלה כאן: אין כלל אפשרות השקעה מימיין ולמעלה לתיק מינימום סיכון, אך יש נקודה עיליה אחת - ככל יבחרו בה: 100% A. הטענה שאומרת שחלק מסוותה הסיכון ישלו בתיק גם אחוז מסוים מ-B שגואה: כל שילוב שכזה יפגע ביעילות - יידיל סיכון ויקטין תוחלת.

טענה 2 - מה זה אומר תשואות בלתי תלויות?



התמונה הckettנה מייצגת את תיק מינימום סיכון. שניים סיכון יבחרו להמציא רק על החלק הייעיל בעקבותה. החלק הייעיל בעקבותה הוא זה שמתחילה בתיק מינימום סיכון וממשיך ימינה ולמעלה. המשמעות היא שלמורות שנכש A לבדו ייעיל, במקרה זה יש אפשרות ייעילות נוספת. אך לא נכל לומר שככל שוואי הסיכון יבחרו ב-A בלבד. הטענה שגואה.

**שאלה 78.2 – תיק מינימום סיכון ומשמעותו לגבי בחירת משקיעים**

בשוק הון קיימות שתי מנויות :

B	A	
30%	18%	תוחלת
20%	10%	סטיית תקן
+0.2		מקדמם מתאם

לגביו כל אחת מהטענות הבאות, סmeno האם היא נכונה / לא :

טענה 1 : כל המשקיעים (שונו הסיכון) יבחרו להשקיע בתיק מינימום סיכון בלבד.

טענה 2 : תוחלת התשואה של תיק מינימום סיכון היא 24%.

טענה 3 : חלק משונאי הסיכון עשויים לבחור לנtab 90% מכספי לנכס B.

טענה 4 : חלק משונאי הסיכון עשויים לבחור לנtab 90% מכספי לנכס A.

**פתרון :**

טענה 2 : תוחלת התשואה של תיק מינימום סיכון היא 24%

עוד לפני שנדון בבחירה המשקיעים – נשאלת השאלה, מהו תיק מינימום סיכון, ואיך נאפיין אותו מתמטית. זה חשוב, כי בשונה מהשאלה הקודמת, יש בשאלת טענות נוספות על תיק מינימום סיכון ספציפית ברמה הכלכלית.

קיימת נוסחה מתמטית ברורה ואפילו לא ארוכה, שעוזרת לנו לחלק את משקל ההשקעה (שיעור ההשקעה) בכל נכס, בתיק מינימום סיכון. נשתמש בנוסחה זו רק כשניתן להקטין את הסיכון – כאשר מקדם המתאים קטן מהיחס בין סטיות התקן.

תחילה נשאל עצמנו – האם מקדם המתאים שכאנו  $0.2 = \rho$  אכן קטן מהיחס בין סטיות התקן? זו שאלה חשובה!  
כי אם לא, תיק מינימום סיכון הוא לנכס A לבדו.

$$\frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}} = \frac{10\%}{20\%} = 0.5$$

האם מתקיים?

$$\rho = 0.2 < 0.5$$

התשובה : התנאי מתקיים. במצב כזה נמצא את תיק מינימום סיכון לעילו להיעזר בנוסחה ייודית שאנו מציגים פה בפעם הראשונה :

: (Minimum Risk Portfolio – MRP) בתיק מינימום סיכון (WA) בנכ"ס A (WA) בתיק מינימום סיכון (WA)

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho * \sigma_A \sigma_B}$$

נוכיר : סטיית התקן של נכס B היא 20%, ושל נכס A היא 10%. מוקדם המתאים בין הנכסים הוא 0.2.

$$W_A^{MRP} = \frac{0.2^2 - 0.2 * 0.1 * 0.2}{0.1^2 + 0.2^2 - 2 * 0.2 * 0.1 * 0.2} = \frac{6}{7} \approx 0.857 = 85.7\%$$

$$W_B^{MRP} = 1 - W_A^{MRP} \rightarrow W_B^{MRP} = 1 - 0.857 = 14.3\%$$

המשמעות : אם המשקיע ינתב 85.7% מכיסו לנכס A ו-14.3% מכיסו לנכס B, תיק ההשקעות שיוצר בידו יהיה בעל הסיכון המינימלי האפשרי.

לטובת טענה 2, נציב את משקליה ההשקעה שמצאנו בנוסחת תוחלת תיק השקעות המורכב מ-2 נכסים מסוכנים, ונחשב את התוחלת שתתקבל בתיק בעל סיכון מינימלי :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

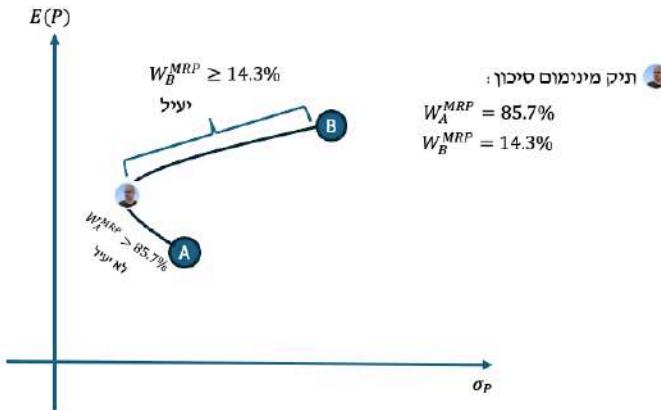
בנתוני השאלה : תוחלת A היא 18% ותוחלת B היא 30% :

$$E(P) = 85.7\% * 18\% + 14.3\% * 30\% \approx 0.196 = 19.6\%$$

טענה 2 – כללת תוחלת תשואה של תיק מינימום סיכון של 24%, זה כפונן לא המקרה – **טענה 2 שגויה.**

לצורך הדיוון בכל יתר הטענות, ללא יוצא מן הכלל – נאייר את עוקם תמהילי ההשקעה האפשריים, נבין מה מתוכו יועל, ובהתאם נדע מהן הבחירה האפשריות של המשקיע, ואילו טענות רלוונטיות. ראו בעמוד הבא את האיור עם ריכוז הנתונים, והסבירים רלוונטיים בדבר הטענות.

B	A	
30%	18%	תוחלת
20%	10%	סטטיסטית תקן
+0.2		מקדם מתאים



טענה 1 : ציינה שכל המשקיעים שונים הבחירה יבחרו בתיק מינימום סיכון, הטענה שנייה, הואיל ופרט לתיק מינימום סיכון, ישן אפשרות השקעה יעילה נוספת (ומיניה ולפעלה עד וולל נקודה B).

טענה 3 : ציינה שהחלק משונאי הבחירה יבחרו להשקעה 90% מכספי בנכש B הטענה נכונה, מודיעו מושם שכל החשכעות שכוללות לפחות 14.3% בנכש B הן יעילות, וכך חלק משוני הבחירה הינו יעילים ביחס זה.

טענה 4 : ציינה שהחלק משונאי הבחירה יבחרו להשקעה 90% מכספי בנכש A הטענה שגואה. מודיעו כי בתיק מינימום סיכון יבחרו להשקעה ב-A 85.7%. אבל אם נגידו את משקל ההשקעה ב-A מעל ערך זה, נגיד מתייק מינימום סיכון ימינה ולמיטה, חלק הלא יעיל - וזה בחרה שאף שנא סיכון לא רצוי לבצע.

**שאלה 79 – המשמעות של תשואות "בלתי תלויות", ואפיון תיק מינימום סיון**

לפניכם התפלגות התשואה של 2 מניות - יש להניח שהתשואות בלתי תלויות (מקדם מתאים 0) :

תשואה בהסתברות זו	הסתברות	מניה
10%	0.4	A
20%	0.6	
-10%	0.3	B
30%	0.7	

נדרש :

- חשבו את תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל מניה.
- חשבו את תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק המורכב מ-65% השקעה ב-A ו-35% השקעה ב-B.
- (חדש!!!) כמו כן חשבו את מאפייני תיק מינימום סיון (את התוחלת ואת סטיית התקן) שנitin לבנות על בסיס שילוב הנכסים.
- הסבירו איזו מבין חלופות ההשקעה יעדיף משקיע שונאי סיון בהתאם לקריטריון תוחלת-שונות.

פתרון :

**פתרון נדרש א - תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל נכס בנפרד**

$$E(A) = 0.4 * 0.1 + 0.6 * 0.2 = 0.16 = 16\%$$

$$\sigma(A) = \sqrt{0.4 * (0.1 - 0.16)^2 + 0.6 * (0.2 - 0.16)^2} \approx 0.05 = 5\%$$

$$E(B) = 0.3 * (-0.1) + 0.7 * 0.3 = 0.18 = 18\%$$

$$\sigma(B) = \sqrt{0.3 * (-0.1 - 0.18)^2 + 0.7 * (0.3 - 0.18)^2} \approx 0.1833 = 18.33\%$$

סטיית התקן ( $\sigma(R)$ )	תוחלת ( $E(R)$ )	מניה
5%	16%	A
18.33%	18%	B

**פתרון נדרש ב - תוחלת תשואה וסטיית התקן של תיק השקעות המורכב מ-65% בנכס A**

תוחלת :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

$$E(P) = 0.65 * 0.16 + 0.35 * 0.18 = 0.167 = 16.7\%$$

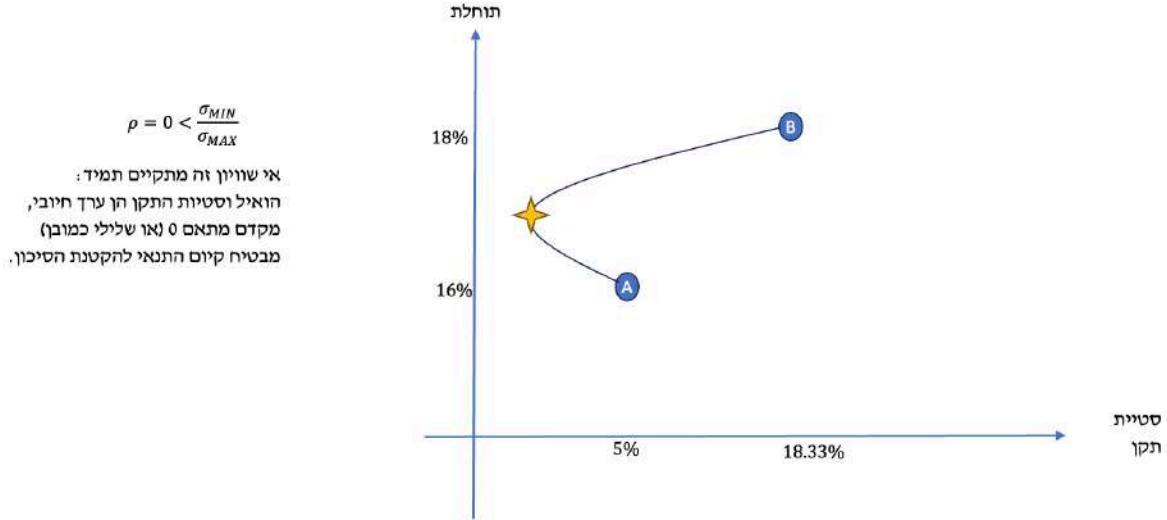
סטטיסטית התתקן :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

$$\sigma(P) = \sqrt{0.65^2 * 0.05^2 + 0.35^2 * 0.1833^2 + 2 * 0.65 * 0.35 * 0.05 * 0.1833 * 0} \approx 7.192\%$$

### פתרונות נדרש ג - תיק מינימום סיכון

כאשר מקדם המתאים קטן מהיחס בין סטיות התקן (וכאן מתקיים, כי מקדם המתאים אפס), אפיון תיק מינימום סיכון דורש יישום נוסחת  $W_A^{MRP}$  (משקל ההשקעה בנכס A - A (Minimum Risk Portfolio



משקל ההשקעה בנכס A בתיק מינימום סיכון הוא :

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B}$$

ב换בנה נקבל את האחוז מכיספי המשקיע שיש להשקיע בנכס A כדי להגיע לтик בעל הסיכון המינימלי (זה שמסומן בתרשים לעיל בכוכב) :

$$W_A^{MRP} = \frac{0.1833^2 - 0 * 0.05 * 0.1833}{0.05^2 + 0.1833^2 - 2 * 0 * 0.05 * 0.1833} \approx 0.931 = 93.1\%$$

את שארית כספנו (המשללים ל-100%) נשקיע בנכס B :

$$W_B^{MRP} = 1 - W_A^{MRP} = 1 - 0.931 = 6.9\%$$

כדי לחשב את התוחלת וסטיית התקן של תיק זה :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

$$E(MRP) = 0.931 * 0.16 + 0.069 * 0.18 = 16.138\%$$

סטיית התקן של תיק זה :

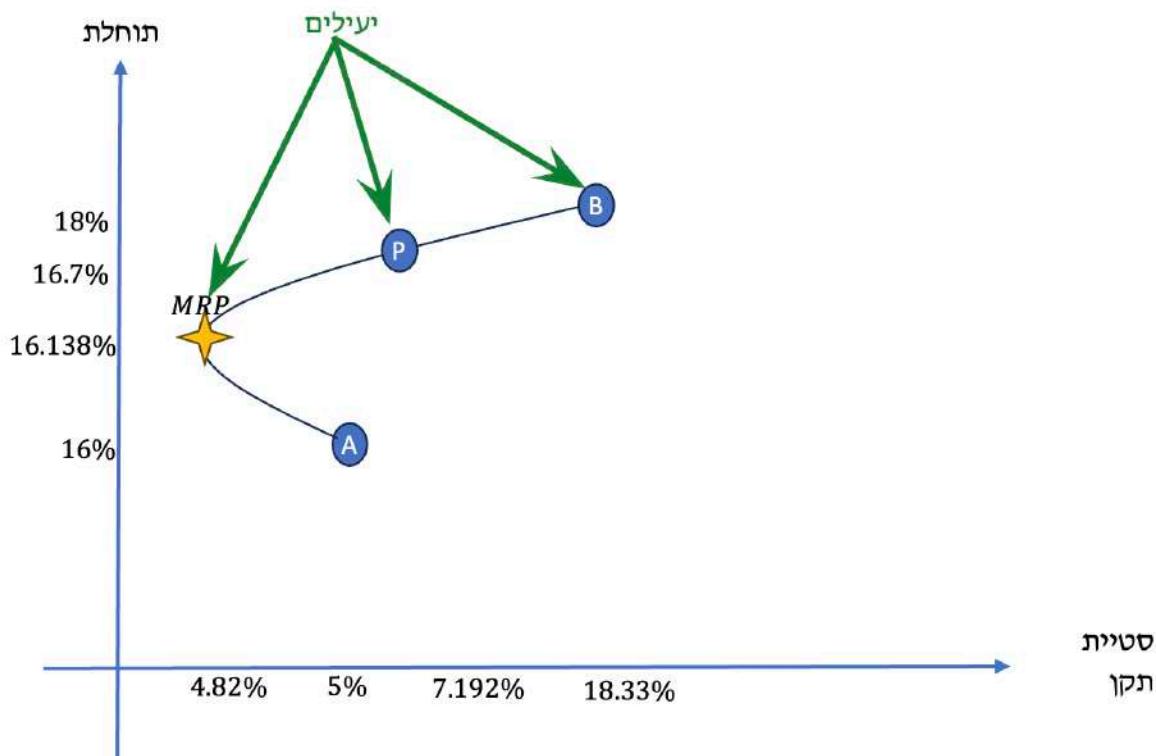
$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

$$\sigma(MRP) = \sqrt{0.931^2 * 0.05^2 + 0.069^2 * 0.1833^2 + 2 * 0.931 * 0.069 * 0.05 * 0.1833 * 0} \approx 4.82\%$$

#### פתרון נדרש ד - בחירת המשקיע

כאשר האיור בידי, וعليו תמהיל ההשקעה האפשריים (כאן - הם P, B, A ו- MRP), משתמש במשפט: תיקי ההשקעות הייעילים שאוותם ישקל המשקיע, מתחילה מתיק מינימום סיכון (כוכב, MRP) וממשיכים ימינה ומעלה.

משכך, נכס A זווהה כנכס נחות. הוא לא ייבחר על ידי שונאי סיכון הפועלים לפי קритריון תוחלת שונות. לעומת זאת, לא נוכל להכריע בין תיקי ההשקעות האחרים לפי המודל.



משקיע שונאי סיכון יבחר תמיד באפשרות השקעה יعلاה; בעולם של ניהול תיקי השקעות, אפשרויות ההשקעה הייעילות הן אלו שמתחללות בתיק מינימום סיכון (כוכב) וממשיכות ימינה ומעלה. במלים אחרות, התיקים הייעילים הם כל אלו הנמצאים על אותו חלק של עקום תמהילי ההשקעה שתחלתו בנקודת כוכב וסיומו בנקודת B שנמצאת מימין ולמעלה.

הואיל וכל התיקים הללו ייעילים, לא ניתן לדעת לא מידע נוסף באיזה מהם ספציפית יבחר המשקיע.

**שאלה 79.1 – שילוב נכסים מסוכנים – והקשר להציג גרפית ויעילות, שאלת תיאורטית לדין נסף**  
 טל הקטנה היא משקיעה שונאת סיכון. היא פועלת בעולם שבו קיימים שני נכסים מסוכנים שנitin להשקיע  
 באחד מהם, או בשילוב כלשהו ביניהם.  
 להלן הנתונים לגבי תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל אחד מהנכסים :

מניה	תוחלת ( $R$ )	סטיית התקן ( $\sigma(R)$ )
A	20%	5%
B	15%	10%

לפניכם מספר טענות :

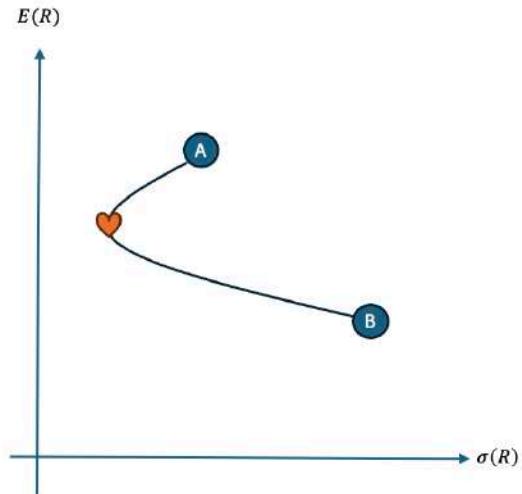
- טענה 1 : אם מקדם המתאים בין הנכסים 0, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו את כל כספם בנכס A, לאור סטיית התקן הנמוכה שלו והתוחלת הגבוהה שלו.
- טענה 2 : אם מקדם המתאים בין הנכסים שלילי, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו בתיק ההשקעות בעל הסיכון המינימלי.
- טענה 3 : אם מקדם המתאים בין הנכסים חיובי, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו את כל כספם בנכס A, לאור סטיית התקן הנמוכה שלו והתוחלת הגבוהה שלו.
- טענה 4 : אם מקדם המתאים בין הנכסים 1+, כל המשקיעים שונים הסיכון ישקיעו את כל כספם בנכס A.

הטענה / הטענות הנכונה / הנכונות :

- טענה 1 בלבד
- טענה 2 בלבד
- טענה 3 בלבד
- טענה 4 בלבד
- כל הטענות שגויות

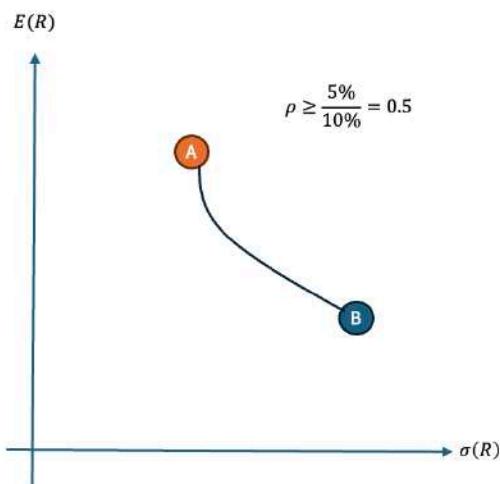
**פתרון:**

התשובה הנכונה היא ד. בעמודים הבאים לגבי כל אחד מהמצבים ובהתחתיותם – דין רלוונטי לשילילה או אישור כל טענה.

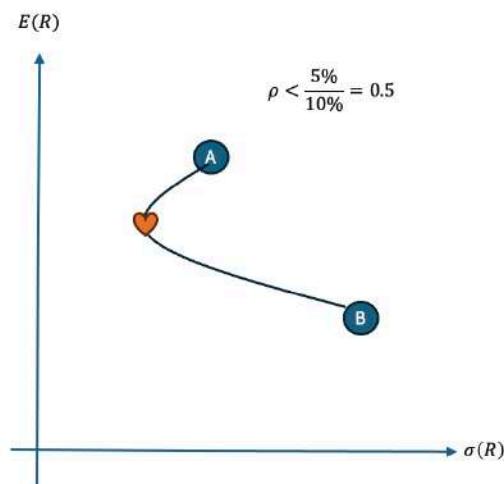


טענה 1: שגואה. המשקיעים שונים הסיכון יכולים להימצא בנקודת כלשהו בין נקודות הלב (מינימום סיכון שבharga) מותקינית בהינתן מקדם מותאם אפס) לבין נקודה A.

טענה 2: שגואה. מקדם מותאם שלילי מוביל גם לאפשרות להקטין סיכון (נקודת לב שנמצאת משמאל לשני הנכסים) אבל עדין אפשרויות ההשקעה היעילות כוללות גם את כל חלק העקומה שמשמאלה ולמעלה לנקודת הלב.

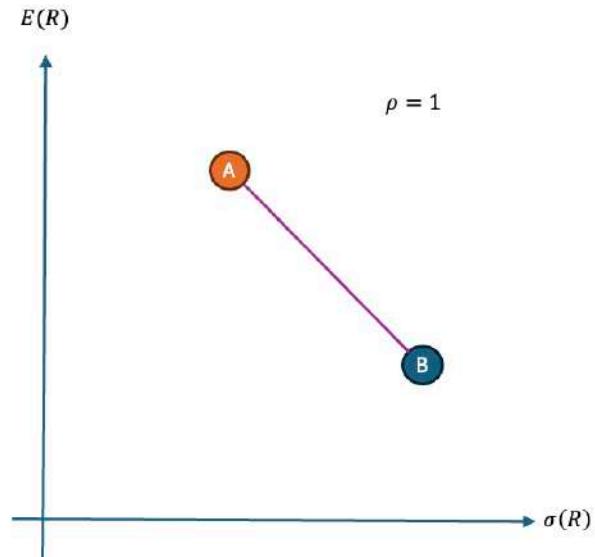


אם מקדם המתאים חיובי אך גדול שווה ליחס בין סטיות התקן (וכאן לא נוכל לדעת לבטוח שכן זה המצב) אז אכן ההשקעה היעילה היחידה הינה כוללת 100% בנכס A. במקרה זה - לא נוכל לומר זאת.



אם מקדם המתאים חיובי אך עודנו קטן מהיחס בין סטיות התקן (ובשאלה אין תנאים שייעורו להכריע בנושא) אז נשиск להיות במצב שבו כל תיקי ההשקעות מנקודת הלב עד וככל נקודה A ייעילת. לא נוכל להגיד שرك A יבחר.

דיון בטענה 3: לא יודעים באיזה "תת מקרה" אני נמצא, ולכן לא ניתן להכריע ולאשר את הטענה



דיוון בטענה 4: כאשר מקדם המתאים בין הנכסים הוא 1+, לא זאת בלבד שאי אפשר להקטין סיכון, עוקם תמהילי ההשקעה האפשריים הוא הקו הישר המחבר בין הנכסים. ספציפית במקרה זה, אפשר לראות שעוקם תמהילי ההשקעה שנוצר כולל נקודות מינימום סיכון אחת (A) שאין אף נקודה שנמצאת מימין ולמעלה ממנה. במלים אחרות נקודה A (ההשקעה של 100% ב-A) היא הנקודה היעילה היחידה, וכל שונאי הסיכון יבחרו בה. הטענה נכונה.

## שאלות מבחנים בנושא תיקי השקעות המורכבים משני נכסים מסוכנים

### שאלה 12 – שאלון בחינה 25

#### שאלה 12

שוק ההון נסחרים נכסים A ו-B. ידוע כי:

$$E(R)_B > E(R)_A$$

$$\sigma(R)_B > \sigma(R)_A$$

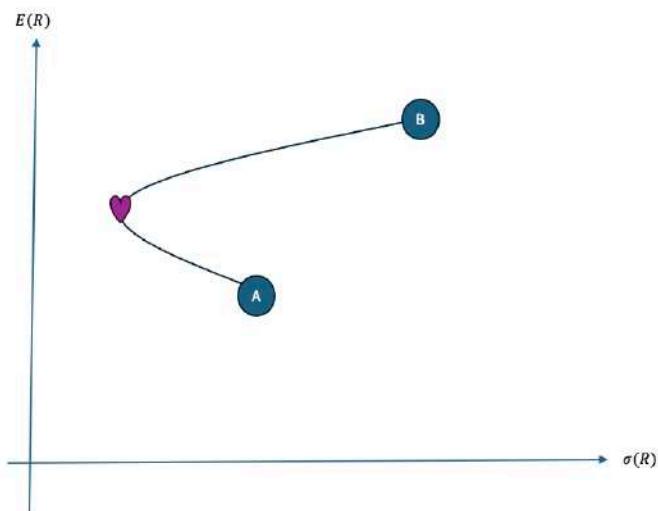
מקדם המותאם בין הנכסים (A ו-B) נמוך מ-0.

משקיע דוחה סיכון יכול להשקיע בכל אחד מהנכסים הללו או בשילוב שלהם.

**מהי הקביעה הנכונה?**

- המשקיע בחר להשקיע בתיק המורכב משני הנכסים (A ו-B), במטרה לצמצם סיכון.
- המשקיע עשוי לרכוש את כל השקעותו בנכס B המסוכן יותר, למטרות סיכון הגובה.
- המשקיע עשוי לרכוש את כל השקעותו בנכס A הפתוח מסוכן, במטרה לצמצם סיכון.
- המשקיע בחר רצוי את כל השקעותו בנכס A הפתוח מסוכן.
- תשובות ב-1-ד נכונות.

**התשובה ב. להלן פירוט:**



עוקם תמהיל ההשקעה הייעילם בהינתן האפשרות להקטין סיכון (בטן / פופיק) הנובעת בבחירה מעוקם מקדם מתואם קטן מ-0 - הוא מינוחת הלב עד וככל נקודה B.

**טענה ב:** נכון, כשלורטוט "המשקיע עשוי לבחרו" בעקבות מותאים אפשרויות השקעה וUILAH בפni עצמה. ואכן, השקעה ב-100% ב-B היא UILAH (למטרות שאיננהUILAH היחידה) ולכן יש מנגנון שתחבורה.

**טענה :** על פי הטענה, התיקים היעילם הקיימים שבינם יבחר מושקיע הם ככל הוללים שילוב בין A ל-B. במלים אחרות - הטענה אומתת שההשקעה של 100% ב-B-A איננהUILAH וגם השקעה ב-100% ב-B היאUILAH. הטענה שוויה והאילוג גם השקעה של 100% ב-B שאיננה משלבת בין הנכסים היאUILAH.

**טענה ד:** שגوية. מאותה סיבה ששילוטו את ג', שלול את ד'.

**טענה ג:** שגوية. השקעה ב-100% של A היא מוחץ לטווח התיקים היעילם שכאמור מתחילה בנקודת החלב וממשיך ימינה ולמעלה לכיוון נכס B.

**טענה ח:** שלולתי, שללטו את ד'.

## שאלה 13 – שאלון בחינה 25

### שאלה 13

לניירות ערך  $A$  ו-  $B$  הנתונים הבאים :

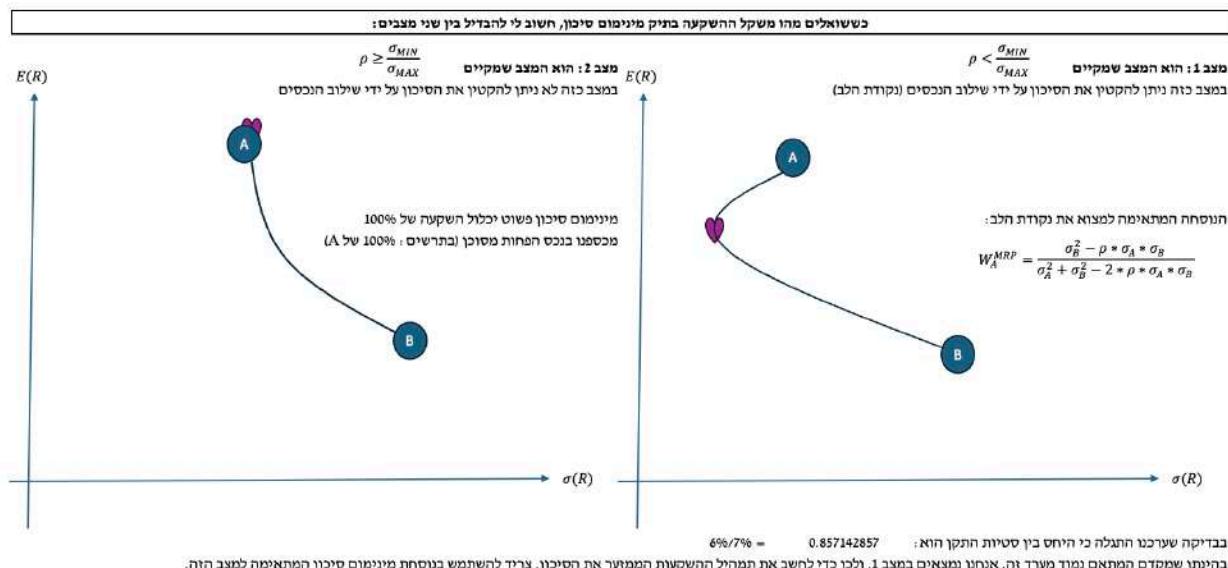
$A$ ני"ע	$B$ ני"ע
19%	15%
6%	7%
$\rho(R_A, R_B) = 0.665$	מקדם המתאים

המשקלות של תיק השקעות בעל סיכון מינימלי המורכב משני הנכסים :

- א. 55% -  $B$  ; 45% -  $A$
- ב. 28% -  $B$  ; 72% -  $A$
- ג. 45% -  $B$  ; 55% -  $A$
- ד. 86% -  $B$  ; 14% -  $A$
- ה. 72% -  $B$  ; 28% -  $A$

פתרון :

התשובה היא ! להלן דיוון כללי – כיצד מוצאים משקלים השקעה בתיק מינימום סיכון במצביים שונים :



ציב בנוסחה המתאימה ל蹶ה 1 :

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B} = \frac{0.07^2 - 0.665 * 0.06 * 0.07}{0.06^2 + 0.07^2 - 2 * 0.665 * 0.06 * 0.07} = 0.723 \approx 72\%$$

משקל ההשקעה בנכס  $B$  במצב כזה יהיה הערך המשלים ל-100% כלומר : 28%

## שאלה 14 – שאלון בחינה 24

### שאלה 14

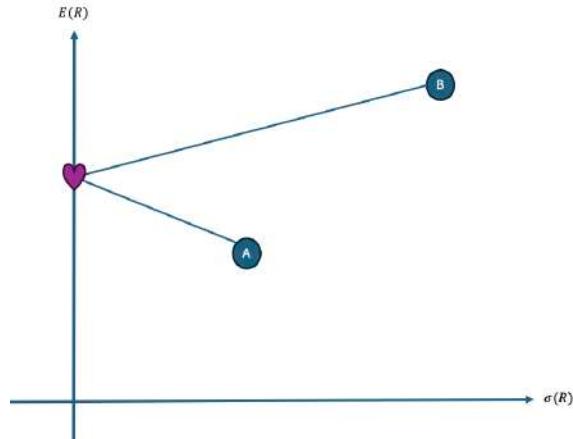
בנהנעה שבשוק הhaven נסחרים שני נכסים  $A$  ו- $B$ :  
 תוחלת התשואה של  $A$  שווה ל-5% עם סטיית תקן של 2%. תוחלת התשואה של  $B$  שווה ל-10% עם סטיית תקן של 3%.  
 בהנחה שמקדם המתאים בין שני הנכסים שווה ל-(-1), **ביצד נציג תיק השקעות חסר סיכון?**

- א. התיק יהיה מושקע 40% בנכס  $A$  ו-60% בנכס  $B$ .
- ב. התיק יהיה מושקע 30% בנכס  $A$  ו-70% בנכס  $B$ .
- ג. התיק יהיה מושקע 60% בנכס  $A$  ו-40% בנכס  $B$ .
- ד. התיק יהיה מושקע 91% בנכס  $A$  ו-9% בנכס  $B$ .
- ה. רק על-ידי השקעה בנכס חסר סיכון (Rf).

**פתרון:**

התשובה ג.

הוائل וננו שמקדם המתאים בין הנכסים הוא -1, אכן ניתן לאפס את הסיכון על ידי בנייה נכונה של תיק השקעות – למעשה, תיק מינימום סיכון בהינתן מקדם מתאים מינוס אחד, תמיד מוביל לסיכון 0:



ולכן מקבלים:

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B} = \frac{0.03^2 - (-1) * 0.02 * 0.03}{0.02^2 + 0.03^2 - 2 * (-1) * 0.02 * 0.03} = 0.6 = 60\%$$

ובשפה פשוטה: משקל ההשקעה בנכס  $A$  בתיק מינימום סיכון הוא 60% ואילו משקל ההשקעה בנכס  $B$  בתיק מינימום סיכון הוא 40%.

**שאלון 22 – שאלה 15** **שאלה 15**

לפניכם הנתונים הבאים:

נ"י"ע B	נ"י"ע A	
8%	15%	תוחלת התשואה
10%	20%	סטטיסטית התקן

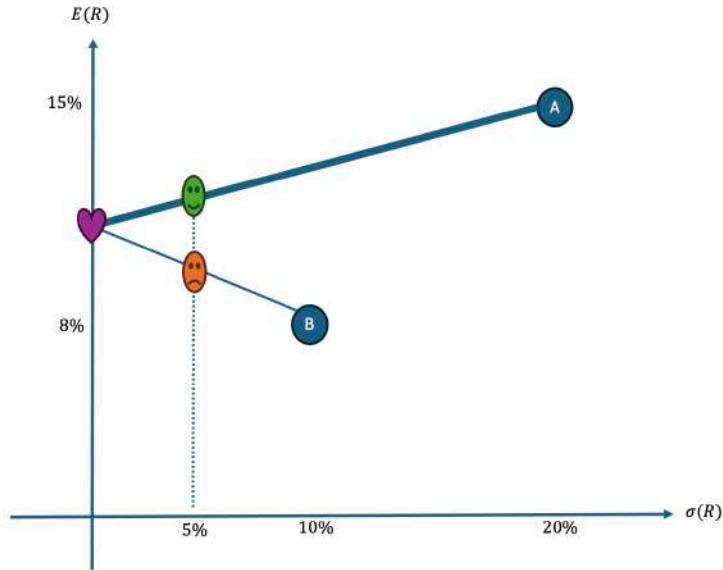
משקיע בונה תיק המשלב בתוכו את נ"י"ע A ו- B , כאשר מקדם המתאים בין תשואות המניות שווה ל- (1-). המשקיע מעוניין להשקיע **יעיל**, עם סטטיסטית התקן של 5%.

**מהי תוחלת התשואה של התיק?** (התשובות מופיעות ברמת דיווק של סירה אחת לאחר הנקודה)

- א. 13.7%
- ב. 9.2%
- ג. 11.5%
- ד. 10.3%
- ה. תשובות ב ו-ג נכונות.

**פתרון:**

בשאלה זו, איזור נכוון לבחיר בפנינו שלמעשה קיימים שני תики השקעות שmobiliים לסטיתות תקן של 5%. מתוכם, רק אחד יהיה יעיל. כפי שנווכל לראות באיזור בעמוד הבא, הנקודת הירוקה שהיא הקרויה יותר ל-A כלומר, זו המאפיינת במשקל השקעה גבוהה יותר בנכס A היא היעילה מ בין השתיים, והוא מסומנת בסימיליירוק.



נוסחת סטיתת התקן לתיק השקעות המורכב מ-2 נכסים מסוכנים היא :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho}$$

בhzבבה :

$$0.05 = \sqrt{W_A^2 * 0.2^2 + (1 - W_A)^2 * 0.1^2 + 2 * W_A * (1 - W_A) * 0.2 * 0.1 * (-1)}$$

העלאת שני האגפים בריבוע :

$$0.05^2 = W_A^2 * 0.2^2 + (1 - W_A)^2 * 0.1^2 + 2 * W_A * (1 - W_A) * 0.2 * 0.1 * (-1)$$

מאל מגuil לפתח משווה כזו, אבל אם עושים זאת מגלים :

$$W_A(1) = 0.5; \quad W_A(2) = 0.1667$$

הערך ש כולל משקל גבוהה יותר ב-A מנצח, מה שmobiliים למסקנה שלפיה :

$$E(P) = 0.5 * E(A) + 0.5 * E(B) = 0.5 * 0.15 + 0.5 * 0.08 = 0.115 = 11.5\%$$

ולכן התשובה ג.

ומה לגבי פיתוח פחות מגעיל, ד"ר צבאן?

כשמדובר המתאים הוא 1-, נוסחת סטיטית תקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים עונה להגדרות הבאות:

$$\sigma(P) = |W_A * \sigma_A - W_B * \sigma_B|$$

ונס:

$$\sigma(P) = |W_B * \sigma_B - W_A * \sigma_A|$$

נציב בכלל אחת ממשוואות אלו את סטיטית התקן הנזונה שהוא 5% :

$$0.05 = |W_A * 0.2 - (1 - W_A) * 0.1| \rightarrow W_A = 50\%$$

$$0.05 = |(1 - W_A) * 0.1 - W_A * 0.2| \rightarrow W_A = 16.67\%$$

במצב כזה, גם בלי הפנייה הריבועי המסדרית, הצלחנו למצוא את שתי הנקודות החשודות, והואיל ואנו יודעים שהנקודה הקטנה יותר ל-A היא היעילה – סיימנו.

הערך שכולל משקל גובה יותר ב-A מנצח, מה שמוביל למסקנה שלפיה :

$$E(P) = 0.5 * E(A) + 0.5 * E(B) = 0.5 * 0.15 + 0.5 * 0.08 = 0.115 = 11.5\%$$

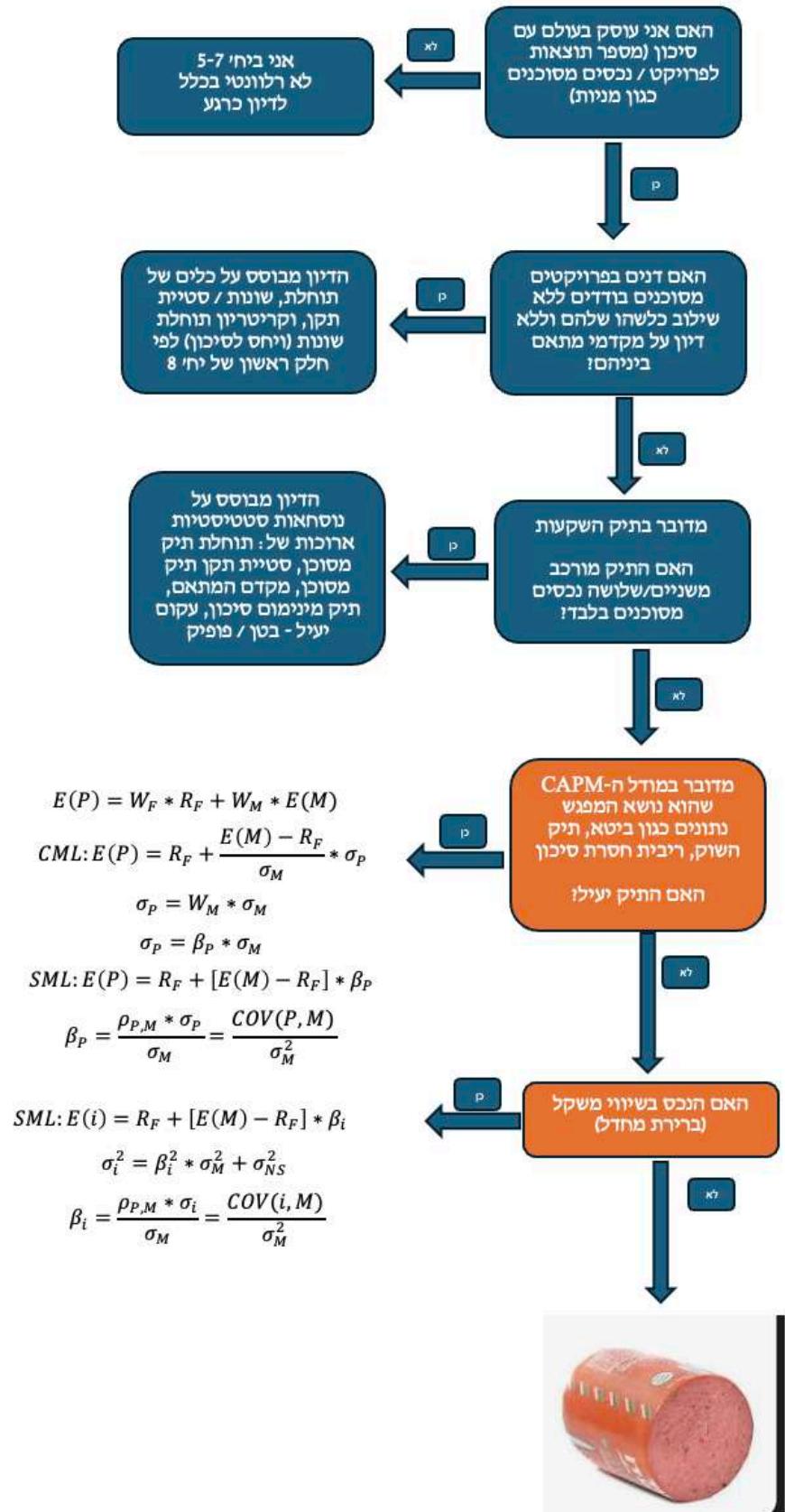
ולכן התשובה ג.

### מודל חדש (אחרון וננק) לניהול תיקי השקעות - מודל ה - CAPM

המודל שהציגנו בחלק הראשון של השיעור, שדן בתיקי השקעות הכלליים נכסים מסוכנים בלבד (ובדרך כלל – שני נכסים מסוכנים בלבד) הוא מודל פשוטני. הוא מניח שלא קיימים בעולם נכסים חסרי סיכון (כגון אגרות חוב ממשלתיות), וכן כי לא ניתן ליטול הלוואות – כמובן, המשקיע מוגבל להשקעת הונו הראשוני בלבד. בעולם האמיתי – ישנים גם נכסים לא מסוכנים, ובנוספ' – בהחלטת ניתן ליטול הלוואות לטובות מימון השקעות. כדי לכלול אפשרות אלו במודל באופן מלא, אנו נעסוק במודל בגרסת המורחבת – מודל ה - CAPM, ראשי התיבות של : Capital Asset Pricing Model

הנחות מודל ה - CAPM :

- א. כל המשקיעים שונאי סיכון.
- ב. ניתן להפקיד / להשקיע כל סכום בנכס חסר סיכון. תשואתו של נכס חסר סיכון מסומנת ב-  $R_F$ .
- ג. ניתן ללוות כל סכום בריבית חסרת סיכון.
- ד. כאשר משקיעים מעוניינים לסכן חלק מהתיק – הם יشكיעו אותו בתיק מסוכן שנקרא "תיק השוק" ואשר מסומן באות  $M$ . למשל, בשוק הישראלי, המקבילה לתיק השוק היא מzd ת"א 135, שמכיל את המניות הגדולות במשק הישראלי, בפייזור רחוב שמקטין סיכון. בשאלות שאנו נפתחו, תיק זה יהיה נתון או מחולץ (לא נctrיך לחשבו במישרין).



בעולם המקיים את הנחות ה - CAPM, علينا לאפיין את עיקום תיקי ההש侃ות היעילים:

### נוסחת משקל ה השקעה בתיק ייעיל - במודל ה - CAPM

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

כאשר :

הערך  $E(P)$  הוא תוחלת התשואה של תיק ייעיל בהנחות המודל.

הערך  $W_F$  הוא השיעור (האחוז) מכספי המשקיע שמושקע בנכס חסר סיכון. המצביעים האפשריים לגבי ערכי משתנה זה הם :

$W_F > 0$  המשקיע מנתב חלק מכספי בנכס חסר סיכון.

$W_F = 100\%$  המשקיע מנתב את כל כספו לנכס חסר סיכון.

$W_F < 0$  המשקיע נוטל (לוקח) הלוואה בריבית חסרת סיכון.

הערך  $R_F$  מהווה את הריבית חסרת הסיכון, בדרך כלל נתונה / מוחלצת.

הערך  $W_M$  הוא השיעור (האחוז) מכספי שמושקע בתיק השוק (התמהיל המסוכן האידאלי בהנחות המודל).

תמיד מתקיים ש :  $W_M = 1 - W_F$

הערך  $E(M)$  הוא תוחלת התשואה של תיק השוק.

### נוסחת תוחלת תיקים ייעילים במודל ה - CAPM - קו ה - CML

המושג CML מהווה את ראשית התיבות של Capital Market Line. קו שוק ההון. זהו תיאור גרפי שמייצג את הקשר בין רמת הסיכון בנכסים ייעילים לפי המודל (סטטיסטית התקן) לבין תוחלת התשואה.

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

כאשר :

הערך  $\sigma_M$  מהווה את סטטיסטית התקן של תיק השוק. בדרך כלל נתון או מוחלץ.

הערך  $\sigma_P$  מהווה את סטטיסטית התקן של התקן הייעיל.

### נוסחת סטטיסטית התקן של תיק ייעיל - במודל ה - CAPM

הואיל ותיק ייעיל במודל ה - CAPM מורכב רק משילוב נכס חסר סיכון  $R_F$  שסיכוןו  $0$ , וمتיק השוק שסיכוןו

$\sigma_M$ , הרי שסטטיסטית התקן של תיק ייעיל מושפעת מהשיעור המשקיע בתיק השוק - ומסיכון השוק :

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

### **נוסחה נוספת לסטטיסטיקת תקן של תיק ייעיל - מבוססת ביתא - במודל ה - CAPM**

ביטה היא מודד סיכון הבוחן את הסיכון היחסי של התקיק ביחס לשוק. כאשר התקיק ייעיל, ניתן להיעזר בנתון הביטא כדי לחשב את סיכון התקיק כדלקמן :

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M$$

כאשר :

הערך  $\beta_P$  הוא ערך של פירוב לא מחשבים ישירות (אלא נתון / מחולץ) והוא משקף את הסיכון היחסי של תיק ייעיל ביחס לשוק. כלומר : ביטה גדולה מ-1 משמעה "התיק מסוכן יותר מהשוק", וביטה קטנה מ-1 משמעה "התיק מסוכן פחות השוק", וביטה שווה ל-1 משמעה "התיק מסוכן כמו השוק".

**שאלה 80 - שאלת בסיסית לחילוץ ערכאים בגין תיקים ייעילים - CAPM**  
 בשוק הוו המקיימים את הנחות מודל ה - **CAPM**, נ驰רים שני תики השקעות **יעילים** : A ו- B. להלן נתונים רלוונטיים :

ריבית חסרת סיכון (נטולת סיכון) היא  $R_F = 5\%$ .

תוחלת התשואה של תיק השוק היא  $E(M) = 10\%$ .

וסטיות התקן של תיק השוק היא  $\sigma(M) = 20\%$ .

ידוע שתוחלת התשואה של נכס A היא  $E(A) = 15\%$  וסטיות התקן של נכס B היא  $8\%$  נדרש :

א. מהי סטיות התקן של נכס A כלומר?  $\sigma(A) = ?$

ב. מהו ריבב השקעות של נכס A (איזה חלק מכיפוי המשקיע מושקע בנכס חסר סיכון, ואיזה חלק מושקע בתיק השוק)?

פתרון :

#### פתרון סעיף א

לפי תרשימים הזרימה שהגדנו, מדובר במודל CAPM, בעולם עם ייעילות. את סטיות התקן של נכס ייעיל במודל CAPM אפשר לחשב ככמה דרכים :

**נוסחה 1 שאותה מקיים בכל התקים היעילים ב-CAPM קו ה-CML:**

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

כאשר :

ערך בשאלת	הגדרה	סימון
$E(P_A) = 15\%$	תוחלת תשואה של תיק CAPM portfolio ייעיל-ב-CAPM	$E(P)$
$R_F = 5\%$	ריבית חסרת/נטולת סיכון (אג"ח ממשלתית)	$R_F$
$E(M) = 10\%$	תיק השוק (שילוב אידיאלי של נכסים מסוכנים)	$E(M)$
$\sigma_M = 20\%$	סטיות התקן של תיק השוק	$\sigma_M$
$\sigma_{P_A} = ?$	סטיות התקן של התקן היעיל-ב-CAPM	$\sigma_P$

$$CML: 15\% = 5\% + \frac{10\% - 5\%}{20\%} * \sigma_{P_A} \rightarrow \sigma_{P_A} = 40\%$$

## פתרונות סעיף ב

בבינטן ערכי סטטיסטיקות התקן וגם התוחלת של התקיק, דיוון בהרכב של תיק השקעות ייעיל משמעו תשובה לשאלת פשוטה: איזה אחוז מהתקיק מושקע בנכס חסר סיכון  $R_F$  ואיזה אחוז מהתקיק מושקע בתיק השוק שתוחלתו היא  $E(M)$ ?

קיימות נוסחה ספציפית שמודעת לקשר בין משקליה ההשכעה בנכס חסר סיכון (ה אחוז מכיספי המשקיע מושקע בנכס חסר סיכון -  $W_F$ ) ואחיזה משקל ההשכעה בתיק השוק  $W_M$  בין תוחלת התקיק היעיל שבנוי לפי משקלים אלו – בבינטן שהוא תיק ייעיל במודל-ה-CAPM:

**נוסחה 2 – תוחלת תשואת תיק ייעיל ב-CAPM על בסיס משקל ההשכעה בנכס חסר סיכון ובתיק השוק:**

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

נדיר ונציב את הנתונים הרלוונטיים:

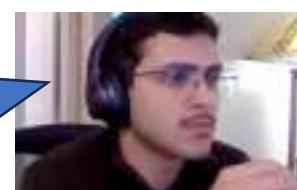
סימן	הגדרה	ערך בשאלת
$E(P)$	תוחלת תשואת של תיק Portfolio ייעיל ב-CAPM	$E(P_A) = 15\%$
$R_F$	ריבית חסרת/נטולת סיכון (אג"ח ממשלתית)	$R_F = 5\%$
$E(M)$	תיק השוק (שילוב אידיאלי של נכסים מסוכנים)	$E(M) = 10\%$
$W_F$	ה אחוז מכיספי המשקיע המושקע בנכס חסר סיכון אם $0 < W_F$ המשמעות היא שהמשקיע לוקח הלוואה	$W_F = ?$
$W_M$	ה אחוז מכיספי המשקיע המושקע בתיק השוק ההון ההתחלתי בתוספת כספי הלוואה (200%) בתיק השוק.	$W_M = 1 - W_F = ?$

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

$$15\% = W_F * 5\% + (1 - W_F) * 10\% \rightarrow W_F = -1 = -100\%$$

המשמעות: כאשר מתקבל או נתון ערך שלילי של  $W_F$  הפרשנות היא שמדובר בהלוואה. במקרה זה, קיבלת ערך של  $-100\% = -1 = W_F$  משמעותה שהמשקיע נוטל הלוואה בשיעור של 100% מההון העצמי, ומשקיע את ההון ההתחלתי בתוספת כספי הלוואה (200%) בתיק השוק.

אפשר לשים לב שמעבר לחישוב הטעני, הרוי המשקיע הצלח להיעסן כדי לתוכלת תשואת  $E(P) > E(M)$  שגבוה יוטר מתוכלת השוק. הדרך היחידה לעשות כן היא ליטול הלוואה!



**בקיצור: הצגנו 2 נוסחאות לחישוב תוחלת תשואת של תיקים ייעילים ב-CAPM והבהירנו שלעתים נשתמש בנוסחה זו ולעתים באחרת, לשם חילוץ ערכיים, תלוי מה השאלה רוצה.**

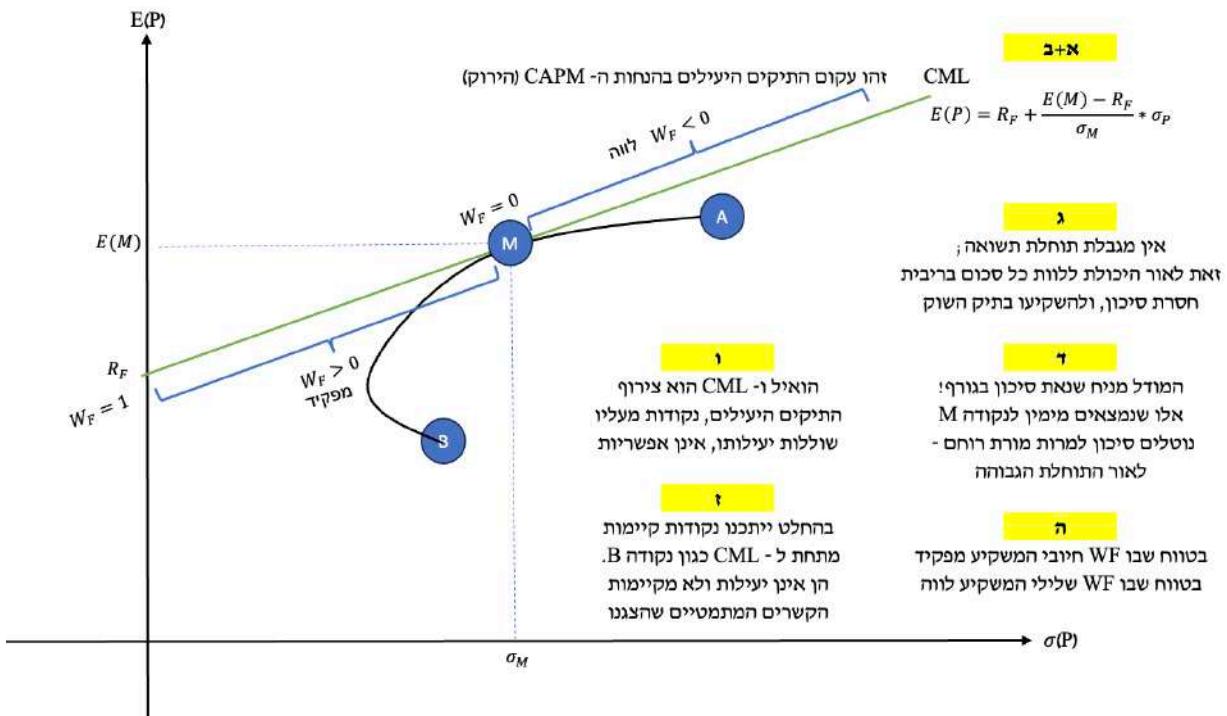
### שאלה 81 - הצגה גרפית בסיסית של העקום הייעיל - CAPM

- א. הציגו באופן גרפי את עקום התיקים הייעילים בעולם המקיים את הנחות ה- CAPM [אשר מותווה את הקשר בין הסיכון – סטיית התקן על הציר האופקי, ותוחלת התשואה על הציר האנכי].
- ב. מיקמו על גבי העקום את תיק השוק ואת הנכס חסר הסיכון.
- ג. האם תוחלת התשואה לפי המודל מוגבלת? הסבירו.
- ד. האם משקיע הנמצא מימין ומעל נקודת  $M$  על העקום הוא משקיע אהוב סיכון? נמקו.
- ה. באיזה טווח על גבי העקום המשקיע נח呼ב "לוהה", ובאיזה טווח נח呼ב "מפרקיד"?
- ו. האם ייתכנו נקודות מעל ה-  $CML$ ?
- ז. האם ייתכנו נקודות מתחת ל-  $CML$ ?

