

# ניהול פיננסי - 13005

## מחברת הקורס

## סמסטר 2025א

מנחה: **בגש ד"ר שי צבאן**

### Table of Contents

מפגש 1 - היברות, מטרת המימון, ערך עתידי, מכחוי ויישומים	2
מפגש 2 - המשך ערך מכחוי, "ישומים שונים, הבסיס לחישובי ריבית ופרויקטיטים	65
מפגש 3 – השלמות ריבית קלות וחישובי ריבית ופרויקטיטים	112
מפגש 3 – חישובי ריבית ותרגול ברמת בדינה בנושאי ריביות ופרויקטיטים	186
מפגש 3 – שליש אחרון – קיצוב הון (יח' 7)	205
מפגש 4 – תרגולת ברמת בדינה – פרויקטים ותזרימי מודרניים לתוכניות השקעה	245
מפגש 5 - מבוא למימון בעולם עם סי彪ן	260
מפגש 6 - גישת תיקי השקעות – 12.1.2025	305
מפגש 6 - תרגול מסכם והערכות לבחינה (לא מעודכן!!!)	352
מפגש 7 – מקורות המימון של החברה – הון עצמי והון צד, ומשמעותם (יח' 9-11)	389
מפגש 8 – ההשפעה של תמהיל מקורות המימון על שווי החברה ומחיר ההון	402
נספח - הלוואות	413

## מפגש 1 - היכרות, מטרת המימון, ערך עתידי, נוכחי ויישומים

### מטרות המפגש

א. היכרות

ב. התחלת החומר - ייחידה 5, ערך הזמן של הכספי - חישובי ערך עתידי

### אופן הלמידה

החומרים במפגש יצומצמו ויסונכרנו עם המינימום החינוי ללמידה הסטנדרט. לצד זאת, מעת לעת, יקושו רוחם למידה לתרגול נושא עם פתרונות מלאים.

כל חומר המפגשים לא י יצא מן הכלל, כולל כל הגדירות, הנוסחאות, הפתרונות - יקושו למסמך מותעכן זה שייהיה נגיש דרך פורום הלמידה שלנו וכן בתחתית הקלטות. אין צורך אמיתי לסכם בעצמכם; אם כי נשתדרל לפעול בקצב שיאפשר זאת, למי שמורগל או מורגלת בכך.

אתר הקורס מפורט, מסודר, וכולל סרטונים לגבי נושאים עיקריים, תרגילים בסיסיים ופתרונות נוספים. בקורס עצמו, העסוק בעיקר ביישומים מתקדמים יותר, מתוך המטרה היא שהמפגש נועד לתת כלים "מיידיים" להתמודדות עם שאלות ברמת המטלחה וברמת הבדיקה.

כמובן, נשתדרל לא למהר ולהציג הכל באופן סדור ושיטתי; אבל מוטב שייהיה לנו מרכיב במפגשים וסביר במטלות, אשר מפגשים חביבים בסטייל "פרווה" והתמודדות קשה מכך עם המטלות והבדיקה.

### הבדיקה

השתנהה במבנה שלה - וצפואה להיות מרכיבת מ-20 שאלות רב-ברירה במשקל 5 נק' לשאלה, כולל בדיקות דרך. הבדיקה פיזית / פרונטלית במרכזי בדיקה כמו סוס.

### פרטי ההתקשרות עמי

שי צבן, 050-6551519 [שאלות מקצועיות לגבי אתגרים **במטלות** - מומלץ להציג דרך הפורומים / קבוצות הדין הייעודיות] [shay.tsaban@gmail.com](mailto:shay.tsaban@gmail.com)

## חוות הגשת מטלות ומטלת נוכחות

### מטלות הקורס ותנאים לקבלת נקודות זכות

נדרש:

- א. הגשת מטלות במשקל של 25% לפחות .
- ב. השגת ציון עבר (60) בבחינת הגמר ובקורס.

דרך שקלל הציון הסופי בקורס:

ממיינים 11, 12 ובנוסף מטלת החשתפות (מי"ה 55) – 10% עבר כל מטלה .  
ממיינים 13-14 ו-5% עבר כל מטלה .  
בחינת הגמר- 60%-75% מהציון הסופי יש לעבר את בחינת הגמר בציון 60 לפחות).

כדי לזכות במטלת נוכחות חוות להיות נוכחים ב-6 מתוך 8 מפגשי הקורס לפחות . בדיקת הנוכחות תבוצע **בתחילת החצי הראשון ובתחילת החצי השני של המפגש באמצעות צילום מסך בזום ללא התראה**. נוכחות תיחס רק למי שנוכח כל המפגש עם מצלמה פתוחה ומיקרופון בשני החלקים (לעתים עלולה להתבצע בדיקת נוכחות נוספת, הכל לפי הידבק ומספר הנוכחים שילו את סיום המפגש). מעט לעת תבוצע בדיקות נוכחות נוספת.

לא יוכל לקבל בקשות להתחשבות בנוכחות בגין אייחורים וכיוצא בכך. חתך הזמינים הוא במועד צילום המסך .  
סטטוס נוכחות נכלל בקובץ אך לא ניתן לבקש לעדכנו במידע.

### התיקשות לשאלות הקהל (הבמה שלכם)

שאלה: עד כמה רוחה השימוש בנוסחאות וביישומים מתמטיים בקורס זה?

תשובה: רמת המתמטיקה - ברוב התרגילים - כפל, חילוק, והמון חזקות. ב-90 עד 95% מהקורס אלו הישומים.

**אוקי, אז מה בקורס? מה זה מימון? ואיך ההבנה לגבי בינוי בקורס?**

ענף המימון הוא תחום במנהל עסקים שדן בעיקר בשני נושאים: **ההשקעות** (השקעות בפרויקטים, בנכסיים וכיו"ב), וכן **במקורות גiros מימון** (הלוואות, אגרות חוב, מנויות). הכל מנקודת ראות חברות ( גופים עסקיים), ותוך שימוש בקריטריונים שיאפשרו אופטימיזציה להשקעות ולגיוס המימון מתוך מטרת הול של המימון:

**השאלה ערך לבאים.**

לפי תורת המימון: המטרה של הפirma (החברה) היא להוביל לכך שהשווי שלה לבאים (בעלי המניות) יהיה גבוה ככל הנitin.

בשפה פשוטה: אם גיא, מאיה וצליל מקימים חברה (גמ"ץ בע"מ) לפי תורת המימון, המטרה של גמ"ץ היא להפוך את גיא, מאיה וצליל ל"עשירים".

**השאלה העוקבת: מה בדיק צרך לעשות ואיך כדי להגדיל את הסיכוי להשאלה ערך החברה?**

- נרצה לדעת
- (א) מהם תזרימי המזומנים ("הכסף שהחברה עושה") נטו.
  - (ב) עיתויי תזרימי תזרימי המזומנים (מתי החברה תקבל את התזרמים) - יח' 5, 6.
  - (ג) רמת הסיכון - יח' 8.

הקורס עוסק בכלים מתמטיים וקריטריוניים לקבלת החלטות שידונו בהיבטים הללו. המחזית הראשונה של הקורס עוסקת בהשפעות עיתויי תזרימי המזומנים - בעיקר באופן שבו ריבית משפיעה על ערך כספי בחלוף זמן. והמחזית השנייה של הקורס עוסקת במשמעות הסיכון. **עד הودעה חדשה, נעלם מקיומו של סיכון.**

בהשפעות עיתויי התזרמים על הערך, נחיל מסוג החישוב הבסיסי ביותר: **ערך עתידי - Future Value** או **FV**. לעיתים תראו בחומרה הקורס סימונים כגון  $V_t$  (השווי  $Value$  בזמן עתידי מסוים  $t$ ). ערך עתידי הוא חישוב שטורטו לשקף את ההשפעה המתמטית של צבירת ריבית בגין השקעות ולהלוואות. כאשר משקיעים - הריבית הנצברת מובילה לכך שנקלל יותר ממה שהשקענו (בעתיד). כאשר לוים - הריבית הנצברת מובילה לכך שנזיר יותר ממה שקיבלנו.

## נושא 1: יח' 5 - ערך עתידי (FV) של תזרימי מזומנים ויישומים

מינি רציו: כיצד מובצת צבירת ריבית בגין סכום / סכומים בהלוואות ובהשקעות

רקע קטן – מהו ערך עתידי ואיך הוא משתמש במסגרת הכללית יותר של ניהול פיננסים:

- ניהול פיננסי (מיימון) עוסק בניהוטו בניהול השקעות, גiros המשאבים הנדרשים לביצוע ההשקעות וניהול וגידור סיכון פיננסיים.
- בשלב ראשון, הסוגיות הבסיסיות ביותר ביותר במימון הן אלו הקשורות **לחישובים פיננסיים** (חישובים מספריים של ערכים כספיים). חישובים אלו הם מגוונים, ואחד הנפוצים שבהם הוא חישוב **הציבורה של ריבית**, באופן שמשמעותו את ערך הזמן של הכספי.
- **ספציפית – המושג "ערך עתידי"** (FV = Future Value) שהוא אחד מהבסיסיים בחישובים פיננסיים – אם אנחנו מפקידים (או לוים), ככל הנראה נקבל חוזה (במקרה של השקעה) או נctrך תשלום (במקרה של הלואה) סכום גבוה יותר בעתיד, שמשמעותו **שיעור צבירת ריבית**.
- אנו נרצה לחשב ערך עתידי FV כ**סכום הציבורה העתידית כולל ריבית הנוצרת בגין סכומים כספיים** :
  - ערך עתידי של סכום ייחיד.
  - ערך עתידי של סדרה (בעיקר סדרות של הפקדות, הפרשות לפנסיה).
  - **יישומים כלכליים וחילוצים** – להבין מתוך נתוני בעיה כלכלית מה נתנו ומה נדרש, ולהשתמש בפתרונות רלונטיות של ערך עתידי לחילוץ מתבקש.
- סוג חישוב מורכב יותר הוא החישוב ההפקיד – ערך נוכחי – PV. הפעם, מדובר בתרגום רעיון של סכומים שצפויים להתקבל (או להיות מושלמים בעתיד) כך שנשקף את ערכם בהווה.
  - נדונו במחצית השנייה של המפגש.

שאלה 1 – חישוב ערך עתידי של סכום בודד, בריבית קבועה, ללא התאמת ריבית  
גיא הפקיד 500,000 ש"ח לתוכנית חסכו הנושאת ריבית שנתית בשיעור 4%. בתום 5 שנים יפרע החסכו. מהו  
הסכום שיקבל גיא?

פתרון :

נתון : כמה גיא מפקיד היום - PV - ע"ג (ערך נוכחי).  
מה רוצים לדעת : כמה יהיה לגיא בעתיד – ערך עתידי - FV.  
במלים אחרות, החישוב הוא כזה שדורש להמיר PV כערך נוכחי לערך עתידי - FV.

לפוארה – החישוב פשוט : אקח 4% ריבית, אכפול ב-5 שנים ריבית (20%) והסכום הכלל הנცבר יהיה בהתאם :

$$500,000 + 500,000 * 20\% = 600,000$$

בפועל – מקובל מאד כברירת מחדל שלא לבצע חישוב בצורה זו (חישוב ריבית פשוטה "חריגי"), אלא לישם טכנית חישוב המתבססת על ברירת מחדל של **ריבית דרייבית** (חישוב שיווצר מנקודות הנחה שהסכום שהופקדו צוברים ריבית, ובכל תקופה – הריבית הנוספת נוצרת על הסכום כולל הריבית המגולמת). כולם  
בשלבים :

בתום השנה הראשונה הסכום הנცבר - **תוספת ריבית לשנה** :

$$FV_1 = 500,000 * (1 + 4\%)$$

בתום השנה השנייה – סכום זה צובר ריבית נוספת לשנה :

$$FV_2 = 500,000 * (1 + 4\%) * (1 + 4\%)$$

בתום השנה ה-5, לאחר שהתהליך ורצף המכפלות חוזר על עצמו 5 פעמים נקבל – **זו התשובה** :

$$FV = 500,000 * (1 + 4\%)^5 = 608,326.45$$

או בואו נכليل: כאשר רוצים לחשב ערך עתידי (מה יהיה לנו בעתיד) **כטוצאה מהפקדה בודדת כאשר ריבית קבועה, הנוסחה היא<sup>1</sup>**:

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

כאשר :

הערך FV מייצג את הסכום העתידי הנცבר (ערך עתידי, Future Value).

הערך PV מייצג את סכום ההפקדה, שمبוצע בהווה (Present Value, הערך הנוכחי).

הערך  $r$  מייצג את שיעור הריבית.

הערך  $t$  מייצג את מספר התקופות.

הערה נוספת: השימוש בחזקה ולא בכפל / חיבור ריביות נובע מהנחה בירית המחדל (בקורס ובחים עצם) של "ריבית דרייבית" שמשמעותה, שהריבית בתקופות העוקבות נוצרת לא רק על הקמן הראשוני, אלא גם הריבית שנבעה מתקופות קודמות. הכפל בשרשראת שיווצר בעצם החזקה בرمלה החישובית – מבטא זאת.

<sup>1</sup> לעיתים ביחידות הלימוד מקובלת הנוסחה  $t$   $FV_t = V_0 * (1 + r)$ . זה כמוון אותו דבר.

**שאלה 2 - ערך עתידי של סכום בודד, בריבית משתנה, ללא התאמת ריבית**  
 מאיה הכבאית לוותה (נטלה הלוואה) בסך 200,000 ש"ח הנושאת ריבית שנתית בשיעור 7% לשנה בכל אחת מ-3 השנים הקרובות, ובשיעור 8% לשנה בכל שנה לאחר מכן. הלוואה תפרע יחד עם הריבית הצborough בחולף 10 שנים. מהו הסכום הכלול שעל מאיה הכבאית לשלם (קרן+ריבית) בתום 10 שנים?

**פתרון :**

**נתון :** כמה מאיה לוותה היום ( $PV$ ), סכום יחיד, והריבית משתנה.  
**מה רוצים לדעת?** את הסכום העתידי שהוא תזריר -  $FV$ .  
 שימוש לב, בהתאם לניסוח השאלה, הריבית הראשונה תקפה 3 שנים. הריבית בהמשך תקפה בכל שנה לאחר מכן, עד לסיום העסקה (שהיא בתום 10 שנים). לכן, הריבית הבאה בתור תקפה 7 שנים (בשנים 4 - 10 כולל).

$$FV = 200,000 * (1 + 7\%)^3 * (1 + 8\%)^7 = 419,901.68$$

**הכללה לנוסחה :**

$$FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

**כאשר :**

הערך  $FV$  הוא הערך העתידי המוחושב (הסכום העתידי הכלול, קרן + ריבית).

הערך  $PV$  הוא סכום ההפקדה אנו הלוואה "היום".

הערכים  $r_2$  ו-  $r_1$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה.

הערכים  $t_2$  ו-  $t_1$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבחן כל ריבית תקפה.

## ערך עתידי של סדרה

ב-1. ועוד היררכיה רציפה מספר הטעויות כחישובו לעיל ערך עתידי של סכום ייחד התהlik היה אינטואיטיבי יחסית: נוטלים את סכום ההלוואה או ההשקה, קופלים

כשאנו דנים בסדרות, לעומת זאת – אנחנו מדברים על מקרה אחר: על מצב שבו, למשל, אנו מפקדים כל חודש, במשך 5 שנים לפחות. גם במקרה זה יתברר כמובן ערך עתידי כולל ריבית במועד הפירעון; אלא שאפונן חישובה – מרווחה הרבה יותר –

לכן, ובכדי לאפשר פתרון בפרק זמן סביר, ממצאים שימוש בנוסחה מתמטית של חישוב ערך עתידי של סדרות, זו נוסחה שידועה לייצר "פקטור" (מקפיל) שבאמצעותו נוכל ליחס ב"מכה אחת" את הערך העתידי המצרי של מודיעע? משום שככל הפקודה צוברת ריבית פרק זמן שונה עד לנקודת הזמן המשותפת של הפירעון.

הפקודות כולם  $FV_{SERIES} = PMT * FV_{SERIES}^{FACTOR} \rightarrow PMT * FVFA$  אלא שצריך להזכיר מכך ביחס הנוסחה:

- ראשית, בהיבט המקרים שבהם ניתן לישמה, שנייה – במקרים נקודת הזמן העתידית שאליה מגיעים בחישוב.

שאלה 3 - ערך עתידי של סדרת תשומית (סר"ת), ללא התאמות

שירן מתכונת להפקיד בתום כל שנה במשך 8 שנים סכום של 10,000 ש"ח. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשotaה של Shiron בתום 8 שנים. אם הריבית השנתית בחסכו היא 4%?

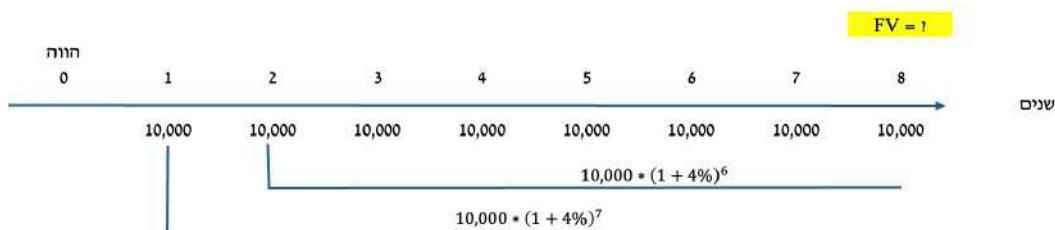
פתרונות:

נתו:

**הסכום ששירן הפקידה כל שנה (באיןטרוול זמן קבוע/**תדיירות קבועה**)**

הוּא 10,000 (סכום קבוע)

ושבירות הריבית שבה מבוצעות ההפקדות היא 4% (ריבית קבועה).



### דרך הפתרון:

כאשר אני מזיהה סדרה שהיא סר"ת (סכום, ריבית, תדירות) קבוע  
או ורק אז - חישוב הערך העתידי המצרי (סך הצבירה הכללית, לרבות כל התזרים וריבית "נכונה"  
בגין כולם) מtabסס על הנוסחה הבאה שהיא נוסחת **ערך עתידי סדרתי** (MOVIL תמיד לנקודות הזמן של  
התזרים האחרון בסדרה):

$$FV_{Series} = \textcolor{red}{pmt} * \frac{(1 + \textcolor{blue}{r})^t - 1}{\textcolor{blue}{r}}$$

כאשר :

הערך FV Series הוא הערך העתידי של הסדרה.

הערך  $pmt$  מסמל את ההפקדה / התזרים התקופתי הקבוע (ביה' הלימוד לעתים מסומן כ- a).

הערך  $\textcolor{blue}{t}$  מסמל את הריבית **לפרק הזמן בין תשלוםמים**.

הערך  $\textcolor{blue}{r}$  מסמל את מספר התשלומים בסדרה.

נתיב :

$$FV_{Series} = \textcolor{red}{10,000} * \frac{(1 + \textcolor{blue}{4\%})^8 - 1}{\textcolor{blue}{4\%}} = \textcolor{yellow}{92,142}$$

כמה דגשים :

- חישוב ערך עתידי של סדרה דורש שימוש בריבית שתקופתה זהה לפרק הזמן בין תשלוםמים. כאן, ההפקדות שנתיות כנתון, והריבית שנתיית 4% כנתון, וזה נפלא. בנסיבות מותקדים יותר לא תהיה חפיפה בין תקופת הריבית הנתונה לתקופת ההפקדה, מה שידרשו מאייתנו לבדוק נספת.
- ערך  $\textcolor{blue}{t}$  במעירך החזקה בביטוי כמספרים בסדרות הוא **מספר תזרימי המזומנים** (כאן – מספר ההפקדות) ולא מספר התקופות.
- **ערך עתידי של סדרה מוביל אותו תמיד לנקודות הזמן שהיא מועד התזרים האחרון בסדרה** (כאן – ההפקדה האחרונה בתום השנה ה-8, ולכן הערך העתידי הוא סך הצבירה לתום השנה ה-8).

טיפ:

מעבר ליכולת הטכנית לחשב את הערך העתידי הכלול המכרי של סדרה באמצעות הנוסחה של הפקטור:

$$\frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

שאותה כפלו ב-  $PMT$  (סכום התזרים) כדי להגיע לערך העתידי;

אפשר גם לשולב באופן ישיר את ערך הפקטור מתוך חוברת שנקראת "נשפח א' לכרך ד'" בלוח א-2, חוברת זו כוללת לוחות (טבלאות) שנitin לשולב מהן את ערך הפקטור ללא צורך בהצבה של ריבית  $r$  ומספר תשלומים  $t$ . כך למשל, עבור  $r = 4\%$  ומספר תשלומים  $t = 8$  הערך מהטבלה הוא 9.214, והוא נכפול ב-  $PMT$  קרי בסכום ההפקדה הקבוע.

$$FV_{Series} = PMT * FVFA(r, t) \rightarrow PMT * (r, t)$$

$$FV_{Series} = 10,000 * 9.214 \approx 92,140$$

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%
1		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030	2.040	2.050
3		3.030	3.060	3.091	3.122	3.153
4		4.060	4.122	4.184	4.246	4.310
5		5.101	5.204	5.309	5.416	5.526
6		6.152	6.308	6.463	6.633	6.802
7		7.214	7.434	7.662	7.898	8.142
8		8.286	8.583	8.892	9.214	9.549
9		9.369	9.755	10.159	10.583	11.027
10		10.462	10.950	11.464	12.006	12.578
11		11.567	12.169	12.808	13.486	14.207
12		12.673	13.410	14.160	15.033	15.917

כך שבעצם, דרך כתיבה מקוצרת של חישוב ערך עתידי של סדרה שבמקרים רבים מופיעה בתרגילים:

$$FV_{Series} = pmt * FVFA(r, t)$$

כאשר:

הערך  $pmt$  הוא סכום ההפקדה הקבוע.

הערך  $FVFA$  הוא למעשה לועצה התוצאה של הנוסחה / הלוח שמתאים לרווחה ( $r$ ) ומספר התשלומים ( $t$ )

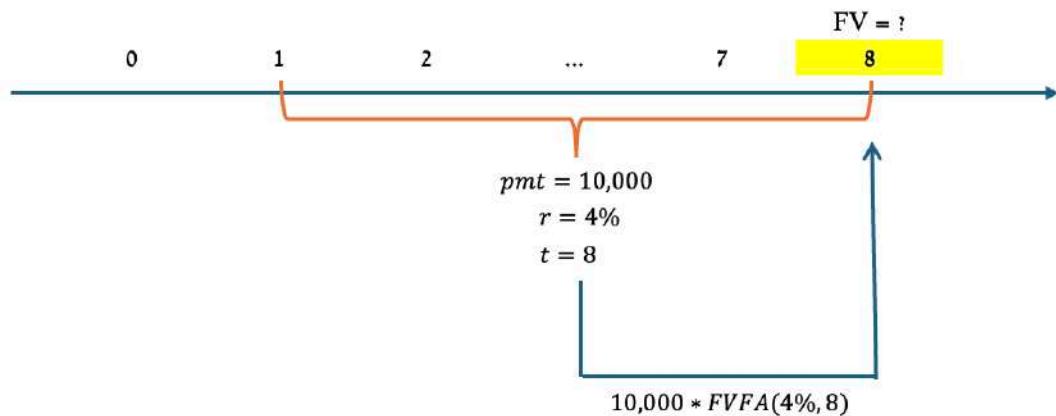
כלומר הפתרון במקרים רבים יוצג כך:

$$FV_{Series} = 10,000 * FVFA(4\%, 8) = 10,000 * 9.214 = 92,140$$

זהירות: ביחידות הלימוד, בנספח א' לכרך ד וכן בחלק מהפתרונות באתר, במקומות FVFA הסימן יהיה **מע"ס** (ראשי תיבות של מקדם ערך עתידי סדרתי).

דגש חשוב לגבי המועד אליו מגיעהים בחישובי סדרה בערך עתידי:

**чисוב ערך עתידי של סדרה (בנוסחה או באמצעות לוח א-2) משקף את סך הצבירה (קרן + ריבית) לנקודת הזמן המיצגת את התזרים האחرون בסדרה.** למה הכוונה? כאמור, הפקדנו בתום כל שנה 8 שנים. כשחישבנו ערך עתידי סדרתי, הגיענו לסך הצבירה לתום שנה 8 שווה מה שרצנו - וכך סייםנו. אבל מה היה קורה אם ההפקדה האחידונה בזמן 8, אך לאחר מכן נמשכת צבירת ריבית נוספת? בכך תעורר השאלה הבאה.

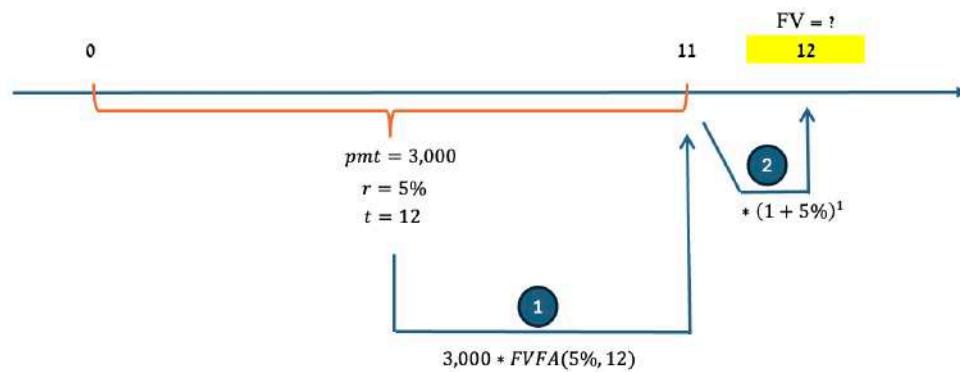


**שאלה 3.1 – ערך עתידי של סדרה – תזרימי תחילת תקופה – ערךון "המייקום על הציר"**

יבגני מתכוון להפקיד בתחילת כל שנה במשך 12 שנים סכום שנתי של 3,000 ש"ח. הריבית השנתית היא 5%. הפקdon ייפרע בתום השנה ה-12. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של יבגני?

**פתרון :**

גם במקרה זה, מדובר בערך עתידי של סדרה. עצם העובדה שצינו שההפקודות בתחילת כל שנה משמען – שההפקודה הראשונה היא בזמן 0 (במקום זמן 1) וההפקודה الأخيرة היא בזמן 11 (ולא בזמן 12, כי תחילת השנה ה-12 היא למעשה תום השנה ה-11).



邏輯: Stage (1) represents the present value of the annuity due at time 0, which is the present value of the annuity at time 11 plus the value of the final payment at time 12. The final payment is calculated as  $3,000 * (1 + 5\%)^1$ .

$$FV_{12} = 3,000 * FVFA(5\%, 12) * (1 + 5\%)^1 = 3,000 * 15.917 * 1.05 \approx 50,139$$

הערה טכנית – איך הגיעו ל-15.917?

שתי אפשרויות.

אפשרות א – מתמטית:

$$FVFA(r, t) = \frac{(1+r)^t - 1}{r} \rightarrow \frac{(1+5\%)^{12} - 1}{5\%} \approx 15.917$$

אפשרות ב – באמצעות הלווחות (לוח א-2 שהוא לוח FVFA בנספח א לפרק ד):

$t \setminus r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%
1	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2	2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060
3	3.030	3.060	3.091	3.122	3.153	3.184
4	4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375
5	5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637
6	6.152	6.308	6.463	6.633	6.802	6.975
7	7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394
8	8.286	8.583	8.892	9.214	9.549	9.897
9	9.369	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491
10	10.462	10.950	11.464	12.006	12.578	13.181
11	11.567	12.169	12.808	13.486	14.207	14.972
12	12.683	13.412	14.192	15.026	15.917	16.870
13	13.809	14.680	15.618	16.627	17.713	18.882
14	14.947	15.974	17.086	18.292	19.599	21.015
15	16.097	17.293	18.599	20.024	21.579	23.276

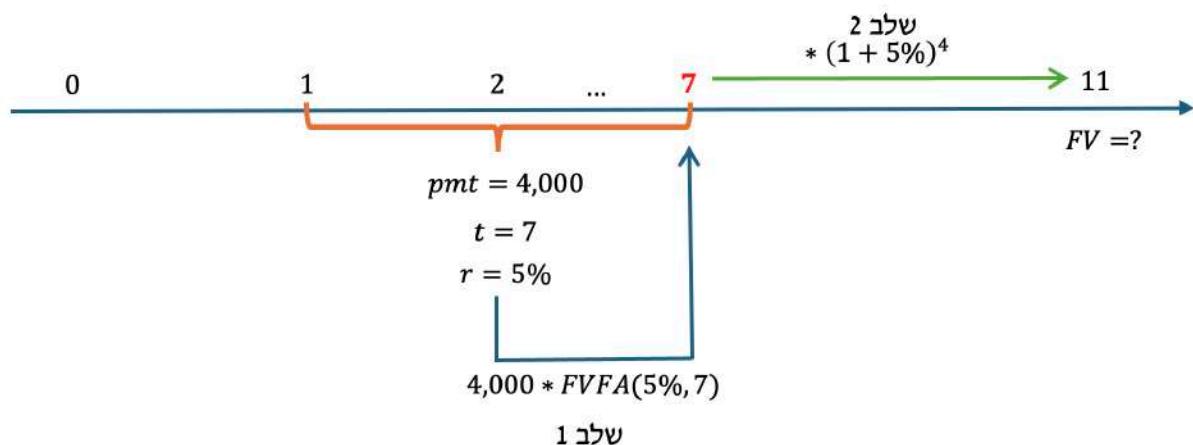
**שאלה 4 - ערך עתידי של סדרת תשלוםים, עם התאמות (דחיה בפירעון) - לבית**

צליל מתכונת להפקיד בתום כל שנה במשך 7 שנים סכום של 4,000 ש"ח. בחולף 7 שנים ופסקנה ההפקדות, אך החסכו יצבור ריבית עוד 4 שנים נוספות (פирעון בחולף 11 שנים). הריבית השנתית בחסכו היא 5%. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של צליל בתום 11 שנים?

פתרון :

נתון : סכום ההפקדה החודשי (סדרה, סר"ת), אך כאשר הסדרה מסת经理ת, אין פירעון אלא צבירה ריבית נוספת המטרה : לחשב ערך עתידי של סדרה עם "צבירה נוספת"

שים לב : ערך עתידי של סדרה מוביל למועד התזרים האחרון בסדרה. כאן, התזרים האחרון (ההפקדה الأخيرة) היא בתום השנה ה-7, ולכן, יש לבצע התאמה נוספת של נוסחת הסדרה לгиום ריבית מזמן 7 לזמן 11, וזאת ע"י מכפלה ב-1 ועוד הריבית :



בsek הכל החישוב כולל יהיה כמפורט להלן :

$$FV_{11} = 4,000 * FVFA(5\%, 7) * (1 + 5\%)^4 = 39,587$$

## ערך עתידי של מספר סדרות

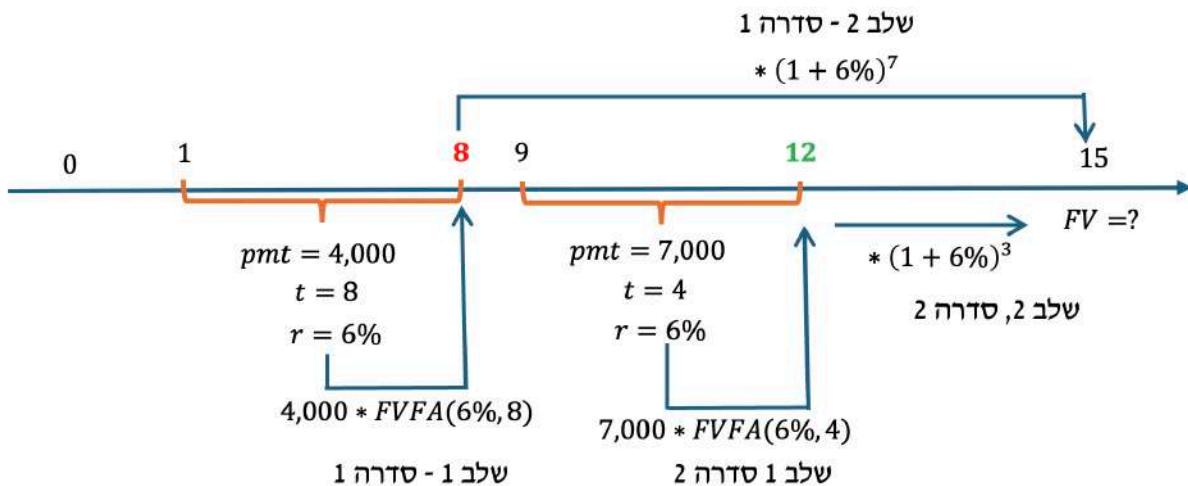
אמרנו שערך עתידי של סדרה ניתן לחשב בצורה מצרפית עם  $FVFA$  (מעע"ס) כאשר מדובר בסרי"ת קבוע – סכום קבוע, ריבית קבועה, תזרות קבועה.

אלא שגם אם מדובר בערכים משתנים, כל עוד ניתן להזות "מקטיעים" שבהם הסר"ת הקבוע נשמר – ניתן לפטור על פי הנוסחה: נחשב ערך עתידי מצטבר לכל חלק בנפרד, וביצע בಗינו התאמות לנקודת הזמן הנדרשת. נדגים להלן.

**שאלה 5 - ערך עתידי של "מספר סדרות", עם התאמות**  
 רפאל מתכוון להפקיד בתום כל שנה במשך 8 שנים סכום של 4,000 ש"ח, ובתום כל שנה במשך 4 שנים לאחר מכן סכום של 7,000 ש"ח. לאחר מכן תפסקנה ההפקודות, ורפאל יצבור ריבית נוספת בגין ההפקודות עד למועד הפירעון שיחול בעוד 15 שנים. בהנחה שהריבית השנתית בחסכון 6%, מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של רפאל?

פתרון :

אי אפשר להתייחס לשאלה זו ככוללת סדרה בודדת. זאת, משום שסכום תזרימי המזומנים משתנה במהלך 8 שנים. יחד עם זאת, אם ניתן להזות בתוך העסקה הכוללת תזרימי עם נתונים משתנים (שינוי בסכום, בריבית וכיו"ב) – תתי מקטיעים שבהם סר"ת קבוע (סכום, ריבית, תזרות קבועה), נתייחס לכך כאל מספר סדרות, ונטפל בחישוב הערך העתידי של כל אחת מהן בנפרד, עם התאמות מתבקשות.



ובכתב מסודר יותר, הערך העתידי לזמן 15 של כל סדרה בנפרד :

$$FV_{1\text{סדרה}}(15) = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7$$

$$FV_{2\text{סדרה}}(15) = 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3$$

וכדי להגיע לכך הכל נחבר בין הערך העתידי של הסדרות :

$$FV = 4,000 * FVFA(6\%, 8) * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 6\%)^3$$

$$FV = 4,000 * 9.897 * (1 + 6\%)^7 + 7,000 * 4.375 * (1 + 6\%)^3 = 96,000.58$$

הסבר : כאשר חל שינוי ברכיבי סדרה (בסטטוס ההפקדה, בריבית בין הפקודות, בתדריות ההפקדות), אנו נפצל את החישוב למספר תתי-סדרות, שכל מהן בעל פתרונות קבועים. למעשה, יש לנו סדרה ראשונה עboro 8 ההפקדות הראשונות, וסדרה נוספת, שנייה, עboro 4 ההפקדות לאחר מכן.

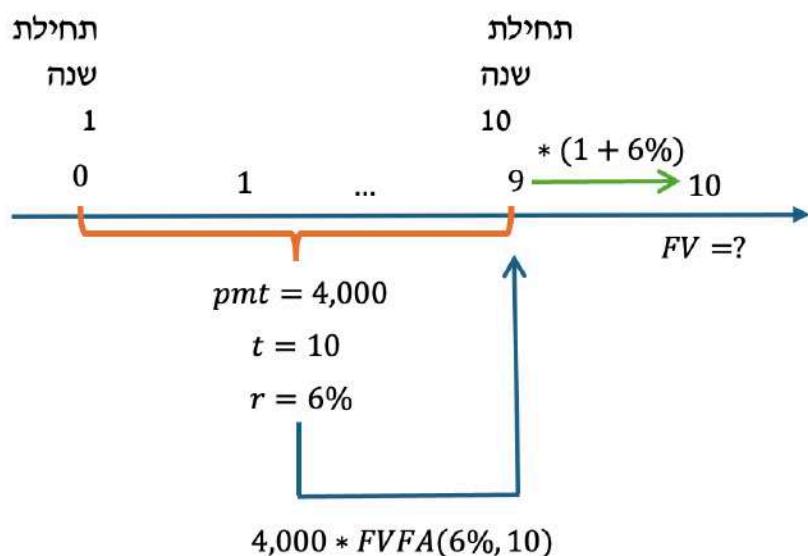
ערך עתידי של סדרה (לרבבות תתי-סדרה) מוביל תמיד לנקודת ההפקדה الأخيرة. לכן, הערך העתידי של הת-סדרה הראשונה הובילazoן 8. בהינתן שהפירעון אינו בזמן 8 אלא רק בזמן 15, علينا להתאים / "לדוחוף" את התוצאה של הסדרה הראשונה עוד 7 שנים קדימה, זמן 15. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת .7

הסדרה השנייה היא בשנים 9, 10, 11, 12. כמובן, הערך העתידי של הסדרה שמוביל למועד ההפקדה الأخيرة מובילazoן 12. בהינתן שהפירעון אינו בזמן 12 אלא רק בזמן 15, علينا להתאים / "לדוחוף" את התוצאה של הסדרה השנייה עוד 3 שנים קדימה, זמן 12azoן 15. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת .3.

שאלה 6 - ערך עתידי של סדרה - תזרימי "תחילת תקופה" - **לבית**

מירב מוכננת להפקיד **בתחילת** כל שנה במשך 10 שנים סכום של 4,000 ש"ח. הריבית השנתית 6%, והפירעון יבוצע בתום השנה ה-10. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של מירב במועד הפירעון?

פתרון :



וכעת בכתביה מסודרת יותר :

$$FV = 4,000 * FVFA(6\%, 10) * (1 + 6\%)^1 = 4,000 * 13.181 * 1.06 = 55,887.44$$

הסבר :

כאשר מדובר בסדרה שהפקודות **בתחילת** תקופה, המשמעות היא שגם תחילת הסדרה וגם סיוםה הם בנקודת זמן אחת מוקדמת יותר.

בשפה פשוטה: סדרה "בתום כל שנה, 10 שנים" תוצג על הציר מזמן 1 לזמן 10.

סדרה "בתחילת כל שנה, 10 שנים" תוצג על הציר מזמן 0 לזמן 9.

בכל מקרה, מספר ההפקודות לא משתנה והוא עדין 10.

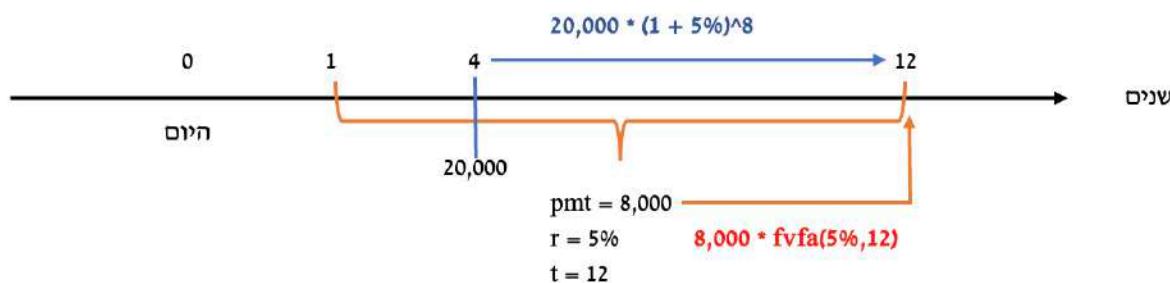
כאשר מבצעים את החישוב הסדרתי של הערך העתידי של סדרה זו, הוואיל וההפקודה الأخيرة היא בזמן 9, נדרש לבצע התאמה של התוצאה בזמן 9 לזמן 10 (מועד הפירעון). לכן כפלנו ב-1 ועוד הריבית.

שאלה 7 - ערך עתידי של סדרה וסכום יחיד, יחד - **לכית**

בכונונתכם להפקיד 8,000 ש"ח בתום כל שנה במשך 12 שנים. כמו כן, בכוונתכם להפקיד סכום חד פעמי של 20,000 ש"ח בעוד 4 שנים. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותכם בתום השנה ה-12 בהנחה שהריבית השנתית היא 5%?

פתרונות :

כאשר אנו מזהים בשאלה סדרה ובנוסף סכום יחיד, מומלץ לטפל בשני הרכיבים בנפרד. כלומר, לטפל בערך העתידי של הסדרה תוך הטעלות מוחלטת מהסכום היחיד, לטפל בערך העתידי של הסכום היחיד בהטעלות מוחלטת מהסדרה, וכמוון לחבר ביניהם. על גבי הציג, זה התהליך :



בפתרון מתמטי :

$$FV = 8,000 * FVFA(5\%, 12) + 20,000 * (1 + 5\%)^8 =$$

בhzבנה :

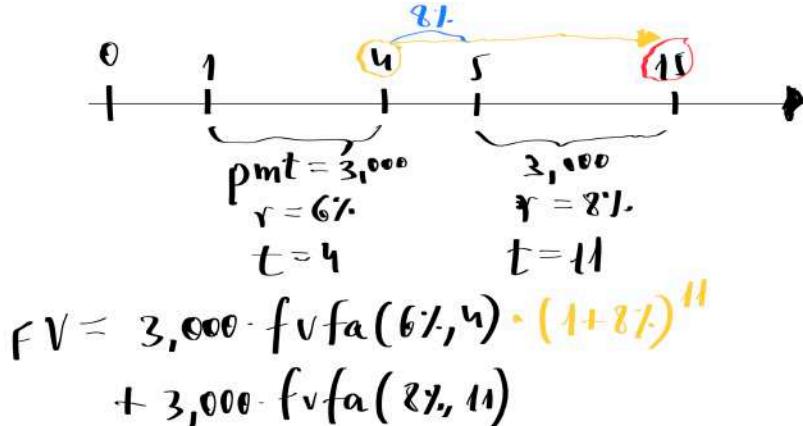
$$FV = 8,000 * 15.917 + 20,000 * (1 + 5\%)^8 \approx 156,885$$

הסבר מילולי נוסף : הערך העתידי של הסדרה הוביל למועד ההפקדה האחידנה, שזהה לזמן הפרעון, ולכן אין צורך בהתאמות. הערך העתידי של הסכום היחיד - נדרש לצבור בגינו ריבית מזמן 4 לזמן 12, קרי 8 שנים. שימושו לב, בהתאם של סכומים **יחידיים**, החזקה היא ההפרש הפשט בין נקודות התזרים לנקודות היעד  $12 - 4 = 8$ .

**שאלה 8 - ערך עתידי של סדרה - פיצול למספר סדרות בעקבות שינוי ריבית - לבית**

שקד מתכונת להפקיד בתום כל שנה במשך 15 שנים סכום של 3,000 ש"ח. הריבית השנתית במהלך 4 השנים הראשונות היא 6% לשנה, ואילו הריבית השנתית בתום כל שנה עוקבת היא 8% לשנה. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של שקד בתום 15 שנים?

פתרון :



וכעת בכתיבה מסודרת יותר :

$$FV = 3,000 * FVFA(6\%, 4) * (1 + 8\%)^{11} + 3,000 * FVFA(8\%, 11)$$

$$FV = 3,000 * 4.375 * (1 + 8\%)^{11} + 3,000 * 16.645 = 80,538$$

הסבר :

כאשר בסדרה מסוימת חל שינוי בRibbit, חייבים לפצל את הסדרה לשתי סדרות נפרדות. זאת, מושם סדרה לצרכים של חישובינו מוגדרת רק כאשר כל רכיבי הסר"ת קבועים (כלומר: גם הסכום חייב להיות קבוע, וגם הריבית חייבת להיות קבועה, וגם התדריות חייבת להיות קבועה). אך, כשייש שינוי בRibbit, הסדרה "נשברת" ומתחלילה סדרה חדשה.

מסיבה זו, علينا להגדיר במקרה זה שתי סדרות: סדרה ראשונה ב-4 שנים (עד שינוי הריבית), וסדרה שנייה עבור ה-15 שנים-5 (לאחר שינוי הריבית).

הערך העתידי של הסדרה הראשונה שמשמעותה בזמן 4 הוביל בזמן 4 בהגדירה (למועד ההפקדה האחורונה, לרבות הריבית המגולמות, עד 6%, ועוד זמן זה). כדי להתאים אותו בזמן 15, מועד הפרעון - כפלו ב-1 ועוד הריבית בחזקת 11 (ההפרש בין 15, היעד, ל-4).

הערך העתידי של הסדרה השנייה שמשמעותה בזמן 15, הוביל בזמן 15 בהגדירה (למועד ההפקדה האחורונה). אךו, אין צורך להתאים לו בזמן 15, ואין צורך במכפלה נוספת של ביטוי זה.

שאלה 9 - חילוץ סכום הפקדה מנותני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - **ቤት**

גיא מתכוון להפקיד בתום כל שנה במשך 10 שנים סכום קבוע כך שבחלוף 10 השנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקדה השנתית הנדרש אם הריבית השנתית היא 7%?

$$FV = 400,000 = X \cdot \underbrace{f_v f_a(7\%, 10)}_{13.816}$$

$$400,000 = 13.816X$$

$$X = 28,952$$

**שאלה 10**

לורן הפקידה היום לחסכו סכום של 200,000 ש"ח. תקופת ההפקדה היא 8 שנים, כאשר הריבית השנתית בכל אחת מהשנתים הראשונים היא 4%, הריבית השנתית בכל אחת מ-3 השנים לאחר מכן היא 2%, הריבית השנתית בשנה הששית ובשנה השביעית היא 3% לשנה, והריבית השנתית בשנה השמינית היא 8%. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של לורן במועד פירעון החסכו (בתום 8 שנים)?

פתרונות :

$$FV = 200,000 * (1 + 4\%)^2 * (1 + 2\%)^3 * (1 + 3\%)^2 * (1 + 8\%)^1 = 263,024$$

**שאלה 11**

מוריה החלטה לחסוך לטובת iPhone החדש. לשם כך תפקיד בסוף כל חודש במשך שנה סכום של 300 ש"ח. הריבית החודשית בחסכו היא בשיעור 1%. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של מוריה בסוף השנה?

פתרונות :

$$FV = 300 * FVFA(1\%, 12) = 300 * 12.683 = 3,805$$

**שאלה 12**

תהל החלטה לחסוך לטובת לימוד הנדסת נתוניים בטכניון. לשם כך תפקיד בסוף כל חודש במשך שלוש שנים סכום של 500 ש"ח. לאחר מכן, תפסיקת ההפקדות, אך הסכום ימשיך לציבור ריבית שנה נוספת. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותה של תהל בתום השנה הרבעית, אם ידוע ששיעור הריבית החודשית הנו 2%?

פתרונות :

$$FV = 500 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{12} = 500 * 51.994 * 1.02^{12} = 32,970$$

**שאלה 13**

פרופ' עפר עציוון החליט לחסוך סכום של 400 ש"ח בתחילת כל חודש במשך 3 שנים. בתום 3 שנים החסכו ייפדוח. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותו בתום 3 שנים אם ידוע שהריבית החודשית היא 1%?

פתרונות :

$$FV = 400 * FVFA(1\%, 36) * (1 + 1\%)^1 = 400 * 43.077 * 1.01 = 17,403$$

**שאלה 14**

פרופ' טל שביב החליט לחסוך סכום של 600 ש"ח בתחילת כל חודש במשך 4 שנים. לאחר מכן ההפקדות תפסיקנה (ההפקדה האחרונה בתחילת החודש האחרון של השנה ה-4), אך ימשיכו לציבור ריבית עד תום השנה ה-6. מהו הסכום הכולל שיעמוד לרשותו של טל במועד פירעון החסכו אם ידוע שהריבית החודשית היא 1%?

פתרון :

$$FV = 600 * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^{25} = 600 * 61.223 * 1.01^{25} = 47,109$$

שאלה 15

ד"ר איל להב החליט לחסוך סכום של 300 ש"ח בסוף כל חודש במשך 3 שנים, ובסוף כל חודש במשך השנה השנים לאחר מכן סכום של 200 ש"ח. הכספיים ימשיכו לציבור ריבית (לא הפקדות נספנות) מיום השנה ה-5 עד תום השנה ה-6. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של ד"ר להב בתום השנה ה-6 אם הריבית החודשית היא 12%?

פתרון :

$$FV = 300 * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{36} + 200 * FVFA(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{12}$$

$$FV = 300 * 51.994 * 1.02^{36} + 200 * 30.422 * 1.02^{12} = 39,535$$

שאלה 16

פרופ' מוסי רוזנבוים החליט לחסוך סכום של 700 ש"ח בסוף כל חודש במשך 4 שנים. הריבית החודשית היא 2% לחודש בכל אחת מהשנתיים הראשונות, ו-3% לחודש בכל חודש לאחר מכן. מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותו של מוסי במועד פירעון החסכון שיחול בתום השנה ה-4?

פתרון :

$$FV = 700 * FVFA(2\%, 24) * (1 + 3\%)^{24} + 700 * FVFA(3\%, 24)$$

$$FV = 700 * 30.422 * 1.03^{24} + 700 * 34.426 = 67,387$$

שאלה 17

פרופ' אוריה בן ציון החליט לחסוך סכום קבוע בסוף כל חודש במשך 3 שנים. הריבית החודשית היא 1% לחודש. מהו סכום ההפקדה החודשי הקבוע אם ידוע שבסיום תקופת החסכון (במשך 3 שנים) עומד לרשותו סכום של 500,000 ש"ח?

פתרון :

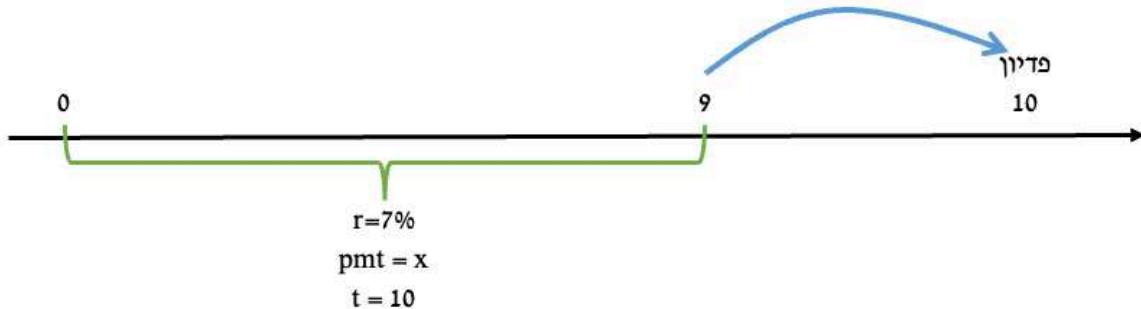
$$FV = 500,000 = x * FVFA(1\%, 36) \rightarrow 500,000 = 43.077x \rightarrow x = 11,607$$

שאלה 18 - **חילוץ סכום ההפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - תחילת תקופה - בית**

שי מתכוון להפקיד בתחילת כל שנה במשך 10 שנים סכום קבוע כך שבחלוף 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקדה השנתי הנדרש אם הריבית השנתית היא 7%?

פתרון :

בשאלה זו נתון הערך העתידי - הסכום שנצבר לסיום השנה ה-10. בנוסף, ידוע שמדובר בסדרה קבועה (הפקדה בתחלת כל שנה, 10 שנים). יחד עם זאת, הפירעון הוא בסוף השנה ה-10. יש לשים לב, כאשר מדובר בסדרה תחילת תקופה, עיתוי סיוםה הוא "אחת לפני" הסיום הטבעי שלה. במלים אחרות, אם ההפקדה בתום כל שנה 10 שנים, המיקום על הציר של איברי הסדרה הוא בטוח של 10-1, אלא שכאן, לאור העובדה שמדובר בתזרימי תחילת תקופה, המיקום על הציר של איברי הסדרה הוא בטוח של 9-0. נdag להראות זאת גם ויזואלית. הערך שיש לחץ, סכום ההפקדה החודשי, יסומן כ- x :



$$FV = x * FVFA(7\%, 10) * (1 + 7\%)^1 = 400,000 \rightarrow x \approx 27,057.89$$

הסבר לביטוי המתמטי : ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד למועד ההפקדה الأخيرة. הויל וההפקדה الأخيرة היא בזמן 9 (תחלת שנה 10 = זמן 9 על הציר, תמיד), הרי שקיים פער זמנים של שנה אחת מהמועד אליו מובילת הנוסחה (למועד ההפקדה الأخيرة, זמן 9) לבין מועד הפירעון - זמן 10. לכן צריך לכפול את ביטוי הערך העתידי ב-1 ועוד הריבית פעם אחת (בחזקת אחת).

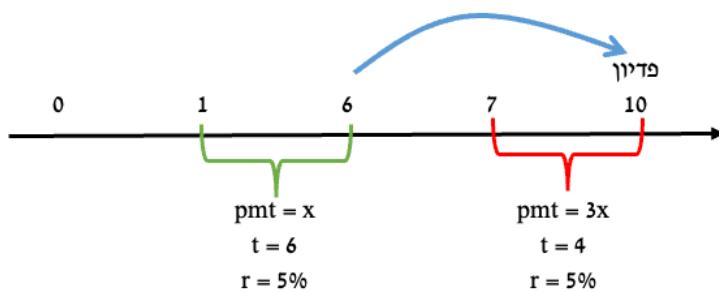
**שאלה 19 - חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון – שכלל - לבית**

שי מוכנן להפקיד בתום כל שנה במשך 6 שנים סכום קבוע, ובתום כל שנה במשך 4 השנים לאחר מכן גבוה פי 3, כך שבתום 10 שנים יעמוד לרשותו סכום של 400,000 ש"ח. מהו סכום ההפקדה בכל אחת מהשנים הראשונות, אם הריבית השנתית היא 5%?

משוואת הפתרון היא:

$$FV = x * FVFA(5\%, 6) * (1 + 5\%)^4 + 3x * FVFA(5\%, 4) = 400,000 \rightarrow x = 18,869.82$$

התרשימים המנמק הוא זה:



והסביר המילולי הוא: יש לנו כאן למעשה שתי סדרות. הסדרה הראשונה היא עברו ההפקדות בכל אחת מהשנים 1-6. בתום כל אחת מהשנים. הסדרה השנייה היא עברו הפקדות בתום כל אחת מהשנים 7-10. חישוב הערך העתידי של הסדרה הראשונה מוביל בזמן 6, ואת התוצאה צריך לדחוף 4 תקופות קדימה על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 4 (כך מעבירים את התוצאה מזמן 6 לזמן 10). לעומת זאת הערך העתידי של הסדרה השנייה מוביל בזמן 10 בהגדלה (מועד ההפקדה الأخيرة בסדרה האדומה). את תוצאה חיבור הערך העתידי של שתי הסדרות, הסדרה הראשונה עם התאמת הזמן והסדרה השנייה כמו שהיא, משווים לערך העתידי הכללי הנדרש שהוא 400,000.

שאלה 20 - חילוץ סכום הפקדה מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון, עם התאמת ריבית נקובה - **לבית**  
 בונידו מתכנן להפקיד בתום כל חודש סכום קבוע במשך שנים, ובמהלך כל אחת מ-3 השנים לאחר מכן סכום גובה פי 4. לאחר מכן, בשנה הששית, השבעית והשמינית, איננו מפקיד. בסוף 8 שנים הצטבר אצל בונידו סכום של 550,838 ש"ח. מהו הסכום שהפקיד בכל חודש בשנתיים הראשונות, אם ידוע שהריבית השנתית היא ריבית נקובה בשיעור של 24%?

פתרון :

מעבר לתחום בשאלה זו שקצת מזכיר את הקודמת (לפצל מספר סדרות, לעורך התאמות, סכום ההפקדה כמובן) יש כאן הבדל מרכזי ועקרוני לגבי נתון הריבית. אנו יודעים שכאשר עורכים חישובי סדרה, מהתוד הנדרש בהקשר זה, הריבית חייבת להיות לתקופת תשלום. כלומר, אם ההפקדות חודשיות - חובה לייצר ריבית חודשית. לעומת זאת, הריבית הנתונה כאן שנתית, ולכן יש להמירה, משנה לחודש. את האופן שבו מוצאים המרות ריבית עוד נציג בהרבה בהמשך הדרך, אבל בניתוח, לטובות חישובי סדרות בסיסיים כאלו, רק נאמר משפט: כאשר הריבית הנתונה היא ריבית נקובה שנתית, אזי כדי לתאמ אותה משנה לתקופת תשלום, פשוט מחלקים אותה באופן יחסית בהתאם.

בשפה פשוטה: אם יש נתון על סדרה חודשית, והריבית **הנקובה** שנתית, נחלק את הריבית הנקובה ב-12 וכך נקבל בפשטות רבה את הריבית החודשית.  
 המילה נקובה מודגשת, ולא בכדי; בהמשך נראה שכאשר הריבית אינה נקובה, המרתה מבוצעת באופן שונה. בניתוח, הריבית החודשית היא:

$$r = \frac{24\%}{12} = 2\%$$

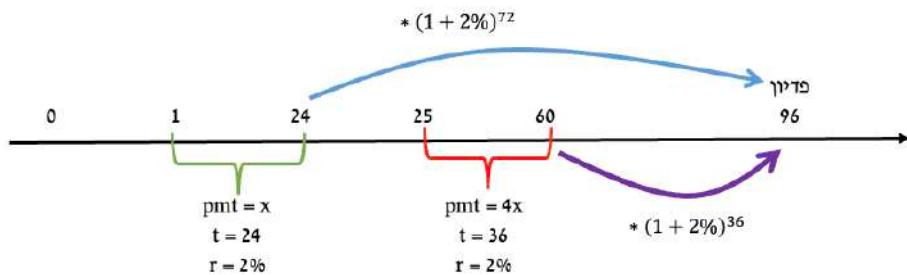
והנוסחה המביאה לידי ביטוי ערך עתידי של סדרה בתשלומים חודשיים היא:

$$FV = x * FVFA(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{72} + 4x * FVFA(2\%, 36) * (1 + 2\%)^{36} = 550,838$$

הפתרון ה"סופי" הוא:

$$x = 1,000$$

הסביר בתרשימים:



**שאלה 21 - חילוץ שיעור ריבית מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - לבית**

קוזיקרו מתכוון להפקיד בתום כל חודש במשך 7 חודשים סכום קבוע של 4,000 ש"ח. מה צריכה להיות הריבית השנתית ביחסו אם ידוע שהסכום שנצבר בתום 7 החודשים הוא 29,737 ש"ח?

פתרון :

גם שאלת זו עוסקת בערך עתידי של סדרה. ההבדל הוא שהריבית איננה ידועה, ולכון היא הערך שנדרש לחלא. חשוב לשים לב: ערך עתידי של סדרה מוביל תמיד למועד ההפקדה האחידת. ולכון, אם ההפקדה בתום כל חודש במשך 7 חודשים, הערך העתידי הסדרתי אכן מוביל בזמן 7, שהוא נקודת היעד לגביה נתון הערך הנוכחי, ולפיכך אין כל צורך בהתאמות. משווהת הפתרון תהיה :

$$4,000 * FVFA(r, 7) = 29,737$$

ואיך פורטים מקרה כזה: שבו הנעלם ב-  $r$  שבתוך ה-  $FVFA$ ? פשוט מאד. בטור התחלה נгла ספרטיפית את ה-  $FVFA$ , קלומר נחלק את שני האגפים ב-4,000, קיבל :

$$FVFA(r, 7) = \frac{29,737}{4,000}$$

או בעצם :

$$FVFA(r, 7) = 7.434$$

כעת, ניגש לנספח א' לכרך ד (לוחות היון) ללוח א-2. ננסה למצוא את הערך 7.434 בלוח, ונבדוק עזר איזו ריבית הוא מתקיים, כאשר  $t$  (מספר התשלומים) הוא 7. קיבל ש-  $r = 2\%$ . ראו צילום חלקו של הטבלה להלן.

$t$	$r$	1%	2%	3%
1		1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030
3		3.030	3.060	3.091
4		4.060	4.122	4.184
5		5.101	5.204	5.309
6		6.152	6.308	6.463
7		7.214	7.434	7.662
8		8.286	8.583	8.892
9		9.369	9.755	10.159
10		10.462	10.950	11.464

התוצאה שקיבלו היא הריבית לפרק הזמן בין תשלומים - לחודש. כדי למתאם את הריבית זו למועדים שנתיים, בגישה ריבית דרייבית, נצטרך לבצע המרת שמתבססת על מערך חזקה מתאים :

$$r_{year} = (1 + 2\%)^{12} - 1 = 26.824\%$$

מה עשינו פה? במקרה הכללי בקורס, יש להניח שמתיקיימת "ריבית דרייבית". המשמעות היא שאם הגיענו לריבית לחודש, ורוצים להגיע לריבית שנתית, אלא אם נאמר מפורשות אחרת - החישוב הוא לפי :

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1$$

הערך  $r_{year}$  מייצג את הריבית השנתית

הערך  $r_{month}$  מייצג את הריבית החודשית

שימו לב! בשאלת 19 המרת הריבית בוצעה עם חילוק ולא עם חזקה, משום שם נתון מפורש שהריבית נקובה. על המרות ריבית עוד נרחב בהמשך, אך חשוב שתתקדמו עם המרות פשוטות ביןתיים שכן חלק מרכזיו מכל שאלת ערך עתידי או ערך נוכחי נפוצה בקורס זה.

**שאלה 22 - חילוץ מספר הפקדות מנתוני סדרה כאשר הערך העתידי נתון - לבית**

קוזיקרו מתכוון להפקיד בתום כל שנה סכום קבוע של 14,609.43 ש"ח, כאשר הריבית השנתית 6%. בחולף מספר מסויים של שנים, הסכום שנცבר הסתכם ב-167,877 ש"ח. כמה הפקדות שנתיות בוצעו לחסכו?

פתרון :

הפעם, הנעלם הוא מספר הפקדות (שזהה במספר השנים). ידוע כי משווהת הפתרון המתאימה תהיה :

$$14,609.43 * FVFA(6\%, t) = 167,877$$

בثور התחלה במצבים כאלו, כשהנעלם הוא בתוך הסוגרים של  $FVFA$ , נחלץ אותו וזאת על ידי חלוקת שני האגפים ב-14,609.43. כך נקבל :

$$FVFA(6\%, t) = \frac{167,877}{14,609.43} = 11.491$$

כעת, ננסה לאתר בלוחות ההיוון בלוח א-2 את הערך 11.491 עברו ריבית של 6%. נמצא ש :  $t = 9$ . כך :

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%
1		1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
2		2.010	2.020	2.030	2.040	2.050	2.060
3		3.030	3.060	3.091	3.122	3.153	3.184
4		4.060	4.122	4.184	4.246	4.310	4.375
5		5.101	5.204	5.309	5.416	5.526	5.637
6		6.152	6.308	6.463	6.633	6.802	6.975
7		7.214	7.434	7.662	7.898	8.142	8.394
8		8.286	8.583	8.892	9.214	9.549	9.897
9		9.369	9.755	10.159	10.583	11.027	11.491

ולכן תשובה לנו הסופית היא, שיש לבצע 9 הפקדות שנתיות על מנת להגיע ליעד הצבירה הנתון של קוזיקרו.

**שאלה 23 - ערך עתידי של סדרה עם חילוץ תקופות המתנה**

בolidro יפקיד 1,000 ש"ח כל תחילת חודש במשך שנתיים, כאשר במהלך שנתיים אלו הריבית החודשית היא 1%. לאחר מכן ימשיך להפקיד שנה נוספת 1,000 ש"ח בסוף כל חודש בריבית חודשית של 4% (ריבית זו תשאר קבועה גם בשנים העוקבות). כמה זמן bolidro יטרך לחייב את הפקדה האחונה, אם יעד הצבירה שלו הוא 93,899 ש"ח?

פתרון :

לשם נוחות, נחשב תחילת את הצבירה לתום החודש ה-36, תום השנה השלישי:

$$FV_{36} = 1,000 * FVFA(1\%, 24) * (1 + 1\%) * (1 + 4\%)^{12} + 1,000 * FVFA(4\%, 12)$$

הסבר :

סדרת הפקדות בשנתיים הראשונות היא בתחלת כל חודש. לכן, על הציג, מדובר בהפקדות בזמן 0 עד 23, ולא 1 עד 24. החישוב הסדרתי מוביל בהתאם למועד הפקדה האחונה - זמן 23.Cut, הוואיל והריבית עד זמן 24 ממשיכה להיות 1%, דוחפים את התוצאה זמן 23 לזמן 24 בריבית 1% על ידי מכפלה ב-1 בתוספת 1%. כך ביטאנו את הערך העתידי של סדרת הפקדות של השנתיים הראשונות בזמן 24. Cut, כדאי מאד לדוחוף את הכל בזמן 36, ובהתאם שהריבית העדכנית היא 4%, כופלים ב-1 בתוספת 4% בחזקת 12. Cut, ניבור לסדרה השנייה. היא בשנה השלישי, אבל בתום כל חודש. לכן היא בטוחה הזמנים של 25-36. הערך העתידי של סדרה זו מוביל בזמן 36, ללא צורך בהתאם.

התוצאה המספרית המתקבלת מהחישוב היא :

$$FV_{36} = 58,643$$

cut השאלה היא: כמה חודשים של צבירת ריבית נוספת (בשיעור 4%) צריכים לחולף, על מנת שנגיע לעד הצבירה המוגדר?

המשווה הפעם תהיה :

$$FV = 93,899 = 58,643 * (1 + 4\%)^t$$

נחלק את שני האגפים ב-58,643 ונקבל :

$$\frac{93,899}{58,643} = 1.04^t \rightarrow 1.601 = 1.04^t$$

ואז, או שנציב את ערכי t שנותונם בשאלה (אם היא אמריקאית) או שנפטרו באמצעות חוקי לוגריתמים :

$$\ln 1.601 = \ln 1.04^t \rightarrow \ln 1.601 = t * \ln 1.04 \rightarrow t = \frac{\ln 1.601}{\ln 1.04} \approx 12$$

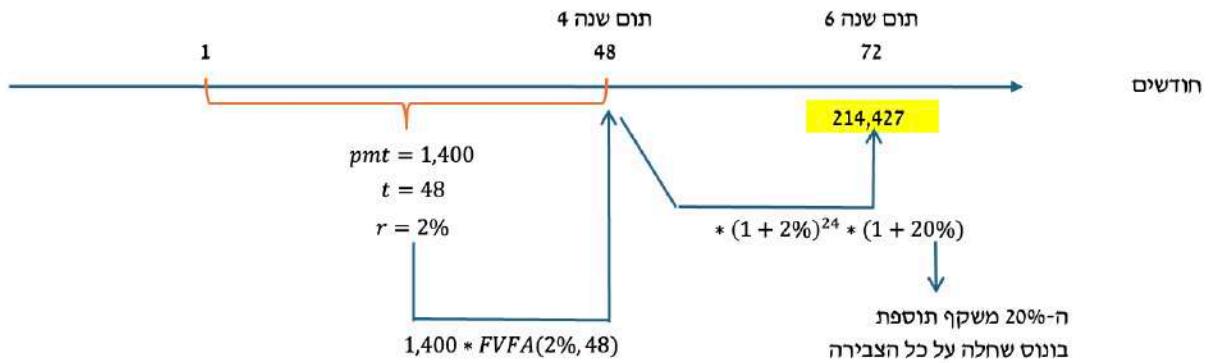
ולכן, צריך להמתין כ-12 חודשים (כשנה) לאחר הפקדה האחונה כדי ליצר צבירה זו.

**שאלה 23.1 – חילוץ סכום ריבית המתבסס על חישוב הפקזה רעיונית וערך עתידי**  
בנק "הנקיק הלטיני" יצא במבצע ללקוחותיו: הפקד בכל תחילת חודש במשך 4 שנים סכום קבוע מסויים, והבנק יתייחס לכך, ברישומיו, כאילו הפקdot 1,400 ש"ח בתום כל חודש.  
הסכוםים שהבנק יתייחס אליהם ברישומיו, יצברו ריבית חודשית בשיעור 2%. בחלוף שנתיים ממועד סיום החסכו תוכלו לקבל את הסכום שנצבר על בסיס רישומי הבנק, בתוספת מענק בשיעור 20% מסכום זה. בהנחה שהתשואה השנתית האפקטיבית של התוכנית היא 12.6825%, מהו הסכום שיופקד בכל תחילת חודש?

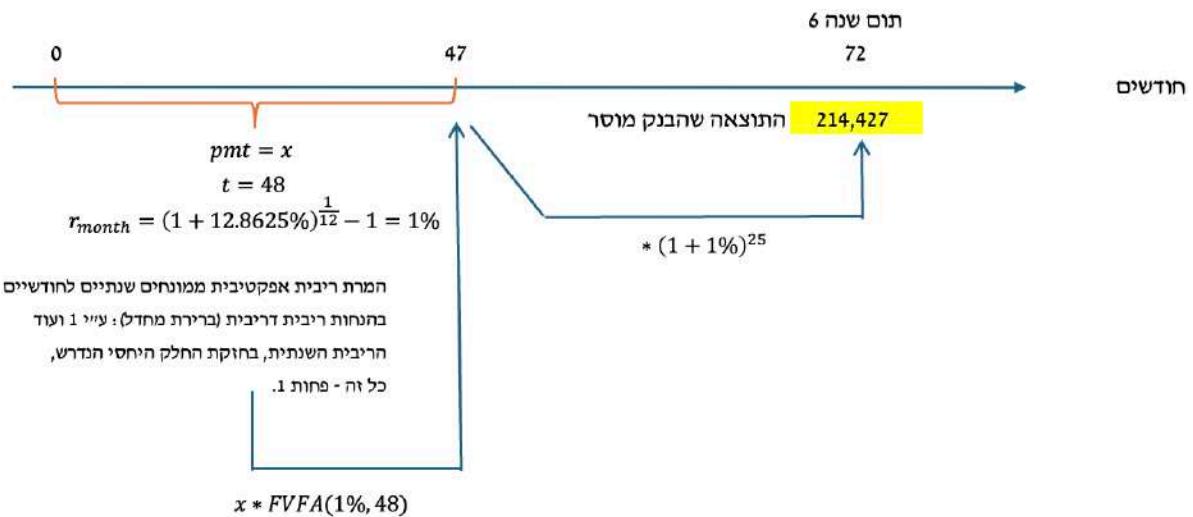
**פתרון:**

- שלב 1: נחשב את הסכום העתידי שנצבר ללקוח בנק על בסיס הפקdotyo ואופן החישוב העתידי שמבצע הבנק (FV כולל, במונחים כספיים).
- שלב 2: בניית משווה המתבססת על הריבית בפועל (הריבית האפקטיבית) ועל סכום ההפקזה בפועל (נעלים שיוביל לו סכום. במסגרת זאת, נשים לבנו לכך שיש צורך בהתאם לריבית האפקטיבית הנונה ממוניים שנתיים למועדים חודשיים בהתאם לפרק הזמן בין תשלומיים.
- פתרון המשווה של שלב 2 יהיה למעשה התוצאה.

חישוב הסכום הנכבר על בסיס רישומי הבנק והנתוניו :



כעת, נתייחס להפקות בפועל (שڪומן לא ידוע), לריבית בפועל (ריבית אפקטיבית) ולערך העתידי שנוצר דרך רישומי הבנק :



משוואת הפתרון תהיה :

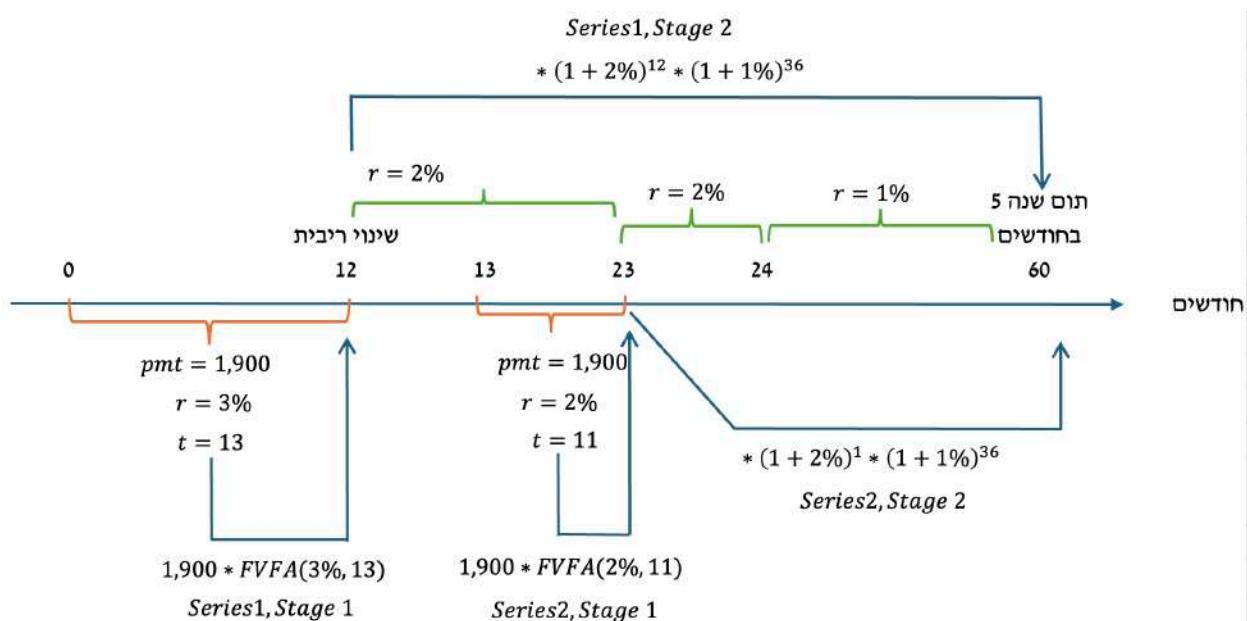
הביטוי המיציג את הערך העתידי של ההפקות בפועל מוביל לתוצאה מסוימת זהה לו שהבנק מעניק לי על פי  
חישובייו שלו :

$$x * FVFA(1\%, 48) * (1 + 1\%)^{25} = 214,427 \rightarrow x = 2,731$$

מסקנה : **הסכום שיווק בפועל בהינתן נתוני השאלה הוא 2,731 ש"ח בתחלת כל חודש 4 שנים.**

**שאלה 23.2 - חישוב ערך עתידי כולל תקופת המתנה ושינויי ריבית, תזרימי תחילת תקופה**

ד"ר צבן הוא אגדה מהלכת ולבן הוא מתכון לרכוש מכונה לאיסוף שלכת. לשם כך הוא מתכוון להפקיד בתוכנית חסכו סכום של 1,900 ש"ח בכל תחילת חודש במשך שנתיים. את הסכום שנצבר הוא ישאיר בחסכו במשך 3 שנים נוספות, ורק לאחר מכן ירכוש את המכונה (בתום השנה ה-5). מהו הסכום הכולל שיימוד לרשותו בתום השנה ה-5 כאמור, אם ידוע שהריבית החודשית היא 3% בשנה הראשונה, 2% בשנה השנייה ו-1% בכל שנה לאחר מכן?



משוואת הפתרון :

$$FV(Series1) = 1,900 * FVFA(3\%, 13) * (1 + 2\%)^{12} * (1 + 1\%)^{36}$$

$$FV(Series2) = 1,900 * FVFA(2\%, 11) * (1 + 2\%)^1 * (1 + 1\%)^{36}$$

בהתאמה של ערכי FVFA (מע"ס) הרלוונטיים מלוח א-2 בנספח א לפרק ד נקבע :

$$FV(Series1) = 1,900 * 15.618 * (1 + 2\%)^{12} * (1 + 1\%)^{36} = 53,846$$

$$FV(Series2) = 1,900 * 12.169 * (1 + 2\%)^1 * (1 + 1\%)^{36} = 33,743$$

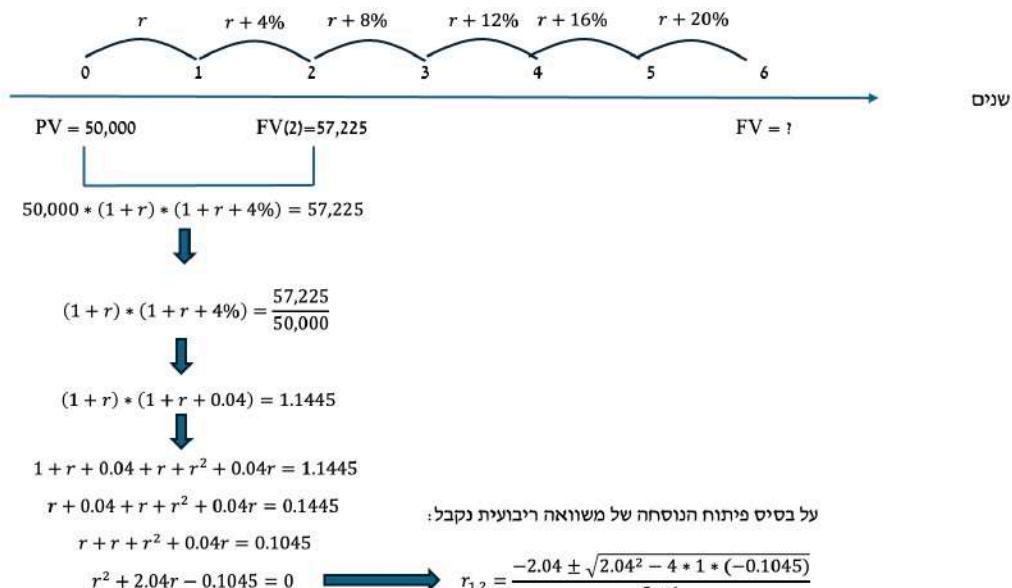
ובס"כ, הערך העתידי יהיה (אם יש טעויות חישוב, לימור אשמה) :

$$FV = 53,846 + 33,743 = 87,588$$

**התשובה הסופית: הסכום הסופי שייצטב בתום 5 שנים הוא 87,588 ש"ח.**

### שאלה 23.3 – ערך עתידי שנცבר כולל חילוץ ריבית רלוונטיות

ח敏ידוס השקיע 50,000 ש"ח בפיקדון בנקאי אשר נושא ריבית שגדלה בשיעור של 4% לשנה. בחלוף שנתיים עמד לרשותו סכום של 57,225 ש"ח. ח敏ידוס החליט להשאיר את הכספי בחסכוּן (באותם תנאים המשקפים המשך עלייה שנתית בריבית) עד לתום השנה ה-6 (במשך 4 שנים נוספות). מהו הסכום הכולל שיימוד לרשותו בתום השנה ה-6?



התוצאות לפיתוח זה הן ערך שלילי שנפסול מיד (הנחה ריבית חיובית בקורס) וכן ערך של 5%, שבו נשתמש.

משוואת החישוב:

$$FV(6) = 57,225 * (1 + 13\%) * (1 + 17\%) * (1 + 21\%) * (1 + 25\%) \approx 114,432$$

מסקנה: הסכום העתידי הנცבר לתום השנה ה-6 הוא (בש"ח) : כ-114,432 ש"ח.

## ערך נוכחי - חישובי PV

הסבר מילולי סופר תמציתי:

עד כה הוכח ערך עתידי (FV) - המשקף תחשייב של צבירות ריבית שמתווספת לקרן הלואה או השקעה/הפקדה על מנת לחשב את הסכום הכלול הנזכר בעתיד.

כעת נדוע בדיקת ההפוכה - חישוב ערך נוכחי (PV), האופן שבו אנו מסוגלים לתרגם ערכיהם שיתקבלו בעתיד לשווים היום, בזמן / מידי.

הנוסחאות המתמטיות יוצגו באופן אקסימטיבי, ללא הוכחות, ועיקר הדיוון יהיה בפתרון בעיות כלכליות ותרגילים מרובים המציגים את הבעיות השונות והיישומים של נושא מורכב זה.

סוגי חישובי ערך נוכחי שיוצגו:

- ערך נוכחי של סכום יחיד.
- ערך נוכחי של סדרה "סופית".
- ערך נוכחי של סדרה אינסופית.
- יישומים כלכליים של ערך נוכחי.

שאלה 24 - ערך נוכחי של סכום יחיד, ריבית קבועה

אוור:



שוקל לרכוש נכס. הנכס צפוי להניב לו בעוד 10 שנים סכום של 10,000 ש"ח. מהו המחיר המירבי שישכים סרגיי לשלם עד הנכס היום, אם הריבית השנתית היא 4%?

פתרון:

על פי נתוני השאלה:

הסכום העתידי שייווצר - FV : נתון: בעוד 10 שנים = 10,000

המטרה היא לחשב את הערך הנוכחי PV: את השווי היום. ? = PV

אז למעשה, אנו יודעים מהו ה - FV של סכום יחיד כלשהו (הסכום שסרגיי ישלם היום - PV). וכן ידוע שהריבית קבועה, אך הנוסחה הכללית לביטוי FV זה היא:

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

אם אציב את נתוני השאלה אקבל:

$$10,000 = PV * (1 + 4\%)^{10} \rightarrow PV = \frac{10,000}{1.04^{10}} = 6,755.4$$

הסכום המירבי שאור יסכים לשלם היום עד הנכס הוא כ- 6,775.4.

דרך אחרת למדל (נוסחה) את החישוב שערכנו - **ערך נוכחי של סכום יחיד כאשר הריבית קבועה**:

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$$

כאשר :

הערך PV הוא הערך הנוכחי / השווי היום

הערך FV הוא הערך העתידי (סכום יחיד)

הערך  $r$  הוא הריבית התקופתית

הערך  $t$  הוא מספר תקופות הריבית

אני (ד"ר צבאן) מעדיף את הגרסה הזו של אותה הנוסחה בדיק:

$$PV = FV * (1+r)^{-t}$$

למה זה מוגניב בرمות קשות? כי מעכשו אתה יודע, שכדי לחשב ערך עתידי - לדוחף סכומים קדימה אתה כופל ב-1 ועוד הריבית בחזקה חיובית, וכדי לחזור אחורה ברוורס - חישוב ערך נוכחי - אתה כופל באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית.

נציג את הנוסחה בגרסה שאנו אוהב בנתוני השאלה, שכזכור שלאו מהו הערך הנוכחי של 10,000 ש"ח שנתקבל בעוד 10 שנים, בהנחה שהריבית 4%:

$$PV = FV * (1+r)^{-t} = 10,000 * (1+4\%)^{-10} = 6,755.4$$

**שאלה 25 - ערך נוכחי של סכום יחיד, ריבית משתנה**

מהו הערך הנוכחי של 500,000 ש"ח שאתם צפויים לקבל בעוד 7 שנים, אם הריבית השנתית בכל אחת מהשנתים הראשונות היא 4% ואילו הריבית השנתית בכל שנה לאחר מכן (במהלך 5 השנים הבאות) היא 6%?

פתרון :

הנוסחה לחישוב ערך נוכחי של סכום יחיד כאשר הריבית משתנה היא :

$$PV = \frac{FV}{(1+r_1)^{t_1} * (1+r_2)^{t_2} * \dots}$$

או לחילופין (אני מעדיף ככה) :

$$PV = FV * (1+r_1)^{-t_1} * (1+r_2)^{-t_2} ..$$

כאשר :

הערך PV הוא הערך הנוכחי

הערך FV מייצג את הסכום העתידי שצפויים לקבל

הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה

העריכים 2,1 ו- 2,2 וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבהן כל ריבית תקפה

ישום בנתוני השאלה: דרישו ערך נוכחי של 500,000 שנתקבל בעוד 7 שנים כאשר הריבית בשנתיים הראשונות 4%, ובכל אחת מ-5 השנים לאחר מכן 6%:

$$PV = FV * (1 + r_1)^{-t_1} * (1 + r_2)^{-t_2} \rightarrow PV = 500,000 * (1 + 4\%)^{-2} * (1 + 6\%)^{-5} = 345,441$$

בהתאם לנוסחאות בספר או "עם המכנה", שמחשבות ערך נוכחי באמצעות חלוקה ולא עם חזקה שלילית, החישוב יהיה:

$$PV = \frac{FV}{(1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots} \rightarrow PV = \frac{500,000}{(1 + 4\%)^2 * (1 + 6\%)^5} = 345,441$$

## ערך נוכחי של סדרה

בדומה לערך עתידי של סדרה, גם ערך נוכחי של סדרה הוא מורכב יחסית; הרי ערך נוכחי משקף את הסכומים שצפויים בעתיד, ב不留ול אובדן הריבית האלטרנטיבית.

כל שפרק הזמן להמתנה עד קבלת התשלומים ארוך יותר, כך שווי התשלומים בהווה נמוך יותר. בהינתן שסדרה כוללת סכומים שפרק הזמן עד קבלתם משתנה (בהתאם לעיתוי של כל תזרימי סדרתי בפרט), הרי שיחסוב ערכם הנוכחי המכרי הוא מסובך. אבל – אפשר לקצר את התהליך על ידי שימוש בנוסחת ערך נוכחי סדרתי (להלן – PVFA או מענ"ס – מוקדם ערך נוכחי סדרתי, לוח א-4).

חשוב מכך :

- הנוסחה עובדת רק כשמדובר בסרי"ת קבוע: סכום, ריבית, תזרות – קבועים.
- **נקודות הזמן אליה מגיעים בחישובי ערך נוכחי סדרתי הוא "אחת אחרת":** ערך נוכחי של סדרה מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשוני בסדרה.

### שאלה 26 - ערך נוכחי של סדרה (סופית), מקרה פשוט (תום תקופה)

מהו הערך הנוכחי של סדרה הכוללת תקופלים בתום כל חודש במשך שנים בסכום של 2,000 ש"ח, אם הריבית החודשית היא 2%?

פתרון :

כאשר אני מזיהה צורך לחשב ערך נוכחי של סדרה (סרי"ת קבוע – סכום, ריבית, תזרות – קבועים), הנוסחה לחישוב ערך נוכחי של סדרה (עם מספר תזרים סופי) היא :

$$PV_{Series} = PMT * PVFA(r, t)$$

ביח' הלימוד (אותו דבר, עם סימנו בעברית) :

$$PV_{Series} = PMT * r(t, r) \text{ (מענ"ס)}$$

אפשר לשלוות את ערכי ה- PVFA (המענ"ס) מתוך לוח א-4 בנספח א לפרק ד (כזכור, לוח א-2 רלוונטי ל-FVFA).

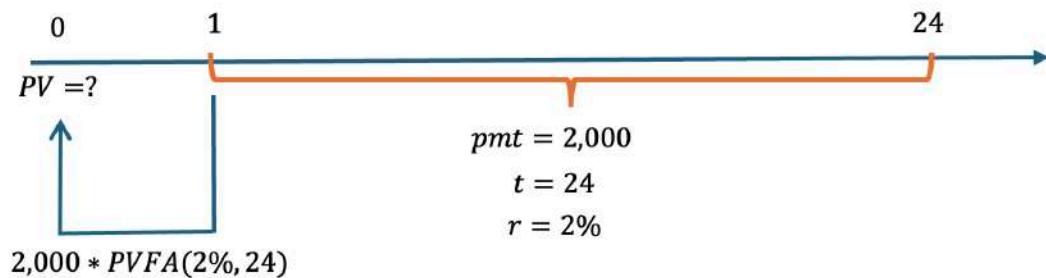
הנוסחה המתמטית ליישום :

$$PV_{Series} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כאשר :

הערך PV Series מייצג את הערך הנוכחי המכרי של הסדרה כולה  
 הערך  $t$  מייצג את התשלומים / התקופות בסדרה  
 הערך  $r$  מייצג את הריבית לתקופת תשלום  
 הערך  $PMT$  מייצג את מספר התשלומים

תזכורת לניסוח השאלה: ערך הנוכחי של סדרה המניבת 2,000 בסוף כל חודש שנתיים, בריבית חודשית 2%: ניתן להראות באյור שעתווי התזרים הראשונים הראשון הוא בתום החודש הראשון, ועתווי התזרים האחרונים הוא בתום החודש האחרון של השנה השנייה (תום החודש ה-24):



נחשב ונקבל:  
על ידי שימוש בנוסחה המתמטית:

$$PV_{Series} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} \rightarrow PV_{Series} = 2,000 * \frac{1 - \frac{1}{(1+2\%)^{24}}}{2\%} \approx 37,828$$

על ידי שימוש בערך PVFA- שלולפים מהטבלה (לוח א-4 נספח א לכרך ד):  
 $PV_{Series} = 2,000 * PVFA(2\%, 24) \rightarrow PV = 2,000 * 18.914 = 37,828$

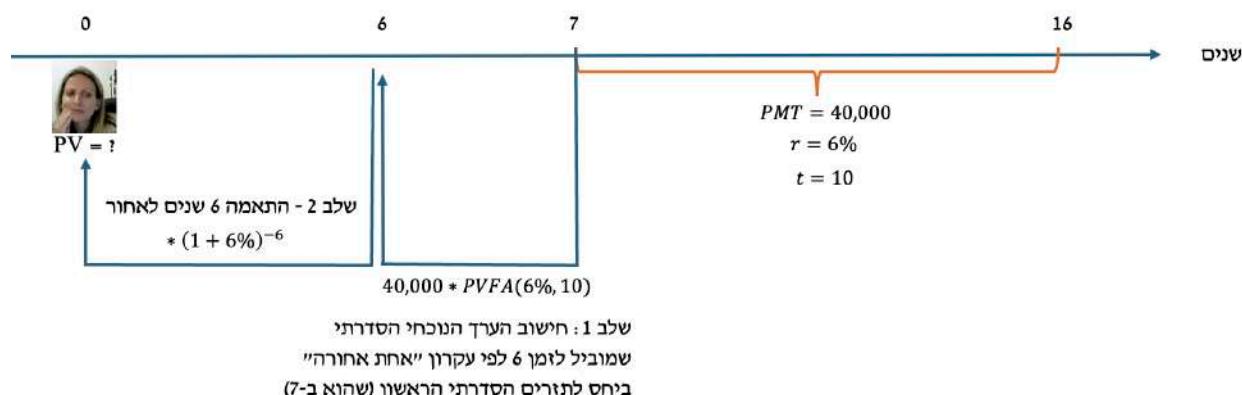
<i>t</i>	<i>r</i>	1%	2%
1		0.990	0.980
2		1.970	1.942
3		2.941	2.884
4		3.902	3.803
5		4.853	4.713
6		5.795	5.601
7		6.728	6.472
8		7.652	7.325
9		8.566	8.162
10		9.471	8.983
11		10.368	9.787
12		11.255	10.575
13		12.134	11.348
14		13.004	12.106
15		13.865	12.849
16		14.718	13.578
17		15.562	14.292
18		16.398	14.992
19		17.226	15.678
20		18.046	16.351
21		18.857	17.011
22		19.660	17.658
23		20.456	18.292
24		21.243	18.914

シומו לב: ערך נוכחי של סדרה מקפץ תמיד "אותה אחורה" (תקופת תשלום אחת אחורה) ביחס לתזרים המזומנים הראשון בסדרה. במקרה זה, שבו ההפקדה הראשונה היא בתום החודש ה-1, וההפקדות כל חודש, החישוב הוביל "חודש אחורה" ביחס לזמן 1, ככלומר לבדוק לזמן 0, נקודות היעד הנדרשת (לכן אין צורך בהתאם).

**שאלה 26.1 – ערך הנוכחי של סדרה עם התאמת תקופה לאחר**

גילת ישבה לה בפינת הבית והחלטה לבחון כדיות רכישת נכס, שצפוי להניב לה בתום כל שנה במשך 10 שנים סכום של 40,000 ש"ח. התקבול הראשון (מתוך ה-10) יתקבל בעוד 7 שנים. בהנחה שהריבית השנתית היא 6%, מהו הסכום המרבי שגילת תסכים לשלם **היום** بعد הנכס?

פתרונות :



משוואת הפתרון המלאה תהיה :

$$PV_0 = 40,000 * PVFA(6\%, 10) * (1 + 6\%)^{-6}$$

$$PV_0 = 40,000 * 7.360 * (1 + 6\%)^{-6} = 207,540$$

שימוש לב : הערך הנוכחי של הסדרה שהתקבל על ידי מכפלה ב- $PVFA$  רלוונטי אוטומטית דוחף אותנו אחת לאחריה ("בלי שנרצה" / "באופן שבلتני ניתן למנעה"). כל עוד נקודת הזמן אליה הגיעו אגב דחיפה אחת אוטומטית זו שונה מנקודת הזמן – נבצע התאמת רלוונטית נוספת, שכן – התקבלה על ידי מכפלה באחת ועוד הריבית חזקה שלילית להתקאה מזמן 6 ל-0.

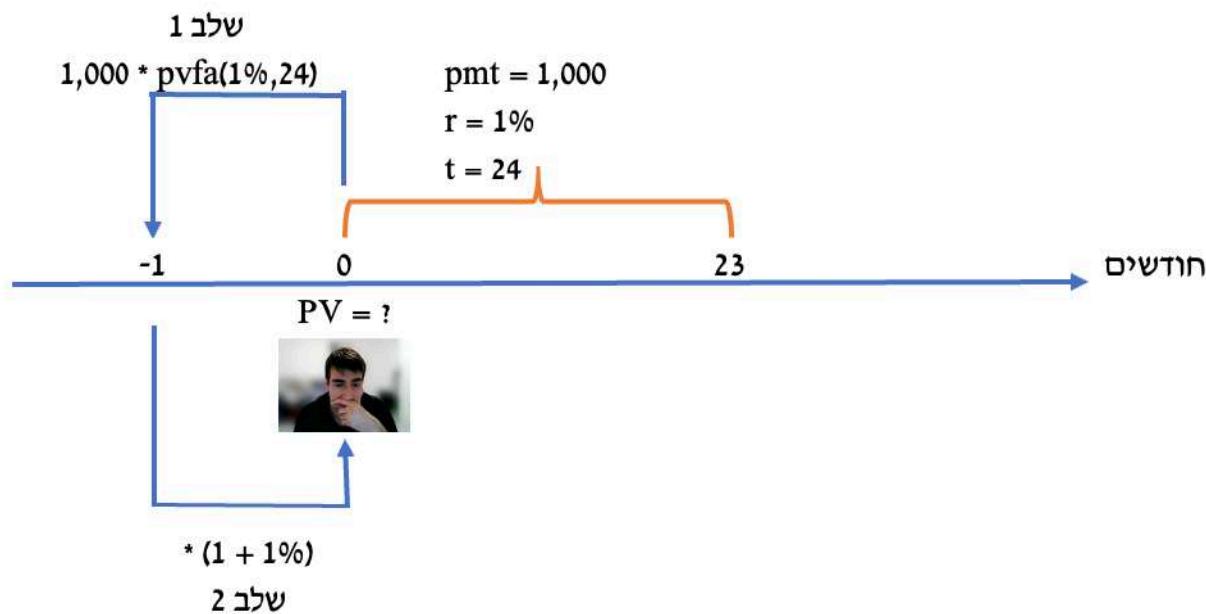
**שאלה 27 - ערך הנוכחי של סדרה, מקרה פשוט (תחילת תקופת)**

מהו הערך הנוכחי של סדרה הcotolat התקבולים בתחילת כל חודש במשך 24 שנים בסכום של 1,000 ש"ח, אם הריבית החודשית היא 1%?

פתרון :

- אם התזרומים בתום כל חודש במשך 24 שנים : על הציר : 1-24.  
 אם התזרומים בתחילת כל חודש במשך 24 שנים : על הציר : 0-23.  
 בשני המקרים, מדובר ב-24 תזרומים בסך הכל.

בהרחבה : במקרה ה"קלאסי", הפחות, התקבולים חודשיים הם בתום כל חודש, כלומר מזמן 1 עד לסיום העסקה. אבל כאן, נתנו שהתקבולים בתחילת כל חודש. המשמעות היא שהיבט איזור ציר הזמן, התקבול הראשון הוא מיידי, בזמן 0, והתקבול האחרון בזמן 23.



$$PV_{\text{Series}} = 1,000 * \text{pvfa}(1\%, 24) * (1 + 1\%)^1 = 1,000 * 21.243 * 1.01 = 21,455.43$$

מה קרה פה? התחנו מלכפול את התשלום התקופתי 1,000 ב-  $\text{pvfa}$  הרלונטי. אלא שבמקרה זה, הסדרה התחלה בזמן 0. לכן העיקרון המחייב שלפיו חישוב  $\text{pvfa}$  תמיד מנבא את התוצאה لنקודת הזמן שהוא "אתה אחורה" ביחס לתחילת הסדרה (כאן: אתה אחורה ביחס בזמן 0), קיבלנו בהתאם שההתוצאה עדכנית בזמן -1. לא רלוונטי! לכן עליינו לבצע תיקון ש"ידחף" את התוצאה (התאמת) קדימה, דהיינו קדימה תמיד ממבצעים ע"י מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת מתאימה, כאן חזקה 1, דוחפים חודש קדימה.

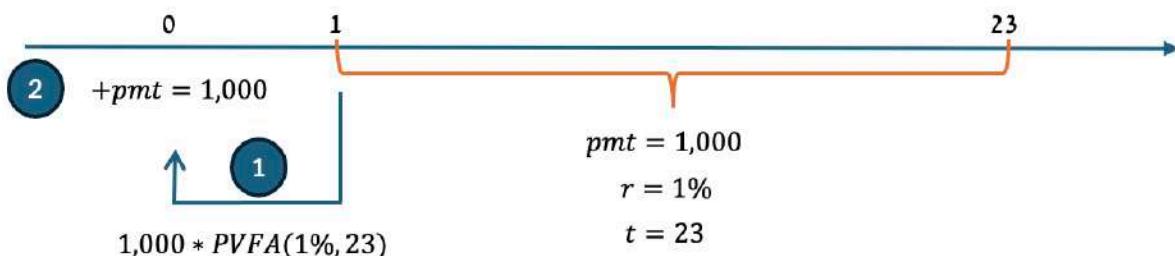
**נקודות מבט שונה לפתרון שאלה 27 – פיצול הסדרה לתזרים בזמן אפס ושארית הסדרה:**

ניתן בהחלט לחלק את הסדרה לחלקים כרצוננו;

בפרט ניתן להתייחס לסדרה כאל צו ש כוללת תזרים חד פעמי בזמן 0 בסך 1,000 ;

ו- 23 תזרים נוספים לאחר מכן כסדרה בזמן 1-23 .

בדרך זו, של התיקשות סדרתית רק לתזרים מ-1 עד 23, עיקרונו ה"אחת אחרת" שחול בסדרה מוביל אותה לבדוק זמן 0 ללא צורך בהסתמך. או אז, נוסיף את התזרים החד פעמי בזמן 0 וסיימנו :



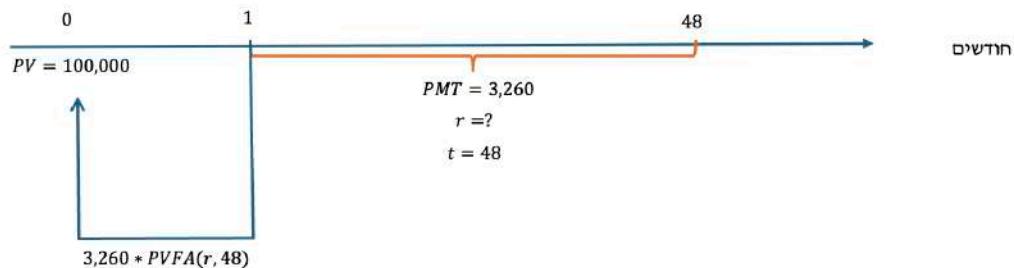
ומשוואת הפתרון היא :

$$PV = 1,000 + 1,000 * PVFA(1\%, 23) = 21,455$$

**שאלה 27.2 – הלואה בערך הנוכחי של סדרת תשלוםויים, כולל התאמת ריבית ו שימוש בנוסחה**  
 לקוחות נטל הלואה מבנק המועלם בסך 100,000 ש"ח.  
 ההלוואה תפרע בתשלומיים חודשיים שווים בסך 3,260 ש"ח כל אחד במשך 4 שנים. מהי הריבית השנתית האפקטיבית בהלוואה?

**פתרון :**

решת: סכום הלואה הוא תמיד הערך הנוכחי של החזרה, תוק גילום הריבית בהלוואה. במקרה זה, למעשה נתון הערך הנוכחי – סכום ההלוואה – 100,000, ואם ניצרך ביטוי של הערך הנוכחי של החזרים כאשר הנעלם היחיד הוא הריבית – נוכל להשוות בין הביטויים ואנחנו גולדן, כמו בשיר גולדן בראון.



**משוואת הפתרון :**

$$100,000 = 3,260 * PVFA(r, 48)$$

כדי לפטור, נתייחס לכל ה-PVFA כנעלם ונחשב את ערכו:

$$PVFA(r, 48) = \frac{100,000}{3,260} \approx 30.675$$

ניגש ללוח א-4 בנספח א לערך  $r = 48$ , וננסה לאתר עבור  $r = 30.675$  או ערך קרוב לו ככל הניתן.

<i>t</i>	<i>r</i>	1%	2%
26	22.795	20.121	
27	23.560	20.707	
28	24.316	21.281	
29	25.066	21.844	
30	25.808	22.396	
31	26.542	22.938	
32	27.270	23.468	
33	27.990	23.989	
34	28.703	24.499	
35	29.409	24.999	
36	30.108	25.489	
37	30.800	25.969	
38	31.485	26.441	
39	32.163	26.903	
40	32.835	27.355	
41	33.500	27.799	
42	34.158	28.235	
43	34.810	28.662	
44	35.455	29.080	
45	36.095	29.490	
46	36.727	29.892	
47	37.354	30.287	
48	37.974	30.673	
49	38.588	31.052	
50	39.196	31.424	

מצאנו שהמשווה מתקיים כאשר הריבית  $r=2\%$ .