**פתרון נדרש א:**

הציגנו שבעולם ה- CAPM שבו ניתן להפקיד וללולות בריבית חסרת סיכון, התיקים הייעילים כוללים שני חלקים – נכס חסר סיכון המסומן  $RF$ , ואת תיק השוק המסומן באות  $M$ . כל התיקים הייעילים מצויים על הקו הישר המחבר בין אופציונות השקעה אלו, מה שמייצג את העובדה שמשקיעים יכולים לחלק את כספם כראות עיניהם בין נכסים חסרי סיכון לבין תיק השוק בהתאם.

בעמוד הבא – מוצג התרשים המבהיר צורתנו של ישר תיקי ההשקעות הייעילים במצב כזה, ואפיונים רלוונטיים מתאים.



### 81.1 – המשמעות הבסיסית של מודל ה-CAPM לגבי תיקי השקעות ייעילים – קו ה- CML

שוק הון למשקיעים קיימת אפשרות השקיע בנכס חסר סיכון  $R_F = 5\%$  וכן ללוות ללא מגבלה בריבית זו (מתקיים מודל ה-CAPM).

בנוסף, זהה כי בשוק הון זה התמיהיל האופטימלי של נכסים מסווגניים [התיק שבו ישקיע אדם שרצו לאחסן 100% מכיספו] מניב תוחלת תשואה של 20% וסטיית התקן שלו 30% (תוחלת התשואה של תיק השוק 20% וסטיית התקן של תיק השוק 30%).  $E(M) = 20\%$  ו-  $\sigma(M) = 30\%$ .

נדרש:

- מיהי תוחלת התשואה של תיק השקעות ייעיל שרמת הסיכון שלו (סטיית התקן שלו) 10%.
- מיהי סטיית התקן של תיק השקעות ייעיל שתוחלת תשואתו 15%.
- האם ניתן לבנות תיק השקעות שתוחלת תשואתו 45%? הסבירו ללא צורך בחישוב.
- מהו הרכב ההשקעות [איזה אחוז מכספי המשקיע יושקע בנכס חסר סיכון ואיזה יושקע בתיק השוק] אם תוחלת התשואה של תיק היעד (תיק ייעיל) 12%?
- מהו הרכב ההשקעות של תיק ייעיל שתוחלת תשואתו 50%?

פתרון:

ראשית, עוד לפני הגישה לנדרשים השונים, עלינו לבחון באיזה מודל השאלה עוסקת. בפרט – האם אני דין כאן בנכסים מסווגניים בלבד, ללא אפשרות שילוב (כנראה שלא). האם אני דין כאן במודל שכולל נכסים מסווגניים בלבד (כנראה שלא, מדובר בה-CAPM) וישנם גם תנאים על נכס חסר סיכון.

האם אני דין בתיקים יעילים ב-CAPM? התשובה חיובית (אם תהיה שלילית – אללה ירחמו, זה נת מודל שונה שיויצג בהמשך). והואיל והתיקים יעילים, מתקיימות כל המשוואות הבאות:

נוסחה 1 – **קו ה- CML** – נוסחה הקורשת בין סטיית התקן של תיק ייעיל לתוחלותו ב-CAPM :

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

נוסחה 2 – **תוחלות תיק ייעיל ב-CAPM** על בסיס שיקול תוחלות השוק ונכס חסר סייכון במשקלים מתאימים :

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

נוסחה 3 – **סטיית התקן של תיק ייעיל על בסיס משקל ההשקעה בתיק השוק :**

$$\sigma(P) = (1 - W_F) * \sigma_M$$

נוסחה 4 – **סטיית התקן של תיק ייעיל על בסיס מקדם הסייכון השיטתי שלה (ביטהא) וסייכון השוק :**

$$\sigma(P) = \beta_P * \sigma_M$$

א. מהי תוחלות התשואה של תיק השקעות ייעיל שרמת הסייכון שלו (סטיית התקן שלו) 10%.

הנוסחה המתאימה :

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$E(P) = 5\% + \frac{20\% - 5\%}{30\%} * 10\% \rightarrow \boxed{E(P) = 10\%}$$

ב. מהי סטיית התקן של תיק השקעות ייעיל שתוחלות תשואתו 15%.

בניל, משום שעדין עוסקים בקשר שבין תוחלות וסטיית התקן :

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$15\% = 5\% + \frac{20\% - 5\%}{30\%} * \sigma_P \rightarrow \boxed{\sigma_P = 20\%}$$

ג. האם ניתן לבנות תיק השקעות שתוחלות תשואתו 45%? הסבירו ללא צורך בחישוב.

במודל-**CAPM** תוחלות התשואה אינה מוגבלת. **ה-CAPM** מציג עקומם תמהילי השקעות יעילים שנראה כקו ישר לא מוגבל, משום שהמודול מניח שנייתן ללוות כל סכום בריבית חסרת סייכון נמוכה, להשקיע אותו בנכסים מסוכנים וכך עקרונית להגדיל את תוחלות התשואה וגם הסייכון "ללא גבול". לכן, אין שום בעיה לבנות תיק השקעות בתשואה כלשהי, ואפילו בעל תוחלות תשואה גבוהה יותר מזו של תיק השוק (שכאן מנייב 20%).

ד. מהו הרכב ההשקעות [איזה אחוז מכסי המשקיע יושקע בנכס חסר סיכון ואיזה יושקע בתיק השוק]

אם תוחלת התשואה של תיק היעד (תיק ייעל) 12%?

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

$$12\% = W_F * 5\% + (1 - W_F) * 20\%$$

התוצאה (ככל הנראה) :

$$W_F = 53.33\%$$

ה השקיע ינתב 53.33% מההשקעות בנכס חסר סיכון.

את כל יתר השקעות, המשלים ל-100%, 46.67% ינתב המשקיע לתיק השוק.

$$W_M = 1 - W_F \rightarrow W_M = 1 - 53.33\% \rightarrow W_M = 46.67\%$$

ה. מהו הרכב ההשקעות של תיק ייעל שתוחלת תשואתו 50%?

$$50\% = W_F * 5\% + (1 - W_F) * 20\%$$

התוצאה :

$$W_F = -2 \rightarrow W_F = -200\%$$

במודל ה-CAPM, המשמעות של משלקל השקעה שלילי בנכס חסר סיכון משמעה נטילת הלוואה.

כלומר, על מנת להניב תוחלת תשואה של 50% (గבואה משמעותית מזו של תיק השוק, שמניב 20%) על

ההשקיע ליטול הלוואה בשיעור 200% מהוינו העצמי, ולהשקיע 300% (100% הון ראשוני בתוספת כספי

ה haloואה) בתיק השוק.

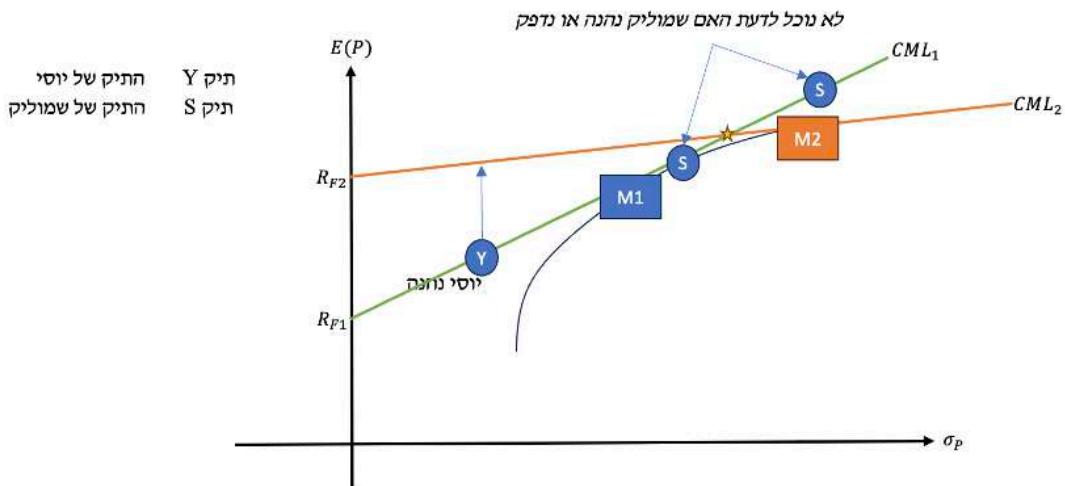
$$W_M = 1 - W_F \rightarrow W_M = 300\%$$

**שאלה 82 - שינוי בריבית חסרת סיכון והשפעתו על משקיע הבוחר בתיק ייעיל (פינה... להמשך...)**  
בעולם המקיים את הנחות ה - CAPM יש להניח קיום של שני משקיעים : שמוליק (S) ויוסי (Y). יוסי משקיע בתיק ייעיל שתוחלת תשואתו נמוכה מתוחלת התשואה של תיק השוק, ושמוליק משקיע בתיק ייעיל שתוחלת תשואתו גבוהה מתוחלת התשואה של תיק השוק.

נדרש :

- א. הציגו על גבי קו ה - CML את מיקום התיקים של שמוליק ושל יוסי.
- ב. הניחו כעת כי חלה עלייה בריבית חסרת הסיכון. הציגו את נקודת החיתוך שבין עקום ה - CML החדש ובין עקום ה - CML הקודם (באופן סכמטי, אין צורך בערכים מספריים).
- ג. מה תוכלו לומר על השינוי במצבם של המשקיעים (משתפר / מורע)? נמקו.

- א. קו ה - CML ה"מקורי", היוצא מריבית חסרת סיכון מקורי  $R_{F1}$  וועבר דרך תיק שוק מקורי  $M_1$  הוא קו ה - CML הירוק. על גבי קו זה, התיק של שמוליק (S) נמצא מימין ולמעלה ביחס לתיק השוק (בנקודה S הימנית או S השמאלית, לא אדע כי לא ברור עד כמה הוא מימין לתיק השוק) והתיק של יוסי נמצא משמאל ולמטה ביחס לתיק השוק (נקודה Y).
- ב. כאשר חלה עלייה בריבית חסרת סיכון מ-  $R_{F1}$  ל-  $R_{F2}$  אז העוקם המשקף את תמהילי ההשקעה היעילים משתנה ל-  $CML_2$ . הוא חותך את העוקם המקורי ויוצר נקודת השקעה חדשה וימנית יותר עם גראן הנכסים המסוכנים: תיק השוק הוא בתוחלת וסיכון גבויים יותר.
- ג. לעניין מצב המשקיעים, יש לדון בכל משקיע בנפרד: יוסי, שהשקיע במקור בתיק בעל סיכון נמוך משל השוק, מקבל כעת יכולת לשפר את מצבו (תנועה בכיוון החץ הכהול כלפי מעלה) ולמעשה להגדיל את תוחלת תשואתו ללא שינוי בסיכון, ומcean - שמצוותו משתפר בהכרח.
- לעומת זאת, השינוי במצבו של שמוליק יותר: אם הוא היה מצוי במצב המוצע בנקודה "קרובה"  $M_1$ , איזי מצבו משתפר (כפי עדין עוקם ה - CML עובר מעליו, ומאפשר לו תוחלת גבוהה יותר באותו תיק). אם לעומת זאת הוא מצוי בנקודה "רחוקה" מ-  $M_1$ , וספציפית כזו שהיא מימין לנקודת החיתוך שנוצרה בין עוקמי ה - CML (לפניהם ואחריהם השינויי הרו שיאילץ להסתפק בתוחלת נמוכה יותר עבור רמת הסיכון שנטול, והמשמעות היא שהוא נפגע).
- ואם כך, בשורה התחתונה: מצבו של יוסי משתפר, ולא ניתן לקבוע חד משמעותית מה יקרה במצבו של שמוליק.



**שאלה 1 – קו ה-CML ותיקים יעילים במודל ה-CAPM**  
בשוק הון המקיים את הנחות ה-CAPM ידועים הנתונים הבאים:

עוד פעם  
נתונים???



סימן	ערך מספרי	נתון
$R_F$	8%	ריבית חסרת סיכון
$E(M)$	18%	תוחלת תשואת תיק השוק
$\sigma_M$	20%	סטטיסטית התקן של תיק השוק
$E(P_A)$	15%	תוחלת תשואת תיק ייעיל A
$E(i)$	20%	תוחלת תשואת מניה B

נדרשים:

- מיהי סטטיסטית התקן של תיק A?
- אם ניתן לומר שמשקיע שבורח בתיק A הוא אוהב סיכון, שהרי יוכל במקומות זה להשקיע בריבית חסרת סיכון?
- אם ניתן לחלץ מהנתונים את סטטיסטית התקן של מניה B? מדוע?
- משה קופרמן טוען: "בהתאם לננתוני השאלה, ניתן להניח אפילו תוחלת תשואת של 80% לשנה". לעומת זאת, טענת מיטל ב: "אין מצב תוחלת התשואת של תיק השוק, שהוא התקן המסווכן ביותר, היא 18%. אי אפשר לעקוף אותה". חוו דעתכם ונמקו.

פתרון:

#### סעיף א – מהי סטטיסטית התקן של תיק A?

באופן כללי, כאשר עוסקים בתיקים יעילים, הנוסחאות שמהן אצטרך לבחור על מנת לחלץ ערכיהם רלוונטיים הן:

נוסחה 1 – קו ה-CML – משווהת הקשר הכללי בין הסיכון והתשואת:

$$CML: E(P_A) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_{P_A}$$

נוסחה 2 – משקל ההשקעה בנכס חסר סיכון ובתיק השוק כדי לחשב את תוחלת התשואת:

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

נוסחה 3 – קובעת סטטיסטית התקן של תיק ייעיל היא משקל ההשקעה בתיק השוק כפול סטטיסטית התקן של השוק:

$$\sigma(P) = W_M * \sigma(M)$$

נוסחה 4 (נובל להבין רק בהמשך) :

$$\sigma(P) = \beta_P * \sigma(M)$$

בנתוני השאלה עצמה, ציינו שתוחלת התקיק היעיל 15%, שהריבית חסרת סיכון 8%, שתוחלת השוק היא 18%, וסטיית התקן של השוק 20%. דרשו ממוני לגלוות את סטיית התקן של התקיק היעיל.

על בסיס נתונים אלו, מבין כלל הנוסחאות לעיל, הנוסחה שתאפשר לי ליצור משווהה בפועל אחד שהוא סטיית התקן של התקיק תהיה נוסחה 1 – קו ה-CML ובהצבה :

$$15\% = 8\% + \frac{18\% - 8\%}{20\%} * \sigma_{P_A} \rightarrow \sigma_{P_A} = 14\%$$

#### סעיף ב – האם הבחירה להסתכן מעידה על אהבת סיכון?

בהתאם לממצאי סעיף א, גילינו שהמשקיע שבחר בתיק יUIL שתוחלת תשואתו 15%, נאלץ לשאת בסיכון (סטיית התקן) של 14% לטובת זאת.

הסעיף דן בטענה – האם משקיע שנותל סיכון (14% סטיית התקן) ולא בוחר, לצורך העניין, בתיק חסר סיכון – הוא אווהב סיכון?

התשובה שלילית. נטילת סיכון בהקשר לתיקים ייעילים מובילה לתוחלת תשואה גבוהה יותר. הבחירה של משקיע בתיקים מסווגים ייעילים מבוצעת **למרות** הסיכון, ולא בגללו. המשקיע שונא סיכון – פשוט "פחות שונא סיכון" משקיעים שבוחרים להסתכן פחות ממנה.

**הכי קציר בעולם:** עצם בחירה בתיק מסוכן לא מעידה על אהבת סיכון, במידה והסיכון הכרחי כדי להניב תוחלת תשואה גבוהה. **באופן כללי – כל הדיוון בעולם של תики השקעות מיועד לשונאי סיכון בלבד.**

#### סעיף ג – היכולת לחלץ נתונים בגין נכס בודד שלא אמרו דבר על ייעילותו

יעילות איננה ברירת מחדל. כאשר נתונים בנכס בודד (ואפילו בתיק) ואין אזכור ליעילותו, לא נוכל להניח שהוא ייעיל ובהתקאם, לא נוכל לבצע שימוש בתיקים ייעילים כדי לחלץ ערכיהם. בפשטות – עצם הידיעה של תוחלת התשואה של נכס (שאין מידע מפורש בדבר ייעילתו) לא תאפשר לחלץ את סטיית התקן שלו.

#### סעיף ד – היעדר הגבול העליון לתוחלת התשואה – CML

לפי המודל (CAPM) אין מגבלה להיקף ההלוואות שניתן ליטול בריבית חסרת סיכון ולהשקיעו בתיק השוק. מסיבה זו בדיקות אין מגבלה לתוחלת התשואה המירבית שניתן להגעה אליה בהשקעה בתיקים ייעילים בכפוף למודל. הערכה : זה לא אומר בשום צורה ואופן שכדי להגדיל את התשואה ; הרוי המשמעות היא גם עלייה בסיכון. משה צודק.

”דווקא לא כזו קשה“ אמר אלירן. ”יש פשוט מערכת קשרים, צריך לדעת מתי אתה יעל כדי לכוון אליה, ולהליץ“. חיזק רחוב נפרש על פניו, והוא תקע פרינגלס שמנת בצל



לצערנו... האתגר האמתי מתחילה עכשו. כל מה שעשינו עד כה הוא משחך ילדים באופן יחסיב. علينا להרחיב את המודל באופן שיאפשר זיהוי, דיון והבנה גם של נכסים שאינם עילאים (ז). פה יתחיל הבלון גם ברמה המושגית וגם ברמת הנוסחאות.

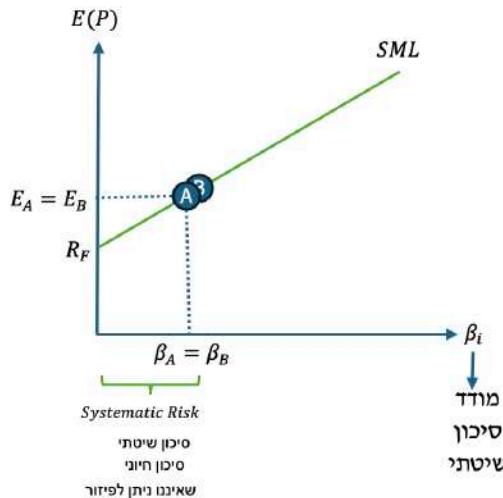
## נכיסים שאינם מהווים תיקים יעילים במודל ה- CAPM וקו ה SML



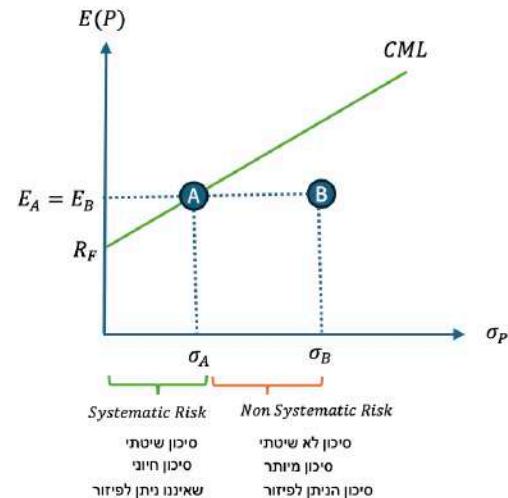
- בסוף המפגש הקודם הצגנו במסגרת מודלה - CAPM מגוון רחב של נוסחאות שמאפייניות את הקשרים המתמטיים שמקיימים תיקים יעילים במודל.
- יעילות תיקים / נכסים אינה ברירת מחדל; במלים אחרות, אם אני קורא שאלת בעולם ה- CAPM שבה מספרים לי על מגוון נכסים, לא אוכל להניח (ברירת מחדל) שהתיקים יעילים, ובהתאם - לא אוכל להשתמש אוטומטית בנוסחאות המתמטיות שהוצעו בהקשר זה.
- אם התקים (או הנכסים) הנדונים בשאלת כולם או חלקם אינם יעילים, ועלי לבעצם חישובים רלוונטיים הקשורים לתוכחותם, הסיכון הגלום בהם וכו', מתקיימת מערכת קשרים מתמטית אחרת (שונה) לאפיון תוכחת תשואתם וסיכוןם. מערכת קשרים שקובעת את מאפייני התקיק לפי רמת הסיכון השיטתי (ביטה) הגלומה בו, ולא לפי הסיכון הכלול (סטטיסטית תקן).

**אם התקיק יעיל - ב CAPM = קשר חד משמעי, מתמטי, בין סיכון (סטטיסטית תקן) לתוכחת.**  
**אם התקיק איננו יעיל = קשר בין ביטה (מדוד סיכון יחסית שונה) לתוכחת.**

כל התקיקים כולל הלא יעילים - על ה-SML (לפי סיכון שיטתי):



תיקים יעילים בלבד על ה-CML:



$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

הקשרים הם שונים, ולמרות הצורך להעניק בקיום, נתקדם לפחות בשלב זה בהיבט היישומי שלהם. חשוב לשים לב: ניתן להשתמש בכל הנוסחאות (כולל אלו שמתאימות לאירועים) גם כשםדבר בתיקים ייעילים; אך בהיעדר נתון בדבר ייעילים, נוכל להשתמש רק בנוסחאות אלו.

### תוחלת תשואה של כל נכס / תיקיעיל / לאיעיל בשיעור משקל כתלות בביטא - SML

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

סימון	משמעות
$E(i)$	תוחלת התשואה של הנכס / התיק
$R_F$	ריבית חסרת סיכון / תשואת אג"ח מושלטת
$E(M)$	תוחלת תיק השוק
$\beta_i$	הביטא - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס

מהה **בנייה הסיכון הכלול במונחי שונות בתיק לפי המודל**

בתיקים לאיעילים – הסיכון הכלול בהם כולל שני ריבבי סיכון – סיכון **שיטתי** וסיכון **לא שיטתי**:

$$\sigma^2_i = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2 = (\text{לאיעיל})$$

בחכרח מתקיים – עבור נכסים לאיעילים:

$$\sigma_{NS}^2 > 0$$

בתיקים יעילים: תמיד  $0 = \sigma_{NS}^2$  ולכן:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 * \sigma_M^2 \rightarrow \sigma(P) = \beta_P * \sigma_M$$

סימון	משמעות
$\sigma_i^2$	שונות של נכס לאיעיל
$\sigma_{NS}^2$	השונות = סיכון לא שיטתי / סיכון ניתן לפיזור (ניתן להימנע ממנו) - מחולץ בלבד אם תיקיעיל, בחכרח מתקיים $0 = \sigma_{NS}^2$
$\sigma_M^2$	השונות של תיק השוק
$\beta_i$	הביטא - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס
$\beta_i^2 * \sigma_M^2$	השונות המהווה את הסיכון השיטתי / שאיננו ניתן לפיזור (לא ניתן להימנע ממנו)

חישוב הביטה - דרך כפתקן המתאים בין המניה לבין תיק השוק נתון:

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,M} * \sigma_i}{\sigma_M}$$

סימון	משמעות
$\rho_{i,M}$	כפתקן המתאים בין הנכס לשוק
$\sigma_i$	סטיית התקן של הנכס
$\sigma_M$	סטיית התקן של השוק
$\beta_i$	היטה - כפתקן הסיכון השיטתי של הנכס

חישוב הביטה - דרך נוספת כשהשונות המשותפת של המניה עם השוק נתונה:

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

סימון	משמעות
$COV(i, M)$	השונות המשותפת של הנכס עם השוק
$\sigma_M^2$	השונות של תיק השוק

נוסחת שונות משותפת/COV:

$$COV(i, M) = P_1 * [R_{i1} - E(i)] * [R_{M1} - E(M)] + P_2 * [R_{i2} - E(i)] * [R_{M2} - E(M)] + \dots$$

כאשר:

סימון	משמעות
$P_1, P_2 \dots$	הסתברויות
$R_{i1}, R_{i2} \dots$	התשואות האפשריות של המניה הבודדת
$R_{M1}, R_{M2} \dots$	התשואות האפשריות של תיק השוק
$E(M)$	תוחלת השוק
$E(i)$	תוחלת הנכס הבודד

## שאלה 82.1 – ההבדל בין SML ל-CML וערכיהם קשורים

בשוק הון המקיים את הנחות מודל ה-CAPM הריבית חסרת הסיכון 5%, תוחלת תיק השוק 10%, סטיית התקן של תיק השוק 20%.

בנוסף לכך שבשוק זה קיימים שני תיקים ייעילים, תיק A שתוחלתו 30%, ותיק B שסטיית התקן שלו 15%. כמו כן, בשוק זה, קיימות שתי מנויות בודדות, C ו-D, כאשר סטיית התקן של מניה C היא 8%, ותוחלת תשואתה 6%.

הביתא של מניה D היא 1.3.

נדרש:

- מיהי סטיית התקן של תיק A?
- מיהי הביתא של תיק A?
- מיהי הביתא של תיק B?
- מיהי הביתא של מניה C?
- מיהי תוחלת התשואה של מניה D?

פתרונות:

- מיהי סטיית התקן של תיק A?

הואיל ומדובר בתיק ייעיל כנתון, אוכל להשתמש בחלק ממערכות הנוסחאות של תיקים ייעילים כדלקמן:

נוסחה 1: קו ה-CML:

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

נוסחה 3: משקלים וסטיית התקן:

$$\sigma(P) = W_M * \sigma(M)$$

נוסחה 4: הביתא וסטיית התקן של תיק ייעיל:

$$\sigma(P) = \beta_P * \sigma_M$$

מבין כלל הנוסחאות לעיל, ככל הנראה, על פי הנתונים המפורטים הקיימים, לגבי השוק, ריבית חסרת סיכון וכן הלאה, נוסחה 1 היא הנוחה ביותר לחילוץ סטיית התקן של התקן. תוצאות: בשוק הון המקיים את הנחות מודל ה-CAPM הריבית חסרת הסיכון 5%, תוחלת תיק השוק 10%, סטיית התקן של תיק השוק 20%, תוחלת התקן הייעיל A היא 30%:

$$E(A) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_A \rightarrow 30\% = 5\% + \frac{10\% - 5\%}{20\%} * \sigma(A) \rightarrow \sigma(A) = 100\%$$

ב. מהי הביטה של תיק A?

כדי לחוץ ביטה של תיקיעיל, אפשר לפעול בשתי דרכים: דרך אחת היא באמצעות נוסחה 4 בתיקיםיעילים. כמובן שזה דרוש שטיתת התקן של התקין תהיה ידועה, וגם שטיתת השוק:

$$\sigma(P) = \beta_P * \sigma_M \rightarrow 100\% = \beta_A * 20\% \rightarrow \beta_A = 5$$

דרך נוספת למשה תאמיר – למרות שמדובר בתיקיעיל, הרי שהוא מקיים גם את משווהת ה-SML:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i \rightarrow 30\% = 5\% + [10\% - 5\%] * \beta_A \rightarrow \beta_A = 5$$

ג. מהי הביטה של תיק B?

תזכורת: בשוק הון המקיים את הנחות מודל CAPM הריבית חסרת הסיכון 5%, ותוחלת תיק השוק 10%, שטיתת התקן של תיק השוק 20%, שטיתת התקן של התקין **היעיל B** היא 15%.

$$\sigma(P) = \beta_P * \sigma_M \rightarrow 15\% = \beta_B * 20\% \rightarrow \beta_B = 0.75$$

ד. מהי הביטה של מניה C?

ככל, אם לא נאמר שנכשיעיל – הנחת ברירות המחדל שאינויעיל. מעבר לכך, מניה בודדת איננהיעילה, כי עילות דורשת שילוב בין נכס חסר סיכון לתיק השוק. שטיתת התקן של המניה הבודדת C היא 8%, ותוחלת תשואתה 6%.

גם אם איננהיעילה – היא מקיים את משווהת ה-SML:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i \rightarrow 6\% = 5\% + [10\% - 5\%] * \beta_C \rightarrow \beta_C = 0.2$$

ה. מהי תוחלת התשואה של מניה D?

גם נכס D הוא נכס שאינו מודיע בדבר עילותו, ובנוסף נתון שמדובר במניה בודדת. בקיצור – לאיעיל. מה שאני כו יודע למזר לי זה את הביטה שלו בנתוני השאלה: הביטה של מניה D היא 1.3.

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i \rightarrow E(D) = 5\% + [10\% - 5\%] * 1.3 \rightarrow E(D) = 11.5\%$$

**שאלה 83 - קו ה - SML מנויות - Capital Asset Pricing Model – CAPM :** מודל תמחור נכסי הון מנויות "נקניים של תקווה" (SH) צפויה להיסחר בעוד 3 שנים במחיר של 500 ש"ח. השונות המשותפת של תשואת המניה עם תשואת השוק היא 0.9, שער הריבית חסר הסיכון (נטול הסיכון) 4% ותוחלת התשואה של תיק השוק היא 12%. כמו כן ידוע כי סטיית התקן של תיק השוק היא 0.8. מה יהיה מחיר המניה היום?

פתרון :

באופן כללי: אם אני יודע מה מניה צפויה להניב לי בעוד 3 שנים, איך אחשב את ערכה היום? התשובה היא: חישוב PV. למעשה, מחיר כל נכס, לרבות מניה, הוא הערך הנוכחי של התזרים צפויה ממנו. בקיצור:

$$PV_0 = 500 * (1 + k)^{-3}$$

מה אומר הסימן  $k$ ? בשונה מסתם ריבית,  $k$  הוא מחיר ההון העצמי המשקף את התשואה הנדרשת מהמניה.

אבל כיצד נחשב את התשואה הנדרשת ממניה בודדת? הוואיל ואינה יعلا, הדרך לחשב את התשואה צפויה / הנדרשת היא קו ה-SML :

$$k = E(i) \rightarrow E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

$$E(SH) = 4\% + [12\% - 4\%] * \beta_{SH}$$

סימון	משמעות	ערך מספרי
$E(i) = ?$	תוחלת תשואת נכס (ללא תלות ביעילותו)	$E(i)$
$R_F = 4\%$	ריבית חסרת סיכון	$R_F$
$E(M) = 12\%$	תוחלת תשואת תיק השוק	$E(M)$
$\beta_i = ?$	מקדם הסיכון השיטתי של הנכס	$\beta_i$

כדי לחשב את הביטה בצורה ישירה, קיימות 2 נוסחאות:

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2} \quad \text{or} \quad \beta_i = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M^2}$$

בגدول, הביטה בוחנת סיכון שיטתי ביחס לשוק. הנוסחה הימנית אם כך, בוחנת זאת על בסיס הקשר בין המניה לבין השוק במוניה.

הנוסחה השמאלית, לעומת זאת, מבצעת וריאציה על כך. היא משתמשת במדד קשר כללי יותר, שנקרא שונות משותפת (COVARIANCE) או בקיצור COV, מה שיוצר וריאציה קטנה לנוסחה עצמה:

$$\beta_{SH} = \frac{0.9}{0.8^2} = 1.40625$$

כל שוליים לעשות כעת הוא להציב את הביטה במשווהת הרכולה :

$$E(SH) = 4\% + [12\% - 4\%] * \beta_{SH}$$

כלומר :

$$E(SH) = 4\% + [12\% - 4\%] * 1.40625 \rightarrow E(SH) = 15.25\%$$

לאחר שייעור התשואה הנדרש בעד המניה (אשר חושב על בסיס הביטה שלה ומשווהת ה-SML), ניתן להשתמש

בו כ"ריבית" לשם היון (PV) מחיר המניה – כדי לשקף את שווייה המתואם להיום ( $P_s = Price of Share$ ) :

כלומר מחיר המניה נכון להיום :

$$P_s = 500 * (1 + 15.25\%)^{-3} = 326.62$$

שאלה 84 - הקשר בין ביטה וסטטיסטיקת תקן - הייתה או חלמתי חלום?  
 הביטה של מנית "תפוחי" היא 4, ואילו הביטה של מנית "שזיפי" היא 12.  
 האם ניתן לומר סטטיסטיקת תקן של מנית שזיפי גבוהה פי 3 מזו של מנית תפוחי?  
 נמקו (הדרך: התייחסו לרכיבי הסיכון).

פתרון:

מבוא:

השאלה מציגה בפניינו נתונים על מניות בודדות, וכן נתונים ביטה.  
 עצם אזכור המונח ביטה ==> בהכרח במודל-CAPM.  
 אם אני ב-CAPM ==> שאלה נזלה: האם מדובר בתיקים ייעילים או נכדים / תיקים שאינם יעילים?  
 האם מניות בודדות הן נכס ייעיל ==> לא!

בהתנן אי הייעילות, הקשר בין הביטה לבין הסיכון הכלול:

$$\text{סיכון לא שיטתי} + \text{סיכון שיטתי} = \sigma_i^2$$

פורמלית:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

סימון	
הסיכון הכלול בנכס / בתיק במונחי שונות	$\sigma_i^2$
היטה (קדם לסיכון השיטתי) ברכיבוע	$\beta_i^2$
סיכון השוק במונחי שונות	$\sigma_M^2$
הסיכון השיטתי במונחי שונות: ביטה בריבוע כפול סיכון השוק	$\beta_i^2 * \sigma_M^2$
סיכון לא שיטתי / סיכון ניתן לפיזור	$\sigma_{NS}^2$

היטה של מנית "תפוחי" היא 4, ואילו הביטה של מנית "שזיפי" היא 12. האם ניתן לומר סטטיסטיקת תקן של מנית שזיפי גבוהה פי 3 מזו של מנית תפוחי? נמקו (הדרך: התייחסו לרכיבי הסיכון).

אם מדובר בתיק ייעיל (זהה לא המכב), אז בהגדרה אין בתיק סיכון לא שיטתי:

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2 \rightarrow \sigma_P^2 = \beta_P^2 * \sigma_M^2$$

ניתן לראות, אם כך, שאם התיק ייעיל – אז כל עלייה ביטה מתורגם באופן ישיר לעלייה בסיכון הכלול באותו תיק. למשל, אם תיק מסויים הוא ייעיל עם ביטה של 4, לעומת TICK אחר עם ביטה של 12, אז הרכיבים יהיה בהתאם:

$$\sigma_P(\beta = 4) = 4 * \sigma_M$$

$$\sigma_P(\beta = 12) = 12 * \sigma_M$$

כלומר, אם התיק ייעיל – ביטה שגובהה פי 3 מושגת סיכון / סטטיסטיקת תקן שגובהה פי 3.

אלא... שכאן דיברו על תיק לא עיל. בתיק לא עיל פרט לרכיב הסיכון השיטתי שמוספע מהביטה, קיים בהגדלה רכיב סיכון אחר, לא שיטתי, שאין דרך למדוד באופן ישיר:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_{NS}^2$$

לאור היעדר היכולת להעריך את גובהו של הסיכון הלא שיטתי בכל אחד מהנכדים הלא עיליים -  $\sigma_{NS}^2$  לא נוכל לומר שעלייה בביטחון בשיעור מסוים ממשמעה עלייה בסיכון באותו שיעור.

מסקנה: עלייה בביטחון פי 3 מגדילה את הסיכון השיטתי פי 3, אך לא את הסיכון הלא שיטתי. לכן, הסיכון הכללי יעלה בפחות מפי 3.

לכן, ובהתאם, בהינתן תיקי השקעות שאינם עיליים (ומኒות בודדות הן דוגמא בולטת לכך) לא ניתן להסיק כלל מערבי ביטה בדבר הסיכון הכללי וערךו היחסי במニアות שונות. זוו התשובה.

שים לב: אם התיקים היו עיליים אז רכיב הסיכון הלא שיטתי (החלק האדום) מתאפס, וכן ניתן לגזר מיחסיות בערבי ביטה בדבר יחסיות בסיכון הכללי (במנוחי סטיטית תקן). אך אנחנו לא מניחים עליות. ובהיעדרה - זהה מסקנתנו כאן.

הכי קצר בעולם:

אם דנים בסיכון כולל (סטיטית תקן / שונות) בנכדים שאינם עיליים, עצם ידיעת ערכי הביטה שלהם (לא מידע נוסף) **לא יכולה** לעזר לי להבין:

א. פי כמה יעלה הסיכון הכללי במידה והביטחון תעלת בשיעור מסוים (כפי יש גם סיכון לא שיטתי שלא מושפע מהביטה).

ב. האם מניה עם ביטה גבוהה יותר היא אכן בעלת סיכון כולל גבוהה יותר (כפי יש גם סיכון לא שיטתי שיכול להיות מודד שונה בין המニアות ומדובר בשפע על סטיטית התקן).

**שאלה 85 - חילוץ ערכי ביתא על בסיס משקלים נכסיים בתיק - ותוחלת התשואה המשוקללת**

נתון תיק השקעות שמורכב מהנכסיים הבאים :

נכסי	משקל (שיעור) השקעה בתיק $W$	תוחלת תשואה
א	$W_A = 0.65$	$E(A) = 10\%$
ב	$W_B = 0.35$	$E(B) = 22\%$

ידוע כי תוחלת תשואת תיק השוק היא  $E(M) = 12\%$ , הריבית חסרת סיכון היא בשיעור של  $4\%$ .  
 $R_F = 4\%$ . מהי הביטה של תיק ההשקעות? (רמז :  $E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$ ).

פתרון :



לכוארה, אני מזזה מה שאלת שעסקת בשילוב בין שני נכסיים מסוכנים. בכלל, הנוסחאות הקשורות לשילוב בין שני נכסיים מסוכנים הן אלו שהוצעו במפגש הקודם. בפרט, תוחלת תשואה של תיק השקעות המורכב משני נכסיים מסוכנים מחושבת כך :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

אלא שהשאלה דורשת, לאחר שלב ראשוני זה של חישוב משמעות השילוב בין שני הנכסיים המסוכנים על בסיס נוסחה מתאימה – למצוא את הביטה של התיק המשולב.  
 וברגע שאמרו לי ביתא – אמרו לי CAPM. כלומר אם אני יודע את התוחלת של התקיק, אוכל לחלץ את הביטה שלו על בסיס הצבת ערכיו ב-SML.

בשאלה צינו שמשקיעים במשקל 0.65 בנכס A שתוחלת תשואתו 10%, ובמשקל 0.35 בנכס B שתוחלת תשואתו 22%. בהצבת משקלים השקעה הנתונים בכל אחד מהנכסיים א, ב נקבל :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

$$E(P) = 0.65 * 0.1 + 0.35 * 0.22 = 14.2\%$$

למרות שמדובר בתיק ואסומן באוט P, חשוב מאד שלא לעבוד טכני. ובעצם לומר : אם אין סיבה מאד טובה להניח עילות (כפי נתון שהתיק עיל, או שהוא מורכב רק מריבית חסרת סיכון ו/או תיק השוק) אז נניח אי עילות, ובהתאם, המשווה הרלוונטי המאפיינת את תוחלת התשואה ואשר תקפה גם למצבים אי עילות היא משווהת ה - SML :

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בהצבת הנתונים – תוחלת תיק של 14.2%, ריבית חסרת סיכון 4% ותוחלת שוק 12%, נקבל :

$$14.2\% = 4\% + [12\% - 4\%] * \beta_P \rightarrow \beta_P = 1.275$$

קיבלנו כי הביטה של תיק ההשקעות הנתון בשאלה היא 1.275. תשובה סופית.

### שאלה 85.1 – לפטור במפגש 2025א – הקשר בין סטיית התקן, המתאים עם השוק וכדאיות השקעה

בשוק ההון נסחרות שתי מנויות אשר תוחלת התשואה שלן  $E(C) = E(D) = 30\%$  ;  
למניה C סטיית התקן של 25% ומקדם מתאים עם תשואת השוק של 0.3 :  
למניה D סטיית התקן של 20% ומקדם מתאים עם תשואת השוק של 0.6 :  
נדרש :

- בטאו את הביטה של כל מניה על בסיס סטיית התקן של השוק כפרמטר.
- לאיזו מניה ביטה גבוהה יותר?
- בנחתה שהמשקיע מחזיק בתיק מבוער והוא שוקל לצרף אחת מבין המניות לתיקו, איזו מניה יעדיף לצרף לתיק ומדוע?

**פתרון:**

רקע – באופן כללי, שאלות הדורשות **זיהוי ביטה** באופן מספרי או יחסית, יכולות להשען על הכלים הבאים :  
כלי 1 : הצבה במשוואת ה-SML

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

הכלי הזה שימושי בעיקר במצבים שבהם הריבית הסיכון ידועה וגם תוחלת תשואת תיק השוק.  
כלי 2 : לנסות לחשב את הביטה ישירות (או לבטא אותה) לפי נוסחה רלוונטית.  
יש שתי וריאציות לנוסחאות הביטה, שהבחירה ביןיהן תלויה בנסיבות :

$$\beta_i = \rho(i, M) * \frac{\sigma_i}{\sigma_M} \quad \text{or} \quad \beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

הנוסחה השמאלית – כופלת את מקדם המתאים בין תשואת הנכס לתשואת השוק ביחס בין סטיית התקן של הנכס לסטיית התקן של השוק, ואילו הימנית – מחלקת את השונות המשותפת עם השוק, בשונות תיק השוק.

מעבר לחישוב הטכני של הביטה, היא למעשה מدد הסיכון המרכזי שאליו צריך להתייחס ממשקיע שמשלב את המניה כחלק מתיקו המפוזר / העיל. למה הכוונה? ביטה היא לא הסיכון הכלול; היא רק חלק של הסיכון שלא ניתן לפזר (סיכון שיטתי). אנחנו טוענים שאם משלב את המניה כחלק מתיק השקעות ייעיל, הסיכון הלא שיטתי "מתפזר" ומתרטט, ונותרים רק עם סיכון הביטה.

זה חשוב – משום שאם קיימן מקרה שבו לשני נכסים (שאינם ייעילים בפני עצמם) יש תוחלת תשואת זהה, הרי שאם נרצה לשלב בתיק ההשקעות המפוזר שלנו אחד מהם – נבחר בזה שהביטה שלו היא הנמוכה יותר.

למעשה: התרומה של נכס לא יעיל לסיכון של תיק מפוזר במודל ה-CAPM היא פונקציה של הביטה שלו ולא של סטיית התקן שלו (רק רכיב הביטה קובע את הסיכון שלא מתפזר, את הסיכון השיטתי).

ואחרי הנאום הזה, נעתיק את נתוני השאלה :

$$E(C) = 30\% \quad \sigma_C = 25\% \quad \rho_{C,M} = 0.3$$

$$E(D) = 30\% \quad \sigma_D = 20\% \quad \rho_{D,M} = 0.6$$

#### סעיף א – מטען ביטוי לביטה של כל נכס

לאור נתוני מקדים המתאימים עם תיק השוק של הנכסים בשאלתנו, הנוסחה הרלוונטית לביטוי של הביטה היא :

$$\beta_i = \rho_{i,M} * \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

ובהצבת נתוני השאלה אני מקבל את הערכים הבאים :

$$\beta_C = \rho_{C,M} * \frac{\sigma_C}{\sigma_M} \rightarrow \beta_C = 0.3 * \frac{0.25}{\sigma_M} \rightarrow \beta_C = \frac{0.075}{\sigma_M}$$

$$\beta_D = \rho_{D,M} * \frac{\sigma_D}{\sigma_M} \rightarrow \beta_D = 0.6 * \frac{0.2}{\sigma_M} \rightarrow \beta_D = \frac{0.12}{\sigma_M}$$

#### סעיף ב – הביטה הגבוהה יותר

למרות שערכה המספרית המלא של הביטה של הנכסים לא ידוע, אנחנו כן יכולים לזהות שלנכס C הביטה נמוכה יותר (הביטה של D גבולה יותר) :

$$\beta_D = 0.12 * \frac{1}{\sigma_M} > 0.075 * \frac{1}{\sigma_M} = \beta_C$$

#### סעיף ג – בהנחה שהמשקיע מחזיק בתיק מבוזר והוא שוקל לצרף אחות מוביל המניות לתיקו, איזו מנתה יעדיף לצרף לתיק

ראשית מה משמעותו של תיק מבוזר?

תיק מבוזר = תיק עיל.

אם התיק שמהווה נקודת מוצא הוא עיל, ככלمر מגוון בין מספר גדול של נכסים, תיק השוק וכיו"ב – אזי, כאשר נוסיף לו נכס מסוון כלשהו, חלק משמעותי מהסיכון הגלום בנכס מסוון – יתפזר גם הוא (יקטן) לאור השילוב בתיק עיל.

כך שלמעשה : **שילוב נכס מסוון בתיק עיל משפייע על הסיכון הכלול רק לפי הסיכון השיטתי (הבלתי ניתנו לפיזור) בתיק שלשלבים, ככלمر רק לפי הביטה שלו.**

במקרה זה : שני הנכסים מניבים את אותה תוחלתה ; נכס C במידה וישולב, ישפייע על הסיכון הכלול בהתאם לביטה הנמוכה שלו ; ואילו נכס D, במידה וישולב, ישפייע על הסיכון הכלול בהתאם לביטה הגבוהה שלו. לכן, **עדיף לשלב בתיק את נכס C (התרומה לתשואה – אותה תרומה, והעליה בסיכון – בהתאם לביטה – נמוכה יותר).**

[ככל, בהיעדר נתונים סותרים, ביטה גבואה יותר משמעה תוחלת גבואה יותר, בהתאם למשוואת ה-SML שקובעת

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

אלא שכן ספציפית, יש נסכים שתוחלתם זהה למראות שהביטה של אחד מהם גבואה יותר. זה מצב "לא טבעי" שמתאר היעדר שווי משקל. במצב כזה, לאורך זמן, משקיעים יברחו מהנכס בעל הביטה הגבוהה והלא מוצדקת, מה שיביליל לירידת מחירו

### **שאלה 85.2 – לפטור במפגש 2025א – הקשר בין תוחלת, סטיית תקן והסיכון השיטתי**

בשוק ההון הפעיל **בשווי משקל** נסחרות שתי מניות, G ו- Q, אשר תוחלת התשואה שלן 30%. סטיית התקן של מניה G גבואה מסטיית התקן של מניה Q.

נדרש :

- למי מבין המניות סיכון כולל גבואה יותר?
- למי מבין המניות סיכון שיטתי גבואה יותר?
- למי מבין המניות סיכון לא שיטתי גבואה יותר?

פתרון :

#### רקע וחידוד מושגים

**סיכון כולל** = כולל הסיכון, לאו דווקא זה שנובע מביטה; מדובר בסיכון שיטתי (הנובע מביטה) בתוספת סיכון לא שיטתי, יחד. נכס בעל סטיית התקן (או שוננות) גבואה יותר מאשרו = סיכון כולל גבואה יותר. סיכון שיטתי גבואה יותר = מtabסס על ערך הביטה. ביטה גבואה יותר משמעה סיכון שיטתי גבואה יותר. סיכון לא שיטתי = ערך הפרשי. הוא לא מחושב באופן ישיר אלא על בסיס ההפרש בין הסיכון הכלול לסיכון השיטתי.

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2 \rightarrow \sigma_{NS}^2 = \sigma_i^2 - \beta_i^2 * \sigma_M^2$$

כאשר :

סיכון כולל במנחי שונות	$\sigma_i^2$
הסיכון השיטתי שמוספע מהביטה	$\beta_i^2 * \sigma_M^2$
ערך שמחולץ ולא מחושב ישיר	$\sigma_{NS}^2$

אזכור הנתונים :

$$E(G) = 30\%$$

$$E(Q) = 30\%$$

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

מושג חשוב : **שווי משקל**.

כשאנו פועלים בעולם של הנחות CAPM (חלק מהנדשים דנים בסיכון שיטתי / לא שיטתי, זה הרמז לכך),  
אנו יודעים שיש שני תתי מודלים :

המודל הקשור לתיקים ייעלים (4 הנוסחאות בראש מערך השיעור) המחייב מידע בדבר ייעילות התקיקים ;  
המודל הקשור לכל התקיקים בכלל (גם אם הם לא ייעלים) וمبرוס על ביטה :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

מודל זה דורש הנחת הרבה יותר "רכח" : שהשוק בשווי משקל. משמעות שווי המשקל היא שאין לחצים לשינוי מחירי הנכסים ולשינויו תשואתם. באופן כללי, תמיד יכול להיות שמניות מסוימות נוסקות ומניבות למשל ביצועי יתר. במקרה שכזה, זה לא אומר שהביטה שלחן תשנה מיד ; ואו אז, תוכלת תשואתן תהיה גבוהה מהצפוי לפי המודל. אלא, שמצו כזה הוא מצב זמני ואיננו שווי משקל, מדוע? משום שבמצב כזה כולם ירצו לקנות את המניה, מחירה יעלה והתשואה היחסית יורדת עד להתכנסות בשווי משקל (ואותו דבר בכיוון ההפוך כאשר התשואה נמוכה מזו שנבאה המודל).

בשונה מהנחה ייעילות, שלא תמיד מתקימת – הנחת שווי משקל מתקימת אלא אם קיימות ראיות סותרות בשאלת.

לכן, בתכליס : **כשאומרים "מתקיים שווי משקל"** וזו גם בירור מחדל המשמעות היא שמשוואת ה-SML הקושרת בין ערכי הביטה (מקדם סיכון שיטתי) לבין תוכלת התשואה מתקימת.

**א. למי מבין המניות סיכון כולל גבוהה יותר?**

اذכור הנתונים :

$$E(G) = 30\%$$

$$E(Q) = 30\%$$

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

סיכון כולל – משמעו בשפה פשוטה : סטיטית תקן. ואין ספק שעיל פי נתון מפורש, הסיכון הכולל גבוהה יותר הוא של מניה G.

**ב. למי מבין המניות סיכון שיטתי גבוהה יותר?**

את הסיכון השיטתי אנו אומדים על בסיס ערך הביטה.  
בහינתן שהנכסים בשווי משקל (בירור מחדל), הרי שקיים תוכלת תשואה זהה משמעה בהכרח ביטה זהה.  
זאת הואיל ושני הנכסים מקיימים את משוואת ה-SML שקיימת להלן :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בhzבת הנתונים :

$$E(G) = 30\% = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_G$$

$$E(Q) = 30\% = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_Q$$

ריבית חסרת סיכון, ערך של השוק כולם ואיננו משתנה מעבר בין מנויות	$R_F$
תוחלת תשואת השוק, ערך כללי בשוק ולא משתנה מעבר בין מנויות	$E(M)$

בהתנחת שהמנויות מניבות תוחלת תשואת זהה, יותר ערבי השוק כਮובן זהים ומשותפים, ומתקיים שיווי משקל הביטא שלחן חייבת להיות זהה, ולכן **הסיכון השיטתי שלחן – זהה**.

ככל, סיכון שיטתי מוגדר כך :

$$\beta_i^2 * \sigma_M^2$$

הויל וסטיטית התקן של השוק היא ערך כללי שתפקידו לשוק כולם, פערים בסיכון השיטתי יכולים לנבוע רק מפערים בביטא, שפה כאמור לא מתקימים (לאור התוחלת הזהה).

ג. למי מבין המנויות סיכון לא שיטתי גבוה יותר?

הסיכון הכללי מוגדר כך :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

אם לשתי מנויות יש את אותה הביטא, כਮובן שרכיב **הסיכון השיטתי (באודום)** זהה. והמשמעות היא שככל פער ביןיהן בסיכון הכללי יכול לנבוע רק מרכיב הסיכון **הלא שיטתי (בכחול)**.

תזכורת נתונים – הנתונים העידו על כך שסטיטית התקן (קרי סיכון כולל) בנכס G גבוהה יותר :

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

הביטא אותה הביטא ; הסיכון השיטתי אותו סיכון שיטתי ; ולכן בהכרח הסיכון הגבוה יותר במנוחי סטיטית התקן בניהה G יכול לנבוע אך ורק מסיכון לא שיטתי גבוה יותר במניה זו.

$$\sigma_G^2 = \beta_G^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(G)$$

$$\sigma_Q^2 = \beta_Q^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(Q)$$

אך ידוע :

$$\beta_G = \beta_Q$$

ובהתנחת ש :

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

כלומר :

$$\sigma_G^2 > \sigma_Q^2$$

$$\beta_G^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(G) > \beta_Q^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(Q)$$

ניתן לבטא זאת גם כך לאור זהות ערכי הביטא :

$$\cancel{\beta_Q^2 * \sigma_M^2} + \sigma_{NS}^2(G) > \cancel{\beta_Q^2 * \sigma_M^2} + \sigma_{NS}^2(Q)$$

כלומר : הסיכון הלא שיטתי במניה G גבוה יותר.

**בקיצור** - אם לשני נכסים בשוויי משקל יש את אותה תוחלת תשואה ולכן את אותה ביטא, הגורם היחידי שיווקיל לסתיטית תקן גבוהה יותר של אחד הנכסים היא סיכון לא שיטתי גבוה יותר בנכס זה.