... אלא ש...

הריבית  $r$  אשר מצייבים / מחליצים בחישוב סדרתי, תמיד וולומ תהייה הריבית לפרק הזמן בין תשלומים בסדרה. הוווי אומר, אם מדובר בתזוזים חודשיים, הריבית שחולצה לצערנו היא ריבית חודשית בעוד שהשאלה דרשה ריבית **שנתית**.

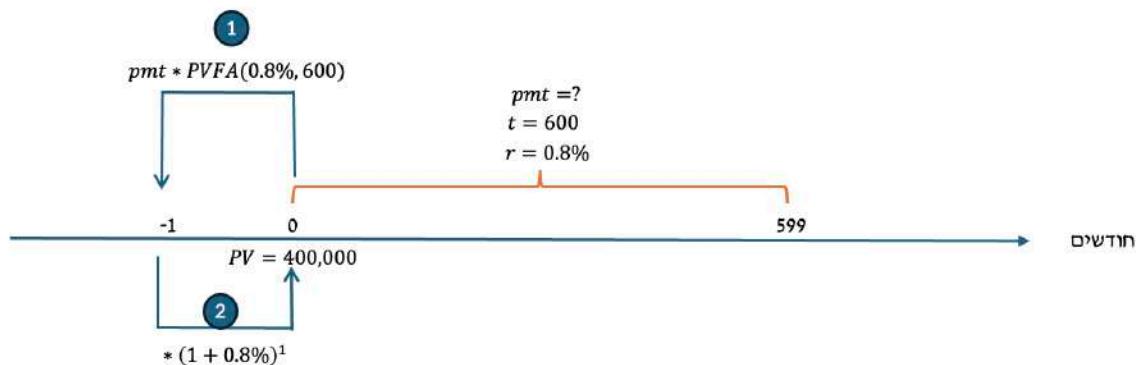
כדי לבצע המראה של ריבית חודשית לשנתית, בריית המחדל היא כזו שתニישן על נוסחת "ריבית דרייבית" :

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 \rightarrow r_{annual} = (1 + 2\%)^{12} - 1 = 26.824\%$$

פרק זו תהיה התשובה הסופית!

שאלה 27.3 – חילוץ החזר תקופתי קבוע מהלוואה שבה החזרים בתחילת כל חודש מר נקניק נטל הלוואה בסך 400,000 ש"ח המוחזרת בתשלומים קבועים בתחילת כל חודש במשך 50 שנים. הריבית החודשית היא 0.8%. מהו החזר החודשי הקבוע?

פתרון :



решение : סכום ההלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. אלא שהואיל וסדרת החזרים החלה בזמן 0 (סדרת תקופתית) אזי ישimos בערך נכון לסדרה זו, שמקפיד אוטומטית אחת אחרת, מוביל לביטוי שערך נכון בזמן 1, שלפיכך יתואם בזמן 0 על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקת 1.

ביטוי הפתרון הכלול :

$$PMT * PVFA(0.8%, 600) * (1 + 0.8\%)^1 = 400,000$$

שימוש לב שידוע כי :

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

ובהצבת  $r=0.8\%$  ו- $t=600$  (שימוש לב שהצבתי בנוסחה המתמטית כי לא הייתה לי ברירה, מספר תשלומים של 600 וכן ריבית לא שלמה לא מופיעה בלוח א-4) :

$$PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.8\%)^{600}}}{0.8\%} * (1 + 0.8\%)^1 = 400,000$$

$$PMT * 123.951 * (1 + 0.8\%)^1 = 400,000$$

$$PMT \approx 3,201$$

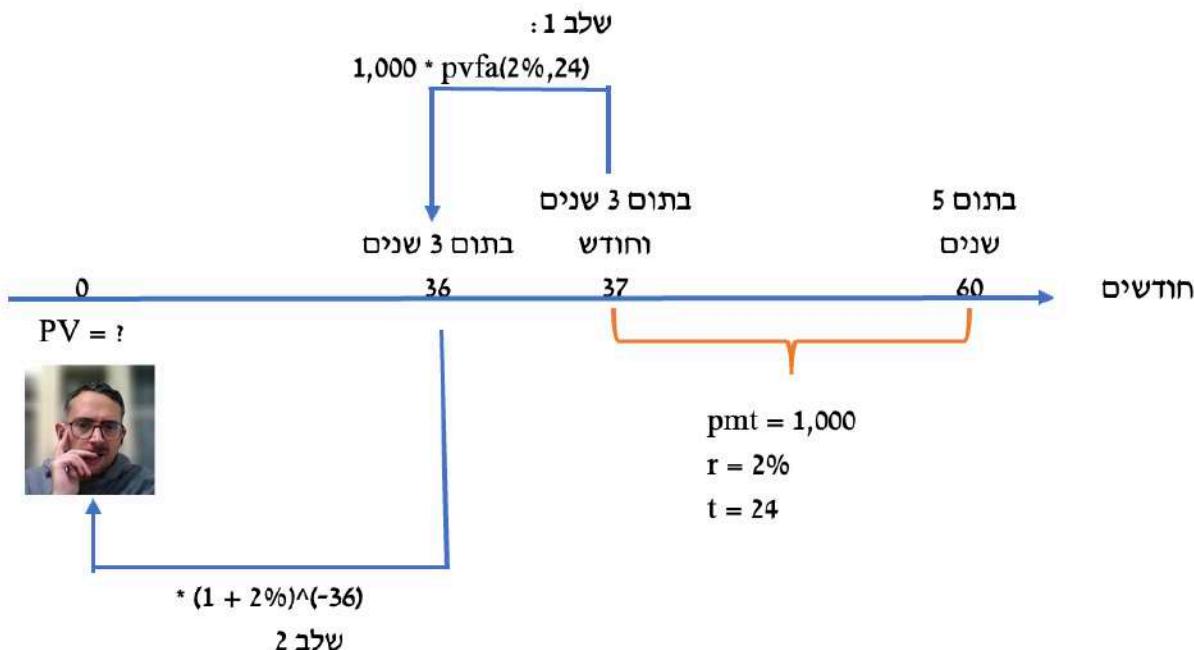
תוצאת החישוב הכלול מבטאת את סכום החזר הכספי החודשי שהוא 3,201 ש"ח.  
תמצית :

גם במקרה זה – זהה הלוואה שנפרעת בסדרת תשלומים, וכך בוצע שימוש במשפט (סכום הלוואה = PV החזרים). כזכור שהואיל והזרים צריכים להיות מתואימים בזמן 0, יש לבנות ביטוי רלוונטי המתיחס להתאמות מתבקשות, ומשם לחלק את התשלום.

שאלה 28 - ערך הנוכחי של סדרה דחיפה, עם התאמות זמן - **לבית**

מהו הערך הנוכחי של סדרה הcolellת התקבולים בסך 1,000, שייח בתום כל חודש במשך 5 שנים, כאשר התקובל הראשון הוא בעוד 3 שנים וחודש, אם הריבית החודשית היא 2%?

פתרון :



$$PV = 1,000 * pva(2\%, 24) * (1 + 2\%)^{-36} = 1,000 * 18.914 * 1.02^{-36} = 9,272.08$$

הסבר :

תחילה כפלנו את התזרים התקופתי 1,000 ב -  $pva$  הרלוונטי. כזכור, חישוב  $pva$  מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא תקופת תשלום אחת לפני התזרים הראשון בסדרה. כאן, התזרים הראשון בתום החודש ה-37, והתזרות היא חודשית. לכן, ה -  $pva$  הקפיז "אחד אחריה" ל-36, ובהתאם, יהיה علينا לבצע התאמה נוספת לאחר מכן, מ-36 ל-0. זאת, על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית (כפי זו התאמה לאחר) של 36.

שאלה 29 - ערך הנוכחי של מספר סדרות, עם התאמות זמן

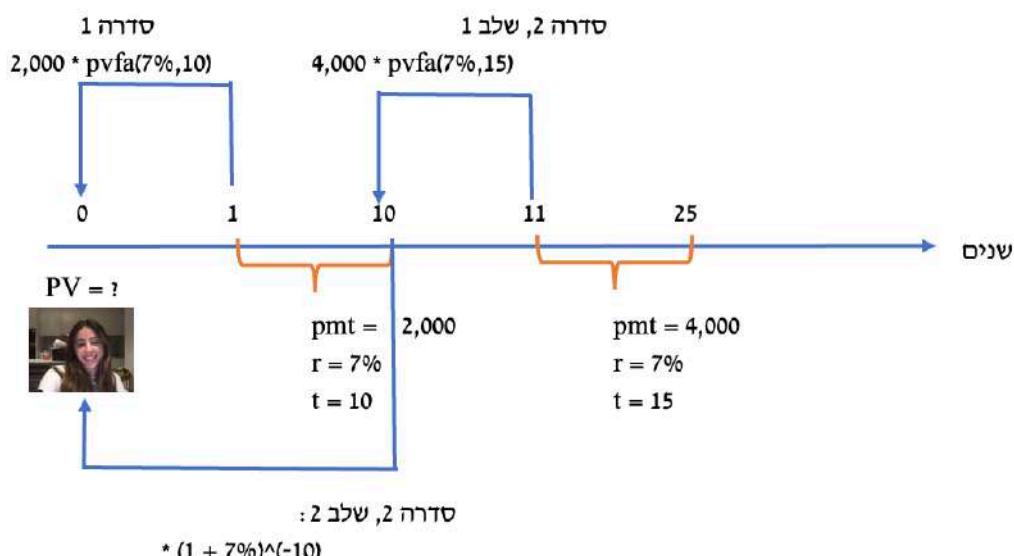
מהו הערך הנוכחי של סדרה הכוללת :

10 תשלוםים שנתיים בסוף כל שנה בסך של 2,000 ש"ח לתשלום ; ולאחר מכן :

15 תשלוםים שנתיים בסוף כל שנה בסך 4,000 ש"ח.

הניחסו שהריבית השנתית קבועה בשיעור 7%.

פתרון :



נחשב תחילה את הערך הנוכחי של הסדרה הראשונה, זו שכוללת 10 תזרימיים מזמן 1 לזמן 10 :

$$PV_{Series1} = 2,000 * PVFA(7\%, 10)$$

סדרה זו הינה בזמן 1, ביצועה שמקפי אוטומטית אחת אחרת – מוביל לזמן 0, ללא צורך בהתאמה נוספת של ערךיה.

לאחר מכן נחשב את הערך הנוכחי של הסדרה השנייה, זו שכוללת 15 תזרימיים מזמן 11 עד זמן 25. סדרה זו מוקפצת אוטומטית "אחד אחרת" – מובילני מזמן 11 לזמן 10, מה שדורש התאמה נוספת של הביטוי 10 שנים לאחר מכן בהתאם :

$$PV_{SERIES2} = 4,000 * PVFA(7\%, 15) * (1 + 7\%)^{-10}$$

סיכום שני רכיבי הביטוי כדי לקבל תוצאה סופית :

$$PV = 2,000 * PVFA(7\%, 10) + 4,000 * PVFA(7\%, 15) * (1 + 7\%)^{-10}$$

ובהצבה נקבל :

$$PV = 2,000 * 7.024 + 4,000 * 9.108 * (1 + 7\%)^{-10} = 32,568$$

הסביר :

הסדרה הראשונה חלה בזמן 1. לכן, כאשר כפלנו אותה ב -  $fvfa$  הרלונטי, ולפיכך הקפכנו את כל ערכיה השנה, הגיענו בדיקת זמן 0, וזה מציין - אין צורך בהתאמות עבור הסדרה ה-1.

לעומת זאת, הסדרה השנייה חלה בזמן 11. לכן, כאשר כפלנו אותה ב -  $fvfa$  הרלונטי, ולפיכך הקפכנו את כל ערכיה השנה אחרת, הגיענו לזמן 10 (שנה אחרת ביחס לזמן 11). כדי לתרגם את התוצאה מזמן 10 לזמן 0 (כי אני רוצה ערך נוכחי לזמן 0), אכפול את התוצאה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית של 10.

שאלה 30 - ערך נוכחי של סדרה אינסופית, המקרה פשוט (תום תקופה)  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה אינסופית שתنبي לסכום 6,000 ש"ח בתום כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית השנתית היא 5%?

פתרון :

רקע: אנו יודעים שהנוסחה המתמטית לחישוב ערך נוכחי של סדרה היא, באופן כללי :

$$PV_{Series} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

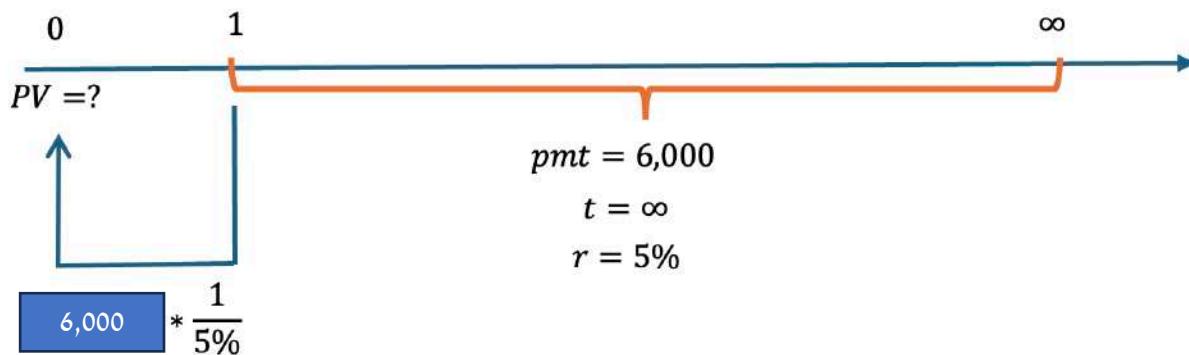
אם  $t \rightarrow \infty$

$$PV_{Series} = PMT * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^\infty}}{r} \rightarrow PMT * \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{r} \rightarrow PMT * \frac{1 - 0}{r}$$

הנוסחה לחישוב ערך נוכחי של סדרה אינסופית היא לפיכך :

$$PV_{Ensofit} = PMT * \frac{1}{r}$$

בנתוני השאלה: מהו הערך הנוכחי של סדרה אינסופית שתنبي לסכום 6,000 ש"ח בתום כל שנה לנצח, אם הריבית השנתית 5%?



$$PV_{Ensofit} = 6,000 * \frac{1}{5\%} = 120,000$$

זכרו: ערך נוכחי של סדרה, גם אם היא אינסופית, לוקח אותה תמיד אחת אחורה ביחס לתזוריים הראשונים. במקרה זה, התזוריים הראשונים הוא בעוד שנה (כי זה בתום כל שנה). לכן, הקפיצה "אחד Achote" הובילה בדיקת זמן 0, ואין צורך בההתאמה. במקרה מורכב יותר, עם התאמה, ראו שאלה 31.

שאלה 31 - ערך הנוכחי של סדרה אינטופית, המקרה פשוט (תחילת תקופה) - **לבית**  
 מהו הערך הנוכחי של סדרה אינטופית שתنبيיב לכמ 8,000 ש"ח בתחילת כל שנה לנצח, אם ידוע שהריבית השנתית  
 היא 7%?

פתרונות :

$$PV = 8,000 * \frac{1}{7\%} * (1 + 7\%)^1 = 122,286$$

שלב 1 :

$$8,000 * 1/7\%$$



$$pmt = 8,000$$

$$r = 7\%$$

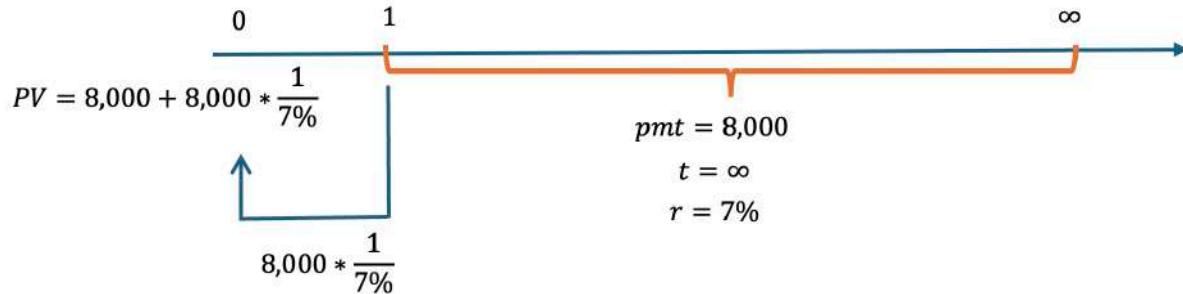
$$t = \text{Ensof}$$

הסבר :

הואיל והסדרה כללת איבר ראשון בזמן 0, חישוב ערכה הנוכחי הסדרתי שמקפיד "תקופת תשלום אחת אחרת" הובילנו בזמן -1. נדרש לבצע התאמה שנה קדימה מ-1- ל-0 וזאת על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה חיובית של 1.

דרך נוספת לפתרון :

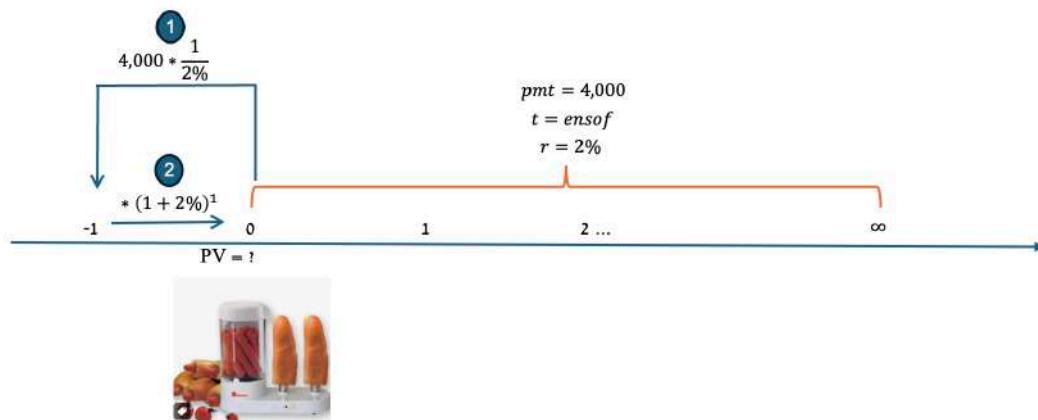
יש-Calculators שמאפשרים לפצל את הסדרה האינטופית לזרועים ראשוני בזמן 0 של 8,000, ולאחר מכן סדרה אינטופית "ירגילה" של 8,000 ש"ח בתום כל שנה מזמן 1 ואילך, בצד הימני של המפה להמטה. בדרך זו, ניתן פשוט להוציא 8,000 ש"ח מזמן אפס לערך הנוכחי של יתר רכיבי הסדרה, ולהגיע למתואמת זהה.



- שאלה 31.1 – שווי נכס המגיב תזרימים צמייתים ונמכר בחלוף תקופה - **לבית**  
 בוניטה שוקלת לרכוש היום מכונה לחימום נקניק לעובדי המשרד. המכונה צפויה להגיב תזרים שנתיים נקי בתחלית כל שנה ולצמיות, בסכום של 4,000 ש"ח. הריבית השנתית 2%.
- מהו שווי הנכס?
  - כיצד תשתנה תשובתכם בהנחה שבוניטה מתכוonta למכור את המכונה בעוד 8 שנים?

**פתרון סעיף א:**

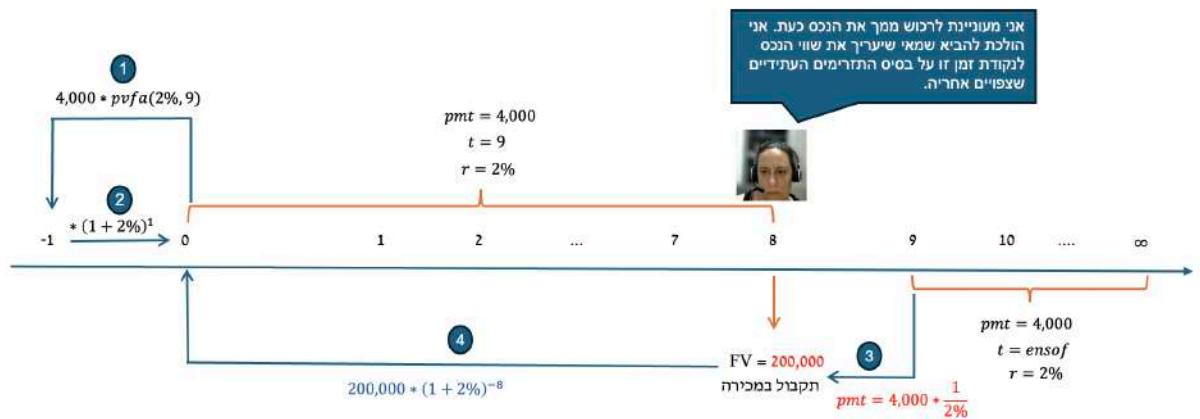
מדובר בחישוב ערך הנוכחי של סדרה שמועד איברה הראשון הוא בזמן 0, ולכן הקפיצה לאחר המobile לזמן 1-  
 דורשת תיקון ע"י מכפלה ב-1 ועוד הריבית כפי שהראינו בדוגמה קודמת:



ולכן שווי הנכס הוא :

$$PV = 4,000 * \frac{1}{2\%} * (1 + 2\%) = 204,000$$

## פתרונות סעיף ב:



מה לעוזל הלאך זה?

ראשית, הואיל וצפואה מכירת הנכס בתום 8 שנים (לאחר התקובל במועד זה), הרי שעליינו לחשב ערך נוכחי סדרתי ל-9 התזרים מזמן 0 לזמן 8 ולתקן בהתאם.

אלא שמעבר לכך, יש לחשב גם את התמורה הצפואה מממכר הנכס בזמן 8. תמורה זו מהוות את הערך שיראה הקונה בזמן 8 אשר מייצג את התזרים הצפויים מזמן 9 וαιיך, מותוקנים בזמן 8. בדרך זו מתקבלים את התקובל במכירה, שמהווים (מחשבים לו PV) כסכום ייחד, ובsek הכל – הערך הנוכחי הכלול הוא חיבור ערכה הנוכחי של הסדרה, יחד עם הערך הנוכחי של התקובל במכירה:

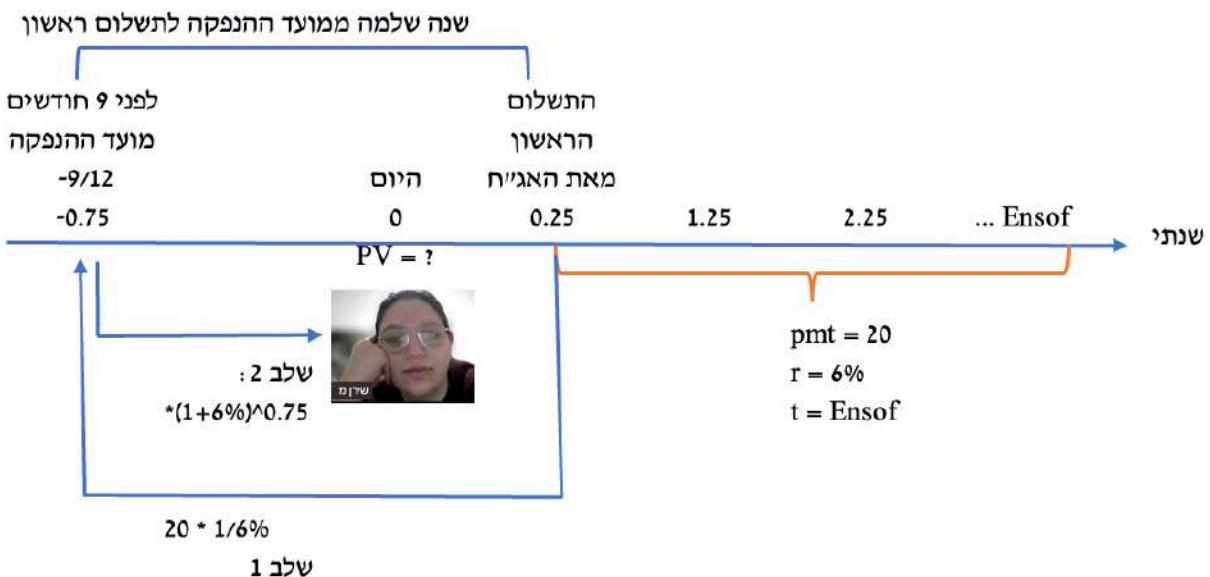
$$PV = 4,000 * PVFA(2\%, 9) * (1 + 2\%) + 200,000 * (1 + 2\%)^{-8}$$

$$PV = 4,000 * 8.162 * (1 + 2\%) + 200,000 * (1 + 2\%)^{-8} = 204,000$$

מסקנה – ושווה תמיד לחשב את החישוב המלא כדי לא לחתת כללים במקומות לא רלוונטיים: אם נכס צפוי להניב **תזרים קבועים אינסופיים ללא שינוי בሪביה**, פרק הזמן להחזקתו לא ישפיע על שוויו.

**שאלה 32 - ערך נוכחי של סדרה אינסופית - שימוש בתמוך אג"ח קונסול והתאמת זמן**  
 אג"ח קונסול (שלםת תלומים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משולם ריבית בסכום של 20 ש"ח בתום כל שנה (ביחס למועד הנפקתה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחיר האג"ח היום?

פתרון :



הסבר :  
 תחילה, יש לשים לב שהויל והאג"ח הונפקה לפני 9 חודשים, הרי שעל הציר, נקודת יצירת הנכס היא 9/12 בסימן שלילי. זה חשוב, הויל והאג"ח משולם ריבית כל שנה ביחס להנפקתה. לכן, אם היא הונפקה לפני 9 חודשים, תשלום הריבית הקרוב הוא בעוד 3 חודשים. זה חשוב מאד, כי עליי להגדיר את מועד התשלומים הקרוב במדויק נcona.  
 בcut, אני פועל לחשב ערך נוכחי של סדרה אינסופית, זאת, ע"י מכפלת התשלומים התקופתי 20 ב-1 חלקו הריבית. אלא שכמו בסדרה, חישוב זה תמיד מカリיך "תקופת תשלום אחת אחרה" ביחס לתזרים הראשונים. אם התזרים הראשון הוא בעוד 3 חודשים, והקפיצה אחרת היא שנה שלמה, המכפלה הזו היא לזמן מינוס 9/12. כדי לתקן קדימה 9 חודשים, זמן 0 - מכפול ב-1 ועוד הריבית בחזקת 9/12 ( $0.75 = 9/12$ ).

**שאלה 33 - ערך נוכחי של סדרה אינסופית - שימוש בתמוך אג"ח קונסול והתאמת זמן וריבית מורכבת**  
 אג"ח קונסול (שלםת תלומים כל שנה, לאינסוף) הונפקה לפני 9 חודשים. האג"ח משולם ריבית בסכום של 20 ש"ח בתום כל 4 שנים (ביחס למועד הנפקתה). בהנחה שהריבית השנתית האפקטיבית היא 6%, מהו מחיר האג"ח היום?

פתרון :

אנו הגדרנו שבחישובי סדרה - הריבית (x) חייבות להתאים לפרק הזמן בין תשלוםמים. במקרה זה, פרק הזמן בין תשלוםמים הוא 4 שנים. לרובה הចער - הריבית הנтונה היא שנתית בלבד. לכן, חובה עליי לתקן ולתאמס את שיעור הריבית ל-4 שנים.

איך נעה זהה? כברירת מחדל, מגנוו התאמת הריבית בקורס מtabסס על ההנחה שקיימת ריבית דרייבית. לכן, גם התאמת הריבית מבוצעת עם חזקה רלוונטית:

$$r_{4years} = (1 + r_{year})^4 - 1 = (1 + 6\%)^4 - 1 \approx 26.248\%$$

מדוע חישוב מעצמן זה נדרש בשאלת זו ולא בקודמות? עם "1-'" שאנו בורור? התשובה לכך היא שזוהי השאלה הראשונה היום שבה תקופת הריבית הייתה נתונה (שנתית) שונה מפרק הזמן בין תשלוםמים (4 שנים). לכן, זו הפעם הראשונה שנאלצנו לבצע בה התאמת ריבית, וזה הנוסחה הרלוונטית עבורה.

חישובי ריבית אפקטיבית ייידנו בהרחבת מרווחה בمضgesch 4. לכן זה בסודו ללמידה כרגע את הנושא הזה טכנית.



הסבר השלבים :

תחילת השתמשנו בנוסחת ערך נוכחי של סדרה אינסופית. התוצאה הקפיצה אותנו "תקופת תשלום אחת אחרת" ביחס למועד התזרים הראשון. עיתוי התזרים הראשון הוא ב-3.25, ותקופת תשלום הוא 4 שנים. לכן התוצאה תקפה לזמן 0.75 - 4 שנים לפני (3.25). יש לתאמס את התוצאה, לפיכך, 0.75 שנים קדימה. לשם כך, כפלנו ב-1 ועוד ריבית שנתית של 6% בחזקת 0.75 (בזמן חיובי).

### שאלה 33.1 - ערך נוכחי של סדרה אינסופית עם התאמות

מהו הערך הנוכחי של נכס שצפוי להניב תקבולים כל 5 שנים בסכום של 15,000 ש"ח לנצח, כאשר התשלומים הראשונים הוא בעוד שנתיים, בהנחה שהריבית השנתית 7%?

פתרון:

חשיבות מכך לשים לב שכאשר מתייחסים לערך הנוכחי של סדרה, הריבית ( $r$ ) שבה נשתמש חייבת להיות תקפה לפרק הזמן בין התשלומים בסדרה. במקרה זה, הריבית נתונה כריבית שנתית - 7%, אך התשלומים הם כל 5 שנים.

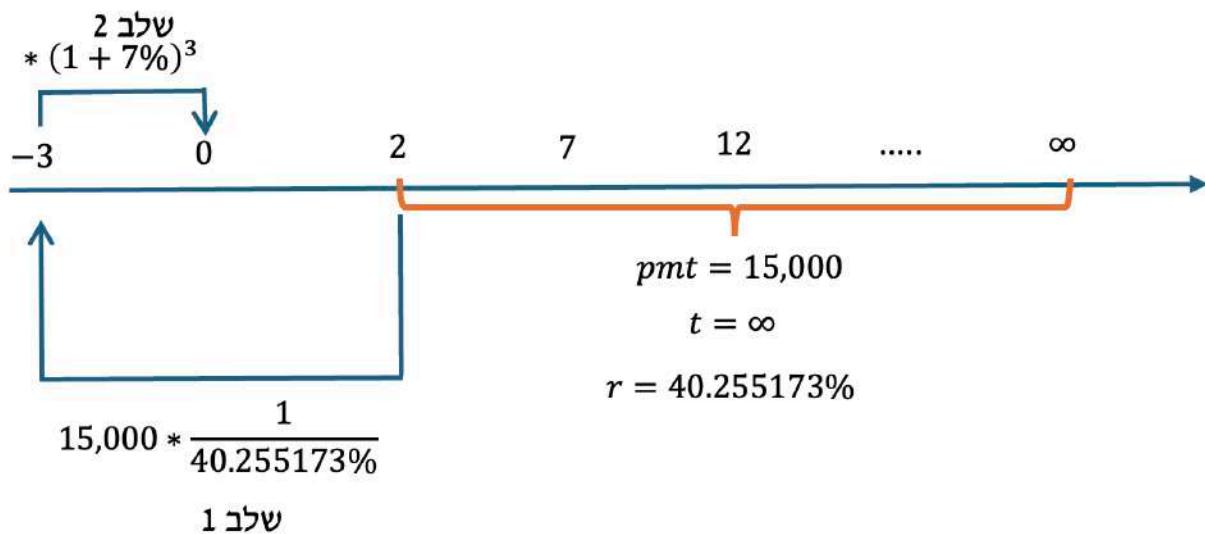
במצב כזה, חובה עליינו לתקן / להמיר את הריבית ל-5 שנים (כי זה פרק הזמן בין התשלומים בסדרה!). איך נמיר את הריבית? המקרה הקלסי להמרת ריבית (ברירת מחדל):

$$r_{\text{required}} = (1 + r_{\text{netuna}})^t - 1$$

בעברית: כדי להמיר ריבית מתקופה לתקופה, נתבוסס על 1 ועוד הריבית הנתונה בחזקה של מספר התקופות להמרה. כל זה פחות 1 (הסיבה להפחחת 1 היא שזה מייצג את הקREN). ספציפית כאן: הריבית הנתונה 7% לשנה החזקה הרלוונטית להמרה ל-5 שנים תהיה 5.

כך נקבל:

$$r_5 = (1 + 7\%)^5 - 1 = 40.255173\%$$



ביטוי הערך הנוכחי יהיה:

$$PV = 15,000 * \frac{1}{40.255173\%} * (1 + 7\%)^3 = 45,647.91$$

הסבר:

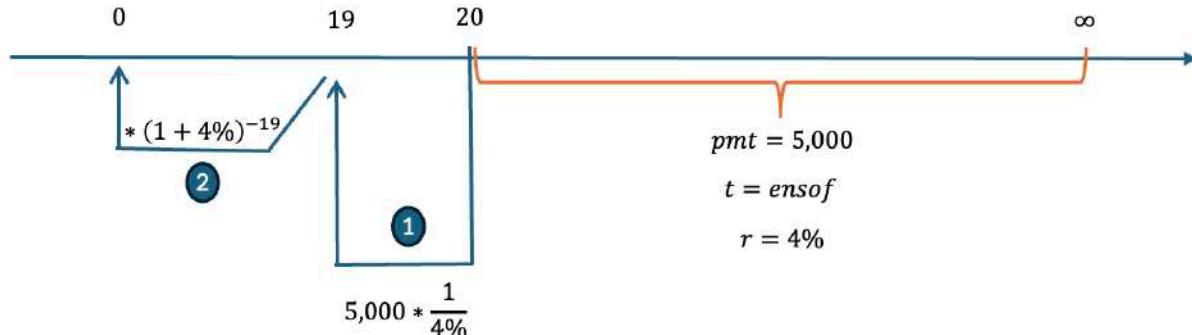
ערך הנוכחי של סדרה מובילה תמיד לנקודת הזמן המוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה. כאן: התזריםים כל 5 שנים, הראשון בזמן 2, ולכן קפצנו 5 שנים לאחר מכן בזמן 2, קרי בזמן 3. כדי לתקן את התוצאה בזמן 3 - חזרה ל-0 (ערך הנוכחי) כפלו ב-1 ועוד ריבית שנתית בחזקה 3.

### שאלה 33.2 – ערך הנוכחי של סדרה אינסופית עם התאמות

מהו הערך הנוכחי של תקופלים קבועים ממוגנת נקי, בסך 5,000 ש"ח בתום כל שנה החל מעתה השנה ה-20 ולנצח, אם הריבית השנתית היא 4%?

פתרונות :

כששואלים מה הערך הנוכחי ללא מידע נוסף, הכוונה היא לערך הנוכחי בזמן 0. הוואיל וכאן מדובר בסדרה אינסופית שמוספע איברה הראשון הוא בעוד 20 שנים, כאשר מישים את נוסחת הערך הנוכחי הסדרתי (כופלים ב 1 חלקי הריבית) מגיעים לנקודת זמן 19 ("עלךון אחת אחרה").  
מן הערך הנוכחי נספנות לאחור, ע"י מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית של 19.



הביתוי לפתרון :

$$PV = 5,000 * \frac{1}{4\%} * (1 + 4\%)^{-19} = 59,330$$

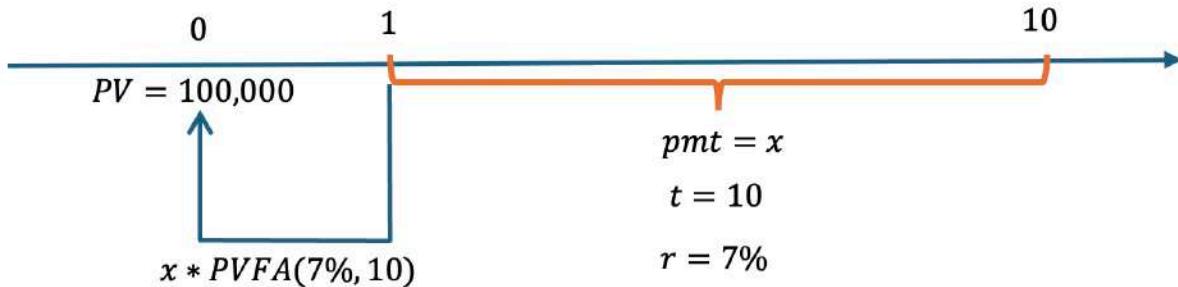
שאלה 34 - **יישומים של ערך הנוכחי: חילוץ סכום החזר תקופתי בהלוואה הנפרעת בתשלומים שווים (שפיצר),**  
**המקרה הפשוט**

נטלתם היום הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-10 תשלומים שנתיים שווים. מהו סכום התשלום השנתי הקבוע אם הריבית השנתית 7%?

פתרונות :

решת: **סכום הלוואה שווה תמיד לערך הנוכחי של החזירה. לכן, אם נתון לי סכום הלוואה, ואוכל לבטא את החזירה כסדרה, אוכל לבנות משווהה שמתוכה אחלץ את הנזולש.**

$$\text{Loan} = PV(\text{payments})$$



כasher :  
הערך  $\text{Loan}$  הוא סכום ההלוואה.  
הסימון  $(PV(\text{payments}))$  הוא הביטוי המתמטי המשקף את הערך הנוכחי של ההחזרים.

$$100,000 = x * \text{pvfa}(7\%, 10)$$

$$100,000 = x * 7.024 \rightarrow x = 14,236.9$$

הסבר :  
סכום ההלוואה - 100,000. זהו הערך הנוכחי של התשלומים בגין ההלוואה, והוא נתון.  
סכום התשלום התקופתי, ה -  $\text{pmt}$ , אינו נתון, ולכן הוצב כנעלם.  
בשונה מהשאלות הקודומות האחרונות, כאן - לא מדובר בערך הנוכחי של סדרה אינסופית, אלא סדרה "רגילה"  
(סופית) שכוללת 10 תשלומים. הדרך לבטא את ערכה הנוכחי - היא על בסיס מכפלה ב -  $\text{pvfa}$ . כבירות מחדל,  
אם לא נאמר אחרת - תשלום שנתיים הם "בסוף כל שנה", כלומר האיבר הראשון בסדרת ההחזרים הוא  
בדוק בודד שנה. לכן, שאלת זו דומה מאד לשאלת 26, ואין צורך בהתאמה.

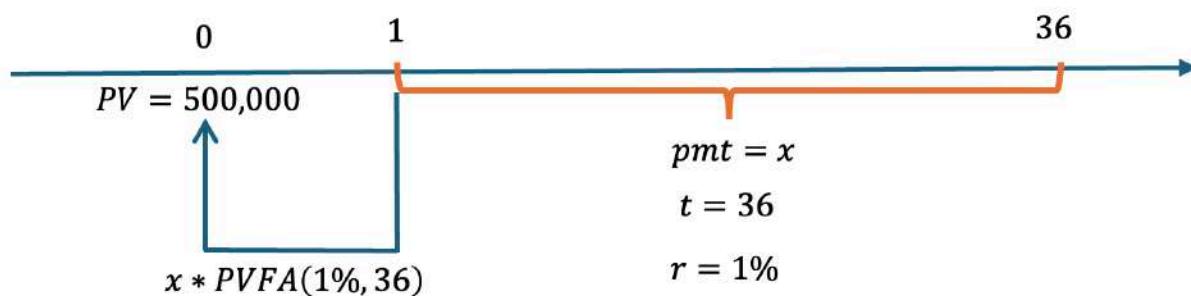
שאלה 34.1 - **יישומים של ערך הנוכחי: חילוץ תשלום על חשבון ריבית והתאמת ריבית פשוטה**  
נטלתם היום הלוואה בסך 500,000 ש"ח הנפרעת בתשלומים חודשיים שווים (לוח שפיצר) במשך 3 שנים. בהנחה  
שהריבית היא בשיעור 12% לשנה, מחושבת כריבית פשוטה :  
א. מהו התשלום התקופתי הקבוע (התשלום הכללי - קרן + ריבית)?  
ב. מהי יתרות ההלוואה לאחר 23 תשלום?  
ג. מהי הריבית במסגרת תשלום 24?

פתרון :  
א. מהו התשלום התקופתי הקבוע (התשלום הכללי - קרן + ריבית)?  
מדובר בהלוואה הנפרעת בתשלומים חודשיים שווים (סדרה).  
כasher עוסקים בסדרות, ולא משנה באיזה הקשר, אנו זוקקים לריבית לפרק הזמן בין תשלום.

אם התשלומים כל חודש, אנו זוקקים לרכיבת חודשית.  
לצערנו, הריבית שמסרו לנו היא "ריבית שנתית 12% משמעות ריבית פשוטה" : שמשמעותה - אופן ההמרה שלה מתוקפה אחת לאחרת מבוצע באמצעות כפל / חילוק פשוט ולא באמצעות חזקה.

$$r_{month} = \frac{r_{year}}{12} = \frac{12\%}{12} = 1\%$$

סכום הלואה הוא הערך הנוכחי של החזרה :

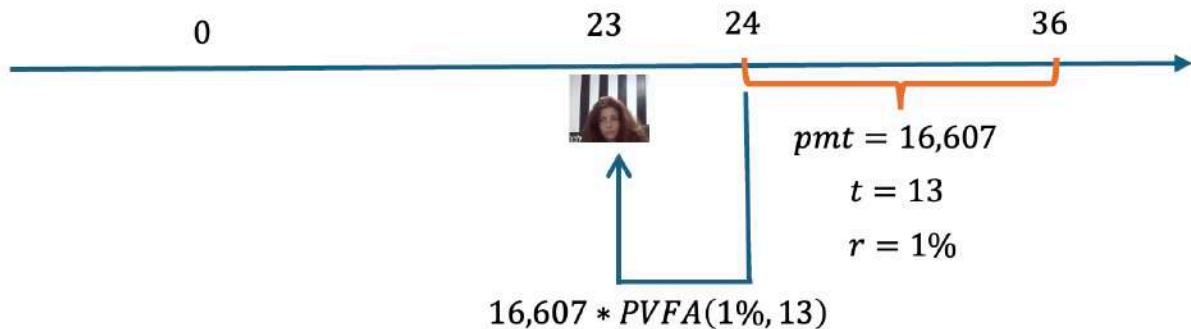


על פי המשפט, ניתן לחלק את ערך  $x$  המיציג את החזר התקופתי הקבוע (קרן + ריבית) :

$$500,000 = x * PVFA(1\%, 36) \rightarrow x = \frac{500,000}{30.108} \approx 16,607$$

ב. מהי יתרת הלואה לאחר 23 תשלומים ?

כשם שסכום הלואה הוא הערך הנוכחי של החזרה, כך יתרת הלואה היא תמיד הערך הנוכחי של יתרת החזרה.



ובהתאם, יתרת הלואה לזמן 23 תהיה :

$$BAL_{23} = 16,607 * PVFA(1\%, 13) = 16,607 * 12.134 \approx 201,509$$

ג. מהי הריבית במסגרת תשלום 24 ?

אם יתרת החוב לבנק בזמן 23 היא 201,509, ושיעור הריבית החודשית 1%, אז - הריבית שתשלם בזמן 24 היא המכפלה בין הערכיהם :

$$INT_t = BAL_{t-1} * r$$

כאשר :

הערך  $INT_t$  מייצג את תשלום הריבית בתקופה  $t$ .

הערך  $BAL_{t-1}$  מייצג את יתרת ההלוואה לתקופה קודמת.

הערך  $r$  הוא הריבית לתקופת תשלום :

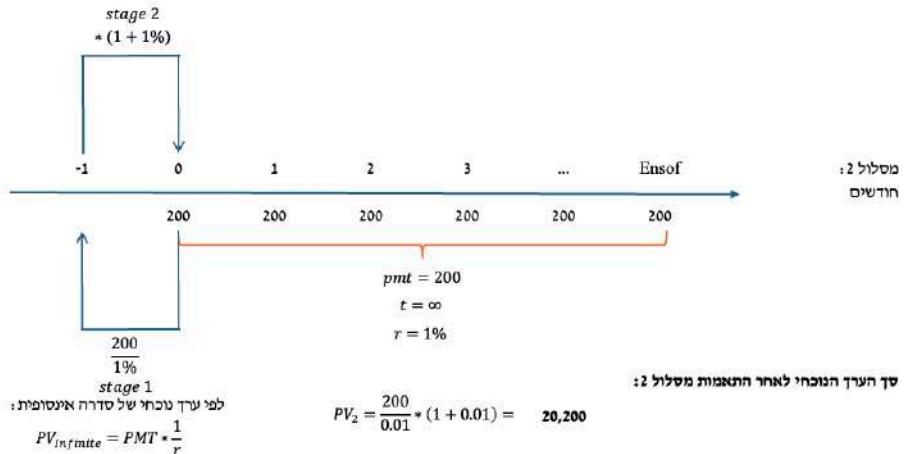
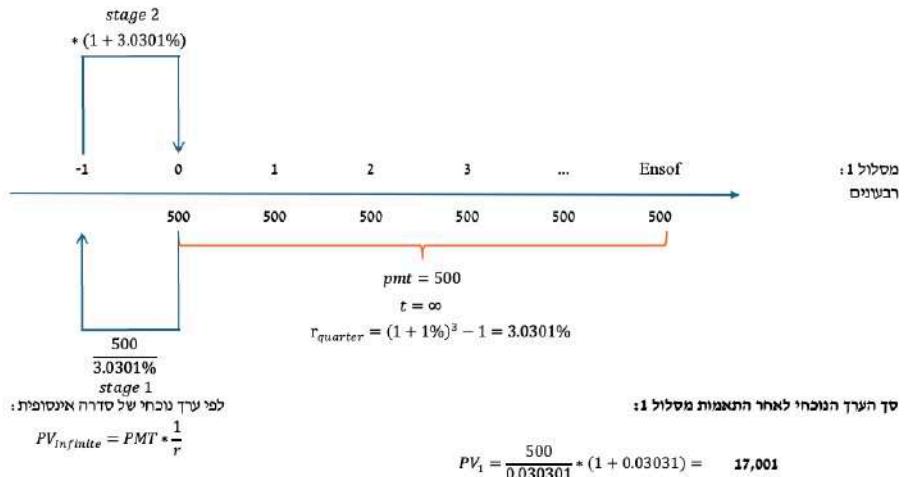
$$INT_{24} = BAL_{23} * r \rightarrow 201,509 * 1\% \approx \boxed{2,015.09}$$

### שאלה 34.1.1 – חישובי ערך נוכחי של שתי סדרות אינסופיות, כולל התאמת ריבית והתאמת תקופה

יבואן Apple מציע לך מנוי שנתי לשירותי iCloud במחיר של 500 ש"ח בשנה המסלולים הבאים:

- מסלול 1: תשלום של 500 ש"ח ביום, ובנוסף תשלום בסך 500 ש"ח בתחלת כל רביעון עוקב.
- מסלול 2: תשלום של 200 ש"ח פעם בחודש, בתחלת כל חודש.

הרבית האלטרנטיבית היא 1% לחודש, והכוונה היא לנצל את המנוי עד אינסוף בתעריף זה. בנסיבות אלו, מהו הפרש בין הערך הנוכחי של עלויות ההוצאות הללו?



מסקנה: הוצאות במסלול 2 במנוחי ערך נוכחי גבוהות מהוצאות במסלול 1 במנוחי ערך נוכחי ב:

$$20,200 - 17,001 = 3,199$$

**34.1.2 – חישובי שווי הלואת מסובסדת (והמשמעות של ריבית אלטרנטיבית)**

חברת "התפוח האגדי" זכתה לקבל הטבה מהממשלה: הלואת בסכום של 5 מיליון ש"ח ל-5 שנים, בריבית מסובסדת של 5% לשנה אשר נפרעת בתשלומים שנתיים שווים. בהנחה שידוע שהריבית האלטרנטיבית שבה מגייסת החברה אשראי היא 9% לשנה, מהו שווי ההטבה המגולם בהלוואה זו?

פתרון :

נתחילה מהנתון הראשון :

חברת "התפוח האגדי" זכתה לקבל הטבה מהממשלה: הלואת בסכום של 5 מיליון ש"ח ל-5 שנים, בריבית מסובסדת של 5% לשנה אשר נפרעת בתשלומים שנתיים שווים.

משפט : **סכום הלואת הוא הערך הנוכחי של החזירה כלומר סכום ההלוואה הוא PV והחזרים עדה הם PMT (כਮון בהנחה והחזרים קבועים – זהה המקרה פה).**

$$5,000,000 = PMT * PVFA(5\%, 5) \rightarrow PMT = 1,154,874$$

וכעת אני עובר לנתון השני :

בהנחה שידוע שהריבית האלטרנטיבית שבה מגייסת החברה אשראי היא 9% לשנה, מהו שווי ההטבה המגולם בהלוואה זו?

כדי שהלוואה מסובסדת תגלה הטבה, הריבית שהיא נושא צריכה להיות נמוכה מהריבית שבה החברה מגייסת אשראי. כאן, זה באמת המקרה. כאשר נרצה לחשב את שווי ההטבה הניל', ניטול את התזוריים שוחשו על בסיס הריבית המסובסדת, ונחשב את ערכם הנוכחי בהתחשב בריבית האלטרנטיבית:

$$Value = +5,000,000 - 1,154,874 * PVFA(9\%, 5)$$

$$Value = +5,000,000 - 4,492,057 = 507,943$$

מסקנה: שווי ההטבה הוא 507,943 ש"ח.

## נוסחאות מפגש 1 - ערך עתידי וערך הנוכחי

### ערך עתידי של סכום יחיד - ריבית קבועה

$$FV = PV * (1 + r)^t$$

כאשר :

- הערך  $FV$  מייצג את הסכום העתידי הנצבר (ערך עתידי, Future Value).
- הערך  $PV$  מייצג את סכום ההפקדה, שمبرע בהווה (Present Value, הערך הנוכחי).
- הערך  $r$  מייצג את שיעור הריבית.
- הערך  $t$  מייצג את מספר התקופות.

### ערך עתידי של סכום יחיד - ריבית משתנה

$$FV(\text{Lump Sum}) = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

כאשר :

- הערך  $FV$  הוא הערך העתידי המוחسب (הסכום העתידי הכללי, קרן + ריבית).
- הערך  $PV$  הוא סכום ההפקדה או הלוואה "היום".
- הערכים  $r_1$  ו- $r_2$  וכיו"ב, מייצגים את הריביות השונות בעסקה.
- הערכים  $t_1$  ו- $t_2$  וכיו"ב מייצגים את מספר התקופות שבוחן כל ריבית תקופה.

### ערך עתידי של סדרה - נוסחה מתמטית

$$FV_{\text{Series}} = pmt * \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

כאשר :

- הערך  $FV$  הוא הערך העתידי של הסדרה.
- הערך  $pmt$  מסמל את ההפקדה / התזרים התקופתי קבוע.
- הערך  $r$  מסמל את הריבית **לפרק הזמן בין תשלוםויות**.
- הערך  $t$  מסמל את מספר התשלומים בסדרה.

ערך עתידי של סדרה - כתיב מקוצר (את הערך אפשר גם לשלוּף מלוּח א-2 בנספח א לכרך ד)

$$FV_{series} = pmt * FVFA(r, t)$$

כאשר :

הערך  $pmt$  הוא סכום ההפקדה הקבוע.

הערך  $FVFA$  הוא למשה התוצאה של הנוסחה / הלוח שמתאימה לריבית בעסקה (i) ומספר התשלומים (t). בספרים ובחוברת נקרא גם מע"ס (ראשי תיבות של "מקדם ערך עתידי סדרתי"). אנחנו לא אוהבים להגיד מע"ס בקבוצה שלנו אז תמיד נרשום  $FVFA$ . מקווה שזה יהיה בסדר מצדכם.

התאמות ריבית בסיסיות - הרחבה בהמשך :

בשאלה על סדרות, בשנותונה ריבית נקובה שנתיות ללא מידע נוסף, ויש להתאים משנה לחודש :

$$r = \frac{R}{12}$$

כאשר :

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקבוה

הערך  $r$

בשאלות על סדרות, כאשר רוצים לתאם ריבית כללית (שלא כתבו שהיא נקבוה), מחדש לשנה :

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1$$

### ערך נוכחי של סכום יחיד, כשהריבית קבועה

הגרסה של הספר :

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t}$$

הגרסה של שי (אותו עיקרונו) :

$$PV = FV * (1+r)^{-t}$$

הערך PV הוא הערך הנוכחי / השוויי היום

הערך FV הוא הערך העתידי (סכום יחיד)

הערך  $r$  הוא הריבית התקופתית

הערך  $t$  הוא מספר תקופות הריבית

### ערך נוכחי של סכום יחיד, כשהריבית משתנה

הגרסה של "הספר" :

$$PV = \frac{FV}{(1+r_1)^{t_1} * (1+r_2)^{t_2} * \dots}$$

הגרסה של שי (אותו עיקרונו) :

$$PV = FV * (1+r_1)^{-t_1} * (1+r_2)^{-t_2} \dots$$

כasher :

הערך PV הוא הערך הנוכחי

הערך FV מייצג את הסכום העתידי שצפויים לקבל

הערכים  $r_1$  ו-  $r_2$  מייצגים את הריביות השונות בעסקה

הערכים  $t_1$  ו-  $t_2$  מייצגים את מספר התקופות שבהן כל ריבית תקפה

### ערך נוכחי של סדרה סופית (בשונה מסדרה אינסופית, לגבייה נסחה נפרדת מטה)

$$PV_{Series} = pmt * PVFA(r, t) = pmt * \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

כasher :

הערך PV Series מייצג את הערך הנוכחי המציגי של הסדרה כולה

הערך  $pmt$  מייצג את התשלומים / התקבול התקופתי בסדרה

הערך  $r$  מייצג את הריבית לתקופת תשלום

הערך  $t$  מייצג את מספר התשלומים

הסימון  $PVFA(r, t)$  נקרא בלשון הספר מענ"ס : מקדם ערך נוכחי סדרתי. ניתן למצוא את ערכו בנספח אלכ"ח

ד של ייחדות הלימוד, בלוח שמספרו א-4. הלוח מופיע החל מעמ"י 45 בנספח

### ערך נוכחי של סדרת תשלוםאים אינסופית

$$PV(Infinte_{Series}) = pmt * \frac{1}{r}$$

התאמת ריבית (כasher לא ציינו את סוג הריבית) משנה ל-4 שנים:

$$r_{4years} = (1 + r_{year})^4 - 1$$

חילוץ סכום תשלום קבוע בהלוואה הנפרעת בתשלומים קבועים

$$Loan = PV(payments)$$

כלומר: סכום ההלוואה שווה לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של החזרה.

## מפגש 2 - המשך ערך נוכחי, יישומים שונים, הבסיס להישובי ריבית ופרויקטים

### תיאום ציפיות ורקע

- מטרת מפגש ההנחיה הספרטיצי היא להעניק לסטודנטים כלים בסיסיים ליישום תחשיבי הערך הנוכחי והעתיד שוחצגו בהערכתה הקודמת, תוך התמקדות בחילוצים שונים. בנוסף, ההערכתה תתמקד במהות ובאופן החישוב של הריבית האפקטיבית, המכונה גם הריבית הכלכלית או הריבית האמיתית. הריבית האפקטיבית מביאה בחשבון את השפעת ריבית הדربית, העמלות וגורמים נוספים על ההסדרים הפיננסיים, ובכך מאפשרת קבלת החלטות מושכלת ומדויקת יותר.
- כמו כן, במהלך ההערכתה יוצג נושא חדש - כדיות פרויקטים, אשר יהווה את תחילת הדיוון בסוגיה זו. חשוב לציין כי בשל מגבלות זמו, חלק ניכר מהשאלות יוצגו באופן TEMPLATE ולא יפותחו לעומק. עם זאת, שאלות מרכזיות נבחרות יוצו לפתרון מפורט ומקיף, החל מהבסיס. גישה זו נועדה לאפשר לסטודנטים חשיפה ראשונית למגוון רחב של סוגיות הקשורות בתחום, תוך הקנייה בסיס איתן להבנת סוגיות יסוד ונוסאים הקשורים ישירות למטרלה הנוכחית.
- לאחר השיעור, הסטודנטים מתבקשים לפתור באופן עצמאי את כל השאלות שהוחצגו במהלך ההערכתה, גם אם הם היו ברורות במהלך השיעור וגם אם הם היו אתגר. תרגול עצמי זה הכרחי להבנתה הטמעה מלאה של החומר הנלמד, כולל הסוגיות שנדרשו בקורס בלבד במהלך ההערכתה. רק באמצעות תרגול מעמיק ועצמאי של השאלות, תוך חזרה על הנושאים שנלמדו, ניתן יהיה להפנים את מכלול הרעיונות והכליים שהוחצגו ולהשתמש בהם ביעילות בהמשך.

### שאלה 34.1.3 – תשלום בהווה או בעתיד: בחירה ביןיהם על סמך סכומים וריבית

ד"ר צבן רכש מכונה לחימום נקייק שעולתה בזמן 10,000 ש"ח. הוא שילם בהמחדחה דחויה (שיק דחו) שהמועד הנקוב עליה מאוחר ב-8 חודשים מהיום. המוכר התבאס על הדוקטור, ודרש ממנו המחדחה חדשה בסכום זהה עם התאריך של היום. לחילופין, דרש המוכר פיצויי בעד הדחיה (בזמן מיידי) בסכום של 600 ש"ח.

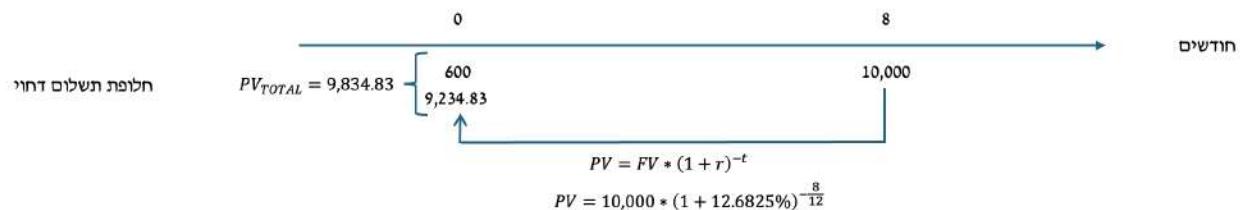
בהתהודה שהריבית השנתית האלטרנטיבית של הדוקטור היא 12.6825%:

- מהי החלופה שעלה הדוקטור להעדיין? [הדריכה: חשבו את הערך הנוכחי של חלופת התשלום הדחויה ואת הערך הנוכחי של התשלום בזמן, ובחרו באפשרות הזולה יותר]
- מהי הריבית המגולמת בהסדר הדחויה? הסבירו, גם על פי השוואות שיעורי ריבית, איזו חלופה תועדף [הדריכה: התיחסו לשווי המוכר המתקבל בהווה כתזרים חיובי, וכן ממו את התשלום בהווה, והוא למעשה סכום האשראי; התיחסו לתשלום הדחויה בסכום חד פעמי שישולם בעתיד, וחלכו את הריבית המגולמת]

**פתרון סעיף א – חישוב ערך נוכחי של הסדר הכלל תשלום דוחי, אל מול תשלום במזומן**

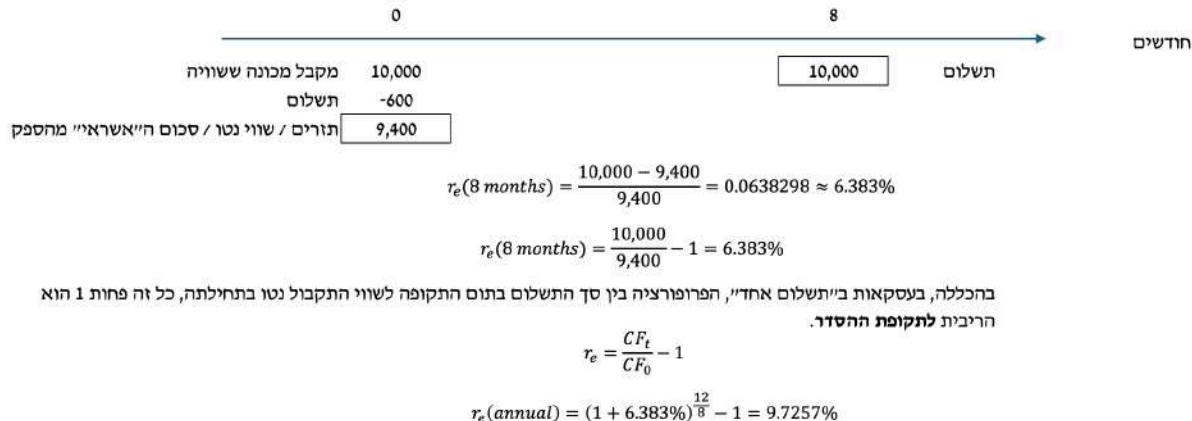
כאשר עליינו לבחור בין תשלום מיידי במזומן (שהזו ערכו, כי הוא מיידי), לבין תשלום שכולו או חלקו נדחה (כלומר מבוצע בנסיבות זמן עתידית כלשהי), עליינו לתרגם את הסכומים העתידיים למונחים של ערך נוכחי, ואת הערך הנוכחי הכלל להשוות לעלות במזומן.

ידעו שעלות במזומן, מיידי (ערך נוכחי) – בחלוקת התשלומים היום : 10,000  
 חלופת התשלום הדוחי – דורשת תשלום של 600 היום אך בתוספת 10,000 בעתיד שיש לתרגם באמצעות כל  
 הערך הנוכחי להו. כך מקבלים :



הואיל וסך העלות במונחי ערך נוכחי בהסדר שכולל רכיב נדחה היא כ- 9,834.83 ש"ח, עלות הנמוכה מהחלופה במזומן מיידי (שהיא 10,000) יש להעיף את ההסדר בעל הרכיב הדוחי, ובמילים פשוטות: עדיף לי לשלם 600 היום לספק ולמסור לו שיק לפירעון בעוד 8 חודשים בסך 10,000, מאשר לשלם 10,000 היום.

**סעיף ב – דירוג החלופות על בסיס הריבית המגולמת בהסדר הדוחי והשוואה להריבית אלטרנטיבית שנתית**  
 לצד העקרון שקבע שams הערך הנוכחי של התשלומים נמוך יותר, החלופה תועדף (להלן – סעיף א), הרי שבאופן אינטואיטיבי אפשר גם לנמק את כדיות ההסדר הנדחה בדרך של חישוב הריבית המגולמת במסגרתו.  
 בשפה פשוטה – נתון שהריבית אליה דוקטור צבאן כפוף היא 12.6825%. המשמעות היא שams הריבית המגולמת בהסדר הנדחה מצד ספק המכונה נמוכה משלו זה, הרי שההסדר הנדחה יועדף.  
 כדי לגלוות את הריבית המגולמת בהסדר הנדחה, נציג על ציר הזמן בזמן 0 את שווי האשראי (שווי המכונה במזומן בניכוי התשלום המיידי) ובזמן 8 (ב חודשים) את התשלום המתבקש.  
 הפרופורציה ביןיהם (פחות 1) היא הריבית האפקטיבית לתקופת ההסדר (8 חודשים) ואוותה ניתן לתקן לשנה לשם ביצוע ההשוואה.



בහכללה, בעסקאות ב"תשלום אחד", הפרופורציה בין סך התשלומים בתום התקופה לשווי התקבול נטו בתחילת, כל זה פחות 1 הוא הריבית לתקופת ההסדר.

$$r_e = \frac{CF_t}{CF_0} - 1$$

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 6.383\%)^{\frac{12}{8}} - 1 = 9.7257\%$$

מצאו שהריבית האפקטיבית (הכוללת) בהסדר התשלומים היא 9.7257% לשנה, הנמוכה יותר מהריבית האלטרנטיבית של הדוקטור, ולכן הוא יעדיף את ההסדר.

#### מהם היסודות בשאלת זו?

- אם אני נדרש לבחור בין תשלום במזומנים بعد עסקה לבין ההסדר ש כולל תשלום / תשלום דוחויים,עליי לחשב את הערך הנוכחי המכراضי בהסדר הדוחוי. אם ערך זה נמוך יותר מהתשלומים במזומנים, נעדיף את ההסדר הדוחוי. ולהפוך. חישובי הערך הנוכחי יבוצעו בהתבסס על הריבית "האלטרנטיבית" של מבצע העסקה.
- אם המטרה היא לגנות את הריבית האפקטיבית המגולמת בהסדר הדוחוי שמצויע המוכר, הרי שככל עוד מדובר בעסקה הנפרעת ב"תשלום אחד" נתבאס בכך הכל על היחס בין: סך התשלומים בתום התקופה דוחвая, לבין הערך המתקיים בידי הלקוח שהוא הפרש בין שווי הנכס במזומנים לבין המקדמה. על בסיס יחס זה ניתן לחשב ריבית אפקטיבית לתקופת העסקה, במידת הצורך – נתקנו לשנה.

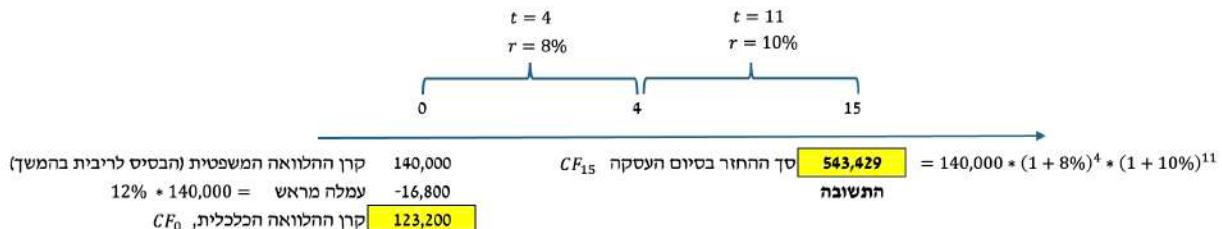
#### **שאלה 34.1.4 – חישוב הסכום המצביע בעתיד בהינתן ניכוי מראש (כל)**

שרון שפרן לוותה היום 140,000 ש"ח לטובת רכש מכונה משוכלתת לחימום נקניק. ההלוואה נושא ריבית בשיעור 8% לשנה בכל אחת מ-4 השנים הקרובות וריבית בשיעור 10% לשנה בכל אחת מ-11 השנים לאחר מכן. בנוסף, גובה הבנק עמלה מראש בשיעור של 12%. בנסיבות אלו, ובנחה שההלוואה תוחזר בתשלומים אחד (קרן וריבית) בתום 15 שנים, מהו הסכום הכללי שאוטו שרון שפרן תצטרך לשלם במועד זה? [הדריכה: חשבו את הסכום הכללי המצביע בהתעלם מהניכוי מראש, שכן הריבית שהבנק גובה היא על הקון המקורית ללא התחשבות בניכוי זה]

פתרון :

ה"טריק" בשאלה זו הוא להבין שבשונה משאלות קודמות, אין צורך לחשב כאן ריבית אפקטיבית; אלא רק את סך החזר בתום תקופת העסקה. סך החזר כאמור נשען על יתרות הקרן המקורית / המשפטית המוגדרת בבנק (140,000) כפול 1 ועוד הריבית בחזקה (או חזקות) מתאימות.

אמנם קיימים גם תשלום עמלה בזמן 0, אך תשלום כזה (של עמלה בזמן 0, או של ריבית מראש בזמן 0) לא משפיע על הבסיס לחישוב יתרות ההחזר בתום העסקה. להלן הצגת תזרימי העסקה על הציר באופן מלא. שימו לב, שלא הייתה חובה מצדנו במקרה זה לחשב את התזרים נטו בזמן 0.



#### 34.1.4.1 יישום נסס – איזון אקטוארי מורכב (הפקדות ומשיכות)

אור ק מעוניין להפקיד לפנסיה בכל תחילת חודש במשך 4 שנים סכום קבוע. בתום השנה ה-4 יפרוש לפנסיה. החל מנקודת זמן זו (ולראשונה בתום השנה ה-4) יתחיל למשוך קצבת פנסיה בסכום של 5,000 ש"ח לחודש במשך 3 שנים. בהנחה שהריבית האפקטיבית השנתית היא בשיעור 12.6825%, מהו הסכום הקבוע אותו יצטרך אור ק להפקיד?

פתרון :

כאשר המטרה היא לממן סדרת הפקדות באמצעות סדרת משיכות, علينا לבטא את ערךן הכספי של הפקדות ושל המשיכות לאותה נקודת זמן, ולהשווות ביניהן. משווה זו תאפשר חילוץ של פרמטרים כלכליים נדרשים (לפעמים נחלה הפקדה, לעיתים משיכה, לעיתים מספר הפקדות...).

אנחנו בחרנו את נקודת הזמן המשותפת שנבטא כאן את ערכי הפקודות והן את ערכי המשיכות במונחיה בזמן 47. מדוע? כי זו נקודת הזמן של ההפקדה האחרונה; הערך העתידי של הפקודות (סדרה) מוביל לשם בהגדלה, ולכן מודנו נוח להשתמש בה.

ורק לאחר שהסכמי (ואני לא חייב להסביר) שהנקודה הנוכחית ביוטר להשוואה היא זמן 47, חישבתי את הערך העתידי של הפקודות לנקודת זמן זו באמצעות הביטוי  $FVFA(1\%, 48) * x$  ואז פניתי לעסוק במשווה מתמטית המיצגת את ערךן של המשיכות לאותה נקודת זמן (בכלים של ערך נוכחי).

הויל וסדרת המשיכות החלת בזמן 48, חישוב ערך הנוכחי הסדרתי באמצעות הביטוי :

$$5,000 * PVFA(1\%, 36)$$

הוביל אותנו (בלי שנרצה!) זו הגדotta הפונקציה של ערך נוכחי סדרתי לנקודת הזמן שהיא אחת אחרת ביחס לתזרים המזומנים הראשון בסדרה שעלייה מחשבים ערך נוכחי – ככלומר אחת אחרת לפני המשיכה הראשונה. זה אומר שסדרת המשיכות בוטאה דרך איבר זה במונחי זמן 47.

ואם כך :

הביטוי המיציג ערך עתידי להפקודות הוא בזמן 47 :

$$x * FVFA(1\%, 48)$$

הביתוי המיצג ערך הנוכחי למשיכות לאותה נקודת זמן 47 :

$$5,000 * PVFA(1\%, 36)$$

והואיל ושני הביתויים הם לאותה נקודת זמן, חייב להתקיים שוויון ביניהם :

$$FV_{Deposits}(t = 47) = PV_{Withdrawals}(t = 47)$$

בהתאמה :

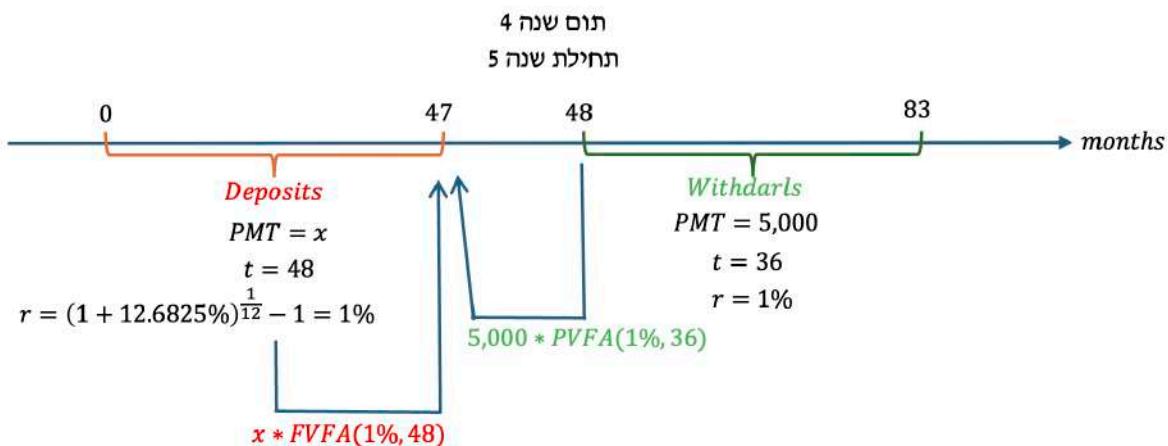
$$x * FVFA(1\%, 48) = 5,000 * PVFA(1\%, 36)$$

נמשיך. תזכורת – PVFA זה מענ"ס מלווה א-4 ו-A-2 : FVFA זה מענ"ס מלווה א-2 :

$$x * 61.223 = 5,000 * 30.108$$

סיימנו את החילוץ – תשובה סופית, סכום הפקדה נדרש :

$$x \approx 2,459$$



מה למדנו מהשאלה?

- אם אני נתקל בסדרת הפקודות ואחריה סדרת משיכות, הדיוון שלי חייב להתבסס על משווהה שבח אגף מסוימים יתייחס להפקודות, האגף الآخر יתייחס למשיכות, ושני האגפים יボוטאו במנוחי אותה נקודת זמן בדיק. אם עושים זאת, אפשר להשוות ביניהם ולחלו נעלמים.
- נקודת הזמן המשותפת שתבחר היא לשיקולכם ; אני אישית אוהבת לבטא את כל ההפקודות במנוחי נקודת הזמן של ההפקדה الأخيرة (בכלים של ערך עתידי) ואת כל המשיכות במנוחי אותה נקודת זמן גם כן.
- הכלים שבהם נשתמש לשם תיאום הערכיכם לאותה נקודת הזמן בדיק אוטם כלים שלמדנו ; וסובלים מאותם מגרענות : ערך עתידי של סדרה – תמיד מוביל למועד ההפקדה الأخيرة באותה סדרה ; וערך נוכחי של סדרה מקפץ את חזרה ביחס לתחילתה. ולמרות ששאלת זו, הגענו לאותה נקודת זמן בקלות – בשאלות אחרות (לרובות בשאלות במחברת) עשויות להידרש התאמות.

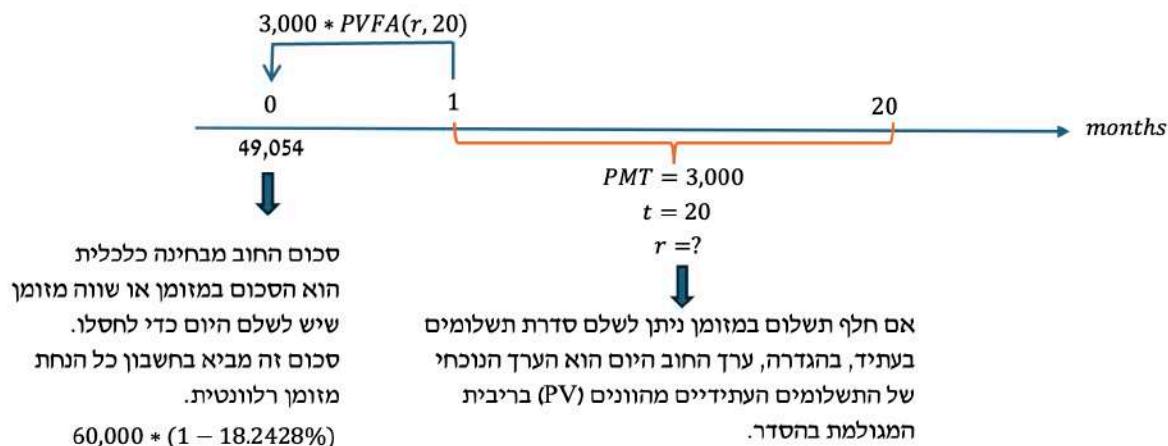
**34.1.4.2 יישום נוסף – חילוץ ריבית אפקטיבית שגלומה בהסדר תשלוםים, במקרה שקיימת הנחת מזומנים**

צברתם חוב שכר לימוד של 60,000 ש"ח לאוניברסיטה. האוניברסיטה באה לקראותם, והיא מאפשרת לכם לפרוס את החוב ל-20 תשלוםים "ללא ריבית" בסך 3,000 ש"ח כל אחד. התשלומים יבוצעו בתום כל חודש. לחילופין, במידה ותחליטו לשלם במזומנים, תקבלו הנחתה בשיעור 18.2428% מהסכום הכללי.

נדרש: האם אכן מדובר בעסקה "ללא ריבית"? במידה וקיימת ריבית, בטאו אותה במונחים שנתיים (חשבו ריבית אפקטיבית שנתית).

פתרון:

בשאלה הראשונה שפתרנו במבחן הזה, הצגנו מצב שבו ניתן לשלם بعد מוצר בתשלום נדחה. אמנם היה מדובר בתשלום היחיד – ולא בסדרה; אבל אמרנו שבאופן עקרוני, ניתן לחלץ את הריבית בהתאם להבנה הנגזרת מהסכוםים ש"מתכבלים" או "ה חוב שסוגרים בהוויה" לעומת התשלומים העתידיים.



בשפה פשוטה יותר: סילוק חוב ששוויו נטו היום ידוע בהסדר תשלוםים מוביל למשוואה מהטיפוס הבא מתוכה ניתן לחלץ נעלמים:

$$PV(\text{Debt}) = PV(\text{הסדר})$$

כאן:

$$49,054 = 3,000 * PVFA(r, 20)$$

אתה ייחס לכל ביטוי ה- PVFA כאל נעלם, או במילים אחרות – אחלק את שני האגפים ב-3,000:

$$PVFA(r, 20) = \frac{49,054}{3,000} \rightarrow 16.351$$

עכשו אגש ללוח א-4 בנספח א לכרך ד (לוח PVFA) ואנסה לאטר בתוכו את השורה של  $t = 20$  וואז להביט על כל הערכים באותו שורה (ימינה) עד שאמצא את הערך הקרוב ביותר ל-16.351.

הሪיבית שתתקיים בעמודה שבה קיים ערך זה היא הריבית **لتקופת תשלום** בהסדר. כי תמיד ולעולם כshedover בסדרות, הריבית בין אם הזנתה אותה בנוסחה ובין אם חולצה על ידי מהנוסחה, היא הריבית לפרק הזמן בין תשלוםם.

$$r = 2\%$$

כאן קיבלתי את הריבית האפקטיבית החודשית. כדי להמיר את הריבית כנדרש למונחים שנתיים, משתמש בمعרך חזקה מתאים בנוסחת ההמורות הקלאסית:

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1 \rightarrow r_{year} = (1 + 2\%)^{12} - 1$$

ובקיצור, התשובה הסופית – הריבית השנתית האפקטיבית המגולמת בהסדר:

$$r = 26.824\%$$

#### 34.1.4.3 **יישום נוסף – חילוץ סכום תשלום קבוע להלוואה ושינוי תנאי החזר**

סתיו נטלה הלוואה בסכום של 150,000 ש"ח הנושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 24% לשנה. ההלוואה מוחזרת ב-50 תשלום סופי חודשיים שווים (לוח סילוקין שפירץ).

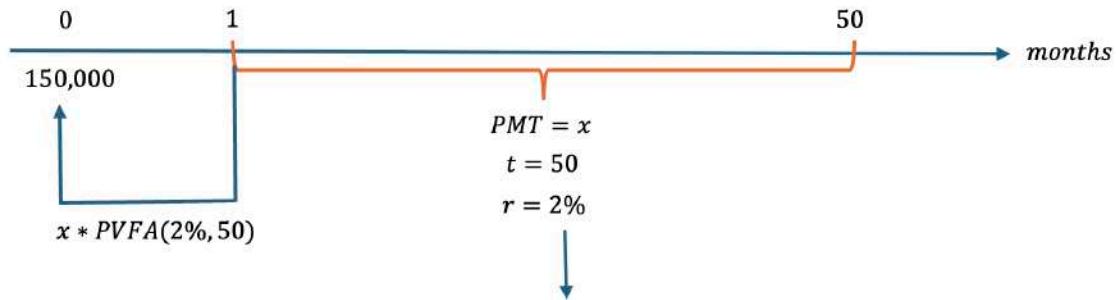
לאחר התשלום ה-33 פנתה סטיו לבנק בקשה לשנות את אופן החזרו ללוח סילוקין "רגיל" (הזרוי קרן שווים). כמו כן, בקשה סטיו במסגרת בקשה השינוי שמספר התשלומיים הנותר לביצוע יהיה 12 בלבד. נדרש:

- א. מהו התשלום ה-34 שסטיו תבצע?
- ב. מהו התשלום ה-35 שסטיו תבצע?

פתרון:

באופן כללי, אנו יודעים משפט: סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. במידה והחזרים שווים (שיטת סילוק שנקראת לוח סילוקין שפירץ) ניתן לבנות לפיקח משווה המתבססת על ערך הנוכחי של סדרה קבועה, ומוצאה לחץ את סכום התשלומים.

**שלב 1: חילוץ סכום תשלום מקורי ע"י יישום המשפט - סכום הלואה הוא הערך הנוכחי של החוזהיה**



השאלה מצינית מפורשות הריבית הנתונה היא ריבית שנתית נקובה בשיעור 24%. רק כאשר הסדר מצין את המונח ריבית נקובה חומרת הריבית לתקופת תשלום תבוצע על ידי חלוקה פשוטה של הריבית ולא באמצעות מערך חזקה.

$$r_{month} = \frac{24\%}{12} = 2\%$$

נפתרו את המשוואה לחילוץ הסכום המקורי:

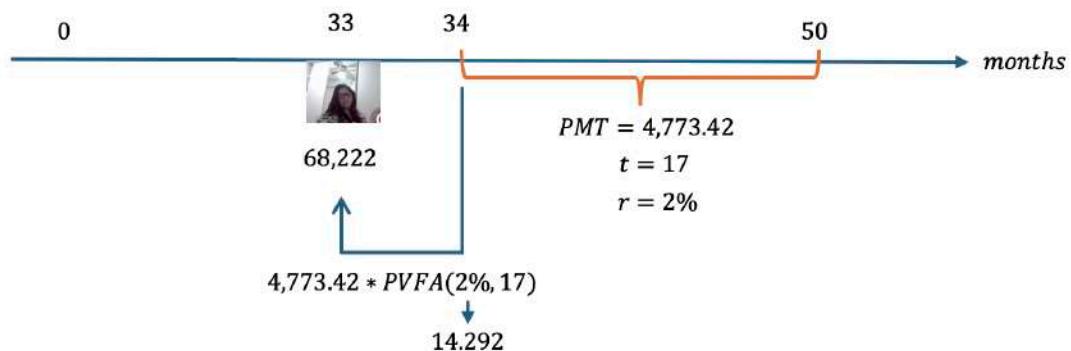
$$150,000 = x * PVFA(2\%, 50)$$

$$150,000 = x * 31.424$$

$$x = 4,773.42$$

המשמעות: טרם שינוי ההסדר, התשלום החודשי אותו התחייבתי לבצע הוא 4,773.42 ש"ח.

**שלב 2: הצבת הערכים המוחלטים, והתייחסות ליתרה במועד השינוי**  
על פי הנתון, סטיו פונה לבנק בזמן 33 בבקשת לשנות את תנאי ההסדר (אחר שינוי תקף החל ממועד החודש ה-34).  
לשם כך, הבנק צריך לדעת מהי היתרה לזמן 33, שאינה הוא יפ魯ס מחדש בהתאם לעדכניים.  
כדי לגלוות את היתרה ערב שינוי התנאים, יש לחשב ערך נוכחי לשארית החוזרים המקוריים ערב השינוי.



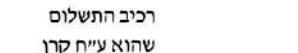
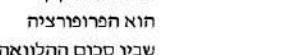
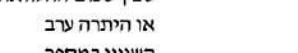
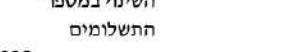
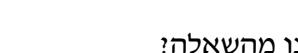
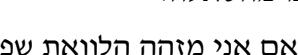
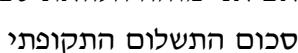
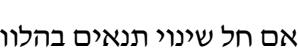
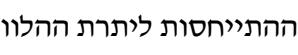
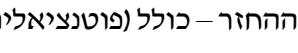
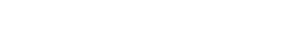
המשמעות: ערב שינוי ההסדר, יתרת החוב של סטיו לבנק היא כ-68,222 ש"ח.

**שלב 3: התייחסות ליתר ערבי שינוי התנאים בהלוואה חדשה**  
 כאשר הבנק מאשר את שינוי התנאים, הוא למעשה נוטל את יותרת הלוואה ערבי השינוי, בסך 68,222 במקורה זה, מתייחס אליה כל הלוואה חדשה, שאופן פיסיטה נשען על התנאים הנוכחיים בבקשת הנואשתור.  
 באופן סכמטי, סתו בקישה שההלוואה תשתנה בהתאם החוויה ל"תשלומי קרו שווים" (לוח ריל) ובנוסף, שמספר התשלומים שנתרו יצטמצם מ-17 ל-12.

ככל, כאשר הלוואה נפרשת (במקור או בעקבות שינוי תנאי) לפי חוק רגול, אז נגנו לחל את סכום התשלומים בהתאם למועד סילוקן PVFA. זאת, מושם שבלוח סילוקן "רגיל" ההחזרים אינם שווים זה זה, לכן אין יוצרים סדרה סבואה, ולכן היישום של PVFA לא רלוונטי.

מה כן רלוונטי? טבלה שתגדיר את שלבי העבודה בחישוב החזורים האחד אחרי השני.

הטבלה שמשייעת לחישוב החזירים בלוח רגיל היא הטבלה הבאה:

זמן	ע"ח קרן	ע"ח ריבית	סכום התשלומים	יתרת קרן
33	5,685	1,251	7,050	68,222
34	5,685	1,137	6,936	62,537
35	5,685	1,023		56,852
36	5,685	910		51,167
37	5,685	796		45,481
38	5,685	682		39,796
39	5,685	569		34,111
40	5,685	455		28,426
41	5,685	341		22,741
42	5,685	227		17,056
43	5,685	114		11,370
44	5,685			5,685
45	5,685			0
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
				
<img alt="Diagram showing arrows from the 'Fund' and 'Interest' columns to the 'Fund' and 'Interest' columns of the next row." data-bbox="580 7660				

## מה למדנו מהשאלה?

- אם אני מזוהה ההלוואה שפייצר הנפרעת בתשלומים שווים, אני מסתייע בנוסחת PVFA כדי לחלק את סכום התשלום התקופתי בשלב ראשון (כמעט ללא תלות במה שהוא – תמיד צריך להתחיל מזיהוי התשלום התקופתי בעסקה).
  - אם חל שינוי תנאים בהלוואה, עלינו לחשב את יתרת ההלוואה ערבית השינוי. יתרה זו תתבסס על יישום PVFA (בהתחלת וההזדים קבועים, שפייצר) של התשלומים שטרם ביצעו (יתרת התשלומים ערבית השינוי).
  - ההתייחסות ליתרת ההלוואה תהיה כלפי הלואה חדשה, שאופן פריסתה ייגזר מהתנאים העדכניים של החזור – כולל (פוטנציאלית) : מספר תשלום עדכני, ריבית עדכנית, סוג החזור רלוונטי (רגיל / שפייצר).

### רקע קצר לשאלת 34.1.5 – לוחות סילוקין

לוח סילוקין מוגדר כטבלה המייצגת את פילוח ההחזרים בגין הלוואה בתשלומים. הלוח מציג את התשלומים הכלול, רכיב התשלומים שהוא על חשבו הקرون, רכיב התשלום שהוא על חשבו הריבית, ויתרת הלוואה (יתרת הקرون) לאחר התשלומים.

לוח סילוקין עוזר לנו להבין כיצד יתרת הלוואה משתנה בחולוף זמן בהתחשב גם בריבית; ולפיכול ההחזר לרכיביו יש ערך ממשוניו בrama הכלכלית במילוי בועלם עם מסים.

בutor התחלה, לא ניתן עדין לקבל החלטות ומשמעות הפיקול של החזרי הלוואות – אלא בחישוב הטכני של רכיבי הלוח והציגו.

### שאלה 34.1.5 – לוחות סילוקין – רגיל ושפיצר – התרשומות וחישוב בסיסי

הציגו לוח סילוקין רגיל (=החזרי קрон שווה) ולוח סילוקין שפיצר (תשלומים שווים) להלוואה בסך 50,000 ש"ח הנפרעת ב-5 תשלומים שנתיים בהתאם לכל אחד מሎות אלו, אם ידוע שהריבית השנתית 5%. בצעו סקירה השוואתית של רכיבי ההחזר בלוחות השווים.

פתרון :

לוח סילוקין שפיצר							לוח סילוקין "רגיל" (חזרי קрон שווים)						
4	2	3	1	PMT	t	4	2	3	1	PMT	t		
BAL	INT	PRN	PMT	סך תשלום	זמן	BAL	INT	PRN	יע"ח קרון	סך תשלום	זמן		
50,000					0	50,000						0	
40,950	2,500	9,050	11,550		1	40,000	2,500	10,000	12,500			1	
31,448	2,048	9,503	11,550		2	30,000	2,000	10,000	12,000			2	
21,470	1,572	9,978	11,550		3	20,000	1,500	10,000	11,500			3	
10,993	1,073	10,477	11,550		4	10,000	1,000	10,000	11,000			4	
-7	550	11,000	11,550		5	0	500	10,000	10,500			5	
				סה"כ						7,500	50,000	57,500	
												סה"כ	

צ"ל יורה, 0  
נובע מփרשי עיגול בלבד

מה אני יכול/ה לראות כאן (לא ברמת כדיות בחרה אלא ברמת ערכים תזרימיים השוואתיים) :

- סך התשלומים בלוח שפיצר – גובהים יותר מהתשלומים בלוח רגיל.
- בהינתן שהcron זהה, ניתן גם לראות שסך תשלום הריבית בשפיצר גבוהה יותר.
- בלוח "רגיל", בשנים / בתקופות הראשונות סך התשלום התקופתי (PMT) גבוה יותר מאשר זה שבלוח סילוקין שפיצר.
- בתקופות המאוחרות יותר, בלוח רגיל, סך התשלום התקופתי (PMT) נמוך יותר מאשר זה שבלוח סילוקין שפיצר.

**שאלה 34.1.6 – לוח שפייצר – דרך קיצור להחזר בתשלומים ספציפי בגין קרן  $PRN_t$**   
 קופי נטל משכנתא בסך 500,000 ש"ח ל-30 שנים בריבית פשוטה (נקובה) של 6% לשנה. ההלוואה נפרעת בתשלומים חודשיים שווים (לוח סילוקין שפייצר). מה יהיה ההחזר על חשבון הקרן בתשלום ה-14?

פתרונות :

לא משנה על מה שואלים בלוח שפייצר, השלב הראשון לעולם יהיה חישוב ה- $PMT$ , שבוצע כדלקמן :

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, n)} \rightarrow PMT = \frac{500,000}{PVFA(0.5\%, 360)} = \frac{500,000}{166.792} \approx 2,998$$

ערך	משמעות	ערך
הויל ונתון שנקובה, המרת הריבית היא יחסית (לא חזקה) $\frac{6\%}{12} = 0.5\%$	ריבית לתקופת התשלום	$r$
$30 * 12 = 360$	מספר התשלומים הכלול בהלוואה	$n$

כאשר הריבית אינה שלמה, ו/או מספר התשלומים חורג מהאפשרויות המופיעות בלוח א-4 בנספח אליך ד', נחזור לנוסחה המתמטית של ערך נוכחי סדרתי לשם חישוב :

$$PVFA(r, n) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^n}}{r} \rightarrow PVFA(0.5\%, 360) = \frac{1 - \frac{1}{(1+0.5\%)^{360}}}{0.5\%} = 166.792$$

וכעת, דרך הקיצור לחישוב רכיב ההחזר על חשבון הקרן בתשלומים ספציפי (14) נשענת על ההבנה שמדובר בהפרש ביתרת הקרן בין התקופה לאחר התשלומים, לבין התקופה לפני התשלומים :

$$PRN_t = BAL_{t-1} - BAL_t$$

יתרת ההלוואה לכל מועד, היא הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו טרם הביצוע. כלומר, אם אני רוצה לדעת מהי היתרה לאחר 13 תשלומים (לתוכם תקופה קודמת) ויש בסך הכל 360 תשלומים, אז ייתרת ההלוואה לתום תקופה קודמת (זמן 13) :

$$BAL_{13} = 2,998 * PVFA(0.5\%, 360 - 13) \approx 493,372$$

והיתרה לתום התקופה העדכנית לאחר התשלום (זמן 14) :

$$BAL_{14} = 2,998 * PVFA(0.5\%, 360 - 14) \approx 492,841$$

לכן, תשלום הקרן בזמן 14 הוא ההפרש בין הערכיהם :

$$PRN_{14} = BAL_{13} - BAL_{14} = 493,372 - 492,841 = 531$$

והתשובה הסופית: התשלום ה-14 על חשבו הקרן בהלוואת השפיצר הנ"ל הוא כ- 531 ש"ח.

שאלה 34.2 - **ההבדל בין הלוואה הנפרעת בתשלומיים שוויים, להלוואה הנפרעת בתשלומי קרן שוויים נטלתם היום הלוואה בסך 500,000 ש"ח הנפרעת בתשלומיים חדשניים שוויים של קרן (לוח סילוקין רגיל), במשך 20 חודשים. הלוואה נושאת ריבית שנתית בשיעור 12% לשנה המוחשבת ריבית פשוטה.**

- מהו התשלום הכלול ה-1?
- מהי יתרת הלוואה לאחר 10 תשלומיים?
- מהו התשלום הכלול (קרן + ריבית) בתשלום ה-11?

פתרון :

שאלה העוסקת בחישובי הלוואות הנפרעתות בהחזרי קרן שוויים (לוח סילוקין רגיל) בדרך כלל - לא תפתר על בסיס הכלים הקלasicים של ערך נוכחי / עתידי / סדרות וכו', אלא על בסיס חישובים אրיתמטיים קצר יותר אינטואיטיביים.

#### a. מהו התשלום הכלול ה-1?

על בסיס ההגדרה של לוח סילוקין "רגיל" (החזיר קרן שוויים) :

#### **החזר תקופתי בגין קרן - PRN**

בכל תקופה ותקופה, מחזירים על חשבו הקרן סכום קבוע שמחושב בהתאם להפרופורציה הפשוטה שבין **סכום ההלוואה למספר התשלומיים**. במקרה שלנו :

$$PRN = \frac{LOAN}{n} = \frac{500,000}{20} = 25,000$$

כאשר :

הערך LOAN הוא סכום ההלוואה (לעתים מיוצג כ - PV משום שמדובר בסכום המתקבל בזמן 0).  
הערך n מייצג את מספר התשלומיים הכלול בהלוואה.

#### **תשלום תקופתי בגין ריבית - INT**

בכל תקופה ותקופה, מחזירים על חשבו הריבית סכום שמהווה את המכפלה של יתרת הקרן לתקופה קודמת בשיעור הריבית התקופתי (لتקופת תשלום). כאן - ריבית חודשית... כאשר הריבית השנתית מוחשבת **ריבית פשוטה**, המשמעות היא שריבית חדשה תתקבל בתור חלק יחסית מהריבית זו :

$$INT_1 = 500,000 * \frac{12\%}{12} = 5,000$$

**התשלום הכלל התקופתי - סכום התשלום בגין הקון בתוספת התשלום בגין ריבית**

$$PMT_1 = PRN + INT_1 = 25,000 + 5,000 = 30,000$$

**ב. מה هي יתרת ההלוואה לאחר 10 תשלומים?**

יתרת ההלוואה היא למעשה יתרת קרן ההלוואה ; היא לא מגמת ולא מתיחסת לריבית ששולמה. יש ליטול את יתרת ההלוואה המקורי, ולנקוט את תשלומי הקון שבוצעו.

$$BAL_{10} = LOAN - PRN * t = 500,000 - 25,000 * 10 = 250,000$$

כasher :

הערך  $BAL$  מייצג את יתרת ההלוואה לזמן הספציפי עליו שאלו (כאן - זמן 10).

הערך  $LOAN$  מייצג את סכום ההלוואה.

הערך  $PRN$  מייצג את החזר התקופתי (הקבוע) בגין הקון.

הערך  $t$  מייצג את מספר התשלומים שבוצעו עד מועד החישוב (כאן - 10).

**ג. מהו התשלום הכלל (קרן + ריבית) בתשלום ה-11?**

$$PMT_{11} = PRN + INT_{11}$$

במלים :

הערך  $PMT$  הוא התשלום התקופתי הכלל

הערך  $PRN$  הוא התשלום הקבוע על חשבו הקון

הערך  $INT$  הוא התשלום על חשבו ריבית

$$PMT_{11} = 25,000 + INT_{11}$$

כדי לחשב את הריבית בזמן 11, علينا לכפול את היתרה לתקופה קודמת (זמן 10) בשיעור הריבית התקופית (1% לחודש, משום שהריבית הפסותה היא 12% לשנה) :

$$INT_{11} = BAL_{10} * r \rightarrow 250,000 * 1\% = 2,500$$

ועכשיו אפשר לסכום ולהגיע לתשלום הכלל :

$$PMT_{11} = 25,000 + 2,500 = 27,500$$

התשובה : התשלום הכלל (קרן + ריבית) בתשלום ה-11 הינו 27,500 ש"ח.

**טיפ - דרך קיצור לחישוב "במה" של תשלום כולל בתקופה ספציפית בלוח רגיל:**

$$PMT_t = \frac{LOAN}{n} * [1 + (n - t + 1) * r]$$

נציב ונתפלל לקבל 27,500 בנסיבות השאלה :

$$PMT_{11} = \frac{500,000}{20} * [1 + (20 - 11 + 1) * 1\%] = 25,000 * (1 + 10 * 1\%) = 27,500$$

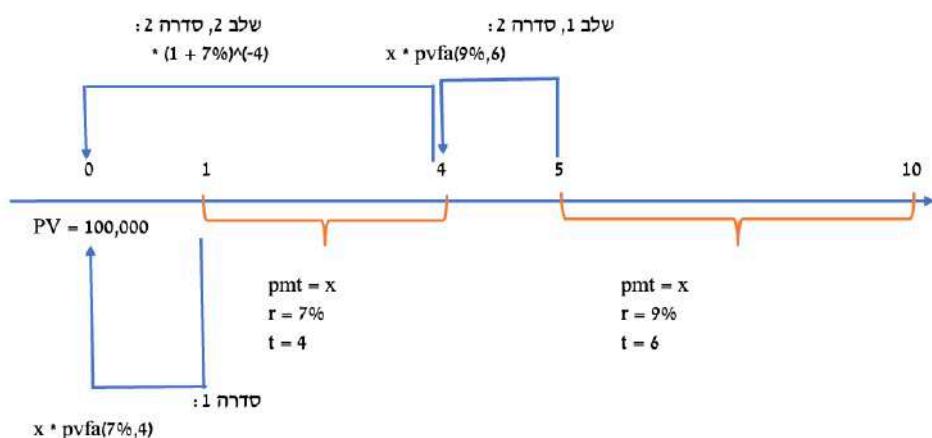
שאלה 35 - **יישומים של ערך נוכחי: חילוץ סכום החזר תקופתי בהלוואה הנפרעת בתשלומיים שווים, כאשר הריבית משתנה - מקרה מורכב יותר**

נטלתם היום הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-10 תשלומיים שנתיים שווים. הריבית השנתית בכל אחת מ-4 השנים הראשונות היא 7%, והריבית השנתית בכל אחת מהשנים העוקבות היא 9%. מהו סכום התשלום הקבוע?

פתרון:

שיםו לב להבדל עקרוני בין שאלה זו לקודמתה מבחןת סוג הלוואה ואופן הסילוק. השאלה הקודמת עסקנה בהלוואה הנפרעת **בתשלומיי קרן שווים** (לוח סילוקין "שפייצר"). הישומים של לוח כזה (סוג כזה של החזרי הלוואה) נשען על נוסחאות מתמטיות פשוטות, ולא על חישובי היון וסדרה.

בשונה מכך, הלוואה הנפרעת **בתשלומיים שווים** (לוח סילוקין "שפייצר") בהגדירה כוללת **תשלומיים העוניים** לגדר סדרה/סדרות, וכשאנו מזזה הלוואה שהחזריה עוניים לגדר סדרה (או מספר סדרות שנייתן לאפיין), אני משתמש במשפט: **סכום הלוואה הוא ערך הנוכחי של החזריה**. להלן תיאור סדרות החזרים:



$$100,000 = x * pvfa(7\%, 4) + x * pvfa(9\%, 6) * (1 + 7\%)^{-4}$$

$$100,000 = x * 3.387 + x * 4.486 * (1 + 7\%)^{-4} \rightarrow x \approx 14,686$$

תזכורת - נוסחת PVFA של סדרה לאחד החישובים:

$$PVFA = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} \rightarrow \frac{1 - \frac{1}{(1+7\%)^4}}{7\%} \approx 3.387$$

הסבר מפורט:

הלוואה עצמה היא בסך 100,000 ש"ח (אגף שמאל).

הביתוי המיצג את הערך הנוכחי של סדרת ההחזרים הראשונה, טרם שינוי הריבית, הוא  $\alpha$  מוכפל ב-  $\frac{1}{1+r}$  שמתאים לריבית לתקופת הסדרה הראשונה שהיא  $7\%$ , ול-4 תשלומים. הויל וסדרה ראשונה זו החלה בזמן 1, ותדרות התשלומים כל שנה, חישוב ערך נוכחי סדרתי זה מוביל "אחת אחרת" ככלمر בדיק לזמן 0 ללא צורך בחתאמה.