### שאלה 85.3 – לפטור במפגש 2025 – הביטה מול סטיית התקן

הביטחון של מניה G גבוה מהביטחון של מניה Q.

להלן מספר טענות שנשמעו בישיבה בוועדת ההשകעות:

טענה 1: "מניה G בודאות עם סטיית התקן גבוהה יותר. הרי הביטה שהיא מגד הסיכון העיקרי גבוהה יותר"

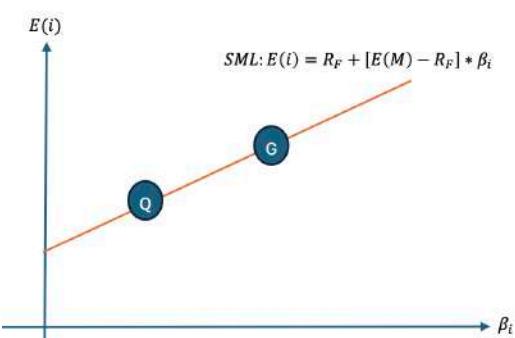
טענה 2: "אם מניה G עיליה ומניה Q איננה עיליה, למניה G סטיית התקן גבוהה יותר"

טענה 3: "אם שתי המניות עיליות, למניה G סטיית התקן גבוהה יותר"

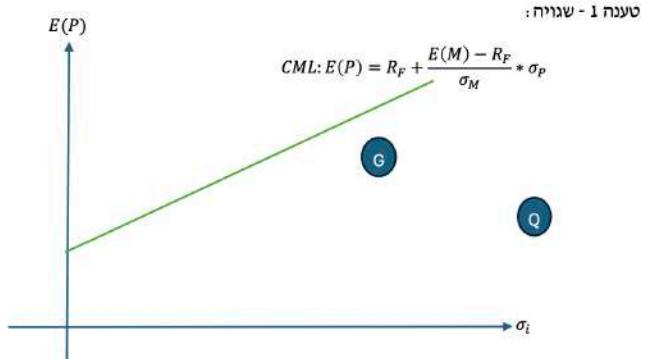
טענה 4: "אם שתי המניות אינן עיליות, למניה Q סטיית התקן נמוכה יותר".

נדרש:

חווי דעתכם, לגבי כל טענה, האם היא נכונה או לא – וنمכו בהתאם.

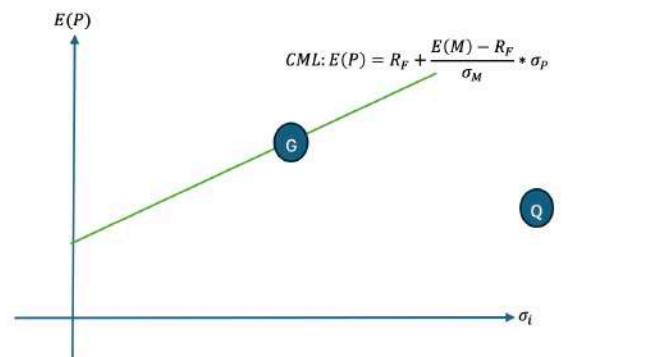
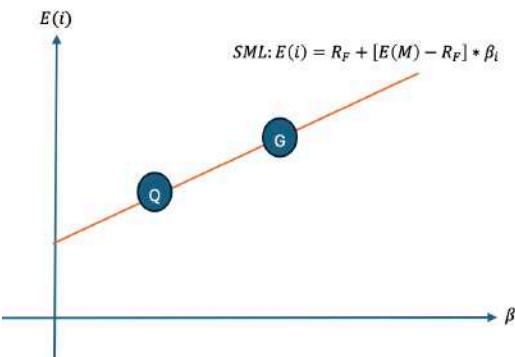


במערכות הציריים שבה מאיירים את קו ה-SML  
לא רואים בכלל את הסיכון הלא שיטתי  
שהוא אחד מרכיבי הסיכון הכלול (סטיית התקן)  
העיקריים. לכן, לא נוכל ללמד מהתביעה לבדה  
על ערך סטיית התקן

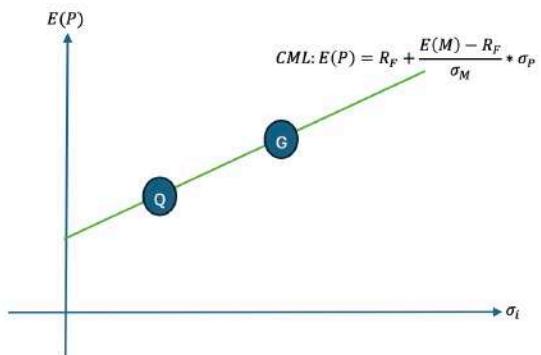
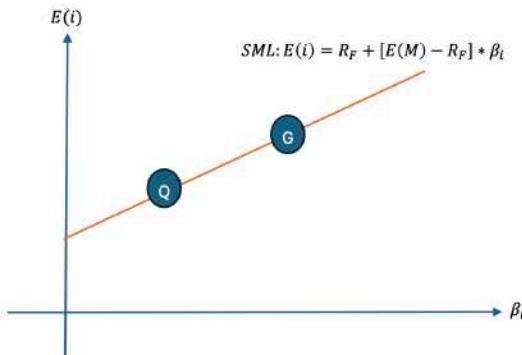


במערכות הציריים שבה מאיירים את קו ה-CAL  
שהוא העקום הייעיל במודל ה-CAPM, המורחיק  
האופקי שמותקיים בין נסן לבין הערך הייעיל  
הוא למשהו רכיב הסיכון הלא שיטתי  
עצם ידיעת הביטה לא אומرت דבר עלי

טענה 2 – נכונה: המניה Q עיליה מ обоיה (G) נמצא מקום ביחס אליה את Q ללא מידע בדבר ייקוף הסיכון הלא שיטתי של Q:



טענה 3 - נכון: אם שתי המניות ייעילות, מניה עם ביטא גבואה יותר וסיכון שיוטתי גבואה יותר (כי לא קיים רכיב סיכון נוסף):



טענה 4: נשלת בדיק באוטו האופן שבו נשללה טענה 1.

**שאלה 86 - חילוצי ערךים על בסיס ה - CAPM**

לפניכם נתונים בדבר 3 מנויות, J, G, Q:

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	?	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
?	45%	30%	סטיתת תקן תשואה
0.7	0.8	?	מתאים עם השוק

נדרש:

- מahi תוחלת תשואה של תיק השוק?
- מahi הריבית חסרת הסיכון?
- מahi סטיתת תקן של תשואת השוק?
- שחזרו את כל סימני השאלה.
- הניחו כי הנכים משקיעים בתיק השוק 200,000 ש"ח, מtower זה 120,000 ש"ח מהונכם העצמי והיתרה כחלוואה. מהי תוחלת תשואה וסטיתת תקן של תיק זה?
- בבמישך לסייע ה, האם משקיע שונא סיכון עשוי להשקיע בתיק זה?
- איירו את המשקיע שאפיינתו בסעיפים ה, ו לעיל על העוקום הגרפי המתאים.

פתרון:

א. + ב. חילוץ תוחלת תשואה של תיק השוק וריבית חסרת סיכון בהתבסס על ערכי נכסים בודדים לצד העובדה שנכסים בודדים אינם יעילים, הרי שבזומה לנכסים אחרים הם מקיימים את משוואת ה- SML. ספציפית, לגבי הנכסים J ו- Q, בהינתן גם ערכי תוחלת תשואתם וגם הביטה שלהם, ניתן לבנות צמד משוואות ב-2 נעלמים, שיהוו את הריבית חסרת הסיכון ואת תוחלת תיק השוק בהתאם.

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בהצבה - אם יש לי נתונים על שתי מנויות הכלולים תוחלת וbijta, ניתןحل את תוחלת השוק ואת הריבית חסרת הסיכון על בסיס בנית מערכת הכוללת 2 משוואות בשני נעלמים, שכל אחת מהן מייצגת את הצבת הנתונים הנ"ל ב- SML :

$$(I) \quad E(J) = 12.4\% = R_F + [E(M) - R_F] * 1.4$$

$$(II) \quad E(Q) = 16.6\% = R_F + [E(M) - R_F] * 2.1$$

אני אישית (לא חובה) מdad אוhab כשאני נתקל בחילוצים אלו, לסמן את הביטוי  $E(M) - R_F$  כנעלם x :

$$(I) \quad 0.124 = R_F + x * 1.4$$

$$(II) \quad 0.166 = R_F + x * 2.1$$

נחסיר את המשוואה (I) ממשוואת (II) ונקבל :

$$0.166 - 0.124 = R_F + 2.1x - (R_F + 1.4x)$$

נמשיך בכיף שלנו :

$$0.042 = 0.7x \rightarrow x = 0.06$$

נציב באחת מבין המשוואות (אני אציב במשוואת ה-I) :

$$(I) \quad 0.124 = R_F + 0.06 * 1.4 \rightarrow R_F = 0.04$$

$$R_F = 4\%$$

כידוע,  $x$  הוא :

$$x = E(M) - R_F \rightarrow 0.06 = E(M) - 0.04 \rightarrow E(M) = 0.1$$

$$E(M) = 10\%$$

ג. מהי סטיית התקן של תשואת השוק?

את נתוני תיק השוק - תוחלת תשואת וסטיית התקן, ב- 99% מהמקרים אנו מחלצים ולא מחשבים ישירות. כלומר, נשתמש באיזושהי נוסחה רלוונטית שבה מופיעה סטיית התקן / התוחלת כנעלם, ונמשיך ממש בהצבות והחילוץ.

השאלה - איזו נוסחה מתאימה ליתר נתוני השאלה ותאפשר לחלץ את סטיית התקן של תיק השוק?

נוסחאות רלוונטית לחישוב ביטה, ששתיהן כוללות את סטיית התקן של תשואת השוק כנעלם, מה שבשאיפה יאפשר לחלץ אותו, גם כאשר הנכסים או התיקים שבהם אני עוסק אינם ייעילים, חן :

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,M} * \sigma_i}{\sigma_M}$$

וגם :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

נתוני השאלה :

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	?	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
?	45%	30%	סטיית תקן תשואה
0.7	0.8	?	מתאים עם השוק

על פניו, אני נגש למניה Q ואני מגלח שבהתאים לנוסחת החישוב הישירה הראשונה של ביטה אני מקבל :

$$\beta_Q = \frac{\rho_{Q,M} * \sigma_Q}{\sigma_M}$$

הערכים בירוק - נתוניים. הערכים שבחרור - 2 נעלמים, במשווה אחת. לא תופס.

אם אני נגש ל - J, אין לי את המתאים עם השוק בכלל.

אם אני נגש ל - G, אין לי את הביטה... אבל רגע! אולי אני יכול לחוץ את הביטה של G. זאת על בסיס משווהת ה - SML :

$$E(G) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_G$$

בhzבת נתוני תיק השוק ונכש חסר סיכון שגילינו בנדרישים א, ב נקבל :

$$14.8\% = 4\% + (10\% - 4\%) * \beta_G \rightarrow \beta_G = 1.8$$

נחזיר להגדרת ביטה על פי המתאים עם השוק, עברו נכש G, נקבל :

$$\beta_G = \frac{\rho_{G,M} * \sigma_G}{\sigma_M} \rightarrow 1.8 = \frac{0.8 * 0.45}{\sigma_M} \rightarrow \sigma_M = 20\%$$

ולכן כתשובה סופית לסעיף, סטיית התקן של תיק השוק היא 20%.

#### ד. שbezro at cel simoni ha-sala

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	1.8 בפתרון סעיף ג	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
60% ראו להלן	45%	30%	סטיית תקן תשואה
0.7	0.8	0.9333 ראו להלן	מתאים עם השוק

נשתמש בנוסחת הגדרת הביטה כדי לחוץ את מקדם המתאים של מניה J עם השוק :

$$\beta_J = \frac{\rho_{J,M} * \sigma_J}{\sigma_M} \rightarrow 1.4 = \frac{\rho_{J,M} * 0.3}{0.2} \rightarrow \rho_{J,M} \approx 0.933$$

גם עברו מניה Q, נשתמש בנוסחת הגדרת הביטה כדי לחוץ את סטיית התקן של תשואת הנכש :

$$\beta_Q = \frac{\rho_{Q,M} * \sigma_Q}{\sigma_M} \rightarrow 2.1 = \frac{0.7 * \sigma_Q}{0.2} \rightarrow \sigma_Q = 0.6 = 60\%$$

ה. הניחו כי הנכס משקיעים בתיק השוק 200,000 ש"ח, מtower זה 120,000 ש"ח מהו נכס העצמי והיתרה כהלוואה. מהי תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק זה?

תחילה, נסדר את הנתונים שהילכנו במאזך רב משאלות קודמות לגבי ריבית חסרת סיכון, ומאפייני תיק השוק (תוחלת תשואה וסטיית התקן). זה חשוב, משום שמדובר בתיק שכולל השקעה בתיק השוק וכן הלוואה (כי סכום ההשקעה עולה על ההון העצמי). זכרו: תיק חייב להיותiesel אם הוא מורכב רק מההשקעה בתיק השוק והלוואה / אם הוא מורכב רק מההשקעה בתיק השוק וההשקעה בנכס חסר סיכון. **למן התקן הנדון בסעיף זה הואiesel.**

בסעיפים קודמים גילינו את תוחלת התשואה של תיק השוק, את סטיית התקן של השוק, ואת הריבית חסרת הסיכון, בהתאם:

$$E(M) = 10\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

$$R_F = 4\%$$

על פי נתונים הסעיף הספציפי, משקל ההשקעה בתיק השוק ביחס להון העצמי גבוהה מ-1 (גבוה מ-100%) זאת הואיל וידוע שסכום ההשקעה בתיק השוק גבוהה מההון העצמי של המשקיע. ניתן לחשב במצב כזה את משקל ההשקעה בתיק השוק לפי היחס בין סכום ההשקעה בתיק השוק לבין ההון העצמי:

$$W_M = \frac{200,000}{120,000} = 1 \frac{2}{3}$$

זה גם אומר באופן טבעי שמשקל ההשקעה בנכס חסר סיכון שתמיד מהוות את המשלים ל-1 ניתן לחישוב גם הוא, ואני מצפה שהוא יהיה שלילי, כדי לשקף הלוואה:

$$W_F + W_M = 1 \rightarrow W_F = 1 - W_M = 1 - 1 \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

דרך אחרת להביט על כך היא לומר: ברור אם לוינו (במינוס) 80,000 ש"ח ביחס להון עצמי של 120,000 ש"ח, אז היחס בין ערכיהם אלו (שהוא 2/3) הוא למעשה שיעור הלוואה או WF שלילי.

$$W_F = \frac{-80,000}{120,000} = -\frac{2}{3}$$

כלומר, מדובר במשמעות שבהתאם לנתחים נוטל הלואה בשיעור 2/3 (כ- 66.67% מהוננו העצמי) ומשמעות כימי ההלואה וכן את הוננו העצמי יחד בתיק השוק. התיק שמתකבל כתוצאה משילוב של השקעה בתיק השוק והלוואה הוא תמיד יעיל במודל ה- CAPM, וכן נוכל לחשב את תוחלת התשואה וגם את סטיית התקן של התקן המשולב באמצעות הנוסחאות המתאימות ל蹶ה היעיל:

נוסחת משקלים השקעה בתיק ייעיל (כולל השקעה רק בנכס חסר סיכון / הלוואה ובתיק השוק) הרי שלפי מודל תיקי ההשקעות היעילים ב-CAPM בנוסחת המשקלים:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

נוסחת משקלים השקעה בתיק ייעיל ב-CAPM לשם חישוב סטיית התקן:

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

ובהצבת הערכים שהצלהנו לגłów במשקלים יחד עם יתר נתוני השאלה והחילוצים בסעיפים קודמים, אגלה בזריזות ש:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M) \rightarrow -\frac{2}{3} * 0.04 + 1\frac{2}{3} * 0.1 = 14\%$$

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M \rightarrow 1\frac{2}{3} * 0.2 \approx 33.33\%$$

מסקנה: תוחלת התשואה של התקן הנבחר היא 14%, וסטיית התקן שלו היא כ-33.33%.

ו. בהמשך לסעיף ה, האם משקיע שונא סיכון עשוי להשקיע בתיק זה?

לכוארה, עולה השאלה: הרי סטיית התקן של התקן מסעיף הגבוהה יחסית (33.33%), אפילו גבוהה מההשקעה בתיק השוק באופן מלא). יחד עם זאת, המשקיע מקבל פיצוי בדמות עודף תוחלת תשואה بعد השקעה זו (תשואה של 14% בתוחלת, שהיא גבוהה ב-10% מריבית חסרת סיכון, ואפילו גבוהה ב-4% מתוחלת תשואה השוק).

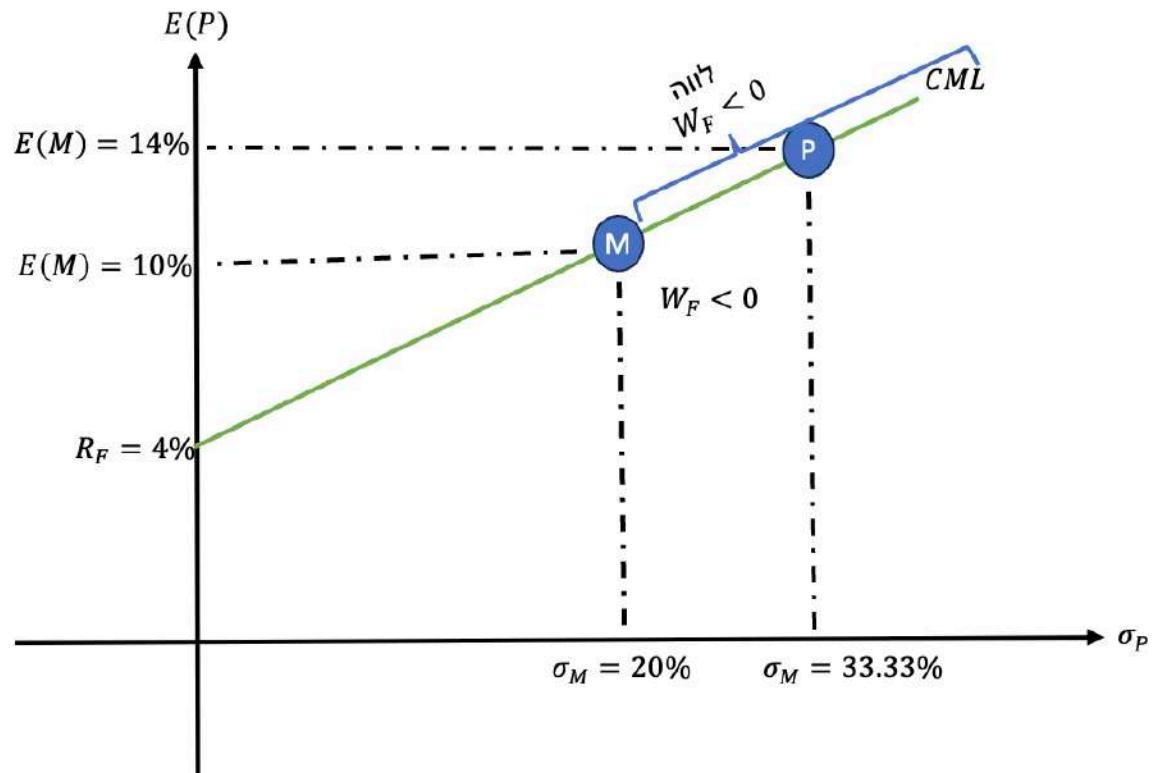
במלים אחרות - המשקיע ששולק התקן כזה מבין שהוא "מסוכן יותר" (שהזה כשלעצמם "רע") אך מנגד מודע לעודף התשואה אשר לו זוכה (שהזה כשלעצמם "טוב").

קיבלו אם כך השפעות מנוגדות, או אם תרצו: תחולפה בין סיכון ותשואה. מגלי להכיר את המשקיע אינדיבידואלית לא נוכל לטעון שיש לשלול את התקן עבור כל סוגים הסיכון בעולם ובהתאם, שונא סיכון עשוי (לא בהכרח, אך עשוי) לבחור בתיק כזה.

**זכרו: כל התקנים על ה-CML המרכיבים משילוב כלשהו של נכס חסר סיכון ותיק השוק (לרובות הלוואות) הם יעילים. וכולם מהווים חלופות השקעה רלוונטיות / יעילות מנוקדת ראות שונאי סיכון.**

בשורה התחתונה: התקן המשקיע על ה-CML, הוא עשוי להיבחר - למורות סיכון גבוהה.

ז. אifyו את המשקיע שאפייניתם בסעיפים ה, ו לעיל על העוקם הגראפי המתאים.  
סעיף זה הוא סעיף שמטרתו בעיקר לחזק ולסייע בהבנה של ההסבר שנכלל בסעיף ו.



**שאלה 87 – שימושו בנתוני ביטה על מנת לחלץ את מקדם המתאים של המניות עם השוק**  
 לנכס א שהוא נכס ייעיל יש ביטה של 0.8, ואילו לנכס ב שאינו ייעיל יש ביטה של 0.2. בנוסף ידוע כי מתקיים:  $\sigma_A = \sigma_B$ . בנסיבות אלו, מהו מקדם המתאים בין נכס ב לבין תיק השוק? [הדרכה: הציגו את נוסחת חישוב הביטה המתבוססת על מקדם המתאים עם השוק; הציגו את משווהת חישוב הסיכון המתבוססת על ביטה ואשר תקפה לתיק ייעיל; בטאו את המשתנים לפי הנסיבות; פתרו בהתאם]

פתרונות :

נתון :

$$\begin{aligned}\beta_A(Yail) &= 0.8 \\ \beta_B(Not\ Yail) &= 0.2\end{aligned}$$

$$\sigma_A = \sigma_B$$

נדרש :

$$\rho(B, M) = ?$$

הואיל והשאלה מציגה נתונים את הביטה, וכן כוללת דיוון במקדם המתאים עם תיק השוק, נזכר בנוסחת חישוב הביטה על סמך מקדם המתאים עם השוק :

$$\beta_i = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M}$$

בנתוני השאלה :

$$\begin{aligned}\beta_A &= 0.8 = \frac{\rho(A, M) * \sigma_A}{\sigma_M} \\ \beta_B &= 0.2 = \frac{\rho(B, M) * \sigma_B}{\sigma_M}\end{aligned}$$

בנוסף, מעצם העובדה שנכס א ייעיל, עולה כי הוא מקיים את הנוסחה הבאה :

$$\sigma_A^2 = \beta_A^2 * \sigma_M^2$$

בצורת ניסוח אחרת :

$$\sigma_A = \beta_A * \sigma_M \rightarrow \sigma_A = 0.8 * \sigma_M \rightarrow \sigma_A = \sigma_B \rightarrow \sigma_B = 0.8 * \sigma_M$$

עכשו נציב את הביטוי באדום במקום סטיטית התקן של נכס ב ונקבל :

$$\beta_B = 0.2 = \frac{\rho(B, M) * 0.8 * \sigma_M}{\sigma_M} \rightarrow \rho(B, M) = 0.25$$

מסקנה : מקדם המתאים בין נכס B לבין השוק הוא 0.25.

## שאלה 88

הנicho כי מודל ה - CAPM מתקיים בשוק הון מסוים.

בנוסף ידוע כי בשוק הון זה, עברו מניה מסוימת, מניה א, מתקיים כי:

$$\beta_A = 0.9 * \beta_M$$

כמו כן ידוע כי:

$$\rho_{A,M} = 0.9$$

האם במצב כזה נוכל לחוות דעתה, האם סטיית התקן של המניה גבוהה מזו של השוק, שווה לזו של השוק או נמוכה מזו של השוק? נמקו בהתאם. [הדרכה: הציגו את נוסחת הביטא המתבססת על מקדם המתאים עם השוק. פתרו אותה בהתאם]

פתרון:

לפי ההגדרה, הביטא של המניה הבודד היא בהגדרה:

$$\beta_A = \frac{\rho(A, M) * \sigma_A}{\sigma_M} \rightarrow 0.9 * \beta_M = \frac{0.9 * \sigma_A}{\sigma_M} \rightarrow \beta_M = \frac{\sigma_A}{\sigma_M}$$

תזכורת: הביטא היא ערך המודד סיכון ייחסי של נכס / תיק ביחס לשוק. נכסים מסווגנים יותר מהשוק הם בעלי ביטא גדולה מ-1, והם נקראים "אגראטיביים". נכסים מסווגנים פחות מהשוק הם בעלי ביטא קטנה מ-1, והם נקראים "דפנסיביים". הביטא של תיק השוק היא תמיד 1! כי השוק מסוכן "כמו השוק".

$$\beta_M = 1$$

ואחרי אקסיומה זו:

$$1 = \frac{\sigma_A}{\sigma_M} \rightarrow \sigma_A = \sigma_M$$

כלומר: סטיית התקן של הנכס זהה לסטיית התקן של השוק.

## שאלה 89

בשוק הון נסחרות 2 מניות: א ו-ב, וכן נכס חסר סיכון.

משמעותו מעוניין לבנות תיק השקעות כאשר:

40% מסכום השקעותיו יושקעו במניה א.

35% מההשקעותיו יושקעו במניה ב.

והיתרתו תושקע בנכס חסר סיכון.

בנוסף ידוע כי:

סטיית התקן של מניה א היא 40%

סטיית התקן של מניה ב היא 30%

מקדם המתאים בין תשואות המניות הוא 0.3.

בנתונים אלו, מה תהיה סטיית התקן של תיק ההשקעות?

פתרון:

נסכ	$R_F$	משקל השקעה בנכס	טוחלת התשואה	סטיית התקן
א		40%	?	40%
ב		35%	?	30%
		25%	?	0%

כיצד חישבנו את משקל ההשקעה באחזois בנכס חסר סיכון? ובכן, ידוע לנו שסך משקלי ההשקעה בכל הנכסים בתיק ייחד חייב להתכנס ל-100% ! משקל ההשקעה ב - א ו-ב ייחד הוא 75%, ולכן משקל ההשקעה המשלים ל-100% שהוא 25% הוא משקל ההשקעה בנכס חסר סיכון. כזכור שסטיית התקן של נכס חסר סיכון היא אפס.

כדי לחשב את סטיית התקן של תיק ה כולל 3 נכסים מסווגים לכארה צריך צרך את הנוסחה הסופר מסורבלת הבאה:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

אלא שבמקרה שלנו הנכס ה"שלישי" הוא חסר סיכון. כלומר  $0 = \sigma_F = \sigma_C = \sigma$ . ולכן רוב הביטוי מתאפס וסטיית התקן של תיק השקעות מסווג שכולל שני נכסים מסווגים וגם נכס שלישי חסר סיכון הוא קצר משמעותית:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

נambil את נתונים השאלה בנוסחה מקוצרת זו ונקבל :

נכש	משקל השקעה באחזים בנכש	תוחלת התשואה	סטטיסטית התקן
א	40%	?	40%
ב	35%	?	30%
$R_F$	25%	?	0%

$$\sigma_P = \sqrt{0.4^2 * 0.4^2 + 0.35^2 * 0.3^2 + 2 * 0.4 * 0.35 * 0.4 * 0.3 * 0.3} \approx 0.2161 = 21.61\%$$

מסקנה : סטטיסטית התקן של תיק ההשקעות היא 21.61%

### 90 שאלה

בשוק הון המקיים את הנחות ה - CAPM ידוע :

הרכיבת חסרת הסיכון היא 5%.

תוחלת תשואת תיק השוק היא 15%.

סטטיסטית התקן של תיק השוק היא 20%.

המשקיע/arator בוחר בתיק עם תוחלת תשואת של 18%.

המשקיע/arator אוarian בוחרת בתיק שטטיסטית התקן שלו 15%.

בחירת שני המשקיעים היא בתיקים ייעילים.

מה תוכלו לומר על העדפות הסיכון של המשקיעים?

א.-arator שונא סיכון יותר מאשר אוarian

ב. אוarian שונאת סיכון יותר מאשר-arator

ג.-arator ואוarian שונאי סיכון במידה שווה

ד.-arator אוהב סיכון, ואילו אוarian שונאת סיכון

ה. אוarian שונאת סיכון ואילו-arator אוהב סיכון

פתרון - התשובה ב, להלן חפירת הנמקה :

ידוע :

$$R_F = 5\%$$

$$E(M) = 15\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

arator :

$$E(AR) = 18\%$$

אוarian :

$$\sigma(OR) = 15\%$$

אנו בעולם המקיים את הנחות מודל ה-CAPM. בהתאם, ולפי הנחות המודל, כל המשקיעים שונאי סיכון. יחד עם זאת, בהחלט יתכו משקיעים שונאי סיכון יותר / פחות אחרים. בהינתן שבחרתם בתיקים עילים, ההחלטה בהקשר זה תהיה פשוטה - המשקיע שבוחר בתיק מסוכן יותר מחברו, הוא פחות שונאי סיכון מחברו ולהפך.

את הסיכון שאוריין הסכימה ליטול על עצמה, אנחנו יודעים כמובן. המשמעות היא, שאם נוכל גם לחלץ ולבודק מהו הסיכון שארטור נוטל על עצמו - פחות או יותר פתרנו את השאלה.

איזו נוסחה, בהנחה עילות, היא המתאימה ביותר לגלות את סטיית התקן בתיק של ארטור? המשווה הרלוונטי ביותר לחילוץ סטיית התקן של תיקיע ייעיל במודל- $\text{CAPM}$  בהינתן נתוני תוחלת השוק ( $M$ ), ריבית חסרת סיכון  $R_F$  וסטיית התקן של תיק השוק  $\sigma_M$  היא משווהת ה-CML עצמה:

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

במצבת נתוני השאלה ונתוני תוחלת ארטור נקבל חיש קל:

$$18\% = 5\% + \frac{15\% - 5\%}{20\%} * \sigma_{AR} \rightarrow \sigma_{AR} = 0.26 = 26\% > \sigma_{OR} = 15\%$$

הואיל וגילינו שארטור בחר בכפוף לאותם נתוני שוק בתיק מסוכן יותר, הרי שהוא פחות שונאי סיכון מאוריין (או: אוריין שונאית סיכון יותר מאשר ארטור).

הבהרה חשובה – למרות שארטור פחות שונאי סיכון מאוריין, לא נוכל לומר שהוא אוהב סיכון; שנאת סיכון (המחשה מטומטמת שאני נתן) היא כמו לשונו דגים; אם אני מוכן לאכול הרבה דגים בתמורה לכך ישילמו לי הרבה כסף – זה לא אומר שאני אוהב אותם, אלא שאני כנראה פחות שונאי דגים מאדם אחר שלא מוכן לאכול כל כך הרבה דגים למרות הפסיכו שהוא יכול לקבל בעד זאת.

אוהב סיכון – הוא אדם שעצם אכילת הדג מענגת אותו, עצם נטילת הסיכון מענגת אותו, והוא לא דורש בכלל פיזי בדמות תוחלת תשואה גבוהה יותר. אוהבי סיכון בכלל לא חיים / קיימים במודל- $\text{CAPM}$ . כל הרעיון ב- $\text{CAPM}$  הוא לייצר תיקים עילים המזערים סיכון לכל רמת תשואה רלוונטית.



בקצהה : כל המשקיעים במודל ה-CAPM הם שוני סיכון בהגדלה ; הנקודה הספציפית ורמת הסיכון הספציפית בה יימצאו יכולה להעיד האם הם שוני סיכון יותר או פחות מאשרים ; אך זה לא הופך אותם לאוהבי סיכון .

#### שאלות מבחנים – מיקס ייחידה 8 :

מטרת התרגול כתת היא לפתרור ריבוי שאלות בנושא סיכון ותיקי השקעות, ללא חלוקה דיקוטומית או מופרדת ברורה בין המודל של נכסים מסוכנים בלבד (מרקובייז') לבין מודל ה-CAPM כמו שעשינו בסותה רבה ברוב התרגילים עד כה ; מדוע ? משום שאנחנו רוצחים להיערך עקרונית לצורך שלנו בזיהוי המודלים תוך כדי תנועה והבחנה ברורה ביניהם .

#### שאלה 10

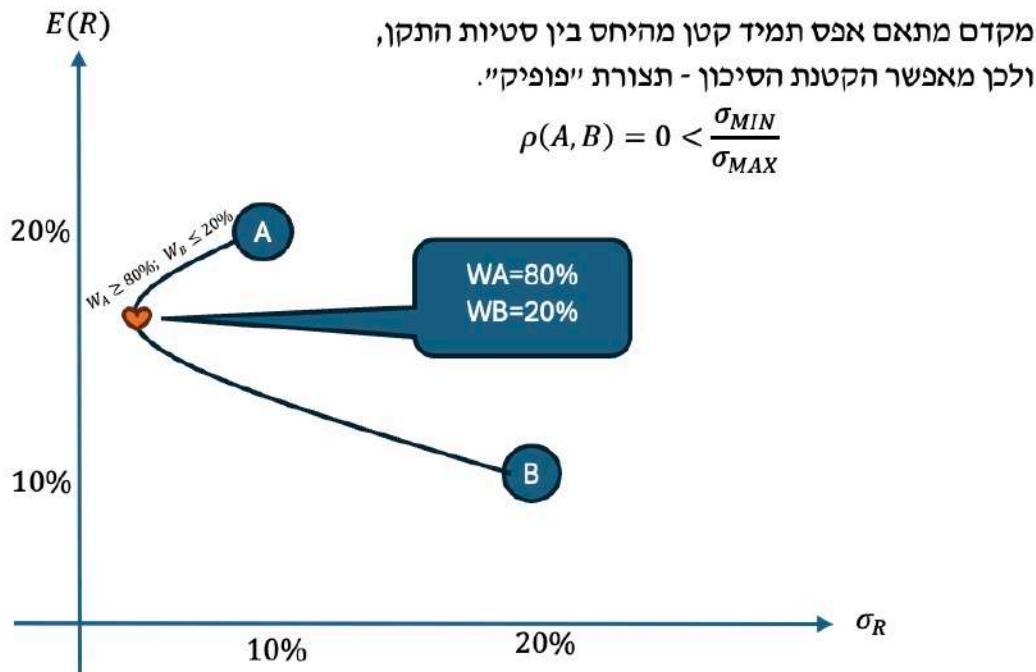
הנicho כי בשוק ההון קיימות שתי מניות בלבד : מקדם המתאים בין המניות הוא אפס .

מניה B	מניה A	תוחלת תשואה
10%	20%	תוחלת תשואה
20%	10%	סטטיסטית תקן

בחרו את הטענה הנכונה עבור מSCIיע דוחה סיכון :

- א. אף מSCIיע לא ישקייע יותר מ-20% מכספיו במניה B .
- ב. אף מSCIיע לא ישקייע פחות מ-20% מכספיו במניה B .
- ג. ניתן כי המSCIיע יבחר להSCIיע 70% מכספיו במניה A ו-30% מכספיו במניה B .
- ד. כל המSCIיעים יבחרו לחלק את כספם בין A ל- B , בין 0% ל-100% בכל מניה .
- ה. כל המSCIיעים יבחרו להSCIיע 100% מכספים במניה A בעלת תוחלת התשואה המרבית .

פתרון (תשובה א):



נקודות ה- ❤️ המיצגת את תיק מינימום סיכון, היא נקודת שבת משקלים המשקעה בכל אחד מהנכדים ניתנים לאפיון על בסיס נוסחת המשקלים:

$$W_A^{MVP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho(A, B) * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho(A, B) * \sigma_A * \sigma_B}$$

$$W_A^{MVP} = \frac{0.2^2 - 0 * \sigma_A * \sigma_B}{0.1^2 + 0.2^2 - 2 * 0 * \sigma_A * \sigma_B}$$

$$W_A^{MVP} = \frac{0.2^2}{0.1^2 + 0.2^2} = 0.8 = 80\%$$

$$W_B^{MVP} = 1 - W_A^{MVP} = 1 - 0.8 = 0.2 = 20\%$$

לביון נקודת A

היעילות על חלק העקום בין ה ❤️

תהליך העבודה שהפעלנו כלל איזור עוקום תמהילי ההשקעה, וזיהויו חלקו הייעיל, בהתאם לערך מקדם המתאים. מצאנו את המשקלים בתיק מינימום סיכון, וידענו שהחלק הייעיל של העקום נמצא החל מנקודת זו, ימינה ומעלה, ובהתאם – זיהינו את המשקלים יוצרו היעילות שימושדים להשקעה. בהתאם, קבענו שתשובה A נכונה.

## שאלה 7

להלן מספר נתונים על מנויות A ו- B:

	מניה B	מניה A
תוחלת	20%	10%
סטיית תקן	20%	10%

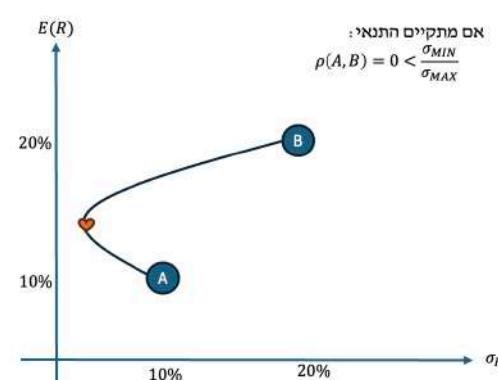
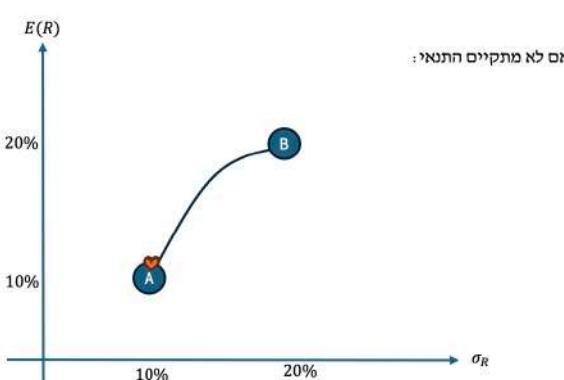
תיק המפוזר בין שתי המניות (לא אפשרות למכירה בחסר) עשוי להניב:

- תוחלת שיעור תשואה הנמוכה מ- 20% וסטיית תקן הגבוהה מ- 10%.
- תוחלת שיעור תשואה בין 10% ל- 20% וסטיית תקן בין 10% ל- 20%.
- תוחלת שיעור תשואה בין 10% ל- 20% וסטיית תקן הנמוכה מ- 20%.
- תוחלת שיעור תשואה וסטיית תקן הגבוהות מ- 10%.
- כל התשובות נכונות.

התשובה ה.

בשאלה זו, יש שני טריקים: הטריק האחד הוא שמקדם המתאים בין הנכסים לא ידוע, ולכן לא ברור האם מתייחסים במצב שבו אפשר להקטין סיכון (מיינין) או שאי אפשר להקטין סיכון (משמאלי). לכן צריך להתייחס לשני המצביעים.

הטריק השני הוא, שלא דיברו כאן על יעילות או על בחירת משקיעים, וגם לא דיברו על מחויבות לקיים תנאים מסוימים או מאפיין מסוימים; בסך הכל הניסוח אומר "עשוי להניב". כזו הניסוח, מופיע שנווכל להראות באחד מהמקרים המתוארים שניתן להגיא לтик העונה להיגד כלשהו – ו מבחינותנו הוא מתקיים.



שאלה 9

הטבלה הבאה מတatta את התוחלת וסטיית התקן של שתי מניות:

B	A	מניה
		תוחלת
		סטיית התקן
20%	15%	
25%	20%	

מקדם המתאים בין שתי המניות הוא 0.5. (מינוס חצי).

משקיע מחלק את כספו שווה בשווה בין שתי השקעות. סטיית התקן של תיק המניות המשולב היא:

- א. 11.46%
- ב. 19.52%
- ג. 13.91%
- ד. 16.20%

ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**פתרון:**

זו כנראה השאלה הקלה ביותר שתראו אי פעם. מדובר בעולם עם שני נכסים מסוכנים בלבד, עם מקדם מתאים נתון, עם משקלים השקעה נטוניים בכל נכס (שווי בשווה = 50% השקעה בכל אחד משני הנכסים), ועם נתוני תוחלת וסטיית התקן מן המוכן.

כל מה שנותר לנו לעשות זה להציב את הערכים בנוסחת סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים ולקבל חישוב קל:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

$$\sigma_P = \sqrt{0.5^2 * 0.2^2 + 0.5^2 * 0.25^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * 0.2 * 0.25 * (-0.5)} = 0.1146 = 11.46\%$$

התשובה א.

8. הטבלה הבאה מתארת את התוחלת וסטיית התקן של שתי מניות:

B	A	מניה
תוחלת תשואה		סטיית התקן
30%	10%	
80%	25%	

מקדם המתאים בין שתי המניות הוא 0.7.

משקיע היכול להשكيיע בשתי מניות אלו בלבד מעוניין להשיג תשואה של 21% על כספו. סטיית התקן של תיק המניות המשולב היא:

- א. 27.56%
- ב. 52.49%
- ג. 78.85%
- ד. 67.04%
- ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**פתרונות:**

שלב 1 – שימוש בנוסחת תוחלת תשואת תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים לשם חילוץ משקליהם המשקעה בכל נכס אשר יובילו לתוחלת הנтונה:

$$E(P) = W_A * E(A) + (1 - W_A) * E(B)$$

**בהתבזה:**

$$21\% = W_A * 10\% + (1 - W_A) * 30\% \rightarrow W_A = 45\% \rightarrow W_B = 1 - 45\% = 55\%$$

כעת, נוכל להציב את הערכיהם הרלוונטיים בנוסחת סטיית התקן של תיק המורכב מ-2 נכסים מסוכנים וסימנו:

$$\sigma_P = \sqrt{0.45^2 * 0.25^2 + 0.55^2 * 0.8^2 + 2 * 0.45 * 0.55 * 0.25 * 0.8 * 0.7} \approx 52.49\%$$

ולכן התשובה: ב.

7. לפניכם נתונים על תשואת השוק ועל תשואת מניה חברת "מאור" במהלך 4 השנים האחרונות:

תשואת מניה	תשואת תיק השוק	שנה
13%	21%	1
21%	18%	2
38%	22%	3
8%	-5%	4

מכאן הביטה של חברת "מאור" היא:

- א. 0.399
- ב. 0.631
- ג. 2.68
- ד. 1.24
- ה. אף תשובה מהניל אינה נכונה.

**פתרון:**

שאלה זו היא סיציפית במיוחד והיא דורשת מיאתנו לחשב על בסיס נתונים גולמיים (תשואות מפורטוות) את הקשר (על בסיס שונות משותפת COV או מקדם מתאם) בין נתוני המניה לבין נתוני השוק, ועל בסיסם לחשב יישור את הביטה לפי אחת מבין שתי הנוסחאות המקובלות שלה.

בטור התחלה, נחשב את תוחלת התשואה של המניה ושל השוק. בהינתן שיש 4 תציפות בלבד, הנחთנו היא כי התוחלת היא הממוצע הפ疏ט של התשואה הנתונות:

$$E(Menaya) = \frac{21\% + 18\% + 22\% - 5\%}{4} = 14\%$$

$$E(M) = \frac{13\% + 21\% + 38\% + 8\%}{4} = 20\%$$

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{(13\% - 20\%)^2 + (21\% - 20\%)^2 + (38\% - 20\%)^2 + (8\% - 20\%)^2}{4}} = 11.37\%$$

נחשב כעת את השונות המשותפת בין תשואת המניה לתשואה השוק שהיא רכיב חיוני בחישוב יישור של הביטה:

$$COV(i, M) = \sum P_i * [R_i - E(i)] * [R_M - E(M)]$$

$$COV(i, M) = \frac{[(21\% - 14\%) * (13\% - 20\%) + (18\% - 14\%) * (21\% - 20\%) + (22\% - 14\%) * (38\% - 20\%) + (-5\% - 14\%) * (8\% - 20\%)]}{4}$$

כך קיבלנו :

$$COV(i, M) = 0.00936$$

כעת, נשתמש בנוסחת הביטא המבוססת על השונות המשותפת עם השוק, כלהלן :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

בהצבה :

$$\beta_i = \frac{0.00936}{0.1137^2} \approx 0.631$$

התשובה ב.

**בسمיסטר 2025 – כאן התחלנו את מפגש 10 – ללא מבוא – צוללים ישר ולענין,**

**יישומי ייח' 8 בכללותם (4.6.2.2025)**



**מבחן 6 – שאלה 8**

8. בשוק ההון, המציג בשווי משקל לפי ה-CAPM, נסחרות שתי מניות A ו- B. תוחלת התשואה של מניה A היא 12%, ותוחלת התשואה של מניה B היא 24%. הביטה של מניה B היא 1.5 ושער ריבית נטול סיכון הוא 6%. מכאן הביטה של מניה A היא :

- א. 0
- ב. 0.75
- ג. 1
- ד. 0.5

ה. לא ניתן לדעת ללא ידיעת תוחלת תשואת תיק השוק.

**פתרון :**

אם נתקלתי בשאלת שבה נדרש הביטה (המסקפת את המקדם של מרכיב הסיכון השיטתי), ברמה הטכנית, שני אפקטי פעולה עיקריים ניצבים בפנוי:

אפקט 1 : אם אני יודע מהי תוחלת התשואה ופרמטרים נוספים בהקשר לשוק – אוכל לחלץ את הביטה, מטען משווהת ה-SML. אמנם, משווהת ה-SML מתקיימת רק ב"שווי משקל" אך במקרה זה – שוויי המשקל נתון וזו גם ברירת מחדל.

אפקט 2 : חישוב הביטה על בסיס הנוסחאות הסטטיסטיות (המגעליות) הארוכות : אלו שכוללות מקדם המתאים עם השוק, או שונות משותפת עם השוק.

**כתיבה מקוצרת של כל הנתונים והנדרש :**

$$E(A) = 12\%; E(B) = 24\%; \beta_B = 1.5; R_F = 6\%; \beta_A = ?$$

אפקט 2 פחות מתאים כאן, מבחינת הנתונים.

עבור לאפקט 1 ואזכור בנוסחאותו :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

אפנה ואציג את הערכים המתאימים עבור נכס A :

$$12\% = 6\% + [E(M) - 6\%] * \beta_A$$

בהתנן שני נעלמים, לא ניתן לפטור, אנסה לחלץ את הנתון החסר (EM) מנתוני נכס B :

$$24\% = 6\% + [E(M) - 6\%] * 1.5 \rightarrow E(M) = \frac{24\% - 6\%}{1.5} + 6\% \rightarrow E(M) = 18\%$$

כעת אפשר לחזור להצבה של ערך זה במשוואת ה-SML עבור נתוני נכס A :

$$12\% = 6\% + [18\% - 6\%] * \beta_A \rightarrow \beta_A = \frac{12\% - 6\%}{12\%} \rightarrow \beta_A = 0.5$$

התשובה ד.

#### מבחן 4 - שאלה 8

##### שאלה 8

נתונים שני תיקים ייעילים - A ו- B. שעור התשואה על תיק A הוא 10% ועל תיק B הוא 20%. סטיית התקן של תיק B גדולה פי 3 מסטיית התקן של תיק A. שער ריבית נטול סיכון:

א. 5%

ב. 10%

ג. 12.5%

ד. 7.5%

ה. 15%

**פתרון :**

עزم האזכור של שער ריבית נטול סיכון (אוו המושג המקבולי המקביל – אג'יח מממשלתי) מעיד על כך שפועלים תחת עולם המקיים את הנחות ה-CAPM.

כאשר פועלים בהנחות ה-CAPM, נשאל את עצמנו – מה בדיק רוצים / צרך (כאן – רוצים לחלץ את RF) ואיilo משוואות יכולות להתקיים ולסייע לנו בחילוץ בהינתן נתוני השאלה.

השלב הבא – אשאל את עצמי – האם מדובר בתיקים ייעילים? **התשובה כן** – זה אומר בהגדרה שכל הנוסחאות שנלמדו בהקשר ל-CAPM רלוונטיות.

הויל ו-RF מופיע בנוסחאות רבות, אביט גם על הנתונים האחרים, אולי גם יכולים לרמזו לי מה הנוסחה הרלוונטית.

$$E(A) = 10\%; \quad E(B) = 20\%; \quad \sigma(B) = 3\sigma(A) \quad ; R_F = ?$$

ככלל, נטיית לבי לשאלות הקשורות בין סטיית התקן ותוחלת תשואה היא משוואת CML עצמה:

$$CML: \quad E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

אם אנסה לחלץ את RF על בסיס הצבת המידע הקיים – שתי נוסחאות CML שבחן אציב את כל אחד מהנכסיים, קיבל:

$$CML(A): \quad 10\% = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma(A)$$

$$CML(B): \quad 20\% = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * 3\sigma(A)$$

לכארה, יותר מדי נעלמים לשם חילוץ RF. אבל... לא באמת. כי יש טרייק טכני קטן. הטריק הטכני אומר, שモתר לנו עקרונית להתייחס לכל השיפוע של קו ה-CML כל נעלם בפני עצמו. נסמן:

$$x = \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M}$$

ונחזר למשוואות המקוריות:

$$CML(A): (I) \quad 10\% = R_F + x * \sigma(A)$$

$$CML(B): (II) \quad 20\% = R_F + x * 3\sigma(A) \rightarrow 20\% = R_F + 3x\sigma(A)$$

כפول את המשוואת ה-I ב-3. מדוע? כי זה יהפוך את הביטוי הביעיתי  $\sigma * x$  לביטוי שנייתן לצמצם.

$$CML(A): (I) \quad 3 * 10\% = 3 * R_F + 3x\sigma(A)$$

$$CML(B): (II) \quad 20\% = R_F + 3x\sigma(A)$$

נפחית ממשוואת I את משוואה II כלומר אגף ימין של כל המשוואת הראשונה פחות אגף ימין של השניה ואגף שמאל של המשוואת הראשונה בኒקי אגף שמאל של המשוואת השניה.

$$30\% - 20\% = 3 * R_F + 3x\sigma(A) - (R_F + 3x\sigma(A))$$

נקבל:

$$10\% = 3 * R_F - R_F \rightarrow R_F = \frac{10\%}{2} \rightarrow R_F = 5\%$$

התשובה: א.

### מבחן 3 - שאלה 9

#### שאלה 9

לפי ה- CAPM, אם לתשואת שני נכסים שונים אותו מקדם מתאם עם תשואת תיק השוק, הרי :

- לשנייהם אותה תוחלת שיעור תשואת אך סטיית תקן שונה.
- לשנייהם אותה תוחלת שיעור תשואת ואותה סטיית תקן.
- לשנייהם אותה סטיית תקן אך תוחלת שיעור התשואת יכולה להיות שונה.
- לנכס בעל סטיית התקן גבוהה יותר גם תוחלת שיעור תשואת גבוהה יותר.
- כל התשובות הנ"ל אינן נכונות.

#### פתרון :

כמובן שמדובר במודל CAPM. השאלה עצמה מציגה כנתון את מקדם המתאים עם תיק השוק.  זו סירנת הביטא. מדוע? משום שהתקpid העיקרי של מקדם המתאים עם השוק (ובמקרים אחרים – השונות המשותפת עם השוק) היא לצורך חישוב ישר של הביטא.

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2} \quad \beta_i = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M}$$

אסמן את שני הנכסים כ- A ו- B ונקבל בהקשר זה בהצבה במשוואת הימנית :

$$\beta_A = \frac{\rho(A, M) * \sigma_A}{\sigma_M} \quad \beta_B = \frac{\rho(B, M) * \sigma_B}{\sigma_M}$$

בנוסף נתון שמקדם המתאים של הנכסים עם השוק זהה, ולשם נוחות / המשך התהילה יהיה לי נוח לסמנו כ- x :

$$\rho(A, M) = \rho(B, M) = x$$

נבטא מחדש את ערכי הביטא בשים לב לנตอน זה :

$$\beta_A = \frac{x}{\sigma_M} * \sigma_A \quad \beta_B = \frac{x}{\sigma_M} * \sigma_B$$

במצב כזה נוכל לטעון טענה מעניינת: הנכס שסטיית התקן שלו גבוהה יותר – יהיה (במקרה זה) הנכס שהbijטא שלו גבוהה יותר ולהפך, כאשר הביטא גבוהה יותר – התוחלת גבוהה יותר לפי משוואת ה- SML :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

על בסיס ההנחה לעיל, נוכל לאשר מיד את טענה 2: במקרה זה, הנכס שסטיית התקן שלו גבוהה יותר, גם תוחלתו גבוהה יותר.

טענה א : לשני הנכסים תוחלת תשואה זהה, אך סטיית תקו שונה  
אנו פועלים בהנחות מודל CAPM. ואנו עוסקים בנכסים בודדים, שאינם בהכרח ייעילים. בעולם כזה, ככל שהbijיטה של הנכס גבוהה יותר, תוחלת התשואה גבוהה יותר; ואם תוחלות התשואה זהות – ערכי הביטה זהים. האם אני יכול להגיד שערך הביטה של הנכסים זהים? התשובה שלילית, שכן הביטה תלולה בסטיית התקן של הנכסים שאינה ידועה כאן. לכן, אני מפסיק לקרוא את המשפט אחרי המילים "תוחלת זהה". אי אפשר לקבוע למי יש גובהה יותר / נמוכה יותר / האם הן זהות, וכך נוכל לומר דבר על תוחלתן זו מול זו.

**טענה ב:** לשני הנכים תוחלת תשואה זהה, אך ~~לא מעניין, כי החלק הראשון של המשפט דפוק כמו זית סורי, ראו הנמקה לעיל~~

**טענה ג : לשניהם אותה סטיית תקן :** ושוב הפסיקי לקרוא אחרי החלק הזה של המשפט. אין שום דבר בנתוני הבסיס של השאלה המבשר על סטיות תקן זיהות.

### מבחן 3 - שאלה 10

#### שאלה 10

דני השקיע את כספו בתיק השקעות ייעיל. מנהל התיק הודיע לו כי לכל תוספת של 2% לsiccon (כלומר, לסטיית התקן) על השקעתו, יוכל להגדיל את תוחלת שיעור התשואה ב- 2.5%. דני הודיע למנהל התקיק כי אין ברצונו לסכן את כספו והוא מבקש להשקיע את כספו ללא סיכון. מנהל התקיק הודיע לדני כי השקעה ללא סיכון משלמת ריבית של 5%. מכאן שמשוואת ה- CML (בاقזים) היא:

$$a. \mu_P = 2.5 + 1.25 \cdot \sigma_P$$

$$b. \mu_P = 5 + 2.5 \cdot \sigma_P$$

$$c. \mu_P = 5 + 1.25 \cdot \sigma_P$$

$$d. \mu_P = 2.5 + 2 \cdot \sigma_P$$

ה. אין מספיק נתונים המאפשרים את מציאת משוואת ה- CML.

פתרון :

ראשית, הבירה: הסימון הזה – מיו – הוא הסימון שהיה נהוג להשתמש בו בגרסאות הקורס הקודמות לסימון התוחלת:

$$\mu_P$$

במלים אחרות, השאלה שואלת, איזו מביין המשוואות הבאות מתאימה לתיאור משוואת ה- CML :

$$E(P) = 2.5\% + 1.25 * \sigma_P$$

$$E(P) = 5\% + 2.5 * \sigma_P$$

$$E(P) = 5\% + 1.25 * \sigma_P$$

$$E(P) = 2.5\% + 2 * \sigma_P$$

במשפט האחרון של נתוני השאלה נאמר מפורשות כי השקעה ללא סיכון נושאת ריבית בשיעור 5%. ככלומר אין ספק ש-  $R_F$  שהוא הערך המספרי הראשון במשוואת ה- CML הוא 5%. כבר אפשר "לسان החוצה" כל משווהה שבה האיבר הראשון שונה מ- 5%, ונשארים עם האופציות הללו:

$$E(P) = 5\% + 2.5 * \sigma_P$$

$$E(P) = 5\% + 1.25 * \sigma_P$$

למעשה, המשווהה הראשונה מציגה מצב שבו כל עלייה של 1% בסיכון תורמת לתוחלת התשואה 2.5%. המשווהה השנייה מציגה מצב שבו כל עלייה של 1% בסיכון תורמת לתוחלת התשואה 1.25%.

השאלה בישרה: "אם תגדיל את סטיית התקן ב-2%, תגדיל את התוחלת ב- 2.5%"

המשמעות: אם סטיית התקן תגדיל ב-1%, התוחלת תגדל ב-1.25% ולכן 1.25 זה שיפור ה- CML.

ולכן, התשובה הנכונה היא שמשוואת ה-CML היא:

$$E(P) = 5\% + 1.25 * \sigma_P$$

כלומר, התשובה ג.

בעצם, היעילות מאפשרת לי להשתמש בכל משווה  
(והיעילות נזונה) אך הואיל והשאלה עצמה דנה  
בקשר בין סטיית תקן לתוחלת (ולא בקשר בין ביטא  
لتוחלת) ה-CML הוא הכליל המתאים



**מבחן 2 - שאלה 9**

9. הנה כי שוק ההון מצוי במצב של שווי משקל לפי CAPM. לمنיה A תוחלת תשואה של 15%

ו-  $\beta$  של  $\frac{1}{2}$ . לمنיה B תוחלת תשואה של 20% ו-  $\beta$  של 1. לمنיה C תוחלת תשואה של

30%. מה תהיה ה-  $\beta$  של מניה C?

- א. 1.3
- ב. 0
- ג. 2
- ד. 1.8
- ה. -0.5

**פתרונות:**

**נתון:**

$$E(A) = 15\%; \quad E(B) = 20\%; \quad E(C) = 30\%$$

$$\beta_A = 0.5 \quad \beta_B = 1 \quad \beta_C = ?$$

באופן עקרוני, כדי להגיע לביטה, שני המסלולים העיקריים כוללים – הצבות ב-SML (שבשונה מייעילות, ניתן להניח קיומו), ואו שימוש בנוסחאות הכוללות התייחסות למקדם המתאים עם השוק ואו השונות המשותפת עם השוק (כאן – כנראה פחות רלוונטי).

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

$$A: 15\% = R_F + [E(M) - R_F] * 0.5$$

$$B: 20\% = R_F + [E(M) - R_F] * 1 \rightarrow E(M) = 20\% \rightarrow A: 15\% = R_F + [20\% - R_F] * 0.5 \rightarrow R_F = 10\%$$

$$C: 30\% = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_C \rightarrow 30\% = 10\% + [20\% - 10\%] * \beta_C \rightarrow \beta_C = 2$$

**התשובה ג.**

10. בשווי משקל לפי CAPM תוחלת התשואה של מניה משקפת את שער הריבית נטול הסיכון

בתוספת פרמייה בגין:

- א. הסיכון שאנו נימיך לפיזור.
- ב. סטיית התקן של המניה.
- ג. הסיכון המתן לפיזור.
- ד. סטיית התקן של תיק השוק.
- ה. תשובות א'ו- ד' נכונות.

**פתרון:**

מניה אינה נכס ייעיל. לכן, כל הדיוון ב-CML וגורורתו, לא רלוונטי. כאשר עוסקים במניה בודדת ו/או בנכס שאין מידע בדבר ייעילותו, הקשר בין הסיכון והתשואה מתבסס על ה-SML:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

התשואה עצמה מתחילה יפה. היא א证实 את אוממת שתוחלת התשואה של כל נכס – לרבות מניה – מתחילה משער הריבית נטול הסיכון בתוספת (פרמייה) בגין הביטא. בגין מקדם הסיכון השיטתי – שהוגדר על ידיינו בתור הסיכון שאינו ניתן לפיזור (סיכון שאינו ניתן לפיזור = סיכון שיטתי = כזה שלא ניתן להמנע ממנו גם אם נגוע את התקין). מכאן, טענה א' נכונה.

טענה ב – שגויה! סטיית התקן היא הסיכון הכלול. סיכון כולל זה, במקרה של מנויות ו/או נכסים לא ייעילים אחרים, כולל שני רכיבי סיכון – סיכון שיטתי וסיכון לא שיטתי (סיכון שאינו ניתן לפיזור וסיכון שאינו ניתן לפיזור). מודל ה-CAPM מनיב עלייה בתוחלת התשואה רק עבור רכיב הסיכון השיטתי (שאינו ניתן לפיזור, מבוסס הביטא) ולא עבור הסיכון הכלול (סטיית התקן).

טענה ג – שגויה! על פי טענה זו, דוחוקה הסיכון הנימיך לפיזור (הלא שיטתי) הוא זה שמקנה תשואה נוספת. זה כמובן לא נכון, הסיכון שמצויה בתוספת תשואה הוא הסיכון שלא ניתן לפיזור (השיטתי).

טענה ד – שגויה! סטיית התקן של תיק השוק כלל לא מופיעה במשוואת הקשר בין סיכון ותוחלת של נכסים שאינם ייעילים :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

שאלה ממבחן אמיתי בתורת המימון (השאלות לעיל נלקחו ממקורות אחרים בחלקן)  
מבחן באתר שמספרו 20 – שאלה 14

**שאלה 14**

בשוק המקיים את הנחות ה-CAPM, הביטה של מניה שאינה יعلا (בעל סיכון לא שיוטני) שווה לביטה של תיק השוק.

אם תוחלת התשואה של תיק השוק היא 9%, אז **בשווי משקל**: "תוחלת התשואה של המניה \_\_\_\_\_ מ-ל-9% וסטיית התקן של תשואת המניה \_\_\_\_\_ מ/לסטיית התקן של תשואת תיק השוק"

**סמן את התשובה הנכונה:**

- א. נמוכה; נמוכה
- ב. נמוכה; גבוהה
- ג. שווה; גבוהה
- ד. שווה; נמוכה
- ה. שווה; שווה

**פתרונות:**

מה פשר הנתון: "הביטה של מניה שווה לביטה של תיק השוק"?

הביטה של תיק השוק היא תמיד 1. נקודת.

מדוע? ראשית, מושם שהביטה משקפת את הסיכון היחסי – ביחס לשוק. הסיכון מסוכן בדיקון כמו השוק, שכן ביטה שווה ל-1.

אפשר להראות זאת כחלופה, גם מתמטית: תיק השוק מקיים את משוואת ה-SML:

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

$$E(M) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_M \rightarrow \beta_M = 1$$

לכן, המשפט שאומר: ביטה של מניה (נסמן כ-A לשם נוחות) זהה לביטה של תיק השוק, משמעה שהביטה של המניה היא 1.

$$\beta_A = 1$$

הטענה בשאלה: אם תוחלת התשואה של תיק השוק היא 9%, אז **בשווי משקל**: "תוחלת התשואה של המניה נמוכה/ גבוהה/ שווה 9%, וסטיית התקן של תשואת המניה נמוכה/ גבוהה/ שווה לסטיית התקן של תיק השוק" עליינו למחוק את המיותר.

אם תוחלת התשואה של תיק השוק היא 9%, אז **בשווי משקל**: "תוחלת התשואה של המניה **נמוכה/ גבוהה/ שווה 9%**, וסטיית התקן של תשואת המניה **נמוכה/ גבוהה/ שווה לסטיית התקן של תיק השוק**" עליינו למחוק את המיותר.

לגביה הטיעון המתמטיים לתוחלת:

$$E(A) = R_F + [E(M) - R_F] * 1 \rightarrow E(A) = E(M) = 9\%$$

גם בלי החישוב, יכולתי לומר: הבדלים בתוחלת התשואה (בשיעור משקל, שזו גם ברירת מחדל) יתקיימו רק אם קיימים הבדלים בערכי הביטה. לכן, אם הביטה זהה לזו של השוק, התוחלת זהה לתוחלת השוק, וכך ל-9%.

לגביה הטיעון המתמטיים לסטטיסטית התקן (הסיכון הכלול) – מרכיב בנכס לא יעיל מסיכון שיטתי וסיכון לא שיטתי:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

ערך הביטה כאן הוא 1:

$$\sigma_i^2 = 1^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

כמובן שזה אומר שההנחה שbenhינתן ש.bnכס לא יעיל, וקיים לו גם רכיב סיכון לא שיטתי כמובן שהסיכון הכלול של הנכס גבוהה מסיכון השוק.

גם בלי החישוב יכולתי לומר: אם לנכס לא יעיל קיימת ביטה זהה לזו של נכס יעיל אחר, הסיכון הכלול בנכס הלא יעיל (סטטיסטית התקן) יהיה גבוה יותר – זה למעשה מה שמנדריך אי-יעילות – סיכון עוזף, נוסף, מעלה השיטתי.

לכן התשובה הנכונה: ג.

**מבחון אמיתי מס' 20 – שאלה 17** **שאלה 17**

בבחחה שמודל CAPM מתקיים בשוק, נתונים שבי תיקים ייעילים (מצאים על ה- CML).

תוחלת תשואת תיק A – 25% וסטיית התקן שלו 6%.

תוחלת תשואת תיק B – 16%. מהי סטיית התקן של תיק B, אם ידוע כי תוחלת תשואת תיק

שוק היא 13% ושער ריבית נטול סיכון הוא 7%?

א. 11%

ב. 3%

ג. 1%

ד. 2%

ה. לא ניתן לחשב שכן חסור נתון לגבי סיכון תיק השוק.

**פתרון :**

דנים פה ביעילות; בנוסף, מבחינת הנתונים יש כאן דיוון בסטיית התקן מול תוחלת תשואה. הקשר בין סטיית התקן לתוחלת בתיקים ייעילים מתקבל על ידי משוואת ה- CML :

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

**הנתונים בשאלה :**

$$E(A) = 25\% \quad E(B) = 16\% \quad \sigma_A = 6\% \quad E(M) = 13\% \quad R_F = 7\% \quad \sigma_B = ?$$

נציב את נתוני נכס A ונקבל :

$$25\% = 7\% + \frac{13\% - 7\%}{\sigma_M} * 6\% \rightarrow \sigma_M = 2\%$$

כעת, יש את כל מה שצורך בעולם, כדי להציב את נתוני נכס B יחד עם מידע זה, ולחלץ את סטיית התקן של נכס B :

$$16\% = 7\% + \frac{13\% - 7\%}{2\%} * \sigma_B \rightarrow \sigma_B = 3\%$$

התשובה ב.

שאלה מבחן אמיתי – שאלון 20, שאלה 13

שאלה 13

הנחנו ששוק המניות נמצא בשווי משקל לפי מודל CAPM. תיק השוק מניב תוחלת תשואה של 25% עם סטיית תקן של 20%. תיק עיל  $P$  מניב תוחלת תשואה של 30% וסטיית תקן של 30%. תיק זה ובו מושקעה בתיק השוק ובנכס חסר סיכון. בהנחה שמניה  $C$  איננה עיליה והוא מניבת תוחלת תשואה של 35%, חשבו עבור מניה  $C$  את הטיסון שאינו ניתן לפיזור ( $\beta_C \cdot \sigma(R_m) \cdot \sigma$ ) :

- א. 50%
  - ב. 15%
  - ג. 20%
  - ד. 40%
- ה. אי-אפשר לחשב שכן חסר נתון לנבי שער ריבית נטול סיכון.

פתרונות:

נתונים בשאלה :

$$E(M) = 25\% \quad \sigma_M = 20\% \quad E(P_{\text{יעיל}}) = 30\% \quad \sigma_P = 30\% \quad E(C_{\text{לא-יעיל}}) = 35\%$$

נדרש :

סיכון שאינו ניתן לפיזור (<>> סיכון חיוני <<<) סיכון שיטתי :

$$\beta_i^2 * \sigma_M^2$$

כאן בשאלה ספציפית – ביקשו שابتא את הסיכון השיטתי ללא הריבוע כלומר במנוחי סטיית תקן :

$$\beta_C * \sigma_M = ?$$

הוائل וסטיית התקן של תיק השוק נתונה בשאלה, אם אחלץ את הביטה של נכס  $C$ , סיימתי את השאלה. בכלל, אמרנו מספר פעמים : הכלים הנפוצים ביותר לאייתור הביטה הם חילוץ ממשוואת ה-SML או חישוב ישיר (אבל החישוב ישיר דורש מקדמי מתאימים בין הנכס לשוק, או שונות מסו��פת, וכך, זה פחות רלוונטי).

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

אני אציב את מה שאני יודע בינוים על נכס  $C$  :

$$SML C: 35\% = R_F + [25\% - R_F] * \beta_C$$

אם הקב"ה יהיה בעזרי, ואצליח להגיע לריבית חסרת סיכון, סיימתי.

אגש למידע הנוסף הקיים לגבי נתוני השוק וכן נתוני הנכס היעיל הספציפי הרלוונטי :

$$E(M) = 25\% \quad \sigma_M = 20\% \quad E(P_{יעיל}) = 30\% \quad \sigma_P = 30\%$$

זכרו שהמטרה שלי היא לחלק את RF. כל משווהה שכוללת את RF ומתקיימת עבורה הנכס הזה היא מועמדת טוביה לחילוצו. הוואיל ויש לא מעט נתונים, לדעתך המשווהה המתאימה היא :

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P \rightarrow 30\% = R_F + \frac{25\% - R_F}{20\%} * 30\% \rightarrow R_F = 15\%$$

ועכשיו אחזור למשווהה SML על נכס C :

$$SML C: 35\% = R_F + [25\% - R_F] * \beta_C \rightarrow 35\% = 15\% + [25\% - 15\%] * \beta_C \rightarrow \beta_C = 2$$

השאלה בבקשתה את הסיכון השיטתי במונחי סטיית תקן קרי את מכפלת ביטה של הנכס בס. תקן של השוק :

$$\beta_C * \sigma_M = 2 * 20\% = 40\%$$

זו התשובה הסופית. ד.

שאלה 13

סמן את הקביעה הנכונה, בהנחה **מודל CAPM** מתקיים בשוק:

- א. לשונות של מניה אין כלל השפעה על סיכון תיק השקעות.
- ב. תתרומה של מניה לסיכון תיק השקעות מגוון היטב, תלולה בגודל הסיכון השיטתי של המניה.
- ג. גיוון מקטין סיכון, אך חברות יבחרו תמיד להשקיע בפרויקטים בעלי מתאם נמוך ביחס לפרויקטיםקיימים כבר בחברה.
- ד. מנויות בעלות תנודתיות גבוהה (סטטיסטית תקן גבוהה) יינבו בחברה שיעורי תשואה גבוהים.
- ה. תשובות ב-0-2 נוכנות.

פתרון :

א. לשונות של מניה אין כלל השפעה על סיכון תיק השקעות

הטענה **שגיה**, וזאת ממשני טעמים: ראשית, אף אחד לא אזכור כאן בזורה ברורה תיק ייעיל / מגוון היטב. לכן, בהחלטת **ייתכן** שהמניה המשולבת בתיק ההשקעות תשפיע על סיכוןו הכללי לא רק דרך הסיכון השיטתי אלא גם דרך הסיכון הכללי. שנית, גם אם משלבים מניה בתיק ייעיל, חלק מהשינויים ממקורה בסיכון השיטתי. וראינו (הסביר מפורט בסעיף ב) **סיכון שיטתי תמיד משפיע על התיק שבו משלבים את המניה**.

ב. התתרומה של מניה לסיכון תיק השקעות מגוון היטב, תלולה בגודל הסיכון השיטתי של המניה

פרשנות: כמשמעותו את המושג "התתרומה של מניה לסיכון של תיק" מדברים בעצם על השינוי הפטונציאלי הצפוי להתרחש בסיכון התיק, כתוצאה מהשינוי במניה / משלוב המניה בתיק ההשקעות. בرمת ההגדרה: למניה עצמה בכלל, יש שני רכיבי סיכון:

סיכון לא שיטתי (הניתן לפיזור) <> זהו חלק מהסיכון הכללי **שמתאפשר** במידה ומשלבים את המניה חלק מתיק ייעיל. רכיב סיכון זה לא משפיע על הסיכון של התיק שבו משלבים את המניה. **סיכון לא שיטתי של נכס לא משפיע על התיק הייעיל** (= "מגוון היטב") **שבו ישולב**.

סיכון שיטתי (שאינו ניתן לפיזור) <> זהו חלק מהסיכון הכללי **שלא משתנה** במידה ומשלבים את המניה חלק מתיק ייעיל. לכן, רכיב סיכון זה כן משפיע על סיכון התיק שבו משלבים את המניה. **סיכון שיטתי של נכס כן משפיע על התיק הייעיל** (= "מגוון היטב") **שבו ישולב**.

לכן, ההיגדר **נכון**: **הסיכון השיטתי הוא שמשפיע על סיכון התיק הייעיל** (לכן, סיכון התיק הייעיל תלוי **בסיכון השיטתי**).

ג. גיוון מקטין סיכון, אך חברות יבחרו תמיד להשקיע בפרויקטים בעלי מתאם נמוך ביחס לפרויקטים **הקיימים** כבר בחברה

הטענה **שגوية**. המילה "גיוון" מושמעה: שילוב נכסים שונים בתיק השקעות. הנקודה היא, שלא תמיד גיוון מקטין את הסיכון: זה תלוי – האם אני מגוון (משלב) נכסים מסוכנים / לא ; מה מוקדם המתאים בין הנכסים ; האם אני משלב אותם בתיק ייעיל / לא.

עצם העובדה שאתה **משלב נכס נוסף בתיק ממש לא תמיד תקטי סיכון**, זה תלוי – "מה אתה משלב". מעבר לכך, כשעוסקים בפרויקטים ובחברות יש להן יתרון תפעולי בפרויקטים המבוצעים בתחוםן (כל הדיוון בתיקי השקעות שערכנו, מתייחס לנקודת המבט של המשקיע הכספי: אדם / קבוצה שיש לה כסף פנוי והוא רוצה להשקיע במניות הנכונות). כשעוסקים בחברה עם פרויקטים – הדיוון הזה פחות רלוונטי. לחברה יש מומחיות, יתרון, היכרות עם שוק וכן הלאה, וכן עקרון השילוב מבchinתת הרבה פחות משמעותי.

**חברת נדל"ן – מומחית על ותווחית בנדל"ן – האם תמליצו לה לגדל אבטיחים רק כי זה תחום פעילות שונה ? נראה שלא.**

ד. **מניות בעלות תנודתיות גבוהה (סטיטית תקן גבוהה) יניבו בהכרח שיעורי תשואה גבוהים**

הטענה **שגوية**. מניה איננה נכס ייעיל. לכן, על מנת שתنبي תוחלת תשואה גבוהה יותר, נדרש שהቢיטה (ולא סטיטית התקן) תהיה גבוהה יותר. המניה הבודד, הלא עיליה כאמור, מקיימת את משווהת ה-SML (קשר חיובי בין ביטא לתוחלת תשואה) ולא את משווהת ה-CML (קשר בין סטיטית תקן ותוחלת תשואה, שכאמור לא שיקף פה, כי לא מדובר על נכס ייעיל).

ה. **תשובות ב-ו-ד נכונות : לא רלוונטי כי ד **שגوية**.**

## מבחן אמיתי 21 – שאלה 15

### שאלה 15

הנחנו שבשוק ההון נסחרות שתי מניות **יעילות A ו-B**. ידוע כי הביטה של מניה A גבוהה מהביטה של מניה B. מכאן, תחת הנחות ה-CAPM :

- א. סטיית התקן של תשואת מניה A גבוהה מסטיית התקן של תשואת מניה B.
- ב. אין מספיק נתונים כדי להשוות בין סטיות התקן של המניות.
- ג. תוחלת התשואה של מניה A גבוהה מתוחלת התשואה של מניה B.
- ד. תשובות B ו-G נכונות.
- ה. תשובות A ו-G נכונות.

פתרון :

למרות שעוסקים כאן בנכדים יעילים (ובדרך כלל, מניות אין תיקים יעילים אך לא אטוווכח עם הנתון) העובדה שמצוינים כאן ערכי ביתא – גוררת אוטומטית לעולמות ה-SML.

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

כאשר הביטה של נכס מסוים (אגב, בין אם ייעיל בין אם לאו) גבוהה מהביטה של נכס אחר, אז גם תוחלת הנכס צריכה להיות גבוהה יותר :

$$\beta_A > \beta_B \rightarrow E(A) > E(B)$$

**בתוור התחלה – ומיד – טענה ג' נבונה.**

**טענה A לעומת זאת אומרת: סטיית התקן של A גבוהה יותר מסטיית התקן של B :** זכרו – סטיית התקן היא למעשה הסיכון הכלול. אם אין מידע על יעילות – הסיכון הכלול מושפע גם מהביטה (סיכון שיטתי) וגם מסיכון לא שיטתי. לעומת זאת, אם נתון שהנכדים יעילים קיימים בהם סיכון שיטתי בלבד.

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M \rightarrow \sigma_A = \beta_A * \sigma_M > \beta_B * \sigma_M = \sigma_B \rightarrow \sigma_A > \sigma_B$$

בשפה פשוטה :

אם אתה **יעיל – ביתא גדולה יותר = סטיית התקן גדולה יותר (המצב פה)**. **הטענה נבונה.**  
אם איןך **יעיל – לא ניתן להסיק מערך הביטה על הסיכון הכלול / סטיית התקן הכלול.**

**התשובה ה. בלומר, A + G נבונות.**

שאלה 23, שאלה 13

שאלה 13

נתון כי:

	טטיות התקן	ביטה	תוחלת התשואה
10%	1	10%	תיק השוק
12%	1.1	?	מניה ?
		5%	נכס חסר סיכון

על-פי הנתונים האלה, מהי פרמיית הסיכון (ההפרש בין תוחלת התשואה של המניה לשער ריבית חסר סיכון), בהנחה שמודל CAPM מתקיים בשוק:

- פרמיית הסיכון של מניה ; כשהיא כולל בתיק השקעות יעל היא 5.5%.
- פרמיית הסיכון של מניה ; כשהיא כולל בתיק השקעות יעל היא 6%.
- בנחה שהמשקיע משקיע רק במניה ?, פרמיית הסיכון של המניה שווה ל-5.5%.
- בנחה שהמשקיע משקיע רק במניה ?, פרמיית הסיכון של המניה שווה ל-10.5%.
- תשובות או ג. נכונות.

פתרונות :

מגדירים:  $\text{פרמיית סיכון} = \text{ההפרש בין תוחלת תשואת המניה לריבית חסרת סיכון כלומר}$ , הנדרש:

$$E(i) - R_F = ?$$

הדגשנו שכאשר מניה (נכס לא יעל) משולבת בתיק יעל (או "מגנון היטב") אזי כל הסיכון בה מתאפס, למעט רכיב הסיכון שمبוסס על ביטה. הביטה של המניה נתונה, ואפשר לחשב את תוחלת התשואה של המניה על בסיסה:

$$\text{SML: } E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בחבבה במקרה זה :

$$E(i) = 5\% + (10\% - 5\%) * 1.1 \rightarrow E(i) = 10.5\%$$

נחזיר להגדירה של פרמיית הסיכון :

$$E(i) - R_F = 10.5\% - 5\% = 5.5\%$$

ואם כך, אין ספק שכאשר אני משלב את המניה בתיק יעל, נתוני הביטה שלה מגדירים פרמיית סיכון של 5.5%.

ומה לגבי מצב שבו משקיעים רק במניה? גם במצב כזה, שבו הסיכון הלא שיטתי נותר (לא מתאפס) עדין תוחלת התשואה תקבע לפי ה-SML קרי לפי הביטה בלבד.

אין זה משנה אם המניה (הלא עיליה) תשולב בתיק עיל או תעמוד בפני עצמה, תוחלת התשואה בגין המניה תקבע על פי הביטא שלה בלבד, תהיה 10.5% מה שMOVIL לפרמיית סיכון של 5.5%.

**לכן, לא רק טענה א נכונה, אלא גם ג. התשובה הנכונה היא**

[בשאלות קודמות – הדיון היה על השפעת השילוב של מניה על הסיכון ; ושם נכנס הדיון של שילוב בתיק עיל, והמשמעות של סיכון שיטתי / לא שיטתי והשפעתו ; כאן לעומת זאת מדברים על התוחלת. התוחלת בכל מקרה נקבעת רק לפי הביטא].

## שאלה 16 – שאלון 24

### שאלה 16

למשקיע היו 120,000 ש"ח אותם בחר להשקיע באופן הבא:

1. 80,000 ש"ח בתיק השוק שתוחלת התשואה שלו עומדת על 24% וסטיית התקן שלו שווה ל-30%.
2. 40,000 ש"ח באגי"ח ממשלתית שתשואה אתה עומדת על 4% (נכ"ס חסר סיכון).

בהתהה שמודל CAPM מתקיים בשוק, מה הסיכון השיטתי של התקיק שיצר המשקיע (במונחים סטיטיט תקן)

- א. 20%
  - ב. 10%
  - ג. 8%
  - ד. 30%
- ה. לא ניתן לחשב, שכן חסר נתון לנבי מוקדם הביאו של התקיק שיצר המשקיע.

פתרון:

השאלה עוסקת כמובן במודל ה-CAPM (קייםים נתוני תיק שוק וכן נתוני אג"ח ממשלתית, שהיא בגדיר נכס חסר סיכון).

היא מותמקדת בתיק ייעיל. מדובר במסום שהמשקיע ניתב / חילק את כספו רק בין תיק השוק לבין נכס חסר סיכון. בהגדרה: במודל ה-CAPM כל התקיקים המשלבים בין תיק השוק לנכס חסר סיכון הם יעילים (זה מה שמנדריר את קו ה-CML).

כמו כן, השאלה מספרת לנו מהו שוויו התקיק הכלול – 120,000 ש"ח, ואיזה חלק מתוכו – 80,000 ש"ח, הושקע בתיק השוק (יתר ה-40,000 ש"ח הושקעו בנכס חסר סיכון). בעצם, מדובר בשאלת שגוררת אותה לעולם נוסחת המשקלים בתיקים יעילים ב-CAPM:

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

נדיר:

הערך  $E(P)$  הוא תוחלת התשואה של התקיק היעיל המשולב.

הערך  $W_F$  הוא האחוז / החלק היחסני מכיספי המשקיע שמושקע בנכס חסר סיכון: כאן מדובר ב-40,000 ש"ח מתוך 120,000 ש"ח, כלומר  $1/3$  או לחובבי חז'אנר  $33.33333\%$ .

הערך  $W_F - 1$  הוא האחוז / החלק היחסני מכיספי המשקיע שמושקע בתיק השוק. כאן מדובר ב- $1 - 1/3$  פחות  $33.33333\%$  כלומר  $66.66667\%$ .

בנוסף נתון בשאלת עצמה :

$$E(M) = 24\% \quad \sigma_M = 30\% \quad R_F = 4\%$$

הנדרש בשאלת הוא: מהו הסיכון השיטתי של התיק שיצר המשקיע (במונחי סטיית תקן)?

בתכליס – אם אני יודע שהתיק הוא ייעיל, הסיכון השיטתי שלו הוא בהגדרה סטיית התקן שלו (כי בתיק ייעיל כל הסיכון שיטתי). כמובן אם נצליח לחשב את סטיית התקן של התיק – סימנו.

לטובת העניין, צריך לשים מול העיניים במקרה זה (שימוש במשקללים) עוד נוסחה יפה שמתאימה לחישוב סטיית התקן של תיק ייעיל ב-CAPM :

$$\sigma_P = (1 - W_F) * \sigma_M \rightarrow \sigma_P = 66.666667\% * 30\% \rightarrow \sigma_P = 20\%$$

התשובה א.

שאלה 17

נתונות סטיות התקן של 2 נכסים ייעילים A-B: סטיית התקן של נכס A היא 12% וסטיית התקן של B היא 21%.

הנחנו שמודל ה-CAPM מתקיים בשוק כאשר: תשואת תיק השוק שווה ל- 25%, סטיית התקן של תיק השוק שווה ל- 15% ושער ריבית נטול סיכון 5%.

**משקיע המועוניין ליצור תיק המורכב ממניות A-B, בעל תוחלת תשואה של 28.2%:**

- א. ישקיע 50% בכל אחת מהמניות.
- ב. ישקיע 180% במניה B ויבצע מכירה בהסר של 80% ממניה A.
- ג. ישקיע 40% במניה A ו- 60% במניה B.
- ד. ישקיע 30% במניה A ו- 70% במניה B.
- ה. אי-אפשר לחשב את הרכבת תיק עקב חוסר נתונים.

פתרונות:

נתונים:

$$\sigma_A = 12\% \quad \sigma_B = 21\% \quad \sigma_M = 15\%$$

$$E(M) = 25\% \quad R_F = 5\%$$

ככל, כאשר רוצים לבנות תיק עבור משקיע, סביר להניח שנרצה תיק ייעיל. ולכן, אם לא היה כתוב במשפט המודגש "המורכב ממניות A ו-B" (כלומר המשפט היה "משקיע המועוניין ליצור תיק בעל תוחלת תשואה של 28.2% איזי, היינו משלבים בין נכס חסר סיכון ותיק השוק כדי להגיע למטרה.

ה"חידוש" בשאלה זו הוא שמדובר מאייתנו להגיע לתוחלת של 28.2% דרך שילוב A ו-B. כפועל יוצא מכך, אציגך לעבוד לאיו:

שלב 1: על בסיס נוסחת ה-CML אבודוק מהי תוחלת התשואה של כל אחד מהנכסים – A ו-B. זאת מושם שהשאלה בקשה תוחלת תשואה ספציפית. כדי להגעה אליה באמצעות הנכסים, אני צריך לדעת מה תוחלת התשואה של כל אחד מהם. והואיל והם ייעילים, לעשות את זה לפי CML זה קלاسي.

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$CML: E(A) = 5\% + \frac{25\% - 5\%}{15\%} * 12\% \rightarrow E(A) = 21\%$$

$$CML: E(B) = 5\% + \frac{25\% - 5\%}{15\%} * 21\% \rightarrow E(B) = 33\%$$

שלב 2 : אشتמש בנוסחת השילוב הרגילה בין תיקי השקעות מסוכנים (כי A ו-B הם מסוכנים) כדי לגלות מהו משקל ההשקעה הנדרש בכל אחד מהם :

$$E(P) = W_A * E(A) + (1 - W_A) * E(B)$$

בשאלה עצמה ציינו שתוחלת התשואה של התיק המשולב המורכב משני נכסים אלו צריכה להיות % 28.2% :

$$28.2\% = W_A * 21\% + (1 - W_A) * 33\% \rightarrow W_A = 40\% \rightarrow W_B = 1 - 40\% = 60\%$$

התשובה הסופית : כדי להניב תוחלת תשואה של 28.2% המשקיע צריך להשקיע 40% מכספו בנכס A ו-60% מכספו בנכס B.

לכן התשובה ג.

**מינוי רצוי – יח' 11-9**

- יח' 7-5 העניקו לנו את הכלים הבסיסיים בחישובים פיננסיים: ערך הנוכחי (PV), ערך עתידי (FV) ויישומיהם – בפרויקטים, בהלוואות, ובהערכת כדאיות השקעות.
- יח' 8 העבירה אותנו לעולם של סטטיסטיקה: בעיקר כדי להבין את סיכון ואופן מדידתו, של קבלת החלטות רלוונטיות בתנאי סיכון, וכן ההשפעה של פיזור סיכון (לפי גישת תיקי השקעות) על הערך **למשמעות**.
- יח' 11-9 מוציאות אותנו מהפוזיציה של המשקיע ומחזירות אותנו לכובע מ="#">**מקבלי החלטות בחברה** – בהיבט זה שחברה צריכה **LAGIIS MIMON** (לגייס כסף) כדי לבצע את פעילותה, ומימון זה מורכב מ:
  - **הון עצמי** (נובע מהනפקת מנויות).
  - **הון זר** – גיוס מימון נגד נטילת התחייבות – הלואות שבחן כבר עסקנו, אבל גם באגרות חוב – מכשיר פיננסי ספציפי לגיוס חוב בחברות, דומה להלוואה אבל יש הבדלים בהגדרות ובאופן הsslיקה (מותי מקבלים כסף וכמה) ובכך עמוק.

**אנחנו נרצה, בהתאם:**

- א. לדעת טכנית איך מבצעים חישובי שווי וחישובים קשורים (חילוצים של פרמטרים) במכשירים הפיננסיים שנקרואים "אגרות חוב".
- ב. כיצד לתמוך (חישוב שווי, מחיר) של מנויות לפי מודל מסוים ספציפי (מודל גורדון – "היוון הדיבידנדים") וכיים לחלק ערכים מהמודל.
- ג. כיצד שילוב מקורות מימון בתמאל כזה או אחר – ובפרט: יותר חוב / יותר הון עצמי – משפיע על הסיכון למשקיעים, על מחיר ההון המשוקל של החברה WACC, **ועל שווי החברה** (מה עדיף לחברת בהיבט השאות ערכה ובאיזה הקשר – למן בהון עצמי או בהון זר).

## פרק 1: חישובי אג"ח (יח' 9)

אג"ח – הגדרה:



אג"ח – אגרת חוב – היא מכשיר פיננסי שמנפיקה חברת ואשר מחייב אותה לשלם לאוחז בה תזרימי מזומנים  
משני סוגים :

- קופון** – מכפלה של הריבית הנקבה  $B_z$  (המודדרת באג"ח) בערך הנקוב  $B$  (המודדר באג"ח). למשל אם האג"ח בעלת ערך נקוב של 100, והריבית הנקבה 10%, הקופון יהיה  $10 \text{ ש"ח} = 10\% * 100$ .
- הערך הנקוב עצמו** – שכברירתה מחדל בקורס שלנו משולם בתשלום אחד בתום חי האג"ח (אם לא – צריך להביא לידי ביטוי את פרעונות לשיעורין במסגרת תזרימי המזומנים למשך).

מדוע לעזאזל שחברה **תשכים להתחייב לשלם למשקיע בעtid ? מה יוצא לה מזה ?** התשובה כמובן – החברה תדרוש תשלום בהווה بعد ההבטחה לקבל תזרימי מזומנים עתידיים. במקרה אחר, החברה מגייסת כסף היום, בתמורה להבטחתה לשלם בעtid (ואם זה מזכיר להם הלוואה... אתם צודקים).

- **הגבול הוא אופן חישוב התמורה והמחיר.**
- **בהלואות** – החברה קובעת את התמורה (סכום ההלוואה), והבנק קובע את ההחזר התקופתי.
- **באגרות חוב** – החברה קובעת את התשלום התקופתי, והמשקיע קובע את התמורה שיסכימים לשלם بعد זאת (בהתאם למחיר האג"ח).
- **מחיר האג"ח** נקבע בהתאם לערך הנוכחי PV של תזרימי המזומנים באגרת החוב (קופון וערך נקוב), מנקודת ראות המשקיע (רווח האג"ח).
- **את חישוב ה- PV** שմבוססים על התזרימיים של הקופונים והערך הנקוב, כאשר ההיוון מתבצע בריבית שנקראת **"מחיר ההון הזר"** / **"ריבית השוק על אג"ח"** / **"שיעור תשואה לפדיון"**.
- **המסר המרכזי** כאן הוא – שבעוד שהחברה היא זו שקובעת בתשקייף הנפקת האג"ח את התזרימיים שהיא מתחייבת לשלם לאוחז באג"ח, המשקיע הוא שיקבע את שווייה על בסיס חישוב הערך הנוכחי של תזרימיים אלו בריבית שהוא (המשך)>Dorsch.
- **בקצהה :** ריבית נקובה = לחישוב התזרימיים ; כל ריבית אחרת (מהמודgeshot) משמשת להיוון.

### שאלה 9.1 – תמחור בסיסי של אג"ח – שנים שלמות

חברת "אלון סיון" בע"מ הנפקה ב-1.1.2020 אג"ח אשר ערכה הנקוב 100,000 ש"ח. האג"ח נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 5% המשולמת בתום כל שנה (תשלום הריבית יבוצע לראשונה ב-31.12.2020). ערכה הנקוב של האג"ח ייפרע בתשלום אחד בתום שנת 2026.

נדרש:

- מהו מחיר האג"ח במועד הנפקתה, אם ידוע שבמועד זה שיעור התשואה לפדיון הוא 8% לשנה?
- כיצד תשתנה תשובתכם, אם חלפה שנה ממועד ההנפקה (תשלום קופון אחד כבר בוצע), ובמועד זה, שיעור התשואה לפדיון הוא 4% לשנה?
- כיצד תוכלו להסביר את הקשר בין שיעור התשואה לפדיון לשווי האג"ח? התיחסו להגדרות מקובלות בשוק (פרמייה, ניכוי, פארוי).

היי, אני פארוי (בלי  
אג"ח)



פתרונות:

#### פתרונות סעיף א

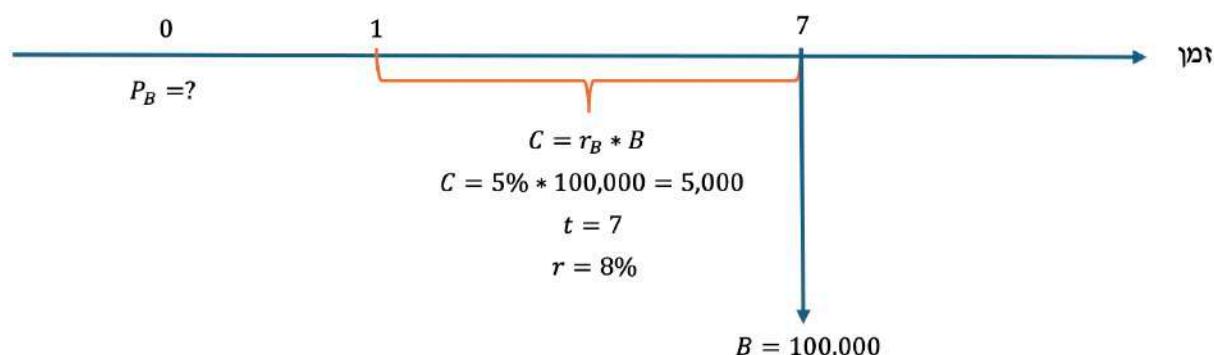
תזרים המזומנים הבסיסי שמקבל המשקיע, כל תקופת תשלום (וכאן – כל שנה) נקרא קופון, והוא מוחשב כמכפלת הריבית הנקובה בערך הנקוב:

$$\text{Coupon(Annual)} \text{ or } C = r_B * B = 5\% * 100,000 = 5,000$$

פרט לכך, בתום חyi האג"ח (בחלוף 7 שנים מההנפקה) המחזיק באג"ח קיבל גם את הערך הנקוב (סכום נוסף) בסך 100,000 ש"ח.

מחיר האג"ח הוא, לפיכך, הינו של סדרת תזרים מזומנים קבועים בסך 5,000 ש"ח כל אחד, ובנוסף, הינו תזרים חד פעמי של 100,000 ש"ח בתום שנת 2026.

בעוד שאלו תזרים מזומנים, ההינו עצמו (הריבית המזונה לטובת חישוב ה-PV, הערך היום של האג"ח, במועד הנפקה) היא שיעור התשואה לפדיון שנקבע על ידי המשקיעים.





ואופן ההיוון (חישוב הערך הנוכחי) לכל התזרים :

$$P_B = C * PVFA(k_D, t) + B * (1 + k_D)^{-t}$$

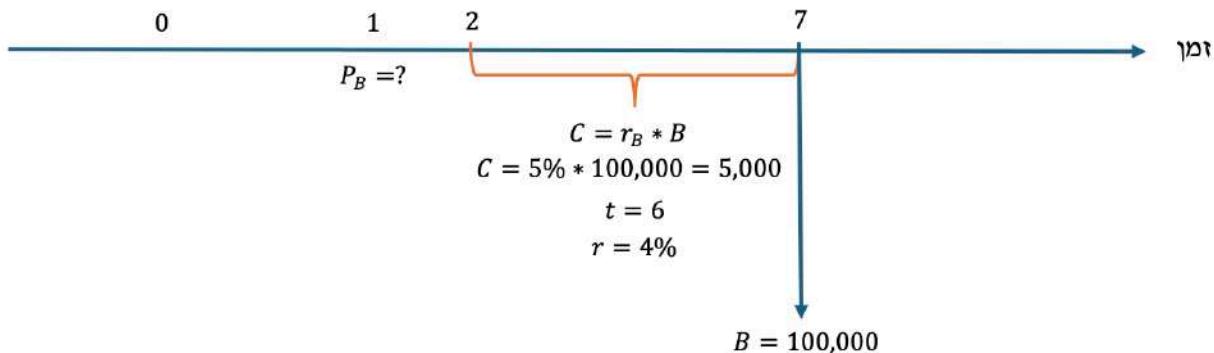
$$P_B = 5,000 * PVFA(8\%, 7) + 100,000 * (1 + 8\%)^{-7} = 84,379.04$$

מקרה :

משמעות	סימן
קופון : תזרים המזומנים התקופתי למשקיע, לפי ריבית נקובה מוכפלת בערך הנוכחי	$C = r_B * B$
ריבית נקובה	$r_B$
ערך נקוב	$B$
שווי האג"ח	$P_B$
שיעור תשואה לפדיון / ריבית השוק / מחיר ההון הזר / התשואה שודושים בעלי החוב בתכל"ס : זה ה z שאותו נציב לטובות ההיוון כפי שמתואר בתרשים לעיל.	$k_D$
ההיגיון בסימן $k_D$ נועד לאפשר בהמשך הבחנה בין מחיר ההון (ריבית להיוון) של חוב לבין מחיר ההון (ריבית להיוון) של הון עצמאי.	
מספר תזרימי המזומנים הקבועים (תזרימי הקופון) שנותרו ערב התמזור.	$t$

### פתרון סעיף ב

כיצד תשתנה תשובתכם, אם חלפה שנה ממועד ההנפקה (תשלום קופון אחד כבר בוצע), ובמועד זה, שיעור התשואה לפדיון הוא 4% לשנה?



אם חלפה שנה ממועד ההנפקה, זה אומר שמספר תזרימי המזומנים שהאג"ח צפוי להניב מפה ואילך (ועל בסיס זה ייקבע ערכה) יהיה 6 (לפי 7 תזרימי מזומנים בסך הכל, ניכוי האחד שכבר בוצע).  
שינוי נוסף שנתון בשאלת הוא שינוי התשואה לפדיון (ריבית להיוון) ירד ל-4%. הירידה בשיעור התשואה לפדיון לעולם לא תשפיע על הריבית נקובה שנקבעה במועד הנפקת האג"ח, ולכן **סכום הקופון נותר זהה והוא בלתי תלוי בשיעור התשואה לפדיון**, אשר השינוי בו ישפיע רק על הריבית שנזקן לטובות חישוב PV.

$$P_B = 5,000 * PVFA(4\%, 6) + 100,000 * (1 + 4\%)^{-6} = 105,242$$

(\*) הערכה: שווי של כל מכשיר פיננסי / השקעה, לרבות אג"ח, הוא תמיד הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים העתידיים שנותר לו (למכשיר הפיננסי) להניב לנכודת ההשקעה. תזרימיים היסטוריים שנתקבלו בידי משלקאים בעבר אינם חלק מהשווי והתמיהר לנכודת הזמן הנוכחי.

#### פתרונות סעיף ג

באופן גס, המחשנו את מערכת הקשיים הבאה בין הריבית הנקובה ושיעור התשואה לפדיון מצד אחד; לבין הערך הנוכחי ושווי האג"ח.

מושג	במלים	התוצאה	במלים	כasher
אג"ח בניכויו	מחיר האג"ח נמוך מהערך הנוכחי	$P_B < B$	כasher שיעור התשואה לפדיון גבוה מהריבית הנוכחי (סעיף א)	$k_D > r_B$
אג"ח בפרמייה	מחיר האג"ח גבוה מערכה הנוכחי	$P_B > B$	כasher שיעור התשואה לפדיון נמוך מהריבית הנוכחי (סעיף ב)	$k_D < r_B$
אג"ח בפארטי מלשון:	מחיר האג"ח לערכה שווה הנוכחי	$P_B = B$	כasher שיעור התשואה לפדיון זהה לריבית הנוכחי (לא הוצג)	$k_D = r_B$



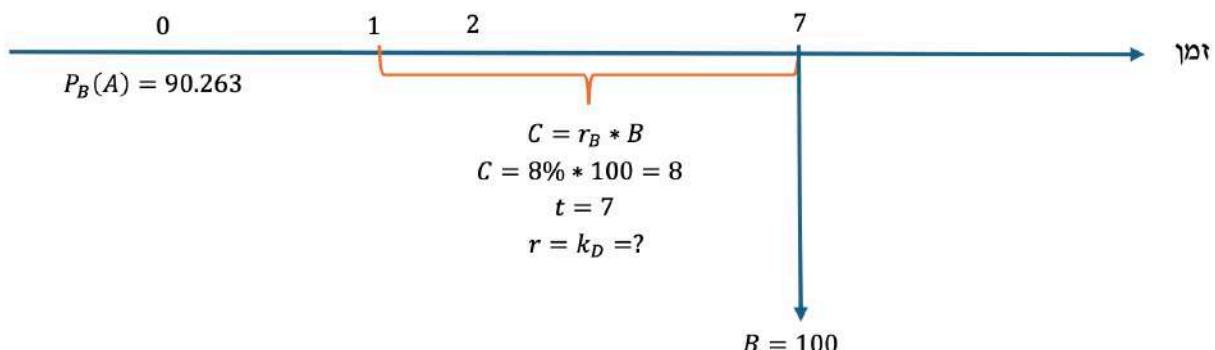
שאלה 9.2 – הנחות יסוד לגבי אג"ח – חילוץ שיעור תשואה לפדיון מאג"ח מסויימת לטובת אג"ח אחרת בשוק ההון קיימות שתי אגרות חוב. אג"ח "א" בעלת ערך נקוב של 100 ש"ח, נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 8% לשנה, המשולמת בתום כל שנה. ערכה הנקוב של האג"ח ייפרע בעוד 7 שנים, ותשלום הקופון האחרון בוצע אתמול. שווייה של אגרת חוב זו הוא 90.263 ש"ח. אג"ח ב שהוא אג"ח נוסף שנסחרת בשוק שערכה הנקוב 100, נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 5% לשנה שגם היא משולמת בתום כל שנה, התשלום האחרון בוצע אתמול, וערכה הנקוב ייפרע בעוד 11 שנים. נדרש:

- חשבו את שווי האג"ח מסווג ב.
- הניחו כתה כי בשונה מהנתנו, אג"ח ב תשלם את הקופון הקרוב שלו בעוד חודש אחד. פדיוןה בחולף 3 שנים וחודש מהיום. כמו כן, הניחו כי האג"ח משולמת ריבית בתדירות רבעונית. בהתאם לשינויים אלו, מה יהיה שווי אג"ח ב במצב החדש?

פתרון:

### פתרון סעיף א

התבסטי על נתוני אג"ח א:



$$P_B(A) = 8 * PVFA(k_D, 7) + 100 * (1 + k_D)^{-7} = 90.263$$

המטרה הראשונית שלנו היא להיעזר בנתוני תזרימי המזומנים של אג"ח א ושוויו, על מנת לחלץ את שיעור התשואה לפדיון, שהוא הריבית להיוון.

בקורס זה אנו מניחים ששיעור התשואה לפדיון של כל אגרות החוב המתוארות זהה, אלא אם נאמר מפורשות אחרת. טכנית: ה-IRR שמחלצים בגין אג"ח מסויימת, כוחו יהיה לתמחר אג"ח אחריות (כברירת מחדל). הפתרון של משואה זו הוא מסורבל מדי (לכן במלחה ובמרקירים רבים בבחינות, יהיה לכל היותר שני תזרימים, שניינו יהיה לחלץ IRR שלהם על בסיס פתרון משואה ריבועית). אני הצגתי יישום אקסלי פשוט:

	H	I	J	K
8			-90.263	0
9			8	1
10			8	2
11			8	3
12			8	4
13			8	5
14			8	6
15			108	7
16				
17	=IRR(J8:J15)		10%	חילוץ

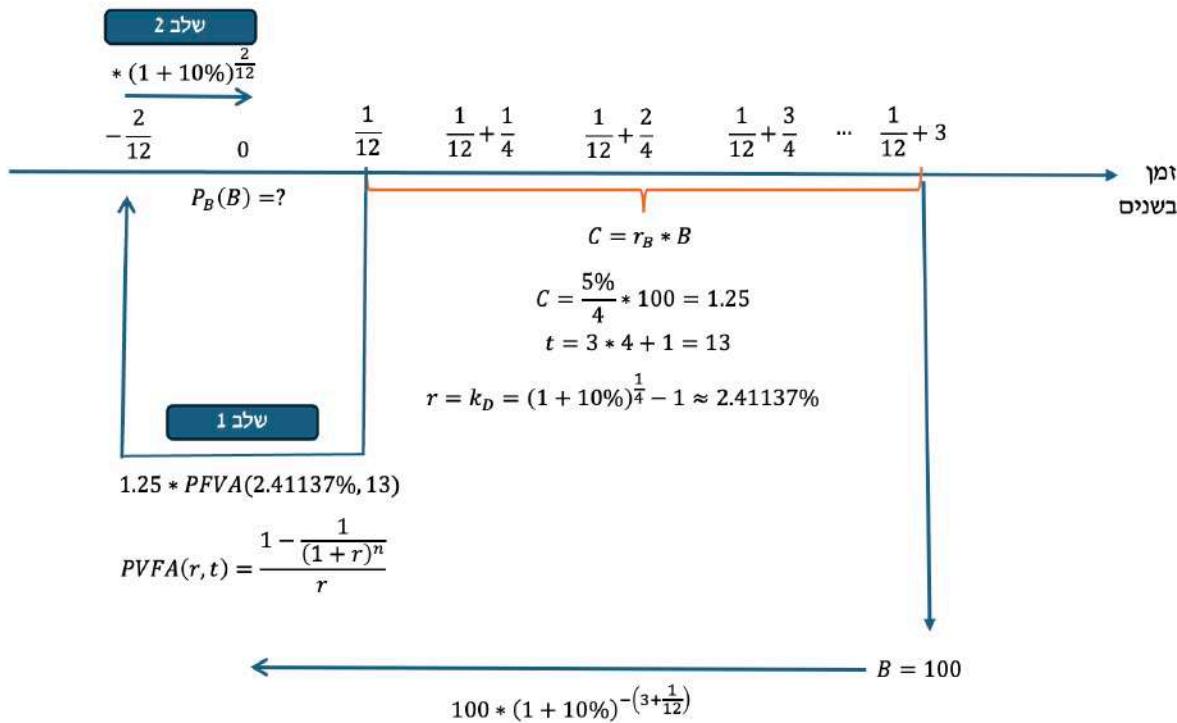
ה-IRR הייתה פונקציה אקסלית, זהה במהותה ל-IRR מיח' 6: אנו בעצם טוענים ש-IRR שבאופן כללי משקף את שיעור התשואה התקופתי המוצע בפרויקט למשקיע, באג"ח – משקף את שיעור התשואה המתkeletal (והנדרש) על ידי המשקיע באג"ח, ככלומר שיעור תשואה לפדיון.

וכעת, משתמש בשיעור התשואה לפדיון אשר חולץ מנתוני אג"ח אשר יושם תמהור שוו אג"ח ב, על פי נתוניה – זאת, לאור הנחת שיעור תשואה לפדיון זהה בין אגרות חוב בשאלות הקורס. נתוני אג"ח ב היו : אג"ח בעלת ערך נקוב 100, ל-11 שנים, שנושאת ריבית נקובה בשיעור 5%.

$$P_B(B) = 5\% * 100 * PVFA(10\%, 11) + 100 * (1 + 10\%)^{-11} = 67.525$$

## פתרונות סעיף ב

הנחנו כתעת כי בשונה מהנתון, אג"ח ב תשלום את הקופון הקרוב שלו בעוד חודש אחד. פדיונה בחלוף 3 שנים וחודש מהיומם. כמו כן, הנחנו כי האג"ח משלם ריבית בתדירות רבונית. בהתאם לשינויים אלו, מה יהיה שווי אג"ח במצב החדש?



התאמת ריבית הקופון לתשלום רבוני: נשים לב, שתחילה עליי לחשב את הקופון מחדש. אם הריבית הנקובה השנתנית 5%, אך תדירות תשלום הקופון היא כל רבון, עליי לחשב ריבית נקובה רבונית ועל בסיסה קופון רבוני.