הביתוי המיצג את הערך הנוכחי של סדרת ההחזרים השנייה (לאחר שינוי הריבית) מורכב יותר. מדוע? משום שתחילה קופלים את החזר הקבוע א' במספר התשלומים העדכני 6 שנותרו, והריבית העדכנית  $9\%$ , אלא שהפעם החישוב שמקפיד "אחת אחרת" ביחס לתחילת סדרה זו, שהיא בזמן 5, מוביל לזמן 4. ולכן יש לתקן 4 שנים נוספות לאחר.

תיקון 4 שנים נוספות לאחר - חייב להתבצע בריבית השונה שמתקימת ב-4 שנים אלו, שהיא  $7\%$ . ולכן, ההתאמה היא על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית  $7\%$  בחזקת 4.

#### שאלה 35.1 – **חילוץ ריבית מהסדר מתמשך תוך יישום נוסחת ערך עתידי**

אוקסש הפקידה בתכנית חסכוון סכום של 1,500 ש"ח מדי חודש במשך שנתיים. בתום השנתיים, אוקסש קיבל אישור יתרות מהבנק, ובו נרשם שיתרת החסכוון העדכנית היא 51,639 ש"ח. אוקסש הפסיקה את ההפקדות בתכנית החסכוון בתום השנתיים, אך מועד פרעונה יהול רק בחולף 8 שנים ממועד תחילת התוכנית (או: בחולף 6 שנים ממועד הפקדה האחורונה).

נדרש: בהנחה שהתכנית נושאת ריבית קבועה לכל אורכה, מהו הסכום הכולל שייעמוד לרשותה של אוקסש בתום 8 שנים?

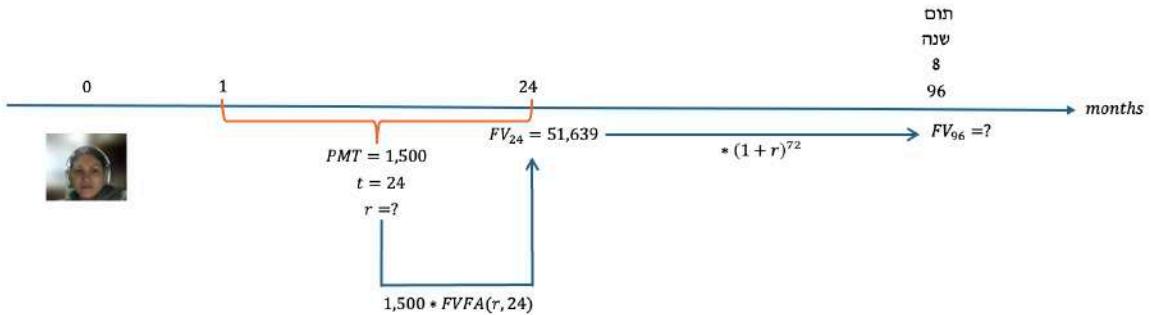
פתרון:

שלבי הפתרון הם:

א. נשתמש בערך העתידי הנוכחי לזמן 24, בסכומי הפקודה ומספר הפקודות – כדי לחלץ את שיעור הריבית באמצעות לוח א-2.

ב. נتبסס על הריבית זו ונכבור אותה מהתום השנה ה-2 לתום השנה ה-8 על מנת למצוא את סך הצבירה למועד סיום החסכוון. גראפים מפורטים – בעמוד הבא:

גרף הפתרון טרם חילוץ הריבית:



כדי לחלק את הריבית ניעור בנתון הצבירה לזמן 24:

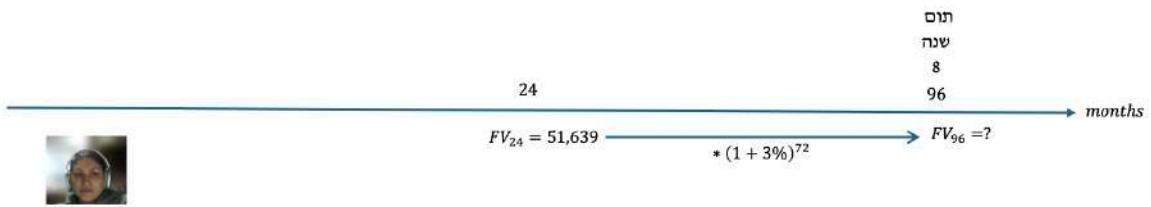
$$1,500 * FVFA(r, 24) = 51,639$$

$$FVFA(r, 24) = \frac{51,639}{1,500}$$

$$FVFA(r, 24) = 34.426$$

$$\downarrow \\ r = 3\%$$

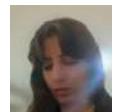
גרף הפתרון בהינתן הריבית - בסץ הכל מוסיפים את הריבית לסכום הכלול שנזכר בזמן 24 כדי לקבל את יתרה הזמן 96:



התוצאה:

$$FV96 = 51,639 * (1 + 3\%)^{72} = 433,768$$

## שאלה 35.2 – אדישות בין הסדר תשלום לסכום בהווה – וחילוץ ריבית רלוונטית עם תחילת תקופה



חנן החלטה להתפטר מעובודה מיד על מנת להתמקד בלימודי ניהול פיננסי. כמענק פרישה ולאור עובודה המסורתה, מציעים לה במקום בו היא עובדת לקבל מיד היום 180,000 ש"ח או 7 תשלומים שנתיים שווים בסך 29,626.25 ש"ח כל אחד שיבוצעו בתחילת כל שנה (התשלום הראשון היום).

מה צריכה להיות הריבית האפקטיבית השנתית של חנן על מנת שהיא תהיה אדישה בין המענק המיידי בזמנו לבין הסדר התשלומים?

פתרון :

באופן כללי, אדישות בין הצעות מתקיימת כאשר שווי ההצעות זהה. שווי, באופן כללי, נקבע מנוקודת ראותו ערך נוכחי.

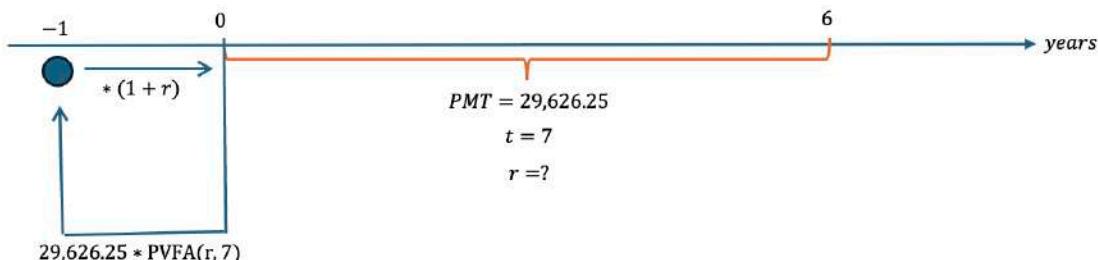
במילים אחרות, אם חנן יכולה לקבל היום מיד 180,000 ש"ח, מדובר בשווי הטבה של 180,000 ש"ח במונחים של ערך נוכחי, שהרי מדובר בסכום מיידי.

אלא, ש כדי שתתקיים אדישות בין ההצעות, נדרש גם הערך הנוכחי של התשלומים השנתיים השווים, בריבית האלטרנטיבית של חנן יוביל לאותו סכום בדיק.

השאלה איזו ריבית תגרום לאדישות זו / לשוויון הערך הזה, ולכן נדרש לפתור משווה.



Apik B - לקבל בתשלומים - בתחילת כל שנה, 7 שנים :



כדי שניה אדישים בין ההצעות, הערך הנוכחי של החלוקת כולל התאמות זמן מותבקשות צריך להיות זהה.  
כלומר מתקיים :

$$29,626.25 * PVFA(r, 7) * (1 + r) = 180,000$$

בגדול המשווה המופיעה בתחלת התרשים דופקת אותה. מדוע?

$$29,626.25 * PVFA(r, 7) * (1 + r) = 180,000$$

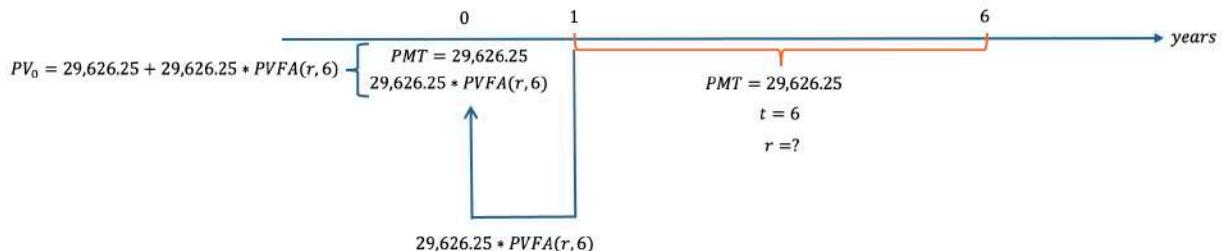
הבעיה היא שהנעלם – הריבית, מופיע בשני מקומות. גם בביטוי  $PVFA$  (שזה בסדר גמור) אבל גם במכפלה הנוספת. במלים אחרות, אין לי שום דרך ישירהحلץ את  $PVFA$  שיאפשר על בסיס לוח א-4 למצוא את הריבית.

יש לי שתי אפשרויות להתמודד עם הזוועה הזו :

אפשרות א : במקומות להשתמש בביטויים המקוצר / מהלו של  $PVFA$ , להשתמש בנוסחה המתמטית שלו. הבעיה היא שתתקבל משווהה מעריכית מסריחה אפילו יותר.

אפשרות ב : הואיל וכל הבעיה בביטוי הזה נובעת מהעובדה שנוצרו כאן תזרימי תחילת תקופה שדרשו התאמה בריבית שהיא נעלם, אפשר לפצל את הסדרה. נתיחס לתזרים בזמן 0 בפני עצמו, כך שבביטוי ההיוון יתיחס רק ל-6 התזרמים הבאים.

אפשר ב - לקבל בתשלומים - בתחילת כל שנה, 7 שנים - אבל לפצל את התזרים הראשונים בנפרד, ואת יתר התזרמים מזמן 1 ולהלאה בנפרד :



משווהה כזו אפשר לפתור :

$$180,000 = 29,626.25 + 29,626.25 * PVFA(r, 6)$$

בהעברת אגפים מתקבל :

$$PVFA(r, 6) = 5.076$$

וכעת בבחירה ניתן לפצץ לוח א-4 לנספח לכרך ד ולחלץ את הריבית, שבמקרה זה – גם לא תדרוש התאמה, הואיל והતזרמים בתזרמות שנתית, גם הריבית המוחלצת שנתית :

$$r = 5\%$$

### שאלה 35.3 – הפקדה בודדת שמטרתה מימון סדרת ממשיקות

בת שבע שנדגדשכג מעוניינית להפקיד היום סכום ייחד על מנת שתוכל להנות מהכנסות חודשיות בתחילת כל חודש במשך 3 שנים בסכום של 5,000 ש"ח. הריבית החודשית בחסכוון היא בשיעור 1% בשנה הראשונה ובשיעור 3% בכל חודש לאחר מכן.

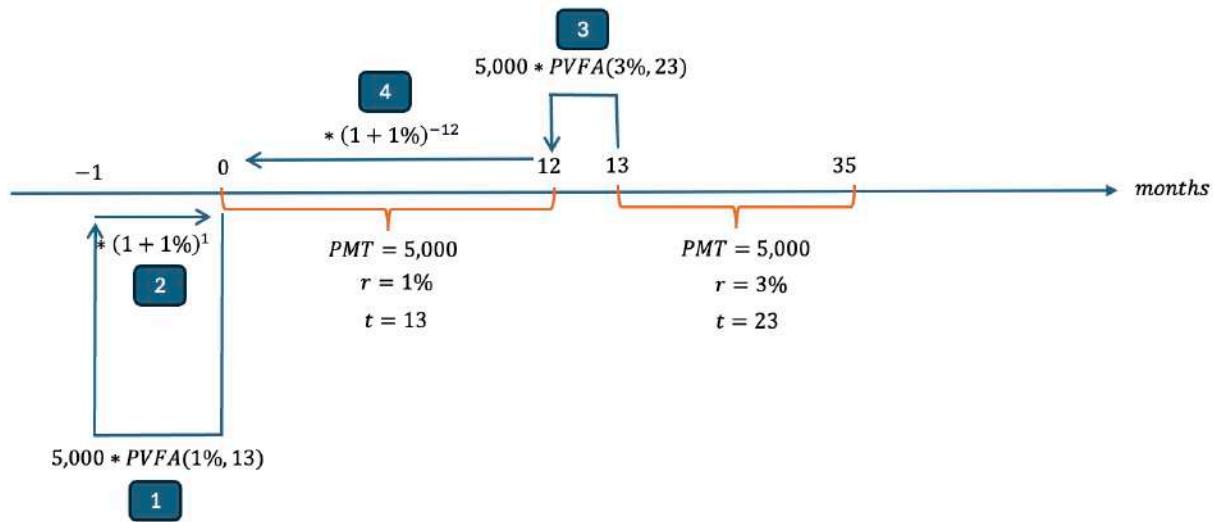
נדרש: מהו הסכום היחיד שבת שבע שנדגדשכג צריכה להפקיד היום על מנת למן את סדרת המשיקות?

פתרון :

שימוש לב להבדל בין שאלות שונות על הפקדות ומשיקות:

שאלה מטיפוס 1 (פתרנו מוקדם יותר היום) – היא מקורה שבו אנו מבצעים סדרת הפקדות שאחריהן סדרת ממשיקות. בדרך כלל אני נוטה לחשב ערך עתידי להפקדות, ולהשוותו לערך הנוכחי של המשיקות לאותה נקודת זמן.

שאלה מטיפוס 2 (כמו השאלה זו) – היא מקורה שבו מבצעים היום הפקדה בודדת. במקרה זה, אין כל צורך לבצע ערך עתידי להפקדה, בסך הכל ניתן לבטא את ערכן הנוכחי של המשיקות לזמן 0 (למועד ההפקדה היום), וזה הסכום שנדרש להפקיד היום.



התרשימים המגעיל הזה אומר: ניקח את הסדרה הראשונה שכוללת תזרים מ-0 עד 12 כולל, ובsek הכל 13 תזרים. מדוע 13 תזרים ומדוע עצרנו ב-12? משום שהריבית השתנתה רק לאחר זמן 12. לכן מבחןתנו כל התזרים 12-0 כולל הם באותה סביבת ריבית.

כדי לחשב ערך הנוכחי לסדרה ספציפית זו, בסביבת ריבית 1%, עובדים עם PVFA אבל לרוב הצעיר הואיל והתזרים הראשונים בזמן 0 קופצים אחת אחרת (שלב 1) לזמן 1. לכן יש לתקן על ידי מכפלת התוצאה ב-1 ועוד הריבית פעם אחת. כך מגיעים לביטוי הכלל שmbטאת את הערך הנוכחי של הסדרה הראשונה לזמן 0:

$$5,000 * PVFA(1\%, 13) * (1 + 1\%)^1$$

לערך הנוכחי של הסדרה הראשונה כאמור, נוסיף את הערך הנוכחי של הסדרה השנייה. הסדרה השנייה ה恰恰ה בזמן 13, וחישוב ערךה הנוכחי כסדרה מובילה בזמן 12 (שלב 3). יש לתאמס את התוצאה אחרת, זמן 12 בזמן 0 כלומר 12 תקופות לאחר, ויש לבצע זאת בריבית העדכנית לפרק הזמן מזמן 12 ל-0 שהוא 1% (שלב 4) כך מקבלים את הביטוי המיציג את הערך הנוכחי של הסדרה ה-2 בזמן 0:

$$5,000 * PVFA(3\%, 23) * (1 + 1\%)^{-12}$$

בסק הכל, הערך הנוכחי המציג שהוא התשובה לשאלת היבור שני העריכים הללו:

$$PV = 5,000 * PVFA(1\%, 13) * (1 + 1\%)^{-12} + 5,000 * PVFA(3\%, 23) * (1 + 1\%)^{-12}$$

התוצאה המספרית של ביטוי זה היא בעצם הסכום החד פמי שצרכיך להפקיד בזמן 0 כדי לממן את כל המשיכות המתוארות.

$$PV = 138,159$$

**שאלה 36 - יישומים של ערך הנוכחי, בחירה בין חלופות תשלום ונהנות, ללא התאמת ריבית**  
שי מעוניין לרכוש את המחשב הבא:

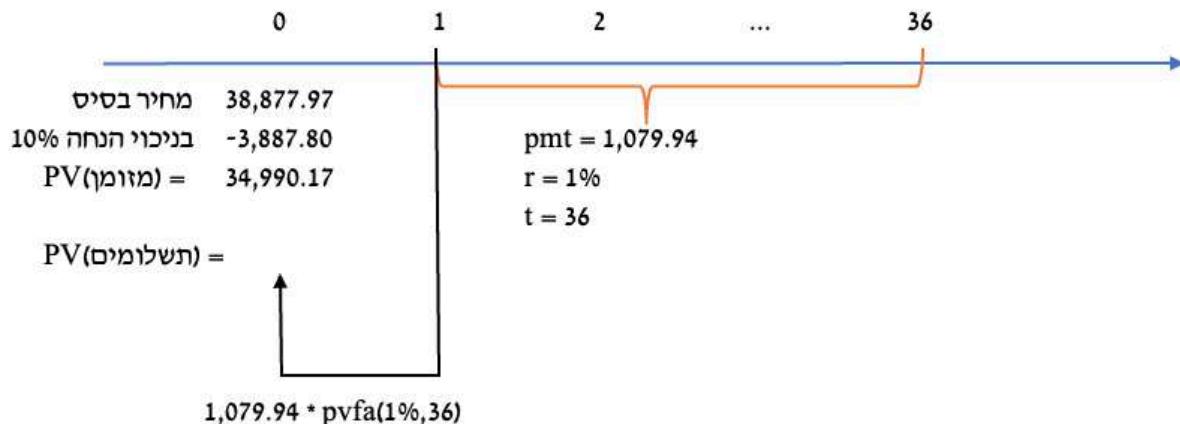
הסל שלי

▼ 1	Apple - MacBook Pro 16 / Apple M3 Max / 48GB Ram / 1TB SSD ₪ 38,877.97	
₪ 38,877.97		סכום בגין
₪ 38,877.97		סה"כ
<a href="#">להשלים</a>		<a href="#">להחישך קניה</a>

החברה מציעה לשוי לרכוש את המחשב, תשלום בעדו בזמןן ובכך לזכות להנחה בשיעור 10% מהמחיר הנוכחי לעיל. לחילופין, ניתן לפרסום את עלות הרכישה ל-36- תשלום חדשים שווים בסך 1,079.94 ש"ח כל אחד. בהנחה שהריבית החודשית האלטרנטיבית של שי היא 1%, האם יעדיף לרכוש את המחשב בזמןן או בתשלומים?

**פתרון:**

כאשר מזמינים שעלינו לבחור בין אפשרות לרכוש מוצר בתשלומים או תשלום אחד בזמןן (מידי), העיקרונו הוא לבחון מהו הערך הנוכחי של כל חלופה - ו לבחור בזולה יותר. באופן ספציפי, העלות בזמןן במועד ערך הנוכחי היא המחיר לאחר הנחתה בזמןן. את זה נבחן מול העלות במועד ערך הנוכחי של חלופת התשלומים, שהיא הערך הנוכחי של סדרת התשלומים הקבועים. בהתאם נקבל:



או בעצם, בחלוקת התשלומים במזומן משלמים :

$$PV_{CASH} = 38,877.97 * (1 - 10\%) = 34,990.17$$

ולעומת זאת, בחלוקת התשלומים החודשיים, מבצעים תשלום שערכם הנוכחי המכراضי הוא :

$$PV_{Payments} = 1,079.94 * PVFA(1\%, 36) = 1,079.94 * 30.108 = 32,514.83$$

ומסקנה : החלוקת הזולה יותר במנוחים של ערך הנוכחי, אשר תועדף - **היאחלוקת התשלומים**.

סיכוםו : לשם בירהה בין תשלום במזומן לבין הסדר תשלום נדחים, נחישב את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים, ואם הוא נמוך מהעלות במזומן נטו (אחרי הנחה) נעדיף אותו.

### שאלה 36.1 – בירהה בין חלופות על בסיס ערך הנוכחי

מציעים לך לבחור בין 5 אפשרויות התקובל הבאות :

1. קבלת 40,000 ש"ח בתחלת כל שנה במשך 15 שנים.
2. קבלת 30,000 ש"ח לשנה במשך 20 שנים. התשלום הראשון היום.
3. קבלת 80,000 ש"ח בעוד שנה, 50,000 ש"ח בעוד שנתיים ו-150,000 ש"ח בעוד 7 שנים.
4. קבלת 550,000 ש"ח בעוד 8 שנים.
5. קבלת 190,000 ש"ח היום.

בנחה שהריבית במשק היא 10% לשנה, מה תהיה הבחירה שלכם?

פתרון :

כאשר אני נדרש לבחור בין חלופות כספיות של התקובלות – בסכומים ובעתוויות שונים, ארצה לחישב את הערך הנוכחי של כל חלופה, ואז : לבחור בחלוקת שערכה הנוכחי הגובה ביותר (אם אכן מדובר בתקבולות, כוללן בתזרימי מזומנים חיוביים) או בחלוקת שערכה הנוכחי הוא הנמוך ביותר (ערך מוחלט) אם מדובר בערך הנוכחי של תשלום.

כאן, דיברו על תקבולות. וכך נבנה ביטוי מתאים לכל חלופה ונבדוק מה התוצאה.

## חולפה 1 :

מדובר בערך נוכחי של סדרה סופית, אלא שהואיל ורשות שהתקבולים "בתחילה כל תקופה" המשמעות היא שהתקבול הראשון הוא בזמן 0. לפיכך, חישוב הערך הנוכחי הסדרתי שתמיד מקפי "אחת אחרה" הוביל לזמן 1. עיוז זה יש לתקן על ידי מכפלה נוספת והריבית (כפי שעשינו במכפלי האחרון בביטוי להלן):

$$PV(Option1) = 40,000 * PVFA(10\%, 15) * (1 + 10\%)$$

$$PV(Option1) = 40,000 * 7.606 * (1 + 10\%) = 334,664$$

## חלופה 2 :

$$PV(Option2) = 30,000 * PVFA(10\%, 20) * (1 + 10\%) = 280,962$$

### חולפה 3 :

בחלופה זו בשונה מקודמותיה אין כלל סדרה; סדרה חייבת לכלול תזרימיים קבועים (שכן – לא מתקימים), וגם ריבית קבועה (שכן מתקימת) וגם תדריות קבועה (שכן לא מתקימת). במצב כזה, علينا לחשב ערך נוכחי לכל איבר בפרט (לפי נוסחת PV של סכום ייחיד) ולסכום את התוצאות ידנית.

$$PV(\text{Option 3}) = 80,000 * (1 + 10\%)^{-1} + 50,000 * (1 + 10\%)^{-2} + 150,000 * (1 + 10\%)^{-7}$$

$$PV(Option3) = 125,569$$

## חולפה 4:

$$PV(Option4) = 550,000 * (1 + 10\%)^{-8} = 256,579$$

## חולפה 5 :

## סיכום שמקבלים היום – ערכו הנוכחי זהה לסכומו:

$$PV(Option5) = 190,000$$

החלופה המומלצת והמועדפת היא חלופה 1, שהערך הנוחאי של תזרימייה הוא הגובה ביותר.

שאלה 37 - **יישומים של ערך נוכחי, בחירה בין חלופות תשלומות והנחות, עם התאמת ריבית ריבית**

שי מעוניין לרכוש את ה-iPad הבא:



ניתן לרכוש את iPad? באחד מבין שני מסלולים :

10 תשלומים רבעוניים קבועים שוגבה כל אחד מהם מחושב לפי 10% מהעלות הנזקובה לעיל. תשלום בזמן, המקנה הנחה.

בנחתה שהריבית השנתית התקפה ב-9 החודשים הראשונים היא 8.243216%, ואילו הריבית השנתית לאחר מכן 12.550881%, מהו שיעור ההנחה המינימלי הנדרש שיווביל לכך שמי ירכוש בזמן?

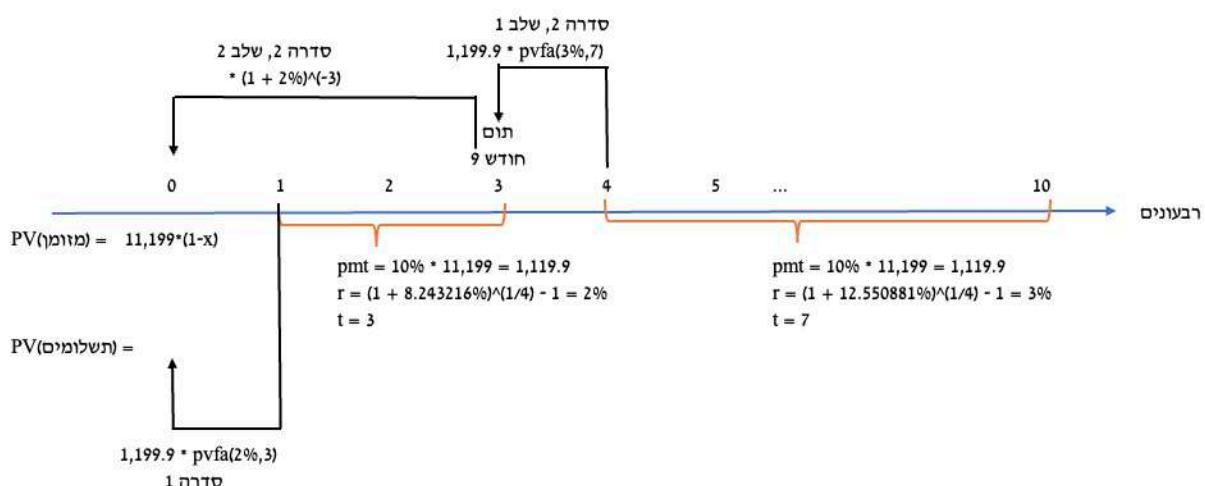
פתרונות :

גם בשאלת זו, בדומה למועדות, עוסקים בבחירה בין תשלום בזמן (בניכוי הנחה) לבין הסדר תשלומים. כמו תמיד, נרצה לבטא הן את הערך הנוכחי של הסדר התשלומים, והן את הסכום בזמן נטו (אחרי הנחה).

- הסכום בזמן נטו, אחרי הנחה, הוא למעשה :  $(1 - (1 - 11,199) * 11,199)$

- לגבי הערך הנוכחי של סדרת התשלומים הרבעוניים, נציג ציר זמן כדי לבנות בצורה נכונה את הערך הנוכחי של התזריםים.

נציג את הציר :



הסבר :

הסדרה ה-1 התקפה במשך 9 חודשים (3 רבעונים) עד למועד שינוי הריבית הנוכחי בשאלת הריבית הראשונית השנתית בשיעור 8.243216%. התקפה במשך פרק זמן זה. בתקופה זו, מבוצעים 3 תשלום, הראשון שבזמן זמן 1. חישוב הערך הנוכחי של סדרה זו מוביל בהגדרה תקופת תשלום אחת אחרת (רבעון אחריה) ביחס למועד התשלומים הראשון (ביחס לתום רבעון 1) ככלומר לזמן 5, ללא צורך בתאמת.

הסדרה ה-2 התקפה במשך 7 רבעונים נוספים (לאחר שינוי הריבית הנוכחי בשאלת). הריבית השנתית הנוכחי ובתקופת תקופת סדרה זו היא ריבית שנתית בשיעור 12.550881%. בתקופה זו, מבוצעים 7 תשלום, והראשון שבזמן בתום הרבעון ה-4. חישוב הערך הנוכחי של סדרה זו מוביל גם הוא בהגדרה אחת אחרת (רבעון אחריה) ביחס למועד התשלום הראשון (ביחס לתום רבעון 4) ככלומר לזמן 3, ונדרשת התאמת נוספת מזמן 3

לזמן 0. התאמות לאחר נבע על ידי מכפלה נוספת בס-1 ועוד הריבית שבתקופ (הריבית הרבונית הקודמת) בחזקה שלילית של מספר תקופות ההתאמה.

$$PV_{Payments} = 1,119.9 * PVFA(2\%, 3) + 1,119.9 * PVFA(3\%, 7) * (1 + 2\%)^{-3}$$

$$PV_{Payments} = 1,119.9 * 2.884 + 1,119.9 * 6.230 * (1 + 2\%)^{-3} = 9,804.35$$

כלומר: הערך הנוכחי של הסדר התשלומיים "שקל" לתשלום היום של 9,804.35 ש"ח. כדי לבדוק מהו גובה הנחיה שיצדיק תשלום מיידי בזמן, נשווה את המחיר בזמן אחרי הנחיה ל贤אזהה האז.

$$PV_{CASH} = 11,199 * (1 - x) = 9,804.35 \rightarrow x \approx 12.45\%$$

והמשמעות: הערך של  $x$  המיצג את שיעור הנחיה בחלופת הזמן הוא 12.45%. קרי, אם תשלום בזמן מזכה בהנחיה בשיעור 12.45% או יותר, כדאי לשלם בזמן.

**שאלה 38 - יישומים של ערך הנוכחי עם תשלום כל שנתיים ריבית**  
גיא שוקל לרכוש היום מחשב שנתרנו להלו:



גיא נדרש לשלם באופן מיידי 30% מעלות העסקה, ואת יתרה עליו לשלם ב-36 תשלום שיבוצע בתדירות תלת חודשית (כל 3 חודשים), שהראשון שבהם יתבצע בעוד חודש מהיום. הריבית החודשית היא 1%. בתנאים אלו, מהו סכום התשלום התלת-חודשי שגיא נדרש לשלם?

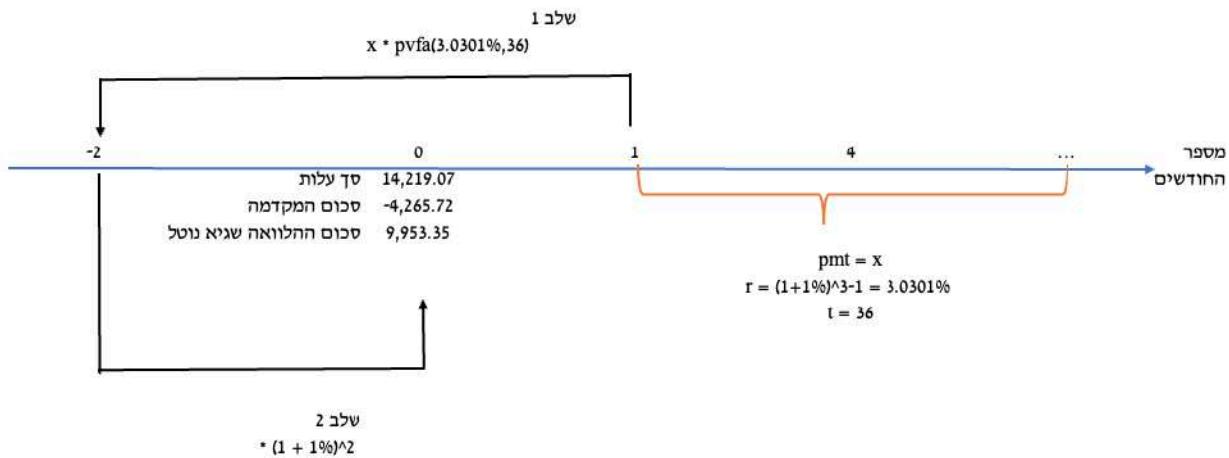
**פתרון:**

בשאלות שבהן אני מזוהה כורך בחילוץ תשלום תקופתי קבוע בעד מוצר, שמחירו כולל נטו - ובנוסח משולמת מוקדמת בעדו, אנו טוענים שמדובר במעשה בעסקת "הלוואה". ולמה הכוונה? הספק למעשה מעניק לגיא הלוואה בגין עלות המוצר בኒוכי המקדמתה.

**משפט:** סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזירה. לכן, אם אני יודע מהם הפרמטרים בעסקה:

- מהו סכום הלוואה: עלות המוצר בኒוכי המקדמתה.
- כמה תשלום יישם בהסדר.

- מהו שיעור הריבית.
- אוכל לחלץ את נעלם התשלום התקופתי.



$$PV_{LOAN} = 14,219.07 * (1 - 30\%) = 9,953.35$$

הביטוי המיציג את הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו:

$$PV_{Payments} = x * PVFA(3.0301\%, 36) * (1 + 1\%)^2$$

הויל והריבית איננה שלמה, נציב בנוסחה המתמטית של PVFA:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} \rightarrow \frac{1 - \frac{1}{1.030301^{36}}}{0.030301} \approx 21.735$$

וכך נקבל בגין הערך הנוכחי של התשלומים שנותרו:

$$PV_{Payments} = x * 21.735 * (1 + 1\%)^2$$

ובסץ הכל, כדי לפטור:

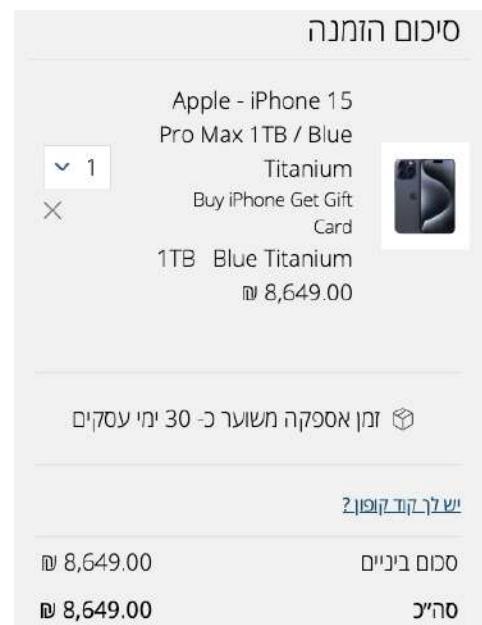
$$PV_{LOAN} = PV_{Payments}$$

$$9,953.35 = x * 21.735 * (1 + 1\%)^2 \rightarrow x \approx 448.92$$

מסקנה: התשלום התקופתי שעל גיא לבצע הוא כ-448.92 ש"ח.

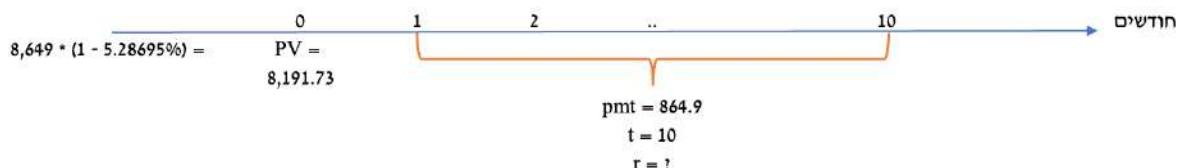
סיכוםנו: אם הייתה שאלת שבה עלה צורך לחשב את התשלום הקבוע לרכישת מוצר שעבורו מושלמת גם מקדמה בזמן, נתייחס לסכום של המחיר בኒקי המקדמה כל הלוואה, שאט סכומה נשווה לביטוי המיציג את הערך הנוכחי של סדרת התשלומים.

שאלה 39 - **חילוץ ריבית אפקטיבית מהסדר תשלוםים עם הנחה**  
דריקוס דו פלסי שוקל לרכוש היום מכשיר iPhone 15 Shantouño להלן:



היבואן יצא במבצע, שמאפשר לך לשלם בעד האייפון ב- 10 תשלום חודשיים שווים שיבוצעו בסוף כל חודש בסך 864.9 ש"ח כל אחד, או לחילופין לשלם היום את מלאה הסכום בمزומנים ולזכות להנחה בשיעור של 5.28695% מהסכום. מהי הריבית האפקטיבית השנתית שגובה היבואן?

פתרונות:  
כאשר מוצר נרכש בתשלומיים, שווי המוצר / מחירו נטו במזומנים (אחרי / בנטורול הנחת מזומנים ככל שקיים) הוא בהגדרה הערך הנוכחי PV של הסדר התשלומיים.



בהתאם למשפט זה:

$$8,191.73 = 864.9 * PVFA(r, 10)$$

כדי לחוץ את הריבית, בטור התחלה, נבודד את הערך של הביטוי PVFA:

$$PVFA(r, 10) = \frac{8,191.73}{864.9} = 9.471$$

כעת נפתח את לוח א-4 בנספח א לכרך ד, וננסה לאתר עבור  $t=10$  את הריבית שMOVILAH לערך זה של PVFA מגלים (ראו צילום מס' 4 להלן) שערך זה של PVFA מתקבל עבור  $r=1\%$ . נשאלת השאלה, האם זו התשובה? בהקשר זה, חשוב לזכור:

הביטוי  $r$  בערך נוכחי סדרתי הוא הריבית **לפרק הזמן בין תשלומים**. הוואיל וכאן הסדרה כוללת תשלומים חודשיים (כל חודש), אז הריבית שוחלצה היא לחודש.

כיצד נמיר את הריבית החודשית מערך **חודשי לערך שנתי** [כי זה היה הנדרש מהה]? כברירת מחדל, המרווח הריבית בקורס מבוצעות תחת ההנחה של "ריבית דרייבית".

התשובה הסופית, לפיכך:

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12.6825\%$$

<i>t</i>	<i>r</i>	1%	2%
1	0.990	0.980	
2	1.970	1.942	
3	2.941	2.884	
4	3.902	3.803	
5	4.853	4.713	
6	5.795	5.601	
7	6.728	6.472	
8	7.652	7.325	
9	8.566	8.162	
10	9.471	8.983	
11	10.368	9.787	

שאלה 40 - **חילוץ ריבית אפקטיבית מהסדר תשלומים. עם תשלום ראשון במועד הרכישה טוני פרגוסון שוקל לרכוש מחשב שנתוניו להן:**

סיכום הזמן	
▼ 1	Apple - Mac Pro
×	Rack / Apple M2
	Ultra / 64GB Ram /
	1TB SSD
	₪ 59,799.94
	זמן אספקה משוער כ- 30 ימי עבודה
	<a href="#">שלijkognon?</a>
	סה"כ 59,799.94 ₪
	סה"כ 59,799.94 ₪

את התשלומים بعد המחשב ניתן לבצע בזמן בדיקת הנזק לעיל, או ב-8 תשלומים שווים בסך של 8,003.74 ש"ח כל אחד. התשלום הראשון הוא מיידי. מהי הריבית האפקטיבית השנתית בעסקה?

**פתרון :**  
זכור, כאשר דנים בהסדר תשלום, מחיר המוצר בזמן (לאחר הנחות שכאן לא מתקינות) הוא הערך הנוכחי של הסדר התשלומים. לכן נבנה משווה רלוונטי:

$$59,799.94 = 8,003.74 * PVFA(r, 8) * (1 + r)$$

רגע שי, מה זה? מה עשית פה? ובכן, אפשר לראות די בקלות שהתזרים הראשון הוא בזמן 0. לכן, ערך הנוכחי של סדרה של "מכשיר אחורה" מוביל בזמן -1, בבדיקה כמו שראינו באופן מפורט עם תרשימים בשאלה 31, למשל (חזרו לשם וראו את השאלה אם לא ברור). כדי לחזור בזמן 0, יש לכפול ב-1 ועוד הריבית. אבל מה הבעיה? שבמצב הזה, יש לי נעלם בשני מקומות, וזה מעצה מקשה על הפתרון. לכן צריך למצוא "טריק" קצר שונה, קיבלו:

$$59,799.94 = 8,003.74 + 8,003.74 * PVFA(r, 7) \rightarrow PVFA(r, 7) = 6.4715$$

רגע מה זה לעזאזל שי מה עשית?  
ובכן, כדי להתגבר על נעלם ריבית בשני מקומות כמו במשווה העליונה, עבדתי בהגדירה הבאה: אמרתי, בוואו נדמיין שיש רק 7 תזרים, בזמן 7-1. זו בעצם הנוסחה המתבוצאת במחובר הימני באגף ימין. ומה לגבי זה שהזנחתי את התזרים הראשון בזמן 0? ובכן, הואיל והוא בזמן אפס, אפשר פשוט להוסיף אותו לכך ... מוגניב.  
עכשו הפתרון יהיה:

$$PVFA(r, 7) = 6.4715 \rightarrow r = 2\%$$

איך הגיעו לזה? ראו את אופן הפתרון של שאלה 39 הממחישה את אופן השימוש בלוח א-4 לחילוץ הריבית. כמובן, ריבית זו היא ריבית חודשית (לפרק הזמן בין תשלומיים) ולכן כדי להתאים למונחים שנתיים וכך נקבל את התשובה הסופית:

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 = (1 + 2\%)^{12} - 1 = 26.824\%$$

(\*) דרך נוספת לחישוב היא לנכות מחair הנכס בזמן את התשלום המיידי. כך מקבלים את המשוואה השקולה הבאה, והמשך פתרונה זהה:

$$59,799.94 - 8,003.74 = 8,003.74 * PVFA(r, 7)$$

**שאלה 41 - חילוץ ריבית אפקטיבית מהסדר תשלום, עם תשלום במעמד הרכישה והתאמת ריבית**  
דונקי מעוניין לרכוש Apple Watch שנתיונו להלן:

סכום תשלום	סכום בניין	סה"כ
₪ 4,149.00	₪ 4,149.00	₪ 4,149.00

השעון מוצע למכירה על ידי תשלום של 2,149 ש"ח בזמן (מיידי) והיתרה ב-10 תשלום רביעוניים (התשלום הראשון ועוד רביעון אחד, קרי בעוד 3 חודשים) בסך של 234.46 ש"ח כל אחד. מהי הריבית האפקטיבית השנתית המגולמת בהסדר המכירה?

**פתרון:**  
שאלה זו היא די More of the same ביחס לקודמותיה. השווי המתקיים בסך 4,149 הוא הערך הנוכחי של 2,149 ש"ח מידים בתוספת לערך הנוכחי של התשלומיים הרביעוניים הקבועים.

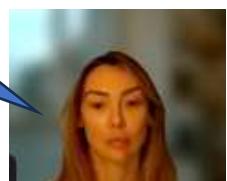
$$4,149 = 2,149 + 234.46 * PVFA(r, 10) \rightarrow PVFA(r, 10) = 8.53 \rightarrow r = 3\%$$

הרביבית שקיבלתי היא רביעונית, לפרק הזמן בין תשלומים. כדי להמיר את הריביבית הרביעונית לשנתית, בהנחה ברירת המחדל של ריביבית דרייבית, נשתמש בمعרך חזקה מתאים:

$$r_{annual} = (1 + r_{quarter})^4 - 1 = (1 + 3\%)^4 - 1 = 12.55\%$$

**שאלה 41.1 - ערך נוכחי סדרתי - יישום בהלוואה, לשם חילוץ ריבית מסדר החזירים עם עמלות הלוואה בסך 300,000 ש"ח נפרעת ב-24 תשלומים חודשיים שווים (ЛОח שפיצר). הריבית הנוקובה השנתית היא בשיעור 24% ובנוסך יש לשלם מיד במועד נטילת ההלוואה עמלת הקמה בשיעור 5% מסכום ההלוואה. לכל תשלום חודשי המבוצע בהלוואה יש להוסיף עמלת טיפול חודשית בסך 120 ש"ח. בתנונים אלו:**

- א. מהי הריבית האפקטיבית החודשית?  
ב. מהי הריבית האפקטיבית השנתית?



### פתרונות:

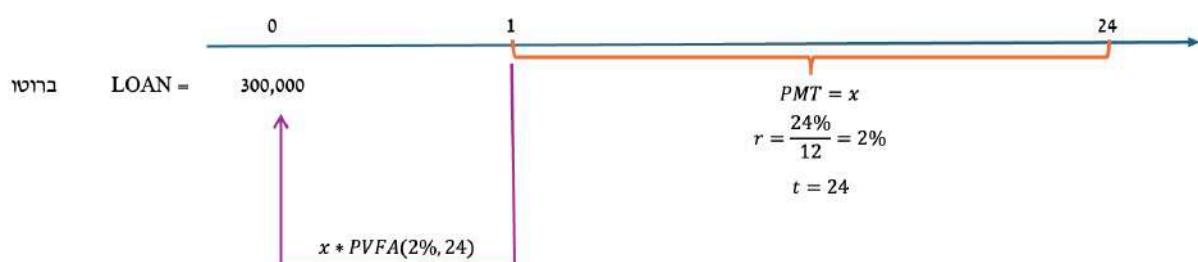
ברגע שאני מזהה הלוואת שפירר שעלייה מלבושים מגוון "מרענן" (מגון רחוב של עלויות נוספות שמייקרות את ההסדר) הlid העבודה בצד הדרגתית הוא צדקלמו:

בשלב ה-1: נחשב את החזר התקופתי בהלוואה, תוך הטעמאות מלאה מהעמלות והעלויות המוחדרות הנלוות. אציג את הערכים על ציר הזמן באופן ראשי.

בשלב ה-2: נבע עיבוד של התוצרים - ננכה מההלוואה הראשונית נטו (תזרים חיובי) את עמלת ערכית המסמכים; נוסיף לכל החזר חודשי את דמי הגבייה החודשיים וכך נקבל תזרים סופי נטו שהיווה את הבסיס לחילוץ הריבית.

בשלב ה-3: אבנה על בסיס התזרימיים הסופיים נטו משווהה לחילוץ הריבית - המשווהה שלפיה סכום ההלוואה (נטו, אחרי ניכויים ועמלות) הוא הערך הנוכחי של החזירה (בהתחשב בתשלומיים נוספים ועמלות).

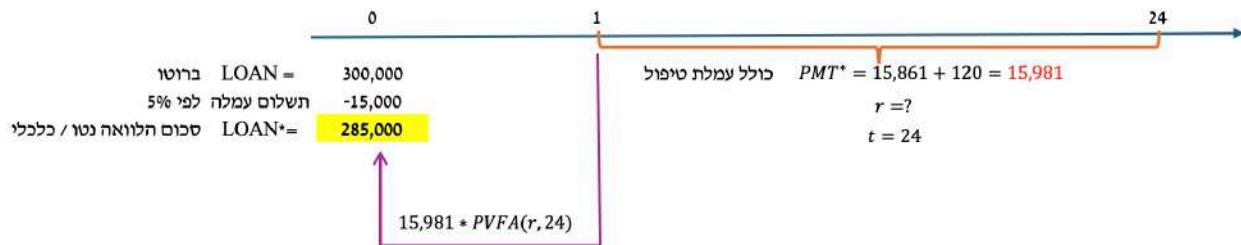
שלב 1 - התעלמות מלאה מניבוים ועמלות, וחילוץ סכום תשלום מהותי:



### משוואת החילוץ :

$$300,000 = x * PVFA(2\%, 24) \rightarrow 300,000 = x * 18.914 \rightarrow x = 15,861$$

**שלב 2 - מנכימים מסכום ההלוואה את עמלת ההקמה, מוסיפים את דמי הטיפול להחזר התקופתי**



**שלב 3 - על בסיס התזריםים נטו - נשתמש במשפט שאומר: סכום ההלוואה = ערך נובחי החזירים**

$$285,000 = 15,981 * PVFA(r, 24) \rightarrow PVFA(r, 24) = \frac{285,000}{15,981} = 17.834$$

עקרונית בשאלת מטלה / בוחינה, علينا לחפש בלוח א-4 בנספח א' כרך ד תחנת ערך  $r = 24$  את אותו ערך מספרי שהנו קרוב / זהה ל-17.834. אין כזה בצורה מלאה במרקחה שלנו (וזאת אך ורק לאור בניתו הנטונם שלוי). אני חילצתי באקסל את התוצאה:

$$r = 2.526\%$$

חילוץ ריבית מהסדר תשלוםם לרבות בגין ההלוואה (סדרה) תמיד ולעתים מפיק את הריבית האפקטיבית לתקופת תשלום. כאן, התשלומים חדשים, ולכן הריבית שהילצנו היא ריבית חודשית. כמובן, שאם דרשו ריבית לפרק זמן אחר, לא נוכל להסתפק בתוצאה זו.

**ריבית אפקטיבית חודשית (תשובה ל-א): 2.526%**

ריבית אפקטיבית שנתית (תשובה ל-ב): תלמיד וילו, המרת ריבית אפקטיבית מתקופה אחרת לאחרות מבוצעת באמצעות מערך חזקה מתאים בלבד, ללא כפל / חילוק ואם כך, להלן **הRibbitet Aפקטיבית השנתית**:

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{\text{month}})^{12} - 1 = (1 + 2.526\%)^{12} - 1 \approx 34.9\%$$

### 41.1.1 – חישובי הלוואות על קצת המזל

מור מעוניינת ליטול הלוואה לשם מימון מכונה לחימום נקי. סכום הלוואה הנזק ש"ח והיא לתקופה של 10 שנים. הלוואה נפרעת בשיטת לוח סילוקין רגיל (שמשמעותו: החזרי קרן שווים), כאשר התשלומים הם בתום כל חודש. הריבית הנקובה בגין הלוואה היא 24% לשנה. בחלוף 7 שנים הלוואה, החלטה מורה לבצע מחרור של הלוואה, כך שפרשה אותה מחדש באופן שבו ההחזרים יבוצעו בתשלומים שווים (לוח שפייצר). מהו התשלום החודשי לאחר שינוי?

פתרון :

באופן כללי – ההגדרה של לוח סילוקין רגיל היא פירעון בתשלומי קרן שווים וקבועים. במלים אחרות, הלוואה הנפרעת בשיטת לוח רגיל היא הלוואה שהיתריה שלה קטנה / פוחתת בכל מועד תשלום בסכום קבוע, שהוא היחס בין סכום הלוואה למספר התשלומים.

כאן: הלוואה בסך 60,000 ש"ח.

מספר החזרי הלוואה – בתום כל חודש, 10 שנים : 120

$$\text{סילוק הקרן החודשי הקבוע: } 500 = \frac{60,000}{120}$$

מה שקרה זה – שבחלוף 7 שנים הלוואה (כלומר לאחר שסולקו 84 תשלום קרן בסך 500 כל אחד) נפרשה הלוואה מחדש לפירעון בתשלומים כוללים קבועים.

יתרת קרן הלוואה ערב שינוי התנאים :

$$60,000 - 500 * 84 = 18,000$$

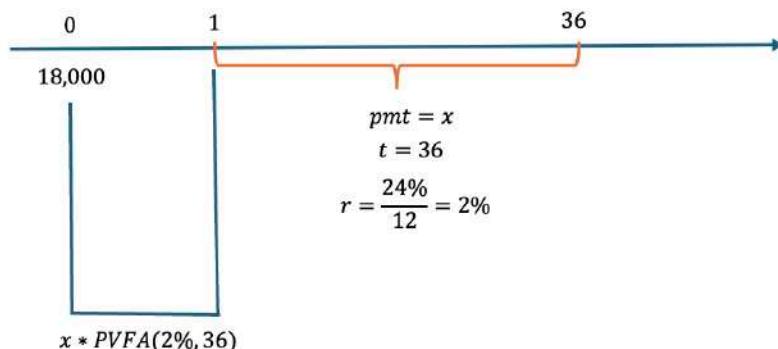
כעת, כאשר נרצה לפזר יתרה זו לפי לוח שפייצר (תשלומים שווים) נתייחס יתרה כל הלוואה חדשה שנתוניה

בדלקמן :

סכום : 18,000

מספר התשלומים : 120 - 84 = 36

הчисוב של התשלום התקופתי :



שים לב למספר דגשים :

- א. בلوح הסילוקין הרגיל, אין התייחסות לريبית, פשוט משום שרצו לדעת מהי יתרת קרן ההלוואה. יתרת קרן זו מסולקת בلوح הרגיל בכל מועד תשלום בסכום קבוע. סכומי הריבית מושלמים באופן שוטף גם הם בلوح הרגיל, אך הם אינם משפיעים על יתרת הקרן לצורך הפרישה מחדש.
- ב. בلوح הסילוקין החדש (שפיצר), מגלמים בהחזר את הריבית, וזאת מהטעם שרצו לדעת מהו סכום התשלום הכלול בכל תקופה, שכמובן מייצג גם את הריבית בגינה.

$$18,000 = x * PVFA(2\%, 36) \rightarrow x \approx 706$$

#### שאלה 42 - איזון אקטוארי שמתבסס על הפקדה בודדת בהווה

מנו בונילה מעוניין לפרוש במיידי לפנסיה באופן שיקנה לו קצבה חודשית בסכום של 10,000 ש"ח בתחילת כל חודש במהלך השנים הקרובות. כמה מנו יצרוך להפקיד לקרן הפנסיה, בהנחה שאין בה צבירה כלשהי עבר תחילת ההפקדות, וכן ידוע שהריבית החודשית היא 1% לחודש בשנה וחצי הקרובות, ו-2% לחודש לאחר מכן?

פתרון :

שאלה זו עוסקת ב"איזון אקטוארי", או אם תרצו: במצב שבו קיים צורך למן **סדרה או סדרות** של **משכירות/קצבאות/תקבולים** **באמצעות הפקדה בודדת** (כמו במקרה זה) או **באמצעות סדרת הפקדות** (כמו שנציג בשאלה הבאה).

המשפט הבסיסי הפותר שאלות מסוג זה (מיימון סדרת **משכירות** **באמצעות הפקדה בודדת**) הוא שערך העתידי של ההפקדות למועד ביצוע ההפקדה האחרון, צריך להיות זהה לערך הנוכחי של המשכירות לאותה נקודת זמן. בפשטות, אם מדובר בהפקדה בודדת, אחת ויחידה, בזמן אפס שתממן את סדרת המשכירות, אזי משווה את הפתרון תהא :

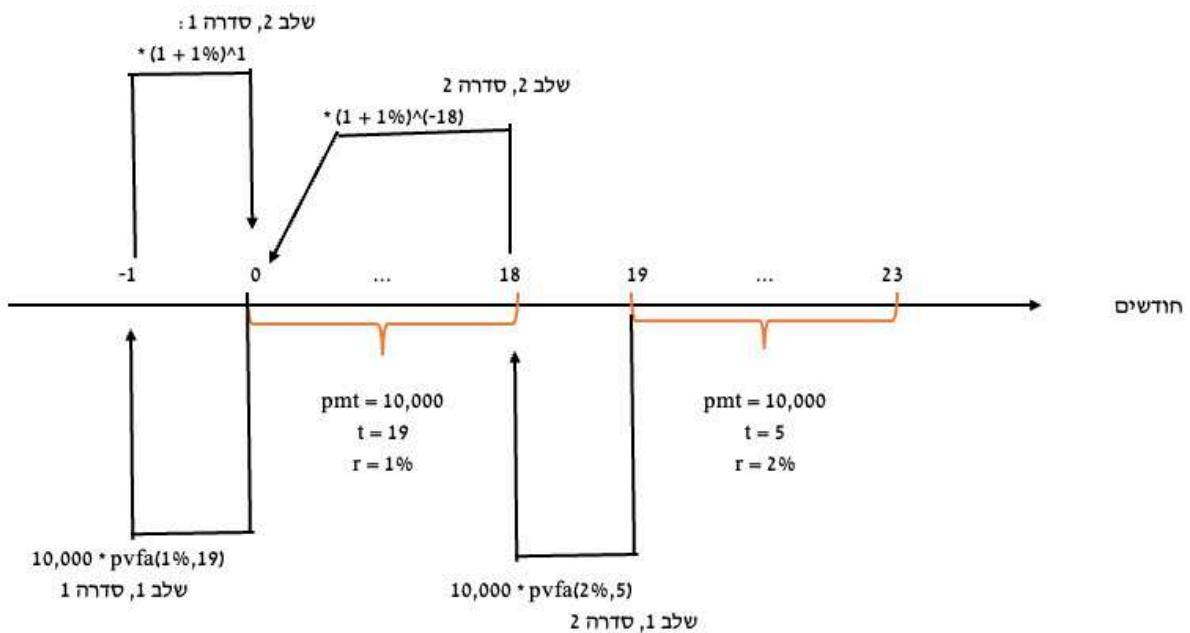
$$Deposit = PV(Withdrawals)$$

כאשר :

הערך **Deposit** מייצג את ההפקדה החד **פעמית** / **המידית** **הבודדת** שנדרש לבצע.

הערך **(****PV****)** **(****Withdrawals****)** הוא **ביטוי** המיציג את הערך הנוכחי של המשכירות, מתואם לזמן 0.

נזכיר זאת בצריך, ונפתור משווהה רלוונטיות בצריך הסבר מלא. כתזכורת, סיפרו לנו שתהיה משכיכה בתחילת כל חודש במשך שנים, סכום המשכיכה 10,000 ש"ח לחודש, לאור העובדה שלאחר שנה וחצי הריבית משתנה (מן-1% ל-2%) יש להפריד ולהחלק את סדרת המשכירות לשני חלקים :



משוואת הפתרון והסביר מפורט:

הויל ונתנו שהמשיכת בתחלת כל חודש במשך שניםים, הרי שבראיות הציג כולם, המשיכת הראשונה היא בזמן 0 (תחילת החודש -1) והמשיכת האחרונה היא בזמן 23 (תחילת החודש ה-24 = סוף החודש 23). בהינתן שהריבית משתנה לאחר 18 חודשים (שנה וחצי), הסדרה הראשונה היא למעשה בזמן 0-18 ויהיא כוללת 19 תזרימי מזומנים.

לאחר מכן, המשיכות נמשכות בריבית שונה של 2%, עד לסוף החודש 23, כוללות אם כך 5 ממשיכות בסכום חודשים חמשי זהה.

השאלה מתמקדת בכך שבו علينا לחשב סכום של הפקדה בזדמת מיידית, שתוכל למן את סדרת המשיכות זו. בהגדרה, הפקדה בזדמת זו היא הערך הנוכחי המכרי של כל סדרות המשיכת. חישוב הערך הנוכחי של הסדרה ה-1 מוביל בזמן -1, זאת הויל והסדרה החלה בזמן 0, ותמיד חישוב ערך הנוכחי סדרתני מוביל "אחדת אחרת" ביחס לתחילת הסדרה. כדי לתקן 0, כפלנו את התחשבה הסדרתית ב-1 ועוד הריבית בחזקת 1.

חישוב הערך הנוכחי של הסדרה ה-2 מוביל בזמן 18, זאת - הויל והסדרה החלה בזמן 19, ותמיד חישוב ערך הנוכחי סדרתני מוביל "אחדת אחרת" - קרי בזמן 18. כדי לתקן 0, כפלנו את התחשבה הסדרתית ב-1 ועוד הריבית בחזקת שלילית של 18.

$$Deposit = PV(Withdrawals)$$

$$Deposit = 10,000 * PVFA(1%, 19) * (1 + 1\%)^1 + 10,000 * PVFA(2\%, 5) * (1 + 1\%)^{-18}$$

$$Deposit = 10,000 * 17.226 * (1 + 1\%)^1 + 10,000 * 4.713 * (1 + 1\%)^{-18} = 213,384$$

עלינו להוכיח היום כי 213,384 ש"ח על מנת לאפשר את סדרות המשיכת.

**שאלה 43 - יישומי ערך נוכחי - איזון אקטוארי: תכנון פיננסי - סדרת הפקודות שאחריה משיכות אינסופיות**  
 ניתנו להפקיד לפנסיה סכום של 3,000 ש"ח כל שנה במשך 20 שנים. הניחו כי החל מסוף השנה ה-24 קיבלו סכום שנתי קבוע, לאינסופ. מהו סכום שנתי זה, אם הריבית היא 5% לשנה במשך 22 השנים הראשונות, ולאחר מכן צפואה הריבית לרדת ל-2% לשנה?

פתרונות :

גם שאלה זו עוסקת באיזון אקטוארי, הואיל וויהינו סדרת משיכות (הפעם : אינסופיות) שיש לשים לב לכך שהנדרש איננו מבקש את סכום ההפקדה המיידית בהווה שתאפשר את המשיכות. כאן, מפקדים סדרת הפקודות צוברת ריבית, ורק לאחר סיום מתכילות המשיכות.  
 כאשר מזוהים שאלה עם סדרת קבועות המומנת עם סדרת הפקודות (לא עם הפקדה בודדת) משווהת הפתרון תהיה מעט שונה. נרצה לבטא את **הערך העתידי של הפקודות למועד ההפקדה الأخيرة**, ואת **הערך הנוכחי** של **כל סדרת המשיכה לאותה נקודת זמן**. כלומר :

$$FV(\text{Deposits}) = PV(\text{Withdrawals})$$

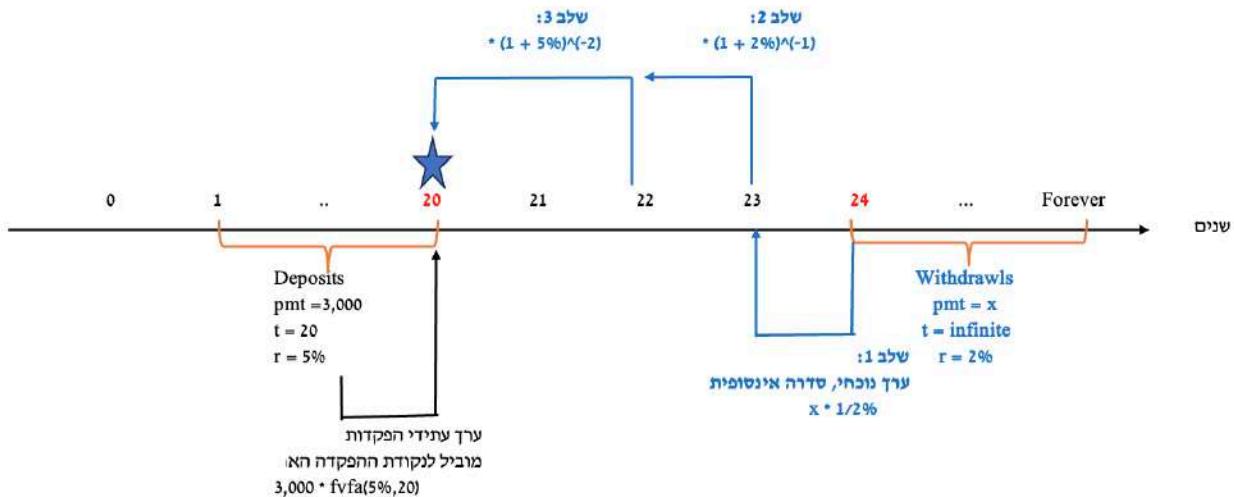
כאשר :

הערך ( $FV$ ) מייצג את **הערך העתידי של סדרת הפקודות למועד ההפקדה الأخيرة**.  
 הערך ( $PV$ ) הוא **ביטוי המיציג את הערך הנוכחי של המשיכות**, מותאם להפקדה الأخيرة.

מציג זאת ביציר, ונפתרו משווהה רלוונטיות ביצירוף הסבר מלא.  
 בהיבט אior היציר, אנו יודעים שמדובר בסדרת תזרימי מזומנים המיצגים הפקדה, בתום כל שנה במשך 20 שנה (ולכן, תיעוד סדרת הפקודות על היציר הוא בזמן 20-1).  
 לגבי סדרת המשיכות, היא אינסופית, ומופיע איברהה הראשון הוא בזמן 24.  
 לבטא את **הערך העתידי של הפקודות למועד ההפקדה الأخيرة זה קל** : משום שתמיד ערך עתידי סדרתי מוביל למועד ההפקדה الأخيرة, וכך, בזמן 20.  
 לבטא את **הערך הנוכחי של המשיכות לאותה נקודת זמן**, זה טיפה יותר מורכב : המשיכה הראשונה היא בזמן 24, וסדרת המשיכות היא אינסופית. כאשר מחשבים את ערכה הנוכחי על בסיס נוסחת ערך נוכחי של סדרה אינסופית :

$$PV = pmt * \frac{1}{r}$$

מגיעים לנקודת הזמן שהוא "אחת אחריה" ביחס לנקודת המשיכה הראשונה, כלומר - בזמן 23. בעת, עליינו לתקן את התוצאה מזמן 23 בזמן 20 (נקודת סיום הפקודות) ככלומר 3 שנים לאחר. אלא שלפי נתונים השאלה, התקון הזה צריך לבצע בריביות שונות : עד וככל 22 הריבית 5%, ואילו בשנה 23 ואילך, הריבית 2%. לכן, את התקון מ-23 ל-22 (באיור להלן : "שלב 2") נבצע ע"י מכפלה ב-1 ועוד 2% בחזקה שלילית של 1, בעוד שת התקון מ-22 ל-20 (באיור להלן : "שלב 3") נבצע ע"י מכפלה ב-1 ועוד 5% בחזקה שלילית של 2 :



$$FV(\text{Deposits}) = PV(\text{Withdrawals})$$

$$3,000 * FVFA(5\%, 20) = x * \frac{1}{2\%} * (1 + 2\%)^{-1} * (1 + 5\%)^{-2}$$

$$3,000 * 33.066 = x * \frac{1}{2\%} * (1 + 2\%)^{-1} * (1 + 5\%)^{-2}$$

$$x \approx 2,231$$

### שאלה 43.1 – איזון אקטוארי – חילוץ סכום הפקודה כשהריבית ידועה

ברצונכם לקבל קצבה חודשית בסך 3,000 ש"ח בתחלת כל חודש החל מבعد 3 שנים מהיום (התកבול הראשון הוא לבדוק בעוד 3 שנים) למשך 3 שנים. הריבית במהלך 4 השנים הבאות היא 1.5% לחודש. מהו הסכום שתצטרכו להפקיד בתום כל חודש במהלך 3 השנים הבאות על מנת שתוכלו להנות מסכומי הקצבה בעיתויו וסכום הנדרש?

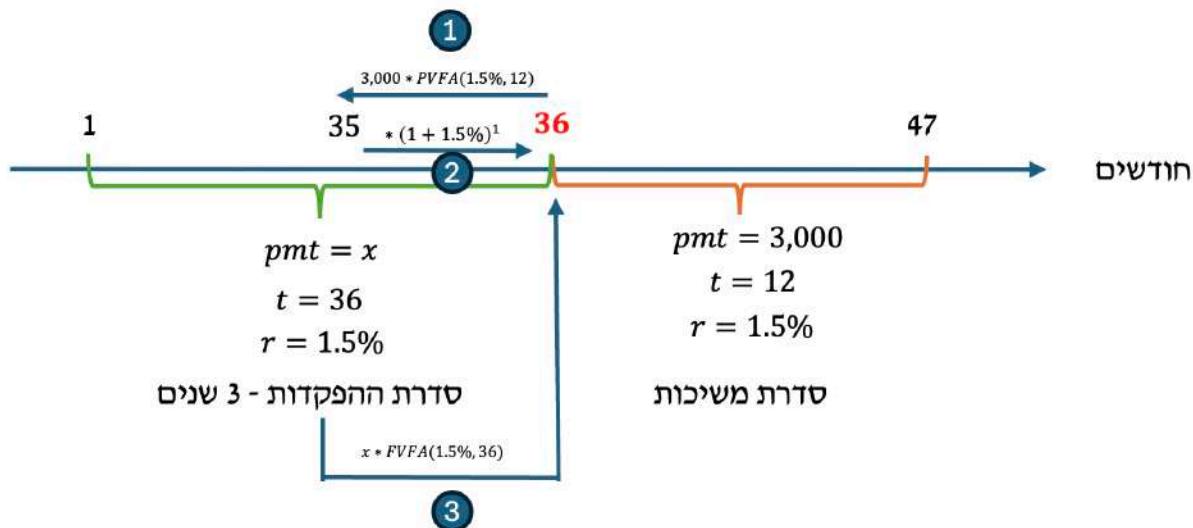
פתרון :

בשונה מרוב התרגילים ה"פשטוטיים" שדורשים ערך עתידי (FV) של סכומים בודדים ו/או סדרות; כאן עוסקים במצב שבו אני (מקבל החלטה) נדרש להפקיד סדרה מסוימת – הסדרה הזו צוברת ריבית ומגיעה לערך מסוים (חישוב FV), וזה מבוצעות משלכות (קצבאות / תקבולים) על בסיס יתרה זו. בכל מקרה שבו אזהה סדרת הפקודות שsummant סדרת משלכות – אני אוהב לקרוא לסוג השאלה הנ"ל איזון אקטוארי.

כל שאלת איזון אקטוארי היא למעשה שאלת חילוץ, שבבסיסה המשפט הבא:  
תמיד ולעולם – הערך של ההפקודות חייב להיות שווה לערך של המשיכות – **לאוֹתָה נְקוֹדַת זָמָן**. או במלים אחרות – הערך העתידי של ההפקודות חייב להיות שווה לערך הנוכחי של המשיכות, לאוֹתָה נְקוֹדַת זָמָן.

$$FV = PV \text{ (הפקודות)} \quad \text{משיכות}$$

במקרה זה :



משוואת הפתרון :

$$FV = PV \text{ (הפקודות)} \quad \text{משיכות}$$

$$x * FVFA(1.5\%, 36) = 3,000 * PVFA(1.5\%, 12) * (1 + 1.5\%)^1$$

נוסחאות PVFA ו- FVFA שנדרשות כאשר ערכי הריבית לא שלמים :

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} \rightarrow PVFA(1.5\%, 12) = \frac{1 - \frac{1}{(1+1.5\%)^{12}}}{1.5\%} = 10.908$$

$$FVFA(r, t) = \frac{(1 + r)^t - 1}{r} \rightarrow FVFA(1.5\%, 36) = \frac{(1 + 1.5\%)^{36} - 1}{1.5\%} = 47.276$$

נחזור ונציג במשוואת הפטרון:

$$x * 47.276 = 3,000 * 10.908 * (1 + 1.5\%)^1 \rightarrow x \approx 702.57$$

התשובה הסופית: כדי לממן את סדרת המשיכות יש להפקיד במהלך 3 השנים הראשונות סכום חודשי של כ- 703 ש"ח.

### שאלה 43.2 – איזון אקטוארי עם חילוץ ריבית

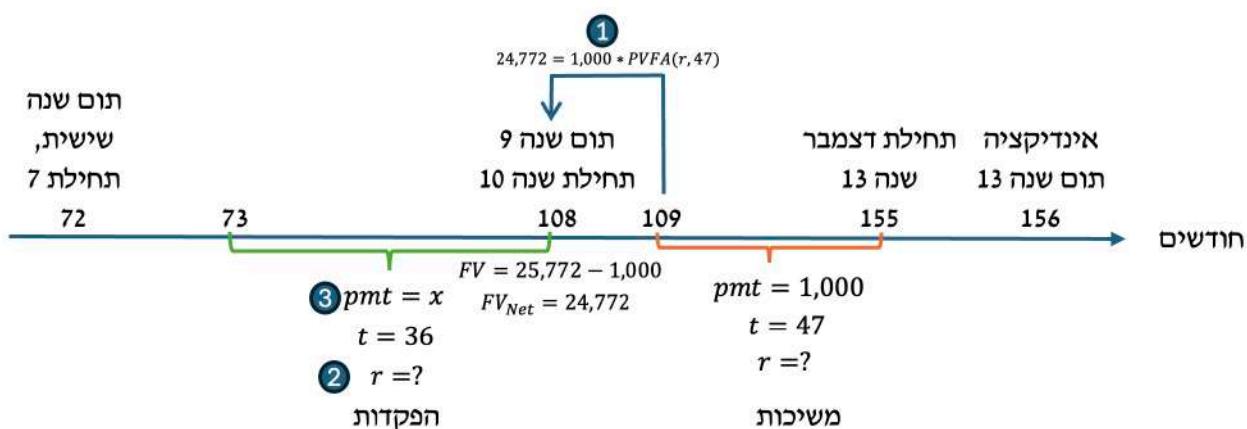
חודש במהלך השנה ה-9, בהנחה שיעור שיפוטם לרשומות סכום של 25,772 ש"ח בתום השנה ה-9?

פתרונות:

## הדרך:

צעד ראשון: אנו יודעים מהו הסכום שנצבר ואשר ממן את סדרת המשיכות, וכן את סדרת המשיכות. מכך ניתן לבנות משועואה שתסייע לחילוץ הריבית.

צעד שני: אם אנחנו יודעים מה הסכום שנצבר ומה מספר ההפקודות, נוכל לחלץ את סכום ההפקודה התקופתי. נדגג להציג זאת על ציר הזמן בצורה מסודרת וլפטוור בהתאם.



צעד פתרון ראשון – חילוץ הריבית על בסיס הערך הנוכחי של סדרת המשיכות (שימוש לב להסביר המפורט בהקלטה לגבי הסיבה בעיטה פוצלה הסדרה לזמן 108 וכל היתר):

$$24,772 = 1,000 * PVFA(r, 47) \rightarrow PVFA(r, 47) = 24.772$$

ואז ניגש ללוח א-4 בנספח א לכרך ד ונחפש את הריבית שモבילה לערך ה-PVFA הקרוב ביותר ל-24.772 בהינתן 47 תשלומים. מגעימם למסקנה שהקירוב הטוב ביותר ביותר הוא 3% ריבית – זכרו שהתשולםים חודשיים, והריבית חודשית.

$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
26		22.795	20.121	17.877	15.983	14.375	13.003	11.826	10.810	9.929	9.161
27		23.560	20.707	18.327	16.330	14.643	13.211	11.987	10.935	10.027	9.237
28		24.316	21.281	18.764	16.663	14.898	13.406	12.137	11.051	10.116	9.307
29		25.066	21.844	19.188	16.984	15.141	13.591	12.278	11.158	10.198	9.370
30		25.808	22.396	19.600	17.292	15.372	13.765	12.409	11.258	10.274	9.427
31		26.542	22.938	20.000	17.588	15.593	13.929	12.532	11.350	10.343	9.479
32		27.270	23.468	20.389	17.374	15.803	14.084	12.647	11.435	10.406	9.526
33		27.990	23.989	20.766	18.148	16.003	14.230	12.754	11.514	10.464	9.569
34		28.703	24.499	21.132	18.411	16.193	14.368	12.854	11.587	10.518	9.609
35		29.409	24.999	21.487	18.665	16.374	14.498	12.948	11.655	10.567	9.644
36		30.108	25.489	21.832	18.908	16.547	14.621	13.035	11.717	10.612	9.677
37		30.800	25.969	22.167	19.143	16.711	14.737	13.117	11.775	10.653	9.706
38		31.485	26.441	22.472	19.368	16.868	14.846	13.193	11.829	10.691	9.733
39		32.163	26.903	22.808	19.584	17.017	14.949	13.265	11.879	10.726	9.757
40		32.835	27.355	23.115	19.793	17.159	15.046	13.332	11.925	10.757	9.779
41		33.500	27.799	23.412	19.993	17.294	15.138	13.394	11.967	10.787	9.799
42		34.158	28.235	23.701	20.186	17.423	15.225	13.452	12.007	10.813	9.817
43		34.810	28.662	23.982	20.371	17.546	15.306	13.507	12.043	10.838	9.834
44		35.455	29.080	24.254	20.549	17.663	15.383	13.558	12.077	10.861	9.849
45		36.095	29.490	24.519	20.720	17.774	15.456	13.606	12.108	10.881	9.863
46		36.727	29.892	24.775	20.885	17.880	15.524	13.650	12.137	10.900	9.875
47		37.354	30.287	25.025	21.043	17.981	15.589	13.692	12.164	10.918	9.887
48		37.974	30.673	25.267	21.195	18.077	15.650	13.730	12.189	10.934	9.897
49		38.588	31.052	25.502	21.341	18.169	15.708	13.767	12.212	10.948	9.906
50		39.196	31.424	25.730	21.482	18.256	15.762	13.801	12.233	10.962	9.915

כעת נbeta את הערך העתידי של סדרת ההפקודות:

$$x * FVFA(3\%, 36) = 25,772 \rightarrow x \approx 407.29$$

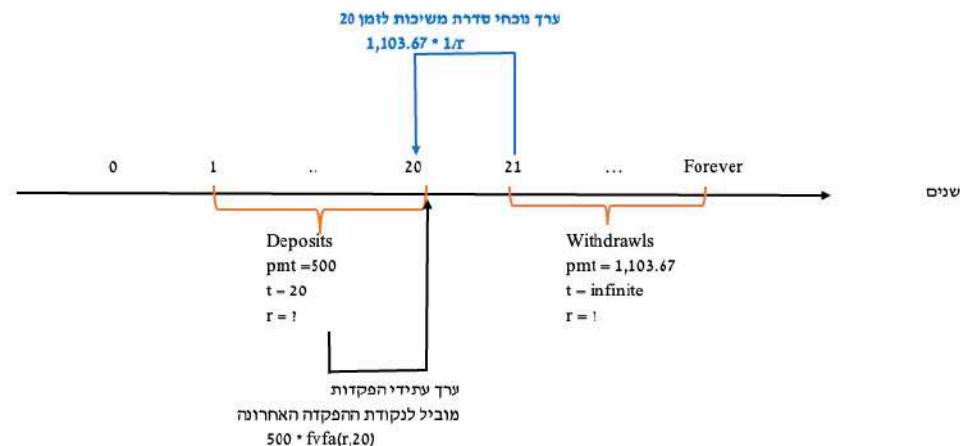
בהתאם – תשובתי הסופית תהיה: הסכום הנדרש לכל הפקדה חודשית הנ' 407.29 ש"ח.

שאלה 44 - **יישומי ערך הנוכחי - איזון אקטוארי - חילוץ ריבית**

שකודה מציעה למשקיעים שישלמו לה ("יפקידו אצליה") 500 ש"ח כל שנה במשך 20 שנה, ובתמורה היא תשלם החול מהשנה ה-21 סכום קבוע למשקיעים של 1,103.67 ש"ח בשנה, לנצח. איזה שער ריבית ההצעה מגמתה?

פתרון :

המבנה הבסיסי של השאלה, והעיקרון המרכזי בבסיס חישובה, זהה לשאלה קודמת. גם כאן, מדובר בסדרת הפקודות שאחריה סדרת משיכות. נציג ציר רלוונטי ונזכיר משוואות פתרון :



$$FV(\text{Deposits}) = PV(\text{Withdrawals})$$

$$500 * FVFA(r, 20) = 1,103.67 * \frac{1}{r}$$

תזכורת - נוסחת המתמטית היא :

$$FVFA(r, t) = \frac{(1 + r)^t - 1}{r}$$

נציב ונגלה :

$$500 * \frac{(1 + r)^{20} - 1}{r} = 1,103.67 * \frac{1}{r}$$

אם כופלים את שני האגפים ב -  $r$  מקבלים :

$$500 * [(1 + r)^{20} - 1] = 1,103.67$$

$$500 * (1 + r)^{20} - 500 = 1,103.67$$

$$500 * (1 + r)^{20} = 1,103.67 + 500$$

$$500 * (1 + r)^{20} = 1,603.67$$

אחלק את שני האגפים ב-500 ואמשיך להعبر אגפים ולהשתעשע עד שאקבל תשובה :

$$(1 + r)^{20} = \frac{1,603.67}{500} \rightarrow (1 + r)^{20} = 3.20734 \rightarrow 1 + r = 3.20734^{\frac{1}{20}} \rightarrow r = 6\%$$

**שאלה 45 - יישומי ערך נוכחי - איזון אקטוארי עם יתרה בתום התקופה**

הילדה החוקרת הפקידה 4,000 ש"ח בתום כל שנה במשך 30 שנה לקופת גמל משלמתה לказבה. לאחר מכן ביצעה משיכות בסך 8,000 ש"ח לשנה בכל אחת מהשנים 31-36. במהלך השנים 37-41 משכה הילדה 9,000 ש"ח לשנה. בתום השנה ה-42 משכה הילדה את כל הסכום שנותר. מה הייתה יתרה זו, אם ידוע שהריבית השנתית היא קבועה בשיעור 10%?

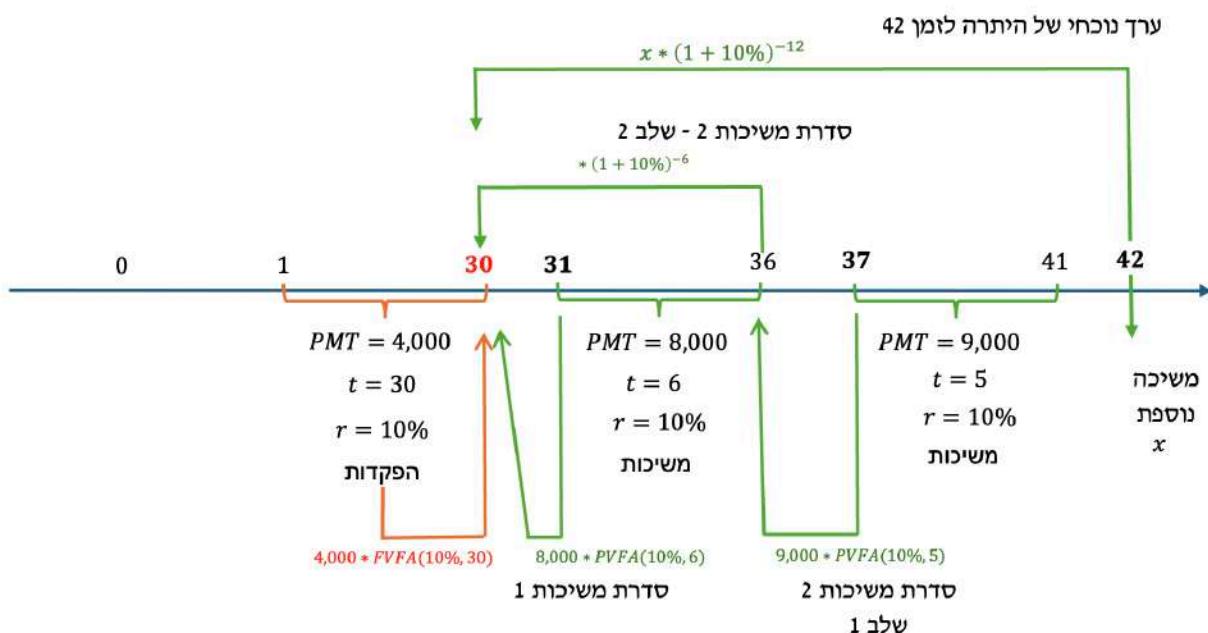
פתרונות :

גם שאלה זו דומה עקרונית לדומותיה, היתריה הלא ידועה היא בוגדר משיכת חד פעמית בודדת בזמן 42 שגמאותה צריך לאמת למועד ההפקדה האחרון, כלהלן.

תיכילה, לצורך אפיון הציג, אנו יודעים שמקדים כל שנה 30 שנה. כמובן, סדרת ההפקדות היא בזמן 1-30. לגבי סדרת המשיכות, יש לחלק ל-2 תתי סדרות :

- סדרת משיכות 1 : 8,000 ש"ח כל שנה, במשך 6 שנים, 31-36.
- סדרת משיכות 2 : 9,000 ש"ח כל שנה, במשך 5 שנים, 37-41.

בנוסף, ישנה יתרה (שנתיתיחס אליה כאל משיכת נוספת בסכום לא ידוע x) בתום השנה ה-42.



$$FV(\text{Deposits}) = PV(\text{Withdrawals})$$

$$4,000 * FVFA(10\%, 30) = 8,000 * PVFA(10\%, 6) + 9,000 * PVFA(10\%, 5) * (1 + 10\%)^{-6} + x * (1 + 10\%)^{-12}$$

וכעת, רק נחשב את x :

$$4,000 * 164.494 = 8,000 * 4.355 + 9,000 * 3.791 * (1 + 10\%)^{-6} + x * (1 + 10\%)^{-12}$$

מכאן מדובר בפתרון משווהה בגעם אחד. משה קורסייס כבר חישב ומצא :

$$x \approx 1,895,221$$

ולכן המסקנה היא: הסכום הבודד המהווה את היתרה לתום השנה ה-42 הנו 1,895,221 ש"ח.

הסביר מפורט:

$$\text{הביתוי} = 4,000 * FVFA(10\%, 30)$$

מייצג את הערך העתידי של ההפקדות, כМОבן מוביל למועד ההפקדה الأخيرة לזמן 30. נרצה לבטא גם את כל המשיכות במונחי נקודת הזמן זהו - זמן 30.

$$\text{הביתוי} = 8,000 * PVFA(10\%, 6)$$

מייצג את הערך הנוכחי של סדרת המשיכות הראשונה, בזמן 31-36 בהתאם. ערכה הנוכחי של סדרה זו קופץ אוטומטית אחת לאחריה ביחס למועד המשיכת הראשונה, ככלומר לזמן 30 - שזו נקודת הזמן המשותפת של סיום ההפקדות, ולפיכך אין צורך בהתאם.

$$\text{הביתוי} = 9,000 * PVFA(10\%, 5) * (1 + 10\%)^6$$

מייצג את הערך הנוכחי של סדרת המשיכות השנייה, בזמן 37-41 בהתאם. ערכה הנוכחי של סדרה זו קופץ אוטומטית אחת לאחריה ביחס למועד תחילתה בזמן 37, קרי לזמן 36. ובכדי להתאים לזמן 30 כפלונו ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית של 6.

$$\text{הביתוי} = x * (1 + 10\%)^{-12}$$

מייצג את הערך הנוכחי של היתרה שצפוייה להתקיים בזמן 42 כסכום יחיד, ויש לתרום גם אותה לנקודת הזמן המשותפת זמן 30. הפעם, זו לא סדרה (סכום יחיד בעתיד) ולכן כל בהתאם לאחור היא על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית בחזקה שלילית המייצגת את מספר תקופות בהתאם מ-30 ל-42.

#### שאלה 46 - ערך הנוכחי עם השתנות ריבית תכופה

מהו הערך הנוכחי של 2,000 ש"ח שיתקבלו בתום כל חודש לצמיות (לנצח) אם ידוע שהריבית החודשית בכל חודש אי-זוגי היא 3% ואילו הריבית החודשית בכל חודש זוגי היא 4%?

פתרון:

ראשית, יש ליחס ריבית לחודשיים. הריבית זו היא קבועה (בכל חודשים שנאחז בהם, הריבית הכוללת בהם היא צירוף הריביות לעיל).

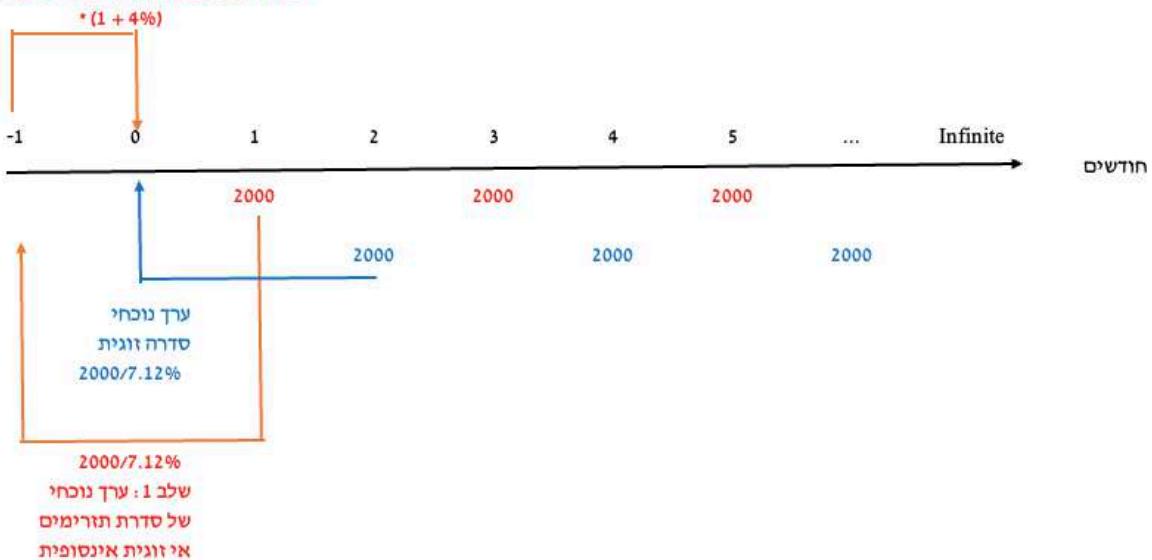
שנית, יש לחלק את סדרת התזרימיים כך שיגלמו ערכיהם ذو חודשים בהתאם.

כאשר מחשבים ערך הנוכחי לסדרה בזמן 2, 4, 6 וכן הלאה, החישוב פשוט. משום אוטומטית מתואימים לזמן 0, וסיימנו.

כאשר מחשבים ערך הנוכחי לסדרה בזמן 1, 3, 5 וכן הלאה, לצערנו הקפיצה האוטומטית תקופת תשלום אחת אחורה ביחס לתזרים הראשוני מובילת לזמן 1. לכן יש לתרום את התוצאה מזמן 1 לזמן 0, וזאת על ידי המכפלה בריבית שחלה מזמן 1 לזמן 0 שהיא הריבית בחודש ה-12 של השנה הקודמת (חודש זוגי) ולכן 4%.

בתרשים:

שלב 2: התאמת הסדרה האיזוגית לזמן 0



הערך הנוכחי של הסדרה ש כוללת 2,000 בתום כל חודשים בזמנים 2, 4, 6 וכו', לנצח (הכחולה), הנו:

$$PV_{Zugit} = \frac{2,000}{r_{\text{חודשיים}}}$$

על פי נתונים השאלה, בכל שני חודשים עוקבים, הריביות הן 3% לאחד מה חודשים, ו-4% לחודש נוסף. הריבית הכוללת לחודשיים אם כך, בהתייחס לעקרון "ריבית דריבית" :

$$r_{\text{חודשיים}} = (1 + 3\%) * (1 + 4\%) - 1 = 7.12\%$$

נזור לנוסחת ה- PV של הסדרה הזוגית:

$$PV_{Zugit} = \frac{2,000}{7.12\%} \approx 28,090$$

הוائل והסדרה הזוגית הכחולה חלה בזמן 2, והויאל ותדיירות איבריה כל חודשים, הרי שיחסוב הערך הנוכחי הסדרתי מוביל "חודשיים אחורה" (תקופת תשלום אחת אחורה) קרי לזמן 0, ואין צורך בהתאמת נוספת כדי לבטא הערך הנוכחי של הסדרה הכחולה.

ນמשיך בביטוי הערך הנוכחי של הסדרה ש כוללת 2,000 בתום כל חודשים, אך בזמנים אי זוגיים קרי, 1, 3, 5 וכו' (האדומה) :

$$PV_{E-Zugit} = \frac{2,000}{7.12\%} * (1 + 4\%) = 29,213$$

הסביר: גם כאן, ערך הנוכחי של סדרה שתדיירות איבריה כל חודשים, מוביל חודשים לפני התזרים הראשונים קרי חודשים לפני זמן 1, כלומר לזמן -1. כעת יש לתקן מ-1 ל-0. נשאלת השאלה: באיזו ריבית? אנו יודעים שהריבית לחודשיים אי זוגיים (מ-0 ל-1) היא 3%. זה אומר שהריבית לחודש הקודם" (מ-1 ל-0) היא ריבית לחודש זוגי, קרי 4%, ובמצעותה נבעת את ההתאמה מ-1 ל-0 כאמור.

$$TOTAL PV = 28,090 + 29,213 = 57,303$$

#### שאלה 47 - יישום בסיסי של מהותה של ריבית אפקטיבית

נטלתם הלוואה בסכום של 800,000 ש"ח. במועד העמדת הלוואה שילմת ערךית מסוימים בשיעור של 10% מסכום הלוואה. הלוואה תפער בחלו"ף שנה אחת (קרן וריבית צבורה) כאשר ידוע שהריבית האפקטיבית בגין הלוואה היא ריבית שנתית של 28%. בתנאים אלו, מהו סכום הריבית שתצטרכו לשלם בסוף השנה ביחס לקרן הלוואה המשפטית / הראשונית?

פתרון :

כאשר מדובר בהלוואות הנפרעות בתשלום אחד (בשונה מהלוואות בתשלומים), מומלץ לאייר ציר שעליו נציג את תזרימי המזומנים נטו במועד נטילת הלוואה ובמועד פירעונה.

רק לאחר ידיעת הערכים הללו וורכבים, ננסה לחלק את הנדרש.

שלב 1 : נציג על הציר בזמן 0 את סכום הלוואה המשפטית, 800,000, בኒוקי עמלת ערךית מסוימים המהווה 10% מסכום זה - קרי 80,000. כך מקבלים תזרים נטו בזמן 0 של 720,000 ש"ח

שלב 2 : הויאל ונתון שהריבית האפקטיבית (הכוללת / הכלכלי) שתמיד מחושבת ביחס לקרן נטו הראשונית היא 28%, הרי שהמשמעות היא שבתום התקופה מחזירים 28% יותר מהזרים נטו בזמן 0. או, במשוואה :

$$720,000 = 921,600 = (1 + 28\%) * (1 + 28\%)$$

שלב 3 : התייחסות לנדרש. הנדרש בקוש ממוני לתאר מהו סכום הריבית שאני משלם בתום התקופה מעל קרן הלוואה המשפטית הראשונית (מעל 800,000). במלים אחרות, נדרש לחשב את ההפרש שיהווה את התשובה

$$\text{הסופית : } 921,600 - 800,000 = 121,600$$

נטילת הלוואה	פירעון הלוואה	פרעון קרן ריבית משפטית תשלום כולל
0	1	
קרן הלוואה משפטית תשלום עמלת ערךית מסוימים	800,000 -80,000	800,000 3 121,600
תזרים נטו לידי הלוואה - קרן הלוואה כלכלית	720,000 1	2 921,600

### שאלה 47.1 – ריבית המגולמת בהסדר תשלום

מור יכול לבחור בין שתי חלופות הטבה כספיות:

חלופה 1 : קיבל 377.82 ש"ח בזמן.

חלופה 2 : קיבל הלוואה בסך 2,000 ש"ח שתסולק ב-10 תשלום חודשיים שווים בסך 200 ש"ח כל אחד (לא כולל תוספות כלשהן).

נדרש: בהנחה שקיים אדישות בין האלטרנטיבות, מהו שיעור הריבית השנתי שאליו אתם כפופים?

פתרון:

ראשית, ברמת הרצינול: לעולם לא משווים בין חלופה מזמן לסכום פשוט של תזרימיים (כלומר, טענה האומרת "behloah ani mizor vezman la... lken hazman udiz" היא משוללת כל בסיס). ההשוויה קרינה להתבצע כאשר הערכים מתואימים לאותה נקודת זמן ובהתאם, מגלמים את השפעות הריבית.

אם קיימת אדישות בין האלטרנטיבות – זה אומר שבהתחשב בריבית, הערך שלחן לאותה נקודת זמן זהה. והואיל וחלופה המזמן היא "מידית" כלומר במנחי ערך נוכחי, הדרך הנוחה ביותר להשוות היא לייצר ביטוי שיגלם גם את הערך הנוכחי המכפפי של תזרימי חלופה 2 להיום, זמן 0.

$$PV(Cash) = PV(Loan)$$

$$377.82 = 2,000 - 200 * PVFA(r, 10) \rightarrow PVFA(r, 10) = 8.111 \rightarrow r = 4\%$$

הואיל והתשלומים בהסדר הסילוק בהלוואה הם חודשיים – גם הריבית שהילצתי היא חודשית. כביררת מחדל המרת ריבית מחלצת מתקופה לתקופה (למשל מחודש לשנה) מבוצעת באמצעות מערך חזקה מתאים:

$$r_{year} = (1 + r_{month})^{12} - 1 = (1 + 4\%)^{12} - 1 = 60.1\%$$

זו התשובה הסופית: הריבית השנתית שmobilia לאדישות היא 60.1%.

### מפגש 3 – השלמות ריבית קלות וחישובי ריבית ופרויקטים

מבנה השיעור:

- א. חישובי ריבית אפקטיבית – הריבית הכלולה המגולמת בעסקה, הנו על בסיס נתוני ריבית אחוזים והן על בסיס עסקה בתשלומיים (השלמות י'ח' 5).
- ב. דיוון בצדאות פרויקטים (י'ח' 6).
- ג. דיוון בקייזוב הון (י'ח' 7).

אחרי המפגש ונזורתו ללימוד עצמי ותדריכים, ניתן להשלים את מטלה 11.

- שאלה 41.2 – חישוב ריבית אפקטיבית במסלולים שונים, על בסיס ריבית דרייבית, ריבית מראש ובחירה בין חלופות – כאשר הערכים יחסיטים בלבד (לא סכומים כספיים, רק אחוזים) – **לכיתה** מר נקנק שוקל להשיקע בתוכנית חסכוו לשנה אחת. מוצעים לו מסלולי ההשקעה הבאים:
- מסלול 1 : ריבית נקובה שנתית בשיעור 18% המוחשבת כל חצי שנה.
- מסלול 2 : ריבית בשיעור 4.258% לרבעון.
- מסלול 3 : ריבית של 16% המשולמת בתחילת השנה.
- מהו המסלול המועד על ידי הלקוח?
- א. מסלול 1
- ב. מסלול 2
- ג. מסלול 3
- ד. קיימת אדישות בין המסלולים
- ה. לא ניתן לקבוע העדפה בין המסלולים – חסרים נתונים

פתרון:

הweeneyון הוא לבחור בבחירה המניבת את שיעור הריבית הגבוהה ביותר למשקיע – וכשאנו אומרים ריבית – אנו מתכוונים לריבית אפקטיבית.

בתוור התחלה, עליינו לזכור – ריבית אפקטיבית היא למעשה הריבית הכלולה בעסקה ; כזו שמתהשבת בעליות נספנות שנוצרות – בעיקר בעקבות מגנון "ריבית דרייבית", ניכויים מראש (ריבית מראש) ועמלות. ההסביר המלא והמפורט באופן הדרמטי מופיע ברכפים. אנו נתמקד בישום עקרוני כדי לפנות זמן לסוגיות מורכבות ובעורות.

אז... התשובה הסופית היא ג. להלן פירוט.

הمرة של ריבית נקובה שנתית שיש לגביה נתונים בדבר תדירות חישובה (מוחשבת כל...) לריבית אפקטיבית (ריבית כוללת, שמתהשבת בריבית דרייבית):

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $e$  הוא הריבית האפקטיבית לתקופה הנדרשת

הערך  $R$  מציג את הריבית הנקובה

הערך  $n$  הוא התשובה לשאלת : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנקובה"

הערך  $m$  הוא התשובה לשאלת : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת"

**מסלול 1: ריבית נקובה שנתית בשיעור 18% המחשבת כל חצי שנה.**

$$r_e(\text{annual}) = \left(1 + \frac{18\%}{2}\right)^2 - 1 = 18.81\%$$

מה עשינו כאן?

במונח יש לנו 18%, כי זו הריבית הנקובה. תמיד נשאל את עצמנו - כמה תקופות חישוב נכנסות בתקופת הריבית הנקובה? כאן, הריבית הנקובה שנתית כנtru, ותקופת חישוב הריבית היא חצי שנה. חצי שנה "נכנת" פעמיים בשנה (תקופת הריבית הנקובה) לכן חילקו ב-2.

לABI המעריך בחזקה: זהה התשובה ל问我 כמה תקופות חישוב (כאן - כמה חצאי שנים) נכנסים בתקופה עלייה שאלות בשאלת. בשאלת זו שאלות על הריבית האפקטיבית השנתית, ולכן חזקה הוא התשובה לשאלת: כמה חצאי שנים נכנסים בשנה - התשובה 2.

לשם ההמחשה: אם בשאלת זהה היו דורותים ריבית אפקטיבית לשנתיים, עדין היינו מחלקים ב-2, אבל המעריך היה 4 (כי במצב כזה היה 4 חצאי שנים בתקופה הנדרשת - שנתיים).

**מסלול 2: ריבית בשיעור 4.258% לארבעה.**

אם קיימים נתונים ריבית ללא אזכור של המונחים : "ריבית נקובה" / "מחושבת כל'" / "ריבית פשוטה" אלא פשוט ריבית, תקופה ושיעור - אז מדובר בריבית אפקטיבית, שנוצרה ובהתאם אופן UIBODA באמצאות חזקה בלבד.

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $e$  הוא הריבית האפקטיבית לתקופה הנדרשת

הערך  $m$  לתקופה שנתונה בשאלת

הערך  $r$  הוא התשובה לשאלת : "כמה תקופות ריבית נתונה נכנסות בתקופה הנדרשת"

במצבה :

$$r_e = (1 + 4.258\%)^4 - 1 = 18.151\%$$

### מסלול 3: ריבית של 16% המשולמת בתחילת השנה

כאשר מזהים ריבית המשולמת בתחילת השנה, הרי שהמשמעות היא שהיא מנוכה מקרן ההשקעה / ההלוואה ולא מתווספת עם סיומה.

$$r_e = \frac{1}{1 - r_d} - 1$$

כאשר :

הערך  $r_d$  הוא הריבית האפקטיבית

הערך  $r_e$  הוא הריבית מראש המוחשבת פעמיים אחת (לגי ריבית מראש המוחשבת מספר פעמיים - אתם, בית...)

הרצינול: שכשאני מפקיד ומקבל ריבית מראש, אז אני למעשה מקבל 100% מקרן חזרה בתום התקופה (ה-1 שבעונה) אבל בזמן 0 אני מפקיד נטו פחות (לכון, 1 בניכוי ריבית מראש במכנה). היחס בין הערכיהם הללו משקף את הפרופורציה בין התקובל להשקעה נטו : ריבית.

$$r_e = \frac{1}{1 - 16\%} - 1 \approx 19.04\%$$

נרכז את הממצאים :

מסלול 1 - ריבית אפקטיבית שנתית: 18.81%

מסלול 2 - ריבית אפקטיבית שנתית: 18.151%

מסלול 3 - ריבית אפקטיבית שנתית: 19.04%

הויאל ומדובר בעסקת השקעה, תועדף הבחירה הנושאת את הריבית האפקטיבית הגבוהה ביותר. כאן - תועדף הבחירה במסלול 3.

אילו היה מדובר בעסקת הלוואה, הרי שהבחירה הנושאת את הריבית האפקטיבית הנמוכה ביותר (מסלול 2).

#### 41.4.2 – **חילוץ ריבית מהסדר תשלוםים עם עמלות – לכיתה, פתרו מ-0**

הלוואה בסך 100,000 ש"ח נפרעת בתשלומים סוף חודשים שווים במשך 3 שנים (כלומר, לפי לוח שפיצר). ההלוואה נושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 24%. פרט לריבית הנקובה, הבנק גובה במועד העסקה עמלת "עריכת מסמכים ושכר כלשהו" בסך 13,730 ש"ח. כמו כן, בהתאם לתנאי ההסדר, יש להוסיף לכל תשלום תקופתי "דמי גבייה" בסכום של 30 ש"ח. בנסיבות אלו, מהי הריבית השנתית האפקטיבית המגולמת בהלוואה?

**פתרון :**

איך בכלל אני ניגש לשאלה זו? שימו לב להבדל המובהק בין שאלה זו לקודמתה. העסקה הקודמת ויארה מצב שבו מפקדים סכום אחד, הריבית מחושבת בצורה מסויימת, כשתיוניס רק ערכי ריבית באחזois, ומעוניינים לחשב את הריבית האפקטיבית האחזוית הגבוהה ביותר בהתאם למסלול. כאן, העסקה שונה לגמרי. העסקה כוללת כולם קבועים והלוואה חזרה להלוואה הבסיסי הנקבע על ידי הבנק, הן את הניכוי מראש, והן את עמלות הגבייה שם הן פועלות חלק מסדרה. תמיד ולעולם **ריבית המגולמת מהסדר תשלוםים מורכב** (בשונה מעסקה פשוטה, הפקדה עם פירעון בתום התקופה, או הלוואה בלון הנפרעת בתום התקופה) – לא תחשיב ישירות על בסיס הנוסחאות הסטנדרטיות להמרת ריבית, אלא תתבסס על הלוגיקה שלפיה:

**סכום הלוואה נטו = ערך נוכחי של סך ההחזois, כולל כל העליות הנלוות**

ואם אצליח לבנות ביטוי כזה שהנעלם היחיד הכלול בו הוא שיעור הריבית – הרי שזו תהיה הריבית האפקטיבית.

תהליך העבודה שלנו יכלול את השלבים הבאים:

- א. נחשב את הריבית "האפקטיבית" (לא עליות נלוות) לתקופת תשלום בהלוואה, כדי לחלץ את התשלומים התקופתי.
- ב. לתשלום התקופתי שמתבסס על הריבית התקופתית ללא עליות נלוות – נוסיף את דמי הגבייה.
- ג. מוקן הלוואה נוכה את עמלת עריכת המסמכים (הנכוי מראש).
- ד. נגיא למצב שבו אחד סכום הלוואה נטו בידי (סעיף ג), ומצד שני, סדרת התשלומים התקופתיים לרבות עליות נלוות – אצלי (סעיף ב).

שלב א: בהתעלם מעמלות וניכויים, השאלה דנה בריבית נקובה שנתית בשיעור 24%.

כמו כן, אני יודע שהתשלומים בהלוואה הם חודשיים. בכלל, בהתעלם מעמלות, אני צריך לחשב את החזר הלוואה על בסיס מספר התשלומים החודשיים והריבית האפקטיבית החודשית.

הוائل והריבית הנתונה נקובה ואיינה ריבית מראש, עקרון תהליך ההמרה לריבית אפקטיבית מותבוס על הנוסחה זו :

$$r_e(\text{month}) = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

$$r_e(\text{month}) = \left(1 + \frac{24\%}{n}\right)^m - 1$$

שאלת השאלה – אם לא אמרו כל כמה זמן הריבית הנקובה מחושבת, איך נמשיך? **ברירת מחדל: אם הלוואה בתשלומים חודשיים כוללת ריבית נקובה שנתית, תדיירות חישובה זהה לתדיירות התשלומים.** ולכן שלא אמרו זאת מפורשת – **תשלומים חודשיים = ריבית מחושבת כל חודש, لكن נחלק את הריבית הנקובה השנתית ב-12.**

$$r_e(\text{month}) = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^m - 1$$

מה לגבי מעריך החזקה?

מעיריך החזקה נועד להמיר אותו מתקופת חישוב (חודש) לתקופה הנדרשת. התקופה הנדרשת פה היא חודש גם. ומדוע? משום שהמטרה שלוי היא לבדוק ריבית אפקטיבית לתקופת חישוב על מנת לחלץ תשלום חודשי. לא כולל **עמלות**:

$$r_e(\text{month}) = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^1 - 1 = 2\%$$

תקציר: אם נתונה ריבית נקובה שנתיית, בעסקה שכדי להתייחס אליה אנו זוקקים לריבית לפרק זמן בין תשלומים, כבירות מחדל, נחלק את הריבית הנקובה השנתית והחוצאה אליה נגיעה – היא נcona גם במונחים אפקטיבים. אפשר גם לומר: **ריבית נקובה לתקופת חישוב אחת = ריבית אפקטיבית לתקופת חישוב אחת, כי בתקופה אחת אין ריבית דרייבית.**

כעת, נפעל לחלץ את סכום התשלום התקופתי הקבוע בהתעלם מעמלות, על בסיס השוואה בין סכום הלוואה (לא עמלות) לביטוי המיצג את הערך הנוכחי של ההוצאות (לא עמלות):

$$100,000 = x * PVFA(2\%, 36) \rightarrow x = \frac{100,000}{25.489} \rightarrow x = 3,923.26$$

שלב ב – חישוב התשלום התקופתי הקבוע, כולל **עמלת חודשית**:

תשלום חודשי בהתעלם מעמלות (חישוב לעיל):

3,923.26

הוסף – **עמלת גבייה חודשית – נתון:**

30

$3,923.26 + 30 = 3,953.26$

**סך התשלום החודשי הקבוע כולל עמלות:**

שלב ג : חישוב סכום ההלוואה נטו לידי המשקיע, לפי הסכום ברוטו, בNICCOI עמלה :

עמלת "יריכת מסמכים ושכר כלשהו" בסך 13,730 ש"ח.

$$\begin{array}{rcl}
 & 100,000 & \text{סכום ההלוואה ברוטו} \\
 & \underline{(13,730)} & \text{בNICCOI עמלה} \\
 100,000 - 13,730 & = & 86,270 \quad \text{סכום ההלוואה נטו}
 \end{array}$$

שלב ד : כל מה שעשית בתחילת האורך והפרק הזה היה להגיע לתוצאות נטו הנובעים מהעסקה כולל כל ההשפעות הנלוות. למעשה, הגיענו למסקנה שהמבנה התזרימי של העסקה הוא כדלקמן (ערך הזמן בשורה הראשונה הם בחודשים) :

0	1	2	3	4	...	35	36
86,270	-3,953.26	-3,953.26	-3,953.26	-3,953.26	-3,953.26	-3,953.26	-3,953.26

כעת, ניתן לגשת לפתרון :

סכום ההלוואה נטו = הערך הנוכחי של ההוצאות הכלוליות

$$86,270 = 3,953.26 * PVFA(r, 36)$$

$$PVFA(r, 36) = \frac{86,270}{3,953.26} \rightarrow PVFA(r, 36) = 21.82$$

נלק ללוח א-4 בנספח א לכרך ד (לוח מענ"ס / PVFA), בשורה של 36 תשלומים – אנסה לבדוק בעמודות השונות מתי מקבלים את הערך הקרוב ביותר ל-21.82. ברגע שאזזה ערך קרוב, אביט לעלה לחלץ את הריבית.

$$r = 3\%$$

<i>t</i>	<i>r</i>	1%	2%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	9%	10%
26		22.795	20.121	17.877	15.983	14.375	13.003	11.826	10.810	9.929	9.161
27		23.560	20.707	18.327	16.330	14.643	13.211	11.987	10.935	10.027	9.237
28		24.316	21.281	18.764	16.663	14.898	13.406	12.137	11.051	10.116	9.307
29		25.066	21.844	19.188	16.984	15.141	13.591	12.278	11.158	10.198	9.370
30		25.808	22.396	19.600	17.292	15.372	13.765	12.409	11.258	10.274	9.427
31		26.542	22.938	20.000	17.588	15.593	13.929	12.532	11.350	10.343	9.479
32		27.270	23.468	20.389	17.874	15.803	14.084	12.647	11.435	10.406	9.526
33		27.990	23.989	20.766	18.148	16.003	14.230	12.754	11.514	10.464	9.569
34		28.703	24.499	21.132	18.411	16.193	14.368	12.854	11.587	10.518	9.609
35		29.409	24.999	21.487	18.665	16.374	14.498	12.948	11.655	10.567	9.644
36		30.108	25.489	21.832	18.906	16.547	14.821	13.035	11.717	10.612	9.677
37		30.800	25.969	22.167	19.143	16.711	14.737	13.117	11.775	10.653	9.706
38		31.485	26.441	22.472	19.368	16.868	14.846	13.193	11.829	10.691	9.733
39		32.163	26.903	22.808	19.584	17.017	14.949	13.265	11.879	10.726	9.757
40		32.835	27.355	23.115	19.793	17.159	15.046	13.332	11.925	10.757	9.779

מה שקיבלו כאן זה את הריבית האפקטיבית המתייחסת לכל תזרימי העסקה באופן מלא; הריבתת תזרימיים לעיל כלנו גם את דמי הגבייה, את הניכוי מראש, הכל. לכן זהה ריבית אפקטיבית כוללת המגלמת את מכלול ההשפעות של עלויות העסקה. זו ההגדרה של ריבית אפקטיבית.

כמובן, הואיל והריבית חולצתה ממשוואה עם ערכיהם תזרימיים חדשניים, תקופת הריבית שהilihצנו היא חדש אחד. אם השאלה דורשת ריבית אפקטיבית שנתית (המקרה הנפוץ) علينا להתאים את הריבית זו בנוסחת הריבית האפקטיבית (מערך חזקה בלבד) מחדש לשנה:

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 3\%)^{12} - 1 \approx 42.5\%$$

וזו התשובה הסופית: הריבית האפקטיבית השנתית היא 42.5%.

**שאלה 41.3 - חישוב ריבית אפקטיבית על בסיס ריבית דרייבית ובחירה בין חלופות, כולל ריבית משתנה**

מר נקניכון שוקל ליטול הלואה. מוצעות בפניו החלופות הבאות:

חלופה 1: הלואה בריבית נקבה שנתית בשיעור 16%, מחושבת כל חודשים.

חלופה 2: הלואה בריבית נקבה שנתית בשיעור 18%, מחושבת כל רבעון.

חלופה 3: הלואה בריבית 1% לחודש בחודש זוגי, ו-2% לחודש בחודש אי זוגי.

מהו המסלול העדיף?

א. מסלול 1

ב. מסלול 2

ג. מסלול 3

ד. קיימת אדישות בין המסלולים

ה. לא ניתן לקבוע העדפה בין המסלולים - חסרים נתונים

**פתרון:**

התשובה הנכונה היא **א.** להלן פירוט מלא, המתמקד בחולפה 3.

ככל, השאלה דנה בבחירה בין חלופות הלואה. כשבוסקים בהלוואות, תועדף החלופה שנושאת את הריבית האפקטיבית הנמוכה ביותר.

חלופות 1 ו-2 עוסקות בריבית נקבה המוחשבת כריבית דרייבית ("ריבית נקבה... המוחשבת כל...") אבל מעבר לנוסחה הבסיסית שניים, יש כאן קטע: התקופה לא נתונה! לא אמרו לכמה זמן הלוואה. יחד עם זאת - זה לא באמת מלחץ... כי החלופה שבה הריבית האפקטיבית השנתית היא הנמוכה ביותר - תועדף ללא תלות באורך.

**בשפה פשוטה:** אם לא נתונה תקופת העסקה, זה לגמרי בסזר להניח שהעסקה לשנה / החלטה מתבססת על ריבית אפקטיבית שנתית.

חלופה 1: הלואה בריבית נקבה שנתית בשיעור 16%, מחושבת כל חודשים.

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 \rightarrow \left(1 + \frac{16\%}{6}\right)^6 - 1 \approx 17.11\%$$

חלופה 2: הלואה בריבית נקבה שנתית בשיעור 18%, מחושבת כל רבעון.

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 \rightarrow \left(1 + \frac{18\%}{4}\right)^4 - 1 \approx 19.25\%$$

חלופה 3: הלואה בריבית 1% לחודש בחודש זוגי, ו-2% לחודש בחודש אי זוגי.

$$r_e = (1 + 2\%)^6 * (1 + 1\%)^6 - 1 \approx 19.544\%$$

למעשה: אם ידועות ריביות שונות לתקופות שונות, אפשר לחשב את הריבית הכוללת המשוקלلت על בסיס כפלי בינייהן, מאי דומה לערך עתידי של סכום יחיד בሪביה משותנה, בשינוי יחיד - מפחיתים "1" בסוף, כדי להשאר עם הריבית בלבד (לא הקרן).

מידול מסויים של חישוב ריבית אפקטיבית כוללת כאשר הריבית משתנה:

$$r_e = (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots - 1$$

כאשר:

הערך  $r_1$  הוא הריבית האפקטיבית לתקופה הנדרשת

הערכים  $\dots r_2, r_1$  אלו הריביות השונות

הערכים  $\dots t_1, t_2$  אלו מספר תקופות התקופות של כל ריבית

ריכוז הממצאים:

ריבית אפקטיבית - חלופה 1:	17.11%
ריבית אפקטיבית - חלופה 2:	19.25%
ריבית אפקטיבית - חלופה 3:	19.544%

#### שאלה 41.4 - חישוב ריבית אפקטיבית כולל ריבית מראש וריבית דרייבית

מהי הריבית האפקטיבית השנתית בהלוואה לשנה הנושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 16% המוחשבת כל רביעון אם בנוסף ידוע כי הבנק גובה عمלה ערך מסוים במועד הקמת ההלוואה בשיעור של 5% מסכומה?

פתרון:

אני מזהה כאן שני היבטים: האחד - ריבית נקובה "המוחשבת כל רביעון" - ריבית דרייבית, הנוסחה עם  $R$ . מעבר לכך, יש כאן גם ריבית מראש - ש策ריכה להשפיע דרך המכנה. ההתייחסות שליה בשלבים. בשלב ראשון, מתעלם מהריבית מראש. בשלב שני, נשלב אותה דרך המכנה.

שיםו לב: בהינתן שהעמלת מראש מנוכה / מוחשבת פעם אחת ויחידה במועד נטילת ההלוואה, אין צורך בהתאמות מיוחדות במכנה, פשוט נפחית מה-1 במכנה את שיעור העמלת. לשומת לבכם שאם היו נתונים על מצב שבו הריבית מראש מוחשבת מספר פעמים וכיוצא בזיה, החישוב היה מותחכם יותר, ונדרשת הייתה חזקה גם במכנה (ראו תרגילים בהמשך).

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{1 - r_d} - 1$$

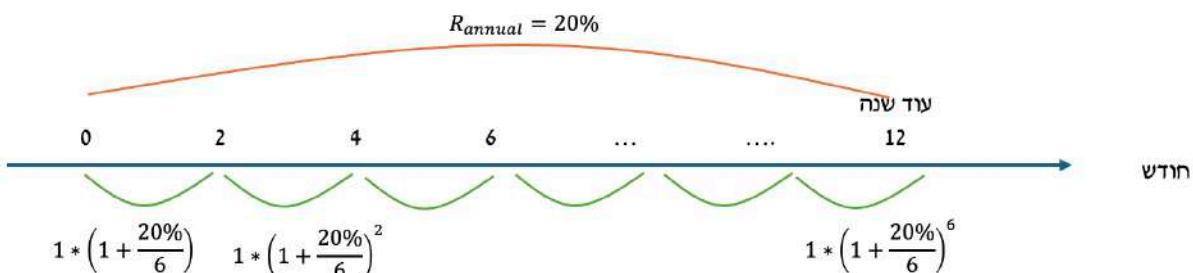
$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{16\%}{4}\right)^4}{1 - 5\%} - 1 \approx 23.143\%$$

**שאלה 41.5 – חישוב ריבית אפקטיבית במצב של ריבית דרייבית ובמצב ריבית מרأس**  
 חורטיצחה מעוניינית ליטול הלואה. הוצע לה לבחור באחד מבין שלושה מסלולים:  
**מסלול א:** תשלום ריבית נקובה בשיעור של 20% לשנה המוחשבת כל חודשים.  
**מסלול ב:** תשלום ריבית נקובה בשיעור של 18% לשנה המוחשבת כל חודשים.  
**מסלול ג:** עמלת הקצאת אשראי בשיעור 3% לרבעון לצד ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה המוחשבת כל חודשים.  
**מהו המסלול שיעדך על ידי חורטיצחה?**

**רקע:**  
 כאשר אנו רוצחים לבדוק כדיות הלואות / השקעות על בסיס הריבית בהן, הריבית שאותה נחשב כריכה להיות ריבית "אמיתית" / "כוללת". זהה בעצם הריבית האפקטיבית.  
**ריבית אפקטיבית תביא בחשבון:**  
 א. ריבית בחוזה (נקובה).  
 ב. תדריות חישוב הריבית והאפקט של "ריבית דרייבית".  
 ג. ניכויים מרأس וعملות.

**פתרון:**  
 בהיעדר נתונים סותרים, אנו נחשב את הריבית האפקטיבית **השנתית** בכל חלופה. הויאל ומדובר בהלוואות, הchlופה שתדרוש את הריבית האפקטיבית השנתית הנמוכה ביותר ותועדף.

**מסלול א:** תשלום ריבית נקובה בשיעור של 20% לשנה המוחשבת כל חודשים  
 נציג חד פעמי את המשמעות של "ריבית שנתית המוחשבת כל חודשים". המשמעות היא שככל חודשים מבוצעת "עצמה" ומוסיפים את הריבית היחסית לקרן, בשיטת ריבית דרייבית. בתום התהילה, מנכים את הקרן עצמה, ונשארים עם הריבית האפקטיבית:



$$r_e = \left(1 + \frac{20\%}{6}\right)^6 - 1 = 21.74\%$$

ברמת המידול :

כאשר **הרכיבת הנזונה נקובה והוא מוחשבת כל \_\_\_\_\_ זמן** (כל חודשים, כל חודשים, כל שנה, כל רביעון), אז הנוסחה להמרת הריבית לאפקטיבית :

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{20\%}{6}\right)^6 - 1 = 21.74\%$$

מקרה – חשב מאי לשים לב לכל הגדלה והגדלה :

20%	ריבית נקובה נזונה	R
הואיל ותקופת החישוב כאן חודשים – והרכיבת הנזונה שנתיית, ה-ט הוא התשובה לשאלה: "כמה פעמים חודשים נכללים בשנה". התשובה 6.	כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנזונה	n
הואיל ותקופת חישוב הריבית היא חודשים, ואני רוצה להגיא לריבית אפקטיבית לשנה, ה-ט הוא 6.	כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופת הריבית האפקטיבית שאני מחשש	m

**מסלול ב : תשלום ריבית נקובה בשיעור של 18% לשנה המוחשבת כל חודש**

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{18\%}{12}\right)^{12} - 1 = 19.56\%$$

**מסלול ג : עמלת הקצת אשראי בשיעור 3% לרבעון לצד ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה המוחשבת כל חודשים**

בגدول : בעוד שרכיבת דרייבית (ריבית נקובה המוחשבת כל מסליקת בתום התקופה, ומתווספת לקרן ההלוואה הראשונית, עמלות וניכויים מבוצעים מראש, והם מקטינים את קרן ההלוואה הכלכלית הראשונית).

אם אני מזיהה מצב שבו קיימת ריבית נקובה המוחשבת כל \_\_\_\_\_ ובנוסף עמלת הקצת אשראי או ריבית מראש או ניכוי מראש בשיעור \_\_\_\_\_ לתקופה, אז הריבית ה"רגילה" תופיע במונה, והניכוי מראש במכנה,

כך :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{(1 - d)^{m_d}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{6}\right)^6}{(1 - 3\%)^4} - 1 = 24.73\%$$

כאשר :

10% לשנה	ריבית נקובה נזונה	R
כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנזונה (לא מראש) – להלן : חודשים, נכללות בתקופת הריבית הנזונה – להלן : שנה. התשובה : 6	כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנזונה	n

כמה תקופות חישוב ריבית נכללות לא מראש, נכללות בתקופה הנדרשת – CAN : שנה. התשובה : 6.	כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופת הריבית האפקטיבית שאני מփש	$m$
CAN : מדובר בעמלת שהיא רבונית בשיעור 3% (אילו היה נתון שהאי עמלת שנתית בחישוב רבוני, היתרי חלק ב-4%).	שיעור הניכוי מראש לתקופה	$d$
העמלת מראש היא רבונית, התקופה הנדרשת היא שנה, لكن 4.	מספר תקופות הניכוי מראש / מספר תקופות העמלת בתקופה הנדרשת	$m_d$

רכיב הממצאים – ערכי הריבית בכל חלופה, ובחירה בחלופה הנושאת את הריבית האפקטיבית השנתית הנמוכה ביותר :

מסלול א : 21.74%

מסלול ב : 19.56%

מסלול ג : 24.73%

המסלול שיעד הוא מסלול ב.

#### 41.6 – ריבית אפקטיבית, חישובים נוספים

דיאנה יdagdagicshirnok (לא טעות, זה השם שלה) מעוניינת להפקיד לפקדון לתקופה של 3 שנים סכום של 100,000 ש"ח.

להלן האפשרויות העומדות בפניה:

אפשרות א: הפקדה בריבית שנתית נקובה בשיעור 10%, המחשבת כל 4 חודשים.

אפשרות ב: הפקדה בריבית חצי שנתית נקובה בשיעור 8% המחשבת כל חודשים בחצי השנה הראשונה, וריבית חצי שנתית נקובה בשיעור 10% המחשבת כל חודש בחצי השנה העוקבת. ריבית "מתחלפת" זו תחול לכל אורך חיי הפקדה (כלומר גם במחצית הראשונה של השנה השנייה הריבית 8% ובמחצית השנייה של השנה השנייה הריבית 10% וכן הלאה...).

אפשרות ג: הפקדה בריבית רבונית נקובה בשיעור 3% המחשבת כל חודש במהלך 9 החודשים הראשוניים, וריבית נקובה רבונית בשיעור 4% המחשבת כל רביעון – 3 החודשים האחרונים של כל שנה. ריבית מתחלפת זו תחול לכל אורך חיי הפקדה, ובנוסף, יתקבל מענק בשיעור שנתי של 5% בחישוב חצי שנתי המשולם בתחילת כל חצי שנה מראש.

נדרש: מהי הריבית האפקטיבית השנתית בכל חלופה?

אפשרות א:

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{10\%}{3}\right)^3 - 1 = 10.33\%$$

אפשרות ב:

$$r_e = \left(1 + \frac{8\%}{3}\right)^3 * \left(1 + \frac{10\%}{6}\right)^6 - 1 = 19.5\%$$

אפשרות ג:

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{3\%}{3}\right)^9 * \left(1 + \frac{4\%}{1}\right)^1}{\left(1 - \frac{5\%}{2}\right)^2} - 1 = 10.5\%$$

#### שאלה 48 - יישום מורכב של ריבית אפקטיבית

באפשרותכם להפקיד בפיקודו בנקאי לשנתיים באחד מבין המסלולים הבאים:

- א. ריבית سنوية נקובה בשיעור 12% מחושבת כל חודש.
- ב. ריבית سنوية נקובה בשיעור 14% מחושבת כל חצי שנה.
- ג. ריבית אפקטיבית سنوية בשיעור 13%.
- ד. ריבית سنوية נקובה בשיעור 10% מחושבת כל חצי שנה ובנוסף ריבית נקובה המנוכה מראש בשיעור سنתי של 4% המוחשבת 4 פעמים בשנה.

נדרש: מהי הריבית האפקטיבית לשנתיים בכל אחד מהמסלולים?

פתרון:

**פתרון סעיף א: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הריבית السنوية 12% והיא מחושבת כל חודש**

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{12\%}{12}\right)^{24} - 1 \approx 26.973\%$$

או בעצם, כאשר מוזהים ריבית נקובה שנתיים ש"מוחשבת כל זמן" המריה לריבית אפקטיבית המגלמת את העיקרונו של ריבית דרייבית תבוצע לפי הנוסחה:

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

כאשר:

הערך  $r_{ef}$  מייצג את הריבית האפקטיבית

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקובה

הערך  $n$  הוא התשובה לשאלה: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנקובה הנתונה"

הערך  $m$  הוא התשובה לשאלה: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת".

**פתרון סעיף ב: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הנקובה السنوية 14% מחושבת כל חצי שנה**

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{14\%}{2}\right)^4 - 1 \approx 31.08\%$$

הסבר: תמיד מתחילים בחלוקת את הריבית הנקובה באופן שימיר אותה (את הריבית הנקובה, שכן היא לשנה) לתקופה חישוב אחת (שכאן, היא לחצי שנה). זאת, על ידי חלוקה ב-2 (משנה לחצי שנה). זה המכנה.

המערך הוא תשובה לשאלה אחרת לגמרי: כמה תקופות חישוב (כמה חצאי שנים) נכנסים בתקופה הנדרשת (שנתיים). בשנתיים יש 4 חצאי שנים, ולכן המערך 4.

סיכום ביןים: אז למעשה, שני המקרים בסעיפים א ו-ב, הריבית הנקובה היא סוג של ריבית "חויזית" המופיעה בהסדר, אבל היא לא באמת הריבית ה"אפקטיבית" / ה"כלכליות" שמשקפת את הסכום האמתי שנשלם. כדי לחשב את הסכום הכלל שנשלם, צריך להתחשב בהשפעות נוספות, ובפרט - בהשפעת הריבית

דריבית. הנוסחה שהצגנו לעיל (הمرة מנוקבה לאפקטיבית, במצב ריבית דריבית) יודעת לנו את ההשפעות הנוספות של ריבית דריבית, כדי להגיע לריבית השלמה, המלאה, הנכונה - ריבית אפקטיבית.

**פתרון סעיף ג: ריבית אפקטיבית לשנתיים כאשר הריבית האפקטיבית הנתונה היא 13% לשנה**  
כאשר הנתון בשאלת הוא בדבר ריבית אפקטיבית (ואגב, זו ברירת מחדל, אם לא אמרו שהריבית נוקבה / פשוטה), אז אין צורך לחלק או לכפול את הריבית, אלא רק למתאם את תקופת ה马克思 חזקה מתאים :

$$r_{ef} = (1 + r)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $r$  הוא הריבית האפקטיבית לתקופה הנדרשת (כאן - לשנתיים).

הערך  $m$  הוא הריבית האפקטיבית הנתונה (כאן - ריבית אפקטיבית שנתיות).

הערך  $m$  הוא התשובה לשאלת : כמה תקופות ריבית  $r$  נכללות בתקופה הנדרשת.

והתשובה :

$$r_{ef} = (1 + 13\%)^2 - 1 = 27.69\%$$

הערה :

כל המבואר לעיל הוא בהיבט הטכני של אופן חישוב הריבית כתלות בסוג ה- *sinking* (אם הריבית הנתונה היא נוקבה או אפקטיבית) ולפניהם התייחסות להחלטה המתבקשת.

**פתרון סעיף ד:**

**ריבית שנתית נוקבה בשיעור 10% מוחשבת כל חצי שנה ובנוסף ריבית נוקבה המנוקה מראש בשיעור שנתי של 4% המוחשבת 4 פעמים בשנה.**

$$r_{ef}(2 \text{ years}) = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^4}{\left(1 - \frac{4\%}{4}\right)^8} - 1 \approx 31.73\%$$

מידול לנוסחה - חישוב ריבית אפקטיבית (כוללת) עבור מקרה שבו ישנה ריבית נוקבה המוחשבת מספר פעמים (ריבית דריבית) וכן ריבית מראש :

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

כאשר :

הערך  $r_{ef}$  מייצג את הריבית האפקטיבית

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנוקבה

הערך  $z$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנකובה הנזונה"

הערך  $z$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת".

הערך  $R_d$  מייצג את שיעור הריבית המנוכה מראש

הערך  $a$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנකובה של ריבית מראש"

הערך  $m_d$  הוא התשובה לשאלה : "כמה תקופות חישוב ריבית מראש נכללות בתקופה הכוללת הנדרשת"

## נושא חדש - עולם חדש: יח' 6 - כדיות פרויקטים - מבוא בסיסי מאד

### שאלה 57 - מבוא לפרויקטים - **כיתה**

הסבר מהו פרויקט בהתאם להגדרות הקורס.

התשובה:

פרויקט הוא הגדרה ברורה של סכומי תזרימי מזומנים (חיוביים ושליליים) שניבעו עסקה שהחברה שוקלת לבצע. למשל, בהחלט יכול להיות ייצוג של פרויקט שנראה כך (באלפי ש"ח):

זמן	1	0	-100	תזרים
90	80	40		
3	2			

### שאלה 58 - סוגי הפרויקטים הקיימים

הסבירו מהם סוגי הפרויקטים האוטונומיים (כ舍մדברים על פרויקט בודד<sup>2</sup> - מאיזה סוג הוא יכול להיות).

התשובה:

פרויקטים **"קונבנציונליים"** של השקעה. שתזרימייו הראשון / הראשונים שליליים, ולאחר מכן, כל התזרמים חיוביים. למשל:

זמן	1	0	-100	תזרים
90	80	40		
3	2			

זמן	1	0	-100	תזרים
400	300	-200		
3	2			

פרויקטים **"קונבנציונליים"** של הלוואה (נטילת הלוואה). שתזרימייו הראשון / הראשונים חיוביים, ולאחר מכן, כל התזרמים שליליים. למשל:

זמן	1	0	100	תזרים
-70	-80	-40		
3	2			

זמן	1	0	60	תזרים
-50	-90	40		
3	2			

בשני סוגי הפרויקטים **הקונבנציונליים**, תזרים המזומנים משנה את סימנו (משילי לחובי או להפוך) **פעם אחת בלבד**, ופעם אחת בדיקוק.

<sup>2</sup> בהקשר זה - "פרויקט בודד" = פרויקט ספציפי, שבמושך נגבש כלים לבחינת כדיותו, בשונה מפרויקטים אחרים שבהם נדרש לדרג או לתעדף בחירה בין קבוצת פרויקטים.

**פרויקטים "לא קוגניציונליים" =** כל פרויקט שלא עונה להגדרות לעיל, בעצם : פרויקט שתזוריימי המזומנים שלו הופכים סימן יותר מפעם אחת (או שלא הופכים סימן כלל- מקרה פינתי שפחות מדברים עליו בקורס). ננתק כמה דוגמאות לפרויקטים לא קוגניציונליים :

4	3	2	1	0	זמן
4,900	-100	1,200	-800	-500	פרויקט ד
-100	700	900	700	-500	פרויקט ה
-1,700	10	-500	900	800	פרויקט ו
50	-1,900	-900	1,500	1,000	פרויקט ז

**שאלה 59 - הקשרים בין סוגי פרויקטים - כמשמעותם לנו "קבוצת" פרויקטים (זוג פרויקטים או יותר)**  
הסבירו מהם סוגי הקשרים הקיימים בין פרויקטים?

התשובה :

**א. פרויקטים "בלתי תלויים" [מאד נפוץ]** = שביצוע הפרויקט האחד או אי ביצועו לא משפיע על الآخر.  
למשל, שירן שוקלת לפתוח פרויקט פיצריה בעפולה, ופרויקט למכירת מכונות נקניק בתאילנד.

כאשר הפרויקטים הם בלתי תלויים, ניתן לבצע רק אחד מהם, את שניים או אף אחד - ללא שינוי בתנאים המספריים שלהם.

**ב. פרויקטים "משלימים" (פחות נפוץ)** = שביצוע הפרויקט האחד תורם או עוזר להכנסות מפרויקט אחר.  
למשל, שירן פתחה פיצריה בעפולה, והיא מוכרת פיצות בלבד.

היא שוקלת לבצע פרויקט "נוסף" ולהתחליל בשיל במסעדה גם פטסה.  
מאד יכול להיות שבקבות הפרויקט הנוסף קהיל היעד של שירן יגדל - מעכשו, יבואו לשם גם זוגות חובבי פטסה לאור נרות וגם ילדים צוחנים שרצו פיצה בלי זיתים.

**ג. פרויקטים "המודיאים זה את זה" [מאד נפוץ]** = שביצוע הפרויקט האחד מונע / מחשל את האפשרות לבצע את הפרויקט الآخر.  
למשל, לשירן יש דוכן אחד בשוק, ולפי נחי העירייה היא יכולה למכור בו או נקניקות או תחתונים.

היא לא יכולה למכור גם נקניקיה וגם תחתון, ולכן היא צריכה לבחור לבצע אחד מבין שני הפרויקטים בלבד.



לעיל: דוגמא למכונה לחימום נקייה מתוצרת Selmor. להשג בסופרפארם ובחניות האלקטרוניקה המובילות.

### הגדות קרייטריוניים לבחינת כדאיות השקעה בפרויקטים

- נושא הפרויקטים - ייחידה 6, עוסק במצבים שבהם תזרימי המזומנים המשולמים (ההשקעות) או מתוקלים (תקבולים והכנסות) בדבר פרויקט ידועים ומוגדרים.
- בהתבסס על הנתונים וכליים של ערך הנוכחי, מתבושים קרייטריוניים שימושיים לבחינת כדאיות ההשקעות ודרוגן במצבים שונים.
- הקרייטריונים (הכלים) שימושיים לקבלת החלטה ומענה לשאלת: "האם פרויקט הוא כדאי?" וכן לשאלת "UMBין כמה פרויקטים - מי מהם כדאי?" המ 4 במספר:

משמעות	שם מלא בעברית	שם מלא אנגלית	קיצור באנגלית	碼
שווי הפרויקט בש"ח	ערך הנוכחי נקי	Net Present Value	ענ"נ	NPV מרכזי
שיעור תשואה פנימי (%)	שיעור תשואה פנימי	Internal Rate of Return	שת"פ	IRR מרכזי
מדד הרווחיות	מדד רווחיות	Profitability Index	-----	PI
הכנסה נדרשת	החזר הון שנתי	Capital Return	-----	-----

**שאלה 59.1 – שימוש בסיסי של קרייטריונים – פרויקטים קונבנציונליים של השקעות – בית**  
בפני חברת "הנחר הנצחי" בע"מ עומדות אפשרות ההשקעה הבאות:

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

מחיר הון של החברה הוא 4% לשנה.

נדרש:

- באייזה סוג פרויקטים מדובר? נquo.
- חשבו את כל 4 הקרייטריונים לבחינת כדאיות ההשקעות. בהנחה שהפרויקטים בלתי תלויים, מי מהם כדאי לבצע?
- דרגו את הפרויקטים לפי הקרייטריונים NPV, IRR, PI, NPV בהנחה שניתן לביצוע אחד מהם בלבד (קרי: שהפרויקטים מוצאים זה את זה).
- הסבירו ממה נובע הערך בדרוג הפרויקטים השונים לפי הקרייטריונים השונים.

פתרונות:

**פתרונות סעיף א – באיזה סוג פרויקטים מדובר? נquo**

מדובר בפרויקטים קונבנציונליים (שכן הסימן המתמטי של תזרימייהם מתחף פעמי אחד בלבד, משלילי לחוביי במעבר מזמן 0 לזמן 1). תת הסוג של הפרויקט הקונבנציוני אכן הוא פרויקט קונבנציוני של השקעות (כי התזרים הראשונים שליליים והחוביים מתרחשים רק לאחר מכן).

#### פתרונות סעיף ב – חשבו את ערך כל אחד מ-4 הקריטריונים לבחינת כדאיות ההשקעות

נתחיל מקריטריון ה-**NPV** – Net Present Value – ערך נוכחי נקי (ענ"נ). קритריון זה מביא בחשבון את כל תזרימי המזומנים מהפרויקט ללא יוצא מן הכלל – גם חיוביים וגם שליליים – ומהוון אותם (מחשב עבורם ערך נוכחי) לזמן 0.

הנתונים הם :

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

ובנוספּ נתון מחיר ההון<sup>3</sup> של החברה הוא 4% לשנה – משרת אותנו כריבית להיוון.

$$NPV_A = -100 + 40 * PVFA(4\%, 4) = -100 + 40 * 3.63 = 45.2 > 0$$

$$NPV_B = -1,000 + 350 * PVFA(4\%, 4) = -1,000 + 350 * 3.63 = 270.5 > 0$$

בעצם : כתלות בהקשר, אנחנו תמיד ניישם את כל ה-PV שנלמדו ביחידה 5 כדי לחשב את ה-**NPV** שהוא כולל או נטו המבטא את הערך המכרי הנקי של כלל השפעותיה התזרימיות של העסקה (כולל השקעות, עליות... כולל הכל).

התוצאה המתתקבלת בחישוב ה-**NPV** היא נקייה במובן זה שערך חיובי שלו משמעו כדאיות הפרויקט נקייה (למעט במצבים של צורך לדרג / לבחר, נראה בהמשך). הויל ובמקרה זה מדובר בפרויקטים בלתי תלויים, וה-**NPV** של שניהם חיובי, כדי לבצע את שניהם.

**מעבר לקריטריון הקל ביותר להבנה – ה-IRR – שיעור תשואה פנימי (Internal Rate of Return) – שת"פ :**  
בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות משקף את שיעור התשואה התקופתי באחזים בפרויקט. וכי צד נחשבו? מתמטית : נתבוסס על משוואת ה-**NPV**, במקום מחיר ההון נציג נעלם (IRR), ונשווה את הכל ל-0.

$$IRR_A: 0 = -100 + 40 * PVFA(IRR_A, 4) \rightarrow IRR_A \approx 22\% > 4\% = k$$

<sup>3</sup> מדוע מחיר הון ולא סטטוס "ריבית"? משום שכאשר דנים ביחידה 6 בכספיות פרויקטים, דנים בה מנקודת ראות חברות. בקשר לחברות בשונה מפרטיהם יש מגוון מקורות מימון לפרויקט – גם הלוואות (בריביות שונות), גם אג"ח, גם מנויות וגם מכשירים פיננסיים נוספים. כל אלו יוצרים מעין כור היתוך של עליות מימון, שתוצאהו המשוקלת נקראת מחיר ההון. בשלהזזה אין שום צורך לצורך לדעת כיצד לחשב מחיר הון זה, זהו רק הסבר מרחיב דעת מדווק משתמשים בחברות במונח מחיר הון ולא ריבית.

$$IRR_B: 0 = -1,000 + 350 * PVFA(IRR_B, 4) \rightarrow IRR_B \approx 15\% > 4\% = k$$

כדי לבחון כדאיות פרויקט בודד קונבנציונלי של השקעה לפי IRR נדרש שה-IRR יהיה גבוהה יותר ממחיר ההון (k). עצם היותו של ה-IRR ערך חיובי אינה מספקה. כאן – בהינתן שני הפרויקטים מניבים תשואה באחוזים (IRR) שהיא גבוהה יותר ממחיר ההון – שני הפרויקטים כדאיים (כל עוד אין מגבילה המכריחה לבחור בינויהם).

**סיכום בינויים: בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות שהם בלתי תלויים (לא מגבלה)**

קבל לפי  $NPV$  כל פרויקט שמקיים:  $NPV > 0$

קבל לפי  $IRR$  כל פרויקט שמקיים:  $IRR > k$

**מעבר לקריטריון האיזוטרי (יותר נדייר) – PI – ממד הרווחיות (Profitability Index):** בדומה ל-IRR, גם קритריון זה הוא קритריון יחס. אלא שהוא מחשב את הפרופורציה בין הערך הנוכחי של התקבולים לבין הערך הנוכחי של התשלומים. אם היחס גדול מ-1, סימן שהפרויקט כדאי. יש שתי גרסאות לקריטריון זה בהרמוניזציה:

גרסה 1: ערך נוכחי התקבולים חלק ערך מוחלט של ערך נוכחי תשלומים

$$PI = \frac{PV_+}{|PV_{(-)}|}$$

גרסה 2: עניין (NPV) בתוספת סכום ההשקעה (בערך מוחלט) וכל זה חלקו סכום ההשקעה (בערך מוחלט)

$$PI = \frac{NPV + I}{I}$$

ניישם:

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

ובנוסף נתון מחיר ההון<sup>4</sup> של החברה הוא 4% לשנה – משרת אותנו כריבית להיוון.

חישוב ממד הרווחיות – נוסחה גרסה 1:

<sup>4</sup> מדוע מחיר ההון ולא סטטוס "ריבית"? משום שכאשר דנים ביחידת 6 בפרויקטים, דנים בה מנקודת ראות חברות. בקרוב חברות בשונה מפרטיהם יש מגוון מקורות למימון – גם הלוואות (בריביות שונות), גם אג"ח, גם מנויות וגם מכשירים פיננסיים נוספים. כל אלו יוצרים מעין כור היתוך של עלויות מימון, שתוצאתן המשווקלת נקראת מחיר ההון. בשלב זהה אין שום צורך לדעת כיצד לחשב מחיר ההון זה, זהו רק הסבר מרחיב דעת מודע משתמשים בחברות במונח מחיר ההון ולא ריבית.

$$PI_A = \frac{40 * PVFA(4\%, 4)}{|-100|} = 1.452 > 1$$

$$PI_B = \frac{350 * PVFA(4\%, 4)}{|-1,000|} = 1.2705 > 1$$

חישוב מדד רווחיות – נוסחה גרסה 2 :

$$PI_A = \frac{45.2 + 100}{100} = 1.452 > 1$$

$$PI_B = \frac{270.5 + 1,000}{1,000} = 1.2705 > 1$$

הואיל ולשנינו הפרויקטים מדד רווחיות גבוהה מ-1 בהיעדר מגבלה, שניהם כדאיים. אני אפילו יכול לומר שמתמטית – PI גבוהה מ-1 משמעו בהכרח ערך NPV גבוה מ-0.

**מעבר לкрיטריון האחרון – החזר הון שנתי (אך חורג):** מדובר בסכום ההכנסה הקבוע שפרויקט צריך להניב, במינימום, על מנת שייהי כдאי. בrama טכנית, את החזר ההון השנתי נחשב על ידי חלוקת הערך הנוכחי (המוחלט) של התשלומים הנדרשים לשם הפרויקט, ב-PVFA המתאים למחיר ההון ומספר השנים של הפרויקט :

$$CR = \frac{|PV_{(-)}|}{PVFA(k, n)}$$

כדי שפרויקט יהיה כдאי – ההכנסה השנתית הנובעת ממנו צריכה להיות גבוהה מ (או לפחות שווה ל-) החזר ההון השנתי.

4	3	2	1	0	
40	40	40	40	-100	A
350	350	350	350	-1,000	B

מחיר ההון : 4%

$$CR_A = \frac{100}{PVFA(4\%, 4)} = \frac{100}{3.63} = 27.54 < 40 = Actual Annual Income$$

$$CR_B = \frac{1,000}{PVFA(4\%, 4)} = \frac{1,000}{3.63} = 275.4 < 350 = Actual Annual Income$$

בשני המקרים, קיבלנו שהפרויקטים כדאיים גם לפי קритריון החוזר ההון השנתי, שכן עבור שני הפרויקטים ההכנסה השנתית המינימלית שתצדיק את הפרויקט (27.54 ו- 27.4- 27.54 בהתאם) נמוכה יותר ממההכנסה השנתית הצפiosa להתקבל בפועל בגין ביצועם.

#### **פתרונות סעיף ג – ריכוז הנתונים ודרוג בהנחה שנדרש לבחור בין הפרויקטים לפי PI, NPV, IRR**

נתחיל בلسמן את הערך הגבוה מבין השניים בכל קритריון וkritirion וkritirion :

B	A	kritirion	שם בעברית
270.5	45.2	NPV	ענין (שווי)
15%	22%	IRR	שיעור (תשואה ב-%)
1.2705	1.452	PI	מדד רווחיות (פרופורציה)
275.4	27.54	CR	ה חוזר הון שנתי לא משמש לדירוג (למיידע בלבד)

נשאלות השאלות הבאות :

- מדוע בכלל מתקיימת סטירה?
- בהתקיים סטירה בין הדירוג על פי הקритריונים השונים, מי מהם יכריע?

ראשית, לגבי הסטירה: הויאל גם IRR וגם PI הם מדדים יחסיים, הרי שהם רגילים לגודל השקעה הראשוני. משל למה הדבר דומה? אם אומרים לי שאני יכול להשקיע היום 10agi ולקבלמחר 20agi. ה-IRR הוא 100%. אבל כמובן שהשווי נטו של עסקה כזו הוא מאד נמוך. ואם אני צריך לבחור בין עסקה כזו לאחרת שבה אשקיע היום 1,000,000 ש"ח ואקבל עוד חודשיים 1,500,000 ש"ח, די ברור לי שלמרות שהתשואה נמוכה משמעותית באחזois, העסקה תתרום לערך החברה הרבה יותר.

از בעצם: קритריון ה-IRR הוא בעל מגבלות, שאחת מהן מתקיימת כאשר נדרש לבחור בין פרויקטים בעלי גודל השקעה שונה (יש סיבות נוספות, כגון אופק השקעה, שיעור תשואה על השקעות חוזרות וכי"ב, במסגרת דיוון תיאורטי ביחי' 6 ורציפה, שבהם לא עמוק).

אם מבקשים בשאלת הכריע ספציפית לפי IRR או PI : תשובתנו תהיה A.

אם מבקשים להכריע מי עדיף לפי NPV : תשובתנו תהיה B.

אם מבקשים לדעת מה ההחלטה הנכונה כלכלית? התשובה B.

### שאלה 59.3 – כיתה (מאפס)

בחברת "גוזלינדה" שוקלים להשקיע בפרויקטים. להלן נתונים הפרויקטטים המועמדים להשקעה:

1-8 תזרים שנתי	0	
15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B

מחיר ההון של החברה הוא 10% לשנה.

נדרש:

- בבנה שניתן לבצע את שני הפרויקטטים, איזה מהם יבוצע לפי NPV?
- בבנה שניתן לבצע את שני הפרויקטטים, איזה מהם יבוצע לפי IRR?
- הניחו עת כי ניתן לבצע אחד מהפרויקטטים בלבד, והחברה מעוניינת לבחור לפי IRR. מי יהיה הפרויקט העדיף? האם זו הכרעה נכונה, מבחינה כלכלית? נמקו בקצרה.
- שרטו את עקומת NPV של הפרויקטטים וכן את ה-NPV של הפרויקט ההפרשי.
- הסבירו כיצד ניתן להיעזר בפרויקט ההפרשי כדי לפתרו את הסתירה בין NPV ו-IRR.

פתרון:

#### פתרון סעיף א – פרויקטים בלתי תלויים – בחינת כדאיות לפי NPV

ככל, ה-NPV משקף את שווי הפרויקט נטו בערך כספיים, במונחים של ערך נוכחי. כל מה שצורך לעשות זה לבטא את כל תזרימי הפרויקט – חיובים ושליליים כאחד, בזמן 0. פרויקט יהיה כדאי בכל מצב שבו ה-NPV גדול מ-0 (מחיר ההון של 10% הוא למעשה הריבית להיוון):

$$NPV_A = -50,000 + 15,020 * PVFA(10\%, 8) \rightarrow NPV_A = 30,132$$

$$NPV_B = -150,000 + 37,305 * PVFA(10\%, 8) \rightarrow NPV_B = 49,019$$

המשמעות: התרומה לערך הפירמה נטו במונחים של ערך נוכחי כתוצאה מביצוע פרויקט A היא 30,132 ש"ח. ערך זה מביא בחשבון את תזרימי הפרויקט, וכן את מחיר ההון (עלות גiros ההון / תשואה אלטרנטיבית). התרומה לערך הפירמה נטו במונחים של ערך נוכחי כתוצאה מביצוע פרויקט B היא 49,019 ש"ח. בסעיף זה, הנחת העבודה היא שהפרויקטטים בלתי תלויים. כלומר, ניתן לבצע מה שנדיצה מתוכם. במצב כזה כדאי לבצע את שני הפרויקטטים הוויל ובשניהם ה-NPV חיובי.

#### פתרון סעיף ב – בבנה שניתן לבצע את שני הפרויקטטים, איזה מהם יבוצע לפי IRR?

ל-IRR (שתי'פ) יש שתי הגדירות: הגדרה אחת היא כלכלית (לפחות בפרויקטטים קונבנציונליים של השקעה) והגדרה נוספת היא מעין נוסחה מתמטית שמאפשרת חילצו.

ברמה הכלכלית: ה-IRR משקף את שיעור התשואה התקופתי המומוצע בפרויקט. בהתאם, פרויקטים קובנציונליים של השקעה יהיו כдאים אם ורק אם שיעור התשואה הגלום בהם גבוה יותר מחair ההון. ברמה המתמטית: כדיحل את ה-IRR אנו בונים שנית את משווהת הענין  $NPV$ , שני שינויים מתחייבים: (1) מחair ההון מסומן כנעלם  $IRR$ ; (2) משווים את כל המשווהה ל-0.

$$NPV_A: -50,000 + 15,020 * PVFA(IRR_A, 8) = 0 \rightarrow IRR_A = 25\%$$

מכאן אפשר להיעזר בלוח א-4 בנספח א לרך ד, בטכנית שהראינו בחילוץ המתייחס להלוואות בשאלות קודמות, ולהגיע ל-IRR.

$$NPV_B: -150,000 + 37,305 * PVFA(IRR_B, 8) = 0 \rightarrow IRR_B = 18\%$$

כאשר מדובר בפרויקטים קובנציונליים של השקעה – פרויקט כ다וי הוא כזה שתשואהו (ה-IRR שלו) גבוהה מחair ההון של החברה. במקרה זה, מחair ההון 10% ננתנו. لكن שני הפרויקטים כדאים הוואיל והתשואה התקופתית שלהם גבוהה יותר. בהיעדר מגבלה, נרצה לבצע את שניהם.

ג. הניחו **כעת כי ניתן לבצע אחד מהפרויקטים בלבד, והחברה מעוניינת לבחור לפי IRR. מי יהיה הפרויקט העדיף? האם זו הכרעה נכונה, מבחינה כלכלית? נמקו בקצרה.**

	A	B
NPV	30,132	49,019
IRR	25%	18%

הויאיל וציינו מפורשות שהחברה בוחרת ופועלות לפי IRR, הרי שבמצב שבו ניתן לבצע לכל היותר אחד מהפרויקטים (מושגאים זה את זה), יעדף מצד החברה פרויקט A. לעניין ההחלטה הנכונה כלכלית: אפשר לשים לב שלמרות שה-IRR גבוהה יותר בפרויקט A, אם מביטים על ה- $NPV$  נגלה שהוא גבוהה יותר דוקא בפרויקט B. זה גורם לנו לתהות: איזה קритריון חשוב יותר, ואיזה פרויקט יבחר כלכלית במקרה של סתירה בין  $NPV$  לבין IRR?

זכרו: מטרת הפירמה (יח' 1) היא להשיא עושר (להשיא ערך) לבליה. לא להשיא אחזוי תשואה. להשיא את התוצאות הכספיות. לכן, בחירה בפרויקט A היא תחת אופטימלית. עדיף לבצע את פרויקט B.

شرطו את עקומת ה- $NPV$  של הפרויקטים וכן את ה- $NPV$  של הפרויקט ההפרשי.  
 עקומת ה- $NPV$  היא ייצוג גרפי של הקשר בין מחair ההון של החברה לבין ה- $NPV$  שלו. ככל שמחair ההון (עלות גiros ההון) של החברה עולה, ה- $NPV$  של הפרויקט יורד. לכן עקומת ה- $NPV$  (בפרויקטים קובנציונליים של השקעות) יורדת משמאל לימין. הцентр האנכי הוא ציר ה- $NPV$ , הцентр האופקי – ציר מחair ההון (נוהג לסמנו כ- $k$ ). כדי לשרטט את עקומת הענין אנו צריכים רק 3 נקודות:

נקודה 1 : נקודת החיתוך של העוקום עם ציר ה-Y. נקודה זו היא חיבור פשוט של תזרימי המזומנים של הפרויקט.

נקודה 2 : נקודת החיתוך של העוקום עם ציר ה-X. נקודה זו היא ה-IRR.

נקודה 3 : (לא קרייטית בדרך כלל) = ערך המינימום של הפרויקט = סכום ההשקעה.

IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
18%	37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B
	22,285	-100,00	פרויקט הפרשי A-B

#### פרויקט A :

נק' חיתוך עם ציר Y (ציר ה-NPV) :  $-50,000 + 15,020 * 8 = 70,016$

נק' חיתוך עם ציר X (ציר מחיר ההון) : 25%

ערך מינימלי אפשרי (כשמחיר ההון גבוה במיוחד) : -50,000

#### פרויקט B :

נק' חיתוך עם ציר Y (ציר ה-NPV) :  $-150,000 + 37,305 * 8 = 148,440$

נק' חיתוך עם ציר X (ציר מחיר ההון) : 18%

ערך מינימלי אפשרי (כשמחיר ההון גבוה במיוחד) : -150,000

#### פרויקט הפרשי B-A

זהו פרויקט "דמיוני" שモגדיר מותמטיית כזו שתזרימיו בכל נקודת זמן הם הפרש בין תזרימי הפרויקט ה"גדול" בעל ההשקעה הגבוהה והתזרימים הגבוהים, לבין הפרויקט ה"קטן". במקרה שלנו, A-B.

נק' חיתוך עם ציר Y (ציר ה-NPV) :  $-100,000 + 22,285 * 8 = 78,280$

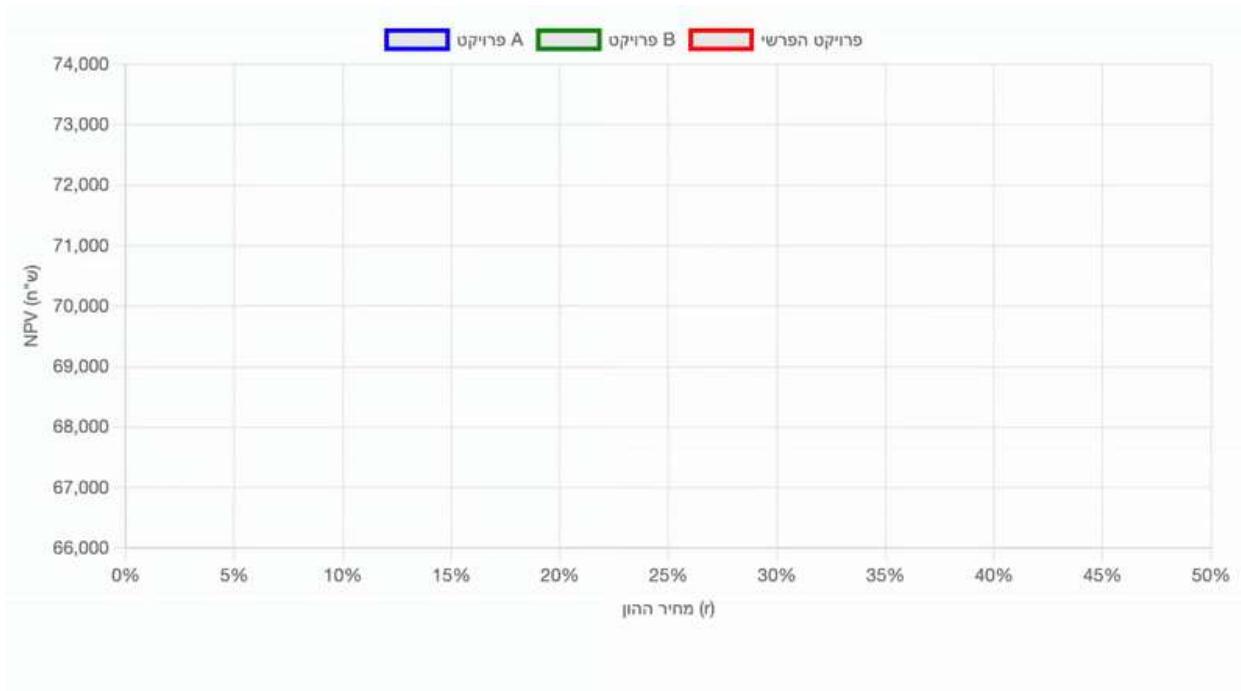
נק' חיתוך עם ציר X (ציר מחיר ההון) : דורשת מאייתנו לחץ IRR של הפרויקט הפרשי :

$$IRR_{B-A} \rightarrow -100,000 + 22,285 * PVFA(IRR_{B-A}, 8) = 0 \rightarrow IRR_{B-A} = 15\%$$

ערך מינימלי אפשרי (כשמחיר ההון גבוה במיוחד) : -100,000

ל-IRR של הפרויקט הפרשי חשיבות גבוהה ; הוא מייצג בהגדרה את נקודת החיתוך בין עוקמי ה-NPV של הפרויקטים על בסיסם נוצר. בשפה פשוטה, אם מחיר ההון 15%, פרויקטים A ו-B שקולים.

אם מחיר ההון גבוה יותר מ-15%, נמצאים מימין לנקודת החיתוך בין עוקמי הפרויקטים, ויש להעדיף את פרויקט A. אם מחיר ההון נמוך מ-15%, נמצאים משמאלי לנקודת החיתוך בין עוקמי הפרויקטים, ויש להעדיף את פרויקט B.



סעיף ה : הסבירו כיצד ניתן להיעזר בפרויקט ההפרשי כדי לפטור את הסתירה בין NPV ו-IRR.

IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
18%	37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B
15%	22,285	-100,00	פרויקט הפרשי B-A

הפרויקט ההפרשי – הוא פרויקט דמיוני. יש לו 2 מטרות : האחת, ה-IRR שלו מייצג את מחיר ההון (הערך על ציר ה-X) שבו עוקמי העניין של הפרויקטים המקוריים נחתכים (כדי לקבוע מתי האחד גבוהה מהآخر). המטרה נוספת שבה עסק סעיף זה שונה לחולטין : איך נשתמש בפרויקט הדמיוני הזה כדי להוכיח את עליונות ה-IRR על NPV, ולמנוע את הסתירה בין הקriterיוונים.

נשווה בנסיבות שאנו מציעים לנו להשקיע אך ורק באחד מבין שני הפרויקטים הבאים :

ענ"ג NPV	שת"פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
30,132	25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
49,019	18%	37,305	-150,000	תזרים (ש"ח) פרויקט B

נניח שאנו מתקשים לפעול לפי IRR. האם יש דרך לשכנע אותנו שאנו טוענים בכלים של השת"פ? כן! אם נשתמש בפרויקט ההפרשי.

מדוע?

נניח שבחרנו ספציפית בפרויקט A לאור השת"פ הגבוה יותר שלו.

ענ"ג NPV	שת"פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
30,132	25%	15,020	-50,000	תזרים (ש"ח) פרויקט A
לא ניתן לביצוע אם בחרנו ב-A				תזרים (ש"ח) פרויקט B

כעת, הבה נניח שמציעים לנו להשקיע בפרויקט נוסף, בלתי תלוי, להלן פרויקט C :

שת"פ IRR	1-8 תזרים שנתי	0	
15%	22,285	-100,00	פרויקט C

אם אני עובד רק לפי השת"פ. האם ארצה לבצע את פרויקט C בנוסף לפרוייקט A? התשובה חיובית כמובן. מודיע? מחיר ההון 10%, השת"פ גבוהה מכז, ולכן כדאי לבצע גם את C.

לשונו אחרת, המשקיע אומר:

$$A > B$$

אבל אותו משקיע בדיק אומר:

$$A + C > A$$

אלא שלמעשה:

$$C = B - A$$

לכן המשקיע לא עקיבי והוא הוכיח בכלים של שת"פ:

$$A + (B - A) > A \rightarrow B > A$$

מה שעשינו זה פיצלנו למשקיע את פרויקט B באופן מלאכותי לשני פרויקטים, ולפי השת"פ הוא העדיף את פרויקט B על פני A רק בעקבות הצגתו המפוצלת. במקרה אחר, פילוח הפרויקט העדיף לפיו עניין לפרויקט הפרשי והפרויקט הנותר, גורם להעדפת הפרויקט בעל העניין הגבוה יותר גם תוך שימוש בכלים של שת"פ.

#### מינוי בריף לשאלת:

השאלה התיכילה באופן החישוב הטכני של NPV ו-IRR.

לאחר מכון הבחרנו שאין שום בעיה לקבוע כדאיות לפי הקритריונים, בהנחה שהפרויקטים בלתי תלויים (בහינתן סוגם כקונבנציונליים של השקעות).

לעומת זאת, כאשר הם מוצאים זה את זה, במקרים רבים עלולה להיווצר סטירה בדירוג לפי NPV לעומת דירוג לפי IRR. במקרה שכזה, כולל ה-NPV הוא המכריע מבחינה כלכלית. מעבר לעצם קביעה זו, הראינו זאת גם על ידי שימוש בפיירוק וגיישת הפרויקט הפרשי.

לבסוף, הצגנו דרך טכנית לאיור עוקמי ה-NPV של הפרויקטים, ולמרות שימושו זמן לא עסקנו בניתוח התרשימים יותר מדי – יש על זה מספיק תרגילים ורחבות במחברת.

**שאלה 59.3 - כיתה**

מציעים לחברת השקעה לבכורה לחייבת תזרימי המזומנים השנתיים מהמכונה, כפי שנאמר  
על ידי כלכלן בכיר :

1-6 תזרים שנתי	0	
10,000	$-x$	תזרים (ש"ח)

נתונים נוספים בדבר הפרויקט :

ידוע  $0 > x$  (כלומר נדרש השקעה ממשית, תזרים שלילי בזמן 0).  
ידוע כי השט"פ (ה-IRR) של הפרויקט הוא 20%.  
בנוסף, ידוע כי מחיר ההון (k) של הפירמה הוא 10%.

**נדרש :**

מהו העניין (ה-NPV) של הפרויקט?

**פתרון :**

כאשר חסרים נתונים תזרים בשאלת פרויקטים, בדרך כלל כוונת המשורר היא שנשתמש באחד מהנתונים  
האחרים כהגרתו (נתון השט"פ ו/או נתון NPV) כדי לבצע חילוץ רלוונטי.  
ספקטיבית כאן, ציינו בפנוי שהשט"פ הוא 20%.

כזכור, השט"פ הוא ערך מחיר ההון (הרביבית) שאמנו נציב אותה במשוואת NPV של הפרויקט, התוצאה 0.

$$-x + 10,000 * PVFA(20\%, 6) = 0 \rightarrow x = 33,255$$

כך הגענו למבנה התזרימי הבא של הפרויקט, בהתחשב בהשקעה בזמן אפס :

1-6 תזרים שנתי	0	
10,000	$-33,255$	תזרים (ש"ח)

כדי לחשב את ה-NPV, כל שעליינו לעשות הוא להציב את התזריםים ואת מחיר ההון של החברה :

$$NPV = -33,255 + 10,000 * PVFA(10\%, 6) \rightarrow NPV \approx 10,298$$

**שאלה 60 - כדיות פרויקטים - מدد הרווחיות – עולם עם מגבלת תקציב כספית**

לחברת הוצאה השקעה 5 פרויקטים :

פרויקט	השקעה באלפי ש"ח	מדד הרווחיות
--------	-----------------	--------------

1.15	1,000	א
1.2	600	ב
0.83	300	ג
1.17	700	ד
1.1	900	ה

החברה כפופה למגבלת תקציב של 2,000,000 ש"ח (2,000 אלף ש"ח). נתונים אלו:

- מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה להשקיע לפי קритריון מודד הרווחיות?
- מהם הפרויקטים שבהם החברה אם כוונתה היא למקסם את ערכה?

#### מינימלי (כיצד תוקפים את הבעיה)

בתרגיל הבסיסי הקודם הצגנו מקרה קל יחסית שבו עלינו לבחור באיזה פרויקט להשקיע מבין שניים. במקרים רבים בעולם האמתי, המגבלה מורכבת יותר; שכן יש לנו תקציב השקעות נתון, ונשאלת השאלה באילו פרויקטים להשקיע באופן שימצא את מגבלת התקציב בצורה הטובה ביותר – כך שייתרום לערך החברה במידה המירבית.

השאלה מבקשת מני לבחור את הפרויקטים המומלצים לפי קритריון מודד הרווחיות בתחילת (מהגובה לנמוך, ובכפוף למגבלת התקציב) ואז לבחור באופן שימקסם ערך (מורכב יותר – וمبוסס על עניין).

**פתרון סעיף א: מהם הפרויקטים שבהם תבחר החברה להשקיע לפי קритריון מודד הרווחיות?**  
מודד הרווחיות - Profitability Index או PI הוא קритריון לבחינת כדאיות השקעות – שתוצאותו יחסית. מודד זה מחושב בתור הпроופורציה (היחס) שבין הערך הנוכחי של תקציבי הפרויקט לבין הערך הנוכחי של התשלומים בפרויקט / ההשקעה **בערך מוחלט**.

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבוליים}}}{|PV_{\text{תשומים}}|}$$

כאשר ערך ה- PI גדול מ-1 הפרויקט כדאי. מדובר:  $|PV_{\text{תשומים}}| < PV_{\text{תקבוליים}}$ , כלומר ההפרש בין סך התקבולים בערך הנוכחי לסך התשלומים בערך הנוכחי הוא חיובי, כלומר בסך הכל לפרויקט יש שווי חיובי – עניין (NPV) חיובי:

$$PI > 1 \rightarrow \frac{PV_{\text{תקבוליים}}}{|PV_{\text{תשומים}}|} > 1 \rightarrow PV_{\text{תקבוליים}} > |PV_{\text{תשומים}}| \rightarrow PV_{\text{תקבוליים}} - |PV_{\text{תשומים}}| > 0$$

כלומר בהכרח מתקיימים:

$$\text{כדי!} \rightarrow NPV > 0$$

נוסחה נוספת המבטאת את ה- PI היא :

$$PI = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

כאשר :

הערך  $NPV$  הוא שווי הפרויקט נטו (ענין).

הערך  $I_0$  הוא סכום ההשקעה הראשונית.

נוסחה זו ניתנת לבטא באמצעות העברת אגפים פשוטה כך שתבטא את הקשר בין PI לבין שווי הפרויקט באופן

כמפורט :

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

לאחר מבוא זה, נחזר לשאלת - אלה הפROYקטים, מגבלת התקציב היא 2,000, והחברה פועלת לפי מודד הרווחיות. אילו פרויקטים היא תבחר לבצע?

פרויקט	ההשקעה באלפי ש"ח	מדד הרווחיות
א	1,000	1.15
ב (נבחר ראשון)	600	1.2
ג	300	0.83
ד (נבחר שני)	700	1.17
ה	900	1.1

תחילה, נבחר בפרויקט ב, שמדד הרווחיות שלו הגבוה ביותר (וכך החברה בוחרת לנטו). פרויקט ב "שורף" (מנצל) 600 אלף ש"ח מתוך מגבלת השקעה של 2,000. לנכון יתרת התקציב לניצול תהיה  $1,400 - 600 = 800$  ש"ח. פרויקט "הבא בתור" מבחרית מידי הרווחיות הגבוהים ביותר הוא פרויקט ד. פרויקט זה מנצל השקעה בסך 700 ש"ח, יתרת התקציב לניצול:  $700 - 700 = 0$ . עם יתרת התקציב זו, יוכל לבצע את פרויקט ג בלבד (כי פרויקטים א ו-ה דורשים התקציב גבוה מ-700). אלא, שלאור העובדה שמדד הרווחיות של פרויקט ג נמוך מ-1, בהגדלה הוא אינו כדאי (שוויו שלילי) וכן הוא "יורד מהפרק".

לכן, החברה תבחר לבצע בהינתן הדירוג לפי **מדד הרווחיות** את פרויקטים ב ו-ד.

לתשומת הלב: כאשר מבקשים לבצע דירוג או החלטה לפי קרייטריון מסוים ספציפי (כגוןמדד הרווחיות) המשמעות היא שיש לבצע את הבחירה או הדירוג כאמור לפי קרייטריון זה בלבד - לא לפי חילוצים הנגזרים ממנו או קרייטריונים אחרים (גם אם קיימת להם רלוונטיות כלכלית).

**פתרונות סעיף ב: מהט הפROYקטיטים שבחור החברה אם כוונתך היא למקסם את ערכך?**  
 בuest, השאלה משתנה: יתרה על הצורך לדרג לפי ממד הרוחניות, עליינו להגיע למסקם ערך. כשמדובר על ערך = ערך נוכחי, או בקיצור - עניין ערך נוכחי נקי - NPV.  
 במקרה אחר, צריך לבנות מתחם הפROYקטיטים האפשריים את אותו צירוף שמקסם את ה-NPV בכספי.

כדי לישם ברמה הטכנית, נפעל בשני שלבים:  
 שלב 1 - נניסם את הקשר המתמטי שהריאנו בין ממד הרוחניות, סכום ההשקעה וה-NPV:

$$PI = \frac{NPV + I}{I} \rightarrow NPV = PI * I - I$$

ולכן תמיד מתקיים הקשר הבא שמאפשר חישוב ה-NPV בהינתן ממד הרוחניות וסכום ההשקעה:

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

שלב 2 - נבחר את הפROYקטיטים שמקסמים את ה-NPV המצרי (בכספי למוגבה).

**שלב 1 - חישוב NPV על בסיס מגבלת תקציב וסכום השקעה:**

פרויקט	ההשקעה באלפי ש"ח	מדד הרוחניות	NPV
א	1,000	1.15	$1.15 * 1,000 - 1,000 = 150$
ב	600	1.2	$1.2 * 600 - 600 = 120$
ג	300	0.83	אין צורך לחשב, שווי שלילי כי $PI < 1$
ד	700	1.17	$1.17 * 700 - 700 = 119$
ה	900	1.1	$1.1 * 900 - 900 = 90$

**שלב 2 - נבחר את הפROYקטיטים שמקסמים את ה-NPV המצרי (בכספי למוגבה)**  
 כדי למקסם את ערך החברה, עליי לבחור בקומבינציה (שילוב) פרויקטים, אשר מאפשר במסגרת תקציב ההשקעה (2,000 ס"ח הכל או פחות) וגם מוביל את סיכום ערכיך ה-NPV לערך מירבי.

$$NPV_{\text{א,ב}} = 150 + 120 = 270$$

$$NPV_{\text{א,ד}} = 150 + 119 = 269$$

$$NPV_{\text{ב,ג}} = 150 + 90 = 240$$

$$NPV_{\text{ב,ד}} = 120 + 119 = 239$$

$$NPV_{\text{ג,ד}} = 120 + 90 = 210$$

$$NPV_{\text{א,ג}} = 119 + 90 = 209$$

קיבלוño שהקומבינציה המובילה למקסימום שווי החברה היא **ביצוע הפרויקטיטים א ו-ב**. זו התשובה הסופית **לסעיף ב**.

לעומת זאת, בסעיף א מצאנו שלפי ממד הרוחניות, החברה תבחר לבצע את פרויקטים ב ו-ד. במלים אחרות, הבחירה של החברה בסעיף א **איןנה אופטימלית** ואינה מושימה את העיקרון להשאת ערך הפירמה לבעליה.

הרחבת הסבר :

מדד הרוחניות הוא מדד כדיות יחסית; הוא בוחן את היחס (הפרופורציה) בין התקבולים לתשלומים. הוא לא משקף ערך כספי, שווי כספי של הפרויקט - אלא הוא מרכיב מפרופורציה.

שאלה שודרשת את השווי של הפרויקטיטים, את הערך שלהם (ובכך מתמקדים בסעיף השואל כיצד נמקם ערך) למשה דורך את ה-  $NPV$  של כל אחד מהפרויקיטים.

ברוב המקרים, נחשב  $NPV$  בעצמו, מתמטית, בלי קשר למדד הרוחניות, על בסיס תזרימי המזומנים הנתוניים של הפרויקט. אלא שכן, תזרימי המזומנים אינם נתונים (אלא רק ההשקעה) ולכן ניעזר כगלגול חילוץ בנוסחתה  $NPV = PI * \text{סכום ההשקעה וה-} I_0$ .

$$NPV = PI * I_0 - I_0$$

כאשר :

הערך  $NPV$  הוא שווי הפרויקט (ערך נוכחי נקי, ענ"ד).

הערך  $PI$  הוא מדד הרוחניות (שכן, נתון).

הערך  $I_0$  מייצג את סכום ההשקעה.

#### שאלה 49 - חישובי כדיות פרויקטיטים

באפשרותכם להשיקיע באחד מבינן שני פרויקטיטים:

פרויקט א' דורש השקעה בסך 100 אלפי ש"ח והוא מוביל לתקבול נקי בתום כל שנה במשך 6 שנים בסך 30.08 אלפי ש"ח.

פרויקט ב' דורש השקעה בסך 60 אלפי ש"ח והוא מוביל לתקבול נקי בתום כל שנה במשך 6 שנים בסכום של 19.87 אלפי ש"ח. מחיר ההון שלהם הוא 4% לשנה.

נדרש :

- מהו השט"פ (IRR) של כל אחד מהפרויקיטים? דרגו את הפרויקיטים לאורו.
- מהו הענ"ג (NPV) של כל אחד מהפרויקיטים? דרגו את הפרויקיטים לאורו.
- הסבירו ככל שמתאפשרת סתירה את ההבדל בין הקריטריוןיהם ואת הסיבה לסתירה. הכריעו לגבי הכלל העדיף כלכלית.
- איירו את עוקמי הענ"ג של הפרויקיטים כפונקציה של מחיר ההון כולל עוקום ענ"ג של הפרויקט ההפרשי.
- בהתבסס על גישת הפרויקט ההפרשי, הסבירו את יישוב הסתירה בין כל הענ"ג לבין כל השט"פ.

**מבוא:** כאשר מקבלים נתונים פרויקטיים, המיצגים על ידי "רשימת תזרימיים" (תזרימיים שליליים להשקעות והוצאות, ותזרימיים חיוביים לתקבולים / הכנסות) הדרך לקבוע את כדיותם מتبוססת בראש ובראשונה על אחד משני קритריונים עיקריים :

- **קריטריון 1:** קритריון הערך הנוכחי הנקי - עני"נ – NPV (Net Present Value) על בסיסו, כדאי לבצע כל פרויקט אשר הערך הנוכחי הנקי נטו של כל תזרימי הוא חיובי.
- **קריטריון 2:** קритריון שיעור התשואה הפנימי - שט"פ – IRR (Internal Rate of Return). קритריון זה משקף את שיעור התשואה המגולם בפרויקט באחזois. בשפה פשוטה, אם משקיע שוקל לבצע השקעה שה - IRR שלה הנז 15%, המשמעות היא שזו השקעה הנושאת תשואה שנתית ממוצעת של 15%. על מנת לבדוק כדיות פרויקט לפי הקритריון, נדרש ששיעור תשואה זו יהיה גבוה יותר מהתשואה האלטרנטיבית (מחיר ההון).

**פתרונות סעיפים א-ב: חישוב NPV (עני"נ) ו- IRR (שט"פ) בגין כל פרויקט**  
בutor התחלה, ניקח את נתונים התזרימיים המופיעים בשאלת מילולית, ונסדר אותם בטבלה, מעין "ציר זמן"

פרויקט	0	1	2	3	4	5	6
א	-100	30.08	30.08	30.08	30.08	30.08	30.08
ב	-60	19.87	19.87	19.87	19.87	19.87	19.87

בנוסף, בשאלת צירנו ש"מחיר ההון" של החברה הוא 4% (לשנה).

לרכינו, מחיר ההון הוא למעשה הריבית האלטרנטיבית / ריבית להיון, ריבית שעלה בסיסה יחוسب הערך הנוכחי. וчисוב ה - NPV המהווה את הערך הנוכחי הנקי נטו של התזרימיים כולם בהיון במחיר ההון יהיה בהתאם :

$$NPV_A = -100 + 30.08 * PVFA(4\%, 6) = -100 + 30.08 * 5.242 \approx 57.679$$

$$NPV_B = -60 + 19.87 * PVFA(4\%, 6) = -60 + 19.87 * 5.242 \approx 42.159$$

ככל: כדאי לבצע כל פרויקט אשר ה - NPV (הענ"נ) שלו חיובי. עני"נ חיובי משמעו שהתייחס לתזרמיים, עיתויים וחריבית (מחיר ההון) - הערך נטו של הפרויקט חיובי ולמעשה מגדיל את ערך החברה (הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שהוא מניב).

כל זה נכון לשាឦן מוגבלות מיוחדות לגבי ביצוע הפרויקטים. ולמה הכוונה? אם הפרויקטים "בלתי תלויים", וניתן לבצע גם את שנייהם, או רק אחד, או אף אחד - הרישבמקרה זה הינו בוחרים לבצע את שניהם. אלא שבנתוני שאלת הבסיס נאמר מפורשות שניתן לבצע רק אחד מביניהם (לעתים הדבר נקרא "פרויקטים המוציאים זה את זה"). במקרה כזה, שיפוט לפי קритריון ה - NPV ידרג את פרויקט א כעדיף על פני פרויקט ב.

ומה לגבי IRR / שט"פ (שיעור התשואה התקופתי באחזois בפרויקט) – כדי לחשבו ברמה הטכנית אלו זוקקים למשוואת ה - NPV שעליה נבצע שני שינויים: השינוי האחד הוא להזין את מחיר ההון כנעלם שיסומן כ - IRR. השינוי השני הוא השוואת כל המשווה ל-0.

$$IRR_A: -100 + 30.08 * PVFA(IRR_A, 6) = 0 \rightarrow IRR_A = 20\%$$

$$IRR_B: -60 + 19.87 * PVFA(IRR_B, 6) = 0 \rightarrow IRR_B = 24\%$$

אמנם לא הרינו מפורשות כאן כיצד מחלצים את הריבית מביטוי PVFA, אבל משאלות כגון שאלת 21 ושאלות נספנות בתרגילי הבית - הציגו זאת [ככלל: צריך להתייחס לכל הביטוי של PVFA כאל נעלם, לבדוק אותו, ואז לחפש אותו בלוח א-4 ולראות עבור איזו ריבית הוא מתקיים].

התוצאה שנטקבה משקפת כאמור את שיעור התשואה באחזים על ההשקעה בכל אחד מהפרויקטים. זה אומר, ששיעור התשואה / הרווח על כל שקל שהושקע בפרויקט א הוא כ-20% לשנה, ואילו שיעור התשואה / הרווח על כל שקל שהושקע בפרויקט ב הוא כ-24% לשנה. על פי נתונים השאלה, מחיר ההון / התשואה האלטרנטיבית בחברה היא 4%. לכן, כל פרויקט שמניב תשואה גבוהה מכך הוא כדאי בפניהם, ובמקרה זה, בהיעדר מוגבלת תקציב, מומלץ היה לבצע את שני הפרויקטים.

אלא שבහינתו החכרה לבחור פרויקט אחד מבין השניים בלבד, הרי שלפי קритריון השת"פ - علينا לבחור בפרויקט שהשת"פ שלו גבוהה יותר, כלומר פרויקט ב.

נציג אם כך את ריכוז הממצאים ואת הדילמה:

IRR	NPV	
20%	57.679	פרויקט א
24%	42.159	פרויקט ב

פרויקט א, אם כך, תורם ערך כספי גבוה יותר לפירמה נטו.

פרויקט ב תורם תשואה גבוהה יותר באחזים על ההשקעה.

ראשית, כיצד ניתן הדבר? ובכן, ניתן מספר סיבות לסתירה בין NPV ו- IRR. אבל כאן, קל לראות זאת. הסיבה היא גודל השקעה שונה. פרויקט א מניב תשואה נמוכה יותר באחזים, אך הוא "עשה זאת" על השקעה גבוהה הרבה יותר, מה שמתרגם לשווי כספי גבוה יותר.

שנית, בהינתן הסתירה, מהו הקритריון שיכירע? והתשובה שלנו היא חד משמעית: קритריון ה- NPV הוא הדומיננטי. מדוע? ננסה להזכיר את הסיטואציה. אם אני יכול לבחור בין פרויקט שבו אשקיע שקל אחד ואקבל בעוד 2 שנים. התשואה באחזים - IRR - היא 100%. אבל כמoven שהאימפקט הכספי נטו על החברה ועוד ש"ח. בתמורה, התשואה היא 80% בלבד, אך כמoven שפרויקט כזה יהיה חשוב יותר וייעודף.

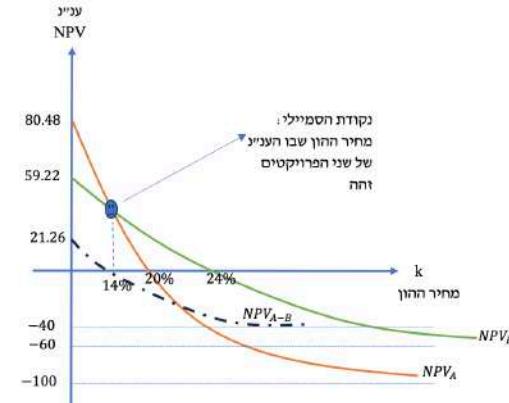
מטרת הפירמה היא השגת ערך לבליה במונחים כספיים. השגת ערך זו צריכה להתבסס בראש ובראשונה על קритריון ה- NPV שמתרגם את השלבות לפרויקט למונחי שווי כספי.

ד. **איירו את עיקומי העניין של הפרויקטים כפונקציה של מחיר ההון, לרבות הפרויקט ההפרשי**

מטרת איזור עקומי העניין היא להציג כען "ניתוח רגישות" של שווי הפרויקט למחיר ההון. מחיר ההון של החברה מייצג את עלות גiros ההון / תשואה אלטרנטיבית, וככל שהוא גבוהה יותר, שווי פרויקט השקעה יורד, בשל הקיטון בערך הנוכחי של התקבולים העתידיים.

כדי לשרטט את עקום העניין, צריך לפחות 3 נקודות בלבד המתוירות מטה. כדי למצוא את נקודת החיתוך בין עקומי העניין, שהוא חשוב על מנת לדעת "מתי" / "באילו מחירי ההון" תיווצר העדפה של פרויקט מסוים על פני פרויקט אחר במישור הכללי. נקודת חיתוך זו נשענת על ניתוח תיאורטי של ה-IRR של פרויקט שנראה הפרויקט ההפרשי. גם הוא מאופיין מטה.

time	A	B	א ביניים B	גודל פחות קטון
0	-100	-60	-40	
1	30.08	19.87	10.21	
2	30.08	19.87	10.21	
3	30.08	19.87	10.21	
4	30.08	19.87	10.21	
5	30.08	19.87	10.21	
6	30.08	19.87	10.21	
Point 1	-100	-60	-40	סכום ההשקעה
Point 2	80.48	59.22	21.26	ערך מינימלי סכום התזרומים מקסימום/היתוך ציר y
Point 3	20%	24%	14%	נק' חיתוך עם ציר אופקי IRR / שטיפה



אומן חילוץ ה-IRR של הפרויקט ההפרשי שמהווה את מחיר ההון בנק' החיתוך בין עקומי ה- $NPV$  של הפרויקטים שביניהם חושב הפרש :

$$IRR_{A-B} : -40 + 10.21 * PVFA(IRR_{A-B}, 6) = 0 \rightarrow IRR_{A-B} \approx 14\%$$

עוד דבר שאפשר להסיק מנקודת חיתוך זו היא :

במחיר ההון של עד 14% מועדף פרויקט A (שכן עניין A גבוהה יותר).

במחיר ההון של מעל 14% מועדף פרויקט B (שכן עניין B גבוהה יותר).

בהתיבת סטירה בין  $NPV$  ו-IRR :

בכל מחיר ההון – ה-IRR גבוהה יותר בפרויקט B (כי ה-IRR אוטונומי, בלתי תלוי במחיר ההון). כדי למצוא סטירה – נדרש למעשה למצוא את אותם מחירי ההון שבהם ה- $NPV$  של פרויקט A גבוהה יותר. זהה קורה כאשר מחיר ההון נמוך מ-14%.

#### ה. השתמשו בגישה הפרויקט ההפרשי כדי לסייע את הסטירה בין דירוג לפי עניין לבין דירוג לפי שט"פ

IRR	NPV $k=4\%$	
20%	57.679	פרויקט A

24%	42.159	פרויקט ב
14%		פרויקט הפרש

נניח שהמשקיע משה מתעקש לבצע דוחקה את פרויקט ב מבין הפרויקטים א-ו-ב. ניסיתם בכל הכוח לשכנע אותו שדוחקה פרויקט א עדיף ; שהרי הוא מניב ערך כספי גבוה יותר, שעקביו יותר עם מטרת הפירמה (השאת עושר בעליים) ומשמעות הסטיירה היא גודל השקעה שונה. אבל משה התעקש. מבחןתו : "אני, לא מעוניין אותי אני. מבחןתי רק השט"פ יקבע".

כדי לשכנע את משה להעדיף לפי שת"פ את פרויקט א, נאמר לו את הדבר הבא :

"משה היקר. אין בעיה. נלך על ב. אתה יכול לפתח שטפניה. אבל האם בנוסף לכך מידה ותוכל תרצה לבצע גם פרויקט נוסף, שה - IRR שלו 14%?"

משה חושב עם עצמו ואומר : ממה... זה בנוסף נכון? לא במקומות פרויקט ב? ומהירות ההון של החברה עדין 4%.

משה אמר להסכים : כי ה-IRR בשיעור 14% גבוהה ממהירות ההון 4%.

וזו נאמר לו : משה יקירנו, ישמעו נא אוזנייך מה שפיך מדבר!

שחצינו לך לבחור בין A ל- B, אמרת שאתה רוצה B.

אך שחצינו לך בנוסף את A-B אמרת שהוא טוב לך גם.

במלים אחרות, אתה טוען ש :

$$B + (A - B) \succ B \rightarrow A \succ B$$

כלומר שינויי אופן ההצעה של פרויקט A כזזה המורכב משני חלקים : פרויקט B והפרויקט ההפרש, הוביל להעדפת A על פני B גם לפי שת"פ, משכך - יישוב הסטיירה.

**49.0.2 – חישובי כדיות פרויקטים במקהה של הלוואות – פירוט וגרפים (שאלת גדולה)**  
כספי צרי 200,000 ש"ח לתקופה של 4 שנים. לשם כך יכול ליטול הלוואה שתפרע בשיטת לוח סילוקין רגיל או בשיטת לוח סילוקין שפיר. הלוואות נושאות ריבית שנתית בשיעור 10% לשנה.

נדרש :

- א. מהו תזרים המזומנים הצפוי בכל חלופה?
- ב. מהו השט"פ של כל חלופה?
- ג. הציגו על גבי מערכת ציריים את עקומות העניין של הלוואות כפונקציה של מחיר ההון.
- ד. הציגו את תזרים המזומנים של הפרויקט ההפרשי.
- ה. הוסיפו התייחסות לפרויקט ההפרשי במסגרת התרשימים מנדרש ג.
- ו. עברו אילו מחירי ההון יועדף כל אחד מהפרויקטים / חלופות הלוואה?

### שאלה 49.1 - כדאיות פרויקטים

חברת "פלפלוני" ניצבת בפני ההזדמנויות ההשקעה (הפרויקטים) הבאים. ידוע שמחיר ההון של פלפלוני הוא 12%. **ערכים שליליים מופיעים בסוגרים.**

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

- חשבו ענין, שת"פ ומדד רוחניות לכל אחד מהפרויקטים.
- בנחתת אי תלות בין הפרויקטים, באיזה / באילו מהם תשקיע החברה לפי כל קритריון?
- בנחתה שהפרויקטים מוצאים זה את זה, באיזה / באילו מהם תשקיעו לפי כל קритריון?
- מהם הגורמים לסתירה בין ענין לשט"פ ככל שקיים, בהיבט דירוג הפרויקטים מסעיף ג'?
- השתמשו בניתוח הפרויקט הפרשי על מנת לישב את הסתירה.
- شرطו את עיקומות הענין כפונקציה של מחיר ההון, וכן את עיקומות הענין של הפרויקט הפרשי.

פתרון :

כאשר אני מקבל רשותה פרויקטים ארצה לדעת כיצד לחשב את ערכי הקритריונים שיהו אינדיקציה למדדיהם. קיימים 2 אינדיקטורים מרכזיים (ו-2 שוליים יותר). המרכזיים הם :

- [מרכז] ענין - ערך נוכחי נקי - NPV : שווי בהווה (במנחי ערך נוכחי) של כל תזרימי הפרויקט, חיוביים ושליליים כאחד. אם הענין חיובי, זה אומר שהפרויקט כדאי.
- [מרכז] שת"פ - שיעור תשואה פנימי - IRR - Internal Rate of Return : משקף את התשואה באחזים על ההשקעה בפרויקט. אם השט"פ גבוהה יותר מחיר ההון (עלות גiros ההון בחברה ; התשואה שדורשים משקיעיה) הפרויקט כדאי.
- [שולוי] ממד הרוחניות - קритריון יחס שבודן את הפרופורציה בין הערך הנוכחי של התקבולים לערך הנוכחי של התשלומים (בערך מוחלט). ערך גבוה מ-1 משמעו שהפרויקט כדאי.
- [שולוי] החזר ההון שנתי - קритריון שונה שמחשב את הסכום התקופתי של ההכנסה שתצדיק את הפרויקט.

### א. חשבו ענין, שת"פ ומדד רוחניות לכל אחד מהפרויקטים

מחיר ההון 12%

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

חישוב ענין - ערך נוכחי נקי מצרפי (שווי כספי) לכל פרויקט :

$$NPV_A = -19,946 + 9,000 * PVFA(12\%, 4) = 7,390$$

$$NPV_B = -47,232 + 20,000 * PVFA(12\%, 4) = 13,515$$

**חישוב שט"פ - שיעור תשואה פנימי:**

בונים את משווהת העניין של כל פרויקט.

מציבים במקום מחיר ההון את ה- IRR כנעלם.

משווים את כל המשווהה ל-0.

מחלצים את IRR.

$$IRR_A: -19,946 + 9,000 * PVFA(IRR_A, 4) = 0 \rightarrow PVFA(IRR_A, 4) = 2.216 \rightarrow IRR_A = 28.65\%$$

$$IRR_B: -47,232 + 20,000 * PVFA(IRR_B, 4) = 0 \rightarrow PVFA(IRR_B, 4) = 2.362 \rightarrow IRR_B = 25\%$$

**חישוב מDDR הרווחיות:**

$$PI = \frac{PV_{\text{טකבוליים}} - PV_{\text{תשלומיים}}}{|PV_{\text{תשלומיים}}|} = \frac{NPV + I_0}{I_0}$$

כאשר :

הערך  $NPV$  הוא עניין הפרויקט.

הערך  $I_0$  הוא סכום ההשקעה הראשונית בפרויקט, בערך מוחלט.

$$PI_A = \frac{7,390 + 19,946}{19,946} = 1.37$$

$$PI_A = \frac{13,515 + 47,232}{47,232} = 1.29$$

ב. בהנחת אי תלות בין הפרויקטים, באיזה / באילו מהם תשקיע החברה לפי כל קритריון?  
רכיבוי הממצאים ("בלתי תלויים" = אפשר לבצע מה שנרצה, את שניהם, רק אחד, אף אחד...):

kritiron	מה כדאי לבצע לפי הקритריון?	פרויקט ב	פרויקט א	
ענ"ג - NPV	בhnחט אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט שה - NPV שלו חיובי. וכן, יבוצעו שני הפרויקטים.	13,515	7,390	
שת"פ - IRR	בhnחט אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט של השקעה שעבורו השת"פ (התשואה מהפרויקט) גבואה מחיר ההוו. כאן - שניהם כדאים, כי תשואות שני הפרויקטים גבואה מחיר ההוו, 12%.	25%	28.65%	
מדד הרוחיות - PI	בhnחט אי תלות / מגבלה, כדאי לבצע כל פרויקט שעבורו מדד הרוחיות גבואה מ-1. כאן, שני הפרויקטים כדאים.	1.29	1.37	

ג. בהנחה שהפרויקטים מוצאים זה את זה, באיזה / באילו מהם תשקיעו לפי כל קритריון?  
ראינו שכל הפרויקטים כדאים עקרונית, ואת כולם כדאי לבצע בהיעדר מגבלה. אלא שאם הפרויקטים מוצאים  
זה את זה - המשמעות היא שניתן לבצע אחד מביניהם בלבד. וכן, לפי כל קритריון יועד לביצוע הפרויקט  
שערך הקритריון המתאים שלו מירבי.

kritiron	מה יועד לביצוע לפי הקритריון?	פרויקט ב	פרויקט א	
ענ"ג - NPV	פרויקט ב	13,515	7,390	
שת"פ - IRR	פרויקט א	25%	28.65%	
מדד הרוחיות - PI	פרויקט א	1.29	1.37	

ד. מהם הגורמים לסתירה בין ענ"ג לשת"פ בכלל שקיימים, בהיבט דירוג הפרויקטים מסעיף ג'?  
הגורמים לכך שנוצרה סתירה בין הפרויקט הממוצע ערך כספי (ב) לבין הפרויקט הממוצע תשואה באחזים  
(א) נובעת מוגדל השקעה שונה בפרויקטים. בפרויקט ב, גודל ההשקעה גבוהה יותר, וכן מרות שהתשואה  
היחסית באחזים נמוכה יותר - היא מתרגמת לערך כספי גבוהה יותר.

ה. השתמשו בערךון הפרויקט ההפרשי כדי "ליישב את הסטירה" בדילוג בין NPV ו-IRR  
תחיליה, נזכיר את המבנה התזרימי של הפרויקטים א ו-ב בפני עצם :

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000

הפרויקט ההפרשי הוא פרויקט דמיוני שמודגר בתור פרויקט שתזרימיו הם ההפרש בין תזרימי הפרויקטים "המתחרים" או "המוציאים את זה". אנחנו נהגים לבצע הפקה של הפרויקט ה"קטן" מהפרויקט ה"גדול" :  
כלומר, במקרה זה, נפחית מזרימי פרויקט ב (הוא הגדל - השקעה גדולה, הכנסות גבוהות) את תזרימי פרויקט ב. כך קיבל :

פרויקט / שנה	0	1	2	3	4
א	(19,946)	9,000	9,000	9,000	9,000
ב	(47,232)	20,000	20,000	20,000	20,000
<b>ב בניכוי א - הפרשי</b>	<b>(27,286)</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>	<b>11,000</b>

כאשר נתונים בפרויקט ההפרשי, מקובל לחשב את ה - IRR. איך נחשב את ה - IRR? עלינו לבנות משווהה המבטאת את הערך הנוכחי של כל תזרימי הפרויקט ההפרשי, להציב את מחיר ההון (IRR) כנעלם, ולהשווות ל-0 :

$$IRR \rightarrow NPV_{\text{הפרשי}} = 0 \rightarrow -27,286 + 11,000 * PVFA(IRR, 4) = 0$$

במהשך פיתוח קיבל :

$$11,000 * PVFA(IRR, 4) = 27,286$$

ואז :

$$PVFA(IRR, 4) = \frac{27,286}{11,000}$$

ואז בחלוקת מלווה-4 מקבלים בקירוב :

$$PVFA(IRR, 4) = 2.48 \rightarrow IRR \approx 22\%$$

כעת, בפגש קודם רأינו ש :

IRR	פרויקט ב	פרויקט א	קריטריון
13,515	7,390		ענ"ג - NPV
25%	28.65%		שת"פ - IRR

בנוסף כעת אני יודע ש :

הפרשי	פרויקט ב	פרויקט א	קריטריון
	13,515	7,390	ענ"ג - NPV
22%	25%	28.65%	שת"פ - IRR

בנוסף ידוע שמחיר ההון של החברה הוא 12%.

נפנה כתה לישוב הסטירה :

- לפי NPV מועדף פרויקט ב.
- לפי IRR מועדף פרויקט א.
- נניח שאנו רוצים לבנות קונסטרוקציה שתగרום לכך שגם לIRR פרויקט ב יהיה כדאי.
- לשם כך, נגידר את הפרויקט ההפרשי בתור פרויקט "נוסף" שהחברה יכולה לבצע.
- כאשר נבחן את כדאיות ההפרשי לפי IRR, אנחנו נטען ש :
- מבין פרויקטים א ו-ב לפי IRR מועדף א.
- אבל בנוסף לא, במידה וניתן, כדאי לבצע גם את הפרויקט ההפרשי :

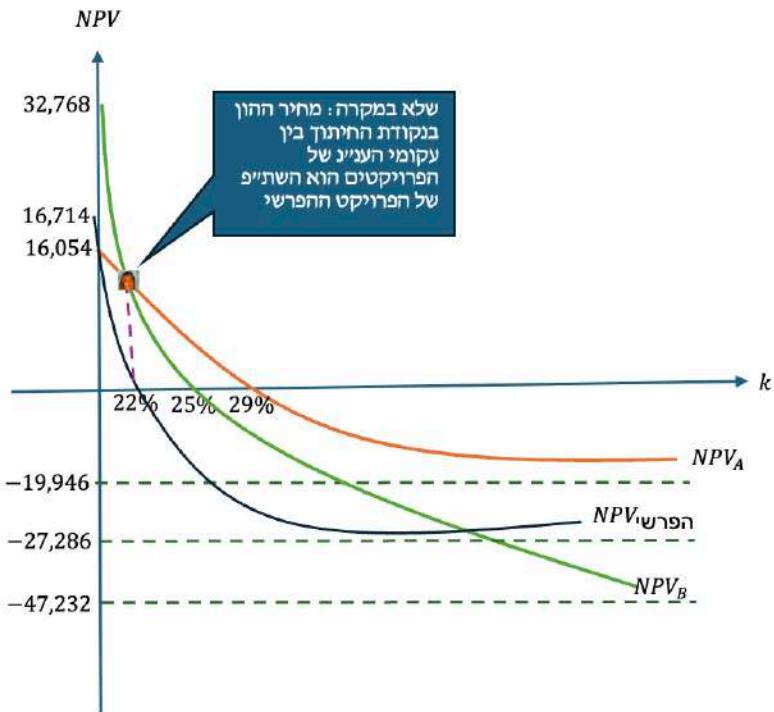
$$IRR_{\text{הפרשי}} = 22\% > 12\% = k$$

- מה שזה אומר בעצם : אם המשקיע יכול לבחור בין "א" בלבד, לבין "א" + "הפרשי", הוא יעדיף לפי IRR את א+ההפרשי.
  - אבל א + ההפרשי = הוא פרויקט ב ! ומדוע? כי ההפרשי הוא בبنיכו א :
- $$A + (B - A) = B$$
- כך קיבלנו שגם לפי השת"פ, אם נפצל את פרויקט B השלם, לשני פרויקטים שהם בדיקוק אותו דבר, פרויקט B (העדיף לפי ענ"ג) יועדף - וכך יישבנו את הסטירה בין ענ"ג לבין שת"פ.

1. שרטוט עקומות הענ"ג של כל הפרויקטים כפונקציה של מחיר ההון - לרבות NPV הפרשי

הפרש	+	-	שנה
-27,286	-47,232	-19,946	0
11,000	20,000	9,000	1
11,000	20,000	9,000	2
11,000	20,000	9,000	3
11,000	20,000	9,000	4

נק' חיתוך עם ציר אופקי (k)	IRR =	22%	25%	29%
נק' חיתוך עם ציר אופקי (k=0)	סכום פשוט	16,714	32,768	16,054
סכום ההשקעה	ערך מינימום	-27,286	-47,232	-19,946



### שאלה 50 - הגדרה ומשמעות בסיסית - של פרויקטים לא קונבנציונליים

הסבירו את המונח "פרויקטים לא קונבנציונליים" והדגימו באופן גרפי את הקושי בקבלת החלטות על בסיס כל השת"פ לאורו.

פתרון :

- מבוא : ככלל, הפרויקט שהוזג בשאלה קודמת הוא פרויקט "קלאסי" (קונבנציונלי) של השקעה. לא העמקנו בכך, אך הוא מתאפיין בתזרים שלילי שלאחריו תזרימי חיובים בלבד.
- פרויקט קלאסי (קונבנציונלי) מסווג אחר הוא פרויקט של (נטילת) הלואה. פרויקט של הלואה מתאפיין בתזרים חיובי שלאחריו תזרימי שליליים בלבד.
- בכל סוג הפרויקטים הקונבנציונליים (ההשקעות או הלואות) סימן תזרימי המזומנים מתחף (ممינוס לפולוס במקרה של השקעות, ומפלוס למינוס במקרה של הלואות) פעמי אחת בלבד.
- לעומתם, קיימים גם פרויקטים "לא קונבנציונליים". פרויקטים אלו הם פרויקטים שמספר היפוכי הסימן של תזרימייהם (מסימן חיובי לשילי ולהפך) שונה מ-1.

נדגמים :

פרויקט	0	1	2	3	4
א	-400	-100	80	200	900
ב	500	-100	-200	-300	-150
ג	800	800	800	-2,000	-2,000
ד	-400	-800	2,000	-100	-200
ה	-1,000	-2,000	-3,000	-4,000	-5,000
ו	1,000	2,000	3,000	4,000	5,000

פרויקט א : קונבנציונלי של השקעה. קונבנציונלי = היפוך סימן אחד. והוא של השקעה כי התזרמים הראשונים שליליים.

פרויקט ב : קונבנציונלי של הלואה. קונבנציונלי = היפוך סימן אחד. והוא של הלואה - כי התזרמים הראשונים חיובי והתזרמים העוקבים שליליים.