התאמת של ריבית נקובה מתקופה לתקופה, מבוצע באמצעות חילוק פשוט (לא באמצעות ריבית דרייבית / חזקה). בשפה פשוטה:

$$r_B(\text{quarter}) = \frac{r_B(\text{Annual})}{4} \rightarrow r_B(\text{quarter}) = \frac{5\%}{4} = 1.25\%$$

התאמת שיעור התשואה לפדיון לרבעון: הויאל ומדובר באג"ח שיצרת סדרת תשלוםים רבוניים, גם שיעור התשואה לפדיון (הריבית להיוון) צריך להיות מתואם למונחים של רבון. לעיל ראיינו ששיעור התשואה לפדיון לשנה (שחולץ מנתוני אג"ח שתזירミיה שנתיים) הוא 10%. נתקן זאת לשיעור התשואה לפדיון רבוני. שיעור התשואה לפדיון הוא במונחים אפקטיביים. המשמעות היא **שההתאמת שיעור התשואה לפדיון מתקופה לתקופה מבוצעת באמצעות חזקה מתאימה ולא!** באמצעות כפל או חילוק.

$$k_D(\text{quarter}) = [1 + k_D(\text{annual})]^{\frac{1}{4}} - 1 \rightarrow (1 + 10\%)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2.4114\%$$

כדי לחשב כעת את שווי האג"ח, נתבבש על תזרימי הקופון (לפי הריבית הנקובה הרבונית, 1.25%) וכן על שיעור התשואה לפדיון הרבוני. אבל גם נרצה לדעת כמה תזרימי מזומנים ישנים ומתי הם מתרחשים.

בנתון: האג"ח תשלם קופון בעוד חודש, ולאחר מכן תמשיך ותchiaה עוד 3 שנים שלמות. ב-3 השנים השלימות ישנים 12 קופונים רבונניים  $12 = 3 * 4$ , אך בנוסף קיימים קופון נוסף בעוד חודש, ולכן מספר הקופונים הכלל הוא 13. **שימוש לב:** סדרת קופונים, 13 במספר, שהראשון בעוד חודש ולאחריו המרווה בין קופונים רבוני.

$$P_B(B) = 1.25\% * 100 * PVFA(2.4114\%, 13) * (1 + 10\%)^{\frac{2}{12}} + 100 * (1 + 10\%)^{-(3+\frac{1}{12})} = 88.57$$

מה היה פה?

ה קופון הרבוני: ריבית נקובה רבונית כפול ערך נקוב	$1.25\% * 100$
היוון סדרת הקופונים רבונניים, בשיעור תשואה לפדיון רבוני, בהתאם במספר הקופונים	$PVFA(2.4114\%, 13)$
הואיל וה קופון הראשון בעוד חודש, ומרווח הזמן בין כל הקופונים העוקבים 3 חודשים, הערך הנוכחי הסדרתי מוביל אותנו 3 חודשים לפני התזרים הראשון, והואיל והתזרים הראשון בעוד חודש – מגיעים בזמן - 2 (מינוס שתיים, בחודשים). כדי לתקן את התוצאה בזמן 0 נכפול באחת ועוד הריבית בחזקה רלוונטי. השתמשתי כאן בRibbit להיוון שנתי, בחזקת 2/12 ממשום שגורם ההיוון הוא לחודשיים קדימה.	$(1 + 10\%)^{\frac{2}{12}}$
ערך הנוכחי של הקופונים נסיף את הערך הנוכחי מוכפל ב-1 ועוד שיעור תשואה לפדיון במונחים שנתיים, מותאם בזמן 0 בחזקה שלילית בסכום ייחיד של 3 שנים. וחודש (מועד קבלת התזרים הבודד ביחס להיום).	$100 * (1 + 10\%)^{-(3+\frac{1}{12})}$

**שאלה 9.3 – חישובי אג"ח בסיסיים (לTRGLול בית)** ת מהו אג"ח בנקודות זמן מאוחרות ממועד הנפקה להלן נתוניים לגבי אגרת חוב שערכה הנקוב 100 ש"ח אשר הונפקה ב-1.9.2020: האג"ח מבטיחה ריבית שנתיית נקובה בשיעור 10%, כאשר תשלום הריבית מדי שנה בסוף חודש אוגוסט. במועד הפדיון הסופי 30.8.2028 המשקיע יקבל גם את הקמן.

נדרש: מהו המחיר המרבי שהוא מוכן לשלם המשקיע עבור האגרת בתאריך 1.1.2022, אם ידוע ששיעור התשואה לפדיון של אג"ח דומות הוא 17% אפקטיבי לשנה?

פתרון:

$$P_B = 100 * 10\% * pva(17\%, 7) * (1 + 17\%)^{\frac{4}{12}} + 100 * (1 + 17\%)^{-(6+\frac{8}{12})} = 84.62$$

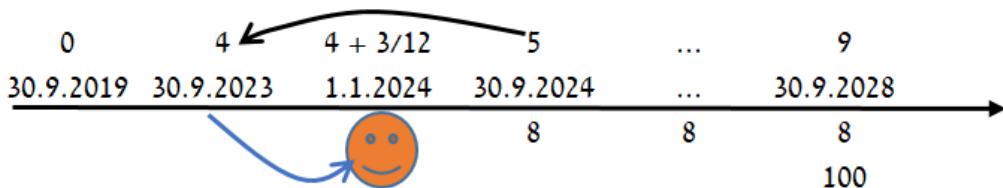
**שאלה 9.4 – חישובי אג"ח (לבית)**

חברת "גינוי שועלים" הנפקה ב-30.9.2019 אגרת חוב שערכה הנקוב 100 ש"ח. אגרת החוב נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 8% אשר מושלמת מדי שנה בסוף חודש ספטמבר. במועד הפדיון הסופי 30.9.2028 יקבל המשקיע גם את הקאן. מהו המחיר המרבי שהייה מוכן לשלם המשקיע עבור האג"ח ב-1.1.2024, בהנחה ששיעור התשואה לפדיון של אג"ח דומות במועד זה הנזק 12% לשנה?

#### פתרון שאלה 9.4

אגרת החוב הונפקה ב-30.9.2019 משלם בהגדלה תשולמי קופון שנתיים ב-30.9.30 של כל שנה. סכומו של קופון שנתי הוא כריגל המכפלה הפחותה של הריבית הנקובה (8%) בערך הנקוב (100) וMSC סכומו 8 ש"ח. בנוסף, יבוצע תשלום אחד וחיד של סך הערך הנקוב ב-30.9.2028 לידי המחזיק באג"ח (100). שיעור התשואה להיוון – ריבית להיוון – 12%.

נקודות התמחור (ההוויה לצרכי השאלה) היא ה-1.1.2024. נכוון לנקודת זמן זו המיצגת את מועד התמיהיר, נותרו עוד 5 תזרימי קופון לביצוע, ב-30.9. של כל אחת מהשנים: 2028, 2027, 2026, 2025, 2024.



מהוון לאחר בריבית	9
מתאימה: מזמן	9
ערך נקוב, תשלום אחד	
בתום התקופה	
זמן 4+3/12 למועד 4+9/12 לאחר	
$PB = 8 * PVFA(12\%, 5) * (1 + 12\%)^{3/12} + 100 * (1+12\%)^{-(4+9/12)}$	
נותרו עוד 5	
תזרימי קופון, זמן:	5
קופון	5
לצורך	6
תקופתי	7
היון	8
ריבית נקובה	9
זמן נזין	
ריבית נקוב	
כפול ערך נקוב	
את שיעור	
התשואה	
8% * 100	
לפדיון	

$$PB = 88.04$$

הסבר: עליינו לדעת כי מחיר אגרת חוב הוא תמיד הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים העתידיים שיקבל המשקיע כתוצאה מרכישתה במועד החישוב. במקרה שלנו, אנו נדרשים לתמחר את האג"ח ליום 1.1.2024, נקודת זמן המאוחרת ב-4 שנים ו-3 חודשים ממועד הנפקתה הנוכחי. נכוון למועד זה האג"ח צפוי לשלם למחזיקים 5 תזרימי מזומנים שנתיים בגובה הקופון, ב-30.9. של כל שנה עוקבת, וכן ב-30.9.2028 תקובל חד פערمي בגובה הערך הנקוב.

הערך של סדרת הקופונים מוביל בהגדלה תקופת תשלום אחת אחרת (שנה אחרת) ביחס למועד התקובל הקרוב ביותר נכוו למועד החישוב. הויל וה קופון הקרוב יחולק ב-30.9.2024, חישוב הערך הנוכחי בהתבסס על PVFA מוביל ל-3.09.2023. מכאן, עלינו לקדם את התוצאה על ידי דחיפה קדימה של התוצאה במשך 3 חודשים, ולהוסיף לכך את הערך הנוכחי של הסכום היחיד המתkeletal בתום התקופה (הערך הנוכחי).

שים לב, שכל הערכים מהוונים בשיעור התשואה לפדיון. לעולם לא מהוונים בריבית הנקובה. הריבית הנקובה קבועה תזרימיים, אופן היוגם תלוי בריבית שמקפת את התשואה הנדרשת / מחיר ההון.

## פרק 2: חישובי תמחור מניות (יח' 11)

- **מני רצוי :** שווי אג"ח / מחיר הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שהוא משלהם למשקיעים. באופן כללי – שווי נכס הוא הערך הנוכחי של התזרימיים הנקיים שיתקבלו בידי רוכשיו.
- **גם לגבי מניות –** אנו ניישם את אותו עיקרונו – **שווי מניה הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שצופים המשקיעים במניה לקבל.**
- **בעוד שבאג"ח תזרימי המזומנים מוגדרים היטב :** כוללים קופון וערך נקוב.
- **לעומת זאת, במניות (מכשיר פיננסי שמקנה זכות רווחי החברה) –** תזרימי המזומנים של המשקיעים כוללים **דיבידנדים** (הרוח שמחולק למשקיעים, ואם יש מידע על מכירת המניה – גם התקובל במכירתה).
- **המודל הבסיסי לפחות באופן ההסבר העקרוני שלו, יצא מנקודת הנחה שההשקעה במניות היא השקעה לטוח ארוך. ובתוך הארוך הזה, לא זו בלבד אנו צופים כמשקיעים לקבל דיבידנדים – אנו מצלפים שסקום הדיבידנד יעלה עם הזמן (בהתאם לקצב התפתחות החברה).**

ואם זה כך, התהיליך הטכני שמלואה תמחור מניות יישען תכל'ס על שני עקרונות:

- **שווי מניה הוא ערך נוכחי של סדרת דיבידנד אינסופית (למניה אין תוקף / פרעון מוגדר).**
- **סדרת תזרימי הדיבידנד האינסופית –** במקרים רבים – צומחת, ושיעור צמיחתה – נתון.

**הנוסחה הטכנית לתמחור מניה – מודל היון הדיבידנדים – גורדון**

$$P_S = \frac{DIV}{k_E - g}$$

כאשר :

סימן	משמעות
$P_S$	מחיר המניה – Price of Share
$DIV$	הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחורי שיעור הצמיחה קבוע
$k_E$	מחיר ההון העצמי, התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות

דges חשוב: כמו בכל נוסחה של חישוב ערך נוכחי סדרתי (וכאן – מדובר בערך נוכחי של סדרה אינסופית צומחת), התוצאה המתקבלת מיישום נוסחה מובילה אותנו לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד תזרים המזומנים הראשוני בסדרה.

**אופן חישוב מחיר ההון העצמי  $k_E$ :**

- אם מחיר המניה נתון, יחד עם פרמטרים נוספים, אפשר לחוץ את מחיר ההון העצמי על בסיס הצבה בנוסחה.
- בנוסף – חיבור ליה' 8: התשואה הנדרשת על מניה בודדת נקבעת על ידי קו ה-SML. לכן, אם קיימים נתונים רלוונטיים, ניתן גם לחשב את  $k_E$  כך:

$$k_E = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_E$$

- ביה' 11-10 (בחלון העיקרי שדן במבנה ההון והשפעתו על שווי החברה) קיימים משפט ווסף שנקרה "המשפט השני של מודיליאני ומילר" והוא מאפשר לחשב את מחיר ההון העצמי בחברה. נגיעה לזה.

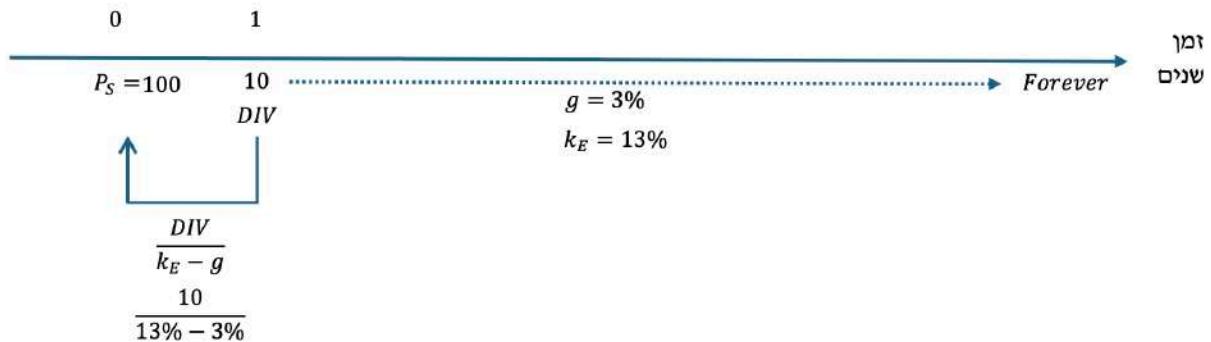
#### **שאלה 11. תមחרת מניות בסיסי – מודל גורדיון**

מנית AM היא מניה הנסחרת בבורסה לנירוחות ערך בתל אביב. על פי תחזיות האנליסטים, המניה צפוייה לחלק לבני המניות בעוד שנה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה. שיעור הדיבידנד צפוי לצמיחה כל שנה ב-3%. התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה היא 13%.

- מהו מחיר המניה היום?
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הקרוב ביותר, בסך 10 ש"ח, יתקבל מחר?
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד האחרון בסך 10 ש"ח חולק אטמול?
- מהו מחיר המניה אם, בשונה מהנתון, הדיבידנד הקרוב ביותר בסך 10 ש"ח צפוי להתקבל בעוד 8 שנים (כלומר, בתום כל אחת מהשנים 1-7 אין תקופי דיבידנד בכלל).
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הצפוי הוא 10 ש"ח בעוד שנה, 20 ש"ח בעוד שנתיים, 30 ש"ח בעוד 3 שנים, 48 ש"ח בעוד 4 שנים, ובכל שנה עוקבת, יצמוך סכום הדיבידנד בשיעור קבוע של 3%?

**פתרונות:**

## פתרון סעיף א

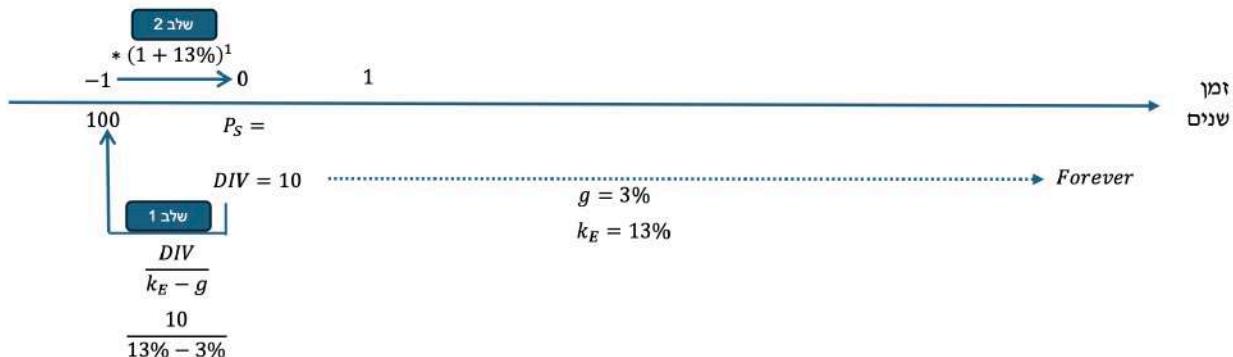


אופן החישוב:

$$P_S = \frac{DIV}{k_E - g} \rightarrow P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} = 100$$

הוائل והדיבידנד הקרוב ביותר הוא בעוד שנה, ומרווח הזמן בין כל שני תזרימי דיבידנד עוקבים הוא שנה, אני מוקף "אחת אחרת" ביחס למועד הדיבידנד הקרוב. אם הדיבידנד עוד שנה, קפיצה אחת אחרת מובילה לזמן 0 וסיימת. בקיצור: תזרימי "תום תקופה" בקטע הכיר רגיל שיש.

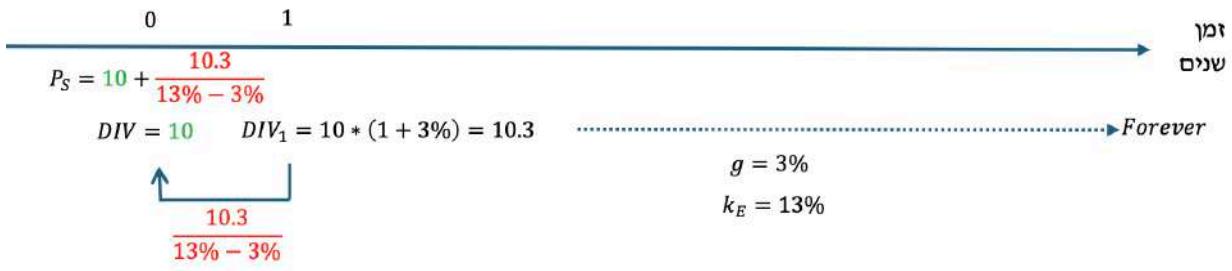
## פתרון סעיף ב



"מחר" מבחינתנו = "עוד דקה" ככלומר התזרים העתידי הקרוב ביותר הוא בזמן 0 (תזרימי תחילת תקופה). לפיכך, חישוב הערך הנוכחי שמקפיד אוטומטית את אחת אחרת – מוביל בזמן -1. עליי לתקן על ידי מכפלה באחת ועוד הריבית (מחיר ההון העצמי) פעם אחת:

$$P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%) = 113$$

דרך נוספת היא להתבסס על משווהת היון אשר נוטלת את התזרים הראשון בנפרד, ואת יתר התזרמים מזמן 1 צפונה בנפרד:



$$P_S = 10 + \frac{10 * (1 + 3\%)}{13\% - 3\%} = 113$$

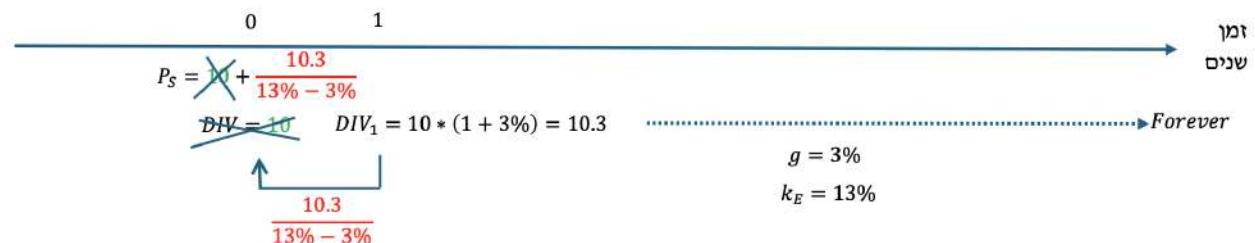
מה עשיתי כאן? התייחסתי לכך שהتوزרים הראשון בסך 10 כתנועה הוא תזרום מיידי, ולכן ערכו הנוכחי זהה לסכומו. התזרומים העוקבים מזמן 1 צפונה, כוללים (במיוחד בהקשר לתזרום בזמן 1) צמיחה בשיעור של 3% (לשנה). לכן המונה מגלם זאת. המכנה נותר זהה, וכך הוא בעצם מהוון סדרת תזרומים מזמן 1 צפונה לזמן 0 לפי העיקנון של "אותה אחורה" במצב כזה לא תדרש התאמה (כי מתיחסים לזמן 0 בנפרד, ולזמן 1 צפונה בנפרד).

**מדוע הצגתי דרך זו? בדרך זו (השניה, של פיצול של זמן 0 בנפרד וכל היתר בנפרד) יש יתרון באשר לשאלת מסויימת רוצחים לחלץ את שיעור התשואה להוון העצמי.**

### פתרונות סעיף ג

מהו מחיר המניה אם הדיבידנד האחרון בסך 10 ש"ח חולק אטמול?

תחילה, הצהרה: שווי נכס לעולם לא מגלם שווי של תזרומים היסטוריים, אלא רק תזרומים עתידיים. התזרומים העתידיים הם פונקציה של התזרומים ההיסטוריים ושיעור הצמיחה. בפרט, אם הדיבידנד האחרון חולק אטמול, הרי שהדיבידנד הבא צפוי בעוד שנה ועוד לתום אותה שנה, הדיבידנד יצמץ ב-3%.



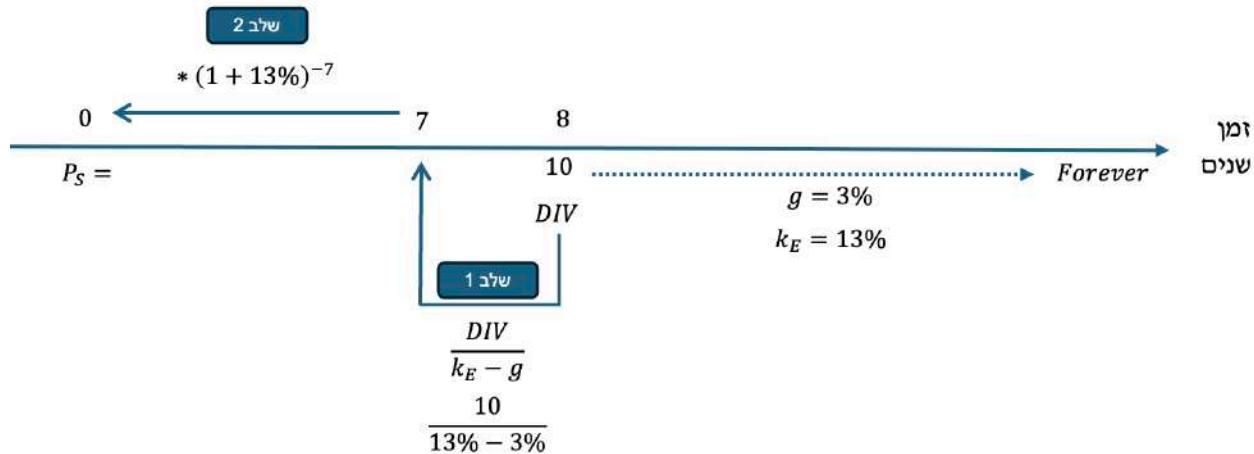
הסימון ב-X כל תכליתו זה להבהיר מעל לכל ספק שחדיבידנד ההיסטורי (מאטמול, אך עדין בעבר) הוא לא רלוונטי כלל לתמוך המניה לאחר קבלתו. מהוונים רק הדיבידנדים שלאחר מכן:

$$P_S = \frac{10 * (1 + 3\%)}{13\% - 3\%} = 103$$

מה עשינו כאן? במנה קיימים התזרומים הקרוב ביותר, בעוד שנה – 10 ההיסטורי בתוספת צמיחה שנתית. במכנה, ההפרש בין מחיר ההוון העצמי לשיעור הצמיחה. והואיל והדיבידנד הקרוב ביותר הוא בעוד שנה, ערכו הנוכחי שמקפיד את אותה מוביל בדיקות זמן 0 ללא צורך בתאמה.

#### פתרון סעיף ד

מהו מחיר המניה אם, בשונה מהנתנו, הדיבידנד הקרוב ביותר בסך 10 ש"ח צפוי להתקבל בעוד 8 שנים (כלומר, בתום כל אחת מהשנים 7-1 אין תקولي דיבידנד בכלל).



משוואת הפתרון :

$$P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%)^{-7} \approx 42.51$$

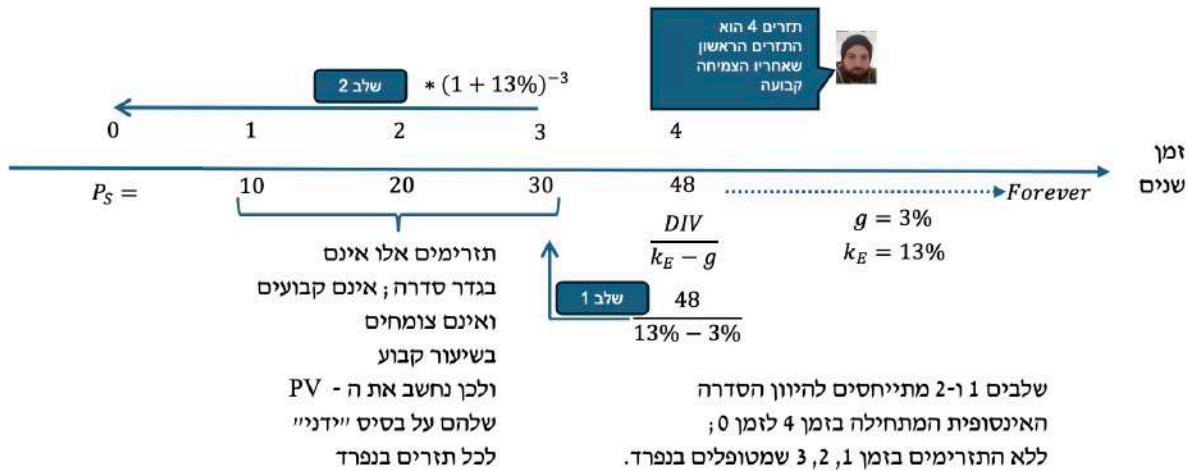
מה עשינו כאן?

מדובר ב-10 ש"ח וזהו הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחריו הצמיחה קבועה. לכן זה המחיר בנוסחה. במכנה – ההפרש בין מחיר ההון לבין שיעור הצמיחה. אלא שהואיל וחישבנו את הערך הנוכחי של סדרה שהחלה בזמן 8, הקפיצה האוטומטית אחת אחרת לא מובילה אליו لأن שאני רוצה אלא לנקודה שהיא "אחדת אחרת" כלומר בזמן 7. לכן עליי לבצע חתמה נוספת זמן 7 לזמן 7 אפס, וזאת על ידי:  $(1 + 13\%)^{-7}$

#### פתרון סעיף ה

מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הצפוי הוא 10 ש"ח בעוד שנה, 20 ש"ח בעוד שלוש שנים, 30 ש"ח בעוד 3 שנים, 48 ש"ח בעוד 4 שנים, ובכל שנה עוקבת, יצמוך סכום הדיבידנד בשיעור קבוע של 3%?

סעיף זה מציג בפנינו מצב שבו שיעור הצמיחה משנה 1 לשנה 2 הוא 100%, שיעור הצמיחה מהשנה ה-2 ל-3 הוא 50%, שיעור הצמיחה מהשנה ה-3 ל-4 הוא 60%, ורק לאחר מכן שיעור הצמיחה מתקבע על 3%. כאשר אנחנו מתמכורים מניות לפי מודל גורדון: **תמיד ולעולם נרצה ליזהות את אותו דיבידנד שאחריו הצמיחה קבועה. כאן ספציפית – אחרי התזרים של תום שנה 4, הצמיחה מתקבעת.** לכן, נוכל ליחס את נוסחת גורדון על התזרים בזמן 4.



כǐ מה אומרת ההגדרה? המונח בנוסחת גורדון הוא תזרים הדיבידנד הקרוב ביותר שאחוריו שיעור הצמיחה קבוע. את התזרים הראשונים (לא כולל תזרים זמן 4) נ呼ו "ידנית" בנפרד:

$$P_S = 10 * (1 + 13\%)^{-1} + 20 * (1 + 13\%)^{-2} + 30 * (1 + 13\%)^{-3} + \frac{48}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%)^{-3} \approx 378$$

**באדום** - שלושת המחוברים הראשונים הם התזרים הבודדים בשנים 1, 2 ו-3, טרם התקבועות הצמיחה.

**בירוק** - המחבר הריבעי הוא התזרים בזמן 4 שאחוריו הצמיחה קבועה וליו הופעל מודל גורדון (נוסחת הייעון של הסדרה הצומחת). החישוב מוביל אותה אחריה (כיאה לסדרה) כלומר בזמן 3, ויש צורך לבצע התאמה נוספת בזמן 3 לפחות על ידי מכפלה מתאימה.

## שאלה 11.2 – תמהור מניות – המצח המבריק – לבית

מנית "המצח המבריק" חילקה לפני דקה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה. התכנון הוא לחלק דיבידנד כל 5 שנים. שיעור הצמיחה השנתי הוא 4%. התשואה הנדרשת על ידי משקיעים בחברות דומות היא 14% לשנה.

נדרש :

- מהו המחיר המרבי שתסכימו לשלם על המניה היום?
- כיצד, אם בכלל, תנסה תשובהכם בהנחה שאתם מעוניינים להחזיק במניה 8 שנים בלבד?

פתרונות :

פרק :

בכלל, תמהור מניה הוא הערך הנוכחי של הדיבידנדים שיתקבלו. כאשר **הדיבידנדים צומחים** (בשיעור קבוע) **לאינסוף**, קיימת נוסחה רלוונטית לחישוב הערך הנוכחי, כדלקמן :

$$P_S = \frac{Div}{k_E - g}$$

כאשר  $Div$  הוא הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחוריו הצמיחה קבועה,  $k_E$  הוא שיעור הצמיחה הנדרש, ושיעור הצמיחה הוא  $g$ . כמו כל נוסחת היוון סדרה, גם נוסחה זו מובילה לנקודת הזמן שהוא "אחד אחרה" ביחס לתזרים הראשונים בסדרה.

פתרונות סעיף א :

$$k_E(5 \text{ years}) = (1 + 14\%)^5 - 1 = 0.925414582 = 92.5414582\%$$

$$g(5 \text{ years}) = (1 + 4\%)^5 - 1 = 0.216652902 = 21.6652902\%$$

$$P_S = \frac{10 * (1 + 4\%)^5}{0.925414582 - 0.216652902} = 17.1659$$

מסקנה : שווי המניה היום, המבטא את הערך הנוכחי של סדרת הדיבידנדים האינסופית הצומחת הוא 17.1659 ש"ח.

שימוש לב : כמו כל היוון סדרה, גם ערך הנוכחי של סדרת אינסופית צומחת מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא תקופת תשלום אחת לפני מועד התזרים הראשונים בסדרה. ספציפית כאן, הדיבידנד הקרוב הוא בעוד 5 שנים (כי התזרויות 5 שנתיות, והאחרון חולק לפני דקה). לכן, כאשר מהוונים סדרה זו, ו קופצים 5 שנים לאחר מועד התזרים הראשונים, מגיעים בדיקן לזמן אפס והכל מצוין.

בוחלט יתכן שהתזרים הראשונים יהיה בנקודת זמן אחרת, ואז תדרשנה התאמות.

**פתרונות סעיף ב:**

מחיר המניה אינו פונקציה של תקופת ההחזקה בה, כאשר הפרמטרים להיוון קבועים. זאת מושם שככל הערך ש"לא מתפרק" לאור המכירה המוקדמת (דיבידנדים לאחר זמן 8), יփוך להיות מוגלים במחיר המכירה. מטעמי קוצר היריעה לא נוכיח משפט זה (יש על זה דיון רחוב יותר בחלקים אחרים במחברת).

**שאלה 11.3 בנושא שימוש במחיר מניה כדי לאמוד את מחיר ההון העצמי של החברה – לבית רוחוי** חברת "סקט לומדים" גדלו בשנים האחרונות בקצב של 8% בשנה. בתום השנה הם הסתכמו ב-2 ש"ח למניה. מחיר המניה בשוק הוא 30 ש"ח והחברה החליטה לחלק דיבידנד בסכום של 1.2 ש"ח בסוף שנת הפעולות הקרובה.

מהו מחיר המון העצמי של החברה, לפי מודל הצמיחה של גורדון, בהנחה ששיעור צמיחה הדיבידנד שווה לשיעור הגדול ברוחוי החברה?

**פתרונות :**

מחיר המניה הוא הערך הנוכחי של תזרימי הדיבידנד ובהינתן ההנחה שהם צומחים בשיעור קבוע לאינסוף, הנוסחה הרלוונטית להיווןם היא :

$$P_s = \frac{DIV}{k_E - g}$$

המונח  $k_E$  מייצג את שיעור התשואה הנדרש על המון העצמי, ולתשומתיכם שבלעתים מסומנים כ-  $s$  וכן משקף את מחיר המון ( $k$ ) הנדרש بعد השקעה במניות החברה ( $s = \text{shares}$ ).

כך או אחרת, בהצבת נתוני השאלה נקבל :

$$30 = \frac{1.2}{k_E - 8\%} \rightarrow k_E = 12\%$$

ואשר על כן, מחיר המון העצמי של החברה הוא 12%.

### פרק 3: ההשפעה של תמהיל מקורות המימון על שווי החברה ועל מחיר הון (יח' 11-10)

הגדירות התחלתיות... המשך יבוא...

#### מיini רציו:

לאחר שדנים באופן החישוב הבסיסי של מחיר מניה (ערך נוכחי של דיבידנדים) ומחיר אג"ח (ערך נוכחי של קופונים וערך נקוב) – נשאלת השאלה – אבל איך זה קשור לניהול פיננסי? גם בספרי הקורס נכתב בכוורת: "תורת המימון – ניהול פיננסי של גופים עסקיים". קיים דגש עקרוני בהזון הקורס לגבי התפקיד של מימון בחברות, לא רק בהקשר השקעתי.

ומה שאנו רוצים לגלות ביחסות האחורה של הקורס זה את התשובה לשאלת – כיצד מימון במניות ו/או בחוב משפיע על החברה עצמה (לא על המשקיעים במניות והאג"ח דזוקא; ממש על השווי של החברה כולה) ואייך זה מתבטא לקבלת החלטות פיננסיות מצדה.

למעשה, זה א-ב של ניהול פיננסי. סמנכ"ל הכספי של החברה אמון בין היתר על בחירת מקורות המימון לחברה, והשאלה האם לגיס הון עצמי (מניות) או חוב היא שאלה משמעותית גדולה גם מצד החברה המגיסת.

#### בקצרה:

"תכליס, ד"ר צבן, אם החברה שלי צריכה כסף... אנפיק מניות? אנפיק אג"ח? מהם שיקוליהם?" זה הבסיס ליח' 10-11.

#### גיוס מימון בהון עצמי / הון זר – והשפעות על הסיכון למשקיעים (בעלי המניות)

- כדי להבין מה המשמעות של הנפקת מניות או אג"ח על החברה, צריך להביט קודם כל על ההשפעות הקשורות לסיכון.
- נטילת הלואות ו/או הנפקת אג"ח מבונה גם "מינוֹף פִינְסִי". פועלות המינוֹף ממשעה – לבצע פעולה שיכולה להניף את החברה למעלה (כלכליות – להגדיל את תשואתה) אבל גם עלולה להוריד אותה למטה (להקטין את תשואתה). ולכן יוצרת סיכון ממשמעותי יותר למשקיעים במניות החברה.
  - איך? מודיע?
- נניח שחברה רוצה להתרחב ולשם כך מגייסת חוב בהיקף 100,000 ש"ח בריבית 10%. ונניח שהפרויקט הנ"ל רוחchi בשיעור 2%. המשמעות הפרקטית היא שהפרויקט הפסדי – כי אם הפרויקט עצמו נתן 2% ועלות המימון היא 10%, הפסדו (הצד השלילי של המינוֹף הכספי) – אם נוטלים חוב, את הריבית משלמים גם כשנכשלים).
- נביט בuest על הצד השני והחיובי של המطبع. נניח שהחברה מגייסת חוב בהיקף זה בריבית זהה, אבל הפרויקט שאליו ישמש החוב היה רוחchi בשיעור של 22%. המשמעות הפרקטית היא שלא זו בלבד שהפרויקט רוחchi – אלא הועיל והגדיל את התשואה לבני המניות. מודיע? כי הבנק דורש 10% בלבד מהרווח (לפי הריבית שנקבעה בהסכם) וכל היתר – זורם לכיסם של בעלי המניות ומגדיל את תשואתם.
- בקצרה:** כשותלים חוב, תשולמי הריבית ישולמו בכל מקרה, והם קבועים. אם הרוחחים הנובעים מהפרויקט גבוהים מריבית זו – התשואה תגדל. ואם הם נמוכים ממנה – התשואה תקטן. העבודה

שניטילת החוב יכולה להרים את התשואה למטה או להוריד אותה לרצפה – היא הלב של סיכון הנובע מניטילת חוב.

**אוקי, אז אם מגיסים חוב במקומות הוו עצמי, הסיכון לבאים גבוה יותר... זה אומר שזה לא כדאי?**

- לא בדיק.
- ככל שנותלים התחייבות בהיקף גבוה יותר הסיכון לבאים (בעלי המניות) גדול.
- העלייה בסיכון לבאים המניות מتبטאת בכך שהם ידרשו תשואה גבוהה יותר על ההשקעה.
- מה זה אומר שהתשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות גדול?  $\uparrow k_E$
- לצד זאת, במקביל, החברה ממנה את עצמה באחוז גובה יותר של התחייבות, בריבית שהיא הריבית על החוב  $k_D$ .
- איזו השקעה היא מסוכנת יותר? במניות (להיות בעלים) או בחוב של החברה?
- התשובה היא: חד משמעות השקעה במניות. מודיע? כי פירות ההשקעה במניות תלויים ברווחיות החברה ובהחלטותיה על חלוקת דיבידנד. אין דרך לדעת זאת מראש. לעומת זאת, השקעה בחוב תקינה לנו במקרה את התזרמים שהובתו (אלא אם כן יהיה תרחיש קיצוני של קריסת החברה).
- ולכן: בהינתן שהחוב מסוכן פחות מההשקעה במניות משקיעי החוב דורשים תשואה נמוכה יותר ממשקיעי ההון:  $k_D < k_E$ .
- מה משפייע בצורה חזקה יותר על עליות המימון בחברה? האם העלייה בתשואה הנדרשת על ידי הבעלים (הצד הרע של המינוף) או העובה שהכנסנו עוד הון (זר, התחייבות) זול לחברה (הצד הטוב של המינוף)?
- התשובה היא שלא ניתן להכיריע ללא עזרה חיצונית. למולנו, יש לנו עזרה חיצונית מהמודל האחרון של הקורס... מודל מודיליאני ומילר M&M (כמו הסוכריות).

**תכליס – מה זה עשוה לשוי החברה בשנותלים חוב? מה זה M&M?**  
מודל מודיליאני ומילר הוא מודל שמניח סבבנה כלכלית שאין בה סיכון פשיטת רגל. בcpfuf להוכחות מתמטיות שלא Learned (צריך לידע רק את יישומיה), הם הסיכון שבמצב כזה מתקיים:

המשפט הראשון של מודיליאני ומילר:

- מינוף פיננסי לא משפייע על שווי חברה אם היא פועלת בעולם ללא מסים.

$$V^L = V^U$$

כasher :

סיכון	משמעות
$U$	שווי חברה לא ממונפת, שאין בה כלל הון זר או חוב, אלא רק הון עצמי
$U$	שווי חברה ממונפת, שגייסה חוב / אג"ח / הלוואות

- מינוף פיננסי מגדיל את שווי החברה אם **היא פועלת בעולם עם מסים**.  
לאור העובדה שבעולם עם מס, חברת זכאות לקבל מון מס (זיכוי מס) על עלויות המימון, הרי שבעולם עם מסים שווי החברה בהינתן מינוף יגדל עוד יותר (לאור שווי מגני המס על עלויות הריבית).

$$V^L = V^U + t * D$$

סימון	משמעות
$U$	שווי חברת לא ממונפת, שאין בה כלל הון זר או חוב, אלא רק הון עצמי
$V$	שווי חברת ממונפת, שגייסה חוב / אג"ח / הלוואות
$t$	שיעור המס
$D$	שווי החוב (השווי הכללי של האג"ח שהחברה הנפקה ו/או שווי הלוואות שגייסה)

#### המשפט השני של מודיליאני ומילר:

- מינוף פיננסי מגדיל את מחיר ההון העצמי גם בעולם עם מסים וגם בעולם ללא מס.

$$k_E^L = k_E^U + (k_E^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{E}$$

סימון	משמעות
$k_E^L$	מחיר ההון העצמי (התשואה שדורשים בעלי המניות) בחברה עם מינוף פיננסי (עם חוב)
$k_E^U$	מחיר ההון העצמי (התשואה שדורשים בעלי המניות) בחברה ללא מינוף פיננסי (ללא חוב)
$t$	שיעור המס
$D$	שווי החוב (השווי הכללי של האג"ח שהחברה הנפקה ו/או שווי הלוואות שגייסה)
$E$	שווי ההון העצמי (השווי הכללי של מניות החברה)

## מפגש 13 – י"ח' 10-11/2025 תרגול

### מינוי דעתו:

לאחר שבמפגש הקודם עסקנו בתמהור מנויות ואג"ח על בסיס נוסחאות הערך הנוכחי, הגיע הזמן לעבור להשפעות של מבנה ההון (מהו הרכב גיוס המימון בחברה – שיעור ההון העצמי במימון מנויות, ושיעור ההון הזר בימיון אג"ח) על :

א. שווי החברה.

ב. התשואה הנדרשת על ידי משלקאים – בסך הכל וברמת בעלי המניות (החלטות ניהול).

יח' 10 ו-11 ביה' הלימוד מחולקות כך שיח' 10 עוסקת בעיקר בהשפעות על שווי החברה, ויח' 11 בתשואה הנדרשת / מחיר ההון הכלול. אנחנו נתיחס להכל כ"מקרה אחת".

**לשם כך עליינו להגדיר מספר הגדרות עקרוניות וזו לתרגול לעייפה:**

### מחיר ההון הממוצע המשוקל

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

מחיר ההון הממוצע המשוקל הוא בעצם חישוב ממוצע של התשואות הנדרשות על ידי כל המשלקאים בפירמה. למעשה, בפירמה יש שתי אוכלוסיות משלקאים :

השלקאים בהון עצמי – שהתשואה הנדרשת על ידם מסומנת כ- $k_S$ .

השלקאים בהון זר (רוכשי האג"ח) – שהתשואה הנדרשת על ידם מסומנת כ- $k_D$ .

במסגרת מחיר ההון המשוקל, אנו כופלים כל תשואה נדרשת על ידי משלקים במשקל היחסי של משלקאים אלו בסך מקורות המימון בחברה – כך שאט  $k_S$  אני כופל ב-  $\frac{S}{V}$  ככלומר בחלוקת שמהווה ההון העצמי בסך מקורות

הימיון בחברה, ואת  $k_D$  אני כופל ב-  $\frac{D}{V}$  ככלומר בחלוקת שמהווה ההון הזר / האג"ח בסך מקורות המימיון בחברה.

מעניין לראות שرك את רכיב עלות המימיון בהון זר אנו כופלים ב-1 פחות שיעור המס  $t$  כאשר הסיבה לכך היא שהוצאות מימיון הון הוצאה מוכרת לצורך מס.

יש עוד דרך, עיקפה יותר, להגעה למחיר ההון הממוצע המשוקל. אנחנו טוענים ש :

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

למעשה הטענה היא – שאם חברת נמצאת ב"שוויי משקל" הרי שהיחס שלה בין הרווחים התפעוליים (נקראים גם הכנסה תפעולית נקייה, NOI, ראשי תיבות של Net Operating Income) בניכוי מס לבין סך ההון שגייסה. אמור לספק את דרישות התשואה של משלקאים בגורף (WACC).

המשפט הראשון של מודיליאני ומילר M&M – הקשר בין מינוף פיננסי ושווי החברה :

$$V^L = V^U + t * D$$

ambil להוכיח – כאשר חברה פועלת בעולם ללא סיכון פשיטת רגל ועם מסים – ככל שרכיב המימון בתחריביותו / הון זר / אג"ח גבוה יותר, כך שווי החברה הכלל גבוה יותר (לאור מגן המס על עלויות המימון). אם שיעור המס 0 – שווי החברה הכלל הוא בلت תלו依 באופן המימון של החברה.

**המשפט השני של מודיליאני ומילר – הקשר בין מינוח פיננסי ושיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות:**

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כולם יודעים שככל שנוטלים התחריביות בהיקף משמעותי יותר, הסיכון לבעליים (במונחי ההשתנות האפשרית של רוחיהם) גבוה יותר. לכן, הם (בעלי המניות בחברה עם רכיב חוב גבוה יותר) ידרשו תשואה גבוהה יותר. הקשר בין שיעור המינוח לשיעור התשואה מבוטא במשוואה זו, כאשר  $k_S^L$  מבטא את התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה ממונפת (עם מינוח פיננסי = עם חוב), ואילו  $k_S^U$  זה מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה זהה בכל מובן למעט העובדה שאינה ממונפת.

**שאלה 9.1 – רענון לגבי אג"ח**

נתונה אג"ח שערכה הנקוב 500 ש"ח. האג"ח משלם ריבית בשיעור 15% בתום כל אחת מ-5 השנים הקרובות, כאשר הקרע נסדיית יחד עם התשלום האחרון.

נדרש:

- א. מהו מחיר האג"ח בהנחה שהריבית האפקטיבית בשוק היא 12%, 15% ו-27% בהתאם. הסבירו ממה נובעים הפרסים שגיליתם.
- ב. הניחו כי הריבית האפקטיבית בשוק היא 15%. מהו מחיר האג"ח חצי שנה לפני התשלום השני?
- ג. הניחו כי המשקיע מעוניין למוכר את האג"ח רגע לפני מועד פרעונה. מהי התמורה שצפואה להתקבל? האם הדבר תלוי בריבית השוק במועד זה? נמקו.

**סעיף א: מחיר האג"ח בהנחה שהריבית האפקטיבית בשוק היא 12%, 15% ו-27% בהתאם**

שווי אג"ח הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים הנובעים ממנו (הנקראים – קופון וערך נקוב) במחיר ההון הזר (שנקרא גם – ריבית השוק או שיעור תשואה לפדיון). אנחנו צריכים לחשב כאן את שווי האג"ח 3 פעמים בהתאם לריבית השונה להיוון המופיעה בסעיף.

$$P_B(k_D = 12\%) = 15\% * 500 * PVFA(12\%, 5) + 500 * (1 + 12\%)^{-5} = 554.07$$

$$P_B(k_D = 15\%) = 15\% * 500 * PVFA(15\%, 5) + 500 * (1 + 15\%)^{-5} = 500$$

$$P_B(k_D = 27\%) = 15\% * 500 * PVFA(27\%, 5) + 500 * (1 + 27\%)^{-5} = 345.04$$

(\*) מי שעבד עם לוח 4 (לוח PVFA או מענ"ס) יכול לקבל תוצאות שונות במקצת לאור הפרשי עיגול.

(\*\*) כפי שהוצע במפגש קודם, במצבים שבהם הריבית הנקובה (15%) גבוהה מהריבית הנדרשת (נניח 12%) שווי האג"ח יהיה גבוה מערכה הנקוב ולהפוך (אג"ח בפרמייה / נכון / פארי – ראו עמי 294 במועד כתיבת שורות אלו).

**ב. הינו כי הריבית האפקטיבית בשוק היא 15%. מהו מחיר האג"ח חצי שנה לפני התשלום השני?**  
אנחנו נמצאים חצי שנה לפני התשלום השני, כלומר: בזמן 1.5 (בשנתיים).  
התשלום הקרוב הוא בזמן: 2.

פרק הזמן בין תשלומיים הוא שנה שלמה.  
מצד אחד, נותרו 4 קופונים (כי רק אחד בוצע). מצד שני, כאשר אני מחשב בגנים ערך נוכחי כסדרה (PVFA) אני מגיע לנקודת הזמן שהיא אחת לאחרת לפני התזרים הראשון בסדרה, כלומר שנה לפני זמן 2, בזמן 1. זה לא מתאים לי, כי נקודת הזמן היא 1.5, לכן יש לדוח **קדימה** חצי שנה.  
הסכום החד פעמי (הערך הנוכחי) שמתකבל בזמן 5 יהו (PV) של **סכום חד פעמי מזמן 5 לזמן 1.5**, כלומר **3.5 שנים לאחר**.

$$P_B = 15\% * 500 * PVFA(15\%, 4) * (1 + 15\%)^{0.5} + 500 * (1 + 15\%)^{-3.5} = 536.19$$

**ג. הינו כי המשקיע מעוניין למכור את האג"ח רגע לפני מועד פרעונה. מהי התמורה שצפוייה להתקבל? האם הדבר תלוי בריבית השוק במועד זה? נמקו.**

הוائل ושאלים מה השווי "שניה לפני" התשלום האחרון, אין מרחק זמן / השפעות היון לשווי, ובכך הכל נctrיך לחבר את סכום הקופון האחרון עם הערך הנוכחי שלהם יתקבלו בעוד רגע.

$$P_B = 15\% * 500 + 500 = 575$$

### שאלה 9.2 – רענון לגבי אג"ח

אג"ח שערכה הנוכחי 800 ש"ח משלמת ריבית רבונית של 4% במשך 10 שנים. תשואת אג"ח דומות היא 1.5% לחודש. מהו שווי האג"ח בחולוף 5 שנים רגע לפני תשלום הריבית?

פתרונות:

$$P_B = 4\% * 800 * PVFA(4.5678375\%, 21) * (1 + 4.5678375\%) + 800 * (1 + 4.5678375\%)^{-20}$$

$$P_B = 4\% * 800 * \frac{1 - \frac{1}{(1 + 4.5678375\%)^{21}}}{4.5678375\%} * (1 + 4.5678375\%) + 800 * (1 + 4.5678375\%)^{-20}$$

$$P_B \approx 773.25$$

הסבירים: סכום התקובל התקופתי הסדרתי הוא לפי מכפלת הריבית הנוכחי התקופתית בערך הנוכחי כולם 4% כפול 800 כל רביעון. מספר הקופונים שנותרו נכון לנקודת התמחור הוא 21, הוайл וה קופונים כל רביעון. נותרו 5 שנים, ובנוסף – נותר התשלום החד פעמי (המיידי) של תום שנה 5. בסך הכל  $21 - 5 = 16$ .

לגביה ריבית להיוון – אם תדיירות תשלומי האג"ח היא רבעונית, גם הריבית להיוון (תשואת אג"ח דומה בשוק / ריבית השוק / שיעור התשואה לפדיון) צריכה להיות מתואמת למונחים רבעוניים, ותמיד את הריבית להיוון בהתאם עם מעריך חזקה:

$$k_D(\text{quarter}) = (1 + 1.5\%)^3 - 1 = 4.5678375\%$$

כמו כן, הרכיב הסדרתי שצווין:

$$4\% * 800 * PVFA(4.5678375\%, 21)$$

כולל היוון תזרימי מזומנים שהראשון שבהם בדיק בזמן 5, ולכן ההקפצה האוטומטית אחת אחרת (תקופת תשלום אחת אחרת) מובילה בדיק לזמן 4.75 (רבעון אחד אחרת לפני התזרים הראשוני). כדי לתקן לזמן 5, מועד התמחור, קופלים ב-1 ועוד הריבית לרבעון. זו הסיבה להתאמה הנוספת:

$$(1 + 4.5678375\%)$$

**שאלה 10.1 – חישוב שווי חברה על בסיס תמהיל מקורות מימון ומהירות ההון**  
בחברת "פרופסורים עובדים" בע"מ (להלן: "החברה") הרכנויות השנתיות ממכירת סמボסק פלאפל חן 3 מיליון ש"ח לשנה.

ההוצאות המשתנות כוללות שכר לאופה הראשי ד"ר צבאן בסך 1 מיליון ש"ח לשנה וחומר גלם בסך 0.8 מיליון ש"ח לשנה. שיעור הריבית על אגרות החוב של החברה הוא 8% וכמות האג"ח המונפקת היא 2 מיליון ש"ח. שיעור מס החברות הנו 20% (לחברה יש קומביונות ברשות המסים).

שיעור התשואה הנדרש בשוק על אג"ח ברמת סיכון דומה הנו 10%, והחברה נסחרת לפי שווי שוק כולל של 6 מיליון ש"ח.

השיבו לנדרשים הבאים בהתאם למשפטים מודיליאני ומילר:

- מהו שווי השוק של החוב?
- מהו שווי השוק של ההון העצמי?
- מהו שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות?
- מה היה מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?
- מה היה שווי החברה הכוללת בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת ללא מס?
- מה היה שווי החברה הכוללת בחברה מקבילה, בעלת מבנה הון זהה, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?

#### a. מהו שווי השוק של החוב?

שווי השוק של החוב כולם, המסומן D מלשון Debt הוא השווי הכללי (המצרפי) של כל אג"ח החברה יחד. כדי לחשבו, כרגיל, נבצע PV לזרימי המזומנים מהאג"ח. בשאלה לא נאמר דבר על פרק הזמן של אגרות החוב (אורך חייה). מאם מתקבל בשאלות "גдолות" בקורס לגביה חברות, להניח שמבנה ההון קבוע, מה שאומר שגם האג"ח קבועה / לאינסופי (צמיחה / קונסול). במצב כזה, שווייה ייקבע על ידי היוון תזרימי הקופונים בלבד (כי הערך הנקוב לא נפרע לעולם) ובהתבסס על נוסחת הערך הנוכחי של סדרה אינסופית:

$$D = \frac{r_B * B}{k_D} \rightarrow D = \frac{8\% * 2}{10\%} \rightarrow 1.6$$

מסקנה: שווי השוק של החוב הוא 1.6 מיליון ש"ח.

**ב. מהו שווי השוק של ההון העצמי?**

בURIComponent, יש שלוש דרכים להגעה לשווי השוק של ההון העצמי: (1) אם ידוע מחיר המניה (וכאן הוא לא) ומספר המניות, אפשר לכפול – שווי מניה כפול מספר המניות. (2) אם ידועים התזוזים לבעלי המניות (דיבידנדים) ונitin להוונם – הערך הנוכחי שליהם הוא שווי ההון. (3) אם ידוע השווי הכללי של החברה V – בהיבט השווי הכללי של החוב D וההון העצמי S ביחיד, ידוע שווי החוב – ניתן לחלץ את שווי ההון העצמי כלומר את S.

$$V = S + D \rightarrow 6 = S + 1.6 \rightarrow S = 4.4$$

**ג. מהו שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות?**

אם (ראו סעיף ב, דרך 2) ידוע שהערך הנוכחי של התזוזים לבעלי המניות מהוונם בתשואה הנדרשת על ידם כדי להגעה לשווי ההון העצמי, הרי שמתתקיים, בהנחה שהרווח הנקי צפוי להיות מחולק כדיבידנד, שהיחס בין הרוח הנקי NI לבין מחיר ההון  $k_S$  הוא שווי ההון. הרוח הנקי הוא למשה הרוחה התפעולי (המסומן גם כ- $NOI$  Net Operating Income) בኒכוי עלויות מימון ובኒכוי מס:

$$S = \frac{NI}{k_S} \rightarrow S = \frac{(NOI - k_D * D) * (1 - t)}{k_S} \rightarrow 4.4 = \frac{(1.2 - 8\% * 2) * (1 - 20\%)}{k_S}$$

כך שקיבנו את שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות:

$$k_S \approx 18.91\%$$

ביאור לגבי NOI:

הכנסות תעשיוליות נטוות ב מיליון: 3

הוצאות שכר ד"ר צבן: -1

הוצאות חומר גלם: -0.8

סה"כ רווח תעשיולי: 1.2

**ד. מה היה מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?** ככלל, ככל שבחברה יש מנוון פיננסי גבוה יותר (בעברית: היא ממומנת בחוב בהיקפים גבוהים יותר) היא מסוכנת יותר (סיכון הקשור להשתנות הרוחה בעקבות עלויות המימון הכבדות בחברה). סיכון זה גורם לכך שככל שבחברה יש יותר חוב בעלי המניות דורשים תשואה גבוהה יותר על השקעתם:  $k_S$ .

קיימת משווהה שיוודעת לקשור בין מחיר ההון העצמי (תשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות) בחברה עם חוב, לבין שיעור התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה שהיא זהה עסקית אך נטולת מנוף פיננסי (קרי צו שmmoונת בהון עצמי בלבד).

הקשר הזה מותבטא במשווהה שנקראת "המשפט השני של מודיליאני ומילר" – M&M :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כאשר :

התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה ממונפת – צו שmmoונת גם בהון עצמי וגם בחוב.	$k_S^L$
התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה מקבילה אך לא ממונפת – צו שmmoונת בהון עצמי בלבד.	$k_S^U$
שיעור התשואה הנדרש על ההון הזר (ריבית השוק, שיעור תשואה לפדיון, שיעור תשואה על אג"ח דומות)	$k_D$
שיעור המס (אם אין – מציבים 0)	$t$
היחס בין שווי החוב לשווי ההון העצמי	$\frac{D}{S}$

אנחנו מצאנו כי בחברה הספציפית הנדונה, שבה יש חוב, מחיר ההון הוא :

$$k_S \approx 18.91\%$$

זהו כמובן  $k_S^L$  כי מדובר בחברה שבה יש מנוף פיננסי (יש אג"ח).

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

$$18.91\% = k_S^U + (k_S^U - 10\%) * (1 - 0) * \frac{1.6}{4.4}$$

בהעברת אגפים וחילוץ מתකבל :

$$k_S^U \approx 16.53\%$$

ה. מה היה שווי החברה הכוללת בחברה מקבילה, לא ממונפת, במידה והיתה פועלת ללא מס? **[בוצע תיקון אחריו ההפסקה]**

אם החברה פועלת ללא מס, רוחוי החברה עצם משתנים (אינם כפופים למס). לכן מעבר למשפט מודיליאני ומילר علينا לחשב ערך נוכחי לזרומים ללא מס כדי להגיע לשווי החברה :

$$S^U(t = 0) = \frac{NOI}{k_S^U} \rightarrow S^U = \frac{1.2}{16.53\%} = 7.259$$

והואיל וזה רכיב השווי היחיד בחברה, זה גם השווי הכולל של החברה הלא ממונפת בעולם ללא מס :

$$V^U = S^U = 7.259$$

כלומר: אם עוברים מעולם עם מס לעולם בלי מס לא ניתן להשתמש במודל מודיליאני ומילר כדי להציג את הקשר בין החברות. צריך לחשב מחדש. אחרי שהחישוב מחדש, אפשר לעבור בין מינוף והיעדרו בעולם בלי מסים.

ו. מה הייתה שווי החברה הכלול בחברה מקבילה, בעלת מבנה הון זהה, במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס?

$$V^L = V^U = 7.259$$

שווי החברה במידה והיתה פועלת בעולם ללא מס היה 7.259 מ' ש"ח (זהה לשווי חברה לא ממונפת בעולם ללא מס, לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר).

#### מסקנה מרכזית:

אם החברות זהות בכל מובן, לרבות זה שהן פועלות באותו תנאי מס, אז:

$$V^U = V^L + t * D$$

אבל אם משנים עוד דברים – כגון מסים, הכנסות, הוצאות... אי אפשר להשתמש במשפט זה בלבד, נצטרך לחשב מחדש את שווי החברה בפרמטרים המעודכנים, ורק אז אפשר להפעיל את הנוסחה זו שוב כדי לבצע מערכיים.

### שאלה 11.0 – שווי מניה ומהירות ההון של החברה

חברת "שאראס נקייקס" בע"מ היא חברת ציבורית בעלת מדיניות דיבידנד ידועה. אמש חילקה החברה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה והיא מתכוננת להמשך ולחקל דיבידנד כל 5 שנים, כאשר שיעור הצמיחה השנתי בדיבידנד הוא 5%. התשואה הנדרשת על ידי המשקיעים בחברות דומות היא 10% לשנה.

- מהו שווי המניה?
- מהו שווי המניה בהנחה שתוחזק במשך 10 שנים בלבד?
- בנהנה שבחברה 100 אלף מניות בנות 20 ש"ח ערך נקוב וכן 2 מיליון ע"נ אג"ח בערך נקוב של 10 ש"ח ליחידת אג"ח הנושאות ריבית בשיעור 5% לשנה ומועד פרעון בעוד 7 שנים, ובהתנחת שהריבית במשק היא 8% והחברה לא חייבת במס.
- כמה ייחידות אג"ח הנפיקה החברה?
- מהו שווי ההון העצמי?
- מהו תשלום הריבית ליחידת אג"ח?
- מהו שווי ייחידת אג"ח אחת?
- מהו שווי החוב?
- מהו שווי החברה?
- חשבו את מחיר ההון הכלול של החברה.
- בכמה יקטן מחיר ההון של החברה בגין הטלת מס? הציגו משווה מתאימה.

**פתרונות:**

#### א. מהו שווי המניה?

$$P_s = \frac{Div}{k_s - g} \rightarrow P_s = \frac{12.762816}{61.051\% - 27.6281562\%} \approx 38.186$$

כאשר :

הDİVIDEND העתידי הקרוב ביותר, שאחריו הצמיחה קבועה.	<i>Div</i>
$g(annual) = 5\% \rightarrow g(5years) = (1 + 5\%)^5 - 1 = 27.6281562\%$ ידוע שהDİVIDEND אמש היה : 10 ש"ח. לכן, הדיבידנד הבא בעוד 5 שנים : $Div_5 = 10 * (1 + 27.6281562\%) \approx 12.762816$	
שיעור הצמיחה לתקופת תשלום : 27.6281562%	<i>g</i>
שיעור התשואה הנדרשת לתקופת תשלום 5 שנים : $k_s(annual) = 10\% \rightarrow k_s(5years) = (1 + 10\%)^5 - 1 = 61.051\%$	<i>k<sub>s</sub></i>

#### ב. מהו שווי המניה בהנחה שתוחזק במשך 10 שנים בלבד?

שווי המניה איננו תלוי בתקופת החזקתה. מעבר ליכולת להוכיח זאת מתמטית (שלא נבע) חשוב לרגע על עצםכם קונים מניה של App A בבורסה. האם בשלב כלשהו של הקניה עולה מסך כגון "כמה זמן תרצה להחזיק במניה?" מה פתאום.

האם כאשרת קונה דירה הבעלים ידרשו ממך מחיר שנשען על פרק הזמן שבו אתה מ暢ה להחזיק בדירה? מה פתאום.

ברמה הטכנית, מועד המכירה רק יגרום לכך שתקבל חלק מהתזרימיים יותר מוקדים ובסכום יותר נמוך (במועד המכירה) אבל סך הערך הנוכחי לא משתנה. כאמור, לא נוכיח.

**בקיצור:** גם שואלים על שווי מניה באופן כללי וגם אם שואלים על שווי מניה בהנחה שתוחזק  $\alpha$  שנים, אופן חישוב השווי זהה וمبוצע לפי המודל הנלמד. יהיה:  $38.186 \text{ ש"ח}$ .

נתון: בהנחה שבחברה 100 אלף מנויות בנות 20 ש"ח ערך נקוב וכן 2 מיליון ע"ג אג"ח בערך נקוב של 10 ש"ח ליחידת אג"ח הנושאות ריבית בשיעור 5% לשנה ומועד פרעוןן בעוד 7 שנים, ובהינתן שהריבית במשק היא 8% והחברה לא חייבת במס.

**ג.1 כמה יח' אג"ח הנפקה החברה?**

$$N_B = \frac{2,000,000}{10} = 200,000$$

**ג.2 מהו שווי ההון העצמי?**

נכפול את מספר המניות (ללא תלות בערך הנקוב) בשווי המניה שחווש בסעיפים א, ב:

$$S = N_S * P_S \rightarrow S = 100,000 * 38.186 \rightarrow S = 3,818,600$$

**ג.3 מהו תשלום הריבית השנתית ליחידת אג"ח?**

מכפלת הערך הנקוב בריבית הנקובה:

$$r_B * B = 5\% * 10 = 0.5$$

**ג.4 מהו שווי ייחידת אג"ח אחת?**

נחשב ערך נוכחי לתזרימי האג"ח (יחידה בודדת) אשר נפרעת עוד 7 שנים. נקבל:

$$P_B = 0.5 * PVFA(8\%, 7) + 10 * (1 + 8\%)^{-7} \approx 8.4381$$

**ג.5 שווי החוב הכללי**

מכפלת מספר ייחידות האג"ח בשווי ייחידת אג"ח:

$$D = N_B * P_B \rightarrow D = 200,000 * 8.4381 = 1,687,620$$

**ג.6 שווי החברה הכלול**

חיבור שווי החוב עם שווי ההון:

$$V = S + D \rightarrow V = 3,818,600 + 1,687,620 = 5,506,220$$

#### ד. חשבו את מחיר ההון הכללי של החברה

מחיר ההון הכללי של החברה לא מייצג חס וחלילה את שווייה או את ערכה הכספי; המונח מחיר הון ב咪ון תמיד משקף תשואה נדרשת באחזois. העובדה שמדובר במחיר ההון הכללי משמעה שמדובר באחזוי תשואה משוקללים נדרשים, שחררי – ספקי ההון העצמי דורשים תשואה מסוימת באחזois, ספקי ההון הזר (המלווים, המשקיעים באג"ח) דורשים תשואה אחרת באחזois, ומחייב ההון הכללי משקל בין ערכיהם אלו (ממצעם אותם בהתאם למשקל היחסי של כל אחד מהם בתמיהיל מקורות המימון בחברה).

$$WACC = k_s * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

$$WACC = 10\% * \frac{3,818,600}{5,506,220} + 8\% * (1 - 0) * \frac{1,687,620}{5,506,220} \approx 9.387\%$$

막רא לנוסחה :

מחיר ההון הממוצע המשוקל WACC = Weighted Average Cost of Capital	$WACC$
עתים מסומן כ- $k^*$	
מחיר ההון העצמי – התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות באחזois	$k_s$
היחס בין שווי ההון העצמי לשווי החברה	$\frac{S}{V}$
מחיר ההון הזר – שיעור התשואה לפדיון / התשואה הנדרשת על ידי מושקיעי האג"ח / ריבית השוק על אג"ח	$k_D$
שיעור המס (cano – אפס)	$t$
היחס בין שווי החוב לשווי החברה	$\frac{D}{V}$

ה. בכמה יקטן מחיר ההון של החברה בגין הטלת מס? הציגו משווה מתאימה.

$$WACC = 10\% * \frac{3,818,600}{5,506,220} + 8\% * (1 - t) * \frac{1,687,620}{5,506,220} \approx 9.387\%$$

בפישוט בסיסי מקבלים :

$$WACC = 6.9351\% + 2.451947\% * (1 - t)$$

או :

$$WACC = 6.9351\% + 2.451947\% - t * 2.451947\%$$

או (תשובה סופית) :

$$WACC = 9.387\% - 2.451947\% * t$$

**שאלה 10.2 – יישום ספציפי של המשפט השני של מודיליאני ומילר**

ידוע ששווי חברה ממומנת בהון עצמי בלבד שהכנסתה התפעולית נטו היא 350 אלף ש"ח לשנה הנו 2,187.5 אלף ש"ח.

נדרש :

- א. חשבו את מחיר ההון העצמי של החברה.
- ב. מהו שיעור התשואה שנדרש על ידי בעלי המניות של חברה זהה ברמה התפעולית ובסדר הגודל אם הריבית בגין האג"ח היא 7% לשנה והחברה ממומנת בחוב בשיעור 30%? הניחו עולם ללא מס.

פתרונות :

**פתרון סעיף א – חילוץ מחיר ההון העצמי של החברה, בהינתן הכנסתה התפעולית ושווייה**

כאשר חברה ממומנת בהון העצמי בלבד, מתקיים :

$$S = \frac{NOI * (1 - t)}{k_S} \rightarrow 2,187.5 = \frac{350 * (1 - 0)}{k_S} \rightarrow k_S = 16\%$$

**פתרון סעיף ב – המירה של מחיר ההון העצמי ללא מנוף למחיר הון עצמי בחברה עם מנוף**

לפי המשפט ה-2 של מודיליאני ומילר, ניתן לחשב את מחיר הון העצמי בחברה ממונפת כפונקציה של מחיר הון העצמי בחברה מקבילה לא ממונפת והיחס בין החוב להון העצמי :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

בהתבה נקבל :

$$k_S^L = 16\% + (16\% - 7\%) * (1 - 0) * \frac{0.3\cancel{\text{ף}}}{0.7\cancel{\text{ף}}} = 19.8571428\%$$

למעשה, כאשר מספרים שהחברה ממונת בחוב בשיעור 30%, המשמעות היא שהחוב D הוא 30% מסך שוויי החברה כלומר 30% מ-V. המשמעות העולה מכך, בהכרח, היא ששווי הון העצמי S הוא 70% מה-V. היחס בין שוויי החוב לשוויי ההון יוצר אם כך את ביטויו המצתטצם לעיל שMOVIL לתוצאה מספרית.

#### שאלה 11.4 – מחיר ההון

בחברה ידוע כי הערך הנוכחי של האג"ח הוא 200,000 ש"ח ביחידות של 100 ש"ח ליחידת אג"ח, והערך הנוכחי

של המניות שנן בנות 1 ש"ח ערך נקוב כל אחת הוא 500,000 ש"ח.

הרווח התפעולי של החברה הוא 150,000 ש"ח לשנה.

החברה כפופה למס חברות בשיעור 20%.

אגרות החוב של החברה הן אג"ח נצחות (קונסול / צמיות) שהריבית השנתית בגין 5%. כמו כן ידוע כי מחיר ייח' האג"ח בשוק הוא 85 ש"ח.

מחיר המניה בשוק הוא 2 ש"ח, והחברה מחלקת בסוף כל שנה את כל רווחיה כדיבידנד.

נדרש:

א. מהו שיעור התשואה על ההון הזר לאחר מס?

ב. מהי עלות (=מחיר) ההון העצמי?

ג. מהו שווי החוב?

ד. מהו שווי ההון העצמי?

ה. מהו ערך החברה הכלול?

ו. מהו מחיר ההון המומוצע המשוקל?

פתרון:

א. מהו שיעור התשואה על ההון הזר לאחר מס?

באופן כללי, שיעור התשואה על ההון הזר הוא הגודל  $k_D$  שמייצג את הריבית להיוון ואת התשואה הנדרשת על ידי מושקיי אג"ח.

אם רוצים את שיעור התשואה על ההון הזר לאחר מס, כל מה שרוצים בעצם זה:

$$k_D^* = k_D * (1 - t)$$

לכן נתחל מחלוקת  $k_D$  על פי נתוני האג"ח ומשם נמשיך.

ערך נקוב – 100 ש"ח ליח' אג"ח –  $B$ .

ריבית נקובה על האג"ח 5% –  $r_B$ .

מחיר האג"ח בשוק:  $P_B$  – 85

הוイル והאג"ח לצמיות, ניתןحلץ על בסיס מחירה את הריבית להיוון / התשואה הנדרשת על האג"ח / מחיר

ההון הזר:

$$P_B = \frac{r_B * B}{k_D} \rightarrow 85 = \frac{5\% * 100}{k_D} \rightarrow k_D \approx 5.88235\%$$

אבל הוイル ורוצים את מחיר ההון הזר אחורי מס (נתון ששיעור המס 20%):

$$k_D^* = k_D * (1 - t) \rightarrow k_D^* = 5.88235\% * (1 - 20\%) \approx 4.7059\%$$

**ב. מהו מחיר ההון העצמי?**

את התשואה על ההון העצמי ניתן לחשב על בסיס נתוני מניה בודדת או על בסיס נתוני ההון העצמי כולם. אנחנו נתחל בчисוב נתונים על מניה בודדת שבהם הרגלנו.

הרווח למניה בודדת שנקרא גם EPS ראשי תיבות של Earning Per Share מחושב כך :

$$EPS = \frac{NI}{N_S} \rightarrow EPS = \frac{(NOI - k_D * D) * (1 - t)}{N_S}$$

(\*) במקומות  $k_D * D$  בהנחה שהאג"ח לצמיהות תמיד ניתן לרשום  $r_B * B$  (קרי את סכום הקופון).

ב换כבות הנתונים במקורה שלנו – הרוח למניה בש"ח הוא :

$$EPS = \frac{(150,000 - 5\% * 500,000) * (1 - 20\%)}{500,000} = 0.2$$

הואיל ומחריר המניה המתוקן הוא 2 שי"ח (התשואה הנדרשת מצד מושקיעים היא בהתאם להשקעות – מחיר המניה). בנוסף, ההנחה היא שכל הרוח למניה מוחולק כדיבידנד :

$$P_S = \frac{Div}{k_S} \rightarrow 2 = \frac{0.2}{k_S} \rightarrow k_S = 10\%$$

**ג. מהו שווי החוב?**

ערך נקוב מצרפי של האג"ח :

ערך נקוב ליחידת אג"ח :

מספר יחידות האג"ח :

שווי יח' אג"ח :

שווי החוב כולו :

200,000

100

2,000

85

$D = 85 * 2,000 = 170,000$

**ד. שווי ההון העצמי:**

מספר המניות :

2

$S = 500,000 * 2 = 1,000,000$

מחיר מניה בש"ח :

שווי ההון העצמי :

שווי החברה הכלול :

**ה. שווי החברה הכלול:**

$$V = S + D \rightarrow V = 1,000,000 + 170,000 \rightarrow V = 1,170,000$$

**ו. מהו מחיר ההון הממוצע המשוקל?**

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

$$WACC = 10\% * \frac{1,000,000}{1,170,000} + 5.88235\% * (1 - 0.2) * \frac{170,000}{1,170,000} \approx 9.231\%$$

**שאלה 11.1 – הרעיון הכללי מתחזק מהירות ההון המשוקלל / תשואה משוקללת**  
 לחברת "הנקניק הלאומי" אגרות חוב שערכן הנקוב 200,000 ש"ח ו-400,000 מנויות.  
 האג"ח היא צמיתה (לאינסוף) והריבית הנקובה עלייה 6% לשנה.  
 מחיר האג"ח מיד לאחר תשלום הריבית השנתית הוא 80% מערכה הנקוב.  
 מחיר המניה בשוק הוא 2 ש"ח.  
 החברה מחלקת את כל רווחיה כדיבידנד בمزומנים.  
 שיעור המס החל על החברה הוא 25%.  
 הרווח התפעולי של החברה השנה היה 300,000 ש"ח.

נדרש :

- חשבו את שווי ההון העצמי של החברה.
- חשבו את שווי החוב של החברה.
- חשבו את השווי הכלול של החברה והסבירו את משמעותו.
- חשבו את מחיר ההון המשוקלל של החברה.

פתרונות :

#### **סעיף א – שווי ההון העצמי**

שווי ההון העצמי בחברה הוא השווי הכלול של מנויותה. שווי זה הוא הערך הנוכחי של התזוריים המצורפים לצפויים לנbowע לידיהם של בעלי המניות – תזרימי הדיבידנד.  
 בשאלה נתנו – שהדיבידנדים זהים לרוח (הכוונה היא לרוח הנקי אלא אם נאמר אחרת). לכן, אם נוכל לחשב את הרווח הנקוי, נוכל להoonו אותו (PV) וכן נקבל את השווי הכלול של ההון העצמי.  
 אלא שכן – האמת היא שאין בכך צורך, כי מסלול חליפי ומהיר יותר במקרים רבים – יהיה מכפלת מחיר המניה במספר המניות :

$$S = N_S * P_S \rightarrow S = 400,000 * 2 = 800,000$$

#### **סעיף ב – חשבו את שווי החוב**

גם כאן אין צורך בהיוונים מיוחדים. ידוע הערך הנקוב של האג"ח וידוע שמחירו הוא 80% מערכה הנקוב :

$$D = 200,000 * 80\% = 160,000$$

#### **סעיף ג – שווי החברה**

כשאנו דנים בICH' 10-11 בשווי החברה, אנו דנים בשווי שמספקת החברה לכל אוכלוסיות המשקיעים בה – בשפה פשוטה, אנו סוכמים גם את שווי ההון העצמי (שווי החברה לבנייה המניות) וגם את שווי ההון הזר (החוב).

$$V = S + D = 800,000 + 160,000 = 960,000$$

#### סעיף 2 – חשבו את מחיר ההון המשוקלל של החברה (WACC)

נוסחה 1 :

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

נוסחה 2 :

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

לדעתי, במקרה זה, נוסחה 2 תוביל אותנו למקום הנכון מהר יותר.

$$WACC = \frac{300,000 * (1 - 25\%)}{960,000} = 0.234375 = 23.4375\%$$

וסיימנו, איזה כיף.

**שאלה 10.1 – משחק בין משוואות – שווי החברה, דרגת המינוף והקשר בין חברות**  
חברת "הנקניק" (N) וחברת "הקבב" (K) הן שתי חברות הפעולות באותו ענף, וחויפות לsiccon תפעולי זהה.

להלן נתונים חברת הנקניק :

הרווח הכספי הצפוי בחברה N מותפלג כדלקמן :

200,000 ש"ח בהסתברות 60%.

350,000 ש"ח בהסתברות 40%.

בחברה 100,000 מנויות שערך השוק שלן הוא 60% מהשווי הכללי של החברה, וכן אגרות חוב צמיות (קונסול).  
מחיר ההון הכללי (המוצע המשוקל) של החברה הוא 20%.

הרווח הכספי הצפוי בחברת K הוא רבע מהרווח הצפוי בחברה N בכל מצב טבעי.  
בחברה 80,000 מנויות ואגרות חוב צמיות שערכן הנקוב 50,000 ש"ח והן נושאות ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה. מחיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח.

נתונים משותפים :

שיעור התשואה על אג"ח כל החברות בשוק זהה.

שיעור מס החברות הוא 25%.

נדרש :

- א. מהי תוחלת ה-ROI בכל אחת מהחברות?
- ב. מהו השווי הכללי של חברת N?
- ג. מהו שווי המניות בחברה N? מהו שווי החוב בחברה N?
- ד. הניחו שתאגיד N שינה את מבנה ההון שלו והיא ממומנת בהון עצמי בלבד. מה יהיה שווייה?
- ה. בהמשך לסעיף ד, חשבו את מחיר ההון העצמי בחברה N.
- ו. חשבו את השווי הכללי של חברת K בהנחה שלא הייתה ממונפת.
- ז. חשבו את השווי הכללי של חברת K בהינתן דרגת המינוף שלה.
- ח. חלצו את מחיר ההון המשוקל של חברת K.
- ט. חשבו את מחיר המניה של כל אחת מהחברות.
- י. הצמדו נתונים הבסיס. הניחו כי אתם מחזקים ב-4% מהו שווי המניות של חברת N שמחירה בשוק גבוה ב-10% מזה שמצוותם בסעיף קודם (מניה K מתומחת בשווי הוגן). הראו כיצד ניתן ליצור רווחי ארביטראז'.

פתרון :

**פתרון סעיף א – תוחלת הרווח הכספי בכל חברת :**

חברה N :  
חברה K (רבע מהרווחים) :

50,000 ש"ח בהסתברות 60%	200,000 ש"ח בהסתברות 60%
87,500 ש"ח בהסתברות 40%	350,000 ש"ח בהסתברות 40%

$$E(NOI_N) = 200,000 * 60\% + 350,000 * 40\% = 260,000$$

$$E(NOI_K) = 50,000 * 60\% + 87,500 * 40\% = 65,000$$

#### פתרונות סעיף ב - מהו השווי הכללי של חברת N?

מחיר ההון הכללי (הממוצע המשוקל - WACC) של חברת N הוא 18%. בנוסף ידוע שהיעור מס החברות 25%. כshednim בשווי הכללי של החברה, רוצים לדעת את שווייה מנקודות ראות כל אוכלוסיות השקיעים בה. זה בעצם ביטוי הפוך לנוסחת מחיר ההון המוצע המשוקל:

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

מכך נגזר:

$$V = \frac{NOI * (1 - t)}{WACC} \rightarrow \frac{260,000 * (1 - 25\%)}{20\%} = 975,000$$

#### פתרונות סעיף ג - מהו שווי המניות בחברה N? מהו שווי החוב בחברה N?

נתון: בחברה 100,000 מניות שערך השוק שלן הוא 60% מהשווי הכללי של החברה, וכן אגרות חוב צמיות (קונסול).

$$S = 60\% * V \rightarrow S = 60\% * 975,000 = 585,000$$

$$D = V - S \rightarrow D = 975,000 - 585,000 = 390,000$$

#### פתרונות סעיף ד - הניחו בעת כי חברת N שינתה את מבנה ההון שלה והיא ממומנת בהון עצמי בלבד. מה יהיה שווייה?

[מינוי רצוי – המשפט ה-1 של M&M יודיע בצוරהיפה בין שווי חברה ממונפת לבין שווי חברה לא ממונפת. אבל מה עושים כשרוצים לחייב חברה ממונפת אחת לשווי חברה ממונפת אחרת? את זה המשפט לא יודיע בפועל בצוරה ישירה. לכן, פועלים בתהיליך חילוץ. משתמשים בשווי הכללי של החברה ממונפת ידועה, מגיעים דרכו לשווי של חברה לא ממונפת – למרות שהיא היפוטטית, וזו אפשר להשתמש בכך כבסיס לשווי החברה ממונפת השנייה על בסיס נתונים המnof שלה]

בסעיף ב מצאנו כי:

$$V^L(N) = 975,000$$

לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר, הרו שמותקינים:

$$V^L(N) = V^U + t * D \rightarrow 975,000 = V^U + 25\% * 390,000 \rightarrow V^U = 877,500$$

#### פתרונות סעיף ה - בהמשך לסעיף ד, חשבו את מחיר ההון העצמי בחברה N.

"בהמשך לסעיף ד" – להמשיך עם ההנחה לפיה חברת N לא ממונפת.

$$V^U(N) = \frac{NOI * (1 - t)}{k_S^U}$$

מה זה הנוסחה זו? אנו ראיינו שבאופן כללי, שווי חברה כולל מתקבל על ידי היון התזורים התפעולי בניכוי מס במדד הערך הכספי WACC. אם בחברה אין מנוּף פיננסי, ה-WACC בעצם זהה למדד הערך העצמי (בחברה הלא ממונפת כאמור) שנחוג לסטנו  $k_S^U$ .

נזכיר:

$$877,500 = \frac{260,000 * (1 - 25\%)}{k_S^U} \rightarrow k_S^U = 0.222222222 \approx 22.22\%$$

#### פתרון סעיף 1 - חשבו את השווי הכללי של חברה K בהנחה שלא הייתה ממונפת

חברה K היא חברה בעלת סיכון תעופולי זהה לחברה N שנדונה בסעיפים קודמים, אך נבדلت ממנה ברמת הסיכון הכספי / דרגת המנוּף. ספציפית בסעיף זה – נטרלו פער זה, וביקשו לחשב את שווייה בהנחה שמדוברת במדד הערך העצמי בלבד.

$$V^U(K) = \frac{65,000 * (1 - 25\%)}{22.22222222\%} = 219,375$$

מה קרה פה? השתמשנו במונה בתוחלת הרווח התפעולי בחברה K ובשיעור המס הכללי במשק, במכנה כללו את מדיר הערך העצמי של חברה לא ממונפת, אשר תמיד יהיה זהה בין חברות אם הן חשופות לאותו סיכון תעופולי.

בעלי המניות דורשים תשואה על השקעתם אם אין מנוּף פיננסי (אם אין התחריביות) רק בגין הסיכון התפעולי. וכך, אם הסיכון התפעולי זהה כנתון, הם ידרשו תשואה זהה. אך מדיר הערך העצמי בהנחה אי מנוּף בשתי חברות – זהה.

#### פתרון סעיף 2 - חשבו את השווי הכללי של חברה K בהינתן דרגת המנוּף שלה

בשאלה נתון: מדיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח. לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר, מתקיים כי:

$$V^L = V^U + t * D$$

$$V^L(K) = 219,375 + 25\% * 45,000 = 230,625$$

#### פתרון סעיף 3 - חלצו את מדיר הערך המשוקל של חברה K

$$WACC(K) = \frac{NOI * (1 - t)}{V} \rightarrow WACC(K) = \frac{65,000 * (1 - 25\%)}{230,625} \rightarrow WACC(K) = 21.138\%$$

**פתרונות סעיף ט - חשבו את מחיר המניה של כל אחת מהחברות**

$$S(N) = 585,000$$

$$N_S(N) = 100,000$$

$$S(K) = V^L(K) - D \rightarrow S(K) = 230,625 - 45,000 \rightarrow S(K) = 185,625$$

$$N_S(K) = 80,000$$

מחיר המניה של כל חברת יחולש לפי היחס בין השווי הכללי של ההון העצמי בה (שהוא השווי של מנויותיה) מחלוקת במספר המניות :

$$P_S(N) = \frac{S(N)}{N_S(N)} = \frac{585,000}{100,000} = 5.85$$

$$P_S(K) = \frac{S(K)}{N_S(K)} = \frac{185,625}{80,000} = 2.3203125$$

**פתרונות סעיף י - הגדדו נתונים הבסיס. הניחו כי אטם מחזיקים ב-4% מהן המניות של חברת N שמחירה בשוק גבוהה ב-10% מזה שמצוות בסעיף קודם (מניה K מתומחרת בשווי הוגן). הראו כיצד ניתן ליצור רווחי ארביטראז'.**

שינוי בתזרים העתידי	תזרים בהווה	
$-\left(\frac{1}{9} * 390,000\right) * (1 - 25%) * 4\%$	$585,000 * (1 + 10%) * 4\% = 25,740$	מחיר של הנכס המתומחר ביטר (N)
$+\left(\frac{1}{9} * 45,000\right) * (1 - 25%) * 16\%$	$-185,625 * 4\% * 4 = -29,700$	קונה את הנכס המקורי (K) שמתומחר בשווי הוגן
-700	$+ \frac{700}{\frac{1}{9}} = +6,300$	הלוואה
0	2,340 זה, ורך זה – רווח הארביטראז'	סך הכל

בחברה K ידוע :

ואגרות חוב צמיהות שערכו נקוב 50,000 ש"ח והן נשאות ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה. מחיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח.

הואיל וזו אג"ח צמיהה (לנצח), מתקיים שווייה (מחיר) הוא הערך הנוכחי של תזרימי הריבית הנקובה האינסופיים :

$$D = \frac{r_B * B}{k_D} \rightarrow 45,000 = \frac{50,000 * 10\%}{k_D} \rightarrow k_D = \frac{1}{9}$$

כברהה, אפשר להגיע לרוח הארביטראז' גם כך (התמוך ביתר) אבל זה לא מחליף בשום צורה ואופן את החישוב הישיר:

$$585,000 * 10\% * 4\%$$

**שאלה 10.3 – המשפט השני של מודיליאני ומילר, יישום נוסף**

בחברה קיימים מחיר הון משוקל בשיעור 25% לאחר מס. החברה ממומנת ב-55% חוב ו-45% הון עצמי, וכפופה למס בשיעור 30%. החוב נושא ריבית בשיעור 5%.

נדרש :

- מ疼 מחיר הון העצמי של החברה?
- מה היה מחיר הון העצמי בחברה, במידה והיא הייתה נטולת מנו?

פתרון :

**פתרון סעיף א – מהו מחיר הון העצמי של החברה?**

מחיר הון משוקל, הנ吐ן בשאלה, הוא בעל ההגדרה הבאה :

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

כאשר מספרים לנו שהחברה ממומנת ב-55% חוב וב-45% הון עצמי, למעשה מבשרים לנו ש :

$$\frac{D}{V} = 0.55 \quad \text{and} \quad \frac{S}{V} = 0.45$$

נציב נתון זה יחד עם יתר הנתונים הבולטים בשאלה במשוואת ה-WACC :

$$25\% = k_S * 0.45 + 5\% * (1 - 30\%) * 0.55 \rightarrow k_S = 51.27777\%$$

**פתרון סעיף ב – מה היה מחיר הון העצמי בחברה, במידה והיא הייתה נטולת מנו?**

מעבר ממחיר הון העצמי בחברה עם מנוף למחיר הון העצמי בחברה נטולת מנוף ולהפך – נשען על המשפט ה-2 של מודיליאני ומילר :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

$$51.27777\% = k_S^U + (k_S^U - 5\%) * (1 - 30\%) * \frac{0.55}{0.45} \rightarrow k_S^U = 29.33\%$$

**דיוןים נוספים והבהרות - שווי החברה, מחיר ההון, סיכוןים ומודל מודיליאני ומילר**

א. מה ניתן לומר על השינוי בסיכון לבעלי המניות כאשר חברת פיננסית (גדול / קטן / לא משתנה)?

התשובה: הסיכון תמיד גדול כתוצאה מנטילת חוב, שבעקבותיו – רויבץ על החברה נטול תשלום עלויות מימון ללא תלות בהצלחתה העסקית.

ב. כיצד תגדירו את הסיכון הנובע ממינוף פיננסי / סיכון פיננסי בעולם שאין בו אפשרות רגל (הנחה היסודית של מודל מודיליאני ומילר)?

אם חברה לעולם לא יכולה להתפרק ולהפוך לחדלות פרעון, אזי הסיכון הנובע ממינוף הוא אך ורק העלייה בשונות של הרווח לבעליים כתוצאה מנטילת התחייבויות.

ג. כיצד תגדירו את הסיכון הנובע ממינוף פיננסי / סיכון פיננסי בעולם שיש בו אפשרות אפשרות רגל (מודל מעשי, שתקף כל אימת שלא צריך להשתמש / לא מציינים בשאלת התיאורטית את מודיליאני ומילר)?

זה נכון שבדרכ כל אנו בוחנים סיכון במונחי שונות / סטיית תקן; אבל אם עוברים לעולם עם סיכון אפשרות רגל, אנחנו למשה מושגים למטריית הסיכון את הסיכון אפשרות רגל שסבירותו נדלה ככל שהמיןוף הפיננסי גדול.

ד. לפי משפט מודיליאני ומילר, עליה בדרגת המינוף הפיננסי משמעה עלייה בשיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות, וזאת – גם בעולם עם מסים וגם בעולם ללא מסים

התשובה נכונה; בrama הטכנית – אפשר ממש להציג את נוסחת המשפט השני של מודיליאני ומילר:

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כאשר חלה עלייה במינוף הפיננסי, ככלmore ביחס בין  $S/D$ , שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות גדול, אבל מעבר לזה – באופן אינואיטיבי – גם בעולם ללא סיכון אפשרות רגל (ראו סעיף ב) השונות של הרווח לבעליים נדלה כתוצאה ממינוף ובהתאם הם ידרשו תשואה גבוהה יותר.

ה. לפי מודיליאני ומילר, ככל שנקטינו את  $k_S^U$  ונקרב אותו יותר ל- $k_D$ , אז השפעת המינוף על העלייה בתשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות תהיה חלשה יותר.

כoon. מודיע?

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

ככל שההפרש המסווג באדום קטן יותר, כאשר כל השאר קבוע – כך פרמיית הסיכון הנובעת ממינוף תהיה קטנה יותר.

ו. לפי מודיליאני ומילר, אם חברת נוטלת על עצמה מינוף פיננסי גבוה יותר (ممמן את עצמה בשיעור גבוה יותר של חוב), הדבר לא ישפיע על שיעור הריבית על החוב.

זכרו: מודיליאני ומילר פועלים בעולם שבו אין סיכון פשיטת רגל/חזרות פירעון. בהינתן הנחה זו, עליה במינוף הכספי איננה מגדילה את הסיכון לכשל פירעון (שהרי הוא אפס תמיד) ובהתאם, התשואה שידרשו המלוויים תהיה זהה – ככלומר, שיעור הריבית על החוב קבוע ובלתי תלוי בדרגת המינוף. הטענה נכונה.

#### דיבונים נוספים והבהרות – משפט מודיליאני ומילר

על פי מודל מודיליאני ומילר, העולם פועל תחת ההנחה הבאות:

- א. אין סיכון פשיטת רגל.
- ב. מחיר ההון הזר  $k_D$  בחברה קבוע, לא משנה כמה הלוואות היא נוטلت / כמה אג"ח היא מנפיקה.
- ג. אין פרמיית סיכון על ההון הזר (כל השקעה באג"ח היא עצם קרובה מאד לרכיבת חסרת סיכון).

הנחהות הללו מובילות למספר ממצאים מעניינים:

א. כאשר חברת נוטلت מינוף ממשועוט יותר (מגדילה את רכיב החוב), הסיכון לבני המניות גדול, אך הסיכון לבני החוב לא משתנה. מדוע!

ו. הסיכון לבני חוב (המשמעותי באג"ח / מלוויים / נושאים) לא משתנה הואיל ואין סיכון פשיטת רגל, ככלומר אין סיכון חזרות פירעון. זו ממש הנחה של המודל שככל החברות תמיד ובהכרח יפרעו באופן מלא את חובן, קרן וריבית.

ו. יחד עם זאת, לגבי בני המניות: גם אם החברה לא מגיעה לסיכון פשיטת רגל, עדין – העבודה שישנן עלויות מימון כבודות עלולות לכרטיס ברוחחים. למשל: נניח חברת שלותה 100,000 ש"ח ברכיבת 10%, והשקעה אותן בפרויקט שמניב 8% תשואה בלבד. היא הפסידה מכ"כ 2,000 ש"ח! בני החוב לא יפסידו (כי אין להם סיכון). מי מממן את הפסד? בני המניות. בשפה גסה, בני המניות סובלים מתנדתיות גבוהה יותר פוטנציאלית ברוחיהם במידה והחברה ממונפת.

ב. הואיל והסיכון לבני המניות קשור בקשר חיובי למינוף – ככלומר: כשהמינוף (מימון בחוב) גדול, הסיכון לבני המניות גדול – התשואה שהם ידרשו בעקבות מינוף פיננסי או הגדלו גדלה בהתאם. ערך זה מותבטא מתמטית במשוואה שנקראת "המשפט השני של מודיליאני ומילר":

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

ג. ברמת מחיר ההון הממוצע המשוקל – WACC: בעולם ללא מס, ה-WACC לא משתנה בעקבות מינוף, והוא קטן בעולם עם מס בעקבות מינוף.

$$WACC = k_S \uparrow * \frac{S}{V} \downarrow + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V} \uparrow$$

לפי המודל (שלא נוכח) אם אין מסים, ההשפעות המנוגדות מתקזזות, ובכך הכל מחיר ההון הכללי (המומוצע המשוקל בחברה) לא משתנה בעקבות מינוף.

אם יש מסים, מחיר ההון דזוקא ירד, לאור מגן המס על עלויות המימון.

ד. שווי החברה יכולה המסומן באות  $V$  איינו משתנה בעולם ללא מס בעקבות מינוף או הגדלו; אך הוא גדול בעקבות מינוף או הגדלו בעולם עם מסים. נקודה זו מתבטאת במשפט שנקרא " המשפט השני של מודיליאני ומילר":

$$V^L = V^U + t * D$$

## מפגש 14 – חזרה לבחינה 10.2.2025

**מטרתנו העקרונית בפגשוניות יפה זו:**

- להתיחס בקטנה למיקוד לבחינה (משם בקטנה, רק בהיבט שאלות קהילתיות).
- لتת תדריך קצר פוטנציאלי למידה לבחינה.
- ובעיקר – לפתור תרגילים.

**מנהלות ומטלות:**

- מישוב המטלות האחרונות יבוצע בזריזות.
- מטלת ההשתתפות تعدכן לאחר מכון – איןכם נדרשים לבצע / לעשות דבר.

**תדריך מסויים לנושאי בחינה:**

- Diskliimer: אין דבר זהה לתדריך מלא או מיקוד בקורס (מעבר למה שציינה מרכזת ההוראה שرون שפרן).
- כלומר, בرمתי כסטודנט, הסתעפויות של הנושאים השונים לסוגיות משנה, ניסוחים ומרקבי קצה, מוביילים לכך שככל ניסיון להכללה רבתני של נושאים ובהתאם טכניקות פתרון (לפחות לפי הניסיון שלי) נדון לכישלון.
- בכל זאת, כדי ל以习近平 פרימיניג כללי למתחווה הקורס, שאולי ישיע לאחדים מכם, להלן "כיוון" עקרוני לנושאים עיקריים וסוגי הסתעפויות מובהקות.
- הערך עשוי להימצא למיקוד לא מחייב זה ("תדריך") לנושאי הקורס העיקריים הוא כדי לעשות קצר סדר בבלוג, ולפעמים – אחרי שפותרים שאלות רבות בנושא מסוים, אפשר לעבור שנית על התדריך ולראות שאכן הסוגיות ברורות, עושות שכל, מסודרות היטב בדף הנוסחאות או כל הפתרון האחרים שערכתם לעצמכם.
- התדריך גם עשוי לאפשר, ברמה מסוימת, לתכנן את הלמידה – לפי משקל הנושאים היחסי.

יחידה	הסתעפויות (לא ממצה)
1	<p>יחידה זו לא הוצאה במפגשי הנקה והיא עוסקת במטרת הפירמה. יש עליה דיון בחומרו האתר, יש ייחידה לימוד קצרה יחסית שאפשר לסקור ולקחת ממנה את הכותרות או ההדגשים העיקריים, ועשוייה להיות בנושא שאלה אחת (אם כן – <i>Christmas came early</i>).</p> <p>היחידה מדגישה בין היתר (אבל לא רק) את סוגיות מטרת הפירמה כהשאלה ערכה לבעליה (בעלי המניות). המסגרת המושגית לדין מותבשת על כך שהערך לבעלי המניות הוא בעצם הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שהפירמה מניבת בעלותה, ומתמקדת בהבדל שבין רווח (שאינו משקף ערך, כי הוא לא תזרימי, לא מבטיא זמן, לא מבטיא סיכון...) לבין ערך שהקורס כלו עסק בנסיבות בערך בכלים של ערך נוכחי. כמו כן, היחידה כוללת התייחסות מסוימת לתפקיד המנהל הפיננסי בפירמה.</p> <p>עוד טיפ קטן – אם, כאשר אני עובר על כל המבחנים לדוגמא (ואני עבר על כולם, לא מעוניין אותו), ומשתדל גם לפרט את כולם) אם אני מזזה שאלה העוסקת ביחידה זו – אני מפרק לה את הזרה מבחינת הבנה – כמובן, לא רק עונה לשאלה כפי שרלונטי, אלא מפרק את כל ההיגדים האחרים, מבן לפי היחידות מה שגוי בהיגדים האחרים (ואם לא, שואל) וכן הלאה.</p> <p>מדוע? כי דוקא ביחידה שלגבי מספר השאלות מצומצם, אני רוצה להיות ערוץ על בסיס המיצוי המשמעותי ביותר של החומר הקיים.</p>
5	<p><b>ברובד הבסיסי – חישובי FV ו- PV וחישובי ריבית:</b></p> <p>הרובד הבסיסי מתייחס לשאלות ש"די ברור" כיצד לגשת אליהן: ממש שואלים – מהו ערך העתידי, מהו הערך הנוכחי, מהו השווי היום, מה הסכום שייצטר ביחסו... ניסוחים שמקרבים אותנו במידה רבה לדיוקת הכלים הרלונטי לחישוב.</p> <p>הישומים כוללים – חישובי ערך עתידי <b>FV</b> – של סכום ייחיד, של סדרה (מע"ס - FVFA,لوح א-2 בנספח A לכרך ד), לרבות מצב שבו מחשבים ערך עתידי למספר סדרות, התאמות זמן ותקופה, צבירת ריבית בתקופת הפסיקות מסדרה, התאמות לתזרימי תחילת תקופה / תום תקופה, התאמות ריבית (כי הריבית חייבת להתאים בחישובים סדרתיים לפרק הזמן בין תשלומים).</p> <p>חישובי ערך נוכחי <b>PV</b> – (שנקראים גם חישובי שווי / חישובי מחיר – מע"ס - PVFA –لوح א-4 בנספח A לכרך ד) – כנ"ל (של סכום ייחיד, של סדרה, כולל התאמות זמן, תחילת תקופה, סוף תקופה, סדרה אינסופית).</p> <p>חישובי ריבית (בעיקר – <b>חישובי ריבית אפקטיבית</b>) – על בסיס מגוון נוסחאות – המרת ריבית נקובה לאפקטיבית ("ריבית דרייבית"), התיחסות לריבית מראש (שמחושבת פעמיים או מספר פעמיים), שילוב של ריבית דרייבית וריבית מראש (יש ברצפים, יש במחברת גם אם לא על כולם עברנו), וגם חילוץ ריבית מנתוני סדרות ("לוויות 100,000... 100,000... אתה מחזיר כל חודש 2,000 במשך 55 חודשים... מהי הריבית המגולמת בעסקה במונחים שנתיים" כMOVEN שהניסוח לא כל כך פשוט, אבל מבחינת סגנון).</p> <p><b>ברובד המורכב יותר – יישומים:</b></p> <p>המדובר בשאלות שבנון, במקרים רבים לא יגלו לי מהו הכליל שעליי לישם. לא יגדרו בהכרח במפורש שעליי לחשב דוקא ערך עתידי או דוקא ערך נוכחי, ואני אctrיך להסיק זאת מסוג השאלה. לשאלות מורכבות אלו יש כל מיני וריאציות (מקרים). נציג כמה מהם.</p>

<p><b>בחירה בין חלופות</b> – חלופות לרכישת מוצר (על ידי חישוב הערך הנוכחי PV של כל חלופה – ובחירה במשתלמת יותר, זו שה-PV שלה בערך מוחלט נמוך יותר) ו/או חלופות לקבלת כסף או תקציבים, גם נשענות על PV באופן זהה (בחירה בגובה).</p> <p><b>הפקדות ומשיכות</b> (אני אוהב לקרוא לה "אייזון אקטוארי") – מצב שבו אני מפקיד סכום או סכומים מסוימים אשר צוברים ריבית ומאפשרים למשוך סדרת תקציבים / קצבות.</p> <p>כשמדובר בסדרת הפקדות שאחריה סדרת משיכות – מחשבים FV להפקדות ומשווים אותן לביטוי המיצג את ה-PV של המשיכות.</p> <p>כשמדובר בהפקדה בודדת שERICA לממן את המשיכות – אפשר פשוט לחשב PV למשיכות זהה.</p> <p><b>חילוצי ערכתיים</b> מtopic נתונים המרמזים על ערך נוכחי / עתידי: למשל – שאלות שבחן ידוע הערך הנוכחי, יש לחץ ריבית; שאלות שבחן ידוע הערך העתידי - יש לחץ מספר תשומות; שאלות שבחן ידוע מהו הסכום שיצטרב בעתיד בחסכוון, יש לחץ את סכום ההפקדה (או הריבית) וכיו"ב.</p> <p><b>הלוואות</b> – במיוחד (אבל לא רק!) הלוואות שפיצר (החזירים קבועים) שבחן תהליכי העבודה מתחילה מחלוקת – PMT, והלוואות הנפרעות בהחזרי קרן שווים (לוח סילוקין רגיל).</p> <p>כולל שינויים בלוח – אם ההלוואה בתנאים מסוימים, ובשלב מסוים משתנה אחד או יותר מהתנאים (סוג הלוואה, תקופת ההחזר, תזרירות ההחזר, ריבית וכו'), ואו אז – צריך לחשב את יתרת ההלוואה ולפרוס אותה כ"הלוואה חדשה" לפי התנאים החדשניים.</p>	
<p><b>ברובד הבסיסי:</b></p>  <p>קריטריונים לבחינת כדיות השקעות לפרויקטים שונים במצבים שונים. הרובד הבסיסי ידרשו ידיעה מוחלטת (בזרזות מהירה) של חישוב PV – עניין (שווי פרויקט), גם כאשר הפרויקט בעל תזרים קבועים, גם כשם משתנים. חישוב IRR – שט"פ (שיעור התשואה הפנימי בפרויקט), חישוב PI – ממד רוחניות, חישוב החזר הון שנתי. כדיות לפי כל קритריון. הבדיאות תקבע לפי סוג הפרויקטים והקשר ביניהם.</p> <p>ספקטיבית, בפרויקטים בלתי תלויים (שאין קשר ביניהם) :</p> <p>קונבנציונליים של השקעות – ניתן לקבל החלטה לפי כל קритריון, ועקום ה-PV יורד משמאל לימין. קונבנציונליים של נטילת הלוואות – ניתן לקבל החלטה לפי PI, PV ו-IRR בגרסה ההפוכה, עיקום ה-PV עולה משמאל לימין.</p> <p>לא קונבנציונליים – שמספר הפוקי הסימן של תזריםיהם שונה מ-1: ההדגש המרכזי הוא היעדר היכולת (במקרים רבים) לקבל החלטה לפי IRR.</p> <p>לדעת אילו קритריונים רלוונטיים / לא רלוונטיים ובאיזה מצב.</p> <p><b>ברובד המורכב יותר:</b></p>  <p>הצגה גרפית של פרויקטים (צורת הגרפฟ מושפעת מהיותו השקעה קונבנציונלית, הלוואה, לא קונבנציונלית).</p> <p>בחירה ודרוג בין פרויקטים במצבים שונים :</p> <p><b>בלתי תלויים</b> (אפשר לעשות מה שchnpox, לא מגבלות) – הראיינו לעיל את הקритריונים.</p>	6

<p>מו<sup>ץ</sup>יאים זה את זה - יש לדוגמה, ולבחר אחד מתוכם בלבד, לכל היותר, כאשר צריך להכיר את הגורמים לסתירה בין העניין – NPV לבין השטי"פ IRR (אפק שונה; השקעה שונה; שיעור תשואה על השקעות חוזרות ועוד, ראו כרך ד) לדעת שסתירה ביניהם אפשרית, אם מבקשים להכריע לפי קרייטריון ספציפי, נעשה זאת ונאמר אמן, אבל אם שואלים באופן כללי מה עדיף, נליך תמיד על שיפוט לפי NPV שלא טועה אף פעם במקרה זה.</p> <p><b>מגבלת תקציב</b> (פחות נפוץ ב מבחנים לדוגמא - ניתן לבצע מספר פרויקטים, כל עוד תקציב ההשקעה בזמן אפס לא חורג מסכום נתון מוגדר – לבדוק מה הקומבינציה שמניבת NPV מרבי).</p>	
<p><b>בסיסי – נכסים בודדים; שילוב של שניים/שלושה מסוכנים; CAPM "קלאסי" לעילים:</b></p> <p>чисוב תוחלת תשואה וסטיית תקן – <b>נכסים בודדים</b></p> <p>בחירה בין נכסים מסוכנים בודדים לפי תוחלת-שונות (קרייטריון שמניה שנאת סיכון), על פי התוחלת וסטיית התקן שלהם. חשוב מאד להכיר היטב את הקרייטריון הנ"ל וכן את המשמעות של שנאת סיכון (שנאת סיכון הוא לא תמיד זה שיבחר בנכ"ס / בתיק בעל רמת הסיכון הנמוכה ביותר אלא בית גם על התוחלת...).</p> <p>לודא בכל שאלה האם קיימות הסתברויות – שהסיכון שלחן מתכנס ל-100%, אם לא – ההסתברות המשלימה היא לערך 0.</p> <p>לשים לב היטב האם ניתן לזוזה את המקרה הפנימי – מצב שבו נכס מסוכן מסוים עדיף על חברו בכל מקרה (למשל: נכס שמניב 100 או 200, לעומת נכס אחר שמניב 300, 900 או 1,000). ואז ההעדרה היא לכל סוג המשקיעים ללא תלות ביחסם לסיכון.</p> <p>המשמעות של שילוב בין <b>נכסים מסוכנים בלבד</b> – גישת תיקי ההשקעה (נוסחאות סטטיסטיות):</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>תוחלת תשואת תיק המורכב משני נכסים מסוכנים</b> (לפי משקל ההשקעה בכל נכס).</li> <li>- <b>סטיית תקן</b> של תיק המורכב משני נכסים מסוכנים (לפי משקלים ומקדם מתאם או על השונות המשותפת).</li> <li>- <b>תיק מינימום סיכון</b> – "פופייק" – האם ניתן לשלב בין נכסים, להקטין סיכון – מה משקל ההשקעה בכל נכס בתיק זהה (משקל שאותו ניתן לחזוץ ולהציג לשם חישוב התוחלת וסטיית התקן).</li> <li>- <b>היכולת להציג גרפית את עקומת תמהיל ההשקעה האפשרים ולקבוע איזה חלק הוא יעיל</b> (בחירה הפוטנציאלית).</li> </ul> <p><b>מודל ה – CAPM</b> – אם שאלת דנה בצור המפורשת במודל זה, ו/או כאשר מזזה נתונים הרלוונטיים רק למודל כגון נכס חסר סיכון, תיק השוק, אג"ח ממשתתית (נכס חסר סיכון במילאים אחרים), ביטא... אז אני יודע שאני במודל בצורה די ברורה.</p> <p>החלק היחסית "פשטוט" במודל הוא במצב שבו נתון שהתיק ייעיל.</p> <p>תיקים ייעילים (לא בירית מחדל) מקיימים את נוסחת קו ה-CML ואת כל יתר הנוסחאות בעולם עם ייעילות (תוחלת שמורכבת מנכ"ס חסר סיכון ותיק השוק, סטיית תקן שזזה לסיכון השיטתי וכו'). חלק גדול מהשאלות דורשות בעצם חילוץ מהמשוואות המתמטיות של התיקים הייעילים הללו של פרמטרים שונים: ריבית חסרת סיכון, תוחלת התיק, סיכון התיק, תוחלת השוק...</p> <p><b>תיקי ההשקעה מורכב – מבחינתי, זה בעייר CAPM בעולם "ללא יעילות":</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- <b>מודל ה – CAPM</b> כשהධין הוא לא רק בנכ"ס ייעילים / תיקים ייעילים – עולם ה – SML</li> <li>- <b>משוואת ה – SML</b> וחשיבות הביטא כמדד סיכון (גם את ההגדרה – "מקדם הסיכון השיטתי" במקומות חשיבות סטיית התקן כמדד סיכון).</li> <li>- <b>הנתית יסוד</b> – קיום שוויי משקל וקיים משוואת ה-SML על ידי הנכסים בשוק, אלא אם נתנו אחרת או שמכוחים אחרים, על ידי הצבה במשוואת ה-SML ובודקים שהיא לא מתקינה.</li> </ul>	8

<p>- רכיבי הסיכון : סיכון שיטתי (אינו ניתן לפיזור – קיים גם בתיקים ייעילים וגם בתיקים לא ייעילים) וסיכון לא שיטתי (ניתן לפיזור – קיים בתיקים לא ייעילים בלבד, הוא למעשה מה שיווצר את חוסר הייעילות).</p> <p>- הבדלים עקרוניים בין תיקים ייעילים ולא ייעילים.</p> <p>- חילוצים מגוונים מאד מכל סוגים המשוואות – כולל חילוצי ביתא ומשוואת הביטה, חילוצי פרמטרים של השוק וריבית חסרת סיכון, חישוב ערכיהם של נכסים ספציפיים, בדיקת שוויי משקל.</p> <p>- חישוב מועד מתקדם / שונות הקשורות עם השוק (שאלת אורך מועד).</p>	
--	--

#### מתווה אפשרי להכנה:

מעבר לטיפים הכלליים – סידור נסחאות, מחברת בחינה, שימוש ברכפי האתר, פתרוון מבחנים כמו שכולנו עושים... יש הרבה מאד חומר ויחסית מעט זמן. ואני אספק מנסיוני הלא מייצג (כל אחד אחר) מתווה הכנה ל-2 קייסים – הקيس האחד הוא לתלמיד / ה במסוגים להקדיש זמן משמעותייחסת ללמידה, והקיס הנוסף – לבני אילוצי חיים קשיים (שלמים אגב, אם לא היו בספר פוקוס כל הסטט, בענוה הרבה הייתה גם אולי מציע לשקל לgetto במועד אחר).