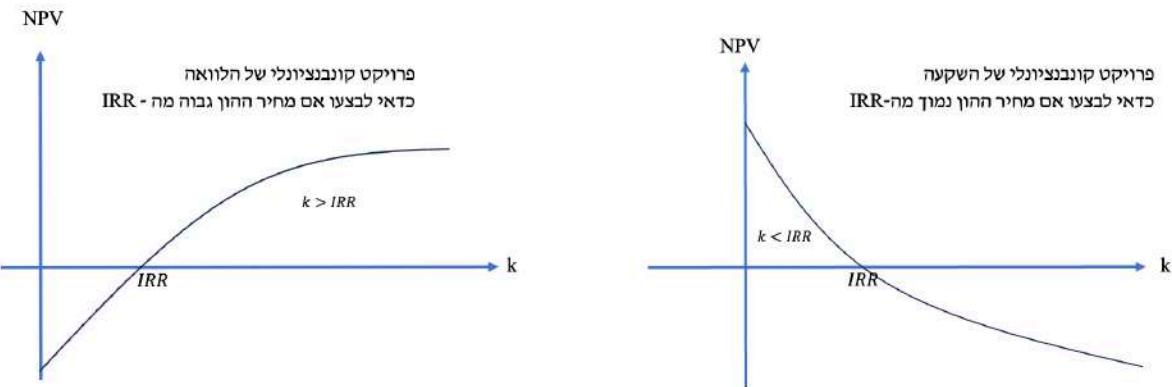
פרויקט ג : קונבנציונלי של הלואה.

פרויקט ד : לא קונבנציונלי (שני היפוכי סימן).

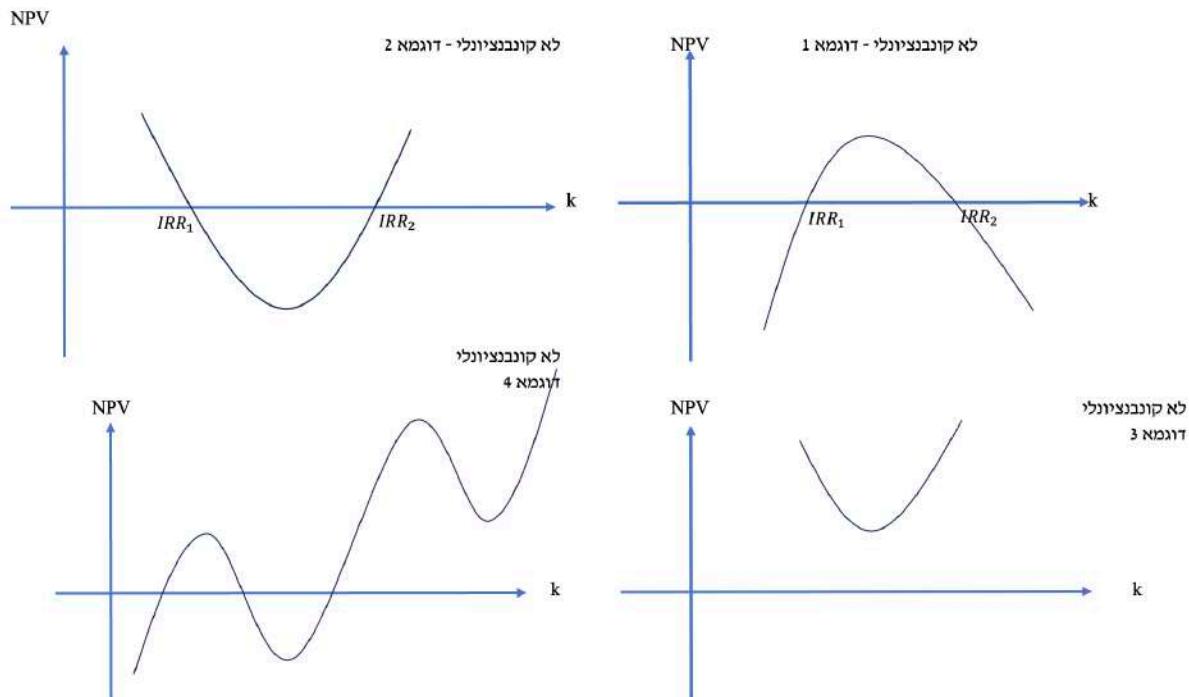
פרויקטים ה, ו : פרויקטים לא קונבנציונליים (גם אפס היפוכי סימן = לא קונבנציונלי).

פרויקטים לא קונבנציונליים אינם ניתנים לשיפוט על פי כלל השת"פ /  $IRR$  הויל ומספר השת"פים הוא עד מספר היפוכי הסימן. כלומר: **יתכן שלא יהיה שת"פ בכלל או שייהו כמה שת"פים.**

להלן תרשים המתאר את התצוגה הגנרטית של פרויקטים קונבנציונליים (של השקעה ושל הלוואה) ושל כדיותם של פונקציית ההפרש בין מחיר החון לשט"פ:



להלן דוגמאות לתרשיים (לא ממצה) לפרויקטים לא קובנציונליים, הממחישים את הביעיותות / היעדר האפשרות להכרעה בדבר כדאיותם לפי שת"פ:



כשאני מזהה פרויקטים לא קובנציונליים, יש אני נלחץ ואומר לעצמי: "וואוי רק שלא אנסה לשפוט כדאיות לפי שת"פ... כי השת"פ פה השתגע".

#### שאלה 55 - פרויקטים קובנציונליים וקשר בין ענ"ג לשת"פ במקרה של פרויקט בודד

פרויקט השקעה קובנציונלי הוא בעל ענ"ג חיובי.

- א. האם ניתן לומר שהפרויקט כדאי גם לפי קритריון השת"פ.
- ב. האם ניתן לומר שהפרויקט כדאי לפי קритריון ממד הרוחניות?

פתרון:

- א. אכן, עבור פרויקטים קובנציונליים של השקעה (עקום ענ"ג היורד משמאלו לימינו וחותך את ציר ה-  $k$  - בנקודת ספציפית אחת ויחידה) תמיד מתקיים שענ"ג חיובי משמעו במקביל ל-  $k > IRR$  קרי השת"פ גבוה ממחיר ההון, כלומר הפרויקט כדאי גם לפי כלל השת"פ (ראו תרשימים בעמוד הקודם).
- ב. קритריון ממד הרוחניות הוא קритריון יחסי המודד את הפרופורציה שבין הערך הנוכחי של התקבולים לבין הערך הנוכחי של התשלומים.

$$PI = \frac{\sum \text{תקבולים}}{|\sum \text{תשומים}|}$$

מדד זה ייעד על כדאיות השקעה, אם היחס גדול מ-1. ובמובן שמשמעות הדבר היא גם ענ"ג חיובי. במלים אחרות: עצם הענ"ג החיובי מוביל למדד רוחניות גבוה מ-1 ול כדאיות לאורו.

בשמדובר בפרויקט קובנציונלי של השקעה ועסקים בפרויקט אחד ספציפי ולא בדירוג פרויקטים המוצאים זה את זה - נשמרת עקביות לפי כל הקריטריונים: ענ"ג חיובי ממשעו כדיות לפי שת"פ וכן כדיות לפי מדריך הרוחניות. **הערה של מר משה קורסיאס 2.2.2024: שי, אני הדגש לסטודנטים: העקביות נשמרת תמיד לפי כל הקריטריונים בפרויקטים קובנציונליים של השקעה; אבל לא נובע מכך שהעקביות מופררת בין PI וענ"ג בפרויקטים אחרים. בפרט, לאור ההגדרה של קריטריון PI, הרי ברור ש - PI גדול מ-1 ממשעו ענ"ג חיובי (ראו עמוד קודם) וזאת ללא תלות בסוג הפרויקט.**

#### שאלה 52 - חזרה על פרויקטים

באפשרות להשקיע באחד מ-3 הפרויקטים הבאים:

5	4	3	2	1	0	
	200	200	200	200	-100	א
		700	250	150	-300	ב
500	400	300	200	100	-200	ג

מחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה.  
בחירה בפרויקט א מחייבת לחזור עליו פעמיים, בחירה בפרויקט ב מחייבת לחזור עליו אינסוף פעמיים ועל פרויקט ג לא ניתן לחזור. מהו הפרויקט שיעודף?

פתרון:

שימו לב! חשוב מאד להבדל בין שאלות הדנות בעצם הכספיות של פרויקט בודד העומד בפני עצמו (כגון השאלה הקודמת) לבין **שאלות המבוקשות לדרוג מספר פרויקטים / לבחור ביניהם**. בכלל, הקייטריוון הדומיננטי המוביל למסקנה כלכלית נכונה לצורך זה הוא קרייטריוון הענ"ג בלבד.  
שימו לב, ציינו שלפחות על חלק מהפרויקטים נדרש לחזור (לבצע שוב לאחר סיום הביצוע שלהם). כדי לתפעל מכך כזה, נתחל בчисוב נאיבי פשוט של ה- NPV הבסיסי של כל פרויקט "למחזר הפעלה אחד". לאחר מכן, נראה כיצד אפשר לתקן אותו כדי לגלו את אפשרות החזרה.

ענ"ג פרויקט א פשוט מאד לчисוב - הואיל ותזרימי ההכנסה שלו הם בגדר סדרה:

$$NPV_A = -100 + 200 * PVFA(5\%, 4) = -100 + 200 * 3.546 = 609.2$$

ענ"ג פרויקט ב כולל השקעה ראשונית שלאחריה 3 תזרימי השווים לחלוון זה מזה. לכן, אי אפשר לחשב ערך נוכחי תוק שימוש בנוסחת סדרה, אלא נחשב PV לכל תזרים עתידי בנפרד, כתזרים בודדים, ונסכום:  

$$NPV_B = -300 + 150 * (1 + 5\%)^{-1} + 250 * (1 + 5\%)^{-2} + 700 * (1 + 5\%)^{-3} = 674.3$$

ענין פרויקט ג - כולל גם הואה השקעה ראשונית שאחריה תזרים משתנים :

$$NPV_g = -200 + 100 * 1.05^{-1} + 200 * 1.05^{-2} + 300 * 1.05^{-3} + 400 * 1.05^{-4} + 500 * 1.05^{-5}$$

$$NPV_g = 1,056.6$$

כל זה היה נכון למחוזר הפעלה אחד ; ככלומר **בשלב ראשון** התעלמנו לחלוטין מה צורך / האפשרות לחזור על חלק מהפרויקטים. נרכז את הממצאים :

פרויקט	מחוזר הפעלה אחד	מחוזר הפעלה אחד - NPV
א	4	609.2
ב	3	674.3
ג	5	1,056.6

**בשלב השני (הבא)** - צריך להתייחס לחזרתיות. בהקשר זה, כדי לבצע חישוב שוויי פרויקטים החזריים על עצםם, ניתן להתייחס לכל ענין של מחוזר הפעלה אחד - כל תזרים שתדירותו היא כמשמעות מחוזר הפעלה של הפרויקט. ולמה כוונתי? פרויקט א הוא ל-4 שנים. הענין שלו לזמן 0 הוא 609.2. אך אם נחזר על הפרויקט הזה, המשמעות היא שזמן 4 נוצר שוב ענין זהה בסכום זהה.

ענין מחוזר הפעלה 2	609.2	4	3	2	1	0	א
--------------------	-------	---	---	---	---	---	---

נתאים את מחיר ההון שהוא 5% לשנה, לתקופת מחוזר הפעלה אחד של הפרויקט (בפרויקט א - 4 שנים) יש לשים לב שמחיר ההון הוא תמיד במנחים של ריבית אפקטיבית, וכן ההסתמה היא באמצעות חזקה מתאימה :

$$(1 + 5\%)^4 - 1 = 21.55\%$$

ואז הענין המכרי לביצוע פרויקט א פעריים יהיה :

$$NPV_{\text{א.פעריים}} = 609.2 * PVFA(21.55\%, 2) * (1 + 21.55\%)$$

הויל ושיעור הריבית איננו עגול, נחשב את ערך PVFA באמצעות נוסחתו המתמטית :

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r} = \frac{1 - \frac{1}{(1+21.55\%)^2}}{21.55\%} \approx 1.5$$

נציב ונקבל את הענין הכלול הנובע מהפעלת פרויקט א פעריים :

$$NPV_{\text{א.פעריים}} = 609.2 * 1.5 * (1 + 21.55\%) = 1,110.7$$

הסביר :

הענ"ג של מחזורי הפעלה מהוון כמספר מחזורי ההפעלה ובמחיר ההון המתאים לתקופת הפעלה - 4 שנים. אלא, שהויל והערך של הענ"ג המייצג את ה"תזרים" הראשון הוא בזמן 0, והואיל וערך הנוכחי של סדרה מוביל תמיד למועד הזמן שהוא "תקופת היון אחת אחרת" ביחס למועד התזרים הראשון, הרי שkopfci 4 שנים אחרת, והיביטוי  $609.2 * PVFA(21.55\%, 2)$  יציג את הענ"ג בזמן 4. כדי לתקןזמן 0, כפלנו שוב ב-1 ועוד מחיר ההון ל-4 שנים.

ניבור בעת **פרויקט ב**. זהו פרויקט שמשך ביצועו (ולכן פרק הזמן בין התרחשויות הענ"ג שלו) 3 שנים. כמו כן, על פרויקט זה חוזרים לאינסוף:

לאינסוף...	6	3	0	ב
	674.3 ענ"ג מחזורי הפעלה 3	674.3 ענ"ג מחזורי הפעלה 2	674.3 ענ"ג מחזורי הפעלה 1	

כדי לחשב ערך הנוכחי לסדרה אינסופית זו, שתדריות תזרימיה 3 שנים, נחשב את מחיר ההון הבלתי שנתי. כזכור, הוא היה בשיעור 5% לשנה, ולכן לתקופה של 3 שנים ערכו:

$$(1 + 5\%)^3 - 1 = 15.7625\%$$

ערך הנוכחי של סדרה אינסופית (פרויקט ב מתאים לכך, בהינתן החזרתיות עליו לאינסוף) מתקבל על ידי חלוקת התזרים הקבוע במחיר ההון לתקופת תשלום:

$$NPV_{Ens of} = \frac{674.3}{15.765\%} * (1 + 15.765\%) = 4,951$$

כעת, לאחר ששיםשרנו (התיחסנו לדרישה / לצורך חזרה חלק מהפרויקטים ולחשב את ענ"ג המתואם בהתאם), התוצאות הן:

פרויקט	ענ"ג
א - ביצוע פעממיים (8 שנים)	1,111
ב - ביצוע לאינסוף	4,951
ג - ביצוע פעם אחת	1,057

ולכן יש להעדיף את פרויקט ב.

**שאלה 53 - שימוש בהגדרת השט"פ לחילוץ תזרימיים - לבית**

פרח בע"מ שוקלת לבצע את אחד מבין הפרויקטים הבאים:

4	3	2	1	0	
x	x	x	x	-100	א
y	y	y	y	-60	ב

ידעו שהشت"פ של פרויקט א הוא 15%, והشت"פ של פרויקט ב הוא 20%.

נדרש 1: חשבו את x ואת y.

נדרש 2: חשבו את השט"פ של הפרויקט ההפרשי.

פתרונות:

נדרש 1: ההגדרה המתמטית של השט"פ קובעת, שאם נחשב  $NPV$  לפרויקט, ונציב בתור מחיר ההון את השט"פ, איזי התוצאה היא אפס (הشت"פ הוא מחיר ההון התיאורטי המאפס את הענ"נ). בהתאם להגדרה זו:

$$NPV_A = 0 = -100 + x * PVFA(15\%, 4) \rightarrow x \approx 35.026$$

$$NPV_B = 0 = -60 + y * PVFA(20\%, 4) \rightarrow y \approx 23.175$$

נדרש 2:

4	3	2	1	0	
35.026	35.026	35.026	35.026	-100	א
23.175	23.175	23.175	23.175	-60	ב
11.851	11.851	11.851	11.851	-40	הפרשי: א בניכוי ב

כדי לחשב את שט"פ הפרויקט ההפרשי, כזכור, יש לבנות משווהות עניין, להציב בה את מחיר ההון כנעלם, ולהשוותה לאפס.

$$NPV_{Hefreshi} = -40 + 11.851 * PVFA(IRR, 4) = 0 \rightarrow IRR = 7.157\%$$

הערה חשובה: את ה- IRR פתרתי באקסל, וזאת מהטעם שבנתונים שבניתי, הריבית המתקבלת אינה עגולה, ולא ניתן היה לאיירה בצורה ברורה בלוח א-4. במלות, על פי רוב, הריבית שתחולץ תהיה עגולה ומתואמת ללוח אופן מלא.

**שאלה 54 - קבלת הכספיים מוקדם / מאוחר - השפעה על כדאיות ועל שת"פ - לביה**

שני פרויקטים דורשים השקעה ראשונית זהה, ומנייבים תקבולים בסכום כולל זהה. אלא שבפרויקט א התקבולים הגבוהים מתקבולים בשנים הראשונות, והקטנים בשנים האחרונות, ובפרויקט ב התקבולים הגבוהים מתקובל בשנים האחרונות, והקטנים בשנים הראשונות.

א. איזה פרויקט כדאי יותר?

ב. לאיזה פרויקט שת"פ גבוהה יותר?

**פתרון :**

א. בהגדרה, קבלת עיקר הכספיים מוקדם יותר מגדילה את ערכם הנוכחי (את הענ"נ), את שוויים ואת הcadיות. לכן פרויקט A עדיף.

ב. בהגדרה, קבלת הכספיים מוקדם יותר מקטינה את סכום ההשקעה, וגורמת לתשואה להיות מحسوبة ביחס לקרן השקעה קטנה יותר, מה שմגדיל את התשואה באחזois - כמובן, את השת"פ.

במפגש המחשנו טיעונים אלו על בסיס אקסל:

	אפרת	פרח
0	-1,000	-1,000
1	500	100
2	400	200
3	300	300
4	200	400
5	100	500

IRR	20%	12%
-----	-----	-----

**שאלה 54.1 - בחירת תמהיל פרויקטים מיטבי במקורה של מגבלת תקציב**

לחברה הוצעו להשקעה 5 פרויקטים :

פרויקט	השקעה באלפי ש"ח	מדד הרוחניות	ענין
א	1,000	1.15	150
ב	600	1.2	120
ג	300	0.83	?
ד	700	1.17	119
ה	900	1.1	90

החברה כפופה למגבלת תקציב של 2,000,000 ש"ח (2,000 אלף ש"ח). בנסיבות אלו, הפרויקטים שייבחרו יגדילו את ערך הפירמה ב :

- א. 240 אלף ש"ח
- ב. 269 אלף ש"ח
- ג. 270 אלף ש"ח
- ד. 210 אלף ש"ח
- ה. 209 אלף ש"ח

ר��ע ופתרון (התשובה ג, להלן פתרון) :

כאשר נדרש לבחור בין פרויקטים המוציאים זה את זה ו/או כאשר קיימת מגבלת תקציב - שוב תacen סטירה בין הכספייטריוונים. והמלך שלנו, הכספייטריוון הכלכלי הנכון לבחירה, זה שמקסם את ערך הפירמה ולפיו נועל אלא אם כן ביקשו מפורשות אחרת - הוא קysiיטריוון ה - NPV.

במלים אחרות, אם קיבל טבלת פרויקטים שמצוצת בתווני NPV, IRR, PI ואדרש לבחור בתמהיל מיטבי בכפוף למגבלת השקעה מקסימלית פשוט אבחן את העניין המצריפי המתאפשר מכל צירוף פרויקטים העומד במגבלת התקציב - ואבלר את המקסימלי נקודה.

בתור התחלה, נעייף החוצה פרויקטים בעלי עניין שלילי / מדד רוחניות קטן מ-1 / שט"פ נמוך ממחיר ההון (במקורה של השקעות). כך שאת ג אני שולב בימידי.

פרויקט	השקעה באלפי ש"ח	מדד הרוחניות	ענין
א	1,000	1.15	150
ב	600	1.2	120
ד	700	1.17	119
ה	900	1.1	90

נבחן את הוריאציות המתאפשרות בסכום השקעה מצריפי של 2,000 :

$$NPV_{A+B} = 150 + 120 = 270$$

$$NPV_{A+D} = 150 + 119 = 269$$

$$NPV_{A+E} = 150 + 90 = 240$$

$$NPV_{B+D} = 120 + 119 = 239$$

$$NPV_{B+E} = 120 + 90 = 210$$

$$NPV_{D+E} = 119 + 90 = 209$$

חברים וחברות, יש לנו מנצח: שילוב הפרויקטים המתאפשר במוגבלות התקציב ומקסם את ה- NPV שילוב פרויקטים A ו-B מה שMOVEDIL לענין מצרפי (=עליה בערך החברה) בסך של 270 אלפי ש"ח.

#### שאלה 54.2 - פרויקטים משלימים

לחברה הוצע להשקיע ב-2 פרויקטים שערכיהם באלפי ש"ח הם כדלקמן:

זמן	פרויקט A	פרויקט B
-500	-800	0
140	180	1
140	180	2
140	180	3
140	180	4
140	180	5

שיעור ההיוון הוא 5%.

הניחו כי קיימת תלות בין ההשקעות, כך שביצוען בו זמן יותר יוביל לכך שתזרימי פרויקט A יגדלו ב-40 א' ש"ח בשנה (ambil שיחול שינוי בתזרימי פרויקט B).

מבחן שהחברה תעדייף:

- להשקיע רק בפרויקט A
- להשקיע רק בפרויקט B
- להשקיע בשני הפרויקטים
- לדוחות את שני הפרויקטים
- כל יתר התשובות שגויות

רקע ופתרון (התשובה ג - להלן הפתרון):

כפי שאמרה רים: כאשר הפרויקטים הם תלויים, המשמעות היא שביצוע האחד משפייע על الآخر ולהפך. במקרה זה, תיארו את סוג התלות במובן זה שהאשר שני הפרויקטים מבוצעים בו זמןית, תזרימי א' גדלים ותזרימי B לא משתנים. מצב כזה של תרומה לתזרים הכוון כתווך של מילוב הפרויקטים נקרא **פרויקטים משלימים**. בהינתן הצורך לבחון את ביצועם, ניציר 3 חלופות לשם החלטה:

חלופה 1: ביצוע A בלבד - לפי נתוני הקיימים.

חלופה 2: ביצוע B בלבד - לפי נתוני הקיימים.

חלופה 3: ביצוע A + B - לפי הנתונים הקיימים בתוספת השיפור הנובע מביצוע משולב.

כמו כן, מבחינת הקритריון שנייהם, הואיל ולא הגבילו אותנו - כמובן שכלל על הקритריון שהוא המלך, על העניין - NPV שמיקסומו הוא מטרת החברה העליונה.

זמן	פרויקט א	פרויקט ב	A+B
0	-800	-500	-1300
1	180	140	360
2	180	140	360
3	180	140	360
4	180	140	360
5	180	140	360

$$k = (\text{נתוע}) \quad 5\%$$

NPV =	פרויקט א	פרויקט ב	A+B
	-20.694	106.127	258.612

כאשר : תזרימי פרויקטים A+B ביצוע משותף / יחד הם החיבור של תזרימי ההכנסה של פרויקט A (משנה 1 ואילך) עם תזרימי ההכנסה של פרויקט B (משנה 1 ואילך) בתוספת 40 (ההשפעה התוספתית של השילוב הנתונה בשאלת).

חישוב העניין של אפרשות בהינתן מחיר הוו של 5% :

$$NPV_A = -800 + 180 * PVFA(5\%, 5) \approx -20.694$$

$$NPV_B = -500 + 140 * PVFA(5\%, 5) \approx 106,127$$

$$NPV_{A+B} = -1,300 + 360 * PVFA(5\%, 5) \approx 258.612$$

מכאן, שנודיע לבצע את שני הפרויקטים בו זמינות (כך יתקבל עניין מצרי מירבי).

**שאלה 54.3 - החזר הון שנתי - חישוב הכנסה מינימלית להצדקה פרויקט**  
 חברת שוקلت לרכוש מכונה לחימום נקניק. לפי ההסדר עם היבואן התשלומים בגין המכונה יבוצעו בתחילת כל שנה במשך 4 שנים סכום של 200 אלף ש"ח לשנה. ההכנסות ממכירת המוצר צפויות להתקבל החל מיום השנה ה-4 במשך 6 שנים. בהנחה שמחיר הון של החברה הוא 15%, מהי הכנסה השנתית המינימלית אשר תצדיק את ביצוע הפרויקט?

**רקע ופתרון :**

ככל, הכנסה השנתית המינימלית המצדיקה פרויקט היא זו אשר בהינתנה, ה- NPV הוא אפס (מינימום הכספיות). לפיכך, אם נבנה את משווהת ה- NPV, נציב את סכום הכנסה התקופתית כנעלם, ונשווה לאפס - חילוץ הנעלם הוא התשובה לשאלה.  
 מעבר לעובדה בסיסית זו, המושג הנ"ל = הכנסה התקופתית המצדיקה את הפרויקט - נקרא גם "חזר הון שנתי".  
 במקרה אחר, אם היו דורשים מאייתנו לחשב את החזר הון השנתי ולקבוע כדאיות לאורו, הייתי פועל בדיקת אותה הגישה.



זמן	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	זמן
תזרים	-200	-200	-200	-200	-200	x	x	x	x	x	תזרים

הסבירים: הויל ו-4 תזרימי הULOות הם בתחילת כל שנה, הרי שבמוקם להציבם על ה"ציר" בזמן 1 עד 4, הם יוצבו בזמן 0 עד 3.

ניצור כאמור את משווהת העניין - שבת התזרים x הוא נעלם - ונשווה לאפס :

$$NPV = -200 * PVFA(15\%, 4) * (1 + 15\%) + x * PVFA(15\%, 6) * (1 + 15\%)^{-3} = 0$$

**נפתח ונקבל :**

$$-200 * 2.855 * 1.15 + x * 3.784 * 1.15^{-3} = 0$$

**כלומר :**

$$-656.65 + 2.488x = 0 \rightarrow x \approx 263.9$$

המשמעות היא שהכנסה השנתית המינימלית שתצדיק את הפרויקט היא כ- 263.9. פרשנות נוספת בצד הטכני היא לומר ש"במקרה זה, החזר הון השנתי הוא 263.9".

**שאלה 54.4 - מושגי יסוד לגבי תלות בין פרויקטים**

1. הסבירו את המושגים הבאים :

- א. פרויקטים בלתי תלויים כלכליות.
- ב. פרויקטים "ללא קיצוב הון".
- ג. פרויקטים בלתי תלויים כלכליות ללא קיצוב הון.
- ד. פרויקטים המוציאים זה את זה.

2. הסבירו מהו הקriterion הרלוונטי לדירוג הפרויקטים / החלטה לגבייהם.

פתרונות :

1. הסבר המושגים :

א. פרויקטים בלתי תלויים כלכליות CIA (CIA = Capital Intensive Activities) – אלו הם פרויקטים שניתן לביצוע באופן אוטונומי, כאשר ביצוע אחד מהם לא משליך על עצם יכולת לבצע את הפרויקט الآخر; וכן לא משפייע לטובה או לרעה על תזרימי הפרויקט האחר. הדוגמה: רותם הוא משקיע עשיר במיוחד; מוצע לו לפתח בורקס בעפולה ו/או חברת סטארט אפ.

ב. פרויקטים "ללא קיצוב הון" – המונח "קיצוב הון" הוא מילה אחרת ל"מגבלת השקעה". כאשר לחברה מוצע להשקיע במספר פרויקטים, אבל גובה ההשקעה המצרפי שתוכל לבצע מוגבלanno נאמר שהוא פועלם בעולם עם קיצוב הון. לעומת זאת, בעולם ללא קיצוב הון – אין מגבלת השקעה.

ג. פרויקטים בלתי תלויים כלכליות ללא קיצוב הון = לא זאת בלבד שהפרויקטים בלתי תלויים, אין שום מגבלה על היקף השקעה מסוימלי שאליו כפופה החברה (היא תעשה "מה שבאה לה" מתוך האפשרות). דענו לכם, שאם אמרו שפרויקטים הם בלתי תלויים, ללא מידע נוסף – המשמעות היא שהם בלתי תלויים ללא קיצוב הון.

ד. פרויקטים המוציאים זה את זה – פרויקטים אשר ביצוע האחד מהם מבטל (מושcia) את יכולת לבצע את הפרויקט האחר (ראו בין היתר סעיפים ג ו איילך של שאלה 1).

#### שאלה 54.5 – חישוב ענין'ן כאשר מחיר ההון משתנה

למשקיעו הוצע פרויקט שתזרימייו כדלקמן :

זמן	0	1	2	3	4	5
תזרים	-80,000	-90,000	-100,000	-50,000	400,000	500,000

ידוע שמחיר ההון של החברה הוא 5% לשנה בכל אחת מ-3 השנים הראשונות, ו-10% לשנה בכל שנה לאחר מכן.  
נדרש : מהו ענין'ן הפרויקט.

פתרונות :

ראשית, באיזה תחום בכלל השאלה דנה? לאיזו יחידה אנו קשורים?  
הואיל ודנים בפרויקט, שתזרימיו נתוניים, והמידע הקיים הוא לגבי מחיר ההון של החברה, אני יודע שאני ביחידת 6 – יחידה שדנה בחישובי כדיות פרויקטים מנוקדות ראותן של חברות.

מה זה מחיר ההון? כיצד הוא שונה מריבית? עקרונית – לצרכינו, הוא לא מודד שונה, עדין מדובר באחוז מסויים שבו נהוון (נחשב PV) לתזרימיים העתידיים של הפרויקט. בrama הפרקטי – בחברות (בשונה מעסקים פרטיים

או אנשים פרטיים) קיימים מגוון רחב של מקורות מימון – הלוואות מסווגים שונים, אגרות חוב, מנויות מסווגים שונים וכן הלאה. לכל מקור מימון כזה קיימת "ריבית" (דרישת תשואה / מחיר הון) אחרת מצד משקיעיה. לאור זאת, למעשה, בחברה יש "ערבי ריבית שונים ומגוונים" שככל אחד מהם מייצג מקור מימון שונה. השיקול של מקורות המימון והריביות בגין מוביל ל"ריבית משוקלلت" שנקראת "מחיר הון".

בהתמצית: חישוב ענין פרויקט = ערך נוכחי נטו של כל תזרימי = יחידה 6 (מחיר הון = ריבית).

$$NPV = -80,000 - 90,000 * (1 + 5\%)^{-1} - 100,000 * (1 + 5\%)^{-2} - 50,000 * (1 + 5\%)^{-3} + 400,000 * (1 + 10\%)^{-1} * (1 + 5\%)^{-3} + 500,000 * (1 + 10\%)^{-2} * (1 + 5\%)^{-3}$$

$$NPV \approx 371,471$$

הואיל וענין הפרויקט חיובי, כדי לקבלו: המשמעות היא שבהתחשב בתזרימי, בעיתויים ובדרישות התשואה של המשקיעים – עדין הערך הכללי חיובי. שימו לב שכאשר חישבנו את ה-  $NPV$  כבר גילמנו את דרישות התשואה של המשקיעים, לכן ערך ה-  $NPV$  או ענין (ערך נוכחי נקי) הוא סופי וחיויבו מUIDה על כדאיותו.

#### שאלה 54.6 – הלוואה מסובסדת לעידוד פרויקט

חברה שוקלת לבצע פרויקט של השקעה שדורש מהחברה לשלם 2,000 ש"ח והוא מנתב תזרים חיובי בסך 582.57 ש"ח לשנה במשך 5 שנים. כדי לעודד את ביצוע הפרויקט מציעה הממשלה לחברת הלוואה בסך של 1,500 ש"ח שנושאת ריבית שנתית בשיעור 10% ונפרעת ב-5 תשלומים שנתיים של קרן וריבית. בהנחה שמחיר הון של החברה הוא 15%, מהו שט"פ התכנית והאם התכנית כדאית?

פתרון:

תחילה, נרצה לאפיין את תזרימי המזומנים המצרפיים מהפרויקט בכל נקודת זמן. אלו יתיחסו הן לתזרימי הפרויקט הנתונים, והן לתזרימי הלוואה (קבלתה וחזרה) בכל נקודת זמן. נקבל ווראו גם הסבר לאופן חילוץ החזרי הלהואה בצלום המשך:

זמן	5	4	3	2	1	0
הפרויקט	582.57	582.57	582.57	582.57	582.57	-2,000
הטבה	-395.67	-395.67	-395.67	-395.67	-395.67	1,500
סה"כ תכנית	186.90	186.90	186.90	186.90	186.90	-500

סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה, בהיוון בריבית המגולמת בה:

$$LOAN = PV(PMTs) \rightarrow 1,500 = x * PVFA(10\%, 5) \rightarrow x = 395.67$$

מבחינתי – הפרויקט כעת מיוצג על ידי התזרימיים המצרפיים בצהוב. ובהקשר זה, אטען:

הדרך המתמטית לחשב את התשואה המומוצעת באחזים מפרויקט (שת"פ – שיעור תשואה פנימי) היא על בסיס המשפט הבא:

בונים את משווהת / נוסחת העניין /  $NPV$ .  
 מסמנים את מחיר ההון (הרביבית להיוון) כנעלם.  
 משווים את כל הביטוי ל-0.

נוסחת העניין :

$$NPV: -500 + 186.9 * PVFA(15\%, 5)$$

נוסחת חילוץ השט"פ (IRR) :

$$-500 + 186.9 * PVFA(IRR, 5) = 0$$

מפה נוכל להגיע ל :

$$PVFA(IRR, 5) = 2.675 \rightarrow IRR \approx 25\%$$

כדי שפרויקט יהיה כדאי לפי קритריון השט"פ, נדרש לעמוד בשני תנאים :  
 א. הפרויקט הוא פרויקט "רגיל" של השקעה (אתה משקיע ואז מקבל) – נרחב בהמשך.  
 ב. השט"פ גבוהה ממחיר ההון (מהתשואה אותה דורשים המשקיעים).

כון, השט"פ שהוא 25% גבוהה ממחיר ההון שהוא 15%, מה שמעיד על כדאיות הפרויקט.

2. קרייטריונים רלוונטיים (בהתה שמדובר בפרויקטים קונבנציונליים של השקעות) :

סוג הפרויקט	NPV ענין	IRR שת"פ	PI מדד רוחניות
בלתי תלויים ללא קיצוב הון	יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $NPV > 0$	יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $IRR > k$	יש לבצע כל פרויקט אשר מקיים $PI > 1$
מציאותים זה את זה	יש לבצע את הפרויקט שה - $NPV$ שלו מירבי. הكريיטריון תקף.	עלול שלא להיות תקף (ראו סטירה בין IRR ל- $NPV$ בשאלה 49.1)	עלול שלא להיות תקף : גם קרייטריון זה הוא בסופו של יומם - יחסית
פרויקטיםבלתי תלויים אך בתנאי קיצוב הון	יש לבצע את תמהיל הפרויקטים המוביילים ל- $NPV$ מטרפי כולל miribi. הكريיטריון תקף.	עלול שלא להיות תקף, מאותה סיבה שאיננו תקף כאשר מוצאים זה את זה	עלול שלא להיות תקף : גם קרייטריון זה הוא בסופו של יומם - יחסית

## רקע ותוכן:

- הסברים ותרגילים בנושאי ריבית נכללו גם בתכנים המוכתבים לעיל כ"מפגש 2". מטעמי קוצר יריעת, לא עברנו על כולם, אך דעו כי כולם רלוונטיים.
- לצד זאת, בפגש הקודם הוצגו עקרונות ועיקרים ביחידה 6 (כדאיות פרויקטים). גם בהקשר זה, קיימים מידע רב ערך ללימוד עצמי בתכנים המפגש הקודם.
- כמו כן, חוזר על ההנחה ללמידה באמצעות לב ובעוצמה מהרציפים. בדרך כזו, יהיה לכם גם בסיס איתן הדרוגתי (רציפים) אך לא נזנה את הרמה הנדרשת ב מבחון, שהיא חשובה מאוד מאוד.
- ספציפית בפגש זהה – נציג בהדרוגה את המהות והמשמעות של חישובי ריבית (ישנם הסברים נוספים במקטעים שדילגנו עליהם בפגש 2, אך נתחל מאפס לנוחות הלומד). נתרgal מספר תרגילים בסיסיים יחסית ואז נ עבור לתרגול ברמת בוחנה לדגשים נוספים.
- ככל שייתיר הזמן, ננוק גם דגשים ותרגילים מבחנים לגבי יחידה 6 בדבר כדאיות פרויקטים.
- בפגש הבא – עוברים ליחידה 8 בכל מקרה.

### שאלה 54.7 – חישובי ריבית – מיני רצוי ותחשב בסיסי לסוגי המרות ריבית

מציעים לך ליטול הלוואה בסך 100,000 ש"ח לשנה. ההלוואה מסולקת בתשלום אחד יחד עם הריבית הצבורה במועד סיום ההסדר. להלן המסלולים המוצעים לך:

מסלול א: הלוואה הנושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל חודש.

מסלול ב: הלוואה הנושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 7% המוחשבת כל רבעון.

מסלול ג: הלוואה הנושאת ריבית המנוכה מראש בשיעור 5% לשנה.

מסלול ד: הלוואה שאינה נושאת ריבית, אך דורשת תשלום עמלת ערך מסמכים בשיעור 3% מסכום העסקה מיד בתחילת, ותשלום דמי פירעון בשיעור 3% בסיום ההלוואה.

מסלול ה: הלוואה הנושאת ריבית רבעונית בשיעור 2%.

נדרש: חשבו את הריבית האפקטיבית השנתית בכל מסלול ועל בסיסה, קבעו מהו המסלול המועד.

פתרון:

מהי בכלל ריבית אפקטיבית? זהה למשמעות הריבית ה"אמיתית" או ה"כוללת", זו שambilיה בחשבון את מכלול השפעות העסקה על עלות המימון הכלולה בה. בפרט: ריבית אפקטיבית מביאה בחשבון השפעות של ריבית דרייבית, וכן השפעות של ריבית מראש, עלויות עסקה וعملות.

המקרה שבו הריבית הנתונה נקובה, והיא "מחושבת כל ריבית דרייבית – מסלולים א ו-ב:" המושג "חישוב ריבית" משמעו חישוב יחס של הריבית הנתונה בהתאם לתקופת החישוב, במלים אחרות – אם (מסלול א): הריבית השנתית הנקובה 6% והיא מחושבת כל חודש:

$$r = \frac{R}{n} \rightarrow r_{\text{חודש}} = \frac{6\%}{12} = 0.5\%$$

כasher :

הሪיבית הנקובה הנטונה	$R$
מספר תקופות חישוב הריבית בתקופה הנקובה הנטונה	$n$
הריבית לתקופה חישוב אחת (גם נקובה וגם אפקטיבית)	$r$

כעת, כאשר אני אוחז בריבית לתקופה חישוב, אוכל להמיר אותה לריבית אפקטיבית לתקופה אחרת באמצעות מערך חזקה מתאים :

$$r_e = (1 + r)^m - 1 \rightarrow r_e = (1 + 0.5\%)^{12} - 1 = 6.168\%$$

כasher :

הריבית לתקופה חישוב אחת (גם נקובה וגם אפקטיבית)	$r$
מספר תקופות חישוב הריבית בתקופה הנדרשת	$m$
ריבית אפקטיבית לתקופה הנדרשת	$r_e$

אפשר גם "לשלב" את הנוסחאות אחת שמסוגלת להמיר ריבית נקובה המוחושבת מספר פעמים לריבית אפקטיבית לתקופה הנדרשת :

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 \rightarrow r_e = \left(1 + \frac{6\%}{12}\right)^{12} - 1 = 6.168\%$$

(מסלול ב) : הריבית השנתית הנקובה 7%, מחושבת כל רביעון :

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 \rightarrow r_e = \left(1 + \frac{7\%}{4}\right)^4 - 1 = 7.186\%$$

מסלול ג : הלוואה הנושאת ריבית המנוכה מראש בשיעור 5% לשנה

כאשר ריבית מנוכה מראש – הדבר מגדיל את הריבית האפקטיבית בשיעור ניכר מעלה ערכה המוצהר / הנקוב. מדוע? משום שכאשר מנכימים מראש, משלמים את אותה ריבית על פחות קרן. הנוסחה המתאימה לחישוב זה היא צו שمبיאה בחשבון את העובדה שניכוי מראש למעשה מקטין את הקרן הראשונית, ולא מגדיל את התשלומים הסופי.

$$r_e = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 \rightarrow r_e = \frac{1}{\left(1 - \frac{5\%}{1}\right)^1} - 1 = 5.263\%$$

כasher :

הריבית (הנקובה) המנוכה מראש	$R_d$
מספר תקופות חישוב הריבית בתקופה הנקובה (אם לא נאמר – 1)	$n_d$
מספר תקופות חישוב הריבית בתקופה הנדרשת	$m_d$
ריבית אפקטיבית לתקופה הנדרשת	$r_e$

מסלול ד : הלוואה שאינה נושאת ריבית, אך דורשת תשלום עמלת ערך מסמכים בשיעור 3% מסכום העסקה מיד בתחילת התשלמה, ותשלום דמי פירעון בשיעור 3% בסיום הלוואה

כמובן שעצם הטענה לפיה הלוואה "ללא ריבית" משוללת כל יסוד ; אמנם אין נתוני ריבית נקובה, אך עלויות העסקה המתבטאות בעמלות ודמים לסוגיהם – נתונות גם נתונות. במצבים אלו, נזכר – שבסופו של יום, במיוחד בעסקאות פשוטות שנפרעוות בתשלום אחד – הרו היחס בין סך התשלום נטו לבין סך התקובל נטו בהלוואה הוא ייצוג נכון של הריבית האפקטיבית. להלן ייצוג גרפי של התקובל ההחלה והתשלום הסופי, לצד הפרופורציה ביןיהם שמנדרה את הריבית האפקטיבית :

0	1
ネットת הלוואה 100,000	סילוק הקון -100,000
nicot עמלת מראש -3,000	תשלום נוספים - דמי פירעון -3,000
סכום נטו בזמן 0 97,000	סכום נטו 103,000 P <sub>t</sub>

$$r_e = \frac{P_t}{P_0} - 1 \rightarrow \frac{103,000}{97,000} - 1 = 6.186\%$$

או :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 = \frac{(1 + 3\%)^1}{(1 - 3\%)^1} - 1 = 6.186\%$$

מסלול ה : הלוואה הנושאת ריבית רבעונית בשיעור 2%

כברית מחדל, אם לא נאמר שהריבית נקובה ומחושבת כל ..., אין אזכור של nicot מראש וכיו"ב, יש להניח שהריבית הנתונה היא אפקטיבית. והואיל והיא אפקטיבית, המרתה מתוקפה לתקופה מבוצעת באמצעות מעריך חזקה מתאים בלבד, ללא פעולות כפל או חילוק כלל.

$$r_e = (1 + r)^m - 1 \rightarrow r_e = (1 + 2\%)^4 - 1 = 8.243\%$$

במלים : לוקחים 1 ועוד הריבית הנתונה (שכברית מחדל אם לא נאמר אחרת, היא אפקטיבית) בחזקה שהיא התשובה לשאלת – כמה תקופות ריבית נתונה נכנסות לתקופה הנדרשת.

רכיבו הריביות במסלולים השונים :

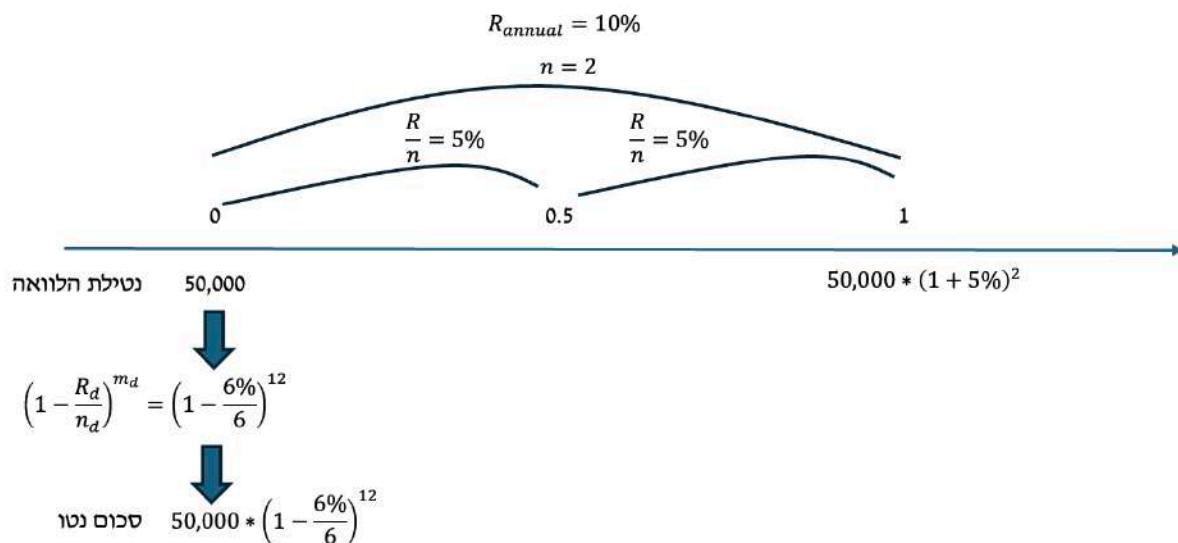
מסלול	ריבית אפקטיבית
א	6.167%
ב	7.185%
ג	5.263%
ד	6.186%
ה	8.243%

המסלול שיעודך בהלוואות יהיה המסלול שבו הריבית האפקטיבית היא הנמוכה ביותר – וכך מדבר במסלול ג.

אילו היה מדובר בהשקעות / פקדו / חסכו – אופן חישוב דומה עקרונית ומועדפת הבחירה עם הריבית האפקטיבית הגבוהה ביותר.

#### שאלה 54.8 – שילוב של ריבית מראש וריבית דרייבית

משה יכול ליטול היום הלואה לשנה בסך 50,000 ש"ח הנושאת ריבית שנתית נקובה בשיעור 10% המוחשבת כל חצי שנה, ובנוסף ריבית מראש חצי שנתית בשיעור 6% המוחשבת כל חודש. מהי הריבית האפקטיבית השנתית בהסדר?



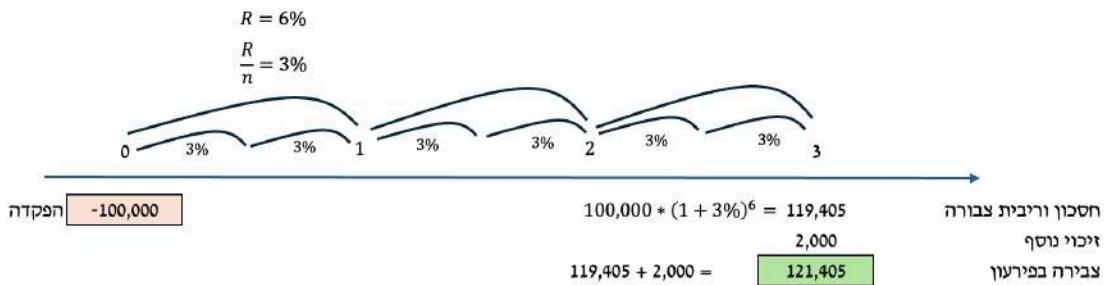
$$r_e = \frac{50,000 * (1 + 5\%)^2}{50,000 * \left(1 - \frac{6\%}{6}\right)^{12}} - 1 = 24.38\%$$

שימוש בנוסחה המלאה :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{2}\right)^2 - 1}{\left(1 - \frac{6\%}{6}\right)^{12}} = 24.38\%$$

### שאלה 54.9 – השראה מ"בחן את עצמך" ליחידה 5

בנק מציע לכם להפקיד היום לחסכון 100,000 ש"ח לתקופה של שלוש שנים. מיד במועד ההפקדה הבנק יזכה סכום של 2,000 ש"ח לחשבון החסכון. כמו כן, סכום החסכון (לא כולל הזיכוי הנוסף) ישא ריבית שנתית נקובה בשיעור 6% המוחשבת כל חצי שנה. מהי הריבית האפקטיבית השנתית בהסדר?



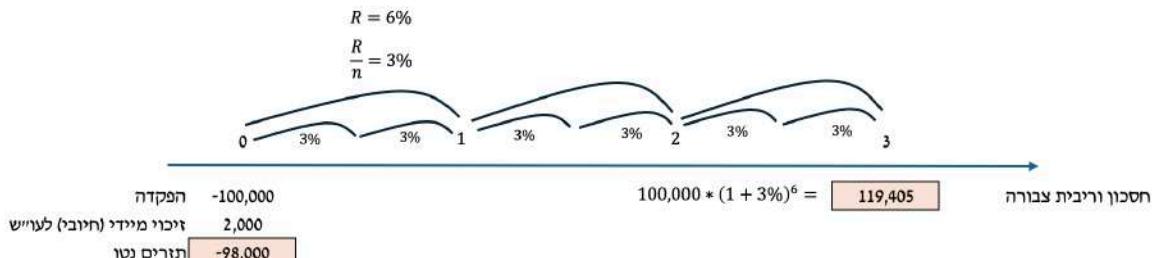
ריבית אפקטיבית ל-3 שנים :

$$r_e = \frac{P_t}{P_0} - 1 \rightarrow r_e(3 \text{ years}) = \frac{121,405}{100,000} - 1 = 21.405\%$$

המרת ריבית אפקטיבית מ-3 שנים לשנה :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{3 \text{ years}})^{\frac{1}{3}} - 1 = (1 + 21.405\%)^{\frac{1}{3}} - 1 = 6.679\%$$

**שאלה 54.91 – דומה לקודמתה, אך הפעם – היזכוי ישירות לעו"ש**  
 בנק מציע לכם להפקיד היום לחסכו 100,000 ש"ח לתקופה של שלוש שנים. מיד במועד ההפקדה הבנק יזכה סכום של 2,000 ש"ח **לحسابו העו"ש שלכם**. כמו כן, סכום החסכו (בהתעלם מהזיכוי הנוסף) ישא ריבית שנתית נזונה בשיעור 6% המוחושבת כל חצי שנה. מהי הריבית האפקטיבית השנתית בהסדר?



ריבית אפקטיבית ל-3 שנים :

$$r_e = \frac{P_t}{P_0} - 1 \rightarrow r_e(3 \text{ years}) = \frac{119,405}{98,000} - 1 = 21.842\%$$

חומרת ריבית אפקטיבית מ-3 שנים לשנה :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{3\text{years}})^{\frac{1}{3}} - 1 = (1 + 21.842\%)^{\frac{1}{3}} - 1 = 6.81\%$$

**שאלה 54.92 – מtower בוחינה לדוגמא מיום 10 במאי 2023**

## שאלה 2

בנק גובה מלוקחותיו ריבית שנתית נזונה בגובה 20%, המשולמת מדי רביעון. נוסף על הריבית מנכה הבנק בתחלת כל חודשعمالת הקצת אשראי בסך 0.5%.

**הRibbit haAfekטיבית haShnatiyah Shogava haBnukh Hayah :** (התשובות מוצגות ברמת דיווק של 2 ספרות אחרי הנקודה)

- א. 26.00%
- ב. 24.01%
- ג. 21.55%
- ד. 27.66%
- ה. 29.09%

### פתרונות:

מדובר בשאלה המשלבת ריבית נזונה המוחושבת "מספר פעמיים" ביחד עם ריבית המנוכה מראש. הנוסחה הכללית המתאימה למצב כזה:

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 \rightarrow r_e = \frac{\left(1 + \frac{20\%}{4}\right)^4}{\left(1 - \frac{0.5\%}{1}\right)^{12}} - 1 \approx 29.09\%$$

התשובה ח.

**שאלה 54.93 – מtower בchnerה לדוגמא 7 (תעללה בהמשך)**

**שאלה 3**

בנק מלאוה סכום חד-פעמי שיווחר בצירוף הריבית בתום חצי שנה ממועד מותן הלוואה, הריבית החצי-שנתית שגובה הבנק היא 20%. פרט לריבית, מנכה הבנק במועד מותן הלוואה עמלת מראש של 3.75% מסכום הלוואה. **הריבית האפקטיבית השנתית שגובה הבנק היא :**  
(התשובות מוצגות ברמת דיקוק של ספרה אחת אחרי הנקודה)

- א. 47.5%
- ב. 55.0%
- ג. 55.4%
- ד. 49.4%
- ה. 24.7%

**פתרון :**

השאלה מציגה עסקת הלוואה לחצי שנה. עסקת הלוואה כוללת ריבית חצי שנתית ובנוסף עמלת מראש עבור תקופת מחצית השנה כאמור. לצד העבודה שהעסקה לחצי שנה, נדרשת ריבית אפקטיבית לשנה שלמה. המלצה הבלתי מחייבת שלי, במצבים שבהם אני נתקל בעסקאות לתקופות השונות משנה, והשאלה דורשת ריבית אפקטיבית לשנה, אני :

- מחשב את הריבית האפקטיבית לתקופת העסקה
- ממיר את הריבית לתקופת העסקה לריבית שנתית:  $r_e = (1 + r)^m - 1$

הואיל וגם הריבית ה"רגילה" המשולמת בתום התקופה היא לחצי שנה (מועד הזזה לתקופת העסקה) והיא מחושבת פעמי אחת בלבד, וגם הריבית מראש היא לתקופת העסקה ובהתאם מחושבת פעמי אחת בלבד, אזי ההבנה הכללית של חלוקת הסכום שמחזירים בסוף (1 ועוד 20%) בסכום נטו שמקבלים בהתאם (אחד פחות 3.75%) מוביל לחישוב הבא:

$$r_e = \frac{1 + 20\%}{1 - 3.75\%} - 1 = 24.675\%$$

כעת, הואיל ונדרשה ריבית אפקטיבית לשנה, נשתמש במערך חזקה מתאים:

$$r_e = (1 + 24.675\%)^2 - 1 \approx 55.4\%$$

ולכן התשובה הנכונה היא ג.

### שאלה 4 – מtower בחלוקת לדוגמא 5

#### שאלה 3

ניתן לרכוש קטען תמורה 10,000 ש"ח. בעל החנות מציע לכם תשלום תמורה הקטען 2,384 ש"ח  
היום ועוד 4 תשלומים חודשיים בגובה של 2,000 ש"ח כל אחד. הריבית השנתית האפקטיבית  
שדורש בעל החנות היא:

- א. 24%
- ב. 8.2%
- ג. 2%
- ד. 26.8%
- ה. 8%

פתרון :

חשוב מאד!!! כאשר העסקה המתווארת איננה עסקת בלוון, כלומר **איןנה** מדובר על הפקדה בודדת הנפרעת בתשלומים אחד או על **הלוואה** שנפרעת יחד עם הריבית הצבורה בתשלומים אחד, אלא על עסקה הכוללת **سدרת** תשלומים, כי אז חישוב הריבית לעולם יתבסס על חילוץ של הריבית על בסיס נסחאות FVFA (מעע"ס) או PVFA (מענ"ס) בהתאם.

משפט : שווי נכס בזמן הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים עבור הסדר התשלומים לרכישתו, מהוונים בריבית המגולמת בהסדר. כאן : שווי הקטען בזמן 10,000 הוא חיבור של הערך הנוכחי של התשלום המיידי וערך הנוכחי של הסדרה הכוללת 4 תשלומים בסך 2,000 כל אחד (תשלומי תום תקופה כבירת מחדר).

$$10,000 = 2,384 + 2,000 * PVFA(r, 4) \rightarrow PVFA(r, 4) = 3.808 \rightarrow r = 2\%$$

זכור – הריבית המחולצת מיחסובים סדרתיים תמיד ולעולם משקפת את הריבית התקופתית לפרק הזמן בין תשלומים. הויל והתשלומים כאן כל חודש, זהה הריבית האפקטיבית החודשית, על מנת להמירה לשנתית – נשתמש בمعרך חזקה מותאים :

$$r_e = (1 + r)^m - 1 \rightarrow r_e(\text{annual}) = (1 + 2\%)^{12} - 1 \approx 26.8\%$$

התשובה ד.

שאלה 54.95 – מבחון לדוגמא 4

שאלה 3

בנק מוכן לתת הלוואה בריבית של 10% לתקופה, בתנאי ש- 20% מגובה הלוואה יופקדו בתכנית חסכון הנושאת ריבית של 8% לתקופה. מכאן שהריבית האפקטיבית לתקופה הגלומה בהלוואה זו היא:

- א. 9.6%
- ב. 10%
- ג. נמוכה מ- 10% (אולם לא ניתן לקבוע בדיקון בכמה ללא נתוני נוספים)
- ד. גבוהה מ- 10%
- ה. אין מספיק נתונים כדי להכריע בין התשובות הנ"ל.

פתרון:

כאשר אני מזזה שאלה שכוללת גם הלוואה וגם הפקדה, הטריך המרכזי הוא להבין מהם תזרימי המזומנים וסימניהם. זה חשוב, משום שם זהה ולו באופן ייחסי את התזרמים נטו בתחילת התקופה ובסיום התקופה (כי אין כאן שום נתון שמעיד על כך שמדובר בסדרה) אוכל לחשב את הריבית האפקטיבית.

	-BEGINNING OF BUSINESS	END OF BUSINESS
	0	1
ネットת הלוואה	100	-110
הפקדה בפיקדון	-20	21.6
$P_0 =$	80	$P_1 = -88.4$

בsek הכל, הריבית האפקטיבית לתקופת העסקה העולה מנתוני התזרמים נטו לעיל היא:

$$r_e = \frac{P_t}{P_0} - 1 = \frac{88.4}{80} - 1 = 10.5\%$$

התשובה ד.

### שאלה 54.96 – מבחון לדוגמא 3

#### שאלה 4

בנק מציע תוכנית חיסכון "תשואה למתמיד". הריבית המוצעת בתוכנית היא 4% לשנה במהלך השנה הראשונה, 5% לשנה במהלך השנה השנייה, 7% לשנה במהלך השנה השלישי ו- 10% לשנה במהלך השנה הרביעית. הריבית השנתית המוצעת בתוכנית ללקוח שהפקיד 10,000 ש"ח ל- 4 שנים היא (נדרש לדיק עד 4 מקומות אחרי חנקודה):

- א. 6.50%
- ב. 6.48%
- ג. 26%
- ד. 7.13%
- ה. 16.4%

#### פתרון:

כאשר אני מזוהה עסקת בלון (מפקיד סכום אחד, שנפרע בקצבות זמן אחת) הרי שאם אדע מהו הסכום המופקד נטו, ומהו הסכום המתקבל נטו בסיום העסקה – הריבית האפקטיבית בידי.

ספציפית כאן – סכום ההפקדה הראשונית נטו נתון:  $P_0 = 10,000$

הסכום שייפרע בעוד 4 שנים הוא התוצאה של חישוב ערך עתידי של סכום ייחד בריבית משתנה:

$$FV = PV * (1 + r_1)^{t_1} * (1 + r_2)^{t_2} * \dots$$

וכאן:

$$FV_4 = 10,000 * (1 + 4%) * (1 + 5%) * (1 + 7%) * (1 + 10%) = 12,853 = P_t$$

ואת הריבית האפקטיבית לתקופת העסקה כולה, 4 שנים, נוכל לחשב כך:

$$r_e(4 \text{ years}) = \frac{P_t}{P_0} - 1 = \frac{12,853}{10,000} - 1 = 28.53\%$$

חישוב ריבית אפקטיבית לשנה אחת על בסיס ריבית אפקטיבית ל-4 שנים יבוצע כך:

$$r_e = (1 + r)^m - 1 \rightarrow r_e(\text{annual}) = (1 + 28.53\%)^{\frac{1}{4}} - 1 \approx 6.48\%$$

התשובה ב.

יבגני: שי, יכולתי למנוע מENTION של ה-10,000, אותה נוסחה בדיק אבל כפול 1 הייתה מוגנה אותה תוצאה!  
(יבגני צודק).

שאלה 54.97 – מבחון לדוגמא 2

5. בנק מלאוה סכום חד פעמי שיוחזר לצורך הריבית בתום שנה ממועד מתן הhaloואה. הריבית החזיות השנתית שוגבה הבנק היא 24% מחושבת פעמיות בשנה. בנוסף לריבית מנכה הבנק בזמן מתן haloואה עמלה מראש בסך 15% מסכום haloואה. הריבית האפקטיבית השנתית שוגבה הבנק היא:

- א. 39.00%
- ב. 45.88%
- ג. 24.00%
- ד. 42.72%
- ה. 35.24%

**פתרונות:**

השאלה זו מזינה בפנינו את המונח "ריבית חזותית". משמעות המונח הוא "ריבית נקובה". לא יותר, ולא פחות. שאלות מוחות לעצמי: האם מדובר בהלוואה המוחזרת בסדרת תשלוםים? התשובה לא.

הואיל ולא מדובר בסדרה, האם מדובר כאן בריבית דרייבית, בריבית מראש (או ניכוי מראש) או שילוב?

בנוסף, הואיל והריבית וגם הניכוי מראש מחושבים פעמיות אחת, אין צורך להציב בגרסה המורחבת של הנוסחה המשולבת, ואפשר פשוט ל כולל במונח – 1 ועוד התוספת לתשלום בתום התקופה, ובמקרה – 1 פחות הניכוי מראש:

$$r_e(\text{annual}) = \frac{1 + 24\%}{1 - 15\%} - 1 = 45.88\%$$

התשובה ב.

### מפגש 3 – חישובי ריבית ותרגול בrama בחינה בנושא ריביות ופרויקטים

#### מיini רציו:

את המפגש אנו פותחים עם דיוון רחוב ביה' 6. היחידה עוסקת בראש ובראשונה בקריטריונים לבחינת כדאיות השקעות. בבואהנו לדzon בעולם זה, אנחנו מציינים שישן מספר גישות להכרעה חן לגבי עצם כדאיות של פרויקט ספציפי המוצע לחברה, וחן לגבי דירוג כדאיות / סדר העדפה במקרים שבהם קיימת מגבלה שלא מאפשרת לבצע את מכלול הפרויקטים הניצבים בפנינו.

#### ככל:

בפירמות (בחברות) שם המשחק בדף כדאיות – הוא הערך המוסף בהתחשב באלטרנטיבה. הוו אומר, בשונה מאנשים פרטיים, שבמקרים רבים יתעניינו בעיקר בתשובה לשאלת "כמה יהיה לנו בעתיד" – פירמות חשובות בטרמינולוגיה של: "איזה פעולה או פעולות יגרמו למשקיעים היום לחשוב שביצועי פעילות נכונה".

#### בתכליס:

א. גישה ראשונה לבחינת כדאיות השקעות – "דרך המלך" =  $NPV = \text{ערך נוכחי נקי} / \text{ט. נט}$ . גישה ראשונה לבחינת כדאיות השקעות – "דרך המלך" =  $NPV = \text{ערך נוכחי נקי} / \text{ט. נט}$ . ביסודה של גישה זו אמת פשוטה: "אם שווי הערכיהם העתידיים שפרויקט מניב ביצורף הסכום / הסכומים המתקבלים או משולמים בגין בהזהה – מסתכנים לכך ערך חיובי, הפרויקט כדאי". בשפה עוד יותר פשוטה – מחשבים ערך נוכחי לכל תזרימי הפרויקט ללא יוצא מן הכלל, ותוצאה חיובית מעידה על כדאיות. **חישוב זה לא ילווה בנוסחאות גנריות אלא בהבנה שעליינו לישם כלים מיח' 5 לשם חישוב הערך הנוכחי של מכלול רכיבי תזרימי הפרויקט. החלטה או דירוג לפי קרייטריון זה היא תמיד נכונה.**

ב. גישה שנייה לבחינת כדאיות השקעות – "הגישה הטריקית" =  $IRR = \text{שיעור תשואה פנימי}$  (Internal Rate of Return). ביסוד גישה זו טענה שאומרת: "אם הפרויקט עצמו מניב על ההשקעה תשואה גבוהה יותר (בاقזים) מציפיות המשקיעים, הרי שהפרויקט כדאי".

[הערה: קיימים שני קרייטריונים נוספים, שנקרים "מדד הרוחניות" ו"החזיר הון שנתי", אך הם איזוטריים יותר, נפוצים פחות, נגיעה אליהם לאחר שהקרייטריונים המרכזיים יובחרו].

#### 54.97.1 – קרייטריונים לבחינת כדאיות השקעות – פרויקטים של הלוואות

לחברת "נפתלי נתויו" בע"מ מוצע ליטול אחת מbyn שתי הלוואות:

- הלוואה 1: בסכום 500,000 ש"ח הנפרעת ב-5 תשלומי קרן שנתיים שווים, ונושאת ריבית שנתית בשיעור 10%.
- הלוואה 2: בסכום 500,000 ש"ח, הנפרעת ב-5 תשלומים שנתיים שווים (לוח שפיצר), ונושאת ריבית שנתית בשיעור 10%.

נדרש:

- א. התווסף תזרימי המזומנים בגין הלוואות בכל אחת מ-5 השנים הקרובות בכל פרויקט.
- ב. הציגו באמצעות תרשימים את השווי של כל "פרויקט הלוואה" ככפוף למחיר הון שונים (מחיר הון = עלות גiros הון מחוץ לפרויקטים אלו, באינטרנט). התרשימים יכלול את מחיר ההון על הציר האופקי, ואת שווי הפרויקט במונחי ערך נוכחי נקי NPV על הציר האנכי. יש להקפיד לציין גם נקודות חיתוך עם הציררים.
- ג. על בסיס התרשימים שאיתרתם, קבעו – באילו תנאים תועדף כל אחת מהלוואות? הסבירו את ממצאיםם.
- ד. הוסיפו לתרשימים לעיל (סעיף ב) את עוקום הענין (NPV) של "הפרויקט החפרשי".
- ה. חלצו את ה-IRR של הפרויקט. הסבירו מה מייצג ערך זה והיכן הוא מתבטא בתרשימים.
- ו. איזה פרויקט יועדף לפי ה-IRR? דנו בمبرallocות הכספיות בהתאם.

פתרון:

ככלל, בעוד שcalar שאלות עסקות בלוח סילוקין באופן ספציפי – הן במקרים רבים דורשות הפרדה ברמת התחשיבים בין רכיב הקרן, רכיב הריבית וכיו"ב, הרי ששאלת לגבי כדאיות הלוואות ביה' 6 – כל שanno רוצים לדעת זה את סך התזרמים התקופתי.

בלוח סילוקין וגיל, חישוב סך התזרמים התקופתי הוא מרכיב יחסית, הואיל והוא משתנה מתקופה לתקופה. להלן תזכורת קצרה לגבי סדר החישוב, אך זכרו – הערכים היחידים המעניינים אותן לטובות יה' 6 הם סך התזרמים שסומנו בצהוב.

### פתרונות סעיף א – חישוב סך התשלומים התקופתי בלוח רגיל

סעיף א – הלוואה 1 – לוח "רגיל"

					$INT_t = BAL_{t-1} * r$
					$PMT = PRN + INT_t$
BAL (2)	PMT (4)	INT (3)	PRN (1)	זמן	
יתרה		סכום התשלומים	ע"ח קרן		
500,000				0	
400,000	150,000	50,000	100,000	1	
300,000	140,000	40,000	100,000	2	
200,000	130,000	30,000	100,000	3	
100,000	120,000	20,000	100,000	4	
0	110,000	10,000	100,000	5	

$\downarrow$   $BAL_t = BAL_{t-1} - PRN$   $\uparrow$   
 $BAL_1 = BAL_0 - PRN$   $PRN = \frac{LOAN}{n}$   
 $BAL_1 = 500,000 - 100,000 = 400,000$   $PRN = \frac{500,000}{5} = 100,000$   
 $BAL_2 = BAL_1 - PRN$   
 $BAL_2 = 400,000 - 100,000 = 300,000$

בעוד שבלוח רגיל נדרשית מעט עבודה כפיים לחישוב ההחזר התקופתי, הרי שבלוח שפיצר סטנדרטי ההחזר התקופתית מוגדר באופן קבוע על ידי נוסחה שיש ליישם פעמי אחת בלבד:

סעיף א – הלוואה 2 – לוח סילוקון שפיצר

$$PMT = \frac{LOAN}{PVFA(r, n)} = \frac{500,000}{PVFA(10\%, 5)} = \frac{500,000}{3.791} = 131,891$$

BAL (2)	PMT (4)	INT (3)	PRN (1)	זמן
יתרה	סכום התשלומים	ע"ח ריבית	ע"ח קרן	
500,000	131,891			0
	131,891			1
	131,891			2
	131,891			3
	131,891			4
	131,891			5

וכעת, נרכז את תזרימי המזומנים (בהויה – קרן הלוואה, ובכל תקופה עוקבת – סכום התשלומים הכלול) בגין כל אחת מהחלופות המוצעות (ערכים שליליים מוצגים בסוגרים):

5	4	3	2	1	0	פרויקט
(110,000)	(120,000)	(130,000)	(140,000)	(150,000)	500,000	הלוואה 1
(131,891)	(131,891)	(131,891)	(131,891)	(131,891)	500,000	הלוואה 2

**סעיף ב – באילו תנאים תועדף כל הלוואה, ביחס לבסיס איזור ותהליכי עבודה**

יצרנו מערכת ציריה האנכי NPV (שווי נטו של ההסדר בערך כספי) וציריה האופקי מחיר ההון (הוצאות המימון לחברה בהלוואות / מקורות אחרים, אלטרנטיביים, שאינם אחת מבין 2 עסקאות ההלוואה הספציפיות המוצעות).

הגדרנו את הנקודות שדרכו נופיען כל עקום שווי (NPV) של נטילת הלוואה:

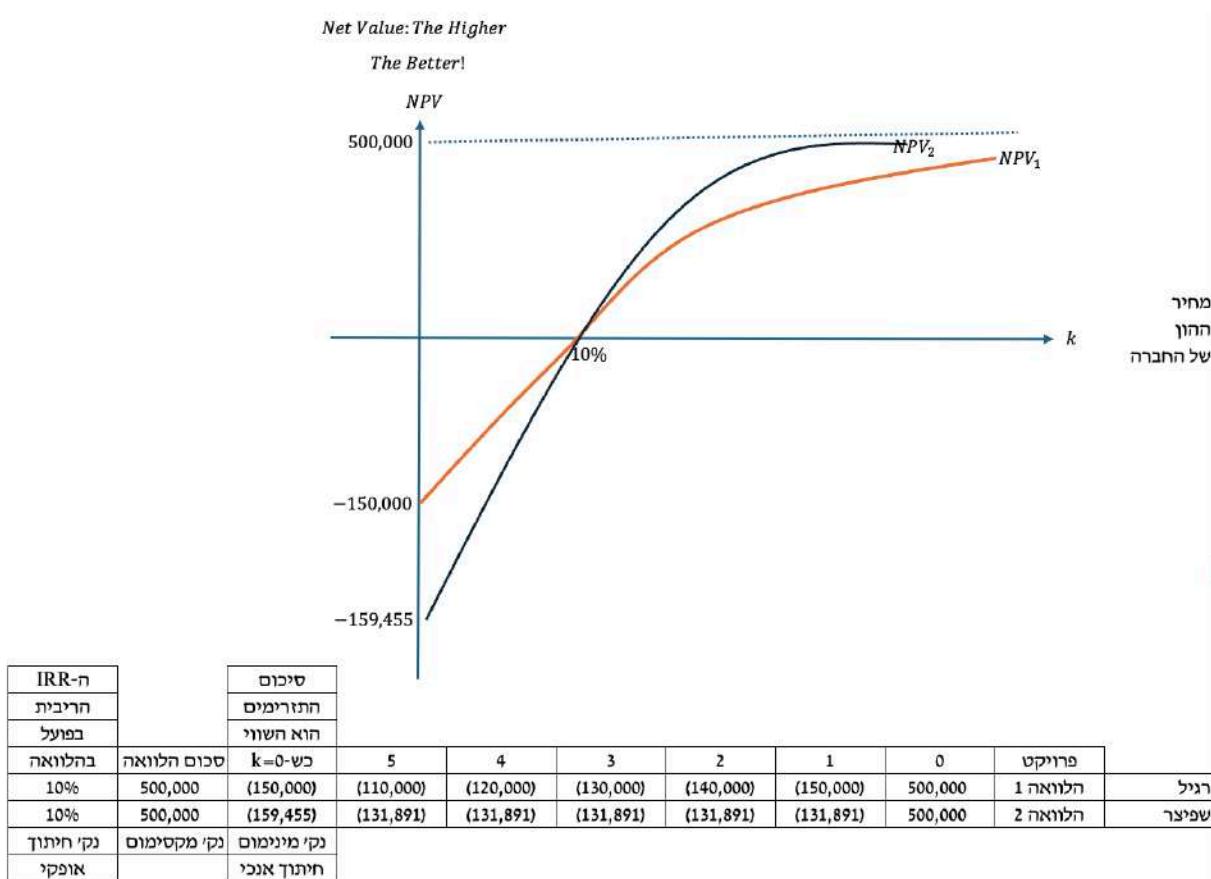
נק' חיתוך של כל עקום שווי הלוואה עם הציר האנכי – סיכון פשוט של תזרימי המזומנים בעסקה.

$$NPV_{minimal}(1) = 500,000 - 150,000 - 140,000 - 130,000 - 120,000 - 110,000 - 150,000 = -150,000$$

$$NPV_{minimal}(2) = 500,000 - 131,891 * 5 = -159,455$$

נק' חיתוך של כל עקום שווי הלוואה עם הציר האופקי – הריבית בהלוואה – היא נתונה 10%.

נק' מקסימום – סכום ההלוואה (שווי כsmithir ההון שווה לאינסוף).



## פתרונות סעיף ג – כדאיות ההלוואות ובחירה ביןיהן

ניתן לראות שכדאיות שתי ההלוואות (מעבר לשווי NPV שנמצא בربיע הראשון) מתקיימת רק עבור מחיר הון גבוה מ-10%.

אין בכך פלייה: הרי מחיר הון בהקשר להלוואות מייצג את עלות המימון שהייתה נוצרת, אם היינו נוטלים הלוואות אחרות, בחוץ (לא את הלוואות הספציפיות הנთונות). ואם הלוואות בחוץ אכן דורשות ריבית גבוהה מ-10%, אז הלוואות הספציפיות שדורשות 10% ריבית בלבד הן כדאיות.

היבט נוסף מעניין: עבור מחירי הון גבוהים מהריבית על הלוואה (שבהן קיימת כדאיות) הלוואת השפיצר (הלוואה 2) כדאית יותר. זאת, למרות שסך התשלומים בה והחפסד המירבי גבוהים יותר. מדוע? משום ששפיצר משלם יותר ריבית "בsek הכל" לאור העובדה שימושיים בה את הכספי "יותר לאט" (התשלומים הראשונים נמוכים). זה בעצם אומר, שלמרות שארך החיים של שתי הלוואות זהה – בשפיצר מוחזירים אותה "יותר לאט". ובמצב זהה, אם ההסדר המוצע זול מהאלטרנטיבה – זה עדיף. בקיצור: "הלוואות כדאיות מוחזירות לאט ושפיצר איטי יותר מלח רגיל".

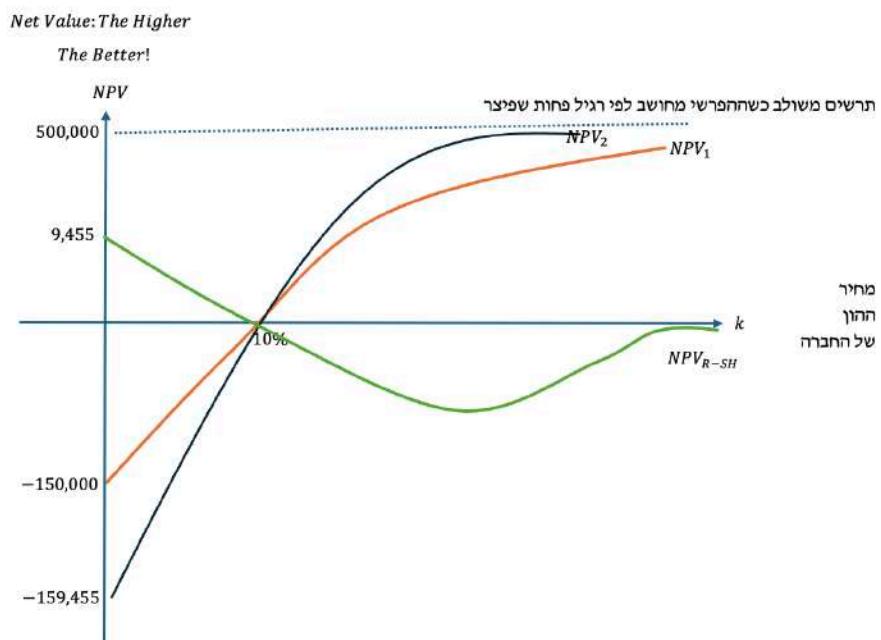
אם הלוואה לא כדאית, הרי שלחזר אותה לאט זה גורע מאד, ובהתאם, במחירי הון נמוכים מ-10% אפשר להבחן בכך ששווי השפיצר יותר שלילי.

מסקנה נקודתית / טכנית לגבי כדאיות:

- במחירי הון של מעל 10%, יש להעדיף את הלוואה 2 (שפיצר).
- במחירי הון של מתחת ל-10%, שתי הלוואות לא כדאיות, אך אם "אין ברירה", הלוואת לחו"ר "רגיל" פחות גורעה.
- במחיר הון של 10% בדיקן, שווי 2 הלוואות אפס, וקיימת אדישות באשר לבחירה ביןיהן.

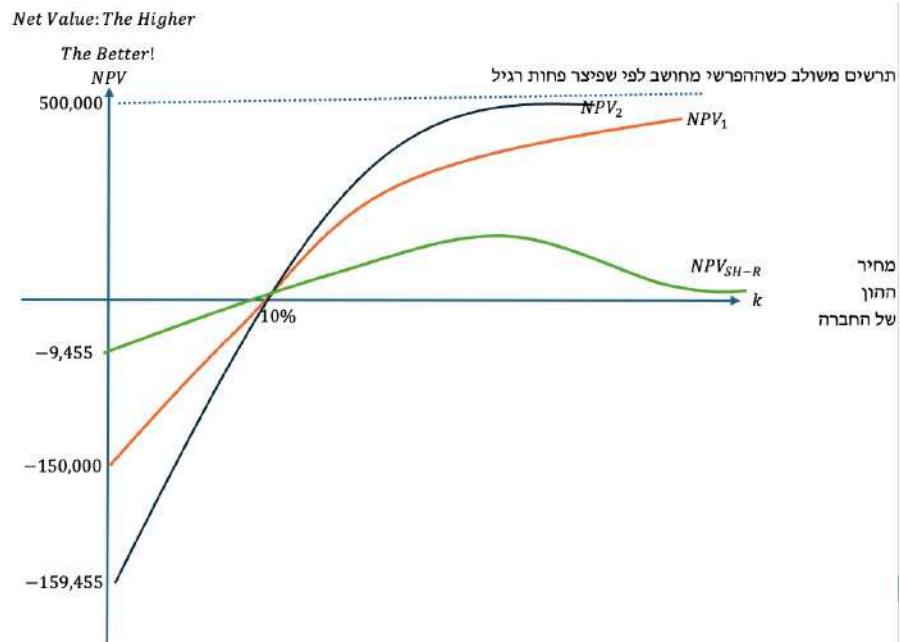
## סעיף 2 – איור תרשים "מלא" כולל פרויקט הפרשי (2 גרסאות, בחרו בnoch)

הפרויקט ההפרשי הוא פרויקט "דמיוני" שמייצרים לצרכים מתמטיים ואשר במסגרתו כל תזרים ותזרים בכל תקופה ותקופה הוא ההפרש המתמטי פשוט בין תזרימי שני הפרויקטים. בכלל, אפשר ליצור את תזרימי הפרויקט ההפרשי בשתי וריאציות. הוריאציה הראשונה המבוצעת להלן, היא ההפרש בין הפרויקט המקורי לפרוייקט השפייצר. כאשר מייצרים תזרים הפרשיים אלו (רגיל פחות שפייצר) ובונים את עקום ה- $NPV$  לפי הכללים המקוריים, מצליחים לגלוות שהפרויקט ההפרשי כדאי (קרי המקורי עדיף על שפייצר) במחירים הוו של מתחת ל-10%. הוואיל ובמחירים הוו שואפים לאינסוף שני הפרויקטים (רגיל ושפיצר) יתכנסו. לאותו ערך של 500,000, גם הפרויקט מתכנס לערך 0 במחירים הוו שואפים לאינסוף.



IRR-ה הרביבית	סיכום התזרומים	הוואה השווי בפועל	פרויקט 1 הלוואה 1	פרויקט 2 הלוואה 2	הפרש ר-ש הפרשי ש-ר
בחלואה	סכום הלוואה	$k=0$			
10%	500,000	(150,000)	(110,000)	(120,000)	(130,000)
10%	500,000	(159,455)	(131,891)	(131,891)	(131,891)
10%	0	9,455	21,891	11,891	1,891
10%	0	(9,455)	(21,891)	(11,891)	(1,891)
			5	4	3
			2	1	0
			1	0	
			0		

גרסה 2 של תרשימים הפרויקט ההפרשי – מחשבים את תזרימי הפרויקט השפיצרי לעומת תזרימי הפרויקט הרגיל. צורתו התרשי של הפרויקט ההפרשי מתחفت. אפשר לראות שבמחררי הון של מעל 10% הפרויקט השפיצרי עדיף.



IRR-ה	סיכום התזרים הווה השווי	סכום הלוואה	IRR-ה	הילוואה 1	הילוואה 2	שפיצר ר-ש	הפרשי-שר	
הרכיבת	הו	כ-0	5	4	3	2	1	0
הponential		500,000	500,000	(150,000)	(110,000)	(120,000)	(130,000)	(140,000)
10%	500,000	(159,455)	500,000	(159,455)	(131,891)	(131,891)	(131,891)	(131,891)
10%	0	9,455	21,891	11,891	1,891	(8,109)	(18,109)	0
10%	0	(9,455)	(21,891)	(11,891)	(1,891)	8,109	18,109	0

סעיף ה - חלצו את ה-IRR של הפרויקט. הסבירו מה מייצג ערך זה והיכן הוא מटבṭא בתרשימים. ה-IRR (שיעור תשואה פנימי, Internal Rate of Return) משקף את שיעור התשואה התקופתי המומוצע בפרויקט. כאשר עוסקים בפרויקטים של השקעות, ה-IRR משקף את שיעור התשואה (החיובי, בשאיפה) המומוצע למשקיע. כאשר עוסקים בפרויקטים של הלוואות (נטילת הלוואות), ה-IRR משקף את שיעור התשואה של הבנק (את עלות המימון היחסית באחיזים בהלוואה). כפי שציינו קודם, במקרה זה, בהינתן שעוסקים בפרויקטים של הלוואות, שהריבית שלחן נתונה, הרי שההרכבה ה-IRR זהה לריבית זו, הניצבת על 10% לשנה וסימנו. ובכל זאת – איך מחשבים את ה-IRR במידה ואיננו נתנו?

הגדרה : מתמטית, ה-IRR הוא מחיר ההון שאם נהוון בו (ערך נוכחי) את תזרימי הפרויקט, התוצאה הכללת של הערך הנוכחי הנקי (NPV) תהיה 0.

נציג להלן את תזרימי הפרויקטים :

5	4	3	2	1	0	פרויקט	
(110,000)	(120,000)	(130,000)	(140,000)	(150,000)	500,000	הלוואה 1	רגיל
(131,891)	(131,891)	(131,891)	(131,891)	(131,891)	500,000	הלוואה 2	שפיצר

מחיר ההון של החברה לא ידוע. זו גם הסיבה שהציגנו את ערכי ה-NPV האפשריים באופן גרפי, למגוון רחב של מחירי ההון. יחד עם זאת, הביטוי המתמטי המציג את ה-NPV (ערך נוכחי נקי, נטו) :

$$NPV_{Ragil} = 500,000 - 150,000 * (1 + k)^{-1} - 140,000 * (1 + k)^{-2} - 130,000 * (1 + k)^{-3} - 120,000 * (1 + k)^{-4} - 110,000 * (1 + k)^{-5}$$

הויל וה-IRR הוא מחיר ההון המוביל לאיפוס ה-NPV הרו שמתיקים עבור פרויקט הלוואה בלוח רגיל :

$$0 = 500,000 - 150,000 * (1 + IRR)^{-1} - 140,000 * (1 + IRR)^{-2} - 130,000 * (1 + IRR)^{-3} - 120,000 * (1 + IRR)^{-4} - 110,000 * (1 + IRR)^{-5}$$

הציפייה של הקורס היא שניההمسؤولים "לפטורו" שאלת צו בגישת ניסוי וטעה. כשמדבר במתלה, אין בעיה לפטור ספציפית את המשווה בכלים של בינה מלאכותית וכן להשתמש ב-Excel. כל מה שצריך לעשות זה לרשום  $=$ , ואז  $IRR$ , לפתח סוגרים ולסמן את כל התזרימים של הלוואה, מהראשון עד האחרון, ולהזוז  $.Enter$ .

משוואת ה-NPV בלוח שפיצר בהינתן תזרימי הקבועים פשוטה יותר, הויל וניתנת לביטוי כערך נוכחי של סדרה :

$$NPV_{Shpitzer} = 500,000 - 131,891 * PVFA(k, 5)$$

כדי לחץ  $IRR$  בرمאה המתמטית, אנו ניקח את משוואת ה-NPV, נשווה אותה ל-0 ונחלץ את מחיר ההון שהוא למעשה ה-IRR (דרך חילוץ הפוך מלווח א-4).

$$0 = 500,000 - 131,891 * PVFA(IRR, 5) \rightarrow PVFA(IRR, 5) = \frac{500,000}{131,891} \rightarrow PVFA(IRR, 5) = 3.791 \rightarrow IRR = 10\%$$

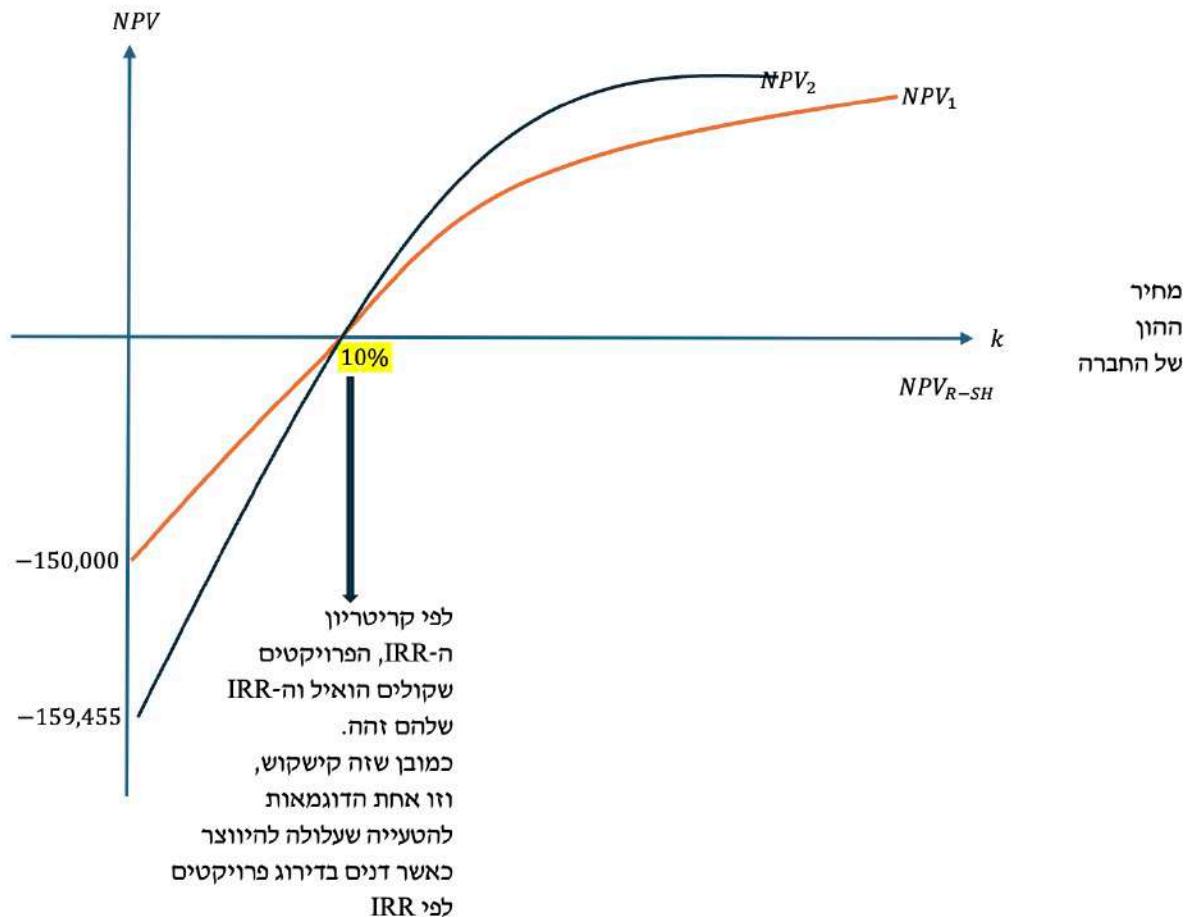
מה ה-IRR מייצג?

בפרויקטים "פשוטים" (השם המקובל שלהם – פרויקטים קונבנציונליים) של השקעות והלואות, ה-IRR משקף את שיעור התשואה התקופתי המוצע בפרויקט (או עלות מימון אחוזית ממוצעת בהלוואה). בתרשים ה-NPV, ה-IRR הוא נקודת החיתוך של עקום עניין הפרויקט (NPV) עם הציר האופקי.

סעיף ו': איזה פרויקט יותרם לפיה ה-IRR? דענו בנסיבות הקритריון בהתאם.

*Net Value: The Higher*

*The Better!*



שאלה 54.98 – ייחידה 6 – שאלה ממבחן לדוגמא 8

שאלה 4

נתונים התזוריים הבאים : מחיר ההון 10% .

10-1	0	השקעה
250	-1,000	A
200	-650	B

הנicho, שיש קשר מסוים בין ההשקעות (תחליפיות), כך שאם שתיהן תבוצענה, התזוריים מההשקעה A יקטן ב-170 בכל שנה (אך ההשקעה הראשונית תישאר 1,000 ללא שינוי). לעומת זאת, התזוריים הכספי מההשקעה B יישאר ללא שינוי, **מכאן שבדאי** :

- להשקיע רק ב-A.
- להשקיע רק ב-B.
- להשקיע ב-A וב-B.
- לדוחות את שתיהן.
- להשקיע או ב-A או ב-B, שכן קיימת אדישות ביניהן.

**פתרון :**

ראשית, מבחינת זיהוי נושא – מדובר ביחידה 6 – פרויקטים. שאלות כאלו בדרך כלל מתאפיינות בrama הרכומתית בבעיות עם תזוריים מזומנים, ובהיכדים הקשורים לכדיות השקעה ודרישות החלופות. ספציפית כאן, הדיוון הוא בהשקעות שיש בינהן קשר ; והקשר מתבטא במובן זה שבנייה סימולטני של שתיהן משנה את התזוריים ביחס לנtown.   
 מה הכוונה ?

אם מבצעים רק השקעה A :

1-10	0	
250	-1,000	A

אם מבצעים רק השקעה B :

1-10	0	
200	-650	B

אם מבצעים את שתי ההשקעות יחד : התזוריים השנתיים מהשנים 1-10 ירד (בכל אחת מהשנים 1-10) ב-170.

ולכן ביצוע סימולטני של שתי ההשקעות יניב את מערך התזרומים הבא :

1-10	0	
250 - 170 = 80	-1,000	השפעה של ביצוע A לצד B
200	-650	B
280	-1,650	תזרים נטו הנובע מהביצוע הסימולטני

כדי לדעת איזו חלופה עדיפה (רק A, רק B או השילוב) נחשב את העניין (NPV) לכל חלופה, ובחר בפרויקט שמניב את הערך הגבוה ביותר (אם לא דרשו חישוב שmbוסס על קритריון אחר באופן ספציפי, חישוב ה – NPV – הוא במקרים רבים פשוט יותר ובעיקר, תקף תמיד מבחינה כלכלית) :

$$NPV_A = -1,000 + 250 * PVFA(10\%, 10) = 536.25$$

$$NPV_B = -650 + 200 * PVFA(10\%, 10) = 579$$

$$NPV_{A+B} = -1,650 + 280 * PVFA(10\%, 10) = 70.6$$

אסטר מор וудי שרו במקהלה : ברור ש A לא כדאי אם מבצעים את B גם ללא חישוב כי הוא תורם ערך שלילי, משקיעים היום 1,000 ומקבלים כל שנה 10 שנים רק 80, לכן, מקבלים פחות ממה שהשקענו, וזה עוד לפני התייחסות למדד הזמן.

**התשובה ב. נשייע רק B – B.**

**בקיצור נمرץ :**

אם מוציאים לי השקיע בפרויקט בלבד, או בלבד – איזי במידה והשילוב יוצר השפעת אינטראקטיבית (תוספת או ניכוי) בתזרימי אחד מהפרויקטים או שניים, יש לחשב תזרים מצפוי חדש לביצוע הסימולטני בהתחשב בהשפעות האינטראקטיביות, ולהשאיב בגינו PV. הבחירה שתתנו PV מירבי היא זו שmobילה לערך הגבוה ביותר, "תנצה", ותבחר.

שאלה 54.99 – ייחידה 6 – שאלה מבחן לדוגמא 8

שאלה 5

סמן את הקביעה הנכונה :

- א. לפרויקט ייתכן שהיא יותר משתי'פ אחד.
- ב. לכל פרויקט יש לפחות שת'פ אחד, בעל משמעות.
- ג. מספר השתי'פים של פרויקט שווה במקסימום למספר שינוי הסימן בתזרים המזומנים.
- ד. מספר השתי'פים של פרויקט שווה בדיקת למספר שינוי הסימן בתזרים המזומנים.
- ה. תשובות א-ג נכונות.

פתרון :

חשיבות לזכור : לפרויקט ייתכן מספר שת'פים (IRR) עד מספר היפוכי הסימן של תזרימי. בהקשר זה, מקובל להבדיל בין פרויקטים "קונבנציונליים" שהסימן המתמטי של תזרימי מתחפה (mplous למינוס או להפ') פעמי אחת בלבד, ולכן – לפרויקט יהיה שת'פ אחד בלבד, דוגמאות :

4	3	2	1	0	מספר פרויקט
90	80	70	50	-100	א
200	200	200	200	-500	ב
-100	-600	-500	400	300	ג
-60	-50	-40	-30	300	ד
-3000	800	700	600	500	ה
8000	-900	-700	-500	-400	ו

לבין פרויקטים לא קונבנציונליים, אשר מספר היפוכי הסימן של תזרימיים שונה מ-1, ובמקרה כזה – בהחלטת ייתכן מספר שת'פים שונה (IRR), עד מספר היפוכי הסימן :

4	3	2	1	0	מספר פרויקט
700	-100	300	-200	-100	ז
400	-200	-100	-200	500	ח
-10	40	-90	-80	-100	ט
90	70	-10	500	400	י

טענה א : במפגש הקודם הראינו, שהשת'פ IRR שהוא מעשה פתרון המשוואה המאפסת את הענ"ג, יכול לקבל ערך אחד או מספר ערכים – כתלות בסוג הפרויקט. בפרט, אם הפרויקט קונבנציוני, בהכרח יהיה לו שת'פ

אחד ויחיד. אם הוא איננו קונבנציונלי – כל האפשרויות פתוחות (אולי שת"פ אחד, אולי יותר, אולי אין שת"פ).  
לכן הטענה נכונה, **ייתכן** שהיה יותר משת"פ אחד (אם הפרויקט לא קונבנציונלי).

טענה ב: **ייתכן** שלפרויקט לא קונבנציונלי לא יהיה שת"פ, אבל מעבר לזה – בפרויקטים מרובי שת"פים, השת"פ מאבד ממשמעתו הכלכלי, שכן אי אפשר לומר שפרויקט שיש לו גם שת"פ של 7% וגם שת"פ של 700% גדלים הללו יש משמעות כלכלית. לכן הטענה שגوية.

טענה ג: **מתמטית**, מספר השת"פ לפרויקט הוא **עד** מספר היפוכי הסימן. לכן הטענה נכונה.

טענה ד שגوية, כי ג' נכון.

**טענות א-ג נכוןות, לכן התשובה ה.**

**שאלה 54.100 – ייחידה 6 – שאלה מבחן לדוגמא 8**

**שאלה 6**

נתונים שני פרויקטים של השקעה, חד-שנתיים, וידוע כי הפרויקטים בלתי תלויים. ידוע כי השט"פ (IRR) של פרויקט ב נמוך מזה של פרויקט א. בנוסף ידוע, שהשת"פ של פרויקט ב שווה ל-12%. מחיר הון החברה ( $K$ ) 6% לשנה. **באיזה פרויקט/ים החברה תבחר להשקיע?**

- א. בפרויקט ב.
- ב. בפרויקט א.
- ג. לא ניתן לקבוע איזה פרויקט עדיף לחברת לבצע, ללא ידיעת העניין.
- ד. בשניהם.
- ה. תשובה ב נcona, אם השט"פ של פרויקט א גבוהה מ-20% לשנה.

פתרונות :

תחיליה חשוב: האם מדובר בפרויקט של "השקעה" קונבנציונלית (توزרים שלילי, שלאחריו תזרים חיוביים בלבד), או: האם מדובר בפרויקט של "נטילת הלוואה" קונבנציונלית (توزרים חיובי, שלאחריו תזרים חיוביים שליליים) או שמדובר בפרויקט "משוגע" (לא קונבנציונל).

פרויקט של השקעה: התזרים בזמן 0 הוא שלילי.

הפרויקט חד שנתי: יש רק זמן 0 וזמן 1. האם ניתן שתזרים הפרויקט יתהפק יותר מפעם אחת? לא!

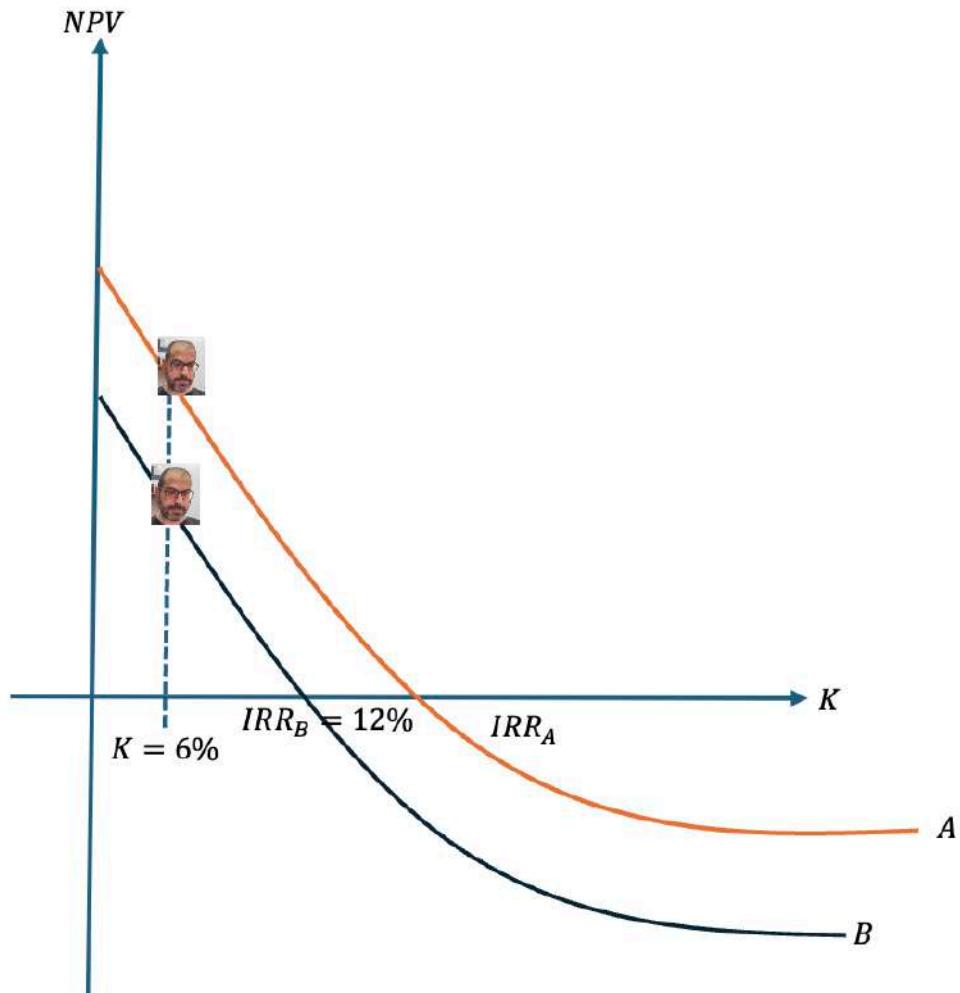
האם ניתן שתזרים הפרויקט לא יתהפק? בהינתן שיש לפרויקט רק שת"פ אחד והוא חיובי בהגדרה הפרויקט

כולל תקבול בזמן 1, והואיל והשת"פ של א חיובי וגובהו עוד יותר – ברור שגם לפרויקט א יש תזרים חיובי בזמן

.1

ובהינתן שמדובר בפרויקטים קונבנציונליים של השקעה, ההחלטה לגבי ביצוע כל אחד מהם היא פשוטה יחסית:  
כדי לבצע כל פרויקט אשר מחיר ההון של החברה נמוך מהשת"פ שלו.

ולכן, כדי לבצע את שני הפרויקטים.



העניין המרכזי בשאלת זו הוא בעצם ההבנה שהפרויקטים בלתי תלויים. במסגרת הדינונים שערכנו, ובפרט המטלה, ניתן מושך רב לפרויקטים ש"מושciאים" זה את זה. פרויקטים שנדרש לבחור אחד מביניהם בלבד. במצב כזה, בחרה לפי השת"פ עלולה להטעות, ונדרש לבחון מהו הפרויקט שמניב עניין גבוה יותר. יחד עם זאת, בהינתן שבמקרה זה הפרויקטים כאמור בלתי תלויים, וניתן לבצע "מה שנרצה" מתוכם, הרי שככל שפרויקט שמניב עניין (NPV) חיובי הוא כדאי.

אפשר להתרשם שבספרויקטים של השקעות, שירדיים משמאל לימין, כל פרויקט שמקיים מחיר הון ( $K$ ) נושא מהשת"פ (IRR) הוא בעל עניין חיובי, ולכן שני הפרויקטים כאן בעלי עניין חיובי – יש לבצע את שניהם, התשובה

.ד

**מה למדתי מ שאלה זו – בקצרה:**

אם אני מזהה פרויקטים שצורך לבחור ביניהם – השתי"פ עלול להטעות, שכן הוא קритריון יחסית ואינו מתאפיין לערך הכספי במלואו.

אם אני מזהה פרויקטים בלתי תלויים, מה שאומר בין היתר שניתן לבצע כל אחד מהם ללא מגבלה, אז כל עוד מדובר בפרויקט קובנציונלי, ניתן לשפטו כדאיותו גם לפי IRR וגם לפי NPV.

## נוסחאות / כללים למפגשים 2,3 - איזון אקטוארי, ריבית ופרויקטים

### איזון אקטוארי - מימון סדרת מściכות ע"י הפקדה בודדת

$$Deposit = PV(Withdrawals)$$

כאשר :

הערך  $Deposit$  מייצג את ההפקדה החודש פעמית / המידית הבודדת שנדרש לבצע.  
הערך  $PV(Withdrawals)$  הוא ביטוי המייצג את הערך הנוכחי של המשיכות, מתואם לזמן 0.

### איזון אקטוארי - מימון סדרת מściכות ע"י הפקדת סדרת הפקדות

$$FV(Deposits) = PV(Withdrawals)$$

כאשר :

הערך  $FV(Deposits)$  מייצג את הערך העתידי של סדרת הפקדות למועד ההפקדה الأخيرة.  
הערך  $PV(Withdrawals)$  הוא ביטוי המייצג את הערך הנוכחי של המשיכות, מתואם למועד ההפקדה الأخيرة

**חישוב ריבית אפקטיבית כאשר נתונה הריבית הנקובה והוא "מחושבת כל \_\_\_\_\_ זמן"**

$$r_{ef} = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $r_{ef}$  מייצג את הריבית האפקטיבית  
הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקובה  
הערך  $n$  הוא התשובה לשאלת : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנקובה הנתונה"  
הערך  $m$  הוא התשובה לשאלת : "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת".

**המרת ריבית אפקטיבית מתקופה אחת לאחרת**

$$r_{ef} = (1 + r)^m - 1$$

כאשר :

הערך  $r_{ef}$  הוא הריבית האפקטיבית לתקופה הנדרשת (כאן - לשנתיים).

הערך  $r$  הוא הריבית האפקטיבית הנתונה (כאן - ריבית אפקטיבית שנתית).  
הערך  $r$  הוא התשובה לשאלת: כמה תקופות ריבית  $r$  נכללות בתקופה הנדרשת.

**чисוב ריבית אפקטיבית (בכללה) עבור מקרה שבו ישנה ריבית נקובה המוחשבת מספר פעמים (ריבית דרייבית) ומשולמת בתום התקופה וכן ריבית מראש (אם אין ריבית מראש רק ריבית מראש, המונה ישנה ל-1):**

$$r_{ef} = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

כאשר :

הערך  $r_{ef}$  מייצג את הריבית האפקטיבית

הערך  $R$  מייצג את הריבית הנקובה

הערך  $r$  הוא התשובה לשאלת: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנקובה הנתונה"  
הערך  $r$  הוא התשובה לשאלת: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנדרשת".

הערך  $R_d$  מייצג את שיעור הריבית המנוכה מראש

הערך  $d$  הוא התשובה לשאלת: "כמה תקופות חישוב ריבית נכללות בתקופה הנקובה של ריבית מראש"  
הערך  $m_d$  הוא התשובה לשאלת: "כמה תקופות חישוב ריבית מראש נכללות בתקופה הכוללת הנדרשת"

### ענין / NPV

מייצרים ביטויי המהוון (מחשב PV) לכל הרכבים בזמן 0. בכוונה תחילת אין להציג נוסחה, שכן המבנה שלו תלוי במבנה התזרומים של הפרויקט.

### שת"פ / IRR

מייצרים ביטויי זהה לענין, אך מציינים את מחיר ההון כנעלם, ומשווים אותו ל-0. הריבית המוחלצת היא IRR.

### מדד הרוחיות / PI

$$PI = \frac{PV_{\text{תקבולים}}}{|PV_{\text{תשומים}}|}$$

### מפגש 3 – שלישי אחרון – קיצוב הון (יה' 7)

**רקע:**

בבואהנו לקבוע כדיאיות פרויקטים אליבא דיה' 6 (הו�י אומר – יישום קרייטוריוני PI, IRR, NPV והחזר הון שניי), על פי רוב – תזרימי המזומנים היו נתונים או ניתנים לאפיון בקהלות (למשל – תזרימי הלואת שפיצר). בעולם האמיתי, במקרים רבים, אנחנו מקבל נתונים פרויקט באופן גולמי יותר, שכוללים – ערכי הכנסות, ערכי הוצאות, מסים והשפעת דיניהם, רכיבי תזרום לא רלוונטיים וכיו"ב, ונרצה לברור את המזע מן התבונן, ולהיות מסוגלים לנזק מותך מאגר הנתונים המשורבל הכתוב תבלה תזרימית / ציר תזרימי ברור, שעל בסיסו נוכל לקבל החלטה בדבר ביצוע הפרויקט או דחיתו.

אנחנו נתחיל באפיון העקרונות הבסיסיים לשם כך, נמשיך בפתרון שאלת בסיסית בנושא, שתנתן לנו כיוון ראשוני לדיוון, ולאחר מכן – נתחיל בפתרון שאלות כבדות יותר.

**העקרונות הבסיסיים ביותר בקיצוב הון (באפיון תזרימי מזומנים רלוונטיים לקבלת החלטה בדבר פרויקטים):**

1. יש להתבסס על תזרימי מזומנים תוספתיים בלבד : המטרה היא לגנות אילו תזרימי מזומנים נוצרים / נובעים / נוצרכים כתוצאה ישירה מביצוע הפרויקט.
2. תזרימי מזומנים והשינויים בהם – ייבחנו בגין כל פרויקט מנקודות ראות כלל הפירמה : המטרה אינהן למקסם ערך של פרויקט ספציפי, אלא לבחון כיצד הפרויקט תורם (אם בכלל) לערך החברה בכללותה. لكن, השפעות כגון תרומה / פגיעה בתזרימי פרויקטים אחרים, בהחלטת תובה בחשבו בתזרימי הפרויקט הנבחן.
3. בהתעלם מעלוויות שקוועות ובלתי נתנות לשינוי (הרחבת למאפיין 1) : הוайл והמטרה היא לזהות את השינוי התזרימי, אזי : הקצתה עלויות קיימות ובלתי נתנות לביטול לפרויקט, לא ייכלו באפיון תזרימיו למטרת ההחלטה. כך למשל, אם חברת קבורה בהסכם חכירה שאיננו ניתן לביטול, ואשר דרוש תשלום דמי חכירה (שכירות) מסויימים, הרי שגם אם החברה תחליט בשלב מסוים לבצע פרויקט ולהשתמש במבנה זה – דמי חכירה לא יהיה חלק מתקציב הפרויקט.
4. כמעט מקרה מיוחד של "הלוואות מסובסדות" – אין לכלול עלויות מימון במסגרת תזרימי המזומנים (משום שהשפעות המימון באוט לידי ביטוי במנגנון ההיוון, מנגנון חישוב ה-NPV ולא בתזרמים עצם).
5. יש לגלם השפעות תזרימיות הנובעות ממיסים על הכנסה.

#### 54.100.2 – קיצוב הון בסיסי – **לכיתה**

חברה שוקלת לבצע השקעה ענקית במכונה מטאורפת לחימום נקי נקי ש גם טוחנת פופיקים וכרבולות על המוקם. על מנת לבדוק את הנתונים הכלכליים הקשורים לעולם חימום הנקי היא שכרה את ד"ר צבן, מומחה בעל שם עולמי בתחום הנקיים, ושילמה לו עבור בדיקת התכונות כלכלית שכר טרחה בסכום של 95,000 ש"ח. בהתאם לנ נתונים שמסר ד"ר צבן, אורך הפרויקט הנדון הוא 4 שנים, ולטובת ביצועו יש לרכוש את מכונת חימום הנקי בעלות של 900,000 ש"ח. כמו כן, תדרש החברה להפקיד עירבון בנק עד לסיום מוצלח של הפרויקט לאחד מלקוחותיו המוסדיים, בסכום של 150,000 ש"ח. הסכום יוחזר לחברה במלואו בתום 4 השנים. כמו כן, הפirma צריכה לשכור שירותים של מוממי נקי לתקופת הפרויקט בעלות תחילת שנתית של 40,000 ש"ח לשנה.

החברה צופה להניב הכנסות שנתיות בסכום של 500,000 ש"ח לשנה בכל אחת מהשנתיים. הכנסות מתקבנה בתום כל שנה.

החברה קיבלה ממשרד הבריאות עידוד : אם תבצע את הפרויקט, תוכל לרכוש קרקע חקלאית לזכאים בעלות של 80,000 ש"ח אשר שווי השוק הנוכחי שלו הוא 120,000 ש"ח. הרכישה והמכירה של הקרקע כדי לנצל את הטעבה יוכלו להתבצע בסיום הפרויקט בלבד. הפחת על מכונת הנקי – הוא לפחות משך אורך החיים שלה (4 שנים). החברה כפופה למס בשיעור 30%, כאשר המסים מושלמים תמיד בתום השנה. כמו כן, ידוע ששיעור ההון של החברה אחורי מס הוא 10%.

נדרש :

מהו עניין הפרויקט? בכפוף לכך, האם הפרויקט כדאי? נמקו.

#### הוצאות המומחה:

כשאנו בוחנים פרויקט ומקבלים מגוון נתונים לגבי עלויות, תמיד וולעים נתענין אך ורק בעלותות טרם נוצרו, ואשר תיווצרנה בעתיד אם ורק אם יוחלט על ביצוע הפרויקט. לפיכך, עלות סקר שוק / בדיקה מקדמית / מנהלות טרם קבלת החלטה על הביצוע – כל אלו ערכיהם תזרימיים שאינם רלוונטיים לקבالت החלטה ואינם חלק מתזרימי המזומנים של תכנית השקעה ככובע מימוני. **עלויות היסטוריות שאינן ניתנות להשבה הן בגדר נתון סך בחישובינו.**

#### הוצאות המכונה והשפעות נלוות:

בזמן אפס עליינו לשאת בעלות רכישתת 900,000. ב眾סף, אנו נדוחה مدى שנה על הוצאות פחת בגינה. הוצאות פחת אלו יזכו את החברה במגן מס / זיכוי מס בהתאם לסכום ההוצאה ושיעור המס.

$$-\frac{900,000}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4)$$

ביאור נוסף : 900,000 שחולקו ב-4 – אלו הן הוצאות הפחת המדווחות, לפי היחס בין הוצאות לבין תקופת ההפקתה הנטוונה. מדוע המדקם חיובי? משום שההפחת עצמה איננו בגדר תזרים מזומנים יוצא, הרי את כל הכספי שלימנו במועד השקעה וכבר התייחסנו לכך ; מה שההפחת מניב לנו זהה דוקא תזרים חיובי מרשות המסים,

המחושב מדי שנה בשנה כמכפלת הוצאות הפקת בשיעור המס (30%). והואיל ונדווח בגין פחות זה כל שנה במשך 4 שנים הפוך, יש להוון סדרת תזרימי מגני מס אלו באמצעות PVFA.

הערה: בהחלט יתכן שבתום הפוך, חברה תצליח למכור את שידידי המכונה ולקבל בעד זאת תזרים חיובי חד פעמי. ראו שאלות אחרות במחברת המציגות מצב זה. כאן, אין שום מידע על יכולת למכור את הפריט בסוף הפוך.

הפקדת עירבו ש"חזר אלינו":

על פי נתונים השאלה, על החברה חובה להפקיד היום 150,000 ש"ח (תזרים שלילי), אלא שסכום זה יחזור לחברה במלואו בסיום הפוך. נשאלת השאלה – האם פוליה זו רלוונטית בכלל? הרי אם אני משלם, אז מקבל חזרה... למעשה כלכלית, לא קרה כלום? האם זה נכון? כМОון שקביעה צו היא מוטומטמת. הרי כל הרעיון במימון הוא לגם את ערך הזמן של הכספי. אך לא משנה מה אמורים בשאלת ואיך מנסים לאיוורה לשכנע אתכם, לעולם לא נוכל להתעלם מההשפעות של "הון חזרה": כספים שימושיים בתחלת הפוך, ומתקבלים חזרה בסיוםו – הם חלק מتوزירמי ונתיחה אליהם באומדן ההשפעות על הערך:

$$-150,000 + 150,000 * (1 + 10\%)^{-4}$$

הוצאות שוטפת (הוצאה תזרימית שוטפת) – עלות מחממי נקייה בתחלת כל שנה

כל עלות שהיא בגדר הוצאה שוטפת, היא בעלת שתי השפעות תזרימיות המקוזות זו את זו: מצד אחד, מדובר בתזרים שלילי – עלות אמיתי. מצד שני, דזוקא משום שזו עלות אמיתי – הוצאה, החברה גם זכאייה לקבל מגני מס (זכויי מס) בעדיה.

הצד השלילי – עלויות שנתיות בתחלת כל שנה, 4 שנים:

$$-40,000 * PVFA(10\%, 4) * (1 + 10\%)$$

מדובר בתזרימיים שהם בתחלת כל שנה, 4 שנים. ככלمر עיתויים על הציר הוא מזמן 0 לזמן 3. חישוב הערך הנוכחי שתמיד מקפץ אחת אחרת מוביל לזמן 1 – ואת זה צריך לתקן – מכאן המכפלת הנוספת.

הצד החיובי – זיכוי המס. בשאלת נאמר שזכויי המס הוא בתום כל שנה:

$$+40,000 * 30\% * PVFA(10\%, 4)$$

מדובר בסכום הוצאה 40,000, מוכפל בשיעור הזכוי שהוא שיעור המס – 30%, והואיל והוצאה זו בהתאם זיכוי המס בגין היא בתום כל שנה (התחשבנות המס היא בתום כל שנה) כפלו ב-PVFA ולא צריך בהתאם.

הכנסות בתום כל שנה, 4 שנים בסך 500,000 ש"ח

אפשר לייצר שני ביטויים – האחד, הוא הכנסה בערך נוכחי, והשני, הוא המס לתשלום (שלילי) הנובע מההכנסה. דרך נוספת ומהירה יותר שבנה נשתמש תגיד: אם זיהינו הכנסה / הוצאה שעיתויי המס בגין זהה לעיתוי היוצרותה, אפשר לייצר חישוב על הנטו בביטוי אחד:

$$500,000 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

### עדוד ממשלתי

החברה קיבלה ממשרד הבריאות עדוד : אם תבצע את הפרויקט, תוכל לרכוש קרקע חקלאית לזכאים בעלות של 80,000 ש"ח אשר שווי השוק הנוכחי שלו הוא 120,000 ש"ח. הרכישה והמכירה של הקרקע כדי לנצל את הקרקע יכולים להתבצע בסיום הפרויקט בלבד.

כאשר חברה מוכרת רכוש קבוע, ציוד, קרקע, מכונות וכן הלאה – אנו מתייחסים לעסקה כעסקה היוצרת רווח / הפסד הון. מדובר ברווח / הפסד שנוצר על שום בגין מסים על ההכנסה. כך שבעצם, בזמן 4, בסיום הפרויקט, אני מצפה שיוציאו הערכים התזרימיים הבאים :

- א. **תזרים שלילי לביצוע ההשקעה.**
- ב. **תזרים חיובי למכירה מיידית של ההשקעה.**
- ג. **חשבון רווח ההון במכירה ומיסויו (בסימן שלילי).**

$$[-80,000 + 120,000 - 30\% * (120,000 - 80,000)] * (1 + 10\%)^{-4}$$

**פירוק :**

הערך השילי בסך 80,000 ש"ח מייצג את התזרים שיצא לטובת הרכישה החזמנותית.

הערך החיבוי בסך 120,000 מייצג את תמורה המכירה החיבובית בהתאם לתנאי השוק.

מעבר לעצם קבלת תזרים "נטו" של 40,000 באופן זה (תשולם 80,000, קבלת 120,000) עסקה זו של מכירת סוג של פריט קבוע יוצרת רווח / הפסד הון לפי ההפרש בין תמורה המכירה לבין "ערך הספרים" של הפריט שנמכר. בשפה פשוטה : אצלונו הפריט מופיע כ-80,000 (עלות רכישתו רגע לפני שנמכר) מככנו אותו ב-120,000, לא מפתיע שההפרש בין הערכים האלו הוא רווח, וצריך לשלם עליו מס. לכן כל לנו מקדם שלילי של 30% (שיעור המס) כפול הרווח.

כל הביטוי כולל (בסוגרים המרובעים, כולל התמורה ברוטו כולל השפעות המס) יוצר בתום שנה 4, בסיום הפרויקט. לכן ערך זה תורגם למונחים של ערך נוכחי על בסיס נוסחת ערך נוכחי של סכום חד פעמי – על ידי מכפלה ב-1 ועוד מחיר ההון בחזקה של 4.

**סיכום הערכים וחישוב NPV :**

כדי לחשב את NPV ולקבל החלטה, פשוט סוכמים את כל רכיבי התזרים המהוונים שהוצגו לעיל :

$$\begin{aligned} & -900,000 + \frac{900,000}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4) \\ & -150,000 + 150,000 * (1 + 10\%)^{-4} \\ & -40,000 * PVFA(10\%, 4) * (1 + 10\%) + 40,000 * 30\% * PVFA(10\%, 4) \\ & + 500,000 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4) \\ & + [-80,000 + 120,000 - 30\% * (120,000 - 80,000)] * (1 + 10\%)^{-4} \end{aligned}$$

התוצאה של ערך זה היא ה-**NPV** אם הוא חיובי נקלט את הפרויקט, אם שלילי – נדחה אותו.

**שאלה 54.101 – אפיון בסיסי של תזרימי המזומנים – בעסקת רכישת מכונה חדשה זהה, חן פיינה**  
 חברת "חן פיינה" בע"מ שוקלת לבצע פרויקט שידרשו ממנה לרכוש המכונה לחימום נקי בעלות של 500,000 ש"ח. המכונה בעלת אורך חיים שימושיים של 4 שנים, אך לצרכי מס היא מופחתת על פני שנתיים בלבד. בסיום הפרויקט צופה החברה כי תוכל למכור את המכונה בתמורה ל-100,000 ש"ח.

בנוסף, ידרשו הפרויקט שימוש במבנה משרדים שמושכר בחוזה אורך טווח שאיננו ניתן לביטול, בעלות שנתיות של 40,000 ש"ח. לטענת רואה החשבון של החברה, יש להקצות עלות זו כתזרים שליליים במסגרת בוחנת כדאות הפרויקט.

בנוסף, נדרש להקצות לפרויקט 2 עובדים קבועים, קיימים, שלא ניתן לפטרם, ואשר עלות השכר השנתית של כל אחד מהם 40,000 ש"ח, וכן לגייס עובד חדש לתקופת הפרויקט שעלות שכרו השנתית 65,000 ש"ח. הכנסה השנתית הצפואה מהפרויקט היא בסכום של 290,000 ש"ח לשנה, בתום כל אחת מ-4 שנים הפרויקט. החברה כפופה למס חברות בשיעור 25%, לשיעור מס רווח הון של 15% ומחריר הון של החברה לאחר מס זהו 12% לשנה.

נדרש: **בנתונים אלו –**

- הציגו בטבלה את תזרימי המזומנים הצפויים מהפרויקט.
- חשבו את ערך הפרויקט – NPV בהתאם לsicoms תזרימי הפרויקט.
- חזרו על חישוב העניין תוך שימוש בנוסחה אחת שבה כל רכיב יהווה ערך נוכחי של תזרימי המזומנים.

#### פתרונות סעיף א:

סיכון	תיאור	0	1	2	3	4
$I_0$	עלות ההשקעה במכונה	-500,000				
$\frac{1}{1+r}$	מגמי מס על הפקחת המכונה		62,500	62,500		
ראוי להלן	מכירת המכונה בסיום					85,000
$C$	עובד חדש (תוספות)	-65,000	-65,000	-65,000	-65,000	
$S$	הכנסות שנתיות	290,000	290,000	290,000	290,000	
$-t * (S - C)$	מס על הרווח "התפעולי"	-56,250	-56,250	-56,250	-56,250	
	סה"כ תורמים נטו שנתי	-500,000	231,250	231,250	168,750	253,750

500,000 / 2 * 2 =	ערך הספרים למכירה מס ערב המכירה:	100,000	תמורה
	עלות	0	ערך הספרים = עלות מופחתת לצרכי מס
	ערך נכבר	100,000	החרש – רווח הון (חיבור) או הפסד הון (שליל)
	ערך ספרים	15%	שיעור מס רווח הון
		-15,000	הויאל והרווחנו – נוצר מס רווח הון לתשלומים

85,000	סכום תמורה נטו ממכירת המכונה אחרי מס:
100,000	תמורה ברוטו – כסף אמויי שנכנס ממכירה
-15,000	השפעת המס במכירה
85,000	תורמים נטו לאחר מס בין המכירה הצפואה של המכונה

עלויות קיימות שמקצת (עובדים קבועים, הסכם חכירה קיים שלא ניתן לביטול) – לא רלוונטיות. ה- $t$  מייצג שיעור מס חברות, שתיקף לכל סוגי העסקאות למעט עסקת מכירת רכוש קבוע, שכפופה לשיעור מס רווח הון.

הסבירים נוספים – יוצגו בפתרונות המקיים (סעיף ג).

**פתרונות סעיף ב:**

כל שעילינו לעשות הוא לחשב NPV לשורה התחתונה של תזרימי הפרויקט :

$$NPV = -500,000 + 231,250 * PVFA(12\%, 2) + 168,750 * (1 + 12\%)^{-3} + 253,750 * (1 + 12\%)^{-4} = 172,200$$

הואיל והענין חיובי, הפרויקט כדאי.

**סעיף ג: חזו על חישוב הענין תוק שימוש בנוסחה אחת שבה כל רכיב יהווה ערך נוכחי של תזרימי המזומנים**

$$NPV = -500,000 + \frac{500,000}{2} * 25\% * PVFA(12\%, 2) \\ + \left\{ 100,000 - 15\% * \left[ 100,000 - \left( 500,000 - \frac{500,000}{2} * 2 \right) \right] \right\} * (1 + 12\%)^{-4} \\ + (290,000 - 65,000) * (1 - 25\%) * PVFA(12\%, 4)$$

כמובן, גם כאן התוצאה תהיה זהה לחלוטין לו שנוצירה בעקבות היוון שורת תזרימי הנטו בפתרון סעיף ב לעיל.

**שאלה 54.102 – בניית תזרימי מזומנים לתוכנית השקעה במצב של החלפת מכונה**

בחברת "ירון המנקוק" בע"מ (להלן: "החברה") נוהגים לספק שירות של חימום נקניק ללקחות. לשם הפעולות העסקית מבצעת החברה שימוש במכונה לחימום נקניק.

המכונה לחימום נקניק נרכשה לפני 4 שנים, בעלות של 100,000 ש"ח. לצרכי מס, המכונה מופחתת על פני 5 שנים בשיטת הקו הישר, למרות שאורך חייה השימושיים הוא 12 שנים בסך הכל (מועד רכישתה). ידוע כי מדובר בדגם יישן מאד של המכונה, ואשר על כן, לא ניתן למכוור אותו היום, לאור שינויים מהותיים בטכנולוגיית חימום הנקניק.

שרון, שותפה בחברה, פנתה לירון על מנת שישקול להחליף את המכונה לחדשה, כזו שנתקעות בה פחות כרכבות ופופיקים בתהליך חימום הנקניק ללקחות, ולכן היא דורשת פחות עלויות תחזוקה. המכונה החדשה תעלה לחברה 1,500,000 ש"ח ואורך חייה 8 שנים. לצרכי פחת, מופחתת המכונה החדשה על פני 5 שנים.

החסכו השנתי שצפוי לנבוע מהירידה בעלות ניקוי הפופיקים והcrcבות צפוי להשתכם ב-400,000 ש"ח בתום כל שנתי חיים של המכון (לא כולל פחת, השרות העובדים, יונץ ועובד קבוע – ראו להלן), אך לשם תפעולה תצטרכז החברה לשלים בעוד שנה סכום חד פעמי של 30,000 ש"ח לשם הכשרת העובדים לחימום הנקניק במכונה החדשה, וכן להוצאות לתחזוקת המכונה עובד קבוע (שכבר קיים ועובד בחברה) ואשר לא ניתן לפטרו אשר עלות שכרו השנתית 20,000 ש"ח. עובד זה יdag לכך שרמת הקוליפורמים הוצאותיים במכונה תעמוד בדרישות משרד הבריאות. צפוי החסכו השנתי לעיל נAMD בהתאם להערכת יונץ כלכלי שלולם לו בעבר הבדיקה סכום של 50,000 ש"ח.

החברה כפופה למס חברות בשיעור 30%, שחל על כלל רוחה, למעט רוחה הון (והפסדי הון) החייבים (או מזוכים) במס לפי שיעור מופחת של 15%. מחיר הון של החברה לאחר מס הוא 20% לשנה.

נדרש: ירונ פנה אליכם על מנת שתבחנו את הכספיות הכלכלית של החלפת המכונה. לשם כך: הציגו חישוב ישיר של עניין החלפת טבלת תזרימיים (באופן שבו כל איבר בנוסחת החישוב מייצג סדרה תזרימית אחרת או רכיב תזרימי אחר של החלפה). [הבהרה: גישה זו נפוצה מאוד בפתרונות ביחסות הלימוד].

ראשית, לשם נוחות, נתיחס לתזרימיים שנובעים מעצם רכישת המכונה החדשה:

$$NPV = -1,500,000 + \frac{1,500,000}{5} * 30\% * PVFA(20\%, 5) \\ + 400,000 * (1 - 30\%) * PVFA(20\%, 8) - 30,000 * (1 - 30\%) * (1 + 20\%)^{-1}$$

באדום – עלות השקעה, בירוק – מגן המס על ההפחתה, בכחול – הכנסות לאחר ניכוי מס, בורוד – הוצאה חד פעמית ניכוי מס.

כעת, נוסיף למשווהה (זו לא משווהה נפרדת אלא המשך שלה) את השפעות הגריטה של המכונה הישנה. בכל השאלות שעוסקות בהחלפת מכונה עליינו להניח שתמיד מעיפים את המכונה הישנה כאשר מחליפים אותה בחדשה. עקרונית, צריך לתת ביטוי לתזרים הנובע ממכירתה אם רלוונטי (כאן לא רלוונטי, כי אםרו מפורשת שלא ניתן למכור את המכונה בהינתן הטכנולוגיה העתיקה שלה), וכן לאובדן מגני המס על ההפחתה, כמו כן, נעניין ביטוי לגריטה בתמורה ל-0 (הפסד הון):

$$-15\% * \left[ 0 - \left( 100,000 - \frac{100,000}{5} * 4 \right) \right]$$

כאשר: 15% זהו שיעור מס רוחה הון, ה-0 מייצג את תמורה המכירה, והביטוי בסוגרים עגולים מייצג את העלות המופחתת (ערך הספרים) ערב המכירה (מכונה שנרכשה לפני 4 שנים ומופחתת על פני 5 שנים. אין צורך להוון. כי הגריטה מיידית, ובהתאם ההשפעה התזרימית בגין הפסד הון).

עצם הגריטה מובילה לכך שלא נוכל לקבל מגן מס על הפחת בגין שנת ההפחתה ה-5 והאחרונה של הפריט שנגרט. הפסד הנובע מכך (שצריך להוון שנה אחרת, כי על הפחת הינו אמורים לדוח בתום השנה) הוא:

$$-30\% * \frac{100,000}{5} * (1 + 20\%)^{-1}$$

כך שהביטוי המייצג את העניין בשים לב לBITOVIIM כולם:

$$\begin{aligned}
 NPV = & -1,500,000 + \frac{1,500,000}{5} * 30\% * PVFA(20\%, 5) \\
 & + 400,000 * (1 - 30\%) * PVFA(20\%, 8) - 30,000 * (1 - 30\%) * (1 + 20\%)^{-1} \\
 & - 15\% * \left[ 0 - \left( 100,000 - \frac{100,000}{5} * 4 \right) \right] - 30\% * \frac{100,000}{5} * (1 + 20\%)^{-1}
 \end{aligned}$$

**שאלה 54.103 – בניית תזרימי מזומנים לתוכנית השקעה במצב של החלפת מכונה**

חברת "הנקניק המתמיד" עוסקת בחימום נקי. לאחרונה הוצע לחברת השקעה במכונית נקיים בסך 1,500,000 ש"ח. לשם אומדן כדאיות הפרויקט שכורה החברה שירותו של כלכלן לכימות נתונים כלכליים נוספים לפרויקט, שילמה לו בעבר עבור עובודתו 20,000 ש"ח ואת יתרה בסך 40,000 ש"ח תשלם בעוד שנה. בהתאם לנזונים שמסר הכלכלן: אורך החיים הכלכליים של מכונית הנקניק 10 שנים, אך החברה מעריכה כי תבצע שימוש במכונה במשך 8 שנים בלבד. בסיום החיים השימושיים של המכונה בחברה, היא צפואה להימכר בתמורה ל-100,000 ש"ח.

עלויות שוטפות שנתיות בסך 150,000 ש"ח לשנה תשולמהנה בתחילת כל שנה.

ביצוע הפרויקט ידרשו מהחברה להקצות תשומות ניהול ממשמעותיות של מנהלים קבועים בחברה, ועלות שכרים של מנהלים אלו היא 60,000 ש"ח לשנה. כמו כן, כתוצאה מהקצתה זמנה לפרויקט, הם לא יוכל לטפל בחלק מהפרויקטים עליהםם היו אמונים עד כה, מה שיביל לאובדן הכנסות שנתיות בסכום של 30,000 ש"ח מפרויקטים אחרים.

החברה נדרשת להשקיע במחקר ופיתוח לשם שימור הנקניק בעלות של 400,000 ש"ח בתחילת כל 4 שנים. הוצאות הניל מהויה השקעה לצרכי מס, והיא מופחתת על פני אורך החיים השימושיים של ההשקעה (4 שנים, בגין כל השקעה ממועד ביצועה).

הכנסות שנתיות שוטפות מפעילות המכונה מסתמכות ב-500,000 ש"ח בתום כל שנה.

מכונית הנקניקים מופחתת לצרכי מס בהתאם לאורך החיים הכלכליים שלה.

מחיר ההון של החברה הוא 15% לשנה, שיעור מס החברות הוא 30% ושיעור מס רווח ההון הוא 20%. המס משולם בסוף כל שנה.

נדרש:

- חשבו את עניין הפרויקט וחווו דעה בדבר כדאיות הפרויקט לאورو.
- חשבו את עניין הפרויקט מחדש, בהנחה שהממשלה מעניקה למבצעי הפרויקט מענק בשיעור 80% מעלות ההשקעה הראשונית בפרויקט.

**פתרונות סעיף א – עניין הפרויקט (ובמקרה זה – אי) כדאיות**

רכיב השקעה ומגוון מס על הפקת:

$$NPV = -1,500,000 + \frac{1,500,000}{10} * 30\% * PVFA(15\%, 8)$$

שימו לב, בשאלות הקודמות ב-PVFA המשרת את היעון תזרימי מגני המש על ההפחת, הוזן מספר תזרימיים שזהה לתקופת ההפחטה, בעוד שכאן – מספר מגני המש על ההפחת זהה למשך הפרויקט בשנים. למעשה, מספר מגני המש על ההפחת הוא **הנמוך מмежду** תקופת החזקה לבין תקופת ההפחטה (וכאן בשונה מהשאלות הקודמות – **הערך הנמוך יותר** הוא תקופת החזקה)<sup>5</sup>.

רכיב מכירת ההשקעה ומס רווח ההון / זיכוי מס בגין הפסד ההון בגיןה :

על פי נתוני השאלה, ההשקעה צפואה להמכר בתום 8 השנים בתמורה ל-100,000 ש"ח. חשוב! כבירותת מחדל, השקעות בצד, מכונות וכו' – תמיד נמכרות בסיום הפרויקט בתמורה לשווי השוק שלhn (גם אם אין אזכור למילה המפורשת מכירה). המקרה היחיד שבו אין מכירה כזו – הוא במצב שבו הפריט מופחת במלואו, ואין נתוני שווי לגביו.

$$+ \left\{ 100,000 - 20\% * \left[ 100,000 - \left( 1,500,000 - \frac{1,500,000}{10} * 8 \right) \right] \right\} * (1 + 15\%)^{-8}$$

כאשר : הערך 100,000 מייצג את תמורה המכירה, ה-20% הם שיעור מס רווח ההון, כאשר רווח ההון הוא ההפרש (בסוגרים המרובעים) בין תמורה המכירה לבין העלות המופחתת ערב המכירה. את כל זה כופלים ב-1 ועוד מחיר ההון בחזקה שלילית של 8, כדי לבטא את הערך הנוכחי במנוחי זמן 0.

#### שכר כלכלן

הויאל וכנתון הכלכלן כבר ביצע את העבודה (ההיסטוריה) הרי שהתזרימיים ההיסטוריים והעתידיים הקשורים לפעלותו שיבר בוצעה אינם ניתנים למניעה או השבה, ואשר על כן הם בגדיר עלות שקופה ולא יובאו בחשבון בנסיבות תזרימי המזומנים של הפרויקט – נתון סרך.

#### עלויות שוטפות

"עלויות שוטפות שנתיות בסך 150,000 ש"ח לשנה תשולמהנה בתחילת כל שנה". כבירותת מחדל, עיתוי השפעת המש על הכנסות והוצאות הוא במועד ביצועו. כמובן, בהיעדר נתונים נוספים שקיים בשאלת, ותclf נצטט, הטיפול בסעיף היה אמור להיות כדלקמן :

$$-150,000 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 8) * (1 + 15\%)$$

מה פשרו של ביטוי זה? הויאל והערך הנוכחי של סדרה שמתחליה בזמן 0 (התחלה תקופה) מוביל לנקודת הזמן שהוא אחת האחורה ביחס למועד התזרים הראשוני, הרי שהbijוטי :

$$-150,000 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 8)$$

<sup>5</sup> בנוסף, הויאל ולא מזכיר שבעסקת החלפה, אין מקום לטעון שיש "敖בדן" של שנתיים של מגן מס על ההפחת. השיפוט בדבר אובדן הוא בהשווה למשך שלאי ביצוע הפרויקט, והואילו ואי ביצוע הפרויקט לא יהיה מניב שני מגני מס אלו, הרי שלא ניתן לטען שהbijוטי מוביל לאובדן.

מוביל לזמן 1-, ולכן צריך לתקן לזמן אפס על ידי מכפלה נוספת:

$$* (1 + 15\%)$$

אבל כאן – הטיפול לעיל לא רלוונטי בכלל! הויאל והמסים מנותקים בעיתויי ההוצאה, משום שנאמר שהמסים בתום שנה, למרות שהעלויות השותפות בתחילת שנה, הדרך הנוחה לטפל היא להפריד בין סדרת תזרימי הוצאות ברוטו (לפני מס) כתזרים תחילת תקופה, לבין סדרת מגני המס על הפחת (כתזרימי תום תקופה). לא נוכל לכפול באחת פחות המס; כי אין חפיפה בין עיתויי ההוצאה לעיתויי המס בגיןה.

$$-150,000 * PVFA(15\%, 8) * (1 + 15\%) + 150,000 * 30\% * PVFA(15\%, 8)$$

האיבר הראשון מבין המחוברים – ערך נוכחי לסדרת עלויות ברוטו כולל התאמה לתחילת תקופה, האיבר השני מבין המחוברים – ערך נוכחי לסדרת מגני המס על העליות ללא צורך בההתאמה, הויאל ואלו תזרימי תום תקופה.

#### הוצאות שכר מנהלים קבועים

עלויות קבועות במובן זה שهن הי, קיימות ותהיינה ללא תלות בבייעוץ הפרויקט או דחיתו, אין חלק מתזרימי המזומנים של תכנית ההשקעה לצורך בחינת כדאיות הפרויקט. מונחים כגון: "הקצת עלויות" / "העמסת עלויות" / "שיוך עלויות" שמקובלים מאד בrama החשבונאית, אינם מבטאים תזרים נוספים ו מבחיננו בקונטקט הנדון – הן נתון סרק.

#### אובדן הכנסות בעקבות הקצתה זמן מנהלים

בעוד ששכר המנהלים שהוא גודל תזרימי קבוע ובלתי ניתן לשינוי, איןנו בוגדר תזרים מזומנים תוספתית לפרויקט, ועל כן – כאמור לעיל – מהוות נתון סרק; הרי שהפגיעה בפרויקטאים אחרים כתוצאה מהקצתה זמן זו יוצרת השפעה שלילית על תזרימי המזומנים אשר נובעת ספציפית מביצוע הפרויקט הנדון והוא בעלת השלכה שלילית על תזרימי המזומנים בחברה מכלול (שאותם אנו בוחנים, זהה הפרשנטיבית לכדיות). לפיכך, בהחלט נכלל ובסימן שלילי את האובדן הצפוי בתזרימי פרויקטים אחרים כהוצאה לכל דבר ועניין.

"כמו כן, כתוצאה מהקצתה זמן לפרויקט, הם לא יכולים לטפל בחלק מהפרויקטים שעלייהם היו אמוןים עד כה, מה שיביל לאובדן הכנסות שנתיות בסכום של 30,000 ש"ח מפרויקטים אחרים".

$$-30,000 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 8)$$

מדובר כאן בסדר פשוט לכפול ב-1- פחות המס ו אין צורך להפריד בין תזרים / עלות ברוטו לבין סדרת המסים? התשובה היא שכברירת מחדל, תזרימי הכנסה ועלויות הם בתום כל שנה, ואם אכן ערך הוא בתום שנה, ומיסויו בתום שנה, אין כל צורך להפריד בין התזרים ברוטו לבין השפעת המס – שהרי הם חופפים בזמן.

#### הכנסות שנתיות בתום כל שנה

"הכנסות שנתיות שוטפות מפעילות המכונה מסתמכות ב-500,000 ש"ח בתום כל שנה".

$$+500,000 * (1 - 30%) * PVFA(15%, 8)$$

#### עלויות מחקר ופיתוח

החברה נדרשת להשקיע במחקר ופיתוח לשם שימור הנKenik עלות של 400,000 ש"ח בתחלת כל 4 שנים. עלות הניל מהויה השקעה לצרכי מס, והוא מופחתת על פני אורך החיים השימושיים של ההשקעה (4 שנים, בגין כל השקעה ממוקד ביצועה).

מחזור השקעה ראשון – ישרת אותנו מזמן 0 עד זמן 4 :

$$-400,000 + \frac{400,000}{4} * 30\% * PVFA(15\%, 4)$$

בעוד שההשקעה בזמן 0, מגני המש על הפחתה מתחילה כבירית מחדל בתום כל שנה ולכן ההיוון כסדרה לא דורש התאמה.

מחזור השקעה שני – ישרת אותנו מזמן 4 עד תום הפרויקט :

$$\left[ -400,000 + \frac{400,000}{4} * 30\% * PVFA(15\%, 4) \right] * (1 + 15\%)^{-4}$$

מה עשינו פה? אנחנו יודעים שההשקעה נוספת במו"פ היא בזמן 4. לאחר מכן, בתום כל שנה 4 שנים, ככלمر בשנים 5, 6, 7, 8, מקבלים סדרה נוספת נוספת נספת של 4 מגני מס על הפחתה שהיוונה מוביל אחת אחרת ביחס לתחילתה – ואחת אחרת ביחס לזמן 5 שנים. בKİצור ולענין, כל הביטוי בתוך הסוגרים המורובעים משקף את הערך הנוכחי של ההשקעה השנייה והשפעותיה הנגררות לזמן 4. ולכן, התאמה של כולה (מחזור השקעה שני) מזמן 4 לזמן 0 – נבע על ידי מכפלה ב-1 ועוד מחיר ההוון בחזקת 4.

משוואת העניין הכוללת עם כל הרכיבים :

$$NPV = -1,500,000 + \frac{1,500,000}{10} * 30\% * PVFA(15\%, 8) + \left\{ 100,000 - 20\% * \left[ 100,000 - \left( 1,500,000 - \frac{1,500,000}{10} * 8 \right) \right] \right\} * (1 + 15\%)^{-8} - 150,000 * PVFA(15\%, 8) * (1 + 15\%) + 150,000 * 30\% * PVFA(15\%, 8) - 30,000 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 8) + 500,000 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 8) - 400,000 + \frac{400,000}{4} * 30\% * PVFA(15\%, 4) + \left[ -400,000 + \frac{400,000}{4} * 30\% * PVFA(15\%, 4) \right] * (1 + 15\%)^{-4}$$

מקבלים (אם לא טעיתי בהצבה) :

$$NPV \approx -842,191 < 0$$

ולכן הפרויקט אינו כדאי.

## פתרונות סעיף ב: חשבו את ענ"ג הפרויקט החדש, בהנחה שהממשלה מעניקה למבצעי הפרויקט מענק בשיעור 80% עלות ההשקעה הראשונית בפרויקט

מינוי מבוא:

מענק השקעה מוגדר כסכום כספי חיובי המתקבל בידי החברה לטובת ביצוע השקעה בצד, רכוש קבוע, מכונות וכיו"ב. לכארה, אם פרויקט מניב ערך שלילי, יאמר הטעם: "אה, אז פשוט צרייך מענק באוטו סכום." Wrong. מדוע? משום שאינו כפל מבצעים, ואין כפל הטיבות. רשות המסים אינה מחסני חשמל. במלים אחרות, כאשר ניתן מענק בגין השקעה, מנוקדת ראות רשות המסים עלות ההשקעה נמוכה יותר ולכן מגני המס על ההפחת נמכרים יותר גם הם. המשמעות היא שיש לחשב את השפעת המענק כניכוי עלות ההשקעה הראשונית, לרבות ההשפעה הנגזרת על מגני המס על ההפחת רווח / הפסד במכירה (שגם הוא מושפע מהעלות המופחתת ערב המכירה, שקטנה בעקבות המענק).

$$\begin{aligned}
 NPV = & -1,500,000 * (1 - 0.8) + \frac{1,500,000 * (1 - 0.8)}{10} * 30\% * PVFA(15\%, 8) \\
 & + \left\{ 100,000 - 20\% * \left[ 100,000 - \left( 1,500,000 * (1 - 0.8) - \frac{1,500,000 * (1 - 0.8)}{10} * 8 \right) \right] \right\} * (1 + 15\%)^{-8} \\
 & - 150,000 * PVFA(15\%, 8) * (1 + 15\%) + 150,000 * 30\% * PVFA(15\%, 8) \\
 & - 30,000 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 8) + 500,000 * (1 - 30\%) * PVFA(15\%, 8) \\
 & - 400,000 + \frac{400,000}{4} * 30\% * PVFA(15\%, 4) + \left[ -400,000 + \frac{400,000}{4} * 30\% * PVFA(15\%, 4) \right] * (1 + 15\%)^{-4}
 \end{aligned}$$

$$NPV \approx 180,574$$

שיםו לב, סכום המענק ברוטו הוא 1,200,000 ש"ח לפי 80% מתוך 1,500,000 ש"ח.

הענ"ג המקורי (לפני מענק) היה (סעיף קודם):

1,200,000

ותיאורית, אם נוסיף לו מענק כזה:

357,809 כמפורט לענ"ג זה שגוי

נקבל לכארה ענ"ג של:

הסיבה לשגיאה: הענ"ג הפשטני לעיל לא מביא בחשבון את ההשפעה המköנות שיש לירידה במוגני המס על ההפחת והעליה במס רווח ההון (או הקיטון בזיכוי המס על הפסד ההון) על הענ"ג.

## הבהרות נוספות ודגשיות – הנדרשים לצרכי המטלה

- הוּן חזר : תזרימי מזומנים משפיעים על עניין הפרויקט בהתאם לעיתויים. לפיכך, אם חברה נאלצת להשקיע סכום מסוים לטובת פרויקט, וצפוי שהוא יחוור אליה במלואו בסיוםו (למשל, השקעה מלאה קבועה שמשמעותה בסיום הפרויקט) הרי שכובן ש策יך להתייחס לתזרימי והשפעתם על העניין. הדוגמה נקודתית : נניח שמספרים שלמים ביצוע פרויקט עליינו להשקיע בהוּן חזר / מלאי קבוע סכום של 150,000 ש"ח, ונתנו שהוא יושב אליו בסיום הפרויקט – קרי בעוד 7 שנים. עוד נניח לשם נוחות כי מחיר ההוּן 7% לשנה. כਮובן שבעקבות האירוע / הנתנו הניל נכלל את הביטוי הבא במשמעות העניין ולא נוכל להתיכח לו :

$$-150,000 + 150,000 \cdot (1 + 7\%)^7$$

הוּן חזר הוא אחד מהמקדים הבודדים שבಗנים לא נתייחס להשפעת מס. מדובר משום שלפחות בתפיסה בסיסית, מנוקדת ראות רשות המסים אין כאן רווח / הפסד ממושה. אנחנו משלמים סכום מסוים, מקבלים אותו חוזה בסכום זהה, ולכן אין מס (למרות שככלית, ברור שיש כאן הפסד, רשות המסים לא מזכה בגינו).

- בשאלה שפתרנו לעיל (האחרונה), סכום המענק היה נתון (שיעור של 80% מסכום ההשקעה, מה שמאפשר לחשבו). אם המטרה היא **לחלץ את המענק שיצדיק את ההשקעה**, ניתן לפעול ב-2 דרכי :
  - דרך 1 (ד"ר צבן אהוב) : להציג את עלות ההשקעה כולה כנעלם בודד (X) לרבות המיקומים הנוספים בהם מאזכרת עלות זו (בחישוב הפחת, רווח הון) להשוות את משווהת העניין כולל ה-X ל-0. כך מקבלים את סכום ההשקעה המירבי X שמצודק לבצע בפרויקט. ההפרש בין עלות ההשקעה הראשונית בפועל (בנתוני הבסיס ללא מענק) לבין X זה – זה סכום המענק.
  - דרך 2 : להמשיך להציג את ההשקעה בשלמותה, אבל לנכונות ממנה M (שהוא הנעלם המייצג את המענק). כמובן שה-M יופיע גם במקומות האחרים המשפיעים עלות ההשקעה (פחית, רווח הון וכן הלאה). החישוב יוצאה מתמטית פחות אסתטי ונעים במצב כזה, אבל היתרונו הוא שהפעם המענק נשלף כתוצאה ישירה, ללא צורך בפעולה נוספת.

## הבהרות נוספות ודגשיות כלילים יותר – עסקאות החלפה

- אנו מזהים עסקת החלפה בכל מקרה שבו פרייט ההשקעה הנרכש לטובת פרויקט – מחליף פרייט ההשקעה קיימים .
- הראינו זה מכבר, שהטכנית לדיוון בעסקת החלפה כולל שני חלקים :
  - החלק האחד שהוא הפשט יותר – מתייחס למחליף (החדש, זה שנרכש). עלותו בסימן שלילי, מגני המשם בגינו חיוביים, ייתכן וניתן למוכר אותו בתום הפרויקט לרבות השפעת המס הקשורה במכירה.
  - החלק השני שהוא המורכב יותר – מתייחס לפרייט המולף (זה שנגרע במסגרת עסקת החלפה). בגין פרייט זה, יש לשים לב לדגשים הבאים :

■ ככל שלפריט המוחלף נותרה תקופת הפחתה – הרי שימושים הגריטה היא אובדן מגני המס על הפחתה. לכן, علينا לחשב את מגן המס על הפחתה בגין הפריט המוחלף, ולהתיחס למגן מס זה בסימן שלילי בהתאם למספר תקופות הפחתה שנותרו לו (בתרגיל שאנו פתרנו היום, לפריט המוחלף נותרה עוד שנות הפחתה אחת... בתרגיל במלטה – נותרו לפרט המוחלף מספר שנות הפחתה).

■ ככל שלפריט המוחלף קיימים ערך חיובי בהווה – הרי שימושים הגריטה קבלה של שוויו החיובי כיום. שווי חיובי זה כפוף להשפעות מס רוח / הפסד הון, בהתאם להפרש בין תמורה המכירה / הגריטה לבין ערך הספרים (עלות מופחתת) במועד החלפה.

#### **סוגיות נוספות למידה עצמית מודרנת (קיימים ברכפים ואdag לחומרים נוספים ותרגול מפורט)**

- לצד הבסיס לדיוון ביח' 7 – מהותם של תזרימי מזומנים וקייזוב הון, עסקאות רגילות, עסקאות החלפה וענקים, קיימות סוגיות רבות נוספות שמשיקולי זמן ויריעת לא נתנו עליה את הדעת. בפרט:
  - הלוואות מסובסדות (סוג של אמצעי עידוד מעבר לענקים).
  - החלטות בדבר ייצור או רכישה (לא באמת שונה מהותית מקיזוב הון רגיל).
  - השוואת אופק: ייח' 7 כוללת כלים המציגים את אופן התתייחסות לפרויקטים בעלי אורך חיים שונה שניתן לחזור עליהם. מדובר בטכניקות שאפשרות לייצר תזרים ממוצע לפרויקט, ועל בסיסו (שווה ערך שנתי) להשוות ולדרג פרויקטים בעלי אורך חיים שונה.
  - מדיניות החלפה אופטימלית: אם אנחנו רוצים לגבות אסטרטגיה כללית בחברה – האם למשל להחליף מכוניות בazi הרכב שלנו כל שנה? כל שנתיים? כל 3 שנים? ולדבוק באסטרטגיה זו... איך נועל? ההבדל הוא שאנו לא דנים במחזור פעילות אחד; אלא רוצים לגבות מדיניות לאורך זמן. סוגיה זו קשורה בטבורה לנושא השוואת אופק.

להלן התרגול המפורט הנוסף (ללימוד עצמי) בנושא יח' 7 :

**שאלה 70.91 – חישוב ענין לפריט שיש לו ערך גרט / שייר, במקרה כלל שבו קיים פחות מואץ**  
חברה שוקלת לבצע פרויקט, לשם כך ערכה בדיקה מקדימה כדי לבדוק כיאותו, עלות של 150,000 ש"ח  
ששולמו ליו"ץ הכלכלי אשר מסר את הפרטים הבאים : לשם ביצוע הפרויקט, נדרש להשקיע במחשבי MacBook  
עלות של 300,000 ש"ח. אורך החיים של המחשבים הוא 5 שנים (כמשך הפרויקט) וערך השיר / הגרט שלהם  
הוא 90,000 ש"ח. הפרויקט צפוי להניב הכנסות בסך 200,000 ש"ח בשנה הראשונה, 300,000 ש"ח בשנה השנייה  
ו- 400,000 ש"ח בשנה השלישי מהשנים 3-5.

המחשבים מופחתים לצרכי מס בשיטת הקו ה ישיר במשך שנים, כאשר שיעור המס 30% ומהיר ההון לאחר  
מס 10%.

נדרש : מהו ענין הפרויקט ?

**פתרון :**

בבואי לנתח תזרימי פרויקט בעולם עם מסים לשם חישוב ענין, אני אוהב להתחיל במיפוי עלויות שאין  
רלוונטיות ועל כן, לא יוכו להתייחסות כלל במסגרת התחשביב.

בקשר זה בולטת בא-רלוונטיותה עלות הבדיקה המקדימה. מדוע? משום שבבואהנו לבדוק את תזרימי  
המוזמנים לשם קבלת החלטה, אנו מתעניינים אך ורק באותו תזרימי שניית להשפייע עליהם, ככלmr – הכנסות  
והוצאות, או ערכיהם אחרים, שככל קיומם נובע מההחלה על ביצוע הפרויקט בנסיבות הזמן הנוכחיות.  
במילים אחרות – עלות ההיסטורית לעולם לא תהווה חלק מ揆ומי המזומנים של הפרויקט, היא בגדר עלות  
ש��ואה.

**עלויות ההיסטוריות שאינן ניתנות להשבה / ביטול לא תכלנה בתזרימי המזומנים.**

השלב הבא שאני אוהב לטפל בו – הוא סוגיית השקעה. עלות השקעה בזמן אפס, מגן המס (זכויי המס) بعد  
הפחיתה על פני השנים הרלוונטיות, ובמידת הצורך – מכירת השקעה בסיום הפרויקט.

נתחיל מהתיחסות להשקעה ומגini המס על הפחתתה :

$$-300,000 + \frac{300,000 - 90,000}{2} * 30\% * PVFA(10\%, 2)$$

מגן המס על הפחתה דורש חישוב הוצאות הפחתה לצורך מס תחיליה. מדובר במחובר השני במשווהה. הוא מורכב מהעלות 300,000 בኒכוי השייר / הגרט לצורך מס (רק אם מונח זה נכלל מפורשות; שכן שווי הפריט בסיום חייו איננו עונה להגדלה). כל זה מחולק בתקופת הפחתה לצרכי מס, ומוכפל בשיעור המס.

תמורה ממכירת ההשקעה ומיסוייה בתום הפרויקט :

בשאלה לא נאמר מפורשות שהפריט צפוי להימכר בתום הפרויקט. בנוסף, למורות שניתן מידע בדבר ערך הגרט / השייר לצרכי מס, אין מידע מפורש בדבר שווי השוק הצפוי לפריט בתום הפרויקט. יחד עם זאת, עלינו להניח שההיעדר נתונים סותרים, פריטי רכוש קבוע תמיד יימכרו בתום הפרויקט בהתאם לערך הספרים (העלות המופחתת שלהם) אם יש כזו.

על פי נתוני השאלה – הפריט מופחת על פני שנתיים לצרכי מס. לכן, עלותו המופחתת בתום הפרויקט (לאחר 5 שנים) היא ערך הגרט / השייר בלבד :

עלות הפריט ההיסטורית	300,000
פחית נცבר לתום 5 שנים	<u>(210,000)</u>
ערך ספרים = עלות מופחתת	90,000

בתום 5 שנים, אנו מניחים שהפריט נמכר בתמורה זו. כמו כן, הואיל והוא נמכר בתמורה זהה לערך הספרים, לא יכול להיווצר רווח / הפסד במכירה. בקצרה: **אם פריט נמכר לאחר שתקופת הפחתתו לצורך מס תמה בתמורה לערך הספרים שלו (ברירת מחדל, אם אין נתון אחר על שווי), אז התמורה זהה לגרט, ואין מס.**

$$90,000 * (1 + 10\%)^5$$

יש לבטא את המכירה והتوزרים בגין במנוחי עניין, והואיל והמכירה היא תזרים חד עמי, ההיוון לאחר הוא על ידי חלוקה ב-1 ועוד הריבית בחזקה מתאימה, או ע"י מכפלה באחת ועוד הריבית בחזקה שלילית.

ערך נובחי של תזרימי הכנסה מהפרויקט (שנתיים, אחרי מס) :

נתון: "הפרויקט צפוי להניב הכנסות בסך 200,000 ש"ח בשנה הראשונה, 300,000 ש"ח בשנה השנייה ו-400,000 ש"ח לשנה בכל אחת מהשנתיים 3-5".

$$200,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 300,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-2} \\ + 400,000 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2}$$

מה עשינו כאן?

ה-200,000 הם סכום בודד בעוד שנה. נטרלנו ממנו מס והיוונו אותו כסכום בודד שנה אחרת. גם ה-300,000 הם סכום בודד בעוד שנה, נטרלנו גם מהם מס והיוונו אותם כסכום בודד שנה אחרת. ה-400,000 מייצגים סדרה שמוספע איברהה הראשונית בזמן 3. היוונו אותה לאחר מס כסדרה, והואיל וההתאימות היא כל סדרה, הגיעו לנקודת הזמן של "אחת אחרת" לפני תחילת הסדרה(Clomer לזמן 2. לכן, את כל הביטוי עליינו בהתאם על ידי מכפלה ב-1 ועוד הריבית 10% בחזקה שלילית של 2.

איחוד כל האלמנטים לנוסחת NPV אחת (הכלב "שורה אחת", פיצול השירות רק מטעמי מקום):

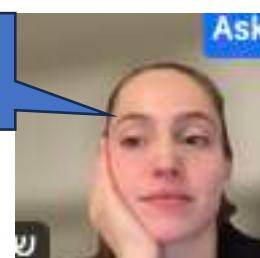
$$NPV = -300,000 + \frac{300,000 - 90,000}{2} * 30\% * PVFA(10\%, 2) + 90,000 * (1 + 10\%)^{-5}$$
$$200,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 300,000 * (1 - 30\%) * (1 + 10\%)^{-2}$$
$$+ 400,000 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2}$$

והתוצאה:

$$NPV = 686,849$$

הואיל וה-NPV חיובי, כדאי לבצע את הפרויקט שזה עניינו.

האם כל התרגילים כל כך ארוכים בתחום זה?



לא. לצד התרגילים הבוחנים על עניין מלא, ישנו  
תרגילים הבוחנים על השפעת אירוע ספציפי



### שאלה 70.92 – המשמעות של הון חזר והשפעתו על הענין

אלון פרידמן שוקל לבצע פרויקט ממשמעותי בתחום חימום הנקייק. ענין הפרויקט הוא חיובי בסך 548,000 ש"ח. בבדיקה של התחשב שנערך, התברר כי ההתייחסות לתזרימי הפרויקט לא כללה השקעה הנדרשת בהון חזר בסכום של 120,000 ש"ח. מדובר בהשקעה במלאי קבוע, שתבוצע בתחילת הפרויקט ואשר תושב לחברת במלואה עם סיומו בסכום זהה. משך הפרויקט 8 שנים, החברה כפופה למס בשיעור 30%, ומהירות ההון של החברה 10%.

נדרש: מהו ערך הענין המתוקן?

פתרון:

השאלה הרשונית העולגה והמתבקשת, ולפעמים גם יש עליה מגוון שאלות והידדים תיאורתיים היא: אם החברה צריכה להשקיע סכום, והוא תקבל אותו במלואו חזרה, בחלוף מספר שנים – האם זה רלוונטי בכלל לחישובי עניין וכדאיות, או שנכון יותר לומר שהחזרה וההשפעה הכלולות אפס, אפשר להתעלם מזה?

התשובה היא: כמובן שאסור להתעלם! הרי כל הרעיון במימון וניהול פיננסי הוא ההשפעה של עיתויי תזרימי המזומנים על הערך. ולכן, חייבים לבטא את השפעות התזרימיים ואת ההשלכות הנובעות על הערך בקרה של היון.

$$\Delta NPV(Working Capital) = -W + W * (1 + k)^{-t}$$

$$\Delta NPV(Working Capital) = -120,000 + 120,000 * (1 + 10\%)^{-8} = -64,019$$

שים לב שאין השפעת מס לאירוע מסוים שבתפיסה הבסיסית, רשות המסים לא רואה כאן רווח / הפסד חשבוני החייב במס, למروת שכמובן נוצר כאן הפסד כלכלי.

כאשר:

השינוי בעניין הנובע מההשקעה בהון החזר	$\Delta NPV$
סכום ההשקעה הנדרשת בהון החזר, תזרים שלילי מיידי	$W$
מחיר ההון של החברה (הריבית להיון)	$k$
פרק הזמן (בדרך כלל בשנים) שבסיומו קיבל חזרה את ההון (החזר)	$t$

548,000

ענין שוחשב בהתעלם מההון החזר

(64,019)

השפעה השלילית של הכללת ההון החזר בחישוב

483,981

הענין הנכון / המתוקן

שאלה 70.93 – חישוב שווי השקעה על בסיס תזרימי מזומנים שנותרו, לנקודת תמחור מסוימת  
חברה שוקלת לבצע פרויקט שדורש השקעה בצד בעלות של 200,000 ש"ח. אורך החיים של הצד 4 שנים,  
ולצרבי מס הוא מופחת על פני שנתיים.

ההכנסות השנתיות הצפויות הן: 300,000 ש"ח בשנה הראשונה, 330,000 ש"ח בשנה השנייה, ובכל שנה עוקבת  
– ההכנסות יגדלו ב-15% ביחס לשנה קודמת. הרווחות השנתיות (לא כולל חת) הן קבועות בסך 80,000 ש"ח  
לשנה בגין הפרויקט. מחיר החון לאחר מס הוא 5% לשנה ושיעור המס החל על כל סוגי העסקאות בחברה הוא  
20%.

נדרש:

- חשבו את ה-NPV.
- הניחו CUT כי בתחלת השנה ה-3 של המיזם הציעו לחברת רכוש אותו ממנה. מהו המחיר שהיא תדרוש  
לנקודת זמן זו?

### פתרונות סעיף א – חישוב NPV

הערכמים באלפי ש"ח:

$$NPV = -200 + \frac{200}{2} * 20\% * PVFA(5\%, 2) + 300 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-1} + 330 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-2} \\ + 330 * (1 + 15\%) * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-3} + 330 * (1 + 15\%)^2 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-4} \\ - 80 * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 4) = 627.77$$

막רא צבעים:

אדום: השקעה; ירוק: מגן המס על החת; כחול: תזרימי הכנסה לאחר מס; שחור:רווחות לאחר מס.

### פתרונות סעיף ב – שווייה המיזם בתחלת שנה 3

תחלת שנה 3: רגע לאחר תזרים המזומנים של השנה השנייה.

במבט קדימה – כי כל פרויקט מתומך בכל נקודת זמן לפי התזרמים שנותרו ממנו – אנו זכאים לקבל את  
התזרמים של השנים 3-4. למעשה, המחיר המינימלי שנדרש בגין המיזם בתחלת שנה 3 הוא הערך הנוכחי  
של התזרמים של סוף 3 וסוף 4 לנקודת זו.

$$NPV = 330 * (1 + 15\%) * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-1} + 330 * (1 + 15\%)^2 * (1 - 20\%) * (1 + 5\%)^{-2} \\ - 80 * (1 - 20\%) * PVFA(5\%, 2) = 486.821$$

כאשר, בכחול מסומנים CUT רק התזרמים של זמן 3 (הראשון) וזמן 4 (השני) מתואימים לזמן 2 (תחלת זמן 3,  
ערב המכיר) ובשחור, מסומנים CUT רק תזרימי הרווחות שנותרו בשנתיים הבאות.

**שאלה 70.94 – סוגיה: חילוץ הכנסה שנתיות ברוטו שמצדיקה את הפרויקט בעולם עם מסים**  
 מציעים לחברת "שי פ" בע"מ לרכוש מחשב Mac Pro בעלות 50,000 ש"ח שאורך חייו 10 שנים אך הוא מופחת לצרכי מס על פני 5 שנים. הוצאות התפעול השנתיות בגין המחשב הן 3,000 ש"ח. שיעור המס החל על החברה הוא 20% ומהירות ההון לאחר מס הוא 10%.  
 מה צריכה להיות ההכנסה השנתית שתצדיק את הרכישה?

**פתרון :**

נקודות מינימום הכספיות, באופן כללי אצלנו, היא נקודת "ענין 0". לכן, נבנה על בסיס התזרימיים המזוהים את משווהות העניין, נציב בה את סכום ההכנסה המתבקש כנעלם, ונשווה אותה ל-0.

$$NPV = -50 + \frac{50}{5} * 20\% * PVFA(10\%, 5) - 3 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 10) + X * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 10) = 0$$

$$X = 11.629$$

**כאשר :**

**באדום :** **עלות ההשקעה, בירוק – מגן המס על הפחתה, בשחור – עלויות שוטפות, ובכחול – הכנסות שוטפות.**  
 יש לשים לב שלמרות שההפחטה היא על פני 5 שנים, מבחיננו אלא אם נאמר אחרת, הפרויקט מתmeshק בהתאם לארוך החיים השימושיים של הנכס.

מסקנה : על מנת להצדיק את הפרויקט, נדרש כי ההכנסה השנתית המומוצעת (ברוטו, לפני מס) תהיה 11,629 ש"ח.

**שאלה 70.95 – חילוץ מחיר מינימלי ליחידת מוצר עם שינויי בהיקפי המכירות להצדקת פרויקט**

באפשרותך ללמוד 1,000 קורסים בשנה הקרובה (הניבו שמקבלים את התקובל בתום כל שנה), 2,000 בשנה לאחר מכן, ו-3,000 קורסים בכל אחת מהשנתיים, 3,4 ו-5. לשם כך נדרש מכונת נקניק לסטודנטים בהשכלה של 2,000,000 ש"ח. העלות המשתנה לקורס היא 500 ש"ח. אורך חיי מכונת הנקניק 5 שנים והוא מופחתת לפי שיטת הקו ה ישיר. בתום הפרויקט ניתן יהיה למוכר את מכונת הנקניק בתמורה ל-200,000 ש"ח. מחיר ההון לאחר מס הוא 10% לשנה, שיעור מס החברות הוא 40% ושיעור מס רווחי ההון הוא 20%.

נדרש: מהו המחיר המינימלי לקורס (בנחה שהקורסים אחידים) אשר יצדיק את הפרויקט?

פתרונות:

הערכים באלפי ש"ח:

$$\begin{aligned}
 NPV = & -2,000 + \frac{2,000}{5} * 40\% * PVFA(10\%, 5) + 200 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-5} \\
 & -1,000 * 0.5 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-1} - 2,000 * 0.5 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-2} - 3,000 * 0.5 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & +1,000 * X * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-1} + 2,000 * X * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-2} + 3,000 * X * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 3) * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & = 0
 \end{aligned}$$

את כל הביטוי הזה יש להשוות ל-0, ולהלץ את ה-X המביטה את המחיר לקורס בודד.

**באדום: עלות ההשכלה, בירוק – מגני המס על הפחתה (תקופת הפחתה זהה לאורך החיים אם אין נזון סותר), בטורקיז – תמורות המכירה בתום הפרויקט של הפריט נשוא ההשכלה (מכונת הנקניק) אחרי מס. מה רואים שם? שמקבלים 200, אבל הוואיל והפריט הופחת לגמר (כל 5 שנים הפחתתו תמו) ואין לו ערך שייר / גרט לצורך מס, הוא אמור להיות שווה 0. لكن, כל ה-200 שצופים לקבל בעדו הם לא רק תזירים – אלא גם רווח / הכנסה החיבת במס, וכן הדרך המהירה להגיע לנטו במקרה כזו היא על ידי מכפלה ב-1 פחות המס. בשחור – עלויות משתנות בכל שנה, בהתאם למספר הקורסים (0.5 הם 500 ש"ח באלפיים).**

**בכחול – הכנסות מהקורסים. המחיר לקורס הוא X.**

משיקולי זמן, לא פתרתי עם חילוץ ה-X, ניסיתי להיעזר בצ'אט GPT לפתרון זוירז, לטענתו (לא בדكتוי) התוצאה 1,059.6 ש"ח לקורס. אתם מוזמנים לבדוק. בכל מקרה, הדגש הוא מבון הדרך.

### מינוי רצוי – סוגיות השוואת אופק

כאשר אנו רוצחים לבחור בין פרויקטים, אשר אורך חייהם שונה, ואשר ניתן לחזור עליהם – לא ניתן לבצע השוואת בין ערכי הענין של כל אחד מהפרויקטים בנפרד, באופק פשוטי. מדוע? משום שמדובר במקרה שיש פרויקט שנמשך 8 שנים והענין שלו פחות גבוה מענין פרויקט שנמשך 3 שנים, לא יוכל לדעת האם ביצוע חזרה של הפרויקט המתחרה יוביל לענין מצרכי גבוה יותר, בהתחשב בפרק הזמן הכלל להשקעה. לשם השוואת אופק וחישוב ענין לאופק מסוית, יש כמה גישות ביחידות הלימוד:

גישה 1 – השוואת אופק לאופק זהה.

גישה 2 – השוואת אופק לאינסוף.

גישה 3 – גישת שווה הערך השנתי, שהיא הגישה היחידה שאותה נציג, שכן אפשר לישם באמצעותה גם את גישות 1-2.

**בקצרה: אם צריך לבחור בין פרויקטים בעלי אורך חיים שונה, אז בהינתן אפשרות לחזרה על הפרויקטים, علينا להשתמש בגישה מתאימה של "השוואת אופק" ורק לאחר מכן להכריע.**

### שאלה 70.96 – השוואת אופק

במפעל נקי מלחמים נקי ללקחות ברחבי הארץ. בעלות החברה מוכנות חיים נקיין ישנה שערכה בספרים אפס. המפעל שוקל את החלפת המוכנה הישנה במוכנה חדשה, ולפניהם 2 אפשרויות:

- אפשרות 1: לרכוש מוכנות נקיין של זק"ש בעלות של 100,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המוכנה היא 7,000 ש"ח שיישולמו בתום כל שנה, ואורך חייה 8 שנים.
- אפשרות 2: לרכוש מוכנות נקיין של סלמור בעלות של 70,000 ש"ח. עלות התחזוקה השנתית של המוכנה היא 14,000 ש"ח ואורך חייה 10 שנים.

ידוע שההוצאות השנתיות הצפויות מחימום נקיין הן חיוביות וגובהות מאד. כמו כן, ידוע כי ניתן לרכוש מוכנות דומות באותם תנאים גם בעתיד.

ידוע ששיעור מס החברות הננו 40%, שמחיר הון לאחר מס הוא 10%, שיטת הפקת הון ישר על פני 4 שנים בלבד, וכן יש להניח שבעוד 40 שנים החברה תחולש ותפרק מרצון.

נדרש:

- א. מהו עניין העליות של כל חלופה לתקופת הפרויקט? איזו חלופה תועדף, לאור חישוב זה?
- ב. לטובת נדרש זה, הタルמו מההנחה שההכנסה השנתית גבוהה וחיובית. מה צריכה להיות ההכנסה השנתית המינימלית ב-10 השנים הקרובות, אם ידוע שכלל אחת מ-30 השנים לאחר מכן, ההכנסה תהיה גבוהה פי 3, אם המטרה היא להוביל לכדיות הפרויקט?

### פתרונות סעיף א – ענין ל-40 שנה לכל אחת מהחלופות:

נתחיל מהמקום הכי בייסיק – חישוב NPV לכל חלופה בנפרד, למחזר הפעלה אחד. כמובן שלא קיבל במצב כזו את התוצאות המלאות, אך בחלוקת זו נקודת פטיחה טובה. שימו לב, אמן ההכנסות לא נתונות, אך נאמר שהן חיוביות וגובהות מאד. המשמעות היא שהענין הסופי גם אם לא ידוע, הוא בהכרח חיובי, וכל המטרה היא למזער את עניין העליות.

ענין עליות למחוזר הפעלה אחד, של אפשרות 1 :

$$NPV_1 = -100,000 + \frac{100,000}{4} * 40\% * PVFA(10\%, 4) - 7,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 8) = -90,708$$

ענין עליות למחוזר הפעלה אחד של אפשרות 2 :

$$NPV_2 = -70,000 + \frac{70,000}{4} * 40\% * PVFA(10\%, 4) - 14,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 10) = -99,425$$

לכארה, בчисיבה לא מתוחכמת, אפשרות 1 זולה יותר ולכארה תועדף. בפועל, כמובן שלא. משום שאפשרות 1 אולי אכן זולה יותר, אבל גם משרתת אותו פחות שנים. לכן, ככל שניתן לחוזר על הפרויקטם – עליינו לחשב עלות שנתיות ממוצעת לכל פרויקט, כאשר הפרויקט שעולתו הממוצעת זולה יותר – יועדף באופן כלכלי.

חישוב / מיצוע עלות פרויקט NPV כולל למועדים שנתיים מביצים בגישה שנקראת "שווי ערך שנתי" – EAC – Equivalent Annual Cost – מחשבים את הפרופורציה שבין ה-NPV לבין PVFA – שמתאים לתקופת ההשקעה.

$$EAC = \frac{NPV}{PVFA(k, t)}$$

$$EAC_1 = \frac{-90,708}{PVFA(10\%, 8)} = -17,003$$

$$EAC_2 = \frac{-99,425}{PVFA(10\%, 10)} = -16,180$$

לכן, כבר עכשו נוכל לומר בהיבט הכספיות :

העלות השנתית בחלוקת 2 זולה יותר, ולכארה, למרות –  
שענין בסיסי שלה לתקופת ביצוע אחת גובה יותר –  
היא תועדף



כדי להפוך את העלות השנתית הקבועה שחילצנו לענין ל-40 שנה בכל חלופה, כל מה שצרכיך לעשות זה להוון סדרת תזרימיים כאלו בהתאם לפרק הזמן הרלוונטי :

$$NPV_1(40\text{ years}) = EAC_1 * PVFA(10\%, 40) = -17,003 * 9.779 = -166,272$$

$$NPV_2(40\text{ years}) = EAC_2 * PVFA(10\%, 40) = -16,180 * 9.779 = -158,224$$

### פתרונות סעיף ב – חילוץ סכום הכנסה שמצדיק את הפרויקט

ראשית, הכנסה המינימלית להצדקת הפרויקט כMOVEDן תדרש אם נבחר בביוץ חלופה 2. לפיכך, נדרש כי סך הכנסות נטו מהפרויקט, אחרי מס, תהיה לפחות 158,224 ש"ח (ערך חיובי שMOVIL לאיפוס הענ"נה שלילי שנוצר כתוצאה מהעלויות בחלופה 2 – ראו לעיל). על פי נתוני השאלה, צפויות הכנסות להמשך 40 שנה: 10 שנים ראשונות הכנסות קבועות, וב-30 השנים לאחר מכן, הכנסות גבוהות פי 3.

$$158,224 = X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 10) + 3X * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 30) * (1 + 10\%)^{-10}$$

ומפה רק יותר לחלק את ה-X. תוצאה החילוץ האוטומטי (לא בדكتוי) היא 15,460 אבל העיקר הדרך ☺.

### שאלה 70.97 – השפעות פחת מואץ על כಡיאות פרויקטים ענ"נ

בחברת ההייטק של יוסף פודורובסקי קיימת מכונה לחימום נקניק לעובדי ועובדות המשרד. הפחת השנתי בגין המכונה הוא 5,000 ש"ח. חברת ההייטק של יוסף רוחנית מאד, מניבה תזרימי מזומנים חיוביים על בסיס שנתי, והוא כפופה לשיעור מס של 20%.

מחיר ההון של החברה הוא 10% לשנה.

ערך המכונה בספרים היום הוא 50,000 ש"ח.

נדרש: כמה כדאי לヨוסף לשלם בתור נציג החברה, לכל היותר, בעבור ייעוץ מס שבעזרתו תכיר רשות המסים בפחית כפול כל שנה?

פתרונות :

פחית כפול = מדווחים לרשות המסים על סכומים גבוהים יותר של פחת, אך במשך פחות שנים. מה היתרונו? ובכן, לא מקבלים יותר החזרי מס בסך הכל, אך מקבלים אותם מוקדם יותר. ולזמן יש ערך במימון.

כדי לחשב את הערך התוספתי הנובע מפחית כפו, נבעוד "כפול": נחשב את ההשפעה של מגני המס הקיימים על הענ"ג, ולאחר מכן נחשב את ההשפעה הנובעת מפחית הכספי על הענ"ג. כל חישוב – בנפרד.

ההפרש בין הערכים הנתרמים כתוצאה מכך (בהתנחת פחת כפול ובהתנחת פחת רגיל בהתאם) יהיה ההפרש אשר על בסיסו נקבע את התשלום המירבי ליעץ.

טריק: תקופת ההפחיתה כאן (לפניהם שינוי הפחית המואץ) איננה נטונה, אך אם ידוע ערך הספרים של הפריט וכן ידועות הוצאות הפחית השנתיות בגיןו, אזי הפרופורציה (היחס בין השנתיים) זהה תקופת ההפחיתה הנורטת. כאן – פריט של 50,000 החוצה פחת של 5,000 בשנה, נותרו לו עוד 10 שנים הפחיתה, ולפיכך:

$$\Delta NPV_{RegularPhat} = 5,000 * 20\% * PVFA(10,10\%) = 6,145$$

$$\Delta NPV_{PhatMuaz} = 10,000 * 20\% * PVFA(5,10\%) = 7,582$$

וההטבה הנגזרת מהפחתת המוואץ תהיה ההפרש : **1,437** = **7,582** – **6,145** **אבל זו לא** התשובה הסופית!

כשאנו משלמים ליועץ סכום بعد ייעוץ המס שמאפשר הטבה זו, העלות של היועץ היא הוצאה המוכרת לצורך מס. לכן, קיבל בוגינה החזר מס. זה אומר שנסכים לשלם ליועץ בברוטו יותר מ-1,437 ש"ח אם ההטבה שהוא מעניק נטו היה 1,437 ש"ח.

$$X * (1 - 20\%) = 1,437 \rightarrow X = \textcolor{red}{1,796}$$

**נסכים לשלם ליועץ לכל היותר 1,796 ש"ח بعد הייעוץ. זו התשובה הסופית.**

از מה למדנו מ שאלה זו :

1. שאם תקופת ההפחיתה לא ידועה, אך ידוע ערך הספרים והוצאות הפחת – ניתן לחלץ את תקופת ההפחיתה לפי היחס בין הערכיים.
2. שאם הוצאה מסוימת מובילה לגידול בעניין בערך מסוים, בהנחה שהוצאה מוכרת לצורך מס (ברירת מחדל) נסכים לשלם בעדיה יותר מאשר העליה בעניין.

#### שאלה 70.98 – פחת בסכומים משתנים

טל שוקلت להשקיע במכונה לחימום נקניק לעובדי המשרד :



אם ידוע שעלות המכונה לעיל היא 40,000 ש"ח, וsettוצאה ממנה החברה תוכל להניב תזרימי מזומנים שנתיים (הכנסות בניכוי הוצאות לא כולל פחת ומסים) בסך 20,000 ש"ח, וכן ידוע שהשיעור המס החל על החברה הוא 20%, ומהירות ההון של החברה לאחר מס 10%, מה יהיה העניין של רכישת המכונה והשימוש בה 4 שנים אם ידוע ששיעור הפחת השנתי הוא כדלקמן :

שיעור פחת שנתי	שנה
10%	1
20%	2
30%	3
40%	4

**פתרונות שאלה 70.98**

$$\begin{aligned}
 NPV = & -40,000 + 40,000 * 10\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-1} + 40,000 * 20\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + 40,000 * 30\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-3} + 40,000 * 40\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-4} \\
 & + 20,000 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 4) = \textcolor{blue}{16,758}
 \end{aligned}$$

ה”לכורה טרייק” היחיד בשאלת זו טמון בכך שבמוקום לחשב את הוצאות הפחota על ידי היחס בין עלות ההשקעה לבין תקופת ההפחota – בכל שנה חישבנו הוצאות פחות מחדש על ידי מכפלה עלות המכונה בשיעור הפחota. מכפלה זו היא ההוצאה שכפלנו בשיעור המס, וכך קיבלנו את מגן המס השנתי על הפחota בכל שנה וธนา. הפחota השנתי, כמו תמיד, הוכפל בשיעור המס, והויל והוא משתנה – לא הווים כסירה, אלא כסכומים בודדים.

 **שאלה 70.99 – שיעור פחות משתנה וambilת הפריט לפני סיום תקופת הפחota**

בנתוני השאלה הקודמת, שנחזרו עליהם לשם נוחות:

אם ידוע שעלות המכונה לעיל היא 40,000 ש"ח, ושותפה ממנה החברה תוכל להניב תזרימי מזומנים שנתיים (הכנסות בגין הוצאות לא כולל פחות ומסים) בסך 20,000 ש"ח, וכן ידוע ששיעור המס החל על החברה הוא 20%, ומהירות ההון של החברה לאחר מס 10%, מהו העניין של רכישת המכונה והשימוש בה שנתיים, אם ידוע שבתום השנתיים ניתן יהיה למכור את המכונה בתמורה ל-38,000 ש"ח?

שנה	שיעור פחות שנתי
1	10%
2	20%
3	30%
4	40%

**פתרונות שאלה 70.99**

$$\begin{aligned}
 NPV = & -40,000 + 40,000 * 10\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-1} + 40,000 * 20\% * 20\% * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + \{38,000 - 20\% * [38,000 - (40,000 - 40,000 * 10\% - 40,000 * 20\%)]\} * (1 + 10\%)^{-3} \\
 & + 20,000 * (1 - 20\%) * PVFA(10\%, 2) = \textcolor{blue}{19,578}
 \end{aligned}$$

בעמוד הבא – הדיוון בשורה ה-2, שהוא הדיוון העיקרי המתגדר בשאלת זו.

רוחוון / הפסד הון: ההפרש שבין תמורה המכירה לעלות המופחתת עבר המכירה

$$+ \{38,000 - 20\% * [38,000 - (40,000 - 40,000 * 10\% - 40,000 * 20\%)]\} * (1 + 10\%)^{-2}$$

תמורה המכירה ברוטו

שיעור מס רוחוון

וביעדרו: שיעור המס הכללי

מס חבות

תמורה המכירה

עלות היסטורית

הבסיס לעלות

מופחתת

הפסת השנתיים עד המכירה

מהורכיה

המכירה צפוייה בתום השנתיים

מתואם לשנתיים לאחר כי בסעיף זה

## מיini רציו – מדיניות החלפה אופטימלית

נניח שהקדי קנתה מכונית. היא מעוניינת לתכנן מראש – מתי hei משתלים להחליף אותה? יש כאן דילמה בرمאה העקרונית. מדו"ע? בשל הכוחות המנוגדים הפעולים כאשר מתקדים בעיתוי החחלפה.

### מצד אחד – כשלופות השנים – שווי המכונית יורך;

מצד שני – עלויות התחזקה – עלות עלות;

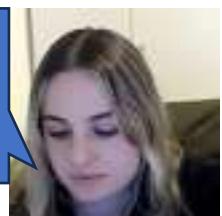
מצד שלישי – אם מחזיקים את המכונית הרבה זמן – לא צריך לknoot חדשה בעלות גבואה. או בשורה התחמונה – איך יודעים متى להחליפ?

הकושי כאן טמון בעובדה שבעצם, יש כאן לא מעט פרויקטים ; כל אפשרות החלפה (בעוד שנה, בעוד שנתיים, בעוד 3) היא פרויקט נפרד. לא רק זה – אפשר גם מלכתחילה לknoot מוכנית משומשת, זהה יוצר / פותח סוג פרויקטים נוספים.

הכוון הכללי לפתרון שນחה ב שאלה להלן,ittihs לכל אפשרויות הרכישה והמכירה כפרויקטים נפרדים, ויחסב עלות שנתית ממוצעת (שווה ערך שנתי) לכל אחת מהן. העלות השנתית הנמוכה יותר – תנאצ'ה.

### שאלה 70.100 – מדיניות החלפה אופטימלית

## הרשות אמר מימון, אבל הלב אמר חיים נקניך



בחברה של טל מחזיקים במכונות חיים נקין 3 שנים לכל היתר. בחלוּף תקופה זו, שריידי הכרבולות והופיקים הנטקעים במכונה גורמים לתחלוּאה רבתית בקרב העובדים. להלן הנתונים בדבר מכונות חיים נקין חדשות, שעולותה במצוותן 100,000 ש"ח:

סוף שנה	עלויות תחזקה בסוף השנה	שווי השוק של המכונה בסוף השנה
1	20,000	75,000
2	30,000	60,000
3	40,000	40,000

הנicho כי החברה פטורה ממשים על ההכנסה. מהי מדיניות החלפה האופטימלית (הווי אומר – האם לרכוש מכונת חיים נקי חדש? בת שנה? בת שנתיים? וכמה זמן להחזיק בה?) הנicho לשם חישוב כי מחיר ההון של החברה הוא 10% לשנה.

פתרון :

ראשית, עלינו לייצר את כל הקומבינציות האפשרות ללא יוצא מן הכלל :

מספר קומבינציה	תיאור
1	לכונת מכונה חדשה ולהחזיק בה 3 שנים
2	לכונת מכונה חדשה ולהחזיק בה שנתיים
3	לכונת מכונה חדשה ולהחזיק בה שנה
4	רכישת מכונה בת שנה והחזקתה שנתיים
5	רכישת מכונה בת שנה והחזקתה שנה
6	רכישת מכונה בת שנתיים והחזקתה שנה

בטור התחלה נחשב את ה- $NPV$  לכל אפשרות :

$$NPV_1 = -100 + 40 * (1 + 10\%)^{-3} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-2} - 40 * (1 + 10\%)^{-3} = -142.975$$

$$NPV_2 = -100 + 60 * (1 + 10\%)^{-2} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-2} = -93.388$$

$$NPV_3 = -100 + 75 * (1 + 10\%)^{-1} - 20 * (1 + 10\%)^{-1} = -50$$

$$NPV_4 = -75 + 40 * (1 + 10\%)^{-2} - 30 * (1 + 10\%)^{-1} - 40 * (1 + 10\%)^{-2} = -102.272$$

$$NPV_5 = -75 + 60 * (1 + 10\%)^{-1} - 30 * (1 + 10\%)^{-1} = -47.727$$

$$NPV_6 = -60 + 40 * (1 + 10\%)^{-1} - 40 * (1 + 10\%)^{-1} = -60$$

הויאל והאפשרויות הן בעלות אורך חיים שונה, ומדובר במדיניות החלפה שנייתן לחזור עליה, הרי שקיבלה החלטה לכונת שמתיחסת באורך החיים השונה של הפרויקטים, תדרוך שימוש בכלים של "השוואת אופק".  
במסגרת זאת, עלינו לבצע את הטיפול על בסיס גישת EAC אשר תחלק את הענ"ן למחזור הפעלה של כל פרויקט ב- $PVFA$  הרלוונטי למשך הפרויקט.

$$EAC_1 = \frac{-142.975}{PVFA(10\%, 3)} = -57.489$$

$$EAC_2 = \frac{-93.388}{PVFA(10\%, 2)} = -53.795$$

$$EAC_3 = \frac{-50}{PVFA(10\%, 1)} = -55$$

$$EAC_4 = \frac{-102.272}{PVFA(10\%, 2)} = -58.912$$

$$EAC_5 = \frac{-47.727}{PVFA(10\%, 1)} = -52.5$$

$$EAC_{60} = \frac{-60}{PVFA(10\%, 1)} = -66$$

אפשר להבחן בכך שההוצאות השנתיות הנמוכה ביותר מתקבלת בחלוקת 5: חלופה במסגרת נרכוש מכונית נכניκ משומשת בת שנה, ונחזיק בה שנה אחת בלבד.



סיכום ביןים – שלבי עבודה בגיבוש מדיניות החלופה אופטימלית :

1. נגיד את כל הנסיבות האפשרות בכפוף לאילוצים. למשל, אם לא מחזיקים בפריט מעל כך וכך שנים, או אם החברה רוכשת רק פריטים חדשים וכיו"ב.
2. נחשב את NPV לכל חלופה, למחזר הפעלה אחד ויחיד של אותה החלופה.
3. נבעץ השוואת אופק כדי למצוא את החלופה הטובה ביותר. אני אוהב (ורק את זה הריאתי) את גישת שווה הערך השנתי (EAC). לשם יישומה, חשוב להתייחס במכנה למשך החזקת הפריט בחלוקת.
4. נבחר בפזיקט / בחלוקת שבה ה EAC הוא המשתלם ביותר (הzell ביותר בחלוקת של עלויות, או הגבואה ביותר בחלוקת במקרה של הכנסות).
5. אם במקרה בשאלת זו שואלים "מהו העניין האינסופי בחלוקת האופטימלית" כל מה שצדיק לעשות זה להתבסס על ה EAC שהוא עלות שנתית אופטימלית, ולחילקו במחיר ההון (מדוע – כי זו הדרך לחשב ערך נוכחי לסדרה אינסופית).

### שאלה 70.10 – עסקת החלפה (לא עיתוי החלפה / מדיניות החלפה, בלי מסים)

בחברה של רביב מחזיקים במכונות חיים נקי ענקיות. ידוע כי מכונות הנקיין הקיימות יכולות המשיך ולפעול עוד 5 שנים ולהניב תקובל שנתי בסוף כל שנה בסך 20,000 ש"ח. לחילופין, ניתן להחליף את המכונות במכונות ענק לחימום נקי שכוללות פיצ'ר מיוחד שמוסיף פופיקים ממוחזרים לנקיין, ובכך מגדילות את ההכנסות. עלות המכונות החליפות (החדשות) 30,000 ש"ח, והתקבולים הצפויים יהיו בסך 40,000 ש"ח (בסך הכל), בתום כל שנה במשך 4 שנים, וערך השיר שלhn 0. בהנחה שנitin מכור את הציוד הישן היום תמורת 5,000 ש"ח, מהו עניין החלפה בהנחה שמחיר ההון 10% לשנה.

פתרון :

שאלות בנושא ייחידה 7 צריכים להפריד בין תחומים: במיוחד חשוב לדעת האם יש בשאלה מידע הקשור לעיתוי החלפה (מתי בדיקת מחליפים פריט) או לגבי מדיניות החלפה (במצב שבו מגבשים מדיניות לפריט מסוים שנחזר עלייה שוב ושוב) או לא.

במלים אחרות – אם אני מזזה דיוון המתבצע בהחלטת החלפה מיידית (לא כזו שבה אנחנו צריכים לקבוע את מועד החלפה, ולא כזו שתציג פעילות שנחזר עליה שוב ושוב), הרי שהדיוון שלו הוא בסיסי, כזה שמתבסס על PV לכל תזרימי החלפה, פעם אחת, ללא השוואת אופק, ללא שווה ערך שנתי.

הדרך שאנו אוחב לנוקוט בה היא – להציג תחילת את כל הביטויים / האיברים הקשורים לפריט החליף – עלות ההשקעה בו, התזרימים הנובעים ממנו, תמורת מכירתו וכיו"ב.

לאחר מכן, אציג את ההשפעות התזרימיות המהוונות של "גריטת" / "מכירת" הפריט המוחלף. הסיבה לכך שאני רוצה להתجيل דוקא מהפריט החליף (החדש) נובעת מפשtotות ההתייחסות אליו.

$$NPV_{\text{החלפה}} = -30,000 + 40,000 * PVFA(10\%, 4) + 5,000 - 20,000 * PVFA(10\%, 5) = 25.982 > 0$$

הואיל והענין חיובי, עסקת החלפה כדאית.

הסבירים נוספים :

עלות ההשקעה במכונה החדשה / החליפה.	<b>-30,000</b>
תזרים מזומנים ברוטו שנתי (אין מסים ופחית) הנובע מהפעלת המכונה החדשה 4 שנים מכירת המכונה הישנה היום בעקבות החלפה – כאן אין מסים, ולכן זו התמורה נטו היום	<b>40,000</b>
אובדן תזרימי המזומנים מהנקין שיכולה להיות לחם המכונה הישנה, 5 שנים נוספות	<b>5,000</b>
	<b>-20,000</b>

**תרגיל 70.102 – עסקת החלפה (לא מדיניות החלפה / לא עיתוי החלפה) – עם מסים**

חברת מיטלים וברעמים מחממת היום נKENIKIM באמצעות מכונה ישנה שנרכשה לפני 6 שנים בעלות של 100,000 ש"ח.

תקופת ההפחיתה של המכונה הישנה 8 שנים, ואורך חייה השימושיים (תפעולית) ממועד רכישתה 10 שנים. המכונה אין ערך גרט / שירץ לצורך מס, אך החברה צופה כי תוכל למכור אותה בתום חייה השימושיים בתמורה ל-20,000 ש"ח.

הכנסה השנתית מהמכונה הישנה היא 40,000 ש"ח. החברה שוקלת להחליף מכונה ישנה זו במכונה חדשה. עלות המכונה החדשה 150,000 ש"ח ותקופת הפחתתה 4 שנים. הערך הצפוי לה בתום חייה השימושיים הוא 20,000 ש"ח.

הכנסות מהמכונה החדשה תהיינה בסך 180,000 ש"ח לשנה, והוא מופחתת ללא ערך גרט / שירץ לצורך מס. בהנחה שהחברה כפופה למס חברות בשיעור 30%, למס רווחי הון בשיעור 20% ומהירות ההון לאחר מס 10%, וכי ניתן למכור את המכונה הישנה היום תמורת 30,000 ש"ח, מהו עניין ה החלפה?

**פתרון :**

שאלה זו דומה במהותה לקודמת; אלא שນכטרך לכלול רכיבים תזרימיים ובין נוספים הנובעים מהשפעות המס.

בדומה לקרה הקודם, נתעלם בשלב ראשון מהרכיבים התזרימיים הקשורים למכונה המוחלפת (לרבוט מכירותה, אובדן תזרימיה, מגני המס בגינה) ונתיחס למכונה החדשה (המחלפה) בלבד. רק לאחר שנסים עמה, ניבור להשפעות התזרימיות של גՐית / מכירת הפריט המוחלף על כל המשתמע.

נציין את הערכים באלפי ש"ח לשם קיצור הכתיבה, וכן לאור ריבוי הרכיבים התזרימיים, נתאר ביתר פירוט כל אחד מהם בנפרד.

**נתיחיל מטיפול במכונה החדשה, רכיב רכיב:**

תחילה – עלות הרכישה הראשונית בזמן אפס :

–150

בנוסף, יש להתייחס למגני המס על ההפחיתה של המכונה החדשה. היא מופחתת על פני 4 שנים, ושיעור המס : 30%

$$+ \frac{150}{4} * 30% * PVFA(10\%, 4)$$

תמורה המכירה העתידית של המכונה החדשה צפואה להיות 20 אלף ש"ח. היא צפואה להמכר רק לאחר סיום תקופת הפחתתה, בתום 4 שנים, מה שMOVEDIL לכך שהמיסוי בגינה (שיעור מס רווח הון, 20%) הוא על כל תמורה המכירה :

$$+ 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4}$$

הכנסות שנתיות מהמכונה החדשה אחרי מס :

$$+180 * (1 - 30%) * PVFA(10\%, 4)$$

העבר לרכיבים התזרימיים הנובעים מהמכונה הישנה / שנגרטת / מוחלפת / נמכרת :

תיכילה, המכונה הישנה נמכרת היום, וקיימת השפעת מס על מכירתה. התמורה ברוטו היא 30 (היום, במועד החלפה) והואיל והמכונה הישנה נמכרת טרם הסתיימה תקופת הפחתה, עלינו לחשב בצורה מורכבת יותר את ההשפעות של מס רווח / הפסד ההון. עשינו זאת על ידי מכפלת שיעור מס רווח ההון 20% בהפרש שבין תמורה המכירה 30 לבין העלות המופחתת ערב המכירה. העלות המופחתת היא לפי העלות ההיסטורית 100 בנייכוי פחות על בסיס 6 שנים שחלפו ממועד :

$$+30 - 20\% * \left[ 30 - \left( 100 - \frac{100}{8} * 6 \right) \right]$$

מעבר לכך, עצם מכירת המכונה הישנה היום מובילת לאובדן מגני המס שנותרו על הפחתה. כנתון בשאלה, המכונה מופחתת על פני 8 שנים בסך הכל מרכישתה, ועתויי החלפה הוא בחולף 6 שנים. המשמעות היא שאנו מונעים מעצמנו את היכולת להכיר בשנתיים של פחות וכך לאובדן מגני מס על הפחתה במשך שנתיים לפחות :

$$- \frac{100}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 2)$$

העובדת שמכררים את המכונה הישנה היום (ולכך התייחסנו לעיל) משמעה בהגדרה שאנו למעשה מבטלים את התזרירים שהוא צפוי מהמכירה בעתיד. המכירה בעתיד צפואה הייתה בתמורה ל-20, והיא הייתה אמורה להתבצע לאחר שഫירת סיים את תקופת הפחתתו. וכך, התמורה נטו מהמכירה שאותה מאבדים היא לפי 20 בנייכוי מס רווח ההון מהוון 4 שנים לאחר מכן (כי המכירה של המכונה הייתה צפואה בלבד החלפה בעוד 4 שנים) :

$$-20 * (1 + 10\%)^{-4}$$

כמו כן, עלינו להתייחס לאובדן הכנסות השנתיות מהמכונה הישנה, בסך 40 לשנה, אחרי מס במשך כל אחת מ-4 שנים פועלות התפעולות אשר נותרו :

$$-40 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

$$NPV = -150 + \frac{150}{4} * 30\% * PVFA(10\%, 4) + 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4} \\ + 180 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4) + 30 - 20\% * \left[ 30 - \left( 100 - \frac{100}{8} * 6 \right) \right] \\ - \frac{100}{8} * 30\% * PVFA(10\%, 2) - 20 * (1 - 20\%) * (1 + 10\%)^{-4} - 40 * (1 - 30\%) * PVFA(10\%, 4)$$

ירין חישב ויצא לו :

$$NPV = 218.8 > 0$$

ולכן עסקת החלפה כדאית.

### תרגיל 70.103 – פروف' עציוון – חישוב ענ"ג מותמך לחלופות שונות, עם מסים

חברת פروف' עציוון מעוניינת למצוא פתרון לביעית חיים הנקניק של עובדי המשרד. כלל העובדים ללא יוצא מן הכלל מגיעים לחברת שטמאז נקיות בתיקם, וכולם צריכים לחמם את כל הנקניק בחולון בזמן צר בהפסקת הצהרים. בפני החברה עומדות שלוש אפשרויות להסדרת פעילות החימום:

מספר אפשרות	פרטים
1	לשכור מכונה ענקית לחימום נקייק, כזו שמאפשרת לחמם 5,000 נקייקות בו זמן. הסכם ההשכרה הוא בזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החד פעריים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם מושלמים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. החלופה תדרוש עלות התקנה חד פעמיית בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החד פעריים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקחתה על פני 10 שנים – בשיטת הקו הירש. עלויות שוטפות נוספות שתיזכרנה בגין החלופה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה – הן בגין ניכוי כרבולות ומקרים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.
2	לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד. התשלום לנקייק 500 ש"ח בתשלום מראש בתחלת כל שנה. החברה זוקקה ל-5,000 מכונות אישיות. ניתן להזכיר את השכירות של המכונה אישית בנסיבות קבועה בכל שנה, ודמי המניין מוכרים כחוזה לצרכי מס.
3	לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחלת השנה עבור 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש עלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהשקעה לצרכי מס, הפקת בגין מחושב במשך 10 שנים לפי קו ישר.

נדרש:

- חשבו את העניין לכל חלופה. איזו אפשרות تعدיף החברה בהנחה שאינה משלמת מס ומהירות ההון שלא 10% לשנה?
- חזרו על חישוביכם בהנחה ששיעור המס 25% ומהירות ההון לאחר מס 7%. כמו כן, הניחו כי תשלומי המס הם בסוף כל שנה.

הבהרה כללית:

בכל המקדים הנדונים אין דיוון בהכנסה כלל. למעשה, מדובר כאן בדרישה של החברה, כאשר הבחירה הנבונה תהיה כזו המזערת את ענ"ג ההוצאות (ערך נוכחי של עלויות – שהייתה כמה שפחות משמעותית). כמו כן, הויל וחלופה מס' 1 דנה בנסיבות של עלות שמשרתת את החברה לאינסוף, הנחה קבילה והגיוונית היא שגמ את יתר החלופות נחשב בהנחה ביצוע לאינסוף.

טיפול בעולםים ללא מסים:

מספר אפשרות	פרטים
1	לשכור מכונה ענקית לחימום נקייק, כזו שמאפשרת לחמם 5,000 נקייקות בו זמן. הסכם ההשכרה הוא בזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החד פעריים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם מושלמים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. החלופה תדרוש עלות התקנה חד פעמיית בסך 100,000 ש"ח, כאשר

	<p>עלות זו, בשונה מדמי השכירות החד פעריים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקה על פני 10 שנים – בשיטת הקו ה ישיר. עלויות שוטפות נוספות שתיווצרנה בגין חלופה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה – הן בגין ניכוי כרבולות ומקרים, פופקיים וציפורניים מהמכונה כל שנה.</p> <p>בעו"מ ללא מסים (באלפי ש"ח) :</p> $NPV = -500 - 100 - \frac{20}{10\%} = -800$
2	<p>לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד. התשלום למכונה אישית לחימום נקייק 500 ש"ח בתשלום מראש בתחלת כל שנה. החברה זוקה ל-5,000 מכונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בעלות קבועה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כהוצאה לצרכי מס.</p> <p>בעו"מ ללא מסים (באלפי ש"ח – لكن 500 ש"ח סומנו כ-0.5 אלף ש"ח) :</p> $NPV = -0.5 * \frac{1}{10\%} * 5,000 = -27,500$
3	<p>לשכור מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחלת השנה עבורה 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש עלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כהשקה לצרכי מס, הפקת בגין מחושב במשך 10 שנים לפי קו ישיר.</p> <p>בעו"מ ללא מסים :</p> <p>הואיל ומדובר בפרויקט לתקופה קבועה נרצה לחשב תחילת את העלות השנתית הממוצעת, אז לתרגם אותה לאייסוף על ידי חלוקה במחיר ההון. בעצם, משתמשים כאן בגישה EAC שווה הערך השנתי.</p> <p>זוהי העלות השנתית הממוצעת, הנהו אותה לאייסוף ונקבל :</p> $EAC = \frac{-400}{PVFA(10\%, 10)} = -65.094$ $NPV = \frac{-65.094}{10\%} = -650.94$

מסקנה : בעו"מ ללא מסים, החלופה שתועדף היא חלופה 3, שכן למרות שהענין שלה שלילי – הוא הכי פחות שלילי מכולם ; וכן אם החברה דורשת את ביצוע הפעולות, החלופה הזולה מבין האפשרויות "תנצה".