#### להלן לוי' אפרי – למי שבעניינים ותפר את החומר במהלך הסטט:

זמן עבודה	נושא עיקרי	דגשים והערות
יום אחד	סגירת פינה בריביות - יחי 5	בabit המעברים – ריבית נקובה, ריבית מראש, ריבית דרייבית, ריבית אפקטיבית...
יום אחד	סיום כל יחי 5 ללא יצא מן הכלל	שאלות קשות מהמחברת בחן את עצמך ברכפים מטלת אופ"ל קצת שאלות ממבחןם על יחי 5
יום אחד	יחידה 6 - פרויקטים יחידה 8 – החלק הקל – סטטיסטיות (תוחלת ושונות) פרויקטים בוודדים ובחירה ביניהם, שילוב בין 2 נכסים מסוכנים, כולל גרפם, כולל ייעילות, כולל תיק מינימום סיכון, חילוצים...	יח' 6 - להבין היטב את צורת הגראפים : לא רק את הקרייטריונים טכנית, אלא גם את סוגים הפרויקטים ואת ההשפעה על איזה קרייטריון רלוונטי וכו'. לסת דגש לשאלות תאורייה! בחן את עצמך ברכפים שאלות ממבחןם על יחי 6 שאלות במחברת (הकצרות)
יוםיים	יחידה 8 - מודל CAPM - תיקים ייעילים, תיקים לא ייעילים, ריכוז נסחאות של כל המცבים	דגש מרכז – יחי 8 CAPM : הבחנה בין המקרים (יעילות / אי יעילות, ביתא מול סטיטית תקן, הגראפים הרלוונטיים). להתמקד בשאלות הקשורות לחילוץ

פתרונות מבחןים – בארח הקורס יש מעל 20 מבחןים, סדר גודל של 4-3 שאלות יכולות מבחן בנושא זה, תגינו "לרוואה"	פרמטרים ברמה אלגברית ויזהוי נוסחה מתאימה לחילוץ. מעבר למחברת – בחינות.	
נתו מבחןים כאשרנו פתרים מבחןים – במיוחד בשאלות תאוריה לא להסתפק ב"צדkti, להה" אלא לנשות להבין גם את ההיגדים השגויים.	התאמת דפי נוסחאות לטעויות נפוצות	יומיים
גם מי שלא מאמין בנושא תפילה בהצלחה גדולה		

### אם אין לי זמן ללמידה ולא הייתי מספיק בעניינים? האם המחברת בלבד מספקת?

קודם כל – אין תרופות פלא; לא ניתן לגשת רק על סמך המחברת או רק על סמך הרცפים, צריך הכל ובעיקר צריך זמן להטמע ולהיחשף למגוון רחב של סגנונות של שאלות. ובכל זאת, אם אין ברירה. ויש לי רק יומיים...

זמן עבודה	נושא עיקרי	dagshim והערות
חצי יום	מייפוי מלא של כל הנושאים, כל הנוסחאות ותבניות לשאלות הנפוצות ביותר	לקחת ממש את המיפוי ללא ממצאה שערכנו למעלה, ליצר מיני תבניות לשאלות העוננות להגדלה, ולודא שאנו מבינים את התהליך בתוכן. זה יהיה לא ממצאה, זה יהיה טכני, אבל אם יש לי רק יומיים (זה בדייתי, אבל מי שמתעקש) אין ברירה.
יום וחצי	חציו – פתרון של שאלות של ייח' 5 בלבד, ואז 6 בלבד, ואז 8 בלבד. יום שלם נוסף – פתרון של מבחןים שלמים, כולל תקינות ובחנה בין נושאים	אני משלים את התבניות ואת דפי העזר ואת ההבנה על בסיס הסקירה הנוספת הזו, אני מודע לכך שאגע עם לשון בחוץ, ולא אט כנ מיומן בלבבי ו/או היתי סופר חד כל הසטט, אני יודע שאני בסיכון גבוה מאד.

### המלצת השף:

לא לגשת אם יש לך פחות מ-4 ימים נתו. אבל זו המלצה חברית, זו הדעה האישית שלי, לא ערכתי מחקר, אני מספר לכם על החוויה שלי כסטודנט. אני לוקחתי בזמןנו שבוע רגילה מהצבה ואחרי כ-4 ימים פתאום הרגשתי שדברים מתחילהים טיפה להתיישר.

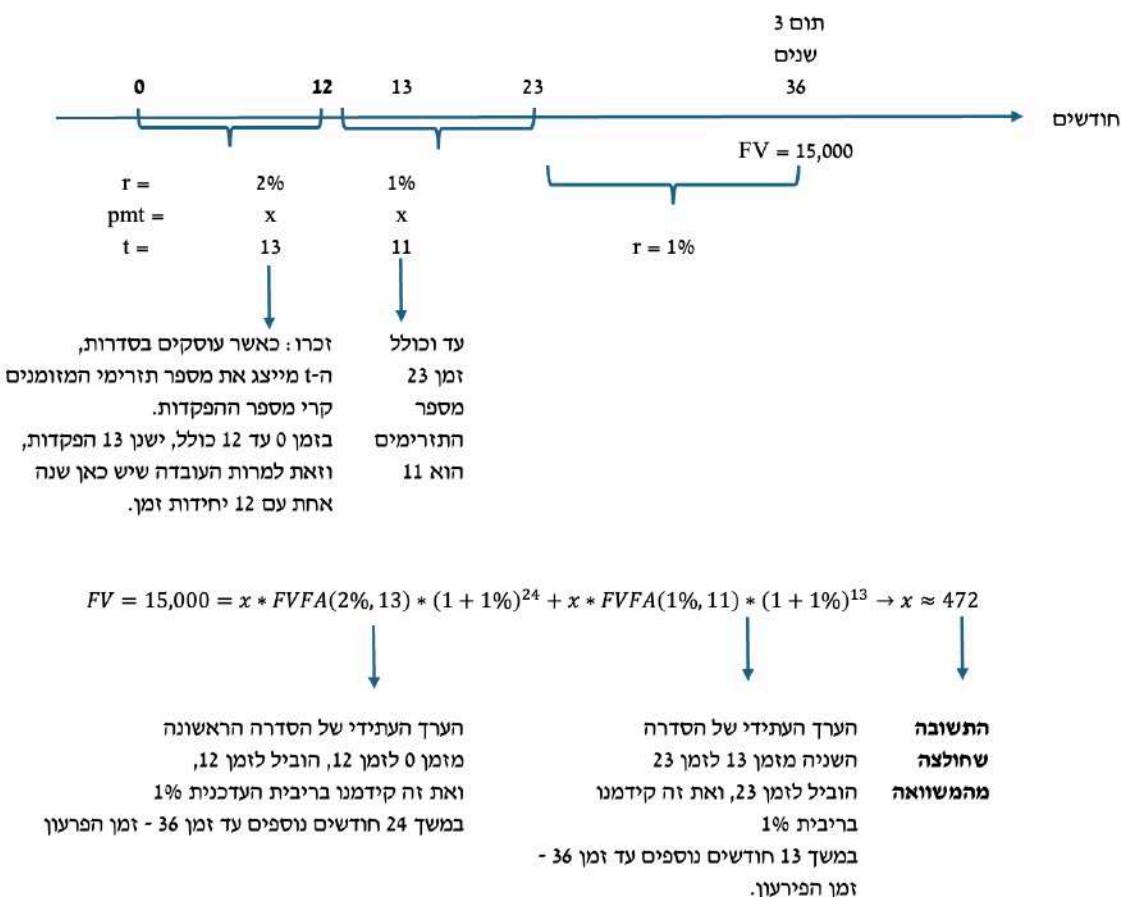
## שאלו 22 – שאלה 5

### שאלה 5

חווסף פתח תוכנית חיסכון. בתום 3 שנים קיבל 15,000 ש"ח. מהי ההפקדה החודשית בתכנית החיסכון, אם ההפקדות הtbodyו בתחילת כל חודש במשך 3 שנים הראשונות בלבד והתכנית נשאת ריבית של 2% לחודש במשך השנה הראשונה ולאחר מכן ריבית צפופה לרדת ל-1% לחודש?

- א. 472 ש"ח.
- ב. 760 ש"ח.
- ג. 479 ש"ח.
- ד. 572 ש"ח.
- ה. 474 ש"ח.

פתרונות :



### שאלון 19 – שאלה 3

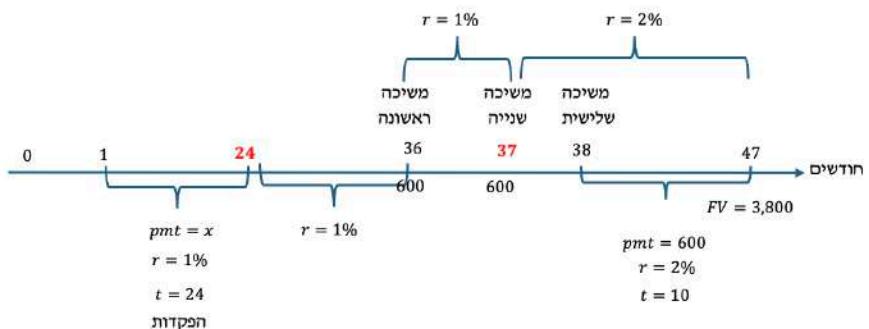
#### שאלה 3

מר כהן מפקיד בתכנית חיסכון המבטיחה תשואה של 1% לחודש, סכום קבוע בסוף כל חודש במשך שניםים. שנה לאחר ההפקדה האחורונה החל למשוך סכום של 600 ש"ח מדי חודש, במשך שנה (סה"כ 12 משיכות).

אם ידוע כי מיד לאחר המשיכת השניה מהתכנית, עליה תשואת התוכנית ל-2% לחודש וכי בתום המשיכות נותר בחשבונו החיסכון סכום של 3,800 ש"ח, מהו הסכום החודשי שיחסן?

- א. 215 ש"ח
- ב. 316 ש"ח
- ג. 645 ש"ח
- ד. 429 ש"ח
- ה. 414 ש"ח

**פתרון:**



באופן כללי, כדי לחלץ סכומי הפקודה, עלינו לבטא את הפקודות ואת המשיכות לאותה נקודת זמן ולהשווות בינהן. אני אוחब לבטא את הערך של כל הפקודה במנוי נקודת הזמן של הפקודה האחורונה - כאן - זמן 24.

$$FV_{\text{פקודות}}(24) = x * FVFA(1\%, 24)$$

הסיפור המורכב יותר הוא עם ביטוי הערך הנוכחי של המשיכות לאותה נקודת זמן (ערך נוכחי) - כדי לבטא אחורונית במנוי זמן 24, לモרות שמתחלילות בזמן (36 שנים):

$$PV_{\text{משיכות}}(24) = 600 * (1 + 1\%)^{-12} + 600 * (1 + 1\%)^{-13} + 600 * PVFA(2\%, 10) * (1 + 1\%)^{-13} + 3,800 * (1 + 2\%)^{-10} * (1 + 1\%)^{-13}$$

המשיכת הראונה בזמן 36 מותאמת לאחר זמן 24 בràיבית 1% כסכום בודד. מועע כסכום בודד? כדי לא לערוב אורה עם הסדרה השניה בריבית 2%

המשיכת הרשניה בזמן 37 מותאמת לאחר זמן 24 בראורה. נס היא מותאמת לאחר ריבית ריבית 2%, ולכן המשיכת הרשניה בזמן 37 מותאמת לאחר ריבית ריבית 2% בראורה. מ-37-ל-24 בראיבית 1% במשך 13 תקופות מ-37-ל-24 בראיבית 1% לחודש.

היתרה בחסכון לאחר ריבית ריבית 2%, ולכן המשיכת הרשניה בזמן 37 מותאמת לאחר ריבית ריבית 2% בראורה. מ-37-ל-24 בראיבית 1% במשך 13 תקופות מ-37-ל-24 בראיבית 1% לחודש.

$$FV_{\text{פקודות}}(24) = PV_{\text{משיכות}}(24)$$

משוואת הפתור והסופית תראה:

$$x * FVFA(1\%, 24) = 600 * (1 + 1\%)^{-12} + 600 * (1 + 1\%)^{-13} + 600 * PVFA(2\%, 10) * (1 + 1\%)^{-13} + 3,800 * (1 + 2\%)^{-10} * (1 + 1\%)^{-13}$$

$$x \approx 316$$

וכעת נעבור לסקירת שאלות נוספות.  
שאלות אלו אינן מבחנים, אך הן בוחנות מבחנים, והן בנושאים שונים הקשורים לעולם התוכן שלנו בסמסטר הנוכחי.

נקובה

3. לкупת משכנתא של 600,000 ש"ח בריבית ~~של~~ 6% לשנה. המשכנתא מוחזרת במשך 20 שנים בתשלומים סוף חודשיים שווים. לאחר 7 שנים ממועד קיחת המשכנתא (מיד עם התשלום האחרון של השנה השביעית), החזרת סכום של 100,000 ש"ח (בנוסף לתשלום הקבוע בגין המשכנתא). מהו התשלום החודשי החדש אם הריבית השנתית נותרה ללא שינוי, ומספר התשלומים הכלול נותר ללא שינוי?
- א. 3,244 ש"ח.  
ב. 41,014 ש"ח.  
ג. 3,374 ש"ח.  
ד. 4,298 ש"ח.  
ה. 2,414 ש"ח.

פתרון :

#### התשובה הסופית - ג. להלן פירוט:

להלן חישוב תמציתי ומקוצר מאד, שבמונח שלו – מבטאים את החזרה התקופתי המקורי, מהוון למועד שינוי התנאים, בנסיבות התשלום התקופתי, והכל (במונח) נפרש על יתרת התקופה במכנה.

$$PMT = \frac{\frac{600,000}{PVFA(0.5\%, 240)} * PVFA(0.5\%, 156) - 100,000}{PVFA(0.5\%, 156)} \approx 3,374$$

#### אם לא ברור בכלל, הנה חפירה:

ישומי ייחידה 5 הם מגוונים: הם כוללים חישובי ערך עתידי ("כמה תצבור בעתיד בהנחה שתפקיד..."), חישובי ערך נוכחי ("מהו הערך הנוכחי / מהו השווי היום"), חילוצים המותבסים על הגדרות אלו, חישובי ריבית אפקטיבית ויישומים נוספים.

ספציפית כאן מדובר באחד היישומים הפחותים יותר של ערך נוכחי: הלוואות. ומדובר? מושם שלמעשה ניתן לומר את שני המשפטים הבאים, **שכום יפה במיוחד להלוואות הנפרעות בתשלומים שווים** ("שפיכר"):

- משפט 1 : סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי (PV) של החזרה.
- משפט 2 : יתרת הלוואה היא הערך הנוכחי (PV) של יתרת החזרה.

זיהינו כאן הלוואה שתשלומיה קבועים (עלים לגדר סדרה קבועה). הדבר הראשון שארצה לעשות הוא לחלק את ערכיה, ובמיוחד את התזוריים התקופתיים בעדה "טרם השינויים המתוארים". ואם כך, בהינתן שסדרת התשלומים קבועה, ניתן לטעון שמתיקיימת המשוואה הבאה:

$$LOAN = PMT * PVFA(r, t)$$

הערך LOAN הוא סכום הלוואה.  
הערך PVFA הוא בעצם ערך מען"ס (لوح א-4) שמתאים למספר התשלומים  $t$  ושיעור הריבית  $r$

$$600,000 = PMT * PVFA(0.5\%, 240)$$

בעצם: מס' התשלומים כאן הוא כמספר החודשים - ב-20 שנים ישנו 240 תשלום חודשיים. בנוסף, אנו זוקקים לריבית החודשית (הריבית לפרקי הזמן בין תשלום). הואיל והריבית הנתונה - 6% - היא שנתית, יש לחלקה ב-12 כדי להגיע לריבית חודשית  $= 0.5\% = 12 / 6$  (הנחה היא שהריבית נקובה).

בhininten העובדה שלא ניתן לחלק מלוחות ההיוון (لوح א-4) מקדמים בריבית שהיא שבר ובמספר תשלום חודשיים כאמור, ניעזר בנוסחה המתמטית של PVFA, כדלקמן:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

במצבה אקבל:

$$PVFA(0.5\%, 240) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.5\%)^{240}}}{0.5\%} \approx 139.581$$

שיםו לב, ערך ריבית של 0.5% במנוחי שבר עשרוני הוא 0.005. ככלומר:

$$PVFA(0.005, 240) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.005)^{240}}}{0.005} \approx 139.581$$

נחזיר לנוסחת המקור של סכום הלוואה כערך הנוכחי של החזירה

$$600,000 = PMT * 139.581 \rightarrow PMT \approx 4,298.58$$

כעת לאחר שטיפנו בחישוב החזר הבסיסי, נחזיר לשאלת ולהשタルות שלה שאומרת שאחרי 7 שנים בדיקות, רגע לאחר התשלום בזמן זה, סילקנו עוד 100,000 ש"ח. מה שזה אומר בעצם, שנרצה לבדוק את יתרת הלוואה לאחר 7 שנים, ממנה להפחית (לנכחות) 100,000 ש"ח, ואת יתרה הניל' לפרק על פני יתרת חיי הלוואה.

משפט 2 : יתרת הלוואה לכל מועד היא הערך הנוכחי של יתרת החזירה. יתרת הלוואה ערב השינוי היא היתרה לאחר 7 שנים או - לאחר 84 תשלומיים נוספים :

$$BAL_{84} = 4,298.58 * PVFA(0.5\%, 240 - 84)$$

או בעצם :

$$BAL_{84} = 4,298.58 * PVFA(0.5\%, 156)$$

נציב בנוסחה המתמטית של PVFA או מענ"ס :

$$PVFA(0.5\%, 156) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.5\%)^{156}}}{0.5\%} \approx 108.14$$

נזור לחישוב היתרה :

$$BAL_{84} = 4,298.58 * 108.14 = 464,850$$

מיותר זו علينا לנכota את התשלום המידי החד פעמי שמצוע מיד לאחר התשלום ה-84 :

$$BAL_{84}(Net) = 464,850 - 100,000 = 364,850$$

נוצע פרישה מחדש של יתרה עדכנית זו משל מדובר היה בהלוואה חדשה בסכום זה אשר נפרשת על פני 156 תשלומיים (התשלומיים שנותרו ; אלו שבמספרם הכללי אין שינוי כאמור) :

$$364,850 = PMT_{New} * PVFA(0.5\%, 156) \rightarrow 364,850 = PMT_{New} * 108.14$$

וכך מגאים לסכום התשלום הקבוע החדש / העכני והنمוך. יותר, כאמור :

$$PMT_{New} = 3,374$$

(\*) הערכה : יש הטוענים שבמוקם לציין שסכום הלוואה שווה לערך הנוכחי של החזירה, ומכך לחץ את PMT אפשר פשוט לחלק את סכום הלוואה ב-PVFA. זה נכון, אבל זה לא יבודד בהלוואות הנפרעות בתזרימי תחילת תקופה, או במספר נתוני סדרות וכן הלאה.

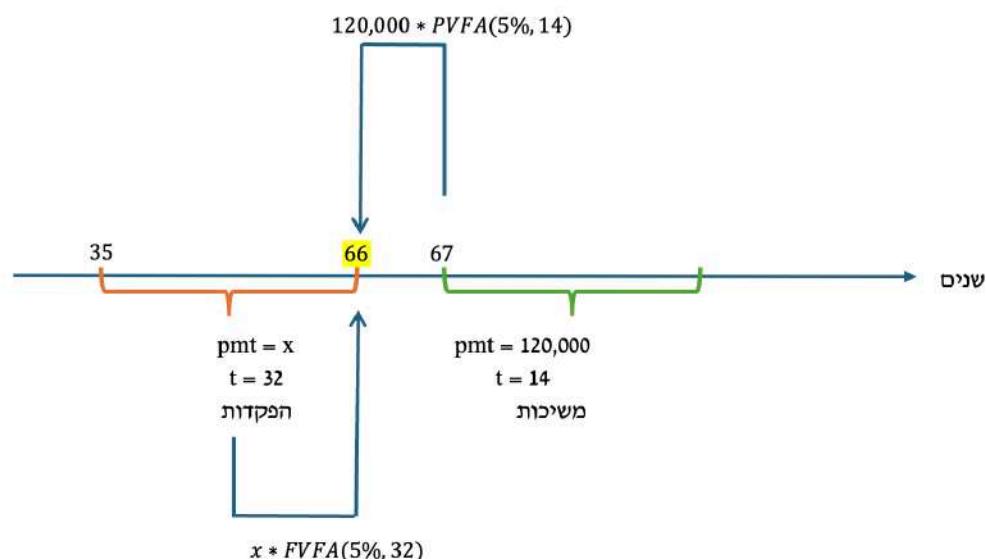
4. הניחו כי היום הנוכחי חוגגים את יום ההולדת ה- 35 שלהם. הנוכחי פותחים היום קרן פנסיה שבה תפקדו הפקדות שנתיות שווות שיימשו עד שתחגגו יום הולדת 66 (כולל). ההפקודה הראשונה בקרן היא היום. המשיכות מקרן הפנסיה יחולו כאשר תחגגו את יום ההולדת ה- 67 שלהם. אתם מעריכים כי תמשכו 14 משיכות שנתיות בגובה של 120,000 ש"ח כל אחת מקרן הפנסיה. מהי ההפקודה השנתית הנדרשת בשנים שבחן תפקדו את ההפקדות אם ידוע כי קרן הפנסיה מניבת תשואה של 5% לשנה, ותשואה זו תימשך כל עוד יש כסף בקרן הפנסיה?

- א. 15,775 ש"ח.
- ב. 16,563 ש"ח.
- ג. 15,023 ש"ח.
- ד. 52,500 ש"ח.
- ה. 54,251 ש"ח.

פתרון :

התשובה א.

כאשר מדובר בועלמן של סדרת הפקדות שלאחריהן סדרת משיכות - מתקיים המשפט הבא: הערך העתידי של הפקדות הוא הערך הנוכחי של המשיכות, לאותה נקודת זמן. אישית, אני אוהב לקרוא לשאלות אלו "אייזון אקטוארי" שכן תחסיבים מעין אלו מקובלים מאד בפנסיה וביבטוחים. אני מאד אוהב לעבוד בשאלות כאלה עם ציר הזמן.



ספציפית במקרה זה, הערך העתידי של ההפקדות הובילנו לבדוק לזמן 66 (כי ערך עתידי של סדרה מבטא את התוצאה במנוחי נקודת הזמן של התזרים האחרון / ההפקדה האחרון), וגם הערך הנוכחי של המשיקות הסדרתיות הובילנו לאותו הזמן (כי ערך הנוכחי של סדרה מבטא את התוצאה במנוחי נקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה. למעשה, הויאל וסדרת המשיקות החלו בזמן 67, ההיוון שלה (PV) כסדרה בהגדירה מוביל "אחד אחריה" קרי לזמן 66. והואיל ובמקרה זה, לפיכך, מתקינה זהות בתזמנוניים בין חישוב PV הפקדות ל- PV משיקות, כל מה שנותר לעשות הוא להשוות בין הערכים לאותה נקודת זמן - ולחוץ את החסר :

$$x * FVFA(5\%, 32) = 120,000 * PVFA(5\%, 14)$$

: כלומר :

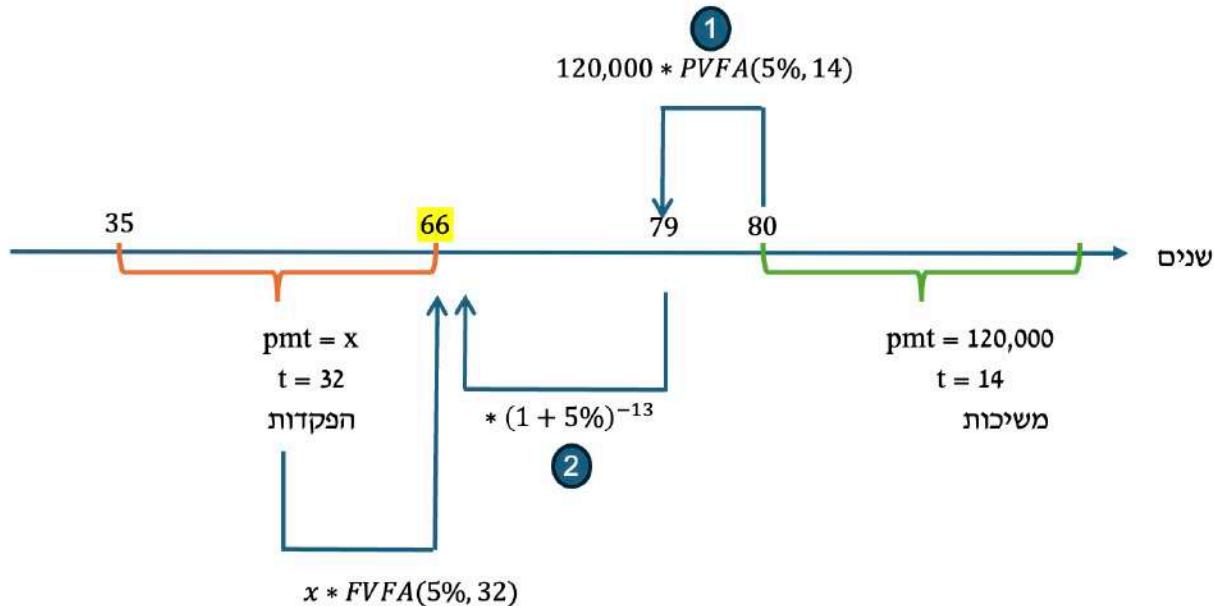
$$x * 75.299 = 120,000 * 9.899 \rightarrow x = 15,776$$

(\*) הערכה : בחישובי איזון אקטוארי, הערך החיווני הוא לבטא גם את ההפקדות וגם את המשיקות במנוחים של אותה נקודת זמן בדיקוק. את נקודת הזמן אתם למורי יכולם לבחור בעצמכם : אני מאד אוהב להציג את הערכים "באמצע". לפעמים זה גם חוסך כמה מהלכים חישוביים. מי מביניכם שמעדיף תמיד לבטא ערך הנוכחי לזמן "0" גם של ההפקדות וגם של המשיקות, ורק אז להשוות ביניהם - זה יעבוד גם.

---

### הרחבה לשאלת

בנתוני שאלת קודמת, הינו בעת כי את ההפקדות ממשיכים לבצע מזמן 35 עד זמן 66 כולל, אך המשיכות מתחילה רק החל מיום הולצת ה-80. בסך הכל מוצעות 14 ממשיכות בתום כל שנה, ושיעור הריבית עודנו 5%, סכום המשיכת עודנו 120,000 ש"ח לשנה.



משוואת הפתרון תשתנה לتزורה:

$$x * FVFA(5\%, 32) = 120,000 * PVFA(5\%, 14) * (1 + 5\%)^{-13}$$

ואפשר כמובן לחץ את x. משיקולי זמן לא נבצע עטה.

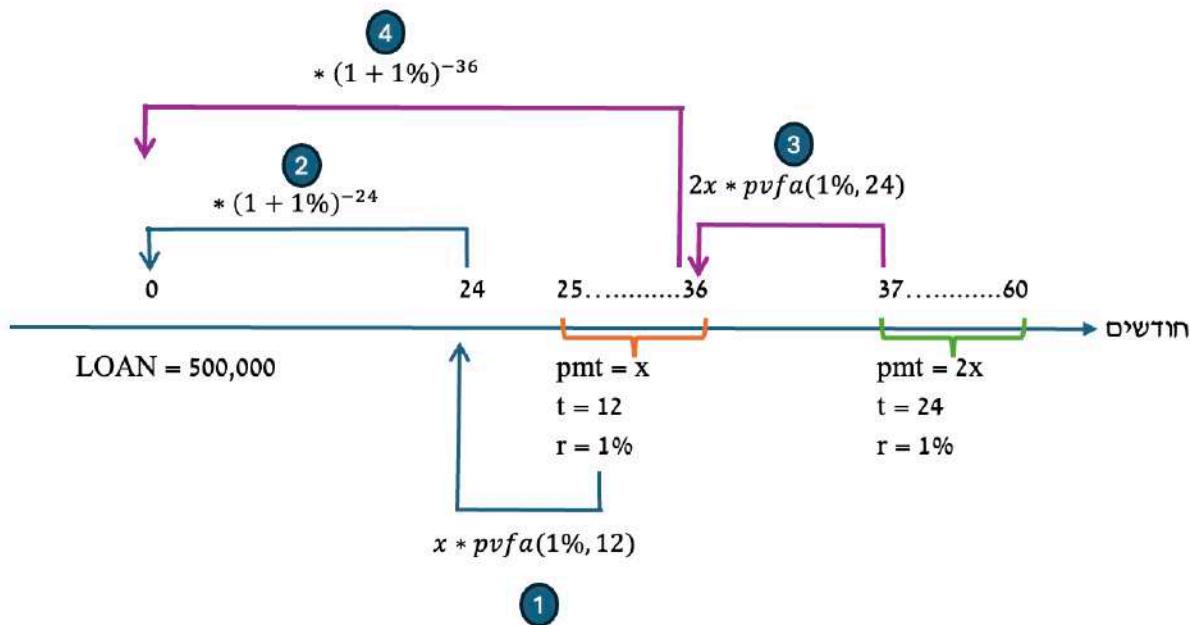
### שאלת בקשת הקהל - הלוואה עם גרייס (דחיה במועד התשלומים והתאמות זמן)

בנק אמונונים בע"מ מציע ללקוחותיו הלוואה בסכום של 500,000 ש"ח שתפרע בתשלומים חודשיים, כלהלן: החל ממועד החודש ה-25 ובמשך שנה (12 תשלומים), יבוצע תשלום חודשי קבוע. החל ממועד החודש ה-37, ובמשך שנתיים, יבוצע תשלום חודשי קבוע בסכום כפול.

מהו ההחזר החודשי במהלך 12 התשלומים הראשונים, אם ידוע שהריבית החודשית 1%?

פתרון:

סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. וכשאני אומר זאת אני מתייחס לכל החזרים, לא יוצאה מן הכלל. לעומתנו, במקרה זה, החזרים אינם קבועים כי אם משתנים; והם כוללים שני חלקים: סדרת החזרים הראשונים, מזמן 25 לזמן 36 בסכום מסוים וסדרת החזרים שנייה מזמן 37 לזמן 60 בסכום אחר. את שתי הסדרות חייבים לחזון (PV) בזמן אפס, על מנת לבטא את המשפט.



המשוואת העקרונית לפיה סכום ההלוואה (בזמן 0) הוא הערך הנוכחי של כלל החזרה (זמן 0) :

$$500,000 = PV(\text{סדרה 1}) + PV(\text{סדרה 2})$$

במצב, כולל התאמות מתבקשות לריביות הסדרות (כדי להובילו בזמן 0), נקבל:

$$500,000 = x * PVFA(1\%, 12) * (1 + 1\%)^{-24} + 2x * PVFA(1\%, 24) * (1 + 1\%)^{-36}$$

$$500,000 = x * 11.255 * (1 + 1\%)^{-24} + 2x * 21.243 * (1 + 1\%)^{-36}$$

והתוצאה המתקבלת:

$$x \approx 12,967$$

מסקנה: כל אחד מ-12 התשלומים הראשונים שסומן כ-  $x$  הוא 12,967 ש"ח.

### שאלה 3

בנק מלאוה סכום חד-פעמי שיוחזר בצוירוף הריבית בתום חצי שנה ממועד מתן הלוואה. הריבית החצי-שנתית שגובה הבנק היא 20%. פרט לריבית, מנחה הבנק במועד מתן הלוואה עמלת מראש של 3.75% מסכום הלוואה. **הריבית האפקטיבית השנתית שגובה הבנק היא :**  
(התשובות מוצגות ברמת דיווק של ספרה אחת אחרי הקודח)

- א. 47.5%
- ב. 55.0%
- ג. 55.4%
- ד. 49.4%
- ה. 24.7%

פתרונות :

קצר וקובלע :

$$r_e(0.5 \text{ years}) = \frac{1 + 20\%}{1 - 3.75\%} - 1 = 24.675\% \rightarrow r_e(\text{annual}) = (1 + 24.675\%)^2 - 1 = 55.4\%$$

כאשר מדובר בלוואה הנפרעת בתשלום אחד - אם נדע לבטא את הסכום המתקבל נטו (לאחר כל עמלת או ניכוי מקביל), ואת הסכום הכולל המשולם בתום התקופה - נטו, נוכל להתבסס על המשפט הטוען כי: **היחס בין הערך המוחלט של התשלומים בתום התקופה לבין סכום התקובל בתחילת - פחות אחד, הוא הריבית האפקטיבית לתקופת העסקה:**

מתן הלוואה	החזר הלוואה	שנתיים
0	0.5	
סכום הלוואה המתקבלת		
$+x$	$-x * (1 + 20\%)$	
$-3.75\% * x$		
$\underline{0.9625x}$	$-1.2x$	
<b>סכום נטו</b>		

הריבית האפקטיבית לחצי שנה (תקופת העסקה) לפי היחס בין הערכים פחות אחד היא:

$$r_e(\text{haz shana}) = \frac{P_{0.5}}{P_0} - 1 = \frac{1.2x}{0.9625x} - 1 = 24.675\%$$

והואיל ושאלו על הריבית האפקטיבית לשנה שלמה - מעבר מריבית אפקטיבית אחת לאחרת מבצעים עם מעריך חזקה מתאים (הנחה ריבית דרייבית) ולא עם כפל פשוט (שני חזאים בשנה) :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{hazishana})^2 - 1 = (1 + 24.675\%)^2 - 1 \approx 55.4\%$$

התשובה ג.

אפשר גם לפטור שאלה זו על בסיס נוסחת הריבית האפקטיבית המשלבת בין ריבית מראש / ניכוי מראש לבין ריבית בתום התקופה :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

כאן :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{20\%}{1}\right)^2}{\left(1 - \frac{3.75\%}{1}\right)^2} - 1 = 55.4\%$$

מה הלק כאן?

המונה כולל את הריבית החצי שנתית, שבהיעדר נתונים בדבר חישובה, מחושבת פעמי אחת בחצי שנה. העילינו בሪבויו – כי צריך לחזור לשנה.

המכנה כולל את הניכוי מראש, גם הוא חצי שנתי. אמנם לא נאמר שאכן מדובר בשיעור חצי שנתי, אך מהעובדת שזהו הניכוי הכלול בעסקה חצי שנתית מסיקים שאכן מדובר בערך חצי שנתי כאמור.

### שאלה 7

פירמה השקעה 5,000 ש"ח בפרויקט שהענ"ג שלו הוא 7,000 ש"ח. **מהו הערך הנוכחי של זרמי המזומנים?**

- א. 12,000 ש"ח.
- ב. 5,000 ש"ח.
- ג. 7,000 ש"ח.
- ד. אי-אפשר לחשב ללא קבלת נתון לגבי אורך חיי הפרויקט.
- ה. אי-אפשר לחשב ללא קבלת נתון לגבי מחיר ההון של הפירמה.

נתון :

$$NPV = 7,000$$

ידועה  $NPV$  הוא הערך הנוכחי הנקי נטו של כולל תזרימי המזומנים: החיוביים והשליליים גם יחד. ההשקעה הראשונית בפרויקט נתונה, והיא בוגר תזרים מזומנים שלילי בזמן אפס בגובה ההשקעה. בעצם, אוכל לבטא את ה- $NPV$  כך:

$$NPV = -5,000 + PV_{\text{יתר התזרימיים}} = 7,000 \rightarrow PV_{\text{יתר התזרימיים}} = 7,000 + 5,000 = 12,000$$

התשובה א.

### שאלה שני המצא

בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסוכנים בלבד, ניתן להשקיע בחact בין שני מניות: C ו- D. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 40%, וטטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וטטיית התקן שלה 35%. אמוננו הוא ממשקיע שונא סיכון הופועל בשוק זה. סמנו את הטענה הנכונה:

- א. אמוננו יבחר להשקיע בנכס C לאור סטיית התקן הנמוכה יותר.
- ב. אמוננו יבחר להשקיע בנכס D לאור תוחלת התשואה הגבוהה יותר.
- ג. אמוננו יהיה אדיש באשר לבחירה בין הנכסים (הם שקולים מבחיננו).
- ד. לא ניתן לדעת איזה נכס יעדיף אמוננו.
- ה. אין אף תשובה נכונה.

שיקחה! ברגע שנכס מסויים (C) מוביל תוחלת נמוכה יותר, הוא "נפסל" מיד ואינו עדיף, לפחות לא באופן ודאי. ברגע שנכס אלטרנטיבי D הוא בסיכון גבוהה יותר, גם הוא "נפסל" מיד ואינו עדיף, לפחות לא באופן ודאי. נמצאים פה במקרה קלאסי שבו לכל נכס יש יתרון מסוים וחסרון מסוים. במצב זה, שני הנכסים "יעילים" והמשקיע יתלבט ביניהם, ויבחר לפי טעמיו האינדיבידואליים. התשובה ד.

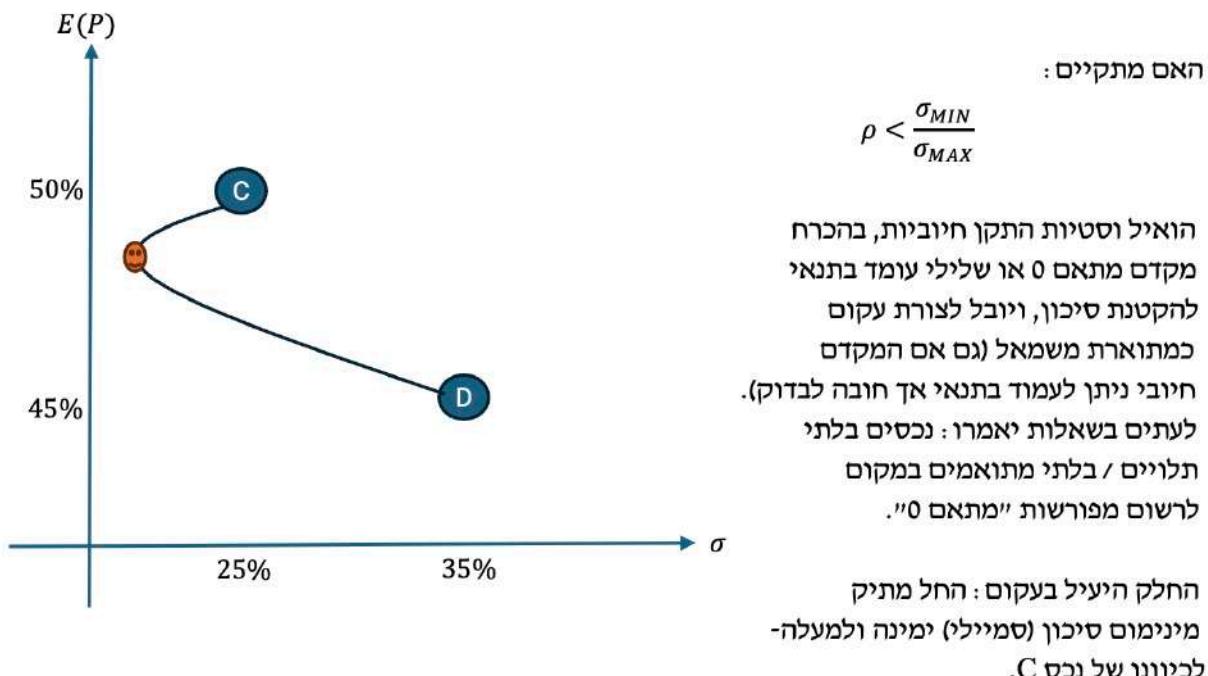


שאלה נוספת - לבקשת הקהיל - אפשר לשלב ושאלים על ייעילות בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסווגים בלבד, ניתן להשיקע באחת מbynן שתי מניות: C ו-D ו/או לשלב ביניהן. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 50%, וסטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וסטיית התקן שלה 35%. שלמה הוא משקיע שונא סיכון הפעול בשוק זה. וידוע שקדם המתאים בין הנכסים הוא 0. סמן את הטענה הנכונה:

- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכספיו בנכס D.
- בחכרה שלמה יבחר להשיקע 100% מכספיו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, שכלל חלק מהנכסים שימושיים ב-C וחלק אחר ב-D.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכספיו בנכס D.
- כל התשובות שגויות.

**פתרון (התשובה ד', להלן הנמקה מפורטת):**

כאשר אני ניגש לשאלה שדנה בבחירה משקיע בועלם הכלול שני נכסים מסווגים בלבד עם אפשרות שילוב ביניהם, מאי מאי חשוב לבחון את עיקום תמהילי ההשיקעה האפשריים מהשילובים השונים, שכן הדבר יוניק ביטוי חזותי נוח לעיכול בדבר המשמעות של השילובים והיעילות.



נפאל לחישוב משקל ההשיקעה בכל נכס בתיק מינימום סיכון (מינימום שונות/מינימום סטיית התקן) :

$$W_C^{MRP} = \frac{\sigma_D^2 - \rho * \sigma_C * \sigma_D}{\sigma_C^2 + \sigma_D^2 - 2 * \rho * \sigma_C * \sigma_D}$$

בהתבה אקבל :

$$W_C^{MRP} = \frac{0.35^2 - 0 * 0.25 * 0.35}{0.25^2 + 0.35^2 - 2 * 0 * 0.25} \approx 0.6622 = 66.22\%$$

למעשה, בנקודות "סמיילי" משקיעים כ-66% בנכס C. אנו יודעים שההשकעות היעילות הן בהכרח הסמיילי או נקודות קרובות יותר ל- C מאשר שיעור השקעה גבוהה יותר ב- C ביחס לנקודות הסמיילי. בשפה פשוטה: כל שונאי הסיכון יבחרו להשקיע לפחות 66.22% בנכס C. זה גם אומר ששיעור (משכלה) ההשקעה בנכס D (הערך המשלים) יהיה מקסימום 33.78%, כל שונאי הסיכון יבחרו להשקיע 33.78% או פחות בנכס D.

א. ייתכן שלמה יבחר להשקיע 70% מכספיו בנכס D.

שגוי. המקסימום שיישקיע בנכס D הוא 33.78%. מדוע? כי בסמיילי ההשקעה בנכס D היא בשיעור 33.78%, וכל שקל נוספת שנשקיע בנכס D יקרב אותנו מהסמיילי ל-D, ככלمر יכניס אותנו לצד התחרותן של העוקום שאיננו עיל. **יעילות מתיקיימת בתיק מינימום סיכון וכן בתיקים הנמצאים ימינה ולמעלה ממנו.**

ב. בהכרח שלמה יבחר להשקיע 100% מכספיו בנכס C, שכן סטיטית התקן שלו היא המינימלית. שגוי. ראשית מושם שבהינתן האפשרות לשלב, הסיכון ב- C איננו מזערני, ניתן להקטין את הסיכון מעבר על ידי שילוב הנכסים (והגעה לנקודות הסמיילי).

שנייה, מושם שנקודת C היא אمنה יעה (חלק מהעוקום העיל, שמתחיל מהסמיילי ונמשך ימינה ולמעלה) אבל היא איננה הנקודת העילית היחידה. לכן **ייתכן שתבחר אבל לא בהכרח תבחר.**

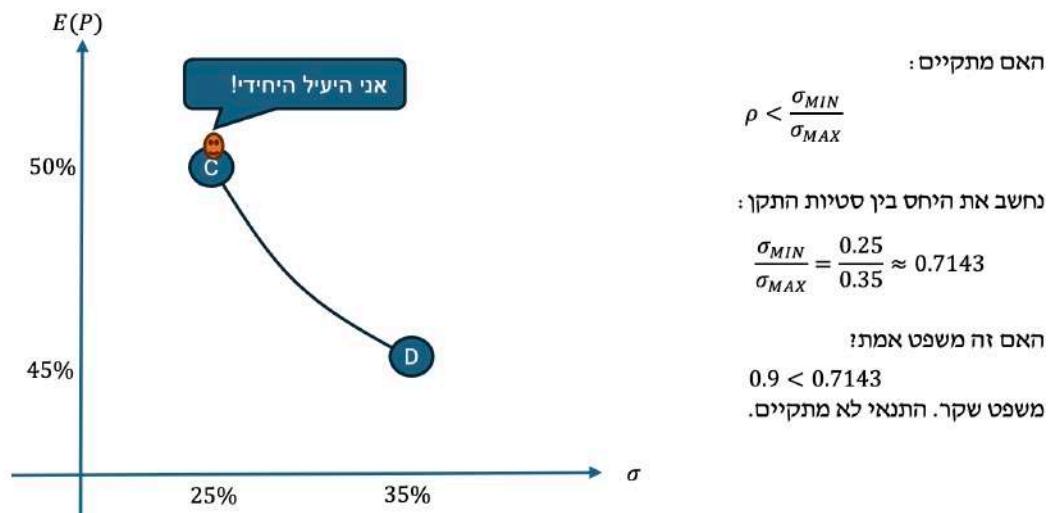
ג. שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, שכולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D. שגוי. כמשמעותם "שלמה יבחר" המשמעות = בהכרח יבחר. וזה כמובן לא נכון, כי למروת שתיק מינימום סיכון (סמיילי) הוא עיל, קיימות אפשרויות השקעה יעילות נוספות שאולי יבחר בהן (כל חלק העוקום מהסמיילי ימינה ולמעלה).

ד. **ייתכן שלמה יבחר להשקיע 20% מכספיו בנכס D.** נכון. ראיינו שההגדרה היא, במקרה זה, שכל שונאי הסיכון ישקיעו 33.78% או פחות בנכס D. משקל השקעה של 20% או פחות בנכס D אכן אפשרי, **ויתכן (לא בהכרח) שייבחר.**

שאלה נוספת - לבקשת הקהיל - אפשר לשלב ושאלים על יעילות  
בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסווגים בלבד, ניתן להשיקע באחת מבינן שתמי מניות: C ו- D ו/או לשלב ביניהן. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 50%, וסטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וסטיית התקן שלה 35%. שלמה הוא משקיע שונא סיכון הפועל בשוק זה. וידוע שמקדם המתאים בין הנכסים הוא 0.9. סמנו את הטענה הנכונה:

- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכיספו בנכס D.
- בhcרכה שלמה יבחר להשיקע 100% מכיספו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, ש כולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכיספו בנכס D.
- כל התשובות שגויות.

פתרון (התשובה הנכונה ב, להלן הנמקה מלאה):



- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכיספו בנכס D.
- ממש לא! השקעה של 100% ב- C היא היחידה הרלוונטית (היעילה) בנסיבות המקרה.
- בhcרכה שלמה יבחר להשיקע 100% מכיספו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית. נכון.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, ש כולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D שגוי. במקרה זה, מינימום סיכון (לאור מבחן מקדם המתאים) מתקבל אגב השקעת 100% מכיספי המשקיע בנכס C בלבד.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכיספו בנכס D. שגוי מאותה סיבה.

3. פירמה משכנתה ריבית  $R\%$  לחודש למקורות המימון שלה. מה שיעור ההנחה המקסימלי אותו מוכנה הפירמה להעניק על מנת שהמימון של הכספי המתkeletal כתוצאה מהקדמתה הגביה יהיה זול יותר מהכספי שתגifyס הפירמה מקורות המימון שלה?

א.  $\frac{I}{I-R}\%$

ב.  $\frac{I}{R}\%$   
ג.  $R\%$

ד.  $\frac{R}{I-R}\%$

ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**תשובה רשמית ורחיבת ההסביר:**

3. תשובה נכונה: ה'  
נניח כי הפירמה מכירה מוצר באשראי לחודש. מחירו של המוצר הוא 100 שקלים. נניח עוד כי הריבית היא 10% לחודש. ערכו הנוכחי של התשלום הוא  $90.9 = \frac{100}{1.1}$ . הפירמה תהיה מוכנה לקבל 90.9 ש"ח במועדן בזמן תחת האשראי. לכן שיעור ההנחה המקסימלי שהפירמה מוכנה

لتת הוא  $9.09\%$  או באופן כללי  $\frac{R}{I+R}\%$ .

שאלה זו כוללת שני אתגרים: האתגר הראשון הוא בעובדה שמדובר בשאלת מבוססת פרמטרים ולא ערכיים כספיים. כתוצאה לכך, באופן טבעי, התהיליך של הפתרון והפיתוח שלו מורכב יותר.

האתגר השני - הוא אתגר ניסוחי. הרוי בירור שאים היו שואלים למשל מהו הערך הנוכחי של התזורים המתkeletal, בהינתן תזורים נתון - או אפילו בהינתן נעלמים, יכולנו להתייחס אליו.

כאשר נתונים בהנחה הקשורה להקדמת גביה - בעצם נתונים בשאלת: האם ההנחה (שפוגעת בשווי שהפירמה מקבלת) מובילה לכך שעדין במונחי ערך הנוכחי הסכום המתkeletal בניכוי הנחה גבוהה מ(או לפחות זהה) לערך הנוכחי של התזורים (ללא הנחה) המהוון.

בשפה קצר יותר פשוטה, הביטוי הבסיסי ציל:

$$(תשלום עתידי) PV = (\text{مزומנים בניכוי הנחה}) PV$$

אחד מהטריקים להתמודד עם העולם הפרטורי בהינתן שכל הערכיים הם האחוזיים, הם לבטא את הסכומים כ- 100 ואת הריבית כשיעור מסוים - למשל, 10%. הואיל והנתונים נתונים בריבית חודשית, ובתקופה של חודש:

$$PV = (\text{مزומנים בניכוי הנחה}) 100 * (1 + 10\%)^{-1}$$

או:

$$PV = \frac{100}{(1 + 10\%)} = \text{(مزומנים בኒכי הנקה)}$$

בהמשך נקבל :

$$PV = \frac{100}{(1 + 10\%)} = 90.91 = \text{(مزומנים בኒכי הנקה)}$$

ועכשיו השאלה היא מעט יותר מוגדרת :  
מהו שיעור ההנקה שMOVEDIL אותו מ-100 ל-90.91?

$$\frac{90.91}{100} - 1 = -9.091\%$$

ניקח את כל הביטויים האפשרויות התשובה, ונציב בהם את שיעור הריבית הנתונה, ונגלה עבור מי מהם מתקיים הערך של 9.091% :

$$\frac{I}{I-R} \% \quad \text{א.}$$

$$\frac{I}{R} \% \quad \text{ב.}$$

$$R \% \quad \text{ג.}$$

$$\frac{R}{I-R} \% \quad \text{ד.}$$

ביטוי א

$$\frac{1}{1 - 10\%} = 1.11 \text{ Wrong}$$

ביטוי ב :

$$\frac{1}{10\%} = 10 \text{ Wrong}$$

ביטוי ג :

$$10\% \text{ Wrong}$$

ביטוי ד :

$$\frac{10\%}{1 - 10\%} = 0.11 \text{ Wrong}$$

ולכן התשובה ה. ככלומר, ניתן על לנסות לפתח אלגברית ביטויים שאינני בטוח בהם ולהגיע לתוצאות שמידת שקיים המתמטית לאפשרויות המונה מוטלת בספק, המלצתה : לבטא במספרים ולבדוק מה עונה לכלל.

שאלה 6

להלן נתונים זרמי המזומנים של פרויקט מסוים:

זום מזומנים	-60	120	1	2	שנה

סמן את הקביעה הנכונה:

- א. הפירמה תשקיע בפרויקט זה רק אם מחיר ההון הוא 50%.
- ב. לפרויקט זה אין שט"פ.
- ג. לפרויקט זה יש שני שט"פים.
- ד. הפרויקט אינו כדאי השקעה עבור כל מחיר ההון.
- ה. תשובות ב' ו-ד' נכונות.