טיפול בעו"מ עם מסים – שיעור מס 25%, מסים בסוף שנה, מחיר הון 7% :

מס' אפשרויות	פרטים
1	<p>לשכור מכונה ענקית לחימום נקייק, כזו שמאפשרת לחםם 5,000 נקייקות בו זמן. הסכם ההשכרה הוא בזמן בלתי מוגבל כאשר דמי השכירות החד פעריים הם בסכום 500,000 ש"ח. הם משולמים מראש ואינם מוכרים לצרכי מס. החלופה תזרוש עלות התקנה חד פעמיות בסך 100,000 ש"ח, כאשר עלות זו, בשונה מדמי השכירות החד פעריים, מוכרת לצרכי מס באמצעות הפקה על פני 10 שנים</p>

	<p>בשיטת הקו ישיר. עלויות שוטפות נוספות שטיווצהנה בגין חלופה זו בסכום של 20,000 ש"ח לשנה – בגין ניכוי כרבולות ומקרים, פופיקים וציפורניים מהמכונה כל שנה.</p> <p>בועלם עם מסים (באלפי ש"ח) :</p> $NPV = -500 - 100 + \frac{100}{10} * 25\% * PVFA(7\%, 10) - \frac{20 * (1 - 25\%)}{7\%} = -796.726$	
2	<p>לScaror מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד. התשלום למכונה אישית לחימום נקייק 500 ש"ח בתשלום מראש <u>בתחילת כל שנה</u>. החברה זוקה ל-5,000 מכונות אישיות. ניתן לחדש את השכירות של המכונה אישית בעלות קבועה בכל שנה, ודמי המני מוכרים כחוצהה לצרכי מס.</p> <p>בועלם עם מסים (באלפי ש"ח – لكن 500 ש"ח סומנו כ-0.5 אלפי ש"ח) :</p> $NPV = -0.5 * 5,000 * \frac{1}{7\%} * 25\% * 5,000 + 0.5 * \frac{1}{7\%} * (1 + 7\%) = -29,285.714$	
3	<p>לScaror מכונות אישיות לחימום נקייק לכל עובד בעסקה ל-10 שנים, מחיר השכירות 400,000 ש"ח המשולמים בתחילת השנה עבור 10 השנים הבאות, תוך אפשרות חידוש בעלות זהה כל 10 שנים. דמי השכירות מוכרים כחוצהה לצרכי מס, הפחית בגין מוחשך במשך 10 שנים לפי קו ישיר.</p> <p>בועלם עם מסים :</p> <p>הואיל ומדובר בפרויקט לתקופה קבועה נרצה לחשב תחיליה את הוצאות השנתית הממוצעת, ואז לתרגם אותה לאינסוף על ידי חלוקה במחיר ההון. בעצם, משתמשים כאן בגישה EAC שווה הערך השנתי.</p> $NPV_{10years} = -400 + \frac{400}{10} * 25\% * PVFA(7\%, 10) = -329.76$ $EAC = \frac{-329.76}{PVFA(7\%, 10)} = -46.947$ <p>זהי הוצאות השנתית הממוצעת, נחוו אותה לאינסוף ונקבל :</p> $NPV = \frac{-46.947}{7\%} = -670.68$	

במקרה פרטי זה, הטלת המס או הידריה לא הובילה לשינוי העדפת חלופה 3 שעודנה הוצאה ביותר מבין המוצעות.

**תרגיל 70.104 – השוואת אופק עם עיתוי החלפה אופטימלית, בהתקיימים חלופה קיימת מתיקרת**  
 בחברת "אלנים ופרידמניס" המנכ"ל הגדול אילן מחים לעצמו נקייק מדי יום במכונה חבויה שעברו עליה ימים טובים יותר. ערכה בספרים ושוק של מכונות חימום הנקייק זניח (אפס). הוצאות התחזוקה. של מכונת הנקייק הולכות וגדלות במהלך השנים: הן צפויות להיות בסך 5,000 ש"ח בתום השנה הקרובה, והן תגדלנה בשיעור של 5% לשנה.  
 אילן שוקל להחליף את מכונת הנקייק הישנה, במכונה חדשה – ולפניו שתי אפשרויות :

חולה 1 : מכונת חיים נקי תוצרת זקש שעלותה 60,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 5,000 ש"ח ואורך חייה 5 שנים.

חולה 2 : מכונת חיים נקי תוצרת סלמור שעלותה 80,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 6,000 ש"ח ואורך חייה 7 שנים.

בזכות חיים הנקיק היומי מסוגל המנכ"ל לפעול בעבודתו בעילות מירבית, כך שבסך הכל, העניין מפעילותו חיובי.

כמו כן, הניחו כי ניתן לרכוש מכונות מודגמ 1 או 2 – החדשות – באותם תנאים גם בעתיד. נתונים נוספים :

שיעור מס החברות הוא 40%, מחיר ההון לאחר מס : 10%. שיטת הפקת : קו ישר, כאשר הפקת הוא בהתאם לאורך חייו הנכס.

נדרש :

א. איזו מכונת חיים נקי כדאי לרכוש?

ב. متى מומלץ יהא לרכוש את המכונה החדשה (כלומר – זהו את עיתוי ה החלפה האופטימלי המתחשב בעליות ההתחזוקה של הקיימים, שהולכות וגדלות).

ג. הניחו לטובת סעיף זה שה החלפה כזו היא לאחר 4 שנים. בהנחה זו ולא תלות בתוצאות סעיף קודם, מהי עלות ההחלפה של מכונות הנקיק – מעתה ועד עולם הליליה?

פתרון :

#### סעיף א – איזו מכונה כדאי לרכוש

למרות שעקרונית ובנתוני השאלה, ניתן להמשיך להשתמש במכונה הישנה עד אינסוף, הרי שהעובדת שעליות ההתחזוקה שלה עלות משנה לשנה "ללא גבול" מובילה למסקנה לפיה בהכרח, מתייחסו, ה החלפה תהיה כזוית: מטרת סעיף זה היא לומר – במידה וה החלפה כזוית בנקודה מסוימת, איזו חולה תועדף – או במלים אחרות: בהינתן אורך חיים שונה של ה cholופות השונות ואפשרויות החזרה על הפרויקט (נitinן לרכוש מכונות זהות בעליות זהות בעתיד) נחשב את שווה הערך השנתי EAC בכל חולה – והזלה יותר (זו שווה הערך השנתי שלה הוא גבוהה יותר / פחות שלילי) תועדף.

חולפה 1 : מכונת חיים נקי תוצרת זקש שעלותה 60,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 5,000 ש"ח ואורך חייה 5 שנים. שיעור מס החברות הוא 40%, מחיר ההון לאחר מס : 10%. הפקת הוא בהתאם לאורך חייו הנכס.

чисוב ה- NPV למחזור הפעלה אחד – בהתייחס להשקעה, מגני המס על הפקתתה ועליות תחזוקה :

$$NPV = -60,000 + \frac{60,000}{5} * 40\% * PVFA(10\%, 5) - 5,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 5) = -53,177$$

חילוץ שווה הערך השנתי על בסיס הפרופורציה בין ה- NPV למחזור הפעלה אחד ל- PVFA של משך הפרויקט :

$$EAC_{Zaksh} = \frac{-53,177}{PVFA(10\%, 5)} = -14,028$$

**חלוּפָה 2:** מכונת חדשה נקנית תוצרת סלמור שעלותה 80,000 ש"ח. עלות האחזקה השנתית הקבועה שלה 6,000 ש"ח ואורך חייה 7 שנים.

$$NPV = -80,000 + \frac{80,000}{7} * 40\% * PVFA(10\%, 7) - 6,000 * (1 - 40\%) * PVFA(10\%, 7) = -75,271$$

$$EAC_{Selmor} = \frac{-75,271}{PVFA(10\%, 7)} = -15,461$$

התשובה הסופית לסעיף א: יש להעדיף רכישת **זקש** על פני רכישת סלמור, הוצאות התקופתיות נמוכות יותר.

**פתרונות סעיף ב – מתי בדיקת הבוצע החלפת המכונה?**

אנו יודעים שעלות המכונה החדשה / המחליפה הזולה מבין השתיים היא 14,028 ש"ח לשנה (הוצאות ממוצעת קבועה).

לעומת זאת, עלות המכונה הקיימת היא 5,000 בתום השנה הנוכחית (לפניהם התחשבות בהשפעות מס) והיא תגדל כנתון ב-5% לשנה.

המשמעות היא שיתן לבטא גם גרפית ובעיקר מותמטיות את הוצאות השנתית של המכונה הקיימת כפונקציה של **חלוף הזמן** (בערך מוחלט):

$$Annual CF Old Machine = 5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 5\%)^{t-1}$$

כאשר :

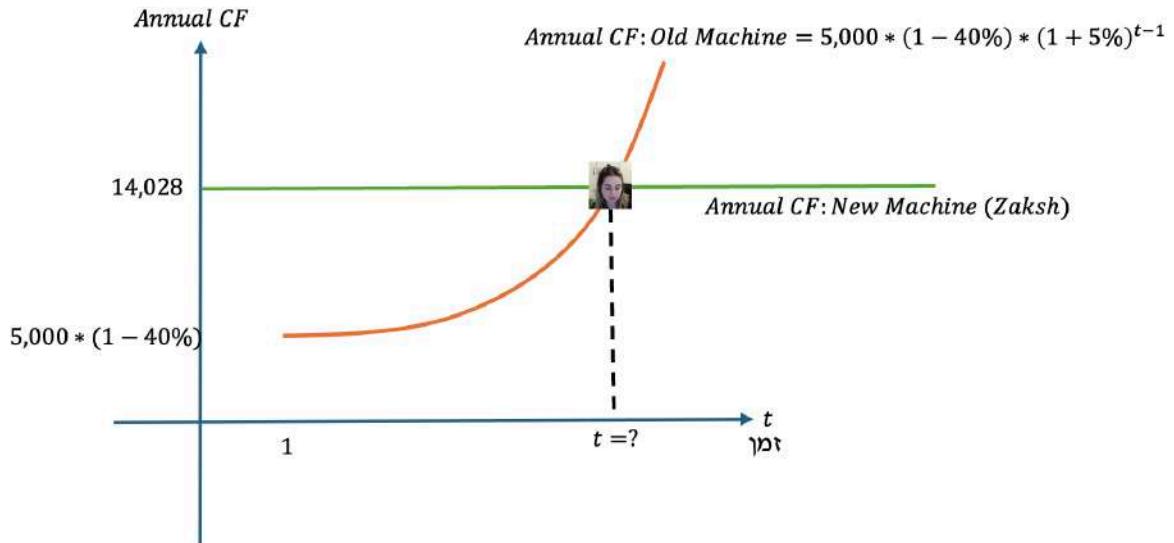
5,000 הוצאות בתום השנה הקרובה בערך מוחלט.

40% שיעור המס (מדובר בהוצאה מוכרת, לכן הוצאות נטו היא בネットו רכיב המס).

5% העליה השנתית בעלות.

t השנה (מייד הזמן, time)

הסיבה לכך ב- $t-1$  היא שהוצאות הנקבעה בסך 5,000 היא כבר בתום השנה הקרובה – כולל בזמן 1. לכן המטריה היא שהפקטור יופיע עבור  $t=1$  ולמעשה הגידול בעלות יתחיל רק מזמן 2.



הפתרון ידרוש ממי להשוות בין העלות השנתיות הקבועה בחלופת זקס לבין הביטוי המיצג עלות שנתית בחלופת תחזקה :

$$14,028 = 5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 5\%)^{t-1}$$

$$14,028 = 3,000 * (1 + 5\%)^{t-1}$$

נתחיל פשוט – אחלק את שני האגפים ב-3,000 :

$$\frac{14,028}{3,000} = (1 + 5\%)^{t-1}$$

$$4.676 = 1.05^{t-1}$$

נוציה מ-1 לשני האגפים :

$$\ln 4.676 = \ln 1.05^{t-1}$$

לפי חוקי לוגריתמים :

$$\ln 4.676 = (t - 1) * \ln 1.05$$

זהו כל הסיפור :

$$\frac{\ln 4.676}{\ln 1.05} = t - 1 \rightarrow t = \frac{\ln 4.676}{\ln 1.05} + 1 = 32.61 \approx 33$$

המשמעות : רק بعد כ-33 שנים כדאי להחליף לפרט חדש (לזקס).

סעיף ג : הניחו לטובת סעיף זה שהחלפה כדאית לאחר 4 שנים. בהנחה זו ללא תלות בתוצאות סעיף קודם, מהי עלות החזקה של מכונות הנקניק – מעתה ועד עולם הליליה? מחיר ההוו 10%, שיעור המס 40%.

לפי נתוני השאלה, עלינו לחשב את ה- $NPV$  של עלויות החימום לאינסוף, בהנחה שב-4 השנים הראשונות ממשיכים להחזיק את המכונה הישנה, ועל כן התזרימיים הם בהתאם לעליונותה ההולכות וגדלות, ולאחר מכן מחליפים את המכונה מחדש, בעלות שנתית שהיא למעשה שווה הערך השנתי של מכונת הזקן החדשה:

נתחיל מהbijוטי המיציג את הulot השנתית אחרי מסים לכל אחת מ-4 השנים הקרובות בגין המכונה הישנה:

$$NPV = -5,000 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-1} \\ -5,000 * (1 + 5\%) * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-2} \\ -5,000 * (1 + 5\%)^2 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-3} \\ -5,000 * (1 + 5\%)^3 * (1 - 40\%) * (1 + 10\%)^{-4}$$

מוסיף את הulot השנתית Neto (במועדו שווה ערך שנתתי) מזמן 5 בגין המכונה החדשה. עלות זו תתרגם לזמן 0 על ידי התאמה של 4 תקופות נוספות לאחר מכן וסדרה שמתחלת בזמן 5 קופצת אחוריית-4 ולכן עלינו לבצע התאמות נוספות:

$$-14,028 * \frac{1}{10\%} * (1 + 10\%)^{-4}$$

בsek הכל, סיכום הביטויים לעיל יחד עםbijוטי הערך הנוכחי האינסופי מזמן 5 ואילך מניב את התוצאה:

$$NPV = -106,001$$

#### שאלה 70.105 – חילוץ שיעור המס המוביל לכדיות פרויקט

בחברת "משה" שוקלים להשקיע במכונה לkipor נקיין. עלות המכונה 100,000 ש"ח והיא מופחתת בשיטת הקו הישר על פני 10 שנים. למכונה מוגדר ערך שיר / גרט של 10,000 ש"ח. החברה חייבת במס. מחיר ההון של החברה הוא 8% לשנה. המכונה צפואה להניב הכנסות שנתיות בסכום של 20,000 ש"ח.

נדרש: מהו שיעור המס המרבי שעדין יצדיק את הפרויקט?

הצדקה פרויקט מתקיימת בהגדלה לכל הפחות (רף מינימלי לכדיות) כאשר ענין הפרויקט 0. לכן, נבנה את משווהת הענין, נקווה מוד שהנעלם היחידי הוא זה שרווחים, ונחלץ אותו על בסיס השווהת הענין ל-0.

$$NPV = -100,000 + \frac{100,000 - 10,000}{10} * t * PVFA(8\%, 10) + 10,000 * (1 + 8\%)^{-10} \\ + 20,000 * (1 - t) * PVFA(8\%, 10) = 0 \rightarrow t = 0.526 = 52.6\%$$

מסקנה: שיעור המס המרבי שצדיק את הפרויקט הוא 52.6%. קרי, אם שיעור המס גבוהה מכך, הפרויקט לא כדאי.

הסבירים נוספים :

עלות ההשקעה	-100,000
הוצאות פחות שנתיות : עלות בגין גרט שנתיון מפורשות חלקית רק' הפחטה	<u>100,000-10,000</u> 10
שיעור המס	t
תמורה המכירה מהוונת לזמן 0 מזמן 10 מועד המכירה	$10,000 * (1 + 8\%)^{-10}$

מדוע אין מסים במכירת הפריט (בעיקר – מס רווח הון)? התשובה היא שבנהנת ברירת מחדל ובהיעדר נתונים סותרים, פריט נמכר בתמורה פרויקט בתמורה לערך הספרים שלו (עלות מופחתת) באותו מועד. במקרה זה, תמורה המכירה תהיה זהה לגרט, כי הפריט בעל גרט חיובי וסימן תקופת הפחטהו. **בכל מקרה, המשמעות היא שאין מסים – כי אם פריט אכן נמכר בתמורה לערך הספרים שלו (ברירת מחדל, לא חייב שכך יהיה בכל שאלה) אז אין הפרש בין תמורה המכירה לבין ערך הספרים ואין מס.**

## מפגש 4 – תרגולת ברמת בוחנה – פרויקטים ותזרימי מזומנים לתוכניות השקעה

### מבוא ותחולת

כמו בכל סמסטר, לאור אילוצי הזמן, עולה התלבטות: האם להקדיש את הזמן כדי להדריך בעיקר לשאלות ספציפית במלחה, שסבירות היישנותה במחן לאור עומסיה ומבנה הבדיקה, לא גבוהה? האם להתקדם בשcz'ן קצף לחומר הבא, ולהותיר בסיום הקורס שלילים רחבים יותר לחזרה? או אולי, ראוי יותר להתעמק בסוגיות נוספות ובסגנון שאלות שיש להן ערך ומשמעות לקראת הבדיקה, ואשר מדגימות סוגיות נפוצות יותר? אני הולכתי על האופציה השלישית, לאחר הקדשת זמן ומחשבה. ה' עמכם.

### از בתכל'ס:

מטרתנו היום היא לתרגל את ייח' 7 ברמת בוחנה על בסיס שאלות בוחנה אמיתיות, בשים לב למשך הזמן שלוקח לנו לזהות שאלה, הכלים הרלוונטיים לפתרונה והמשמעות הנובעת מכך. דגש מיוחד יינתן לסוגיות שלא נדונו – בעמeka בפגש השלישי (בחלקו האחרון), שיש להן כמובן המחשות גם בשאלות תרגול משמעותיות יותר – אבל אנחנו, כאמור, נהייה מוטי בוחנה.

### איך זה יעבדו?

מעבר לפתרון, הויאל זמן רב לא נפגשנו, נדונם ברגעון. בתחילת היזיהו. רק אז נצלול פנימה לפתרון עצמו ולמשמעות העולות ממנו. הפתרונות הללו, אגב, קיימים גם באתר (יש פתרונות לכל המבחןים). אלא שאנו נרחב, נטעים, נעניק דגשים וסדר לוגי בחשיבה, הרבה מעבר לפתרון עצמו.

**מבחן לדוגמה 8, שאלה 7 – ההשפעה העקרונית של פחות מואץ על הענין (שאלת תיאורטיבית)**

מאפיית "לחמים" בchnerה כדאיות השקעה במכונה חדשה לייצור לחמניות. מהחישוב שערך כלכלן החברה עולה, שענין השקעה הינו שלילי. בעקבות פניה לרשויות מס הכנסה החליטו להכיר למאפייה בפחות מואץ, כך שהמכונה החדשה תופחת לארך תקופה קצרה יותר.

**סמננו את הקביעה הנכונה:**

- א. ענין הפרויקט יגדל, אך ככל מקרה יישאר שלילי.
- ב. ענין הפרויקט יגדל.
- ג. ענין הפרויקט יקטן.
- ד. השינוי בחישוב הפחת אינו משנה על הענין של הפרויקט.
- ה. לא ניתן לדעת כיצד יושפע הענין ללא קבלת נתונים מספריים.

**רעיון:**

במסגרת ייח', אנו דנים בכך שתזוריימי המזומנים הנובעים מתוכניות השקעה כוללים גם תזוריימי מזומנים בגין מסים על הכנסה.

אחד מתזוריימי המסים הרלוונטי – נקרא: מגני המס על הפחת. למעשה, זה זיכוי מס המתקבל בתדרות שנתיות בגין הוצאות הפחת המדווחות בחברה בעבור השקעה שתבוצע לטובת הפרויקט הנדון. בהיעדר נתונים סותרים, הערך של מגני המס על הפחת, כאשר הוא מבוטא במונחי ערך נוכחי (כדי לבדוק השפעתו על ה-NPV) הוא כדלקמן:

$$PV_{TaxShieldDep} = D * t * PVFA(k, m)$$

כאשר הערך  $D$  מייצג את הוצאות הפחת השנתיות המוכרות לצורך מס, שכברירתה מחדל משקפות את הפרופורציה בין עלות רכישת הקבוע הנדרש לטובת הפרויקט, לבין תקופת הפחתתו כפי שהיא מוגדרת לצרכי מס:

$$PV_{TaxShieldDep} = \frac{I_0}{n} * t * PVFA(k, m)$$

כאשר:

הערך  $I_0$  הוא עלות השקעה, הערך  $t$  הוא תקופת ההפחטה לצרכי מס, הערך  $k$  הוא מחיר ההון והערך  $m$  הוא מספר מגני המס על הפחת (זהה לתקופת ההפחטה של הנכס אלא אם יש סיבה טובה להניח אחרת).

**פתרון:**

השאלה בעצם דינה במצב שבו תקופת ההפחטה מתקצרת. זה אומר שמדובר במס השנתי על הפחת גבוהה יותר (כי הוצאות הפחת השנתיות גבוהות יותר) אך מספר איברי הסדרה שלחן – נמוך יותר. במלים אחרות: פחות מואץ אומר – מקבלים "אותו דבר" בסך הכל, אבל "מוקדם יותר" כי מנות זיכוי המס גבוהות יותר.

העובדת שמגיני המס מתאפשרים מוקדם יותר בהינתן פחות מושך >>> מוביילים לעלייה בשווי (בערך הנוכחי) של מגיני המס על ההפחת כתוצאה מיישום ההפחת המושך.

**בקצרה: פחות מושך = ערך נוכחי מגיני המס על ההפחת עולה = הענ"ג (NPV) עולה.**

יחד עם זאת, איננו יכולים לדעת מהי עוצמת ההשפעה – מהו היקף העלייה בענ"ג ללא נתוני מספריים ברורים לגבי הפריט, עלותו, תקופת הפקתו המקורי ואחרי קיצורה וכן עומק הענ"ג השלילי שהתקיים עבור הטענת ההפחת המושך. לכן, הענ"ג עולה – אך לא ניתן לקבוע את היקף העלייה והאם היא מספקת כדי להפוך את הענ"ג שהוא שלילי במקור בנסיבות השאלה, לחובי.

**בקיצור: הענ"ג עולה, לא ניתן לדעת בכמה, לא ניתן לדעת האם הענ"ג ישאר שלילי או יהיה הפוך לחובי, ולכן התשובה ב.**

---

**מבחן לדוגמה 8, שאלה 8 – בחירה בין חלופות השקעה כאשר אורך החיים שונה, וההשקעות חד פעמיות**

חברת "חשבון" בע"מ זוקפה למוכנות דפוס חדשה. בשוק קיימים שני סוגי מוכנות דפוס:

סוג ב	סוג א
3 שנים	4 שנים
200,000 ש"ח	45,000 ש"ח
�לות תפעול שנתית	�לות רכישה

שתי המוכנות בעלות תפוקה זהה לחלווטין, החברה אינה משלםת מס, ומהירות ההון שלה 15% לשנה.

בנחתה שמדובר בהזדמנויות השקעה חד פעמיות, **איזה מוכנה כדאי לחברת רכוש?**

- א. מוכנה מסוג א.
- ב. מוכנה מסוג ב.
- ג. לא ניתן להשוות בין מוכנות בעלות אורך חיים שונה.
- ד. לא ניתן לקבוע העדפה, בהיעדר מידע על ההכנסות.
- ה. תשובות ג-ד נכונות.

**רעיון / הגדרה תיאורטיבית**

כאשר עליינו לבחור בין חלופות השקעה שאורך חייהן שונה, קיימת חשיבות גבוהה לזהות – האם מדובר בהשקעות שנitinן לחזור עליהם (קרי, עם סיומן, ניתן לבצע שוב), או שמדובר באירוע/פרויקטים "חד פעמיים". מודיעו הבדיקה חשובה?

- אם מדובר בהזדמנויות השקעה חד פעמיות, הרי שגם אורך חייהן שונה – השיפוט, הדירוג, ההחלטה ביןיהן תתבסס על חישוב NPV "רגיל".
- אם מדובר בהזדמנויות השקעה שנitinן לחזור עליהם, לא ניתן לדרגן על בסיס חישוב NPV לחזור הפעלה אחד. במקומות זה, מה שນצטרך לעשות זה להשתמש באחת מהטכניקות של "השוואת אופק" (השוואת אופק זמן לפרויקטים על בסיס חוזרות – ראו מבחן 7 שאלה 8).

$$NPV_A = -45,000 - 90,000 * PVFA(15\%, 4) = -301,950$$

$$NPV_B = -200,000 - 20,000 * PVFA(15\%, 3) = -245,660$$

הואיל והמטרה במקרה של עלויות היא לסייע את הערך הנוכחי של עלויות ההשקעה (בערכו המוחלט) תועדר חלופה ב.

לכן, התשובה ב.

**מבחן לדוגמה 7, שאלה 8 – מדיניות החלפה אופטימלית המتبוססת על פרויקט בעל אפקט אינסופי**

חברה להשכרת מכוניות משכירה מכונית שעלותה 50,000 ש"ח, המכונית מניבה זרם מזומנים שני של 30,000 ש"ח. ערך השוק של המכונית לאחר שנתי שימוש אחת הוא 37,000 ש"ח, לאחר שתי שנות שימוש 28,000 ש"ח, ולאחר שלוש שנים שימוש 12,000 ש"ח. הניחו כי לא ניתן להשתמש במכונית מעבר ל-3 שנים. מדיניות החברה היא לרכוש מכונית חדשה בלבד. מהו הען"ג הנובע לחברת ההשכרת המכונית לצמירות, אם היא נוקטת מדיניות החלפה אופטימלית? הניחו מחיר הון של 20% לשנה.

- א. 20,139 ש"ח.
- ב. 50,000 ש"ח.
- ג. 55,833 ש"ח.
- ד. 47,802 ש"ח.
- ה. 35,000 ש"ח.

פתרון :

בטור התחלה, נסדר את הנתונים. נציג את עלות המכונית ואת תמורה מכירתה בתום כל שנה. עלות הרכישה של מכונית חדשה: 50,000 ש"ח.

החלפה בתום שנה	שווי המכונית בשוק (תמורה מכירה)
	37,000
1	28,000
2	12,000
3	

השאלה היא: איך נדע מה הכי משתלים? להחליף כל שנה? כל שנתיים? כל שלוש? זה בעצם הלב של ההתלבטות לגבי מדיניות החלפה אופטימלית.

נגיד 2 דרכים, בהינתן המידע שאפקט ההכרעה כאן אינסופי וגם הען"ג הנדרש לחישוב החלופה האופטימלית הוא עניין לאינסופי.

שלב 1: נחשב  $NPV$  להפעלת הפריט "מחוזר אחד". **כלומר ה- $NPV$  שנובע מרכישה + החלפה אחרי שנה, ולאחר מכן את ה- $NPV$  שנובע מרכישה + החלפה אחרי שנתיים וכו' להלאה.**

ה- $NPV$  לרכישה, החזקה שנה ומכירה, יתבסס על העלות בזמן אפס, יחד עם תזרים הכנסה שנתי (בתום השנה, כביררת מחדל) ותמורה המכירה (בתום השנה) בהתאם לשווי של הפריט בתום השנה. אפשר לשים לב שוגם בשאלת זו אין מסים (מקובל מאד בשאלות שבחן צריך לחשב עניינים של חלופות שונות):

$$NPV_1 = -50,000 + (30,000 + 37,000) * (1 + 20\%)^{-1} = 5,833$$

$$NPV_2 = -50,000 + 30,000 * (1 + 20\%)^{-1} + (30,000 + 28,000) * (1 + 20\%)^{-2} = 15,278$$

$$NPV_3 = -50,000 + 30,000 * PVFA(20\%, 3) + 12,000 * (1 + 20\%)^{-3} = 20,124$$

שלב 2: נשרשר / נחיד אופק לפרויקטים הללו לאינסוף – כדי לראות היכן העניין האינסופי גבוה יותר, והוא זה שיעדך

הדרך הקלסית לשרשרא לאינסוף מتبוססת על המשוואה הבאה:

$$NPV_{Infinite} = \frac{NPV}{1 - \frac{1}{(1+k)^n}}$$

כאשר :

המונה – NPV הוא העניין למחזור הפעלה אחד של הפרויקט (כפי שהושב בשלב 1).  
במכנה – כוללים את מחיר ההון השנתי  $k$ , וכן את משך הפרויקט בשנים  $n$ .

$$NPV_{Infinite}(1) = \frac{5,833}{1 - \frac{1}{(1+20\%)^1}} = 35,000$$

$$NPV_{Infinite}(2) = \frac{15,278}{1 - \frac{1}{(1+20\%)^2}} = 50,000$$

$$NPV_{Infinite}(3) = \frac{20,124}{1 - \frac{1}{(1+20\%)^3}} = 47,768$$

המטרה היא לבצע את החלופה שמניבה לאינסוף (משך הביצוע הנtentן בשאלת) את השווי הגבוה ביותר, יש להעדיף את חלופה 2, והעניין האינסופי שלה 50,000 ש"ח.

**בהתאם, התשובה ב.**

דרך נוספת לבצע שרשרא לאינסוף מتبוססת על גישת שווה הערך השנתי - EAC

ביסוד הגישה זו התפיסה שאומرت שכל פרויקט, לכל פרק זמן, ניתן "למציע" כי לתרגם אותו לתזרים שנתי.  
חישוב התזרים השנתי הנובע מכל פרויקט הוא הפרופורציה הפשטית שבין ה-NPV שלו למחזור הפעלה אחד  
לבין ה-PVFA המתאים לתקופתו.

$$EAC = \frac{NPV}{PVFA(k, n)}$$

בשימוש נקבל :

$$EAC_1 = \frac{5,833}{PVFA(20\%, 1)} = 7,002$$

$$EAC_2 = \frac{15,278}{PVFA(20\%, 2)} = 9,968$$

$$EAC_3 = \frac{20,124}{PVFA(20\%, 3)} = 9,556$$

אם בשאלת מבקשים מمنי להכריע מה הבחירה העדיפה – זה הכל – אני לגמרי יכול לבצע זאת על בסיס גישת שווה הערך השנתי. למעשהعطנו שהבחירה שמניבת התזרים השנתי נטו הגובה ביותר מיותר מນצחתי – ואפשר לראות שזו חלופה 2.

מעבר לכך, גם אם רוצחים את ה- $NPV$  לצמויות (לאינסוף), חישובו על בסיס ה- $EAC$  פשוט מאי פעם: פשוט מחלקים את ה- $EAC$  במחיר ההון השנתי:

$$NPV_{Infinite}(1) = \frac{7,002}{20\%} \approx 35,000$$

$$NPV_{Infinite}(2) = \frac{9,968}{20\%} \approx 50,000$$

$$NPV_{Infinite}(3) = \frac{9,556}{20\%} \approx 47,768$$

אין חובה להשתמש בטכנית זו; המטרה הייתה להאיר את העובדה שם כל המטרה היא לדוג – אין בעיה לעשות זאת בשלב אחד על בסיס דירוג מבוסס  $EAC$ . בנוסף, אם נדרש לעבד את התוצאה לפרקי זמן אחרים, נוכל לעשות זאת בקלות הואיל ומדובר בתזרים סוף שנתי קבוע.

**בהתאם, התשובה ב.**

**מבחן לדוגמה 7, שאלה 9 – חישוב ערך נקי לפרויקט "סטנדרטי" עם מסים**

חברה שוקלת קנית ציוד חדש שעלותו 80,000 ש"ח ואורך חייו הוא 10 שנים. החברה מעריכה כי הציוד יגדיל את הכנסותיה ב-20,600 ש"ח לשנה, אם כי גם הוצאות התפעול (לא כולל פחת) יגדלו ב-5,100 ש"ח לשנה. הציוד יופחת לצורכי מס לפי שיטת הcano היישר במשך 10 שנים. מהו הערך נקי של הפרויקט, אם שיעור המס החל על החברה הוא 40%, ומהירות ההון שלח לאחר מס הוא 6%?

- א. 47,328 ש"ח.
- ב. 11,552 ש"ח.
- ג. 12,000 ש"ח.
- ד. 34,080 ש"ח.
- ה. 57,632 ש"ח.

פתרון :

$$NPV = -80,000 + \frac{80,000}{10} * 40\% * PVFA(6\%, 10) + (20,600 - 5,100) * (1 - 40\%) * PVFA(6\%, 10)$$

ולכן התשובה ג.

$$NPV = 12,000$$

כאשר :

הוצאות ההשקעה הראשונית היא 80,000 בזמן אפס (לפיכך, בסימן שלילי).

הביתוי  $\frac{80,000}{10} * 40\% * PVFA(6\%, 10)$  מייצג את מגניי המס על הפחת – לפי הוצאות הפחת השנתיות מוכפלות בשיעור המס, ומהוונות כסדרה בהתאם למספר תקופות ההפחטה.

הביתוי  $(20,600 - 5,100) * (1 - 40\%) * PVFA(6\%, 10)$  משקף את הכנסות התקופתיות, בגין העליות התקופתיות, כך מגיעים למשהו ל"ירוח לפני מס" שחייב לגדל אותו במונחים נטו (אחרי מס) כופלים ב-1 פחות שיעור המס, ומהוונים כסדרה בהתאם לתקופת הפרויקט.

**מבחן לדוגמה 5, שאלה 7 - תקופת הփחתה שונה ממשך הפרויקט וטיפול במכירה (כולל מסים)**

לפניכם הפרויקט הבא (משך הפרויקט 5 שנים):  
ההשקעה נדרשת 124,000 ש"ח את ההשקעה יש להפחית בק"ו ישר למשך 8 שנים.  
הרווח לכל יחידה הוא 19 שקלים.  
בשנה 1 מייצרים 1,000 יחידות.  
בשנה 2 מייצרים 1,500 יחידות.  
משנה 3 ועד שנה 5 מייצרים 2,000 יחידות בכל שנה.  
מחיר מכירת המכונה 55,000 שקלים (שימוש לבphemכירה היא בתום השנה החמשית בה גם מסטיסים הפרויקט). מחיר הון החברה הוא 15%, החברה חייבת בתשלומי מסי חברות 40% והוא פטורה ממס רווחי הון. מהו ערך הפרויקט?

- א. 34,449 - ש"ח.
- ב. 16,284 ש"ח.
- ג. 13,666 - ש"ח.
- ד. 3,274 - ש"ח.
- ה. 6,424 ש"ח.

פתרונות :

$$NPV = -124,000 + \frac{124,000}{8} * 40\% * PVFA(15\%, 5) + 55,000 * (1 + 15\%)^{-5}$$
$$+ 1,000 * 19 * (1 - 40\%) * (1 + 15\%)^{-1} + 1,500 * 19 * (1 - 40\%) * (1 + 15\%)^{-2}$$
$$+ 2,000 * 19 * (1 - 40\%) * PVFA(15\%, 3) * (1 + 15\%)^{-2}$$

$$NPV = -13,666$$

בהתאם, התשובה ג.

הסבירים מפורטים :

הוצאות ההשקעה: 124,000 – ומגנify המס מותבסים על תקופת הփחתה הנזונה, אלא שלאור העובדה שהפרויקט מוחזק 5 שנים, מספר תזרימי המגנים הוא 5 בביטוי:  $\frac{124,000}{8} * 40\% * PVFA(15\%, 5)$ , תמורה המכירה היא 55,000 ש"ח, ובוינטן שהחברה פטורה מס רווח הון אין השפעה תזרימית נוספת במכירת ההשקעה (ראו הערא להלן בהיעדר פטור).

תזרימי המזומנים החיוביים הנובעים מהפרויקט (רווחים) נקבעים לפי מספר היחידות המיצרות ונמכרות בתום כל שנה (כברירת מחדל – תזרימי תום תקופה) בגין המש על תזרימי רווח אלו. הויאל ותזרימי ההכנסות אינם מהווים סדרה אחת לאור השוני במספר היחידות הנמכרות על בסיס שנתי, בוצעה התייחסות לרווחי השנה

$$\text{הראשונה בלבד}^1 = 1,000 * 19 * (1 - 40\%) * (1 + 15\%)$$

$$\text{לאחריהם – רווחי השנה השנייה בלבד:}^2 = 1,500 * 19 * (1 - 40\%) * (1 + 15\%)$$

ולאחריהם – רווחי השנים 3, 4, 5 שהם קבועים וכך יוצרים סדרה. אלא שהויאל ועיטוי האיבר הראשון בסדרה הוא בזמן 3, לפי עקרון ה"אחת אחרת" קופצים עם נתוני הסדרה בזמן 2, וכך יש לתאמה 2 תקופות נוספות לאחר מעבר לחישוב הסדרתי מה ששוביל לביטוי:

$$+2,000 * 19 * (1 - 40\%) * PVFA(15\%, 3) * (1 + 15\%)^2$$

הערה: במקרה זה, נתון מפורשות כי החברה פטורה ממיס רווח הון. אילו החברה לא הייתה פטורה ממיס רווח הון, היה علينا לחשב את רווח / הפסד ההון והשפעת המש בגין, כדלקמן:

	55,000	תמורה המכירה
$124,000 - \frac{124,000}{8} * 5 =$	<u>(46,500)</u>	בגין עלות מופחתת ערב המכירה
	8,500	רווח הון ( הפרש חיובי) הפסד ההון ( הפרש שלילי )
	<u>20%</u>	נניח שהוא נתון שמס רווח ההון הוא בשיעור
$8,500 * 20\% =$	1,700	מס רווח הון לתשלום (תזרים שלילי)

כלומר, במקום הביטוי

$$55,000 * (1 + 15\%)^5$$

היה הכלל הביטוי הזה:

$$(55,000 - 1,700) * (1 + 15\%)^5$$

פירמה מתלבשת בין ייצור עצמי של רכיב מסוים לבין רכישתו מספק חיצוני. אם הפירמה תיצור את הרכיב בעצמה היא תצטרכן לרכוש מכונה שארוך חיים 10 שנים. ידוע כי במידה והחесכון הנובע מהיצור העצמי (לפניהם 50,000 ש"ח לשנה, הפירמה תהיה אדישה בין ייצור הרכיב לבין רכישתו. כעת מוצע לפירמה מענק בגין רכישת המכונה בסך של 150,000 ש"ח. המענק יקטין גם את ה不怕ת השנתי על המכונה. אם שיטת ה不怕ת הנוכחית בפירמה לצורכי מס היא קו ישר לאורך חייה הנכס, מחיר ההון (לאחר מס) הוא %10 לשנה ושיעור מס חברות הוא 40%, אז בעקבות המענק:

- החסכון השנתי שייבא לאדישות בין שתי החלופות הוא 19,314 ש"ח.
- החסכון השנתי שייבא לאדישות בין שתי החלופות הוא 31,588 ש"ח.
- החסכון השנתי שייבא לאדישות בין שתי החלופות הוא 9,314 ש"ח.
- לא ניתן לקבוע מהו החסכון השנתי שייבא לאדישות בין שתי החלופות ללא נתונים נוספים על עלות הייצור העצמי והכמות המיוצרת.
- אף תשובה אינה נכונה.

פתרון :

השאלה מספרת סיפור על מצב התחלתי שבו חסכו שנתי שנווע מיצור עצמי – מוביל לענין ייצור שזהה לענין רכישה (מדוע? כי אמרו שהיינטן חסכו כזה, קיימת אדישות).  
לפתע – חל שינוי. השינוי הוא מענק שניתן לחברת לטובת ביצוע פעילות הייצור. כמובן שמדובר כזה מוביל לכך ששווי החלופת הייצור יגדל; ולכן, גם חסכו נמוך מהערך המקורי – יכול להוביל לאדישות.  
בשפה פשוטה: בלי מענק – נדרש שהמכונה תחסוך לפחות 50,000 בשנה לצורך כדאיותה. עם מענק – כמובן שהדרישה לחסכו תהיה נמוכה יותר והשאלה היא – כמה בדיקן יכול לרדת החסכו השנתי בזכות המענק.

לשם כך, علينا להבין תחילת מהן מכלול השפעותיו של המענק על הענין. באופן כללי, מענקים יכולים להשפיע על 3 ערכים :

- הכרחי: תזוריים חיוביים בזמן אפס.
- מאד נפוץ: הקטנת מגני המס על ה不怕ת (אלא אם זו קרקע).
- פחות נפוץ: השפעה על מס רווח ההון במכירה (הוצאות קטנה; הערות המופחתת במכירה עלולה להיות קטנה יותר; רווח ההון = ההפרש בין התמורה לעלות המופחתת עלול להיות גבוהה יותר) – בהיינטן מכירה [אם אומרים, או אם יש מידע לגבי שווי הפריט בתום הפרויקט, אז מניחים שיימכר בתמורה זו]. **כאן – לא רלוונטי.**

בהתחשב בערכים 1, 2 השפעת המענק על הענין (בכמה המענק יגדיל את ה-NPV) היא כדלקמן, בהיינטן העובדה שנתיון שסכום המענק 150,000 ש"ח, שתקופת הה不怕ת 10 שנים, מחיר ההון 10% ושיעור המס 40% :

$$PV_{Maanak} = +150,000 - \frac{150,000}{10} * 40\% * PVFA(10\%, 10) = 113,333$$

כאשר הערך החיובי בסך 150,000 הוא סכום המענק הנוכחי, עצם קיבלת המענק מובילה לשילילת יכולת הדיווח על פחות בהתאם לסכומו ואורך חייו הנוכחי, מכאן, שחל אובדן מגני המש על הפחתה בהתאם לסכום המענק מוחולק במספר שנות הפחתה הנוכחי (המחובר השני).

השלב הבא הוא לזכור לנדרש: בעצם דרשו ממוני להבין מהו החסכו השנתי העדכני שיצדיק את רכישת המכינה והיצור העצמי. לשם כך, אני חייב למצע את השפעת המענק וlatorגמה למונחים שנתיים. הדרך לבצע זאת היא על בסיס חלוקת עניין המענק ב-PVFA רלוונטי:

$$EAC_{Maanak}(Neto) = \frac{PV_{Maanak}}{PVFA(k, n)}$$

$$EAC_{Maanak}(Neto) = \frac{113,333}{PVFA(10\%, 10)}$$

$$EAC_{Maanak}(Neto) = 18,412$$

המשמעות: המענק למשה חוסך לנו / תורם לנו כל שנה נטו 18,412 ש"ח. על פי הנוכחי, לפני החסכו שמצדיק את הפרויקט היה 50,000 ש"ח. בחשיבה נאיבית, שכעת החסכו הדרושים הוא 50,000 בኒוכו תרומה זו. אבל זה **לא נכון כי** זה מתעלם מהעובדת שחייב השפעת המענק בוצעה בנטו, בעוד שחסכו שנתי הוא תמיד במונחי ברוטו (לפני מס).

לכן מה שעשינו לעשות זה לתקן את השפעת המענק השנתית נטו למונחים לפני מס (על ידי חלוקה ב-1 פחות שיעור המס) ורק את הערך ברוטו ננכה מהחסכו לפני השינוי, כדי לחשב סכום חסכו עדכני נדרש:

$$EAC_{Maanak}(Bruto) = \frac{18,412}{(1 - 40\%)} = 30,686$$

50,000	החסכו (ברוטו, לפני מס) שהצדיק את הפרויקט בעולם ללא מענק:
<u>(30,686)</u>	بنيוכי ההשפעה של המענק:
19,314	סך החסכו (ברוטו, לפני מס) שיצדיק את הפרויקט בעולם עם מענק:

**זו התשובה הסופית, לנוכח היא.**

**תדריך ספציפי – ספטמבר 2022 – שאלה 3 – בניית תזרימי מזומנים לתוכנית השקעה בערכcis החדשים**

קבוצת סטודנטים המוכרת מידיו שנה אוגדי בcheinot, מנסה לתקן את פעילותה לשנת הלימודים הקרובה וגם לעתיד הרחוק יותר וזאת בתקופה זו של השנה (תחילת חודש יוני).

משמעות: בשונה מתזרימי מזומנים לתוכנית השקעה ויח' 7 שבדרך כלל מיוצגים בערכcis שנתיים, כאן דנים בחודשים. באופן ספציפי, מציינים שהפעילות בכל שנה מתחילה ב-1.6 (זה בעצם ה"זמן 0" שלו). זה גם אומר, בין היתר, ש"תום כל שנה" הוא ה-30.5.

0 1.6				1 30.5

הקבוצה מוכרת מידיו שנה אוגדי בcheinot במחיר של 60 ש"ח לאוגדן, הם מוכרים 2000 אוגדים בשנה, והמכירות מתבצעות בחודשים אפריל ומאי (1000 יחידות לחודש). בכל אוגדן 100 עמודים. השכפול של האוגדים נעשה כבר בחודשים יולי ואוגוסט שלפני שנת הלימודים (1000 יחידות לחודש). הניחו כי מכירת האוגדים ושכפולם נעשות בסוף החודש.

במהשך השאלה רואים שהדיון הוא לגבי ההכרעה בין שכפול עצמי לבין רכישה מספק חיצוני (בית דפוס). זה בעצם אומר שככל הדיוון וההכרעה שלנו יכולים להתבסס על עלויות בלבד. מדובר: משום שאם אין זה משנה כיצד נפעל, ההכנסות והיקף הייצור זהים, הרי שעצם ההתייחסות להכנסות או היעדרה, לא תשפיע על דירוג הchlופות.

0 1.6	31.7	31.8	30.4	1 30.5
	שכפול	מכירות		

עד עתה שכפלו את הדפים בבית דפוס בעלות של 30 אגורות לעמוד.

למעשה, זה נתון שעזר לכם להכריע בדבר עלויות השכפול.

מנהל הקבוצה סבור שהיהה כדי לבצע את השכפול על-ידי הקבוצה עצמה בעלות של 15 אגורות לעומת 75 אגורות. לשם כך נדרש מכונה שכפול בעלות של 75 אלף ש"ח שתירכש כעת (תחילת חודש יוני), המכונה מופחתת לפי שיטת ההפחת הישר במשך 4 שנים ובתום התקופה ערך הגרט יהיה אפס. בנוסף, יש צורך בהשקעה חד-פעמיות בהון חוזר של 30 אלף ש"ח. הנח כי ההשקעה במכונה ובחון החוזר נעשית בתחילת חודש יוני.

ההיגד הזה מדבר על האלטרנטיבה של שכפול עצמי (שוקל לייצור עצמי). נתוני הלוויות שונים כמפורט – 15 אג'י לעומת 30 אג'י לעמוד.

0 1.6	31.7	31.8	30.4	1 30.5
ההשקעה במכונה	שכפול עצמי	שכפול עצמי	מכירות	מכירות

אבל אבל אבל... נתון שהמכונה מופחתת על פי ישר במשך 4 שנים. שימו לב: הנתונים השוטפים הם בחודשים, ההפחיתה היא על בסיס שנתי כאשר מגן המס על הפחת מדווח בדצמבר.

0 1.6	31.7	31.8	31.12	30.4	1 30.5
ההשקעה במכונה	שכפול עצמי	שכפול עצמי	מגן מס על הפחתה	מכירות	מכירות

לABI השקעה בהון חוזר: בזמן אפס תזרים שלילי, בתום הפרויקט (בתום השנה האחורונה) קבלת הסכום חוזרת.

האוניברסיטה מוכנה להשתתף במענק מיוחד בשיעור של 10% מסכום ההשקעה במכונה.

מענק – על כל המשתמע. אפשר פשוט להתייחס להשפעות ההשקעה במכונה בניכוי המענק (כך שגם הפחת השנתי יושפע מכך בהתאם).

## לצורך חישובים יש לעגל את מחיר ההון השנתי לאחוזו הקרוב.

אם נ נתונים רבים בשאלת כմבואר בטבלה המס חודשיים. אבל כל הרצינול שモמלץ להפעיל הוא לתרגם את הערכיים למועדים שנתיים. איך עושים זאת? לוקחים את התזרימיים החודשיים השותפים, ובאמצעות חישוב ערך עתידי – מעתדים את כולם לתום כל שנה (ל-30.5). החרג היחידי לכלול הוא מגו המס על הפקת, שאפשר להתייחס אליו בנפרד לפי עיתויו – דצמבר. כאשר מבצעים התאמה של הערכיים החודשיים לתום כל שנה, ההיוון (PV) של התזרימיים המתורגמים לתום כל שנה – צריך להתבצע בריבית (מחיר הון) שנתי. לכן ציינה מרכז הקורס לשורך חישובים יש לעגל את מחיר ההון השנתי לאחוזו השלים הקרוב.

## באיזו חלופה כדאי לקבוצה לבחור (בשכרול עצמי או בשכפול בבית דפוס), אם הקבוצה מתכוונת לעשות שימוש במכונות השכפול במשך 4 שנים?

לחשב PV לזרים השנתיים (עם או ללא הכנסות, זה לא משנה ולשיקולכם).

בהתבה ש渴בוצה משלם מס בשיעור 40%, מחיר ההון החודשי לאחר מס 1%, המכונה מופחתת לפי שיטת הקו ה ישיר במשך 4 שנים, המענק מקטין את ההשקעה גם לצורך פחת. התחרשנות המס נעשית במועד ביצוע הפעולה, למעט מגו מס על פחת שהינו בסוף שנה (סוף חודש דצמבר).

תרגומם מחיר ההון החודשי לשנתי – מבוצע על בסיס הטכניקה להמרת ריבית אפקטיבית (מעיריך חזקה לא חילוק).

"הענק מקטין את ההשקעה גם לצורך פחת" = מבחינתנו זה משפט מיותר שתמיד מתקיים.  
"התחרשנות המס נעשית במועד ביצוע הפעולה" = כל הכנסות והוצאות – ניתן לבטאן בנתו על ידי מכפלה ב-1 פחות המס באותו חודש ספציפי שבו נוצרת ההכנסה או ההוצאה.  
החריג היחידי לכך הוא מגו מס על הפקת, שתמיד בדצמבר.

## מפגש 5 - מבוא למימון בעולם עם סיכון

### רקע קצר - דיוון בפרויקטים מסוכנים בודדים ודיירוגם

- הדיונים שערכנו עד כה (bih'i 5 - ערך נוכחי, עתידי, יישומיהם וריביות, ich' 6 - כדיות פרויקטים, ich' 7 - בניית תזרימי מזומנים לתקנות השקעה) התעלמו מmobek מקומו של סיכון ;
- בפרט, התעלמו מכך שלכל פרויקט / אובייקט עסק יש מספר אפשרויות (תרחישים אלטרנטטיבים בהיבט התזרימיים שעשוים לנבוע ממנו).
- לפיכך, במשענו להבנת מימון וקבלת החלטות עלינו לפסוע צעד אחד קדימה - וללמוד כיצד יש לכמת את הסיכון הגלום בפרויקטים / השקעות / נכסים לשם קבלת החלטה לגבייהם (בהיבט כדיות, דירוג).
- המידים הבסיסיים לכימות השקעות מסוכנות / פרויקטים מסוכנים: **תוחלת** ( ממוצע תשואות / תזרימיים) ו**סטיית תקן** (מדד פיזור / סיכון) ואותם נציג :
- תחילה ברמת הפרויקט הבודד, בהנחה שהוא אוטונומי, עומד בפני עצמו, ואינו ניתן לשילוב עם פרויקטים אחרים.
- לאחר מכן נרחיב את המסקנות לשילוב פרויקטים מסוכנים, במסגרת תיקי השקעות - וההשלכה הנובעת מכך לגבי התוחלת של התזרימיים או התוצאות של הפרויקטים המשולבים, ובעיקר - הסיכון הנובע מגיון ההשקעה.

אז בקיצור : חישוב תוחלת כמדד תשואה / רוחניות ; חישוב סטיית תקן כמדד סיכון ; והשפעות שילוב.

**שאלה 55 - פרויקט מסוכן בודד (הגרלה) - חישובים בסיסיים של תוחלת וסטיית תקן**  
 בהגרלה יש לכם אפשרות לזכות ב-20 ש"ח בהסתברות 30%, ב-40 ש"ח בהסתברות 20%, ובהסתברות של 50% תפסידו 10 ש"ח. מהי התוחלת וסטיית התקן בש"ח של ההגרלה?

פתרונות :

רקע - הגרלה היא פרויקט (ישנם תזרימי מזומנים שעשוים לנבוע ממנה), ומדובר בפרויקט מסוכן משומם שיש לו כמה תוצאות אפשריות, והסתברות לכל תוצאה ידועה.  
 כאשר אנו מזיהים פרויקט מסוכן, חידון הבסיסי ביותר בו דורש חישוב שני ממדדים - **תוחלת וסטיית תקן**.

**תוחלת** היא הממוצע המשוקל (שיקול תוצאות בהסתברויות) והיא ניתנת להציג באמצעות הנוסחה הבאה :

$$E(X) = P_1 * X_1 + P_2 * X_2 + \dots$$

כאשר :

הערך  $E(X)$  הוא תוחלת התקבול.  
 הערכים  $P_1, P_2, \dots$  מייצגים את ההסתברות לכל תוצאה אפשרית בפרויקט.  
 הערכים  $X_1, X_2, \dots$  מייצגים את התוצאות (הערכים הכספיים / האחוזיים) שיתרחשו בכל הסתברות.

נישם ונגלה :

נתוני השאלה באופן מרוכז :

הסתברות	זכיה כספית / הפסד כספי (ש"ח)
30%	20
20%	40
50%	-10

$$E(X) = 30\% * 20 + 20\% * 40 + 50\% * (-10) = 9$$

התוצאה של התוחלת מייצגת את התקבול הממוצע "לאורך זמן" בהנחה והפרויקט יבוצע "שוב ושוב".

הואיל והפרויקט לא באמת מנייב 9, אלא ערכים הסוטים ממנו (20 או 40 או הפסד 10), מקובל להתייחס לפערים בין התוצאות האפשרות לבין התוחלת כמדד סיכון, ולכמת אותו סטטיסטית לערך הנקרא "סטיית התקן" :

$$\sigma(X) = \sqrt{P_1 * [X_1 - E(X)]^2 + P_2 * [X_2 - E(X)]^2 + \dots}$$

כאשר :

הערך  $(X)\sigma$  מייצג את סטיית התקן (מדד הסיכון / הפייזור המקבול בקורס) = שורש השונות.  
 הערך  $E(X)$  הוא תוחלת התקבול.

הערכים  $P_1, P_2, \dots$  מייצגים את ההסתברות לכל תוצאה אפשרית בפרויקט.

הערכים  $\dots, X_1, X_2$  מייצגים את התוצאות (הערכים הכספיים / האחוזיים) שיתרחשו בכל הסתברות.

נישם ונגלה :

הסתברות	זכיה כספית / הפסד כספי (ש"ח)
30%	20
20%	40
50%	-10
$E(X) = 9$	

$$\sigma(X) = \sqrt{30\% * [20 - 9]^2 + 20\% * [40 - 9]^2 + 50\% * [-10 - 9]^2} \approx 20.22$$

בקורסנו, איננו עוסקים בניתוח מבנה התפלגיות. כל שנטען הוא, שבהתאם סטיטית התקן מדף פיזור / סיכון, הרי שכל שהערך המתקבל בגין סטיטית התקן גבוה יותר, הפרויקט מסוכן יותר (ערכי מפוזרים יותר). אופן חישוב הסיכון והגדרתו בהיבט זה עדין לא מייצגת את המשמעות של קבלת החלטות / כדאיות. נגיע גם לזה בהמשך. ככל מרغ' מטרת השאלה הינה להציג כיצד מחשבים תוחלת כערך ממוצע לאורץ זמן, וכי怎ן מדף פיזור שנראה סטיטית התקן מחושב (אומד לסיכון).

#### שאלה 1.55 – חישוב תוחלת וסטיטית התקן של תזרימי מזומנים, וקבלת החלטה עבור שונא סיכון

זכית בפרס "העובד המוצטיין" ולפניך שני מסלולי פרס :

מסלול א : כרטיס הגרלה שיקנה לך 700 ש"ח או 1,500 ש"ח בהסתברות זהה.

מסלול ב : קבלת מזומנים בסך 200 ש"ח ובנוסף כרטיס הגרלה שיקנה לך 600 ש"ח בהסתברות 30% או 900 ש"ח בהסתברות 70%.

המסלול שייבחר על ידך בהנחה שאתה שונא סיכון הוא :

- מסלול א, שМОBILE אותו למצב טוב יותר בכל מקרה.
- מסלול ב, שМОBILE אותו לסיכון נמוך יותר.
- מסלול א, שМОBILE אותו לתוחלת גבוהה יותר.
- מסלול א, שМОBILE אותו לסיכון נמוך יותר.
- כל יתר התשובות שגויות.

פתרון :

כאשר אני מזוהה שאלה המציגת בפניו חלופות לפרויקט / הגרלה / נכס שיש להן יותר מרווחה אפשרית אחת, וההסתברות ידועה – אני יודע שאני פועל בעולם עם סיכון.

הчисלובים הבסיסיים ביוטר שנרצה לבצע בעולם כזה הם שניים :

- **תוחלת (כעין ממוצע)** : משלל כל הסתברות ב佗ואה הרלוונטי. התוחלת מייצגת את הערך ה"ממוצע" שיתקבל מהפרויקט לאורץ זמן (אם נחזר עליו שוב ושוב).

- סטיטית תקן (שורש השונות) : זהו ממד הסיכון המקביל – והיא בוחנת את הפיזור של התוצאות סביב התוחלת (האם ועד כמה תוצאות הפרויקט עלולות להתרחק מהתוחלתו). מבחןינו – סטיטית תקן גבולה יותר משמעה סיכון גבוה יותר.

נוסחת **התוחלת** של תזרימי מזומנים – ממוצע משוקל לאורך זמן – קופלים כל הסתברות  $P$  בתזרים המיוחס לאוთה הסתברות  $CF$  , ומחברים :

$$E(CF) = P_1 * CF_1 + P_2 * CF_2 + \dots$$

מסלול א : כרטיס הגרלה שיקנה לך 700 ש"ח או 1,500 ש"ח בהסתברות זהה.  
מסלול ב : קבלת מזומנים בסך 200 ש"ח ובנוסף כרטיס הגרלה שיקנה לך 600 ש"ח בהסתברות 30% או 900 ש"ח בהסתברות 70%.

הצבה מתאימה עבור מסלול א – תוחלת (א) :

הואיל ולא נתנות הסתברויות – אלא שהן "זהות", המשמעות היא שהסתברות לכל תוצאה היא לפי אחת חלקי מספר התוצאות האפשרות. בשפה פשוטה – ההסתברות לכל תוצאה כאן היא 50%. אם היו למשל 3 תוצאות אפשריות, בהסתברות זהה, אזי ההסתברות לכל תוצאה הייתה 33.33%.

$$E(CF_A) = 50\% * 700 + 50\% * 1,500 = 1,100$$

הצבה מתאימה עבור מסלול ב – תוחלת (ב) :

$$E(CF_B) = 30\% * (600 + 200) + 70\% * (900 + 200) = 1,010$$

כעת, נעבר לחישוב ממד הסיכון – סטיטית התקן.

נוסחת הסיכון של תזרימי המזומנים – **סטיטית התקן (שורש השונות)** – בוחנת פיזור / השתנות ערכיהם סביב התוחלת, ומחושבת על ידי מכפלת כל הסתברות בריבוע ההפרש שבין התזרים המיוחס להסתברות לבין התוחלת.

$$\sigma(CF) = \sqrt{P_1 * [CF_1 - E(CF)]^2 + P_2 * [CF_2 - E(CF)]^2 + \dots}$$

הצבה מתאימה עבור מסלול א :

$$\sigma(CF_A) = \sqrt{50\% * (700 - 1,100)^2 + 50\% * (1,500 - 1,100)^2} = 400$$

הצבה מתאימה עבור מסלול ב :

$$\sigma(CF_B) = \sqrt{30\% * (800 - 1,010)^2 + 70\% * (1,100 - 1,010)^2} \approx 137.48$$

רכיבז ממצאים וקיבלת החלטה עבור **שונא סיכון** :

מדד	תיאור	מסלול א	מסלול ב
$E(CF)$	תוחלת התזרים – מדד רוחניות	1,100	1,010
$\sigma(CF)$	סטיית תקן – מדד סיכון	400	137.8

שונא סיכון מוגדר כאדם אשר העלייה בסיכון – שנמדד במנחי סטיטית תקן – ההשתנות האפשרית של התוצאות ביחס לתוחלת פוגעת בו – **כאשר כל השאר קבוע**.

במלים אחרים, שונא סיכון אינו אדם שושאף למזער סיכון "בכל מחיר" והוא לא "פרנוואיד". הוא פשוט לא יתול סיכון נוסף, אם איןנו מלואה בפיזי בדמות הגדלת התוחלת.

از עצמו, הדיוון המלא בנסיבות יאמר :

במימד התוחלת – מועד מסלול א, שכן תוחלתו נבואה יותר.

במימד סטיטית התקן (הסיכון) – מועד מסלול ב, שכן סיכוןנו נמוך יותר והמשקיע שונא סיכון.

**בהעדר מידע מדויק על טעמי המשקיע ברמה הפרטונלית האישית – לא נוכל לדעת מה הוא יעדיף במצב כזה.**

**לכן התשובה כאן היא – לא ניתן לדעת מה יעדיף המשקיע (כי הדבר תלוי בטעמיו / דרגת דחיתת הסיכון שלו / האם ועד כמה הוא דורש פיצוי כדי להסכים לעלייה בסטיטית התקן במעבר לפרויקט ב).**

חריג אחד כלל: **דומיננטיות**: אם אומרים לי – מה תעדיף? להפסיד 100 ש"ח בוודאות או להשתתף בהגרלה שבה ניתן לזכות ב-30 ש"ח או 60 ש"ח בהסתברויות זהות.

להפסיד 100 בוודאות – חסר סיכון.

לכוארה: הפסיד 100 ודי 0-5 סיכון ; לעומת זאת תוחלת 45 מסוכנת ; לא ניתן לדעת מה עדיף? אבל זה לא נכון! אבל בפרויקט האלטרנטיבי – למרות הסיכון (יש כמה אפשרויות) מרוויחים בכל מצב טبع יותר. לכן ההגרלה מועדףת.

במלים אחרות – היו עירניים ושים לב: אם אני מזזה שבמסגרת הפרויקטם שאוטם אני צריך לדרג פרויקט מסויים מנייב בכל מקרה ובכל מצב טبع ערך גבוה יותר מהמיibi בפרויקט האخر, הוא עדיף עליו. נקודה. לא תלות ביחס לסיכון.

**שאלה 56 - תוחלת וסטיית תקן בהגרלה / הטלת קובייה / הסתברויות אינן נתונות במפורש**  
 בהגרלה המבוצעת על ידי הטלת קובייה תוכלו לזכות ב-80 ש"ח אם תוצאת הקובייה היא 1 או 2, ב-100 ש"ח אם תוצאת הקובייה היא 3, 4 או 5, ותפסידו 200 ש"ח אם תוצאת הקובייה היא 6. מהי התוחלת וסטיית התקן בש"ח של ההגרלה?

**פתרון :**  
 קובייה יש 6 פאות. ההסתברות לכל "פאה" (לכל אחת מ-6 התוצאות) זהה. לכן, כאשר מאורע מתרחש כאשר תוצאת הקובייה היא 1 או 2, קרי 2 פאות מתוך ה-6, הסתברות המאורע היא  $2/6$ . וכי.   
 לכן :

תוצאת קובייה	ערך כספי
80	1
80	2
100	3
100	4
100	5
-200	6

בהמראה לטבלת הסתברויות :

הסתברות	ערך כספי
$\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$	80
$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$	100
$\frac{1}{6}$	-200

תוחלת התקבול הכספי :

$$E(X) = \frac{1}{3} * 80 + \frac{1}{2} * 100 + \frac{1}{6} * (-200) = 43 \frac{1}{3}$$

סטיית התקן :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{3} * \left(80 - 43 \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} * \left(100 - 43 \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} * \left(-200 - 43 \frac{1}{3}\right)^2} \approx 109.19$$

שאלה 57 - בחירה בין שני פרויקטים בעלי רמת סיכון שונה ויישום בסיסי של קriterיוון "תוחלת שונות"

מציעים לכם להשקיע ב:

א. פרויקט שעניק لكم 60 ש"ח בודאות, או :

ב. פרויקט חלופי שעניק لكم 100 ש"ח בהסתברות של 60% או 0 בהסתברות של 40%.

נדרש :

1. חשבו את התוחלת וסטיית התקן של כל פרויקט.

2. איזה פרויקט יועד לפי קriterיוון תוחלת-שונות?

פתרון :

נתחילה מסידור הנתונים המספריים של הפרויקטים:

פרויקט B		פרויקט A	
תקבול כספי	הסתברות	תקבול כספי	הסתברות
100	60%	60	100%
0	40%		

נדרש 1 - **תוחלת וסטיית התקן של כל פרויקט:**

בutor תחילה, נחשב את התוחלת וסטיית התקן של כל פרויקט. לגבי פרויקט A, התהיליך טריביאלי. מדוע? בהינתן שלפרויקט יש רק תוצאה אפורה אחת - תוחלתו חייבת להיות זהה לוצאה זו. בנוסף, בהינתן תוצאה אפורה אחת בלבד, הרי שסטיית התקן (מדד הפיזור של התוצאות) בהכרח אפס.

$$E(A) = 60; \sigma(A) = 0$$

אפשר גם לחשב כמובן :

$$E(A) = 100\% * 60 = 60$$

$$\sigma(A) = \sqrt{100\% * (60 - 60)^2} = 0$$

נחשב את התוחלת וסטיית התקן לפרויקט B ונקבל :

$$E(B) = 60\% * 100 + 40\% * 0 = 60$$

$$\sigma(B) = \sqrt{60\% * (100 - 60)^2 + 40\% * (0 - 60)^2} \approx 48.99$$

נרכז את הממצאים :

B	A	
60	60	תוחלת
48.99	0	סטיית התקן

- אם ב שאלה נדרשו לדרג את הפרויקטים (ולהכריע מי מביניהם עדיף) לפי קритריון תוחלת-שונות. זהו קритריון שמניח שהמשקיע שונא סיכון (דוחה סיכון).
- ולמה הכוונה? מדובר בمشקיע ש מבחינתו הסיכון (עליה בסטיית התקן) פוגעת בערך הסובייקטיבי של הפרויקט מבחינתו.
- משקיעים שונאי סיכון פועלים בהנחה הקורס לפי kritериון תוחלת-שונות (או תוחלת-סטיית תקן). על פי קритריון זה:

- פרויקט A יועדף על פני פרויקט B אם ורק אם מתקיימים כל התנאים המוצטברים הבאים:
  - תנאי 1 :  $E(A) \geq E(B)$  תוחלת A גבוהה או לפחות זהה לתוחלת B
  - תנאי 2 :  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$  סיכון של A נמוך או לפחות זהה לסיכון B
  - תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים ב"צורה חזקה" (גדול ממש או קטן ממש בהתאם).

אלו הנתונים :

B	A	
תוחלת	60	60
סטיית תקן	48.99	0

הואיל וביקשו מפורשות לשפטות לפי תוחלת שונות, נבדוק את התנאים לאט ובעדינות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלה זו.

- תנאי 1 :  $E(A) = E(B)$  מתקיים כי  $E(A) \geq E(B)$
- תנאי 2 :  $\sigma(A) < \sigma(B)$  מתקיים כי  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$
- תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה חזקה: מתקיים כי תנאי 2 מתקיים "חזק"

בשורה התחתונה: לפי קритריון תוחלת-שונות המתאים לדרוג פרויקטים מסוכנים בהנחה שנת סיכון, יועדף פרויקט A על פני פרויקט B.

<sup>6</sup> שימו לב שביקשו לשפטות לפי תוחלת שונות, ובהתאם, ההנחה היא שנת סיכון. במידה ואין נתונים לגבי סוג המשקיע (אהוב סיכון, שונאי סיכון, אדיש לסיכון) ולא רמזו לגבי סוג המשקיע (מה שקרה כמשמעותי מפורשות צורך לשפטות לפי תוחלת שונות) לא יכולנו לדון בצורה חד משמעותית. נרჩיב בהמשך.

## שאלה 58

מציעים לכם להשקיע בפרויקט שיעניק לכם 80 ש"ח בודאות, או בפרויקט חלופי שיעניק לכם 100 ש"ח בהסתברות של 60% או 0 בהסתברות של 40%.

נדרש: חשבו את התוחלת של כל פרויקט. מוביל ליחס כמותית את סטיית התקן, איזה פרויקט יעדיף לפי קритריון תוחלת-שונות? [בגסות: קритריון המתיחס לתוחלת ולסטיית התקן / השונות ומניח שנאט סיכון]

פתרון:

נתונים:

פרויקט B		פרויקט A	
תקבול כספי	הסתברות	תקבול כספי	הסתברות
100	60%	80	100%
0	40%		

ודאות משמעה 100% הסתברות.

$$E(A) = 80$$

$$E(B) = 60\% * 100 + 40\% * 0 = 60$$

ביקשו אמנים שלא נחשב את סטיית התקן, אבל אני מ庫וה שברור لكم שמתקיים:

$$\sigma_B > \sigma_A$$

זאת משום שפרויקט A בהגדרה חסר סיכון (סיכון 0).

כלומר:

$$E(A) > E(B)$$

$$\sigma_A < \sigma_B$$

נבדוק את התנאים לאט ובעדינות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלה זו.

תנאי 1:  $E(A) > E(B)$  מתקיים כי  $E(A) \geq E(B)$

תנאי 2:  $\sigma(A) < \sigma(B)$  מתקיים כי  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$  גם ללא חישוב: כי A פרויקט ודאי

תנאי 3: לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה החזקה: גם תנאי 1 וגם תנאי 2 מתקיימים חזק.

לכן, לפי קритריון תוחלת-שונות, יש להעדיף 80 ש"ח בודאות על פני ההגרלה המוצעת.

## שאלה 59

mo'etz לכם להשתתף בהגרלה. עלות ההשתתפות היא 500 ש"ח. ההגרלה יכולה להניב لكم ערך חיובי של 800 ש"ח בהסתברות של 40% או ערך חיובי של 300 ש"ח בהסתברות 60%. סמן את הטענה הנכונה :

- א. אם השקיעו שונאי סיכון, כדאי לו השקיע בתכנית (בהגרלה).
- ב. לפי קритריון תוחלת שונות, כדאי לו השקיע בתכנית (בהגרלה).
- ג. לפי קритריון תוחלת שונה, לא ניתן לקבל החלטה האם כדאי השקיע בתכנית.
- ד. אם השקיעו שונאי סיכון, מוטב לו שלא השקיע בתכנית.
- ה. כל יתר הטענות שגויות.

פתרון :

תחליה, נשים לב לכך שככל המסיחים (אפשרויות התשובה) מתייחסים לשונאי סיכון באופן מפורש או באופן משתמש (כפי תמיד כshmבקשים לפועל לפי קритריון תוחלת שונות, למעשה מבקשים שנניח שנאות סיכון). בرمת פילוח אפשרויות המשקיע בשאלת - אם אני מזיהה מצב שבו מעריכים לי להשתתף בהגרלה בעלות מסוימת ושאלים אם כדאי, בעצם מגדירים את הפרויקטטים הבאים :

פרויקט א = להשאר עם 500 ש"ח ודאי בכיס.

פרויקט ב = לקבל כרטיס הגרלה, עם התפלגות זכיה נטונה - 800 בהסתברות 40%, ו- 300 בהסתברות 60%.

להלן ריכוז :

פרויקט B - סכום בכיס היום		פרויקט A - סכום בכיס היום	
תקבול כספי	הסתברות	תקבול כספי	הסתברות
800	40%	500	100%
300	60%		

לABIי פרויקט A החיים תות : התוחלת 500, והסיכון אפס.

לABIי פרויקט B נחשב את סטיית התקן :

$$E(B) = 40\% * 800 + 60\% * 300 = 500$$

$$\sigma(B) = \sqrt{40\% * (800 - 500)^2 + 60\% * (300 - 500)^2} \approx 244.95$$

נבדוק את התנאים לאי ובודיניות בהינתן ריכוז הממצאים בשאלת זו.

תנאי 1 :  $E(A) \geq E(B)$  מתקיים כי  $E(A) = E(B)$ .

תנאי 2 :  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$  מתקיים כי  $\sigma(A) < \sigma(B)$  גם ללא חישוב : כי A פרויקט ודאי

תנאי 3 : לפחות אחד משני התנאים 1, 2 מתקיים בצורה החזקה : תנאי 2 מתקיים חזק.

לכן, לפי קритריון תוחלת שונה, מוטב למשקיע להיווטר עם 500 ש"ח בכיסו, יתרה על להתקשר בעסקת ההגרלה. **התשובה 2.**

### שאלה 59.1 - המחזה נספת של תוחלת שונות

ברק להוא משקיע שונא סיכון. מציעים לבrk להשקיע באחד מבין שני הפרויקטים הבאים:

פרויקט B		פרויקט A	
הסתברות	תקבול כספי	הסתברות	תקובל כספי
3,000	50%	1,000	100%
0	50%		

נדרש: לפי קритריון תוחלת שונות, איזה פרויקט יעדיף ברק?

פתרון:

לגביה פרויקט A שיש לו תוצאה אפשרית אחת בלבד:

$$E(A) = 1,000 \quad \sigma(A) = 0$$

ולגביה פרויקט B בישום רלוונטי:

$$E(B) = 50\% * 3,000 + 50\% * 0 = 1,500$$

$$\sigma(B) = \sqrt{50\% * (3,000 - 1,500)^2 + 50\% * (0 - 1,500)^2} = 1,500$$

ריכוז הממצאים:

B	A	
1,500	1,000	תוחלת
1,500	0	סטיית תקן

נבדוק באופן מלא האם A עדיף על B לפי צבר התנאים המגדירים את קритריון "תוחלת שונות":

תנאי 1:  $E(A) < E(B)$  **לא מתקיים** מיד כשללנו תנאי זה, ידוע לנו שלא נוכל לטעון ש- A עדיף על B.

תנאי 2:  $\sigma(A) < \sigma(B)$  **מתקיים כי**  $\sigma(A) \leq \sigma(B)$

תנאי 3: לא רלוונטי, לאור אי קיומו של תנאי 1.

נבדוק "הפוך". האם B עדיף על A.

תנאי 1:  $E(B) \geq E(A)$  **מתקיים בצורה החזקה**:

תנאי 2:  $\sigma(B) < \sigma(A)$  **לא מתקיים כי**  $\sigma(B) > \sigma(A)$  כשללנו תנאי זה, ידוע לנו שלא נוכל לטעון ש- B עדיף על A.

תנאי 3: לא רלוונטי, כי תנאי 2 לא מתקיים.

לא הצלחנו להראות ש- A עדיף על B.

לא הצלחנו להראות ש- B עדיף על A.

המשמעות: לא ניתן להכריע לפי קритריון תוחלת-שונות איזה פרויקט יועדר.

## שאלה 59.2 - דירוג פרויקטים מסוכנים ויחס לסיכון

נתונות אפשרויות ההשקעה הבאות :

C		B		A	
הסתברות	ענין	הסתברות	ענין	הסתברות	ענין
0.5	0	0.2	0	1	1,000
0.3	1,500	0.8	1,250		
0.2	3,200				

מהי ההשקעה שתועדף על ידי המשקיע? בחרו מ בין התשובות הבאות :

- שונא סיכון יעדיף את אפשרות A
- אוחב סיכון יעדיף את אפשרות B
- אוחב סיכון יעדיף את אפשרות C
- שונא סיכון יעדיף את אפשרות C
- אdish לסיכון יעדיף את אפשרות B

פתרון :

שיםו לב, בהיבט שונא סיכון, חשוב מכך להמנע מצב שבו באופן מידי נציג העדפה של A לאור היותו בעל סיכון 0 (ודאי). זאת, משום לצד הסיכון, שכמובן הוא הנמוך ביותר בפרויקט A, יש לבחון גם את התוחלת – אנחנו לא מקבלים החלטה על סמך מימד אחד (להוציא חריג – אdish לסיכון).

לכן :

נתחיל בחישוב המדדים הסטטיסטיים של תוחלת וסטיית תקן של כל נכס :

$$E(A) = 1,000$$

$$E(B) = 0 * 0.2 + 1,250 * 0.8 = 1,000$$

$$E(C) = 0 * 0.5 + 1,500 * 0.3 + 3,200 * 0.2 = 1,090$$

המשך בחישוב סטיית התקן :

$$\sigma_A = 0$$

$$\sigma_B = \sqrt{0.2 * (0 - 1,000)^2 + 0.8 * (1,250 - 1,000)^2} = 500$$

$$\sigma_C = \sqrt{0.5 * (0 - 1,090)^2 + 0.3 * (1,500 - 1,090)^2 + 0.2 * (3,200 - 1,090)^2} = 1,238$$

רכזו את הממצאים בטבלה :

C	B	A	
1,090	1,000	1,000	תוחלת
1,238	500	0	ס. התקן

#### דיון בטענה א : שונא סיכון יעדיף את אפשרויות A

עבור שונא סיכון, A עדיף על B (תוחלת זהה, בפחות סיכון)

אך לא נוכל להכריע בין A ל - C וזאת מושם לצד הסיכון הגבוה יותר ב - C (ambilas את שונא הסיכון) הרי שהתוחלת יותר גבוהה ב - C (משמעות כל משקיע, לרבות שונא סיכון). ללא מידע ספציפי בדבר שונא הסיכון וטעמיו, לא נוכל לדעת האם וע' כמה העלייה בתוחלת התשואה במעבר לנכס C מפיצה אותו די הצורך כדי להסכים ליטול את הסיכון הנוסף.

בשורה התחתונה : A - **יעיליט**, יהיה ביןיהם "התלבות" ולא נוכל להכריע **בגורף** עבור **כל** שונאי הסיכון בעולם במה יבחרו מבין שני אלו.

לכן הטענה שוגיה. לא ניתן לומר **באופן גורף** ש**שונא סיכון יעדיף A**.

#### דיון בטענה ב : אהוב סיכון יעדיף את אפשרויות B

C	B	A	
1,090	1,000	1,000	תוחלת
1,238	500	0	ס. תקן

אהוב סיכון הוא משקיע אשר נתרם מכך ערך חיובי הן מהתוחלת והן מהסיכון. הואיל ו מבחינתו הן בימיד התוחלת והן בימיד ס. תקן (סיכון) C עדיף על שני האחרים, הוא זה שיבחר, ולא B, שכן הטענה שוגיה.

#### דיון בטענה ג : אהוב סיכון יעדיף את אפשרויות C

כפונ. רואו דיוון בטענה ב.

#### דיון בטענה ד : שונא סיכון יעדיף את אפשרויות C

נשלול טענה זו, לפי ההסביר שסיפקנו לדיוון בטענה א.

#### דיון בטענה ה : אדיש לסיכון יעדיף את אפשרויות B

משמעות אדיש לסיכון הוא משקיע תיאורטי ש מבחינתו אין משמעות לסיכון בכלל. הוא מביט על התוחלת וושאך למסקמה זהה הכל.

בhinintן עובדה זו, משקיע אדיש לסיכון יעדיף בהכרח את C המספקת בנסיבות אלו תוחלת מירבית.

המסקה	C	B	A	
וואו אני מת לתוחלת מירבית	1,090	1,000	1,000	תוחלת
אני אדיש לסיכון. לא מעניינת אותי השורה זו	1,238	500	0	ס. תקן

בשורה התחתונה, התשובה הסופית לשאלת היא ג.

**טבלת עזר – לקבלת החלטות משקיעים – לגבי פרויקטים מסווגנים בודדים לפי יחס לסיכון**

יחס לסיכון	משמעות	קבלת החלטה
שונה סיכון	עליה בסיכון – פוגעת בערך ירידה בסיכון – תורמת לערך ובנוסף יש לשים לב ש : עליה בתוחלת – תורמת לערך ירידה בתוחלת – פוגעת בערך	לא מתבססים רק על הסיכון והצורך להקטינו ; כדי שפרויקט יהיה עדיף על חברו, נדרש שלא תתקיים סתירה בין הגורמים. נניח : תוחלת א > תוחלת ב סיכון א = סיכון ב (לא כל שכן סיכון א > סיכון ב) עדיף את א.  נניח : תוחלת א > תוחלת ב סיכון א > סיכון ב אין החלטה, כי יש סתירה : בתוחלת עדיף א, ובהיבט סיכון עדיף ב.
אהוב סיכון	עליה בסיכון – תורמת לערך ירידה בסיכון – פוגעת בערך ובנוסף יש לשים לב ש : עליה בתוחלת – תורמת לערך ירידה בתוחלת – פוגעת בערך	לא מתבססים רק על הסיכון והצורך להגדילו. כדי שפרויקט יהיה עדיף על חברו, נדרש שלא תתקיים סתירה בין הגורמים. נניח : סיכון א > סיכון ב תוחלת א = תוחלת ב (לא כל שכן, תוחלת א > תוחלת ב) עדיף את א.  נניח : סיכון א > סיכון ב תוחלת א > תוחלת ב לא ניתן לקבל החלטה כי יש סתירה : בתוחלת עדיף א, ובסיכון – עדיף ב.
אדיש לסיכון	מבצע החלטות לפי תוחלת בלבד, לא מביט בכלל על הסיכון	הפרויקט שייבחר יהיה זה שתוחלתו גבוהה יותר (לא מתייחסים בכלל לסיכון).  דוגמא : עדן גוילי 

**שאלה 59.3 – מצב שבו פרויקט אחד תמיד עדיף על השני**

נניח שמוסצע לי להשקיע באחד מבין שני הפרויקטים :

פרויקט ב	הסתברות	פרויקט א	הסתברות
200	40%	100	100%
500	60%		

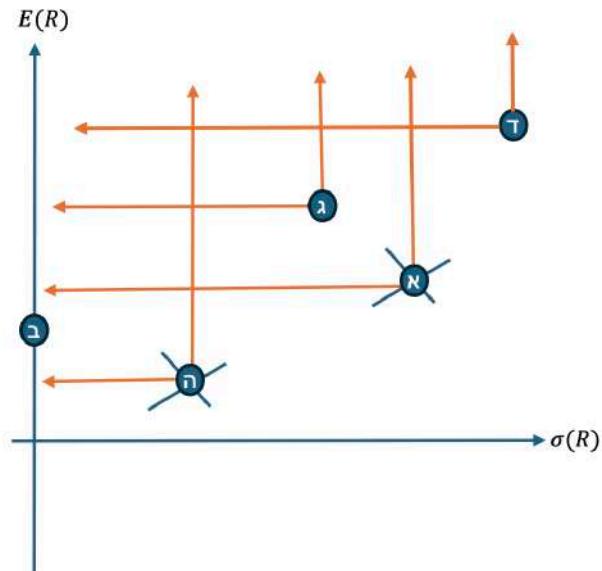
**האם ניתן לדעת איזה פרויקט יעדיף המשקיע?**

לכארה, נרצה לחשב תוחלת וסטיית תקן. אבל אלא אם כן ביקשו מפorschות – זה לא נדרש מה בכלל. מודיע? משום שאפשר לראות שזה מקרה מיוחד שבו פרויקט ב תמיד יותר מפרויקט א. כשהם מצביעים כזה, תשובה תהייה : כל סוגי המשקיעים ללא תלות ביחס לsicbo – יעדיפו את ב.

שאלה 59.4 – דיוון גרפי שיכול להקל במקורה של בחירה בין פרויקטים רבים בעלי תוחלת וס. תקן נתונה טל אברהם שוקלת לבצע פרויקט בתחום הנקי. הוצעו לה מספר פרויקטים ברמות סיכון ותוחלות שונות כדלקמן:

פרויקט	תוחלת תשואה	ס. תקן
א	10%	15%
ב	8%	0%
ג	20%	10%
ד	30%	18%
ה	4%	7%

נדרש: בהנחה שטל שונאת סיכון, أيזה פרויקט היא תעדיף לבצע (במידה ולא ניתן להכריע, נמצמו את הרשימה למספר הפרויקטים המינימלי שמעורר התלבטות מבחןתיה)?



מה עשינו ומה רأינו? מיקמו באופן ייחסי את הפרויקטים זה לצד זה במערכת צירים שצירה האופקי סטטיסטית תקן וצירה האנכי תוחלת תשואה.

הוצאנו קרניזים מכל פרויקט: קרנו אחת למעלה וקרנו נוספת שמאליה. כפי שלימור צינה, אנו מגדירים פרויקטים שעדיפים על הפרויקט ממנו יוצאו בתווך פרויקט שמצוי בתחום המשוור התוחום על ידי קרניזים אלו (לרובות הגבולות).

קרי: הוצאנו קרניזים מ-א למעלה ושמאליה, וגילינו שפרויקט ג נמצא בטווח המוגדר על ידי קרניזים אלו. מכאן, שפרויקט ג עדיף על א, או במלים אחרות, פרויקט נחות / לא יעיל. חזרנו על התהילה על בסיס הוצאת קרניזים גם מהפרויקטים האחרים, ונשארכנו עם 3 פרויקטים שבתחום המשוור הגלום בקרניזיהם לא קיים אף פרויקט אחר: ב, ג, ד. מנקודת ראותו של שונא סיכון, כל הפרויקטים הללו יעילים, והמשמעות היא שלא ניתן להכריע בניהם מנקודת ראותו של שונא סיכון.

## **רקע קצר - דיוון במיגור סיכון (הקטנתו) על ידי שילוב פרויקטים מסוכנים - גישת תיקי השקעות**

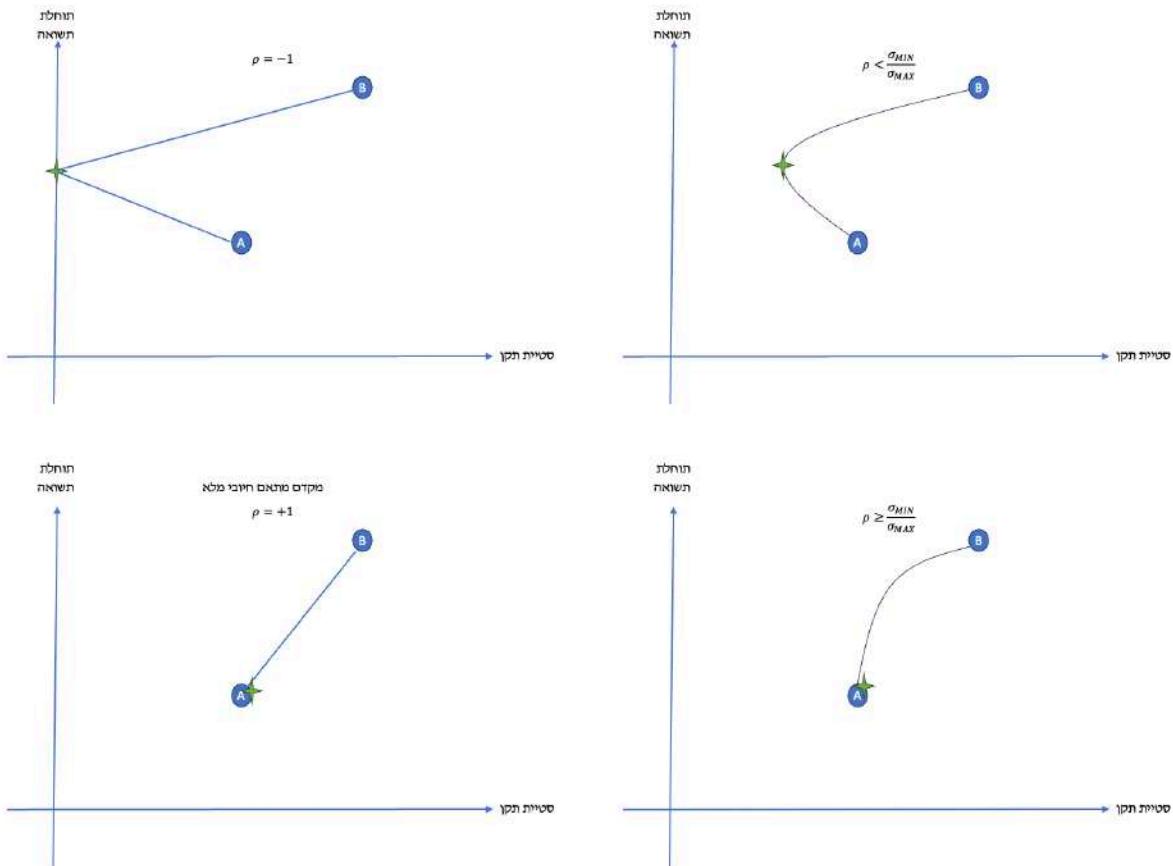
הדיונים לעיל (בפרויקטים מסוכנים ודירוגם) הניחו שיש לבחור **פרויקט אחד בלבד** מבין כמה מוצעים. בעולם האmittel, ובעיקר ככל שאמורים הדברים לגבי נכסים סחריים (מניות המרכיבות תיק השקעות, למשל) כמובן שnitן לשלב בין נכסים מסוכנים, והדבר עשוי לתרום להקטנת הסיכון הגלום בתיק.

ומדוע? לאור העובדה שרכיבי התיק "מאזנים זה את זה". משם שם שקרמל מלאח הוא טעם נפלא, כי המלה מאzon את המtopic, כך בתיק השקעות המאוון היטב המאפיינים השונים של הנכסים ובעיקר מקדם המתאים ביניהם (הקובע, בgesot, האם ועד כמה תנועה לכיוון מסויים בנכס אחד מרככת עם תנועה בכיוון הפוך בנכס אחר) מאפשרת להקטין סיכון.

עולם ניהול סיכון בתיקי השקעות הוא ענק. אנחנו נתמקד במספר יישומים סטטיסטיים בסיסיים מאד, שבבסיסם הנוסחאות המקובלות לחישוב תוחלת וסטטיסטית **תקן** של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים.  
נתחיל בהצגה גרפית, כדי לקבל תחושה. לאחר מכן, נציג את ההיבט הכמותי ונתרגל בהתאם.

שאלה 60 – **דיאון גרפי בסיסי** במשמעות שילוב 2 נכסים מסוכנים וההיבט של מקדם המתאים בפייזר הסיכון ידוע כי בשוק ההון קיימות 2 מניות בלבד : A ו- B. ידוע כי סטיטית התקן של מניה B גבוהה יותר מסטיטית התקן של מניה A, וכי תוחלת התשואה של מניה B גבוהה מתוחלת התשואה של מניה A. בהתאם, הציגו באופן עקרוני בתרשים של ציר האופקי סטיטית התקן ועל ציר האנכי תוחלת תשואה, את המקרים האפשריים המיצגים את תמהיל ה השקעות האפשריים. הדבר תלוי לא רק בתוחלת התשואה וסטיטית התקן של כל נכס בנפרד, אלא גם בקשר בין תשואותיהם (מקדם המתאים :  $\rho$  (רו)).

כל שמקדם המתאים נמוך יותר, הנכסים מותנהגים בצורה "שונה" יותר – מה שמאפשר להקטין את הסיכון באמצעות שילוב הנכסים בצורה משמעותית יותר.



קשה לראות? הנה הנוסחאות במרוכז:

**הקטנות הסיכון** בזכות שילוב (פיצול כספי ההשקעה) בין שני נכסים מסוכנים - אפשרות אל מתחת למומצע המשוקל של הסיכוןים של הנכסים בתיק (בטון / פופיק) כאשר מתקיים שמקדם המתאים  $\rho$  (ערך סטטיסטי נוסף חשוב שצריך לדעת בעולמות ניהול ההשקעות) נמוך ממהיחס בין סטיות התקן של הנכסים (הנמוכה חלקית

$$\text{הגבוהה : } \left( \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}} \right)$$

$$\rho < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$$

נוסחת תוחלת תיק השקעות המורכב מ-2 נכסים מסוכנים בלבד כאשר ערכי  $W$  מייצגים את משקל ההשקעה בכל נכס (האחוז מכיספי המשקיע שהוא בוחר לנכון לכל אחד מהנכסים):

$$E(P) = W_A E(A) + W_B E(B)$$

נוסחת סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים (שורש השונות):

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

נוסחת משקלי ההשקעה שיוובילו לתיק מינימום סיכון (שלולונטיט) רק כאשר התנאי להקטנת סיכון מתקיים:

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B}$$

משקל ההשקעה המתאים בנכס B יהיה המשלימים של ערך זה ל-100%.

### שאלה 60.1

נתונות שתי מניות, A ו- B, כאשר:  $E(A) < E(B)$  וכן  $\sigma_A > \sigma_B$ . סמננו את הקביעה הנכונה, בהנחה שמקדם המתאים בין הנכסים הוא 0:

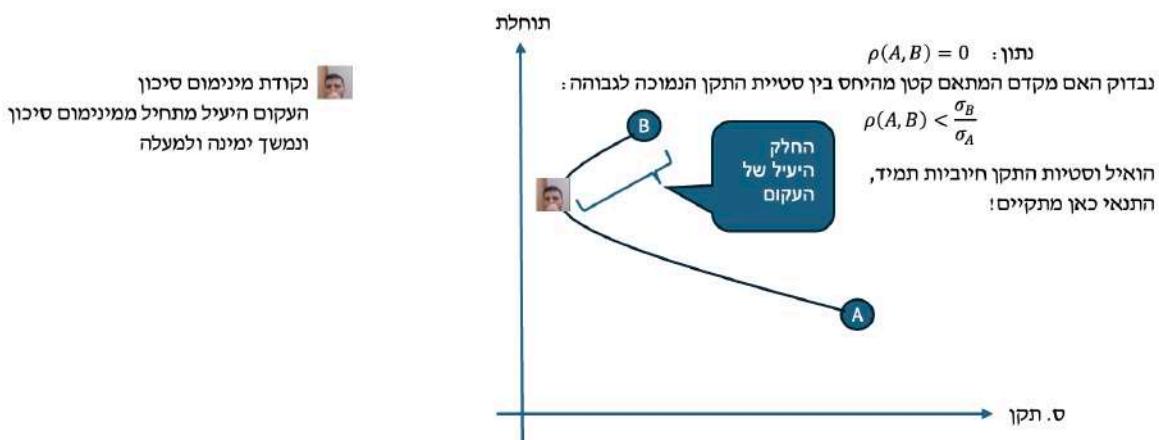
- משקיע שונא סיכון לא ישלב בתיקו את נכס A.
- משקיע שונא סיכון לא ישלב בתיקו את נכס B.
- משקיע שונא סיכון ישקיע אך ורק בנכס B.
- משקיע שונא סיכון ישקיע רק בנכס A.
- כל יתר התשובות שגויות.

פתרון - התשובה ה. להלן פתרון מפורט:

כאשר אני מזזה שאלה שבה מציגים נכסים מסוכנים (והם מסוכנים - יש מידע לגבי סטיות התקן, ומעבר לכך מניה היא נכס מסוכן בהדרה), ובנוסף ישנו מידע בדבר **מקדם המתאים** (הקשר בין תשויות הנכסים) - המשמעות היא שnitן לשלב ביניהם.

בשעה שאני מזזה אפשרות שילוב בין נכסים מסוכנים, חשוב מכך להקפיד ולאייר את עוקום תמהילי ההשקעה האפשריים, בהתאם למיקום היחסי של הנכסים ומקדם המתאים.

תהליך העבודה הוא כדלקמן:  
 בשלב ראשון - מיקמו את הנכסים הבודדים זה ביחס זהה. נכס B בעל תוחלת גבואה יותר וסיכון נמוך יותר מנכס A, ולכן מיקומו היחסי הוא משMAL ומעל נכס A.  
 בשלב שני - בדקנו האם מתקיים התנאי להקטנת סיכון. תנאי זה דורש שמקדם המתאים הנtooן (כאן - 0) יהיה קטן מהיחס בין סטיית התקן הנמוCAה לגבואה. בהינתן שסטיות התקן חיובית תמיד, מקדם מתאים 0 (וכמוון שלילי) מבטיח קיום התקן הסיכון, מה שיוצר עוקום תמהילי השקעה ש"בולט" שמאלה (פופיק / בטן) ביחס לשני הנכסים.  
 בהתייחס לעוקום זה, החלק הייעיל של העוקום, המהווה בחריות פוטנציאליות אפשריות / עילוות למשכיע שונא סיכון, תמיד מתחילה בתיק מינימום סיכון (פופיק / הנקודת השמאלית ביותר / רותם) ומשיכת ימינה ומעלה (במקרה שלנו - ראו איור בעמוד הבא - מרווח עד נכס B).  
 רק עכשו, כשהאנו יודעים איך נראה עוקום תמהילי ההשקעה האפשרים ומה חלקו הייעיל שמשקף את בחריותו הפוטנציאליות של המשקיע, ניתן לדון בהיגדים.



- a. משקיע שונא סיכון לא ישלב בתיקו את נכס A.  
 הטענה שגوية. משקיע שונא סיכון יכול לבחור בכל שילוב השקעה מתיק רותם (מינימום סיכון) עד כולל נקודת B. כל הנקודות למעט B הן נקודות ייעולות, שכוללות אחזו מסוימים שמושקע ב - A. ולכן, רבים משונאי הסיכון ישלבו חלק מהתיק גם את נכס A.
- b. משקיע שונא סיכון לא ישלב בתיקו את נכס B.  
 הטענה שגوية. שונא סיכון יבחר בשילוב ייעיל, מתיק רותם עד B. כל השילובים הללו כוללים אחזו מסוימים מתיק המשקיע המושקע בנכס B. למעשה, הנקודה היחידה שלא משלבת את נכס B היא נקודת A שכלל איננה ייעלה.
- c. משקיע שונא סיכון ישקיע אך ורק בנכס B.

הטענה **שגوية**. זה היה נכון אם לא היה ניתן לשלב בין הנכסים ואז הייתם אומרים שביחס ל - A נכס B מנייב תוחלת גבואה יותר בסיכון נמוך יותר. אבל בהינתן אפשרות השלוב, שבמקרה זה מאפשרות להקטין את הסיכון אפילו עוד יותר, היעילות שמשמעותה את מכלול הבחירה האפשרות של שונא סיכון, מתקינה במנגד תיקי השקעות רחוב הרבה יותר (מתיק רותם עד וככל B).

ד. משקיע שונא סיכון ישקיע רק בנכס A.

הטענה **שגوية**. השקעה בנכס A לבדה מושמעה הימצאות נקודה A שאינה חלק מהעיקום היעיל.

ה. כל יתר התשובות שגויות.

**זו התשובה.**

**שאלה 2.60** (מאד דומה ל-1.60 ולכנו דילגנו. בתכليس גם מקדם מתאים שלילי וגם מקדם מתאים 0 ברמת העוקום נראים אותו דבר).

נתונות שתי מנויות  $A$  ו-  $B$ , כאשר ידוע שמתכתיים אי השוווניות הבאים:

$$E(A) < E(B)$$

$$\sigma(A) > \sigma(B)$$

כמו כן ידוע כי ערכו של מקדם המתאים  $\rho$  הינו שלילי, כך שמתכתיים  $0 < \rho$ .  
בכפוף לננתונים אלו:

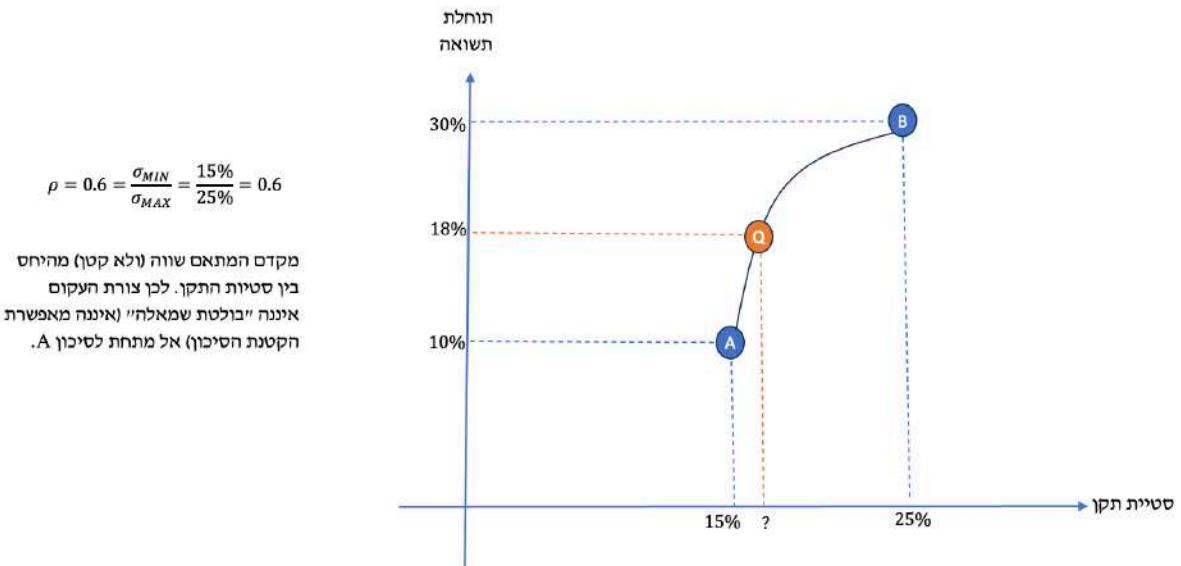
- א. הציגו במערכת ציריים את עוקום תמהילי ההשקעה האפשריים באופן סכמטי.
- ב. מהו החלק היעיל בעקבות? מהו החלק הלא יעיל, ומדוע?
- ג. האם ניתן לומר שימושי שונא סיכון לא ישקיע אף פעם במניה A?
- ד. האם ניתן לומר שימושי שונא סיכון תמיד ישקיע רק במניה B?
- ה. האם ניתן לומר שימושי שונא אדיש לסיכון ישקיע תמיד רק במניה B?
- ו. האם ניתן לומר שימושי שונא אוחב סיכון ישקיע תמיד רק במניה B?