פתרונות:

ברמת אפיון הפרויקט, תזרימי המזומנים משנים את סימנים משלילי לחובי (פעם אחת) ומחובי לשילי (פעם שנייה).

כאשר תזרימי המזומנים בפרויקט הופכים את סימנים מספר פעמיים השונה מ-1, אז מדובר בפרויקט שМОדרן ללא קוונציאני.

במקרים רבים זה אומר שלא ניתן לקבל החלטה באשר לכדיות הפרויקט לפי כלל השט"פ. כדי לאפיין את כדיות הפרויקט במצב כזה, מומלץ בחום לנסות לבנות את התצורה של עוקום העניין ועל בסיסו להסיק מסקנות.

הצורה של עוקום העניין מושפעת מנקודות החיתוך של העוקום עם הציר האופקי והאפיון הכללי של עוקום העניין - אני מאמין שת"פ (לא שת"פ) במובן של ערך כלכלי לקבالت החלטות, אלא שת"פ במובן מתמטי גרפי שיעזר להאריך צורת עוקום העניין. תזכורת: מציאות מתמטית של ערכי השט"פ דורשת בנית משווהת ה- $NPV$ , המשווהת מחיר ההון כנעלם, והשווהת המשווהת ל-0 כלהלן:

$$NPV = -60 + 120 * (1 + IRR)^{-1} - 100 * (1 + IRR)^{-2} = 0$$

אחד הטכניקות שאני אוהב כדי לפתור משווהה כזו היא לסמן:

$$X = (1 + IRR)^{-1}$$

ואז אקבל את המשווהה הבאה:

$$-60 + 120 * X - 100 * X^2 = 0$$

אני יכול לסדר את זה קצת אחרת:

$$-100X^2 + 120X - 60 = 0$$

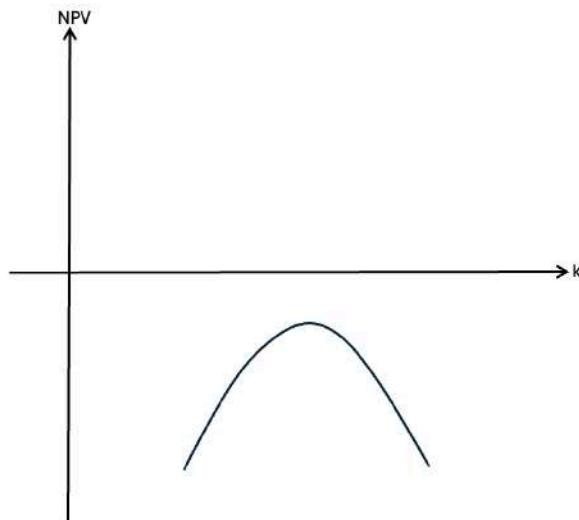
ואז להשתמש בנוסחת משווהה ריבועית כדי לנסות לפתור:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 * (-100) * (-60)}}{2 * (-100)} = \frac{-120 \pm \sqrt{-9,600}}{-200}$$

הואיל והביטוי מתחת לשורש שלילי, זה אומר שאין פתרון למשווהה ריבועית זו. אין שט"פ.

ואם כך, מדובר בעוקום עניין שאיננו חוצה את הציר האופקי כלל בrama הגרפית.

בנוסף בהינתן שזו משווהה ריבועית, חשוב (לצרכים כלליים) לדעת את הצורה הכללית שלה : בוכה או מחייבת? בהינתן המקדם השילילי של הערך בריבוע, הפרבולה בוכה (כmono).



- א. הפירמה תשקיע בפרויקט זה רק אם מחיר הון הוא 0%.
- ב. לפרויקט זה אין שת"פ.
- ג. לפרויקט זה יש שני שת"פים.
- ד. הפרויקט אינו כדאי השקעה עבור כל מחיר הון.
- ה. תשובה ב' ו- ד' נכונות.

וחמענה המסכם בהתייחס להיגדים אלו יהיה :

- א. שגוי - הפרויקט אינו כדאי אף מחיר הון.
- ב. נכון - ראו הנמקה לעיל
- ג. שגוי - כיב נכוון. ראו חישוב לעיל.
- ד. נכון - בהינתן צורת התרשים ומיקומו בתנאים אלו, העניין שלילי בכל מחיר הון.
- ה. **התשובה המלאה ביותר.**

#### שאלה 4

4. לקחתם הלוואה בגובה של 10,000 ש"ח בריבית שנתית 10% לפחות 5 שנים. החזר הלוואה בתשלומים זהים של קרן וריבית המשולמים בסוף כל שנה. יתרת הקרן לאחר התשלום השני:

- א. 5,512 ש"ח.
- ב. 5,964 ש"ח.
- ג. 4,487 ש"ח.
- ד. 6,560 ש"ח.
- ה. 6,000 ש"ח.

פתרון :

השאלה עוסקת בהלוואה הנפרעת בתשלומים "זהים" = תשלום קבועים, השווים זה לזה (סדרה קבועה). הלוואה הנפרעת בשיטה זו - נקראת גם "הלואת שפייר" (אם טרם עשיתם זאת - בקשה דאגו לעבור על נספח הפניות ללימוד עצמי שדן בנושא הלוואות).

בסיס הלוואת שפייר הבננה שסכום הלוואה שאני נוטל היום הוא בהגדרה הנוכחי (ערך שאני מקבל היום) של סדרת ההחזרים העתידיים. בעצם, זה אומר שמתקדים הביטוי הבא:

$$LOAN = PMT * PVFA(r, t)$$

כאשר :

הערך LOAN מייצג את סכום הלוואה.

הערך PMT מייצג את התשלום התקופתי קבוע בגין הלוואה.

הערך  $r$  מייצג את הריבית לפרק הזמן בין תשלוםים.

הערך  $t$  מייצג את מספר התשלומים הכלול בהלוואה.

כל שאלה על הלוואה הנפרעת בתשלומים קבועים (שפייר, כאמור) מתחילה מניתוח בסיסי של החזר התקופתי הקבוע בהלוואה.

$$10,000 = PMT * PVFA(10\%, 5)$$

ולכן התשלום התקופתי קבוע, כל שנה, הוא :

$$10,000 = PMT * 3.791 \rightarrow PMT \approx 2,638$$

הנדרש דרש את יתרת הקרן לאחר התשלום ה-2. אנו טוענים שיתרת הקרן היא בהגדרה הנוכחי של התשלומים שנותרו.

$$BAL_n = PMT * PVFA(r, t - n)$$

כלומר :

$$BAL_n = 2,638 * PVFA(10\%, 5 - 2)$$

או בעצם :

$$BAL_n = 2,638 * PVFA(10\%, 3) = 2,638 * 2.487 = 6,560$$

התשובה ד.

11. הניחו כי שוק ההון נמצא בשווי משקל לפי CAPM. נתונים שני תיק השקעות בעליים A ו-

B. תיק B צפוי להניב תשואה  $(E(R_B))$  כפולת מזו של תיק A  $(E(R_A))$  אולם סטיית התקן של

תיק B  $(\sigma_B)$  גבוהה פי שלוש מזו של תיק A  $(\sigma_A)$ . על פי נתונים אלו שער ריבית נטול סיכון

הוא:

א.  $E(R_B)/2$

ב.  $E(R_A)/2$

ג.  $\sigma_A/3$

ד.  $\sigma_B/3$

ה. לא ניתן לקבוע ללא נתונים על תוחלת תשואת תיק השוק.

פתרון :

שיעור משקל לפי CAPM בהיעדר נתונים נוספים - אין משמעו ייעילות; משמעו ש- SML בודאות מתקיים (ברירות מחדל).

ספקטיבית כאן, לצד נתונים שיעורי המשקל גם דאגו לצין בפניו שקיים שני תיקים השקעות **יעילות** המסומנים כ-A ו-**C** ו-**B** בהתאם.

$$E(B) = 2E(A)$$

$$\sigma_B = 3\sigma_A$$

נדרש :

$$R_F = ?$$

בהתנחת שהתיקים **יעילים**, ב-CAPM, בהינתן גם ערכי תוחלת וגם ערכי סטיית התקן שהקשר ביניהם מבוטא בקו **ה** - **CML**, אנסה לעובוד עמו.

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

אם שואלים ספקטיבית על  $R_F$ , ואין צורך אמיתי לחלץ את יתר הפרמטרים מהנוסחה, נוח מאד ליציג את שיפוע קו ה **CML** כneedle אחד.

$$(I) \quad E(A) = R_F + \alpha * \sigma_A \rightarrow \text{multiply by 3} \rightarrow 3E(A) = 3R_F + 3\alpha * \sigma_A$$

$$(II) \quad E(B) = R_F + \alpha * \sigma_B \rightarrow 2E(A) = R_F + \alpha * 3\sigma_A$$

נחסיר את משוואה (II) ממשואה (I) ונקבל :

$$3E(A) - 2E(A) = 3R_F + 3 * \alpha * \sigma_A - [R_F + \alpha * 3\sigma_A]$$

ובהמשך פיתוח קיבל בהתאם לתשובה ב :

$$E(A) = 2R_F \rightarrow R_F = \frac{E(A)}{2}$$

## שאלה מתוך הרצפים באתר

### יחידה 8

קטגוריות "בחן את עצמך"

### שאלה 10

בחרו את הטענה הנכונה, בהינתן התפלגות תשואות שני נכסים פיננסיים, לפי המצב הכלכלי במשק -

מצב כלכלי	הסתברות	תשואת נכס 1	תשואת נכס 2
גאות	16%	0.25	4%
ריגיל	12%	0.50	6%
מיתון	8%	0.25	8%

### שאלה 10

לא חסתיים

ניקוד השאלה:

5.00

3 סימן שאלה

יש לבחור תשובה אחת:

- א. נכס מס' 1 עדיף מנכס מס' 2 לפי קритריון תוחלת שנות.
- ב. נכס מס' 2 עדיף מנכס מס' 1 לפי קритריון תוחלת שנות.
- ג. אי-אפשר לקבל החלטה בין הנכסים, ללא ידיעת סוג המשקיע.
- ד. אפשר ליצור תיק שwonothו שווה ל-0, על-ידי שילוב של נכס 1 ונכס 2.
- ה. לא ניתן לדעת דבר לגבי אפשרות שילוב שני הנכסים, מאחר שאין נתונים לגבי המתאים ביניהם.

פתרון :

האתגר המרכזי בשאלה זו טמון בהיגד ד. בהתאם להיגד, הר依 שלפחות עקרונית, ניתן לשלב בין הנכסים. על מנת לבחון את השפעות השילוב בין נכסים מסוימים, علينا לדעת מקדם המתאים בין תשואות הנכסים, כאשר מקדם מותאם זה איננו נתון בשאלה.

חישוב מקדם המתאים בעצמנו על בסיס נתוני התפלגות תשואות הוא אקט מעט אכזרי וארוך, אך ניתן לבצעו בהתאם לפירוט שסיפקתי בפתרונם למבון 6 שאלה 7 כאמור בפרק שיעור 6.

באופן כללי :

תחילה علينا לחשב את התוחלת של כל נכס :

$$E(1) = 0.25 * 0.16 + 0.5 * 0.12 + 0.25 * 0.08 = 0.12 = 12\%$$

$$E(2) = 0.25 * 0.04 + 0.5 * 0.06 + 0.25 * 0.08 = 0.06 = 6\%$$

סטיתת התקן של כל נכס :

$$\sigma_1 = \sqrt{0.25 * (0.16 - 0.12)^2 + 0.5 * (0.12 - 0.12)^2 + 0.25 * (0.08 - 0.12)^2} = 2.8284\%$$

$$\sigma_2 = \sqrt{0.25 * (0.04 - 0.06)^2 + 0.5 * (0.06 - 0.06)^2 + 0.25 * (0.08 - 0.06)^2} = 1.4142\%$$

נכס 1 מניב תוחלת גבוהה יותר מנכס 2, אך גם סיכון גבוה יותר. לכן לא ניתן לקבוע מי מבין הנכסים עדיף לפי תוחלת שונות.

בבקשר לשאלת - מהי משמעות השילוב, علينا לחשב את מקדם המתאים. מקדם המתאים הוא היחס בין השונות המשותפת לבין מכפלת סטיות התקן של הנכדים.

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A * \sigma_B}$$

השונות המשותפת בפניהם עצמה היא סיכון המכפלה של כל הסתברות (משותפת) בשני הפרשים : ההפרש בין תשואת הנכס הראשון לתוחלת הנכס השני, וההפרש בין תשואת הנכס השני לתוחלת הנכס השני :

$$COV(1,2) = P_1 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + P_2 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + \dots$$

מקדם המתאים מחושב כך על בסיס התפלגות תשואות הנכדים :

$$\rho_{1,2} = \frac{P_1 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + P_2 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + \dots}{\sigma_1 * \sigma_2}$$

ב换בנה :

$$\rho_{1,2} = \frac{0.25 * [0.16 - 0.12] * [0.04 - 0.06] + 0.5 * [0.12 - 0.12] * [0.06 - 0.06] + 0.25 * [0.08 - 0.12] * [0.08 - 0.06]}{0.028284 * 0.014142} = -1$$

כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסווגים הוא 1, בהגדרה ניתן לבנות מושילוב כלשהו שלהם נכס חסר סיכון / נכס בעל סטיית התקן אפס.

התשובה הנכונה: ד.

#### שאלה 4

נכס כלשהו צפוי לחת למשכיע הכנסה בגובה 100 ש"ח בעוד שנה. ידוע כי מחיר הנכס בעוד שנה (מייד לאחר קבלת הכנסה) יהיה 600 ש"ח. בהנחה שהמשכיע דורש מהנכס תשואה בגובה 15% לשנה, מהו המחיר המרבי שהייה מוכן לשלם עבור הנכס היום?

- א. 700 ש"ח.
- ב. 535 ש"ח.
- ג. 609 ש"ח.
- ד. 522 ש"ח.
- ה. 622 ש"ח.

פתרון :

מנקודת ראותי היום, כשהאני מביט על הערך שצפוי לנבוע מהנכס בעתיד, אני מבין שהוא מורכב מ-2 חלקים: בעוד שנה קיבל (אם נשקיע היום) 100 ש"ח, בנוסך נחזיק בנכס שווה (לעתם אותה שנה) 600.

סך הערך העתידי שניבע לי כמשמעותו בערך שנה מהנכש הוא  $700 \text{ ש"ח} = 100 + 600$ . כל מה ש策יך לעשות הוא להוון ערך זה שנה אחת לאחריה במחיר ההון הנוכחי - וקיים שווי להיום :

$$PV = 700 \times (1 + 15\%)^{-1} \approx 609$$

**מעתה אדע: אם מבקשים שווי נכס, ונותנים גם תזרימי המזומנים העתידיים, וגם את שוויו לאחר תזרימיים עתידיים אלו, אתייחס לתזרימי המזומנים וגם לשווי העתידי בתווך הערכים策יך להוון (לחשב PV בוגנים) כדי לדעת מה השווי היום / מה המחיר המירבי שמכנים לשלט בעד הנכס היום.**

### בחן את עצמך - יח' 8

אם ידוע כי תוחלת תשואת תיק השוק היא 20% וריבית חסרת סיכון היא 4%, מה יהיה הרכב התקיק שתוחלת תשואתו היא **36%**?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. חסרים נתונים סיכון בשוק.
- ב. חסירה ה- $\beta$  של התקיק.
- ג. 200% בתיק השוק ו-100% הלוואה בשער ריבית חסר סיכון.
- ד. מדובר בתיק המורכב ארכ רוק מהשקרה בתיק השוק.
- ה. לא ניתן להגיע לתיק כזה.

**הגשת תשובה**

<b>7</b>	שאלות
לא סתמיים	
ביקוד השאלה:	5.00
סימון שאלה	3

השאלה כוללת מידע בדבר תיק השוק וריבית חסרת סיכון.  
אוטומטית אני במודל ה - CAPM.

במודל זה, אלא אם יש מגבלות מיוחדות - המשקיע צפוי לבחור בתיקים ייעילים, אלו המקיימים את הנוסחאות המוגנות לעולם ייעיל.

אחד מبن הנוסחאות הקשורות במידת ריבת השוק וبنכס חסר סיכון בהתאם בתיק ייעיל היה :

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

אם נציב את ערכי השאלה הרלוונטיות :

$$0.36 = W_F * 0.04 + (1 - W_F) * 0.2$$

$$0.36 = W_F * 0.04 + 0.2 - 0.2W_F$$

$$0.36 - 0.2 = -0.16W_F \rightarrow W_F = -1$$

כאשר משקל ההשקעה ב-  $WF$  שלילי, המשמעות היא שהמשקיע נוטל הלוואה. ההלוואה מבוטאת ביחס להוון העצמי של המשקיע; לעומת זאת  $WF = -100\%$  המשמעות היא  $WF = -1$  כלומר המשקיע נוטל הלוואה בשיעור

100% מהוננו העצמי הראשון, ומשקיע את כל 200% הכספיים (כספי המקורי פלוס כספי הלוואה) בתיק השוק.

כך שבסך הכל התשובה ג:

הלוואה בשיעור 100%, והשקעת מלאה הכספיים - 200% בתיק השוק.

## שאלת שני בובו - ריבית נקבה והמטרה

שואלת בובו: אם אני צריכה לעשות התאמה של נניח ריבית נקבה של 24% שנתית לחודשית על מנת לחשב PVFA או FVFA, אז ברגע שעשיתי לה חלק 12 וקיבלתי את ה-2 אני מציבה אותה בנוסחאות הרלוונטיות בלי חשש נכוו?

התיחסות:

ככל - את צודקת. אם הריבית היא נקבה, התהליך הבסיסי שנרצה לבצע הוא להמיר אותה לנקבה לתקופת חישוב אחת, על ידי חלוקה.

הרי באופן כללי, כאשר רצינו להמיר ריבית נקבה לאפקטיבית (ריבית דרייבית):

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

אם למשל מספרים לי על צורך בדיאן בהלוואת שפיצר (הנפרעת בחזרים קבועים), כאשר תזרות החזר היא חודשית והריבית הנקבה היא 24%, לאורה - אני צריכה להמיר אותה לאפקטיבית:

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{n}\right)^m - 1$$

איך אשלים נוסחה זו ומה הקשר לשאלת שלי?

ראשית, אם עסקה נפרעת בתשלומים חודשיים הרי גם אם לא אמרו - המשמעות היא שהריבית מחושבת כל חודש.

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^m - 1$$

אבל מה מעריך החזקה? ובכן, הוайл ואנחנו עובדים עם סדרה שהיא חודשית, למעשה אנחנו רוצים ריבית לחודש אחד. לכן מעריך החזקה 1.

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^1 - 1 = \frac{24\%}{12} = 2\%$$

לכן את צודקת, אבל הגישה המפורטלת הזו לתשובה נועדה לעזור לנו להבין שהחלוקת ב-12 אינה סוג של "נוסחה חדשה". היא למעשה התוצאה של מקרה פרטי שבו הריבית מחושבת כל חודש, ואני זוקים לריבית לחודש אחד בלבד.

## שאלה 6

שת"פ של פרויקט מסווג השקעה, המניב תזרים מזומנים שנתי קבוע, הוא 20%. אורך חיי הפרויקט הוא 8 שנים. מכאן **שמדד הרוחיות של הפרויקט במחיר הון של 15% הוא:** (התשובות מופיעות ברמת דיקן של 2 ספרות אחרי הנקודה)

- א. 1.33
- ב. 1.04
- ג. 1.17
- ד. 0.86
- ה. אי-אפשר לחשב עקב מחסור נתונים.

**פתרון :**

אמנם הערכים אינם נתונים, אבל תזרימי המזומנים של הפרויקט קבועים. חלק מהתהליך של חישוב מדד הרוחיות מערב במרקם ובאים את חישוב ה-  $NPV$ , בהתאם, להלן ניסיון לחשב את הענ"ג בהתאם. בחישוב הענ"ג, תמיד מתבססים על מחיר ההון של החברה בפועל - המטרה היא לחשב את שווי הפרויקט מנקודת ראות החברה הספציפית ובשים לב עלות גiros ההון (מחיר ההון) בחברה הספציפית כאמור. מחיר ההון כאן 15%, וכך נקבל :

$$NPV = -X + CF * PVFA(15\%, 8)$$

ニיצב אני בפני שוקת שבורה, נעלמי רבים מדי.

לעומת השימוש במחיר ההון לחישוב הענ"ג, שלא סיפק אותנו, יש גם נתון בדבר השט"פ. על פי ההגדרה, בשונה מהענ"ג שהוא מחיר ההון של החברה הספציפית, השט"פ הוא אותו מחיר הון (תיאורטי) שMOVIL לאיפוס משווהת הענ"ג.

$$0 = -X + CF * PVFA(20\%, 8) \rightarrow 0 = -X + CF * 3.837 \rightarrow X = 3.837CF$$

נחזיר לנוסחת ה-  $NPV$  ונציב ערך זה של  $X$ :

$$NPV = -X + CF * PVFA(15\%, 8)$$

$$NPV = -X + CF * 4.4873$$

$$but X = 3.837CF$$

therefore:

$$NPV = -3.837CF + CF * 4.4873$$

$$NPV = -3.837CF + 4.4873CF$$

אחת ההגדרות שהעננו במחברת הקורס למדד הרוחיות היא :

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולי}}}{|PV_{\text{תשומתי}}|} = \frac{4.4873\text{€}}{3.837\text{€}} \approx 1.17$$

מתוך "בחן את עצמך" ביחידה 5:

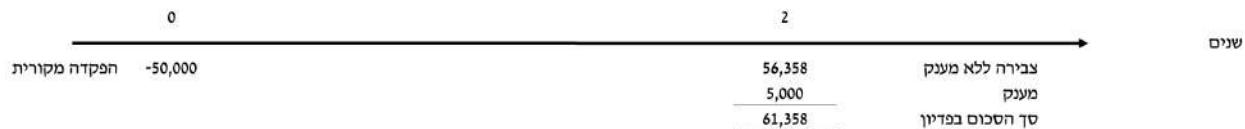
### שאלה 5

בנק "הידיד" מצוי למפקדים 50,000 ש"ח מענק בשיעור 10% מסכום ההפקדה המזוכה מידית בחשבן הפיקדון. בנוסף מציע הבנק ריבית של 0.5% לחודש על סכום ההפקדה המקורי בלבד, דהיינו המענק אינו צובר ריבית. תכנית החיסכון סגורה לשנתיים.

#### מהי הריבית השנתית האפקטיבית שהבנק מעניק?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 16.2%
- ב. 6.2%
- ג. 10.8%
- ד. 22%
- ה. 11.9%



הסברים נוספים:

הפקדה המקורית היא 50,000 כנותן. לכאורה נשאלת השאלה - אם מתקבל מענק מיידי, האין הדבר מקטין את הערך המוחלט של ההפקדה בזמן אפס (בסיימון חיובי)? בכלל, התשובה לכך הייתה "כן" אם היה ניתן שהמענק מתקבל ישירות לעו"ש / בזמן. אבל כאן - אלו לא פני הדברים. המענק מזוכה בחשבן הפיקדון עצמו, ובהתאם, יתקבל רק במועד הפיקדון עצמו - בעוד שנתיים, וזאת בשיעור של 10% מסכום ההפקדה המקורי של 50,000 ולמן הסכום הנ"ל  $5,000 = 10\% * 50,000$  הוא אחד מרכיבי התקובל במועד הפיקדון.

פרט לכך וכנותן, קיבל המשקיע את הסכום המקורי ללא המענק - 50,000, בתוספת צבירת ריבית חודשית נתונה של 0.5%, אשר תצטבר במשך שנתיים. בהינתן שבמהלכן של שנתיים אלו ישנים 24 חודשים, סך הציבורה בגין ההפקדה לתום השנתיים:

$$50,000 * (1 + 0.5\%)^{24} \approx 56,358$$

סך התקובל כולל מענק שזוכה לחשבן הפיקדון, וכ כולל הפיקדון עם צבירת ריבית בגיןו, מוביל לסכום בפדיון שהוא בסך הכל:

$$56,358 + 5,000 = 61,358$$

ואם כך: המשקיע מפקיד 50,000 ומקבל בעוד שנתיים 61,358.

הרכיבת האפקטיבית לשנתיים, לכל תקופת העסקה, המגולמת בכך ניתנת לחילוץ לפי היחס בין הערכיהם:

$$r_{ef}(2 \text{ years}) = \frac{61,358}{50,000} - 1 = 22.716\%$$

הוائل ונדרשה ריבית אפקטיבית לשנה אחת, אפשר לתקן את הריבית זו באמצעות חזקה מתאימה (זו לא ריבית נקובה, היא אפקטיבית) :

$$r_{ef}(\text{annual, 1 year}) = [1 + r_{ef}(\text{2 years})]^{\frac{1}{2}} - 1$$

ובהצבה :

$$r_{ef}(\text{annual, 1 year}) = [1 + 22.716\%]^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 10.8\%$$

### שאלה 11 - בוחן את עצמן - יח' 8

בשוק נסחרות שתי מניות ונכס חסר סיכון. תשואת נכס חסר סיכון 3%. מקדם המתאים בין שתי המניות (א ו-ב) הוא 0.2.

מניה א - בעלת תוחלת תשואה של 10% וסטיית תקן של 4%.

מניה ב - בעלת תוחלת תשואה של 18% וסטיית תקן של 6%.

משקיע בונה תיק המשלב 20% ממניה א, 70% ממניה ב ו-10% השקעה בנכס חסר סיכון. **התיק שנתקבל הינו בעל סטיית תקן של** - (התשובות מופיעות ברמת דיק של ספרה אחת לאחר הנקודה)

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 4.1%
- ב. 4.6%
- ג. 4.4%
- ד. 4.3%
- ה.

לא ניתן לחשב, שכן חסר נתונים לגבי סטיית התקן של הנכס חסר הסיכון והמתאים בינו לבין נכסים א ו-ב.

פתרונות :

כאשר שאלת דורשת ממני להתייחס לשילוב ספציפי של נכסים מסוימים - גם אם משורבב גם נכס חסר סיכון למשחק - אני לא נמצא במודל ה - CAPM אלא במודל שיקול נכסים מסוימים. בדרך כלל, מודל ה - CAPM עוסק בתיקים לא ייעילים, או בתיקים ייעילים המהווים שילוב של תיק השוק ונכס חסר סיכון בלבד. כלומר, בסך הכל, זו שאלה טכנית יחסית - לשלב בין נכסים ולהגיע לסטיית התקן של התקיק המשולב. מה שלכארה מטריד אותי - זו העובדת שמדובר בשילוב 3 נכסים, בעוד שרוב הזמן עסקנו בשילוב 2 נכסים מסוימים בלבד.

סטיית התקן של תיק השקעות המורכב מ-2 נכסים בלבד :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

כשיש שלושה נכסים מסוכנים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

הוائل וכאן נכס אחד מהשלושה הוא חסר סיכון והואיל וסתיתת התקן של נכס חסר סיכון הינו 0 בהגדרה, מתקיים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

או בעצם :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

כלומר בהצבה נקבל :

$$\sigma(P) = \sqrt{0.2^2 * 0.04^2 + 0.7^2 * 0.06^2 + 2 * 0.2 * 0.7 * 0.04 * 0.06 * 0.2} \approx 4.4299\%$$

**בקירוב, התשובה ג.**

#### חידה 8 - בוחן את עצמן - שאלה 13

$$E(r_M) = 10\%, \sigma(r_M) = 10\%, r_f = 6\%$$

בהתהה שהמשקיעים בוחרים להשקיע את כספם בתיק **יעיל** המורכב ממשקיעה בתיק השוק ובנכסים נטול סיכון. **משקיע א** בוחר בתיק **יעיל** עם תוחלת תשואה של 7% ואילו **משקיע ב** בוחר תיק **יעיל** עם סטיית התקן תשואה של 7%.

#### סמןו את הקביעה הנכונה -

יש לבחור תשובה אחת:

- א. משלם א שונא סיכון יותר מאשר ממשקיע ב.
- ב. משלם ב שונא סיכון יותר מאשר ממשקיע א.
- ג. לא ניתן לדעת מנתוני השאלה מי מהמשקיעים יותר שונא סיכון.
- ד. שני המ muschiים שונאי סיכון במידה זהה.
- ה. שני המ muschiים אוהבים סיכון במידה זהה.

פתרון :

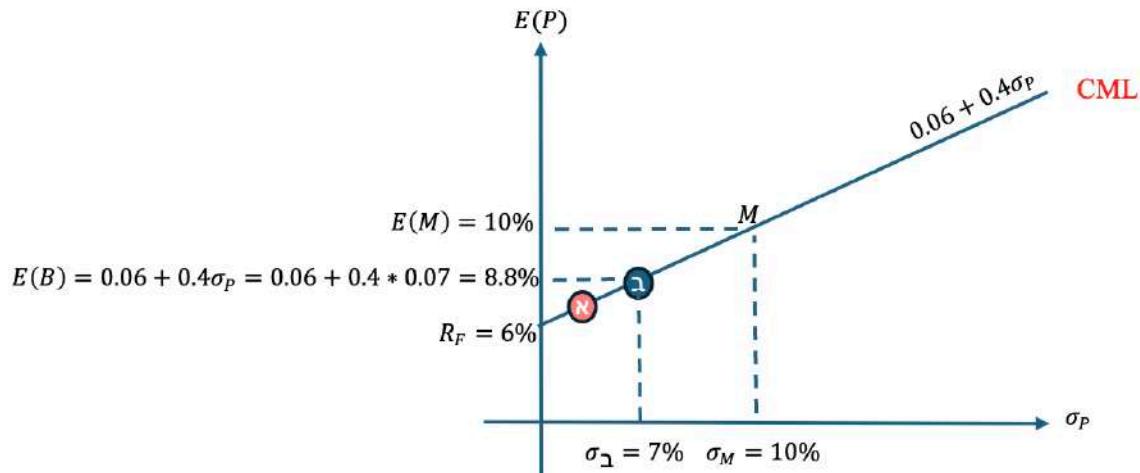
שילוב של תיק השוק ונכס חסר סיכון ליצירת תיק **יעיל** - מודל ה - CAPM. הנוסחה הקלאליסטית ביותר לתיקים **יעילים ב- CAPM** היא קו ה - CML שמציג את הקשר בין סטיית התקן לבין תוחלת התשואה של התקן היעיל.

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

ב换כבות הנתונים הכלליים בשאלה, הנוסחה תהיה :

$$E(P) = 0.06 + \frac{0.1 - 0.06}{0.1} * \sigma_P \rightarrow E(P) = 0.06 + 0.4\sigma_P$$

מעבר כעט לאירור רלוונטי ונסביר את תוצאותיו :



הסביר :

ראשית אירנו את קו ה - CML ורשמו את נוסחאתו.  
 הוכיחו את סטיית התקן של נכס במשוואת ה - CML ומצאו שתוחלת תשואתו 8.8%.  
 בהגדרה, נכס A שתוחלתו נמוכה מכך - 7% בלבד - נמצא משמאל ולמטה ביחס לנכס B, כלומר משקף סיכון נמוך יותר.  
 העובדה משקיע א בחר בתיק בעל סיכון נמוך יותר, למורות ה"מחיר" בדמיות תוחלת תשואה נמוכה יותר - מעידה עליו כזו שהוא "יותר שונא סיכון" מהמשקיע ב.  
 שימו לב: שניהם שונים סיכון, כל המודל מניה שנאת סיכון, אך משקיעים הבוחרים להמצא שמאלה ולמטה יותר, הם בעלי דרגת שנאת סיכון גבוהה יותר בהגדרה.  
 התשובה A.

**שאלת קהל - ריביות והמרתן**

בהמרת ריבית, או חישוב ריבית - כיצד מובצת התאמה של התקופה / הזמן של הריבית האפקטיבית, לפי איזו נוסחה, איך מזחים זאת, וنمנים מבלבול?

משמעות:

הדיון בשאלות הקורס עוסק תמיד בRibit "אפקטיבית". Ribit אפקטיבית היא למעשה הריבית ה"כוללת" שמשקפת את כל ההשפעות של עלויות המימון על העסקה (כולל Ribit דרייבית, עלות, Ribit מושך וכן הלאה). בדרך כלל, נתקל בחישובי Ribit והמרתנה ב-3 הקשיים:

**א. מקבלים שאלת שכוללת נתונים של סדרה / סדרות של תזרימי מזומנים, וצריך להתאים את הריבית האפקטיבית כדי "לעבד" ולהשאיב את הנדרש באשר לסדרה.**

המחשה:

מהו הערך הנוכחי של סדרת תקבולים הכוללת 100 ש"ח שישולם בתום כל חודש במשך שנה, ו-200 ש"ח בתום כל חודש עוקב במשך שנתיים, אם ידוע שהריבית השנתית היא 12.6825%?

פתרון:

במקרים כלליים, כאשר נתונה הריבית להיוון, כבירות מחדל היא Ribit "אפקטיבית" ובעצם הפעולה הנדרשת היא למתאים אותה / להמיר אותה מתקופה אחת לאחרת - למשל, כאן: המושך והתזרומים הם כל חודש, והריבית היא שנתית - הנדרשת המרה של הריבית משנה לחודש. את ההמרה מבצעים באמצעות "מערך חזקה" רלוונטי:

$$r_e = (1 + r)^n - 1 = (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1\%$$

למעשה: התבססנו על 1 ועוד Ribit אפקטיבית שנתית נתונה, ומערך חזקה הוא למעשה היחס בין התקופה הנדרשת (חודש, כי זה פרק הזמן בין תזרימי בסדרות שלגביהם נדרש החישוב) לבין התקופה הנתונה (שנה).

הפתרון עצמו, של השאלה, יהיה:

$$PV = 100 * PVFA(1\%, 24) + 200 * (1 + 1\%)^{-12}$$

כי הסדרה הראשונה החלה בזמן 1, לכן הערך הנוכחי מוביל בזמן 0 (עיקרונו "אותה אחרת"), הסדרה השנייה מתחילה בזמן 13, לכן הערך הנוכחי מוביל בזמן 12 (עיקרונו "אותה אחרת") וכך יש לתאם 12 תקופות נוספות לאחר.

טיפ: לקוראים ולקוראות המطلבים לגבי אופן היישום של התאמות הזמן בחישובי ערך הנוכחי ועתידי, מומלץ לעיין בדוגמאות המלויות בגרפים ותיאור מוד מפורט, כאן - [ערך עתידי עם התאמות](#), וכן - [ערך נוכחי עם התאמות](#).

ב. מקבלים נתוניים מפורטים לגבי על סדרה, עם או ללא עמלות, ורכיבי תזרימי מזומנים נוספים, וצריך לגנות את הריבית האפקטיבית הגדולה בהסדר.

הנחה: ינו שוקל לרכוש מחשב Macbook Air M3 חדש. עלות המחשב במזמן 5,000 ש"ח. היבואן מציע לשלם על המחשב בפריסת 36 תשלומים שווים "ללא ריבית". פרט לתשלום התקופתי הקבוע, נדרש לשלם ליבואן בכל חודש עמלת סliquה בסכום של 30 ש"ח. התשלומים יבוצעו בתום כל חודש.  
נדרש: מהי הריבית האפקטיבית השנתית הגדולה בהסדר?

$$\text{התשלום הקבוע ללא ריבית (לא כולל עמלת סliquה):} \\ \frac{5,000}{36} \approx 138.89 \\ \text{עמלת סliquה:} \\ \underline{30} \\ \text{סך הכל תשלום חודשי:} \\ 168.89 \text{ ש"ח.}$$

כדי לגנות את הריבית בסדרת תשלומים, נשתמש במשפט: **"מחיר המוצר במזמן הוא הערך הנוכחי של התשלומים הנוכחיים (PV) לפי הריבית המגולמת בעסקה".**

$$5,000 = 168.89 * PVFA(r, 36)$$

$$PVFA(r, 36) = \frac{5,000}{168.89} \\ PVFA(r, 36) = 29.605$$

נכנס ללוח א-4 בנספח א לכרך ד, ונחפש בהינתן 36 תשלומים  $t=36$  את שיעור הריבית  $r$  שמוביל לערך קרוב ככל הניתן ל-29.605. מקבלים 1%.

$$r = 1\%$$

הריבית שחילצנו מותוק נתוני סדרה שאיבריה חודשיים, היא תמיד ריבית אפקטיבית חודשית. הויאל ודרשו ריבית אפקטיבית שנתית, עליינו בהתאם אותה. עם מעיריך חזקה מותאים!

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{\text{monthly}})^{12} - 1 = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12.6825\%$$

וזו תשובהנו הסופית: הריבית השנתית היא 12.6825%.

ג. מקרה שבו יש להמיר **ריבית נקובה / ריבית דרייבית / ריבית מראש למונחי ריבית אפקטיבית**.  
 במקרה כזה, בדרך כלל נזהה שאלות שכלי הדיוון שלו הוא בשיעורי ריבית בלבד. לא רק זאת, שאלות אלו נזהה במקרים רבים את המונחים "הריבית מחושבת כל \_\_\_\_\_" או "הריבית מושלמת מראש", ולא נזהה סדרות או סכומים כספיים.  
 זהו המקרה ה"מורכב יותר" שדורש יישום נוסחאות מגוונות לחישוב הריבית האפקטיבית כאמור. נציג מספר אפשרויות.

**המחשה 1 : ריבית דרייבית**  
 מהי הריבית האפקטיבית השנתית אם ידוע שהריבית הנקובה השנתית היא 8% והיא מחושבת כל 4 חודשים?

כאשר נתונה ריבית נקובה המוחושבת כל ייחידת זמן (חודש / רבעון / שבועיים / חצי שנה...), הדבר הבסיסי להמיר את הריבית מנקובה לאפקטיבית היא על בסיס הנוסחה המתאימה לעקרון ה"ריבית דרייבית":

צעד ראשון : לוקח את הריבית הנתונה, ומחלק אותה למספר תקופות החישוב שלה (כדי להגיע לריבית לתקופה חישוב בודדת) :

$$r = \frac{R}{n}$$

במקרה שלנו, נתונה ריבית נקובה שנתית (R) נתון היא מחושבת כל 4 חודשים (3 פעמיים בשנה). לכן כדי ליציר ריבית לתקופה חישוב אחת, נחלק את הריבית הנתונה ב-3:

$$r = \frac{8\%}{3} = 2.66667\%$$

זו הריבית לתקופה חישוב אחת - ל-4 חודשים. בשלב הבא, נרצה להמיר אותה מ-4 חודשים חוזרת לשנה לפי נוסחת הריבית האפקטיבית:

$$r_{annual} = (1 + r_{4\ Months})^3 - 1 = (1 + 2.66667\%)^3 - 1 \approx 8.22\%$$

אפשר גם לאחד את שני צעדי העבודה לביטוי אחד ויחיד :

$$r = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{8\%}{3}\right)^3 - 1 = 8.22\%$$

### המחשה 2 : ריבית דרייבית וריבית מראש

בנק "הנקניקים" מציע لكم הלוואה בסך 100,000 ש"ח לשנה. הלוואה נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל רביעון ומשולמת בתום התקופה, וכן דורש עמלת ערך מסוים בשיעור שנתי של 8% בחישוב חצי שנתי המשולמת בתחילת התקופה. מהי הריבית האפקטיבית השנתית בהסדר?

גם כאן, למרות אזכור הסכום הכספי של הלוואה, מדובר בשאלת ריבית טהורה, הערכיים אחווזיים, אין נתונים בדבר סדרות תשלוםים ונדרשת ריבית באחויזים כן (לא ערךכספי). אני מזהה בשאלת הזו  
שני מוקדי כוח :

ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל רביעון ומשולמת בתום התקופה (בתום השנה). חילק זהה פשוט יחסית :

$$r = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{12\%}{4}\right)^4}{\left(1 - \frac{8\%}{2}\right)^2} - 1 \approx 22.13\%$$

### המחשה 3 : ריבית דרייבית וריבית מראש - דוגמא נוספת

בנק "קובעים" של קש"י מציע لكم הלוואה בסך 500,000 ש"ח לשנתיים. הלוואה נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 10% המוחשבת כל חודש ומשולמת בתום התקופה. כמו כן, נושא הלוואה עמלת הקמת הלוואה בשיעור שנתי של 5% בחישוב רביעוני המשולמת בתום התקופה. במועד פירעון הלוואה, יש לשלם בנוסף דמי סילוק בשיעור 8% מקרן הלוואה הראשונית (לא עמלות ערך מסוימים או ריבית צבורה). מהי הריבית האפקטיבית השנתית?

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{24} + 8\%}{\left(1 - \frac{5\%}{4}\right)^8} - 1 \approx 43.81\%$$

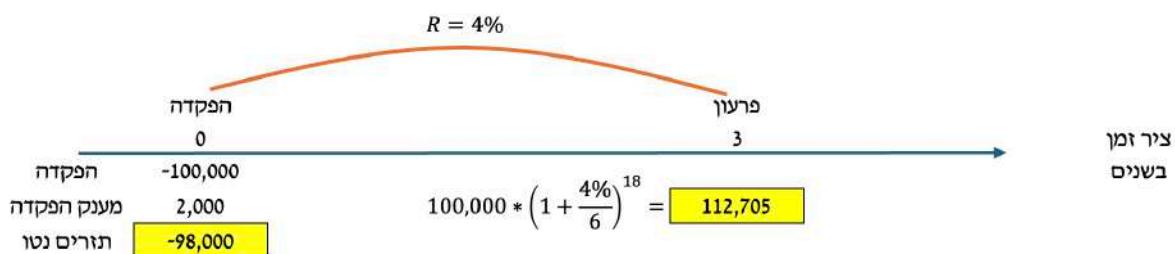
כעת, המרה מריבית אפקטיבית לשנתיים לריבית אפקטיבית לשנה אחת היא פשוטה במינוח :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 43.81\%)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 19.92\%$$

מסקנה : הריבית האפקטיבית לשנה היא כ-19.92%

המחשה 4 : ריבית דרייבית וריבית מראש שמוגדרת באופן כספי הפקדתם בפיקדון סכום של 100,000 ש"ח. בהתאם לתנאי הפקדון, הוא צובר ריבית שנתית נקובה בשיעור 4% המוחשבת כל חודשים. קרן הריבית והפקדון תפרע בתום התקופה - בחלוף 3 שנים. מיד במועד ההפקדה לפיקדון מזוכה בחשבון העו"ש של המפקיד "מענק הפקדה" בסכום של 2,000 ש"ח. מהי הריבית השנתית האפקטיבית המגולמת בעסקת ההפקדה?

השאלה זו שונה מקודמתה, משום שנתוני הריבית (ומענק הפקדה הוא חלק מכך) הם בחלוקת באחזois ובחלוקם בערכים כספיים. כאשר אני מקבל בשאלה זו, אני מעדיף להתייחס לערכים הכספיים באופן מלא, ולהשאיב את הריבית האפקטיבית דוקא לפי היחס ביניהם.



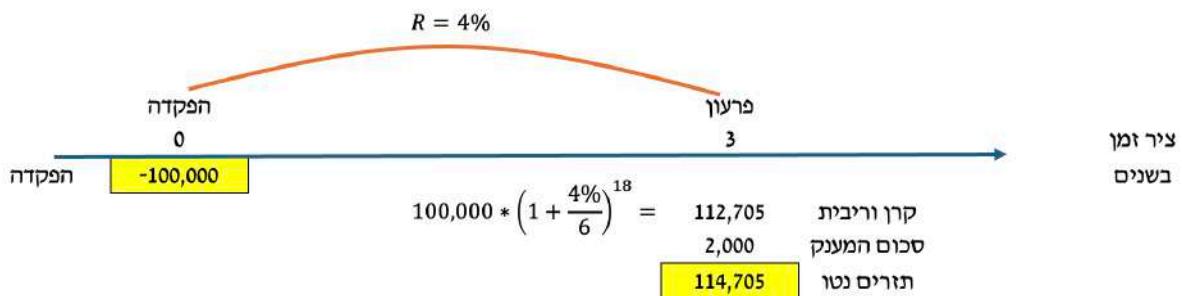
כדי לחשב את הריבית האפקטיבית במצב זה, נתבוסס על היחס בין סך התקובל בתום התקופה לבין ההשקעה נטו בתחילת התקופה (ערך המוחלט) :

$$r_e(3 \text{ years}) = \frac{112,705}{98,000} - 1 = 15\%$$

אם ארצת להתאים את הריבית למועדים של שנה אחת :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 15\%)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 4.77\%$$

המחשה 5 : ריבית דרייבית וריבית מרأس, הגדרה כספית - וציבורה לפקדון  
 חזרו על חישוביכם בהמחשה 4 אם ידוע שהבנק קבוע כי מענק ההפקדה **מצטרף לפקדון**, וכי הריבית  
 בפקדון מוחושבת על סכום ההפקדה הראשוני (ללא סכום המענק).



ריבית אפקטיבית לתקופת העסקה כולה, 3 שנים :

$$r_e(3 \text{ years}) = \frac{114,705}{100,000} - 1 = 14.705\%$$

אם ארצה להתאים את הריבית למונחים של שנה אחת :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 14.705\%)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 4.68\%$$

**שאלה נוספת - מרכיבים - יח' 5 - בוחן את עצמן - שאלה 7**

לחברה מוצעות שתי אלטרנטיבות ללקיחת הלוואה על סך 100,000 ש"ח, למשך שנה:

1. ריבית של 3.5% לחודש, מחושבת כל חצי שנה.

2. ריבית של 21.6% לשנה וניכוי מראש של %X בתחילת השנה.

באיזה שער ניכוי מראש (%X), תהיה החברה אדישה בין שתי האלטרנטיבות?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 19.5%
- ב. 14.4%
- ג. 16.9%
- ד. 24.8%
- ה. 20.4%

**הגשת תשובה**

**פתרונות :**

כאשר נתונים לי ערכים של ריבית או ניכוי מראש באחזois, וMbpsים שנבחר בחלוקת העדיפה, הדיוון של מtbody על חישוב הריבית האפקטיבית בכל חלופה - בהלוואות נבחר בריבית האפקטיבית הנמוכה ביותר, ובהשקעות - בריבית האפקטיבית הגבוהה ביותר.

יש כאן שני מקרים:

מקרה 1 - כולל ריבית לחודש, מחושבת כל חצי שנה. צריך להגיע לריבית אפקטיבית לשנה, שהיא תקופת ההלוואה.

כאשר הריבית "מחושבת כל", את המרת הריבית לאפקטיבית נבע בשני שלבים: בשלב ראשון, ניקח את הריבית הנתונה (נקובה) ונכפול או נחלק אותה כדי להגיע לתקופת חישוב. במלים אחרות, כאן הריבית הנתונה היא 3.5% לחודש, אבל הואיל ומוחשבת כל חצי שנה, נכפול אותה ב-6. התוצאה: 21%. בשלב השני, מtbody על הריבית לתקופת חישוב ועל העלאה בחזקה רלוונטי, כדי להמיר את התוצאה מתקופת חישוב לתקופה הכוללת הנדרשת.

$$r_e = (1 + R * n)^m - 1$$

בתוך הסוגרים: המרת הריבית הנתונה (חודשית) לתקופת חישוב אחת (חצי שנה) זו את ע"י מכפלה ב-6.

במעריך החזקה: המרת הריבית לתקופת חישוב (חצי שנה) לשנה (הנדשת) זו את על ידי חזקה 2.

$$r_e = (1 + 3.5\% * 6)^2 - 1$$

$$r_e(option1) = (1 + 21\%)^2 - 1 = 46.41\%$$

מקרה 2 - כולל ריבית "בסוף התקופה" שמשלמים בשיעור 21.6% וכן ניכוי מראש בשיעור לא ידוע (x). במצב שבו יש שילוב של ריבית "בסוף" וריבית " מראש", ניצרך שבר שבמונה שלו כולל את תוספת הריבית בתום התקופה, ובמקרה - את ניכוי הריבית מראש בתחלת התקופה. הנוסחה תהיה:

$$r_e = \frac{1+r}{1-d} - 1$$

$$r_e(option2) = \frac{1 + 21.6\%}{1 - d} - 1$$

אדישות בין ריבית זו לריבית שחילצנו במקרה 1 תתקיים כאשר יהיה שווין בין הריביות, כלומר:

$$r_e(option1) = r_e(option2)$$

$$46.41\% = \frac{1 + 21.6\%}{1 - d} - 1$$

מפה רק נותר לפטור משווה בנים אחד:

$$d = 16.94\% \approx \textcolor{yellow}{16.9\%}$$

המסר העיקרי של השאלה הוא: למורות שברוב המקרים כשנתונה "ריבית המוחשבת מספר פעמים" שלב הפעולה הראשון הוא חלק (למשל, ריבית שנתית נקובה המוחשבת כל חצי שנה – חלק ב-2, ריבית חצי שנתית נקובה המוחשבת כל חדש – חלק ב-6 וכן הלאה), הרי שכאשר הריבית הנקובה הנתונה היא "קצרה" יותר בתקופתה מאשר תקופת חישוב – נבצע מכפלה ולא כפל שלה (כלומר: ריבית חודשית המוחשבת כל חצי שנה – כפול ב-6. ריבית לחודשים המוחשבת כל 8 חודשים – כפול ב-4).

### שאלה 8 - בוחן את עצמך - ייח' 5

ה השקעה בפרויקט מסויים עולה כיום 100,000 ש"ח ואינה מביאה תקבולות כלשהם במשך מספר שנים. לאחר מספר שנים זה, מתחילת הפרויקט להניב תקבולות של 25,000 ש"ח לשנה, לפחות.

כמה שנים לכל היותר תהיה מוכן לחכotta עד להתחלתו של זרם התקבולות הקבוע, אם שער הריבית השנתי הינו **13%**?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 5
- ב. 9
- ג. 23
- ד. 6
- ה. 18

[הגשת תשובה](#)

פתרונות :

**בשואלים על פרויקט, לגבי "מה אתה מוכן לעשות / לחכotta / לשלם..." בעצם שואלים על המצב שבו  $NPV = 0$  שזו הנקודה המוגדרת בטור "מינימום הכספיות".**

הערך הנוכחי של ההשקעה היום - הוא בסימן שלילי, בגובה עלות ההשקעה.  
הערך הנוכחי של התקבולות, בהיותם סדרה אינסופית, נשען על נוסחת החישוב של ערך נוכחי של סדרה אינסופית בסימן חיובי :

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

במקרה שלנו אם נחבר את העריכים, אלא שיש לזכור שערך נוכחי של סדרה מוביל אותו אחד לפני תחילתה. אז אם נסמן את עיתוי התזרים כ- $t$ , הרי כדי לבטא את התזרים בזמן 0 ובהתאם את ה-  $NPV$  :

$$NPV = -100,000 + \frac{25,000}{13\%} * (1 + 13\%)^{-(n-1)} = 0$$

או :

$$NPV = -100,000 + \frac{\frac{25,000}{13\%}}{(1 + 13\%)^{n-1}} = 0 \rightarrow n = 6.34 \approx 6$$

מפה ואילך - או שפטורים את המשוואה באמצעות שימוש ב- $t=0$ , או שמציבים ב- $t=0$  את כל אפשרויות המענה בשאלת, ובוחנים متى המשוואה מתקינה.

מדוע  $t=0$ ? התזרים העתידי מתחילה בזמן כלשהו, זמן  $t$ . חישוב ערך נוכחי של סדרת תזרים מהראשון שבהם בזמן  $t$  מוביל בהגדה "אחד אחריה" כולם בזמן  $t=0$ . זה אומר שההתאמה נוספת מזמן  $t=0$  בזמן 0 דורשת התאמה של  $t=1$ -ת תקופות נוספות לאחר.

### שאלה 13 - בוחן את עצמו - ייחידה 5

הפקדתם  $x$  ש"ח בתוכנית חסכו. להפתעתכם, כעבור 5 שנים גיליתם כי סכום הכספי גדל ב-40%. **כמה שנים נספנות עלייכם להמתין עד אשר סכום ההפקדה הראשונית יוכפל?**

יש לבחור תשובה אחת:

- א. כ-4.5 שנים
- ב. כ-5.5 שנים
- ג. כ-1.5 שנים
- ד. כ-10.5 שנים
- ה. לא ניתן לחשב שכן גם הסכום וגם הריבית אינם ידועים

הגשת תשובה

לפי נתוני השאלה:

$$x * (1 + r)^5 = 1.4x$$

ניצמצם את שני האגפים ב-  $x$ :

$$(1 + r)^5 = 1.4$$

נמשיך כדי לפטור את הריבית. לשם כך, נוציא שורש 5 (או בחזקת  $1/5$ ) משני האגפים:

$$1 + r = 1.4^{\frac{1}{5}}$$

בשימוש פיתוח:

$$r = 1.4^{\frac{1}{5}} - 1 = 6.961\%$$

עכשו נציב את הריבית זו ונראה כמה תקופות צבירת ריבית יובילו להפיכת  $x$  ל-  $2x$ .

$$1.4 * (1 + 6.961\%)^n = 2x$$

ערבי  $n$  -  $x$  מעתמנים:

$$1.4 * 1.06961^n = 2$$

וההתשובה:

$$n = 5.3 \approx 5.5$$

12. חוסך מעוניין להבטיח לעצמו ולילדיו תקבול חצי שנתי אינסופי קבוע (בכל סוף מחצית שנה) החל מועד 10 שנים (תקבול ראשון בסוף שנה 10), בגובה 8% מהכנסתו השנתית שועומדת על 60,000 ש"ח. ידוע כי תכניות החסוך בبنק נותנות ריבית אפקטיבית שנתית של 8.16% במהלך 5 השנים הקרובות ולאחר מכן הריבית צפואה לעלות ולעומוד באופן קבוע על שיעור של 10.25% אפקטיבי לשנה. מהו הסכום אותו נדרש החוסך להפקיד היום על מנת שיוכל לבצע את תכניותיו?

- א. 37,991 ש"ח
- ב. 39,815 ש"ח
- ג. 41,806 ש"ח
- ד. 19,422 ש"ח

ה. לאחר והריבית משתנה לאורך התקופה ומאיך מדובר בסדורה אינסופית, הרוי שלא ניתן לפתור את השאלה.

הפתרון :

$$PV = \frac{\frac{4,800}{5\%}}{(1 + 10.25\%)^{4.5} * (1 + 8.16\%)^5} = 41,806$$