## שאלה 61

ידוע כי בשוק הקיימים קיימות 2 מניות בלבד: מניה A שתוחלת תשואתה 10% וסטיית התקן שלה 15%, ומניה B שתוחלת תשואתה 30% וסטיית התקן שלה 25%. ידוע שמשקיע מעוניין בתיק השקעות בעל תוחלת תשואת של 18%. מהי סטיית התקן של תיק ההשקעות, בהינתן שמדובר המתאים בין תשואות הנכסים הוא 0.6?

פתרון:

נאייר את צורת העקום הרלוונטי בנסיבות המקורה, ונציג עלייה את הנעלם הרלוונטי ("?").



נוסחה: תוחלת תשואת תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים היא:

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

כאשר:

הערך  $E(P)$  מייצג את תוחלת התשואה של תיק ההשקעות (כאן - P מלשון Portfolio).

הערך  $W_A$  מייצג את משקל ההשקעה בנכס A (האחוז מסווגנו שיושקע בנכס A).

הערך  $W_B$  מייצג את משקל ההשקעה בנכס B (האחוז מסווגנו המושקע ב - B).

ככל, בעולם עם שני נכסים בלבד, תמיד מתקיים  $W_A + W_B = 100\% = 100\%$ .

הערך  $E(A)$  מייצג את תוחלת התשואה של נכס A.

הערך  $E(B)$  מייצג את תוחלת התשואה של נכס B.

נציב את נתונים השאלה ונקבל:

בשאלה נתון - תוחלת התקן המשולב 18%, תוחלת נכס A היא 10%, ותוחלת נכס B היא 30%:

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

ב揆בה (כדי למצוא את האחוז מסווגני שאשקיים בכל נכס, כדי להגיע לתוחלת הנתונה):

$$E(Q) = 18\% = W_A * 10\% + W_B * 30\%$$

אך הוילו :  $W_A + W_B = 100\%$  ולכן במקומות לרשות  $W_B$  אפשר לרשות  $(1 - W_A)$

$$E(Q) = 18\% = W_A * 10\% + (1 - W_A) * 30\%$$

נפשט ונקבל :

$$0.18 = 0.1W_A + 0.3 - 0.3W_A \rightarrow W_A = 0.6 = 60\%$$

והמשמעות : משקיע המעניין בתוחלת תשואת תיק של 18%, ישקיע 60% מכיספו בנכס A ואת שארית כספו קרי 40% בנכס B.

בהינתן משקל ההשקעה בכל נכס, ניתן להשתמש בנוסחה המתמטית לחישוב סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסווגים :

נוסחה : סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסווגים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

כאשר :

המקרה לכל הערכים זהה כמו בתרחישים קודמים, למעט  $\rho_{A,B}$  שמייצג את מקדם המתאים בין התשואות

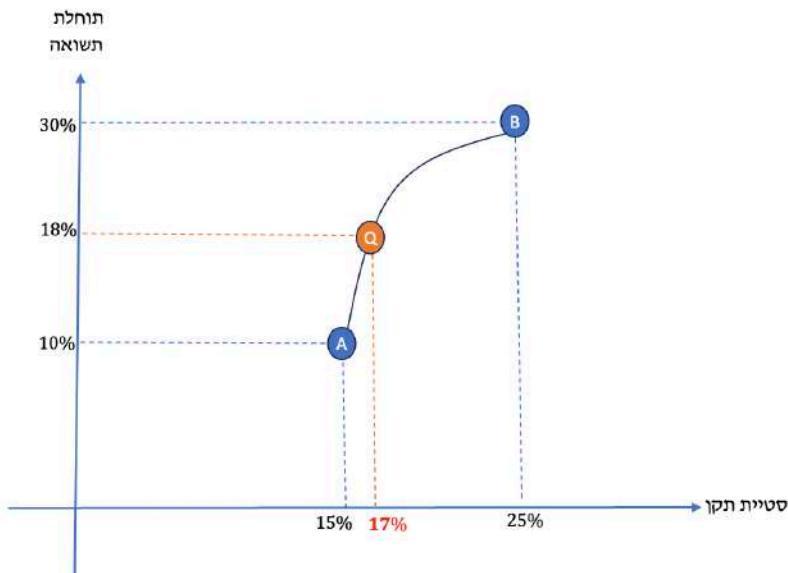
בשאלה הנדונה ידוע **מקדם המתאים 0.6**. כמו כן, דרך תוחלת התקן חילכנו את משקל ההשקעה של בסיסים קיבלנו 60%,  $W_A = 60\%$ ,  $W_B = 40\%$ . סטיות התקן של הנכסים הבודדים גם הן נתונות כלהלן בהתאם  $\sigma_A = 0.15$ ,  $\sigma_B = 0.25$  :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

הנה הצבה :

$$\sigma(P) = \sqrt{0.6^2 * 0.15^2 + 0.4^2 * 0.25^2 + 2 * 0.6 * 0.4 * 0.15 * 0.25 * 0.6} = 17\%$$

המשמעות : בנקודה Q (תיק ההשקעות שבו תוחלת התשואה 18%) סטיית התקן היא 17%.



### הרחבה - נוסחת סיכון ומשמעותה ה - COV

נוסחת הסיכון של תיק השקעות (סטיית תקן) המורכב מ-2 נכסים מסוכנים היא :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

אך קיימת וריאציה נוספת לנוסחה זו :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \text{COV}(A, B)}$$

למעשה, הביטויים המסומנים באדום שקולים. המונח COV מיצג את השונות המשותפת (כען מודד של השתנות משותפת של הנכסים לפני תקנו, שmobiel למועד המתאים הליינארי).

## שאלה 61.1

סמן את הטענה הנכונה :

- א. כאשר  $COV$  שלילי, ניתן להקטין את הסיכון הגלום בתיק ההש侃עות אל מתחת לממוצע המשוקל של סיכון הנכדים בתיק.
- ב. בחרה בנכדים בעלי מקדם מתאים ספציפי יכולת לאפשר את פיזור הסיכון על ידי גיון תמהיל ההש侃עות בתיק.
- ג. כאשר  $COV$  חיובי לא ניתן להקטין את הסיכון.
- ד. כאשר מקדם המתאים חיובי לא ניתן להקטין את הסיכון.
- ה. תשובות א-ב נכונות.

פתרון : התשובה ה. להלן פתרונו מפורט.

- א. כאשר  $COV$  שלילי, ניתן להקטין את הסיכון הגלום בתיק ההש侃עות אל מתחת לממוצע המשוקל של סיכון הנכדים בתיק.

$$COV(A, B) < 0$$

זה בהכרח אומר ש :

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A * \sigma_B} < 0$$

ואם מקדם המתאים שלילי - הרי אמרנו : מקדם מתאים של 0 או שלילי בהכרח מוביל ליכולת להקטין סיכון ; וכשאנו אומרים "להקטין סיכון" - הכוונה היא אל מתחת למיצוע הפשט של סטיות התקן של הנכדים בתיק. לכן הטענה נכונה.

- ב. בחרה בנכדים בעלי מקדם מתאים ספציפי יכולת לאפשר את פיזור הסיכון על ידי גיון תמהיל ההש侃עות בתיק.

אם אני בוחר נכדים שמקדם המתאים ביניהם קטן מהיחס בין סטיות התקן  $\rho < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$  בהגדלה ניתן להקטין סיכון. הקטנת סיכון בהקשר לשילוב נכדים בתיק ההש侃עות נקראת גם פיזור סיכון, והמונה "גיון תמהיל ההש侃עות בתיק" בסך הכל מדבר על עצם שילוב הנכדים. הטענה נכונה.

- ג. כאשר  $COV$  חיובי לא ניתן להקטין את הסיכון.  
הטענה שגויה. אמם זה נכון לומר שכאשר  $COV$  חיובי מקדם המתאים חיובי גם הוא :

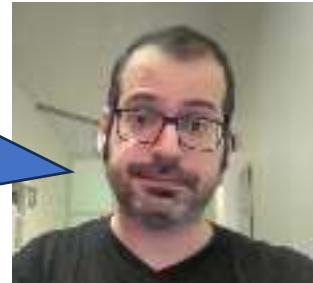
$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A * \sigma_B} = \frac{+}{+ * +} > 0$$

אבל מקדם מתאים חיובי כשלעצמם לא שולל את יכולת להקטין את הסיכון ; התנאי הוא :  $\rho < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$  אבל עוד התנאי מתקיים, גם אם מקדם המתאים חיובי, ניתן להקטין סיכון.

ד. כאשר מקדם המתאים חיובי לא ניתן להקטין את הסיכון.  
הטענה שגوية בדיקת מהסיבה שטענה ג שגوية.

ה. **תשובות א ו-ב אכנו נכונות. התשובה הנכונה ה.**

וכעת... כל הדיוון לעיל התבסס על סטיות תקן  
של שילובים של שני נכסים מסוכנים בלבד.  
בחילט תכונה שאלות מתמטיות שתבקשנה  
סטיות תקן של תיק המורכב מ-3 נכסים  
מסוכנים.



**הרחבה -**

**תוחלת תשואה של תיק השקעות המורכב מ-3 נכסים מסוכנים**

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B) + W_C * E(C)$$

**סטיות תקן של תיק השקעות המורכב מ-3 נכסים מסוכנים**

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

#### 61.1.3 שאלה

לשולחה נכסים, א, ב ו-ג, סטיות תקן של 10%, 15% ו-18% בהתאם, ותוחלות תשואה של 5%, 12% ו-2% בהתאם.

נדרש: מהי תוחלת התשואה וסטיות התקן של תיק השקעות המורכב מ-3 השקעה בנכס א, 50% השקעה בנכס ב, ו-20% השקעה בנכס ג, אם ידוע ש:

$$\rho_{A,B} = 0; \quad \rho_{A,C} = 0.5; \quad \rho_{B,C} = -0.8$$

**פתרון :**

א	ב	ג	תוחלת
12%	2%	5%	ס. תקן
18%	15%	10%	משקל השקעה בנכס
20%	50%	30%	

תוחלת התשואה של התקין:

$$E(P) = 30\% * 5\% + 50\% * 2\% + 20\% * 12\% = 0.049 = 4.9\%$$

סטטיסטית התקן של התקיק :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

$$\sigma(P) = \sqrt{0.3^2 * 0.1^2 + 0.5^2 * 0.15^2 + 0.2^2 * 0.18^2 + 2 * 0.3 * 0.2 * 0.1 * 0.18 * 0.5 + 2 * 0.5 * 0.2 * 0.15 * 0.18 * (-0.8)} = 0.8$$

## 61.2 שאלה

לשולושה נכסים א, ב, ג - סטטיסטית התקן של 20%, 30% ו-40% בהתאם, ותוחלתות תשואה של 10%, 15% ו-22% בהתאם.

מקדם המתאים בין הנכסים א ו-ב הוא 0.

מקדם המתאים בין הנכסים ב ו-ג הוא 1.

מקדם המתאים בין הנכסים א ו-ג הוא -1.

נדרש :

א. מהי סטטיסטית התקן ותוחלתת התשואה של תיק השקעות המורכב מכל שילוב אפשרי של שני נכסים

במשקלים שווים?

ב. הציגו את התקיקים הספציפיים שנוצרו באופן גרפי.

ג. בהנחה שהאליז המוצג בסעיף א הוא קשיח מה התקיקים הייעילים ביניהם יבחר המשקיע מבין האפשרויות בסעיפים א, ב.

ד. הניחו כי משקיע אחר מעוניין בתיק בעל סטטיסטית התקן אפס ואינו מוגבל להשקעה. מהו משקל ההשקעה בכל נכס?

ה. בהמשך לסעיף ד, מה תהיה תוחלתת התשואה של תיק זה?

ו. מהי תוחלתת התשואה וסטטיסטית התקן של תשואת תיק השקעות המורכב מההשקעה במשקל של 25% בנכס א, 55% בנכס ב והיתרה בנכס ג?

פתרון :

הבה נסדר את הנתונים תחילה :

ג	ב	א	
22%	15%	10%	תוחלתת $E(R)$
40%	30%	20%	סטטיסטית התקן $\sigma(R)$

בנוסף ידוע כי :

$$\rho(g, b) = 0 \quad \rho(g, a) = 1 \quad \rho(b, a) = -1$$

נדרש א: מהי סטטיסטית התקן ותוחלתת התשואה של תיק השקעות המורכב מכל שילוב אפשרי של שני נכסים במשקלים שווים?

הנוסחה לחישוב תוחלת תשואה של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים היא :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

הנוסחה לחישוב סטיית תקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים היא :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho}$$

במקרים שבהם מקדם המתאים בעל ערכיים "שלמים" הנוסחה הניל' שתקפה ל蹶ה הכללי מתקצתה :

$$\rho = +1 \rightarrow \sigma(P) = W_A \sigma_A + W_B \sigma_B$$

$$\rho = 0 \rightarrow \sigma(P) = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2}$$

$$\rho = -1 \rightarrow \sigma(P) = |W_A \sigma_A - W_B \sigma_B|$$

נציב בנוסחת התוחלת. נשים לב שאמרו בשאלת שהמשקלים של הנכסים בתיק שווים – כולל בכל נכס נקייע 50% מכسطנו.

$$E(\text{ב,א}) = 50\% * 10\% + 50\% * 15\% = 12.5\%$$

$$E(\text{ג,ב}) = 50\% * 15\% + 50\% * 22\% = 18.5\%$$

$$E(\text{ג,א}) = 50\% * 10\% + 50\% * 22\% = 16\%$$

ג	ב	א	
22%	15%	10%	$E(R)$
40%	30%	20%	$\sigma(R)$

$$\rho(g, b) = 0 \quad \rho(g, a) = 1 \quad \rho(a, b) = -1$$

כעת נציב בנוסחת סטיית התקן השלמה המלאה כדי למצוא את הערכים הרלוונטיים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho}$$

$$\sigma(g, b) = \sqrt{0.5^2 * 0.2^2 + 0.5^2 * 0.3^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * 0.2 * 0.3 * 0} \approx 18\%$$

$$\sigma(g, a) = \sqrt{0.5^2 * 0.3^2 + 0.5^2 * 0.4^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * 0.3 * 0.4 * 1} = 35\%$$

$$\sigma(a, b) = \sqrt{0.5^2 * 0.2^2 + 0.5^2 * 0.4^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * 0.2 * 0.4 * (-1)} = 10\%$$

בסיס לנדרש הבא (חצגה גרפית) נרכז את הממצאים :

ג,א	ב,ג	א,ב	
16%	18.5%	12.5%	$E(R)$
10%	35%	18%	$\sigma(R)$

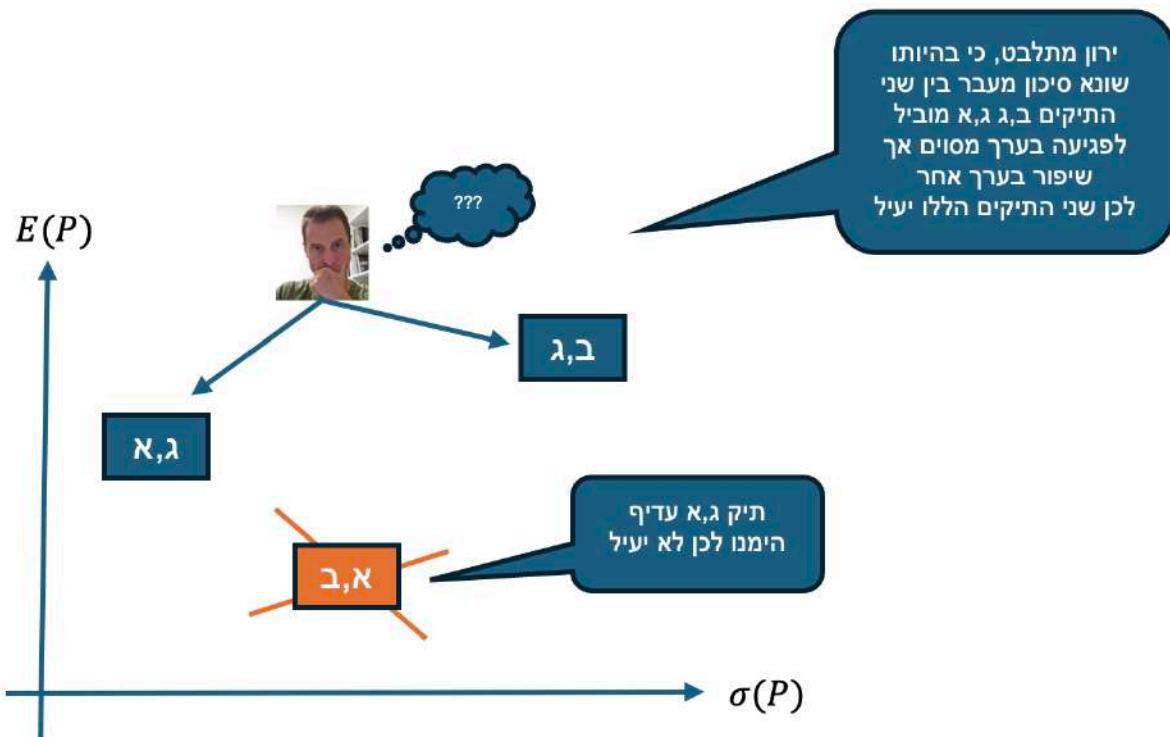
נדרש ב : הציגו את התיקים הספציפיים שנוצרו באופן גרפי

+

נדרש ג : בהנחה שהאלוץ המוצג בסעיף א הוא קשיח מה התיקים היעילים ביניהם יבחר המשקיע מ בין

האפשרויות בסעיפים א,ב

התיק המורכב משילוב א-ב לא יעיל ולא יבחר על ידי המשקיע. יחד עם זאת, לא נוכל לקבוע באופן חד משמעי האם המשקיע יבחר בתיק ב,ג או ג,א נימוק בתרשים מטה.



נדרש ד : הניחו כי משקיע אחר מעוניין בתיק בעל סטיית תקן אפס ואינו מוגבל להשקעה. מהו משקל ההשקעה בכלל נכס?

**נדרש ה:** בהמשך לסעיף ד, מה תהיה תוחלת התשואה של תיק זה?

א	ב	ג	
22%	15%	10%	תוחלת $E(R)$
40%	30%	20%	סטיית תקן $\sigma(R)$

$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \quad \rho(\mathbf{b}, \mathbf{a}) = 1 \quad \rho(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = -1$$

על בסיס נוסחת משקל ההשקעה בתיק מינימום סיכון :

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B} \rightarrow W_B^{MRP} = 1 - W_A^{MRP}$$

נצח ונצח :

$$W_A^{MRP} = \frac{0.4^2 - (-1) * 0.2 * 0.4}{0.2^2 + 0.4^2 - 2 * (-1) * 0.2 * 0.4} = \frac{2}{3} \rightarrow W_C^{MRP} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

את תוחלת התשואה של תיק ההשקעות חסר הסיכון המורכב משני הנכסים מסווגנים הנ"ל במשקלים שגילינו :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_C * E(C) \rightarrow \frac{2}{3} * 0.1 + \frac{1}{3} * 0.22 = 14\%$$

נדרשו : מהי תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק השקעות המורכב מהשקעה במשקל של 25% בנכש  
א, 55% בנכש ויתריה בנכש ג?

תוחלת התשואה של תיק השקעות המורכב מ-3 נכסים מסווגנים היא :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B) + W_C * E(C) \rightarrow 0.25 * 0.1 + 0.55 * 0.15 + 0.2 * 0.22 = 15.15\%$$

סטיית התקן של תיק המורכב מ-3 נכסים מסווגנים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

בהתבאה (הוائل ומשקיעים 25% ב-א, ו-55% ב-ב, סה"כ 80%, נותרים עם 20% להשקעה בנכס ג, ולכן נציג בגין

$$(W_C = 0.2 = 20\%)$$

$$\sigma(P) = \sqrt{0.25^2 * 0.2^2 + 0.55^2 * 0.3^2 + 0.2^2 * 0.4^2 + 2 * 0.25 * 0.55 * 0.2 * 0.3 * 0 + 2 * 0.25 * 0.2 * 0.25 * 0.4 * 0.1 + 2 * 0.55 * 0.2 * 0.3 * 0.4 * 1}$$

ומתקבלים :

$$\sigma(P) = 25.204\%$$

מסקנה : סטיית התקן של התיק המשולב היא 25.204%.

**שאלה 61.3 – תיקי השקעות המורכבים משני נכסים מסווגנים ואי תלות בהקשר למקדם המתאים נתונות שתי מניות, לגבין ידוע כי :**

$$E(A) = E(B) = 30\%$$

$$\sigma(A) = 20\%$$

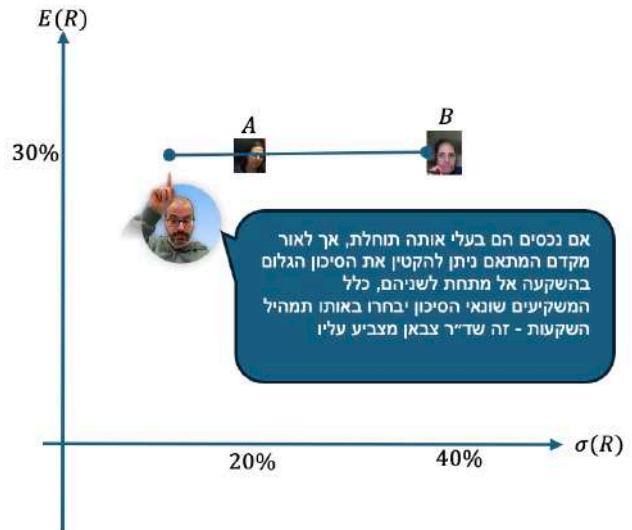
$$\sigma(B) = 40\%$$

כמו כן ידוע כי אין תלות בין תשואת המניות.

נדרש :

- א. הציגו את עוקם ותיקי ההשקעות האפשריים באופן סכמטי.
- ב. סמן על גבי העוקם את התיקים הייעילים והתיקים שאינם יעילים.
- ג. האם ניתן לומר שככל התיקים על העוקם עדיפים מנכס A?
- ד. האם ניתן לומר שככל התיקים על העוקם עדיפים מנכס B?
- ה. האם ניתן לומר שבאופן כללי, כל שילוב בין הנכסים עדיף על השקעה של 100% באחד מהם בלבד?

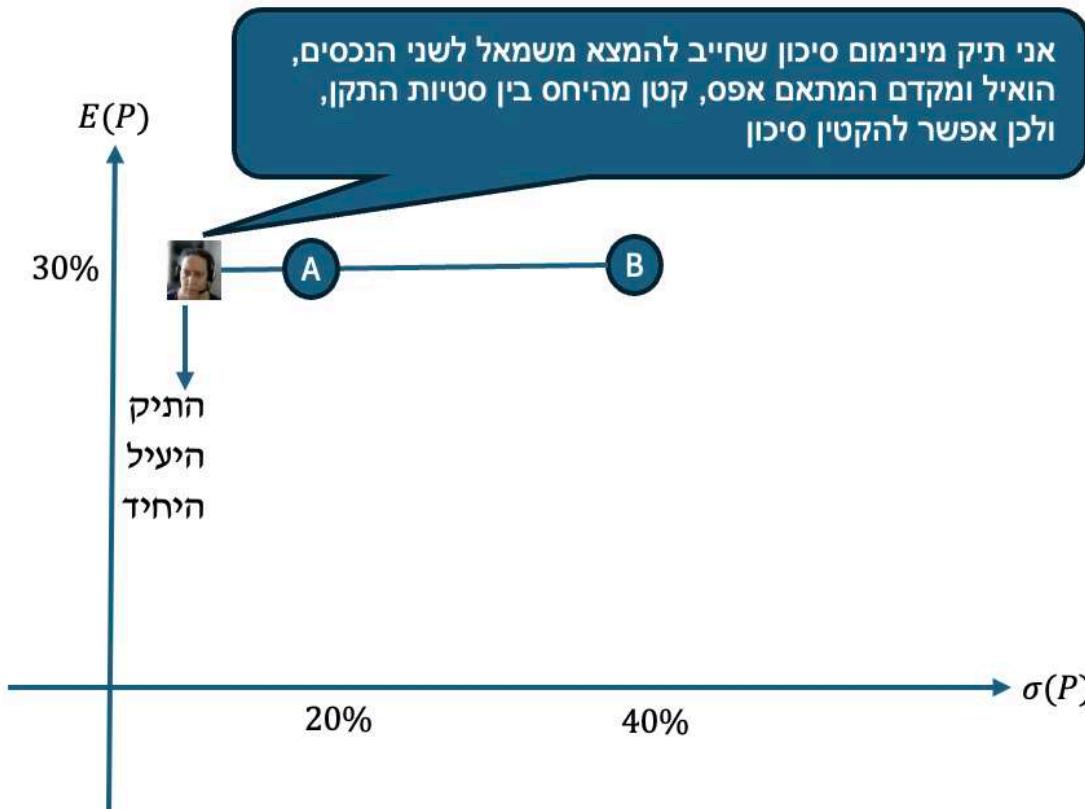
פתרון :



כמו תמיד, אם אני מקבל נתונים לגבי תוחלת וסטיות תקן של נכסים שונים, ומעוניין לבחון את היעילות, עליי לאיר את התיקים במרקח תוחלת / סטיות תקן, ולראות לפי Urk מקדם המתאים – מהן אפשרויות ההשקה. במקרה זה, לשני הנכסים תוחלת זהה אך סיכון שונה. לכן המיקום שלהם הוא באותה נקודה ביחס לציר האנכי, כמפורט בעמוד הבא.

בנוסף, מהטיעון לפיו אין תלות בין הנכסים / המניות מסיקים מיידית שערך מקדם המתאים בין הנכסים 0. הואיל וסטיות התקן של הנכסים חיוביות, מקדם מתאים זה מבטיח שnitin את הסיכון אל מתחת לסיכון של הנכסים הבודדים בתיק. כלומר, ניתן ליצור תיקים שישוכנים נמוך مثل A וגם נמוך مثل B. בrama הגרפית, זה אומר שתיק מינימום סיכון נמצא על הקו היישר המחבר בין B ל-A וחורג / פורץ שמאלה (משמאלו ל-A) כדי לשקף את הקיטוע האפשרי בסיכון.

הואיל ותיק מינימום סיכון הוא תיק ייעיל; וכדי למצוא תיקים יעילים אחרים נדרש שיימצאו תיקים מעל תיק זה ומימינו – ואין כמובן – אנו במקרה מעוניין שבו התקיק הייעיל היחיד הוא תיק מינימום סיכון, הכולל שילוב ספציפי בין הנכסים וכל שונאי הסיכון יבחרו בו. תיק זה מסומן בתרשים באמצעות התמונה של מוש.



א. הציגו את עקום תיקי ההשקעות האפשריים באופן סכמטי.  
בוצע לעיל.

ב. סמן על גבי העקום את התיקים היעילים והתיקים שאינם יעילים.  
רק תיק מינימום סיכון יעיל – הנמקות לעיל.

ג. אם ניתן לומר שככל התיקים על העקום עדיפים מנקס A?  
רק התיקים שמושمال ל-A (עד וככל תיק מינימום סיכון) עדיפים על A, ומתוכם – כאמור – רק תיק מינימום סיכון יעיל.

ד. אם ניתן לומר שככל התיקים על העקום עדיפים מנקס B?  
בוחלט כן. B המסוכן ביותר, למרות שתוחלתו זהה לשול כל היתר.

ה. אם ניתן לומר שבאופן כללי, כל שילוב בין הנכסים עדיף על השקעה של 100% באחד מהם בלבד.  
שלילי. ישנים שילובי השקעות שנמצאים מימיין לנಕודה A והם נחותים מ-100% השקעה ב-A.

**שאלה 4.61 – היגדים שונים לגבי הקשר בין מקדם המתאים והסיכון**  
לפניכם מספר טענות. עלייכם לאייר את כל הטענות הנכונות:

טענה 1 : סיכון נמדד על ידי שונות או סטיית תקן

טענה 2 : השונות היא השורש של סטיית התקן

טענה 3 : כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסוכנים (כגון מנויות) הוא חיובי, תמיד ניתן להקטין סיכון

טענה 4 : כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסוכנים (כגון מנויות) הוא אי-חיובי (אפס או שלילי), תמיד ניתן

להקטין סיכון

טענה 5 : כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסוכנים הוא 1, כל תיק שנבנה בשוק יהיה בעל סיכון אפס

פתרון :

נדון בכל טענה בנפרד :

**טענה 1 : סיכון נמדד על ידי שונות או סטיית תקן**

הטענה נכונה. אנו מודדים סיכון לאו דווקא בהיבט של "סיכוי להפסיד" או "ערכים שליליים". סיכון מבחןינו

בקורס משמעו "פיזור" : האם ועד כמה תוצאות של פרויקט / תזרימי מזומנים / ערכי הגרלה / תשואת מנויות

יכולים להיות גבוהים / נמוכים ממשמעותית מהתוחלת.

השונות שהיא ממד סיכון מקובל – בוחנת את ההפרשים בריבוע, וסטיית התקן – היא שורש השונות. שניהם ממדדי סיכון מקובלים.

**טענה 2 : השונות היא השורש של סטיית התקן**

הטענה שוגה. סטיית התקן היא שורש השונות (או : שונות היא סטיית התקן בריבוע).

**טענה 3 : כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסוכנים (כגון מנויות) הוא חיובי, תמיד ניתן להקטין סיכון**

הטענה שוגה. התנאי להקטנת הסיכון הוא שמקדם המתאים קטן מהיחס בין סטיות התקן – ובפרט, קטן

מהיחס בין סטיית התקן הנמוכה לבין סטיית התקן הגבוהה :

$$\rho < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$$

כאשר מקדם המתאים חיובי, לא נוכל לקבוע (לא נתונים מפורשים בדבר ערכו וערכי סטיות התקן) האם התנאי

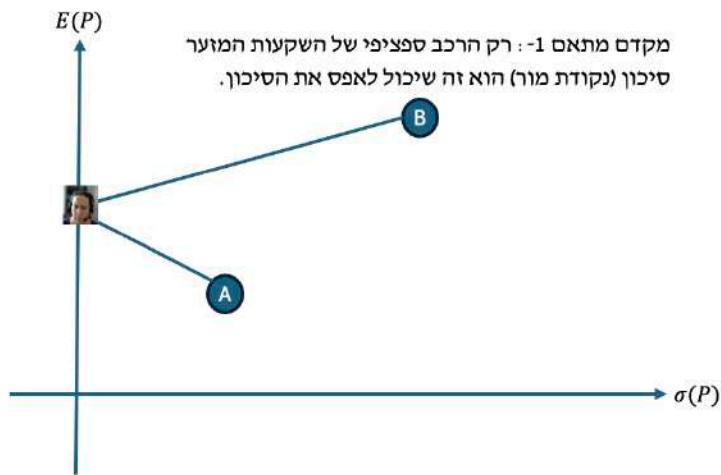
מתקיים ובהתאם – לא נוכל לדעת האם ניתן להקטין סיכון (כמובן : אם מקדם המתאים אפס או שלילי ניתן

להקטין סיכון גם ללא בדיקת ערכיהם ממשותיים).

**טענה 4 : כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסוכנים (כגון מנויות) הוא אי-חיובי (אפס או שלילי), תמיד ניתן להקטין סיכון**

הטענה נכונה. מקדם מתאים אי-חיובי משמעו קיום התנאי לעיל המאפשר הקטנת הסיכון, וזאת משום שהיחס בין סטיות התקן של נכסים מסוכנים חיובי תמיד.

**טענה 5 : כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסווגים הוא 1-, כל תיק שנבנה בשוק יהיה בעל סיכון אפס**  
**הטענה שגויה : לא כל תיק יש תיק ספציפי.**



**שאלה 61.5 – תיקי השקעות המורכבים משני נכסים מסווגים כאשר מקדם המתאים שלילי מושלם**  
**נתונות שתי מניות, לבגין ידוע כי :**

$$E(A) = 10\%$$

$$E(B) = 18\%$$

$$\sigma(A) = 20\%$$

$$\sigma(B) = 40\%$$

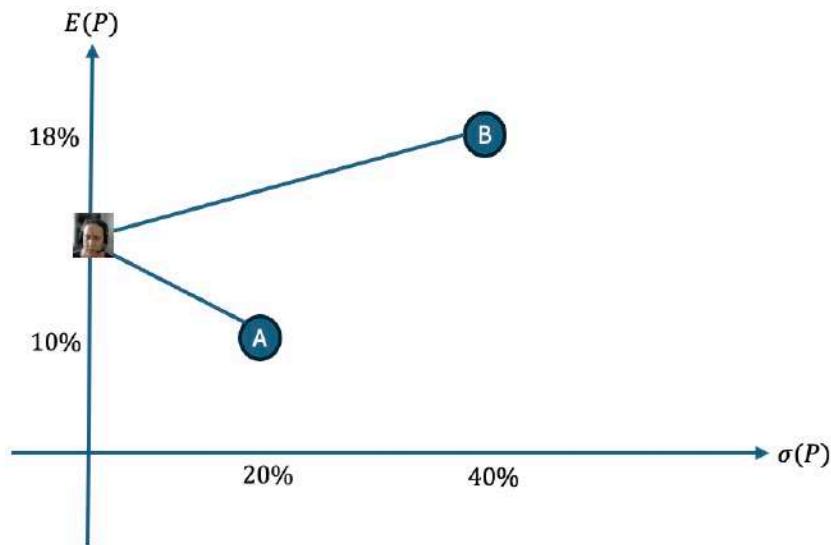
כמו כן ידוע כי מקדם המתאים בין תשואות המניות הוא מקדם מתאים שלילי מושלם כלומר מתקיים  $1 - \rho$

**נדרש :**

איירו את העקום המיצג את תמהילי ההשקעה האפשריים, וזהו באופן כמותי את משקליה ההשקעה בכל נכס שיביאו את המשקיע לתיקיע.

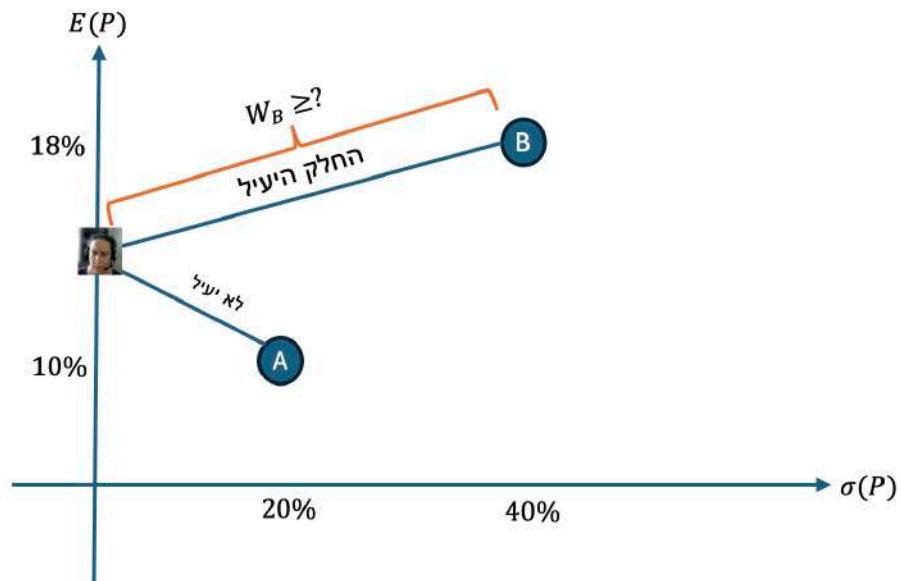
**פתרון :**

בשלב ראשון, נdag להציג סכמתית של עקום תמהילי ההשקעה האפשריים. נמקם את שני הנכסים באופן ייחסי זה מול זה בתרשים שצирו האופקי תוחלת וצירו האנכי סטיית תקן, ונויער בהבנה שלפיה ניתן לאפס את הסיכון כאשר מקדם המתאים בין הנכסים 1-, כדי לאייר :



ועכשיו – מה פשר הנדרש "זהו באופן כמותי את משקל ה השקעה בכל נכס שיביאו את המשקיע לתיקיע"?

הואיל ויעילות מתקינה מינימום סיכון וכן בכל הנקודות ימינה ומעלה, אם נזזה את משקל ה השקעה (האחוז מכספי המשקיע שנוטב לכל אחד מהנכסים מסווגים כדי להגיע לתיק מינימום סיכון) נוכל לקבוע בהתייחס אליהם – מהם המשקלים האפשריים שייצרו תיקיע:



ננסה למצוא את משקל ה השקעה (האחוז מכספי המשקיע) שנוטב לנכס B בתיק מינימום סיכון – קיימת נוסחה יעודית לעניין:

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B} \rightarrow W_B^{MRP} = 1 - W_A^{MRP}$$

כאשר :

סימן	
האחוז מכספי המשקיע שנutowב לנכס A כדי להגיע לתיק מינימום סיכון :	$W_A^{MRP}$
<i>Weight of asset A in Minimum Risk Portfolio</i>	
סטיות התקן ברכיב (השוניות) של נכס A ושל נכס B בהתאם.	$\sigma_A^2 \quad \sigma_B^2$
מקדם המתאים בין הנכסים (נקרא רוח – Rho).	$\rho$

$$W_A^{MRP} = \frac{0.4^2 - (-1) * 0.2 * 0.4}{0.2^2 + 0.4^2 - 2 * (-1) * 0.2 * 0.4} = \frac{2}{3} \rightarrow W_B^{MRP} = \frac{1}{3}$$

מסקנה : כלל המשקיעים שונאי הסיכון יבחרו לנטב 1/3 או יותר מכספי לנכס B ובהתאם 2/3 או פחות מכספי לנכס A.

## שאלה 62

לפניכם התפלגות התשואה של 2 מניות - יש להניח שהתשואות בלתי תלויות (מקדם מותאם 0) :

טבלה בהסתברות זו	הסתברות	מניה
10%	0.4	A
20%	0.6	
-10%	0.3	B
30%	0.7	

נדרש :

- חשבו את תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל מניה.
- חשבו את תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק המורכב מ-65% השקעה ב-A ו-35% השקעה ב-B.
- חשבו את מאפייני תיק מינימום סיכון (תוחלת ו.ת.תקן) שנitin לבנות על בסיס שילוב הנכסים.
- הסבירו איזו מבין חלופות ההשקעה יעדיף משקיע שונאי סיכון בהתאם לקריטריון תוחלת-שונות.

פתרון :

**פתרון נדרש א - תוחלת התשואה וסטיית התקן של כל נכס בנפרד**

$$E(A) = 0.4 * 0.1 + 0.6 * 0.2 = 0.16 = 16\%$$

$$\sigma(A) = \sqrt{0.4 * (0.1 - 0.16)^2 + 0.6 * (0.2 - 0.16)^2} \approx 0.05 = 5\%$$

$$E(B) = 0.3 * (-0.1) + 0.7 * 0.3 = 0.18 = 18\%$$

$$\sigma(B) = \sqrt{0.3 * (-0.1 - 0.18)^2 + 0.7 * (0.3 - 0.18)^2} \approx 0.1833 = 18.33\%$$

**פתרון נדרש ב - תוחלת תשואה וסטיית התקן של תיק השקעות**

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

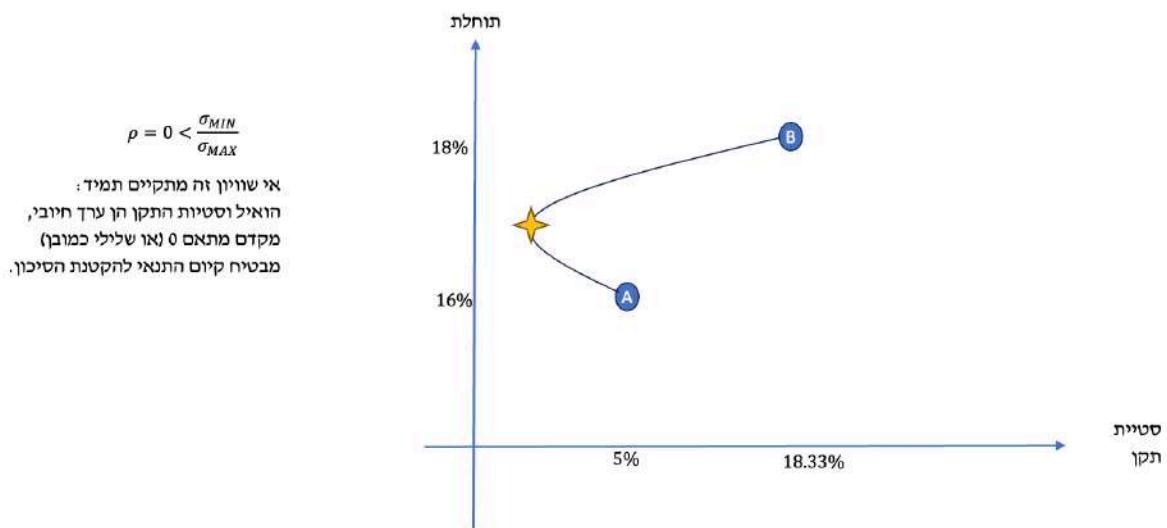
$$E(P) = 0.65 * 0.16 + 0.35 * 0.18 = 0.167 = 16.7\%$$

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

$$\sigma(P) = \sqrt{0.65^2 * 0.05^2 + 0.35^2 * 0.1833^2 + 2 * 0.65 * 0.35 * 0.05 * 0.1833 * 0} \approx 7.192\%$$

**פתרון נדרש ג - תיק מינימום סיכון**

כאשר מקדם המתאים קטן מלהיחס בין סטיות התקן (וכאן מתקיים, כי מקדם המתאים אפס), אפיון תיק מינימום סיכון דורש יישום הנוסחה הבאה :



על מנת למצוא בואפן כמותי את משקל ההשקעה בנכס A בתיק מינימום סיכון علينا להשתמש בנוסחה הבאה :

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B}$$

כאשר  $W_A^{MRP}$  הוא משקל ההשקעה W בנכס A בתיק מינימום סיכון (MRP - Minimum Risk Portfolio).

בהתבסת נתונים השאלה והנתונים שחושו לעיל נקבע את משקל ההשקעה בנכס A שמצווע סיכון :

$$W_A^{MRP} = \frac{0.1833^2 - 0 * 0.05 * 0.1833}{0.05^2 + 0.1833^2 - 2 * 0 * 0.05 * 0.1833} \approx 0.931 = 93.1\%$$

את שארית כספו נשקיע בנכס B :

$$W_B^{MRP} = 1 - W_A^{MRP} = 1 - 0.931 = 6.9\%$$

כדי לחשב את התוחלת וסטיית התקן של תיק זה :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

$$E(MRP) = 0.931 * 0.16 + 0.069 * 0.18 = 16.138\%$$

סטיית התקן של תיק זה :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

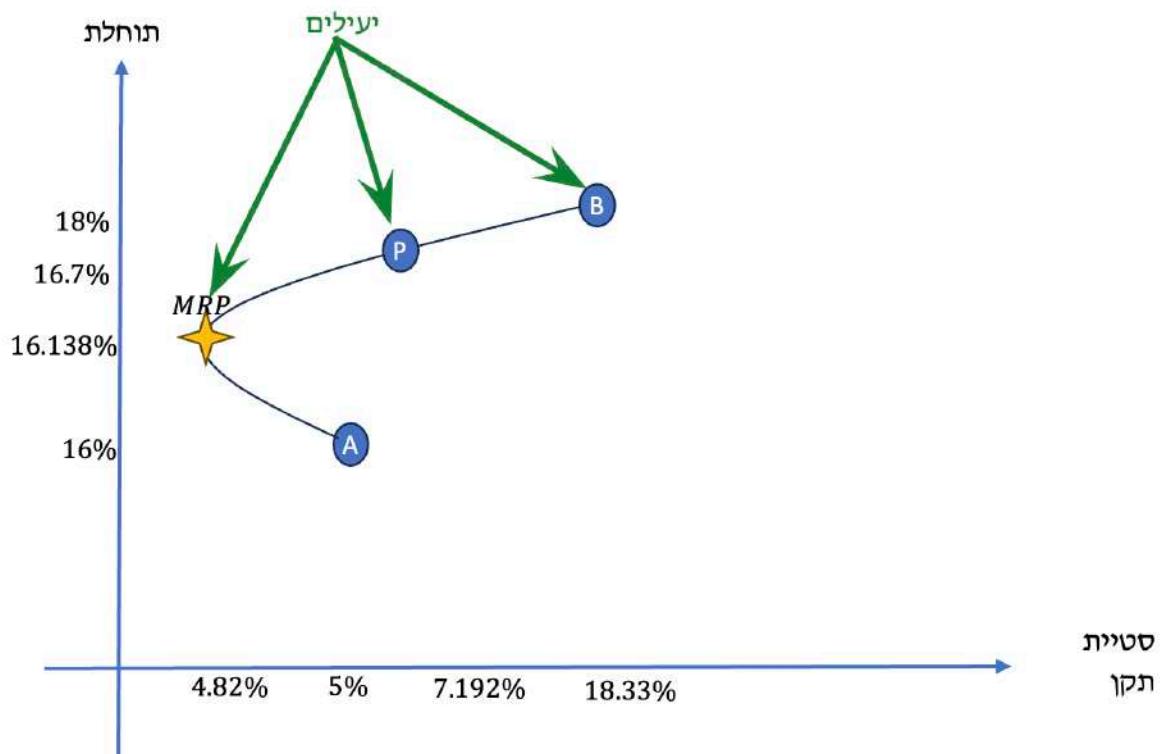
$$\sigma(MRP) = \sqrt{0.931^2 * 0.05^2 + 0.069^2 * 0.1833^2 + 2 * 0.931 * 0.069 * 0.05 * 0.1833 * 0} \approx 4.82\%$$

#### פתרונות דרש ד - בחירת המשקיע

כאשר האיור בידי, ועליו תמהילי ההשקעה האפשריים (כאן - הם P, A, B, ו- MRP), משתמש במשפט: תики ההשקעות היעילים שאוותם ישקל המשקיע, מתחילה מתיק מינימום סיכון (כוכב, MRP) וממשיכים ימינה ומעלה.

משכך, נכס A זוהה כנכס נחות. הוא לא יבחר על ידי שונאי סיכון הפעלים לפי קритריון תוחלת שונות.

לעומת זאת, לא נוכל להכריע בין תики ההשקעות האחרים לפי המודל.



**שאלה 55.9.8 – שילוב בין נכסים מסוכנים – המקרה של סטיות תקן זהות ותוחלות שונות**  
 שני נכסים A ו-B הם בעלי סטיית תקן זהה. יחד עם זאת, תוחלת התשואה של A גבוהה יותר מתוחלת התשואה של B. כמו כן ידוע שמקדם המתאים בין הנכסים הוא 0.3-  
 לפניכם מספר טענות. סמןו את הנכונה:

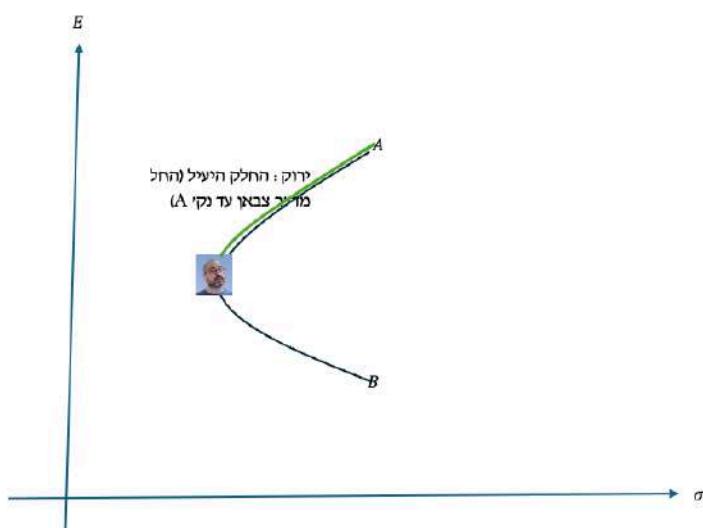
- כל המשקיעים שונים היסICON יבחרו באותו תיק השקעות
- כל המשקיעים שונים היסICON יבחרו להשקיע את כל כספם בנכס A
- כל המשקיעים שונים היסICON יבחרו בתיק המשלב בין A ל-B (לא קיים אף מSCIeu שונאי סICON שנinetב 100% מכיספו לאחד מבין הנכסים בלבד)
- כל המשקיעים שונים היסICON יבחרו בתיק מינימום סICON
- חלק מהמשקיעים שונים היסICON יבחרו להשקיע את כל כספם בנכס A

דיון:

טענה A שגوية – המצביע היחיד שבו כולם יבחרו באותו תיק השקעות הוא כאשר יש תיקיע אחד ויחיד בלבד.  
 טענה B שגوية – לא רק A ייעיל; יש ספקטרום רחב של תיקי השקעות מנק' A עד וככל מיני סICON שהן ייעילות.  
 טענה C שגوية – אמנם השקעה של 100% ב-B איננה ייעילה; אבל השקעה של 100% ב-A היא כן ייעילה. זה לא אומר שכולם יבחרו בה; אבל זה כן אומר שנשலול טענה שאומרת שכל המשקיעים ישלבו בין הנכסים שחררי חלקם בהחלט עשויים לבחור ב-A בלבד.

טענה D שגوية – תיק מינימום סICON (המאoir במאיצעות התמונה של ד"ר צבן) הוא רק אחת מבין אפשרויות ההשקעה הייעילות במקרה הזה.

**טענה ה נפונה** – נכס A הוא אחת מבין אפשרויות ההשקעה הייעילות. אמנם לא נוכל להגיד שכל המשקיעים שונאי היסICON יבחרו בו (בהתנן אפשרויות השקעה הייעילות נוספות) אבל חלק – בהחלט כן.

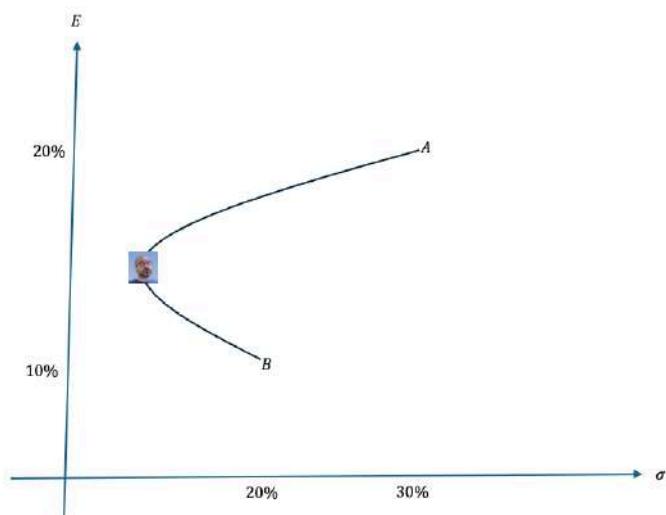


**שאלה 55.9.9 – בחירה בין מנויות בודדות ותיקים מסוכנים ספציפיים**

משקיע יכול להשקיע במניה A בלבד, שתוחלתה 20% וסטיית התקן שלה 30%.  
 לחייבין הוא יכול להשקיע במניה B בלבד, שתוחלתה 10% וסטיית התקן שלה 20%.  
 כמו כן, הוא יכול להשקיע בשילוב של המנויות, אך זאת, אך ורק בכפוף לאלוצים הבאים:  
 אפשרות 1: תיק הבניי מניות A ו-B בפרופורציות שוות.  
 אפשרות 2: השקעה בתיק מינימום שונות.  
 הינו שקדם המתאים בין תשואת המנויות הוא אפס.

נדרש:

מי מבין חלופות ההשקעה תועדף על ידי המשקיע לפי תוחלת-שונות (בהתוחלת שנאות סיכון).



קיימת נוסחה המאפשרת לקבוע את משקל ההשקעה (האחוז מכסי המשקיע שנutowב לכל נס) עבור תיק מינימום סיכון. הנוסחה היא פונקציה של סיכון הנכדים הבודדים וגם מקדם המתאים ביניהם.

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B}$$

כאשר האות  $W$  מייצגת בהקשר זה את האחוז מכיספי המשקיע שינוותב לנכס A כדי להגיע לתיק מינימום סיכון – Minimum Risk Portfolio = MRP

$$W_A^{MRP} = \frac{0.2^2 - 0 * 0.3 * 0.2}{0.3^2 + 0.2^2 - 2 * 0 * 0.3 * 0.2}$$

$$W_A^{MRP} = 0.3 \rightarrow W_B^{MRP} = 0.7$$

כעת, כל שעלי לעשות הוא להציב ערכיהם אלו במשוואות תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים ונקבל:

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B) \rightarrow E(MRP) = 0.3 * 0.2 + 0.7 * 0.1 = 13\%$$

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B * \rho} \rightarrow \sigma(MRP) = \sqrt{0.3^2 * 0.3^2 + 0.7^2 * 0.2^2 + 0} = 16.66\%$$

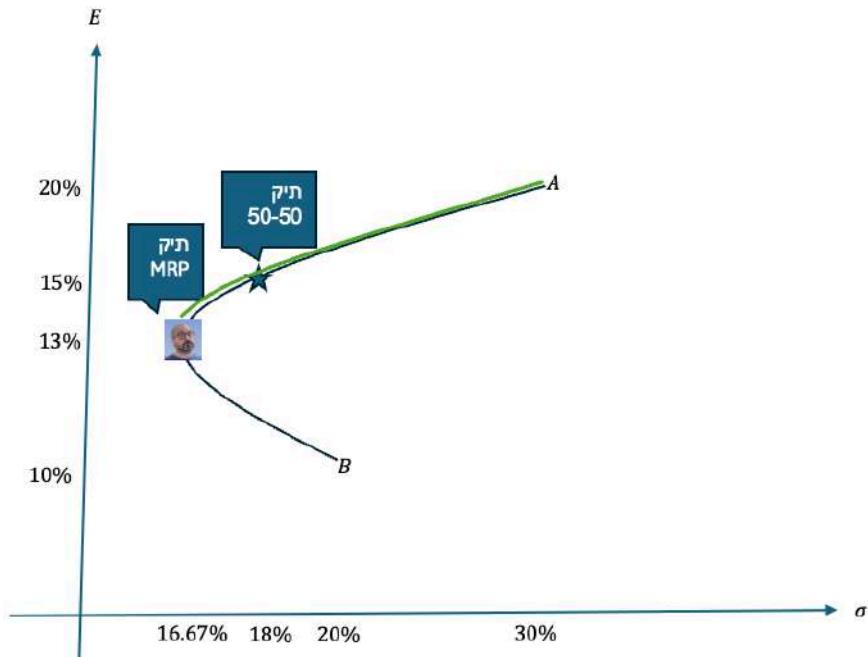
כמובן שבקשו את אותו הדבר אבל עבור משקלי השקעה של 50% בכל נכס :

$$E(MRP) = 0.5 * 0.2 + 0.5 * 0.1 = 15\%$$

$$\sigma(MRP) = \sqrt{0.5^2 * 0.3^2 + 0.5^2 * 0.2^2 + 0} = 18.027\%$$

רכיבו הממצאים לכל 4 אפשרויות ההשקעה :

ס. התקן	תוחלת	
30%	20%	השקעה ב-A בלבד
20%	10%	ההשקעה ב-B בלבד
16.66%	13%	ההשקעה בתיק מינימום סיכון MRP
18.027%	15%	ההשקעה בתיק בפרופורציות זהות



לענין הבחירה בין 4 האפשרויות, אפשר לשים לב לכך שגם תיק מינימום סיICON ייעיל (וזה תמיד כך), גם תיק - 50-50 ייעיל (במקרה זה) וגם השקעה של 100% ב-A ייעילה. לא נוכל לדרג חלופות אלו, שהבחירה ביןיהם תלויה בטעמי המשקיע שהוא הסיICON.

הדבר היחיד שנוכל לומר הוא שההשקעה של 100% ב-B היא השקעה נחותה ; לא ייעילה, ואף שונא סיICON לא יבחר בה.

## מפגש 6 - גישת תיקי השקעות – 12.1.2025

### מודל חדש (אחרון וענק) לניהול תיקי השקעות - מודל ה - CAPM

המודל לניהול תיקי השקעות מסוכנים שהוצע במפגש קודם, דן בתיקי השקעות הכלולים נכסים מסוכנים בלבד (ובדרך כלל - שני נכסים מסוכנים בלבד) הוא מודל פשוט : הוא מניח **שלא קיימים בעולם נכסים חסרי סיICON** (כגון אגרות חוב ממשלתיות), וכן כי לא ניתן ליטול הלוואות - כלומר, המשקיע מוגבל להשקעת הונו הראשוני בלבד.

בعالם האמיתי - ישנים גם **נכסים לא מסוכנים**, ובנוסף - בחלטת **ניתן ליטול הלוואות לטובת מימון השקעות** (מינוף פיננסי). כדי לכלול אפשרויות אלו במודל באופן מלא, אנו עוסקים במודל בגרסה המורחבת - מודל ה- **CAPM**, ראשי התיבות של: **Capital Asset Pricing Model** - מודל תמהור נכסים הון.

### הנחות מודל ה- CAPM:

- כל השקיעים שונאי סיכון (כמו כל מודל ניהול תיקי השקעות).
- חדש!!! ניתן להפקיד / להשקיע כל סכום **בנכס חסר סיכון** (ודוגמא / הקבלה לכך היא אג"ח ממשלתי).

תשואתו של נכס חסר סיכון מסומנת ב-  $R_F$ .

- חדש!!! ניתן **ללוות** כל סכום בריבית חסרת סיכון.
- כאשר השקיעים **מושגניים** **לUMB** **חלק מהתיק** (עבור הגדלת תוחלת תשואה) - הם ישייעו אותו בתיק מסוכן "מיוחד" שנקרא **"תיק השוק"** ואשר מסומן באות **M**. למשל, בשוק הישראלי, המקבילה לתיק השוק היא מדד **TIA 125**, שמקביל את המניות הגדולות במשק הישראלי, בפייזור רחב שמקטין סיכון. בשאלות שאנו נפתחו, תיק זה יהיה נתנו או מוחלץ (לא נדרש לחשבוโดย ישיר).

**از בעצם: במודל ה- CAPM כל התיקים היעילים כוללים: השקעה ב"תיק השוק" / בנכס חסר סיכון / נטילת הלוואות. אפשרויות אלו מושנות לממרי את המבנה המתמטית של עיקום התיקים היעילים.**

בعالם המקיים את הנחות ה- CAPM, יש מספר נוסחאות שמתקינות ומאפיינות **תיקי השקעות יעילים**:

**נוסחה 1 - נוסחת משקל השקעה בתיק יעיל - במודל ה- CAPM**

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

כאשר:

הערך  $E(P)$  הוא תוחלת התשואה של תיק יעיל בהנחות המודל.

הערך  $W_F$  הוא השיעור (האחוז) מכיספי המשקיע שמושקע בנכס חסר סיכון. המצביעים האפשריים לגבי ערכי משתנה זה הם:

$W_F > 0$  המשקיע מנתב חלק מכספיו לנכס חסר סיכון.

$W_F = 100\%$  המשקיע מנתב את כל כספו לנכס חסר סיכון.

$W_F < 0$  המשקיע נוטל (לוקח) הלוואה בריבית חסרת סיכון.

הערך  $R_F$  מהווה את הריבית חסרת הסיכון, בדרך כלל נתונה / מוחלצת.

הערך  $W_M$  הוא השיעור (האחוז) מכיספי שמושקע בתיק השוק (התמיהיל המסוגן האידאלי בהנחות המודל).

תמיד מתקיים ש:  $W_M = 1 - W_F$

הערך  $E(M)$  הוא תוחלת התשואה של תיק השוק.

**נוסחה 2 - נוסחת תוחלת תיקים יעילים לפי נוסחת "הקו הירוש" במודל ה- CAPM - קו ה- CML**

המונח CML מhoeva את ראשית התיבות של Capital Market Line. קו שוק ההון. זהו תיאור גרפי שמייצג את הקשר בין רמת הסיכון בנכסים לבין��ל (סטטיסטית התקן) לבין תוחלת התשואה.

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

כאשר :

הערך  $\sigma_M$  מhoeva את סטטיסטית התקן של תיק השוק. בדרך כלל נתון או מחולץ.

הערך  $\sigma_P$  מhoeva את סטטיסטית התקן של התקן היעיל.

### נוסחה 3 - נוסחת סטטיסטית התקן של תיק ייעיל - במודל ה - CAPM

הואיל ותיק ייעיל במודל ה - CAPM מורכב רק משילוב נכס חסר סיכון  $R_F$  שסיכוןו 0, ומתיק השוק שסיכוןו  $\sigma_M$ , הרי שסטטיסטית התקן של תיק ייעיל מושפעת מהתיעור המושקע בתיק השוק - ומסיכון השוק :

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

### נוסחה 4 - נוסחה נוספת לסטטיסטית התקן של תיק ייעיל - מבוססת ביטה - במודל ה - CAPM

ביטה היא ממד סיכון הבוחן את הסיכון היחסי של התקן ביחס לשוק (מקדם הסיכון השיטתי). כאשר התקן ייעיל, ניתן להיעזר בנתונו הביטאי כדי לחשב את סיכון התקן כדלקמן :

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M$$

כאשר :

הערך  $\beta_P$  הוא ערך שעל פי רוב לא מחשבים ישירות (אלא נתון / מחולץ) והוא משקף את הסיכון היחסי של התקן ייעיל ביחס לשוק. כלומר : ביטה גדולה מ-1 מושמעה "התיק מסוכן יותר מהשוק", וביטה קטנה מ-1 מושמעה "התיק מסוכן פחות השוק", וביטה שווה ל-1 מושמעה "התיק מסוכן כמו השוק".

## שאלה 62.1 - משללים בתיק השקעות עיל – לעבור במפגש 2025א

בمشק נתון כי שער הריבית חסר הסיכון הוא  $R_F = 10\%$   
כמו כן, ידוע כי:

$$E(M) = 30\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

$$\text{משקיע מעוניין ליצור תיק השקעות בעל תוחלת תשואה של } E(P) = 60\%.$$

לפי גישת תיק ההשקעות המתאימה במצב כזה, הרי ש:

- א. תיק ההשקעות איננו ניתן להשגה, שהרי תוחלת תיק השוק היא 30% והוא התקרה לתשואה בשוק זה.
- ב. על מנת להניב תוחלת תשואה זו, נדרש המשקיע ליטול הלוואה בשיעור 150% מהונו ולהשקיע 250% מהונו בתיק השוק.
- ג. על מנת להניב תוחלת תשואה זו, נדרש המשקיע ליטול הלוואה בשיעור 150% מהונו ולהשקיע את כספי הלוואה בלבד בתיק השוק.
- ד. על מנת להניב תוחלת תשואה זו, נדרש המשקיע ליטול הלוואה בשיעור 50% מהונו ולהשקיע את כל כספו לרבות כספי הלוואה בתיק השוק.
- ה. כל יתר הטענות שגויות.

פתרונות:

רקע וארגון נתונים: כל אימות שאני מתרשם מנתונים כগון - ריבית חסרת סיכון  $R_F$  ו/או תיק השוק  $M$  ו/או ביטה (שמשמעותה טרם הוצאה לעומק) אני יודע שאני במודל ה - CAPM.

לאחר שזיהיתי שאני ב - CAPM, א策ר לسؤال את עצמי: האם הדיוון כאן הוא בתיקים ייעילים / שאינם ייעילים?

אמנם כן - לא נאמר מפורשות האם תיק ייעיל / לא ייעיל, אך העובדה שמדובר בבחירה **משקיע** מובילה למסקנה שלא אם נאמר אחרת - המשקיע לא מטופטם, ויבחר בתיק ייעיל שיקים את אילוציו.  
נעתיק לכאן את הנושאות שאלוי רלוונטיות - כל אלו שעוסקות בתיקים ייעילים:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M$$

נתוני השאלה:

נתונים כלליים לשוק שבו המשקיע פועל (ריבית חסרת סיכון, תוחלת תשואת השוק, סטיית תקן של השוק):

$$R_F = 10\%$$

$$E(M) = 30\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

דרישות המשקיע - תוחלת התשואה של התקיק שהוא בוחר :

$$E(P) = 60\%$$

ונעבור לדיוון בטענות :

א. התקיק ההשקעות איננו ניתן להשגה, שהרוי תוחלת התקיק השוק היא 30% והיא התקקרה לתשואה בשוק זה.

הטענה **שגויה**. משום שהמודל מניח שנייתן ליטול הלוואות (מינוף). בהתאם להנחה המודל, המשקיע יכול ליטול ללא מגבלה הלוואות בריבית חסרת סיכון (10%) ולהשקיע את כספייה בתיק השוק (שמניב בתוחלת 30%). ההנחה שנייתן להתמנף ללא גבול כאמור מוביילה לכך שתיאורטית תוחלת התשואה האפשרית למשקיע היא בלתי מוגבלת (זאת בשונה ממודל בסיסי שבו מוגבלים לפצל את כספנו בין 2 נכסים מסוכנים, ללא הלוואות).

ב. על מנת להניב תוחלת תשואה זו, נדרש המשקיע ליטול הלוואה בשיעור 150% מהונו ולהשקיע 250% מהונו בתיק השוק.

הטענה **נכונה**. כדי לבחון את הטענה, צריך להשתמש בנוסחה שקובעת את משקל ה השקעה ( $W$ ) בתיק השוק ובנכס חסר סיכון, ולבצע חילוץ רלוונטי. מדובר בנוסחה ה-1 :

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

בhzבנה :

$$60\% = W_F * 10\% + W_M * 30\%$$

המודל קובע שככל התקיקים היעילים כוללים רק נכס חסר סיכון ותיק השוק :

$$W_F + W_M = 100\% \rightarrow W_M = 100\% - W_F$$

בhzבנה :

$$60\% = W_F * 10\% + (1 - W_F) * 30\%$$

הפתרון :

$$W_F = -150\%$$

סימן שלילי של שיעור השקעה בנכס חסר סיכון = הלוואה. המשקיע לווה במקרה זה סכום כספי מהוותה 150% מהונו הראשוני.

$$W_M = 100\% - W_F = 100\% - (-150\%) = 250\%$$

ולכן מסקנתנו היא: כדי להגיע לתיקיע עיל המניב תוחלת תשואה של 60% המשקיע נדרש ליטול הלוואה בשיעור של 150% מהונו הראשוני, ולהשקיע את כל הסכום (250% מהונו הראשוני) שככל 100% הון ראשוני בתוספת 150% לווה) בתיק השוק.

ג. על מנת להניב תוחלת תשואה זו, נדרש המשקיע ליטול הלוואה בשיעור 150% מהונו ולהشكיע את כספי הלוואה בלבד בתיק השוק.

הטענה **שגויה**. כלל הסכום כולל 100% מההון הראשוני יושקע בתיק השוק במצב כזה, ראו הסבר בסעיף ב לעיל.

ד. על מנת להניב תוחלת תשואה זו, נדרש המשקיע ליטול הלוואה בשיעור 50% מהונו ולהشكיע את כל כספו לרבות כספי הלוואה בתיק השוק.

הטענה **שגויה**. ראו לעיל.

לסיכוםון השאלה :

עליי ללימוד זהות מתי אני ב - CAPM, מתי אני עיל (אם נאמר או עפ"י בחרית משקיע), ולדעת באיזו נוסחה להציג על מנת לחץ את תמהיל / מאפייני התקין בהתאם לנדרשים / לאפשרויות המענה.

#### שאלה 62.2 - **חילוצים מבוססי נוסחאות – בעבר במפגש 2025**

נתונים שני תיקי השקעות עילים, C ו - D. תיק C צפוי להניב תוחלת תשואה גבוהה פי 4 מזו של תיק D אך סטיית התקן שלו גבוהה פי 6 מזו של תיק D. על פי נתונים אלו, **שער הריבית חסר הסיכון** הוא :

א.  $\frac{2E(D)}{5}$

ב.  $\frac{2E(C)}{5}$

ג.  $5E(D)$

ד.  $\frac{4E(C)}{5}$

ה. אין אף תשובה נכונה

פתרון (א) :

ראשית, علينا לחשב - האם אנחנו במודל של נכסים מסוכנים בלבד? או CAPM? והתשובה : הויאל וזויה בשאלת המונח המרכזיי "ריבית חסרת סיכון" בודאות אלו נמצאים במודל ה - CAPM (באופן דומה, יכולתי להסביר שאתה במודל זה איילו זיהיתי נתונים לגבי תיק השוק, ביטא).

יש כאן שני תיקי השקעות עילים במודל ה - CAPM כאמור. לכן ניתן להשתמש במגוון רחב של נוסחאות אותן מקיימים תיקים ייעילים במודל כדי להתמודד עם הנדרש :

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M$$

נתוני השאלה :

השאלה כוללת תיאור מסוים של תוחלות (תוחלת נכס מסוים בהשוואה לחברו). בנוסף כוללת השאלה תיאור מסוים של סטיות התקן. במלים אחרות, הגיוני מiad לשער שהנוסחה המתאימה לדיוון כאן היא זו הקוררת בין סטיית התקן של תיק עיל לבין התוחלת במודלה - CAPM - הנוסחה ה-2 מבין מקבץ הנוסחאות לעיל, שנקראת בלטינית CML.

נשים את הנוסחה מול העיניים :

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

על פי הנתונים :

$$E(C) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_C$$

$$E(D) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_D$$

במצבים של ריבוי נעלמים, כדי להפוך את הנוסחה לקטז יותר אלגנטית, נתייחס לכל הביטוי של שיפוע העוקום הייעיל בתור x :

$$x = \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M}$$

נקבל שהמשוואות הן :

$$E(C) = R_F + x * \sigma_C$$

$$E(D) = R_F + x * \sigma_D$$

כמו כן ידוע (נתון) שסטיית התקן של C היא פי 6 מסטיית התקן של D ותוחלת C היא פי 4 מתוחלת D :

$$\sigma_C = 6\sigma_D$$

$$E(C) = 4E(D)$$

ולכן :

$$4E(D) = R_F + x * 6\sigma_D$$

$$E(D) = R_F + x * \sigma_D$$

נחסיר מהמשוואת העליונה 6 פעמים את המשוואת התחתונה ונקבל :

$$4E(D) - 6E(D) = R_F + x * 6\sigma_D - 6R_F - x * 6\sigma_D$$

וכך נגיעה ל:

$$-2E(D) = -5R_F$$

או בתכלייס ל:

$$R_F = \frac{2E(D)}{5}$$

אז מה למדנו מה שאלה?

- שאלת המאζכרת ריבית חסרת סיכון היא בהגדרה שאלת העוסקת במודל ה - CAPM שהנחהותיו הם קיום ריבית חסרת סיכון.
- בהינתן עבודה זו, ומערכות הקשרים המתמטיים המתקיימים על ידי תיקים עילאים, ניתן, במקרים רבים, לבצע חילוצים רלוונטיים של פרמטרים שונים שנתקבשו (לפי הנוסחאות הרלוונטיות לעולם עיל CAPM) או לבטא ערכיהם מסויימים באמצעות פרמטרי.

**שאלה 62.3 - רמת שנת הסיכון של מSCIיעים עליים שבהם הם בוחרים – לעבר 2025**  
במשך ידוע:

$$\text{הרבית חסרת הסיכון היא } R_F = 5\%$$

$$\text{תוחלת תשואה תיק השוק } E(M) = 15\%$$

$$\text{סטיית התקן של תיק השוק } \sigma_M = 20\%$$

$$\text{ידוע שוויולט בוחרת בתיק עיל עם תוחלת תשואה של } 10\% \text{ ו } E_P(Violet) = 10\%$$

$$\text{ואילו סריוiska בוחר בתיק עיל עם סטיית התקן של } 7\% \text{ ו } \sigma_P(Ser) = 7\%$$

בנתונים אלו, מי מבין המשקיעים השונים סיכון בדרجة גבוהה יותר?



סריוiska

וילט

פתרונות:

למעשה, בשאלת יש שני משקיעים - ווילט וסריושקה. שני המשקיעים בוחרים בתיקים ייעילים. ובעצם, אלו נדרשים להכריע מי מביניהם יותר "שונה סיכון".

בヵhor זה נאמר, שלמעשה, בעולם ה- CAPM אפשרויות ההשקעה הן בלתי מוגבלות, הכו הישר שמקתיב את תיקי ההשקעות שניתן לבוחר בהם - עליה ממשאל לימיון ללא גבול. יחד עם זאת, ככל שעולמים שמאלה ולמעלה, לצד העלייה בתוחלת גם עליה הסיכון; והນקודה הספציפית שבה יבחר משקיע - תקבע האם ועד כמה המשקיע שונא סיכון;

בפרט - משקיעים שסולדים ונמנעים מסיכון בכל מחיר - יבחרו ב-  $R_F$  ספציפית. משקיעים שਮוכנים להסתכן לטובות תוחלת גבואה יותר, אבל עדין ממש ממש שונאי סיכון - יהיו בנקודתה שהיא ימינה מ-  $R_F$  אבל במידה לא משמעותית.

וככל שמתקדמים עוד ימינה ועד לעלה - דרגת שנתה הסיכון פוחתת. שימו לב: לעולם לא נאמר משקיעים אלו אהובי סיכון; הם לא נהנים מעצם קיומ הסיכון, אלא מוכנים לשאות בו בדרגות משתנות, בתמורה לעודף תוחלת התשואה שתתקבל.

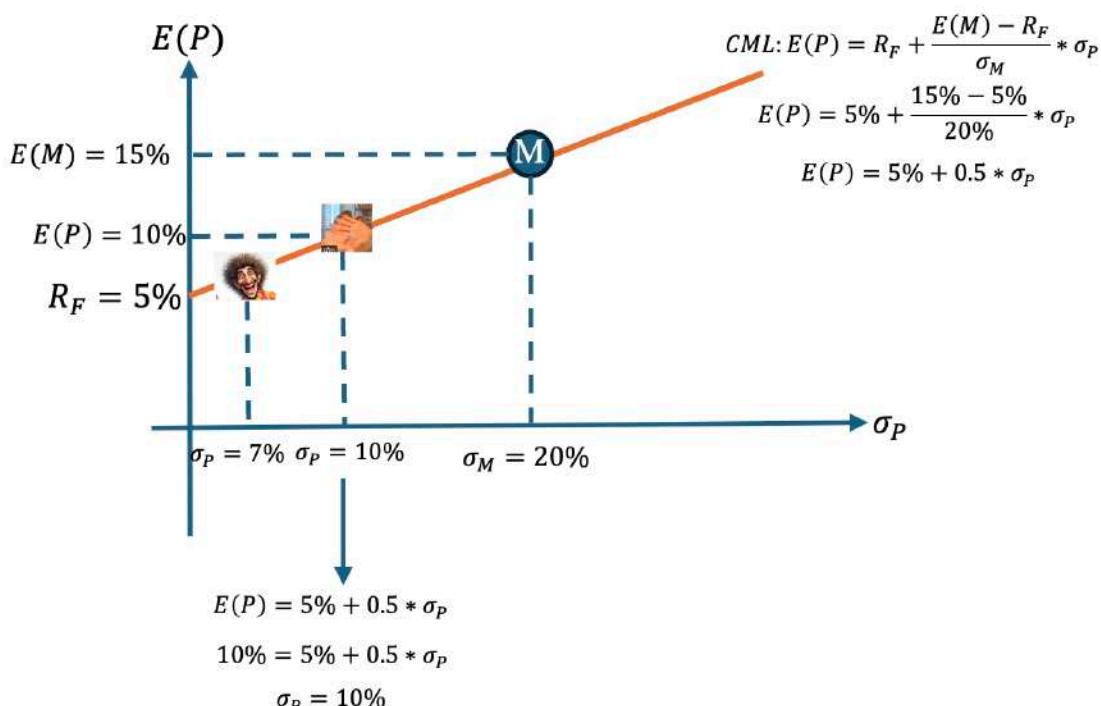
בתכליס:

לקחנו את נתוני תיק ווילט.

הצבנו אותם בנוסחת תוחלת תיק עיל - כדי למצוא את סטיית התקן בתיק שלה.

והשווינו את סטיית התקן שהוא בה - לסטיית התקן בה בחר המשקיע الآخر, סריושקה.

בהינתן שגילינו שבאותם נתוני שוק סריושקה בוחר בסיכון נמוך יותר (למרות שהוא "משלם" על כך בתוחלת נמוכה יותר) הרי שנוכל להסיק שדרגת שנתה הסיכון שלו חזקה מזו של ווילט.



התשובה הסופית: סריושקה הוא יותר "שונה סיכון" מווילט.

מה למדנו?

מעבר ליכולת לחזק נתונים מנומחאות שמתקינות במודל ה-CAPM, אפשר גם להתרשם מ"דרגת דחיה" הסיכון" של משקיעים, בהתאם לסטטיסטית התקן של התקין היעיל שהם מוכנים ליטול על עצמן (מוכנים ליטול סטטיסטית התקן גבוהה יותר - הם "פחות" שנאי סיכון).

#### שאלה 62.4 – לפטור איתם במפגש 2025 – נטילת הלואות והקשר לסיכון

אבי מנקס נטל הלואאה בסכום של 50,000 ש"ח בריבית שנתייה בשיעור 5%. את הסכום שנטל צירף להון העצמי הקיימים שלו, בסכום של 25,000 ש"ח, ואת סך הסכום – קרי 75,000 ש"ח – השקיע במניית ד"ר צבאן, שסטטיסטית התקן של תשואתה השנתית הינה 10%.

מהי סטטיסטית התקן של תשואת התקין של אבי מנקס? [חזרכה: נוסחת סטטיסטית התקן של התקין ייעיל, בהתאםות]

פתרון :

ראשית, מה פשר הערכיים הכספיים? בדרך כלל, כשדנו בתיקי השקעות, דיברנו על נתונים באחזים – משקל השקעה בכל נכס, ותשואה אחוזית של נכסים ותיקים. זה נכון, ולכן תחילת אנו נמיר את נתונים ההשקעה הכספיים למונחים ייחסיים – למשקלים. במלים פשוטות: נחשב את משקל החלוקת נטל אבי (היחס בין הלואאה לסך ההון העצמי שלו). משקל זה מסומן כ- $W_F$  בסימן שלילי. המשלים ל-1 (או אם נרצה -  $W_F - 1$ ) זו משקל ההשקעה במניה.

$$W_F = -\frac{50,000}{25,000} = -200\%$$

$$W_{DT} = (1 - W_F) = (1 - (-200\%)) = 300\%$$

ההשקעה בנכס מסוכן וכן בנכס חסר סיכון (לרבות הלואאה) מובילה תמיד לסיכון כולל (סטטיסטית התקן) שהוא מכפלה של שיעור ההשקעה בנכס המסוכן בסטטיסטית התקן של הרכיב המסוכן :

$$\sigma_P(av_i_{menkes}) = W_{DT} * \sigma_{DT} \rightarrow \sigma_P = 300\% * 10\% = 30\%$$

כך שבעצם: כל נטילת הלואאה והשקעת כל כספייה בנכס מסוכן, מובילה לסטטיסטית התקן שהוא מכפלה של שיעור ההשקעה בנכס המסוכן בסטטיסטית התקן שלו. וכך: 30%. טענה זו תקפה גם כאשר התקין לא ייעיל.

מדוע? משום שאם אחד הנכסים חסר סיכון, לרבות הלואאה :

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho(A, B)} = W_A \sigma_A$$

**שאלה 63 - שאלת בסיסית לחילוץ ערכאים בגין תיקים יעילים - CAPM [ללימוד עצמי]**  
בשוק הון המקיימים את הנחות מודל ה - CAPM, נstorrim שני תיקי השקעות יעילים: A ו- B. להלן נתונים רלוונטיים:

הרכיבת חסרת הסיכון היא 5%.

תוחלת התשואה של תיק השוק היא 10%, וסטיית התקן של תיק השוק היא 20%.

ידוע שתוחלת התשואה של נכס A היא 15%, וסטיית התקן של נכס B היא 8%.

נדרש:

- מיהי סטיית התקן של נכס A?
- מהו הרכב ההשקעות של נכס A (איזה חלק מכיספי המשקיע מושקע בנכס חסר סיכון, ואיזה חלק מושקע בתיק השוק)?

פתרונות:

#### פתרונות סעיף א

את סטיית התקן של נכס יעיל במודל ה - CAPM אפשר לחשב בכמה דרכים:

חילוץ מנוסחת ה - CML, בהנחה וכל הנתונים פרט לסטיית התקן של התקיק - נתונים.

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

או בנוסחת המשקלים לחישוב סטיית התקן:

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

או, אם בידוי נתונים ביטה של תיק יעיל:

$$\sigma_P = \beta_P * \sigma_M$$

הואיל ועובד נכס A תוחלת התשואה נתונה, כמו גם יתר הנתונים של המשוואה הראשונה, נציג ונחלץ את סטיית התקן.

$$0.15 = 0.05 + \frac{0.1 - 0.05}{0.2} * \sigma_P \rightarrow \sigma_P = 40\%$$

#### פתרונות סעיף ב

בהינתן ערכי סטיית התקן וגם התוחלת של התקיק, אפשר לחלץ את המשקלים באמצעות אחת מבין הנוסחאות הבאות:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M)$$

או לפי:

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

זכרו, כי הנוסחה העליונה היא משווהה בណלט אחד גם כן. כי  $W_F - 1 = W_M$ . בכל מקרה אציג בנוסחה השנייה ואקבל:

$$40\% = W_M * 20\% \rightarrow W_M = 2 = 200\%$$

איך אפשר להשיקע 200% מהכספי? האם זהovi טעות? התשובה: זו לא טעות. במודל ה- CAPM ניתן גם ליטול הלוואות, מה שמאפשר לנו להשיקע יותר מהסכום המקורי שברשותנו (יותר מההון העצמי). בעצם, נוטלים הלוואה, והדבר יתבטא ב-  $W_F$  שלילי:

$$W_F + W_M = 1 \rightarrow W_F + 2 = 1 \rightarrow W_F = -1 = -100\%$$

כלומר:

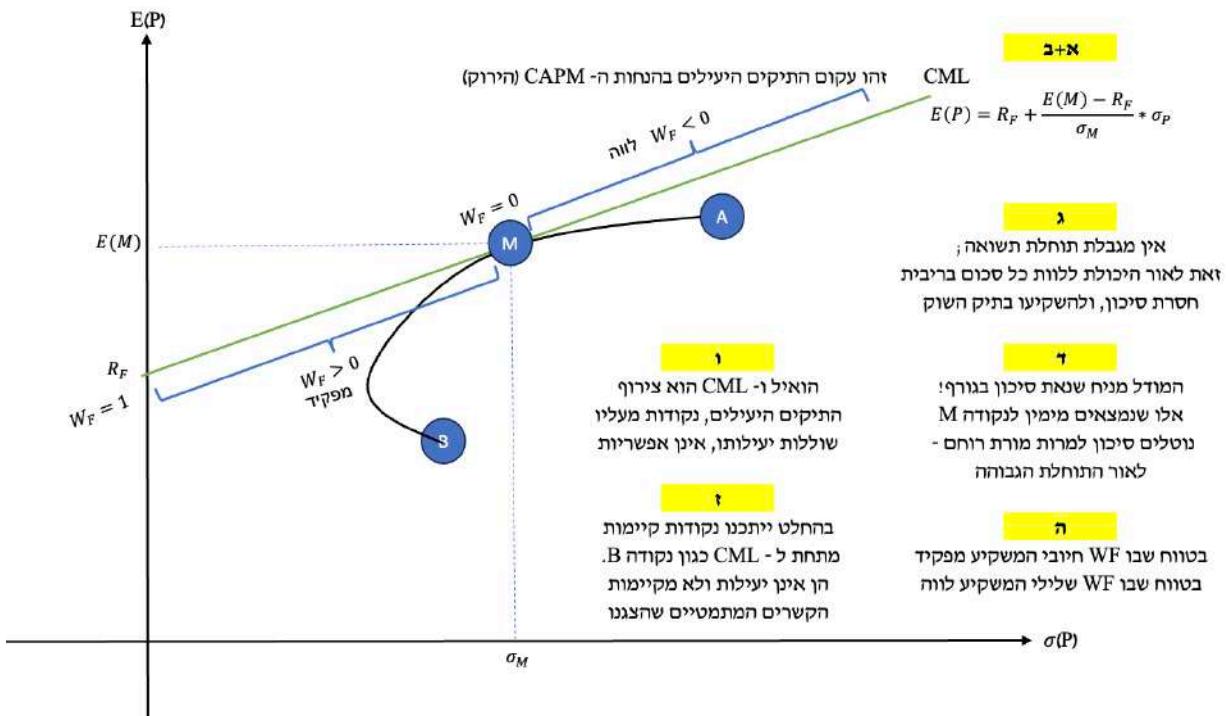
"המשקיע לווה בשיעור 100% מההון העצמי, ומשקיע 200% (הון עצמי ראשוני + כספי הלוואה) בתיק השוק. זהו למעשה **תמהיל / הרכב ההשיקעות**".

אפשר לשים לב שמעבר לחישוב הטכני, הרי המשקיע הצליח להגיע כאן לתוחלת תשואה שבווהה יותר מתוחלת השוק. הדרך היחידה לעשות כן היא ליטול הלוואה!



#### שאלה 64 - הצעה גרפית בסיסית של העוקם הייעיל – CAPM ללימוד עצמי

- הציגו באופן גרפי את עוקם התיקים הייעילים בעולם המקיים את הנחות ה- CAPM.
- מכוון על גבי העוקם את תיק השוק ואת הנכס חסר הסיכון.
- האם תוחלת התשואה לפי המודל מוגבלת? הסבירו.
- האם משקיע הנמצא מימין ומעל נקודה M על העוקם הוא משקיע אוהב סיכון? נמקו.
- באיזה טווח על גבי העוקם המשקיע נחשב "לווה", ובאיזה טווח נחשב "מפקיד"?
- האם יתכנו נקודות מעל ה- CML?
- האם יתכנו נקודות מתחת ל- CML?



**שאלה 65 - שינוי ברכיבת חסורת סיכון והשפעתו על משקיע הבוחר בתיק עיל (להשאייר לסוף...קשה)**  
 בעולם המקיים את הנחות ה-CAPM יש להניח קיומם של שני משקיעים: שטוליק ויוסי. יוסי משקיע בתיק עיל שתוחלת תשואתו נמוכה מתוחלת התשואה של תיק השוק, ושטוליק משקיע בתיק עיל שתוחלת תשואתו גבוהה מתוחלת התשואה של תיק השוק.

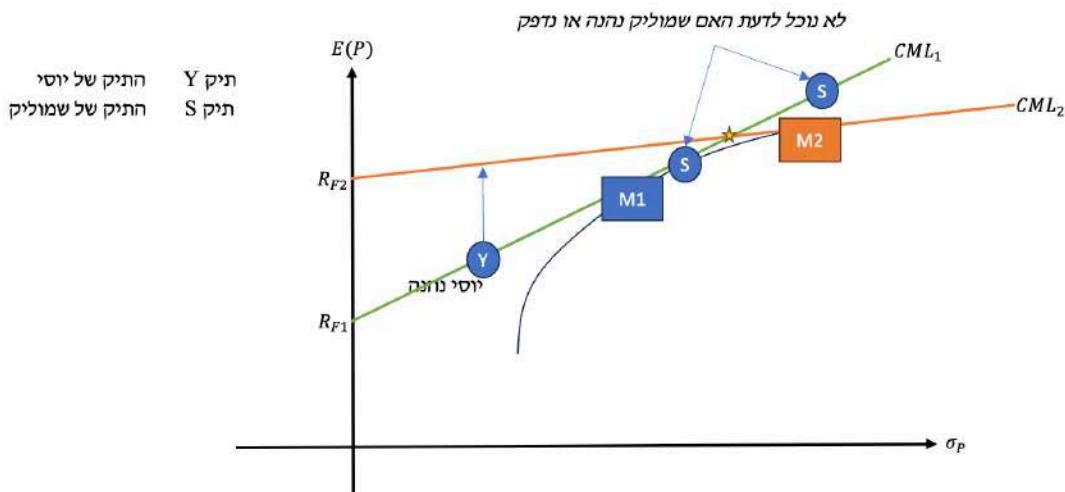
נדרש :

- הציגו על גבי קו ה-CML את מיקום התיקים של שטוליק ושל יוסי.
- הניחו כתה כי חלה עלייה ברכיבת חסורת הסיכון. הציגו את נקודת החיתוך שבין עקום ה-CML החדש ובין עקום ה-CML המקורי (באופן סכמטי, אין צורך בערכאים מספריים).
- מה תוכלו לומר על השינוי במצבם של המשקיעים (משתפר / מורע)? נמקו.

שאלה 65 - שינוי בריבית חסרת סיכון והשפעתו על משקיע הבוחר בתיק **יעיל** בעולם המקיים את הנחות ה - CAPM יש להניח קיום של שני משקיעים: שМОליק וויסי. יוסי משקיע בתיק **יעיל** שתוחלת תשואתו נמוכה מתוחלת התשואה של תיק השוק, ושמוליק משקיע בתיק **יעיל** שתוחלת תשואתו**גבוהה** מתוחלת התשואה של תיק השוק.

נדרש:

- הציגו על גבי קו ה - CML את מיקום התיקים של שМОליק ושל וויסי.
- הניחו עת כי חלקعلاיה בריבית חסרת הסיכון. הציגו את נקודות החיתוך שבין עוקום ה - CML החדש ובין עוקום ה - CML המקורי (בופן סכמטי, אין צורך בערכאים מספריים).
- מה תוכלו לומר על השינוי במצבים של המשקיעים (משתפר / מורע)? נמקו.



## נכיסים שאינם מהווים תיקים יעילים - ביטה כמדד סיכון ו-SML – לעבר אותם, חשוב

הנוסחאות שהוצעו בפתח שיעור זה רלוונטיות לתיקים יעילים בלבד במודל CAPM.

יעילות אינה ברירת מחדל;

אם לא תנicho יעילות אם אינה נתונה.

אם התקים (או הנכים) אינס יעילים, מתקיימת מערכת קשרים המתמטית לאפויון תוחלת תשואתם וסיכון אחרית, הקשורה לסיכון התקיק ביחס לשוק (סיכון שיטתי, ביטה) ולא לסיכון הכלול (סיטיות תקן).

**אם התקיק יעיל = קשר בין סיכון לתוחלת.**

**אם התקיק איננו יעיל = קשר בין ביטה (מדד סיכון יחסית שונה) לתוחלת.**

הקשרים הם שונים, ולמרות הצורך להעמק בקיום, נתמקד לפחות בשלב זה בהיבט היישומי שלהם. חשוב לשים לב: ניתן להשתמש בנוסחאות אלו גם לתיקים יעילים; אך בהיעדר נתון בדבר יעילות, יוכל להשתמש רק בנוסחאות אלו.

**תוחלת תשואה של כל נכס / תיק יעיל / לא יעיל בשוויו משקל כתלות ביטה - SML**

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

סימן	משמעות
$E(i)$	תוחלת התשואה של הנכס / התקיק
$R_F$	ריבית חסרת סיכון / תשואת אג"ח ממשלטתית
$E(M)$	תוחלת תיק השוק
$\beta_i$	היטה - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס

**רכיבי הסיכון בתיק לפי המודל (מתאים ללא יעילים)**

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

סימן	משמעות
$\sigma_i^2$	שונות של נכס לא יעיל
$\sigma_{NS}^2$	השונות = סיכון לא שיטתי / סיכון ניתן לפיזור (ניתן להימנע ממנו) - מחולץ בלבד
$\sigma_M^2$	השונות של תיק השוק
$\beta_i$	היטה - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס
$\beta_i^2 * \sigma_M^2$	השונות המהווה את הסיכון השיטתי / שאיננו ניתן לפיזור (לא ניתן להימנע ממנו)

**חישוב היטה - דרך שמקדמת המתאים מול השוק נתון:**

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,M} * \sigma_i}{\sigma_M}$$

משמעות	סימון
מקדם המתאים בין הנכס לשוק	$\rho_{i,M}$
סטיית התקן של הנכס	$\sigma_i$
סטיית התקן של השוק	$\sigma_M$
הביתא - מקדם הסיכון השיטתי של הנכס	$\beta_i$

חישוב הביתא - דרך נוספת לשחשונות המשותפת עם השוק נתונה:

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

משמעות	סימון
השונוות המשותפת של הנכס עם השוק	$COV(i, M)$
השונוות של תיק השוק	$\sigma_M^2$

נוסחת שונוות משותפת:  $COV$

$$COV(i, M) = P_1 * [R_{i1} - E(i)] * [R_{M1} - E(M)] + P_2 * [R_{i2} - E(i)] * [R_{M2} - E(M)] + \dots$$

כאשר :

משמעות	סימון
הסתברויות	$P_1, P_2 \dots$
התשוואות האפשריות של המניה הבודדת	$R_{i1}, R_{i2} \dots$
התשוואות האפשריות של תיק השוק	$R_{M1}, R_{M2} \dots$
תוחלת השוק	$E(M)$
תוחלת הנכס הבודד	$E(i)$

**שאלה 66 - קו ה - SML ותមחרת מניות - לעבור איתם**

מניה "נקנים של תקווה" צפואה להסחר בעוד 3 שנים במחיר של 500 ש"ח. השונות המשותפת של תשואת המניה עם תשואת השוק היא 0.9, שער הריבית חסר הסיכון (נטול הסיכון) 4% ותוחלת התשואה של תיק השוק היא 12%. כמו כן ידוע כי סטטיסטית התקן של תיק השוק היא 0.8. מה יהיה מחיר המניה היום?

פתרון

נתונים :

$$COV(i, M) = 0.9$$

$$R_F = 4\%$$

$$E(M) = 12\%$$

$$\sigma_M = 0.8 = 80\%$$

$$P_S(t = 3) = 500$$

נדרש :

$$P_S(t = 0) = ?$$

אם כל מה שצפוי להתקבל ממניה בעוד 3 שנים זהו תזרים חד פעמי בסך 500 ש"ח, הרי שהערך הנוכחי להיום קרי PV של 500 ש"ח אלו, יהיה את מחיר המניה היום. השאלה היא : באיזה מחיר הון להוון (לחשב PV) לתזרים זה? כמובן שנדרש מחיר הון שמתאים למניה הספציפית והסיכון בה. כדי לבחון מה התשואה הנדרשת / הצפואה ממניה ספציפית, שאל את עצמי תחילת : האם יש סיבה טובה להניח שמניה בודדת היא נכס ייעיל? התשובה לא. מניה בודדת איננה תיק ייעיל, כביררת מחדל. לכן, אני עובר לחתת המודל המטפל (בין היתר) בנכסיים לא ייעילים - SML.

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

ציב את שנדע :

$$E(i) = 4\% + [12\% - 4\%] * \beta_i$$

נוסחת הביטא יכולה להישען על מקדם המותאם עם השוק או על השונות המשותפת COV כתלות בנתונים. כאן, מתאיימה הנוסחה של הביטא הנשענת על שונות משותפת :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2} \rightarrow \beta_i = \frac{0.9}{0.8^2} = 1.40625$$

ציב את הביטא חוזרת בנוסחת ה- SML לעיל :

$$E(i) = 4\% + [12\% - 4\%] * 1.40625 = 0.1525 = 15.25\%$$

מסקנה : התשואה הנדרשת בעד המניה / הריבית להיוון תזרימיה העתידים לשם קביעת מחירה היא בשיעור של 15.25% לשנה. מהוון 500 ש"ח מ-3 ל-0?

$$P_S(t=0) = P_S(t=3) * (1+k)^{-3} \rightarrow P_S(t=0) = 500 * (1+15.25\%)^{-3} \approx 326.62$$

מסקנה ותשובות סופית: בנסיבות השאלה, מחיר המניה היום הוא כ- 326.62 ש"ח.

שאלה 67 - **הקשר בין ביתא וסטיית תקן - הייתה או חלמתי חלום?**

הביתא של מניות "תפוחי" היא 4, ואילו הביתא של מניות "שזיפי" היא 12. האם ניתן לומר שסטיית התקן של מניות שזיפי גבוהה פי 3 מזו של מניות תפוחי? נמקו (הדרך: התייחסו לרכיבי הסיכון).

פתרון

$$\beta_{Tapuhi} = 4$$

$$\beta_{Shezifi} = 12$$

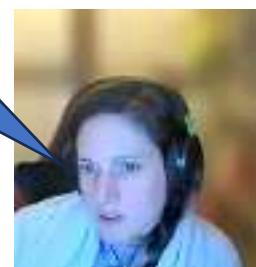
האם נכון לומר:

$$\sigma_{Shezifi} = 3\sigma_{Tapuhi}$$

למעשה, השאלה דנה בטענה: האם נכון לומר שכאשר ביתא של נכס מסוים גבוהה פי 3 מביתא של נכס אחר, ניתן לטעון שהסיכון במונחי סטיית התקן של הנכס המסוים גבוהה גם הוא פי 3 מהסיכון במונחי סטיית התקן של הנכס האחר?

נכשא לאטר יחד משווה / נסחה הקורשת בין ביתא לבין סטיית התקן. לשם כך, חייבים לחשב עם עצמנו תחיליה: האם יש סיבה טובה להניח שהנכסים ייעילים?

איו! נכסים בודדים? ייעילות? ווואי  
נראה לי אתה לא מחובר...



ככלנו מסכימים עם שני ב.ב. ולשם כך, נשתמש בנוסחת רכיבי הסיכון בתיק לפי המודל (מתאים ללא יעילים)

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

בהתאמה נקבל:

$$\sigma_{Tapuhi}^2 = 4^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(Tapuhi)$$

$$\sigma_{Shezifi}^2 = (4 * 3)^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2(Shezifi)$$

הערה : בשיפור כתבתי 3 \* 4 במקומות 12 כדי להציג את העבודה ש-12 זה בדיק פ' 3 מ-4. השאלה למעשה מפעילה מספקת נתונים בדבר הערך היחסית של הביטה. לביטה יש השפעה על אחד מבן שני רכיבי הסיכון הכלול בהנחה אי יעילות, והוא לא תורמת ולא מסוגלת להגדר את עצמת ההפרשיות בסיכון הלא-שיטתי בכלל斯基ים.

בහיעדר מידע כלשהו בדבר רכיב הסיכון הלא שיטתי במניות השונות, לא יוכל להכריע כלל לגבי מערכת היחסים בדבר הסיכון הכלול בהן.

לכן, בהתאם, בהינתן תיקי השקעות שאינם יעילים (ומנויות בודדות הן דוגמא בולטת לכך) לא ניתן להסיק כלל מערכי ביטה בדבר הסיכון הכלול ורכיבו היחסית במניות שונות.

שים לב : אם התקים היו יעילים אז רכיב הסיכון הלא שיטתי (החלק האדום) מטאפס, וכן ניתן לגוזר מיחסיות בערכי ביטה בדבר יחסיות בסיכון הכלול (במניחי סטיטית תקן). אך אנחנו לא מניחים יעילות. ובהיעדרה - זהה מסקנתנו כאן.

#### **שאלה 1.67 – תרגול נוסף עקרוני של הקשר בין ביטה לביון סטיטית התקן בהיעדר יעילות – לעבור איתם**

בשוק הון המקיים את הנחות מודל ה – CAPM נחרת מניה שהביטה שלה 0.8. ידוע שתוחלת התשואה של תיק השוק בשוק ההון שבו נסחר הנכס היא 15% וסטיטית התקן של תיק השוק היא 10%. האם תוכל לחשב את סטיטית התקן של המניה? במידה ולא, האם תוכל לקבוע את תוחם הערכים האפשריים לה?

**פתרון :**

הערה – מניה בודדת בהגדלה איננה יעילה, גם אם לא מצינית זאת. ומדוע? כי במודל-H-CAPM יעילות מתקיימת רק כאשר מדובר בכיס חסר סיכון – ומניה איננה נכס חסר סיכון ; או אם מדובר בתיק השוק – ומניה איננה תיק השוק ; או אם מדובר בשילוב בין נכס חסר סיכון לבין תיק השוק – ומניה בודדת איננה שילוב כזה]

ישנם בשאלת נתונים על מניה ספציפית. אנו יודעים שבעולם ה – CAPM קיימת חשיבות להבחנה בין נכסים / תיקים יעילים לכאלו שאינם כאלה. האם המניה הספציפית יעילה? התשובה שלילית בזונטיב, וזאת מימי טעמים : ראשית, לא מניחים יעילות. שנית, חשוב לזכור – מניה היא נכס מסוכן בודד. תיקים יעילים נוצרים משילוב כלשהו בין תיק השוק (שהוא בפני עצמו תמהיל של כמה נכסים מסוכנים) ונכס חסר סיכון. מניה בודדת, בהתאם, לא יעילה.

$$\beta_i = 0.8$$

בנוסף ידוע כי תוחלת השוק 15% וסטיטית התקן של תשואת השוק 10%, ובסימונים :

$$E(M) = 15\%$$

$$\sigma_M = 10\%$$

השאלה מבקשת לבדוק את אפשרות חישוב סטיטית התקן של הנכס הלא יעיל הספציפי. לעולם לא ניתן לעשות זאת, משום שסיכון כולל (סטיטית תקן) של נכס לא יעיל כולל אמן רכיב סיכון שמוספע מהביטה, אבל כולל רכיב סיכון נוסף (לא שיטתי) שאינו כל דרך ישירה לחשבו?  $\sigma_{NS}^2$ .

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

ברגע שהבנו שלא ניתן לחשב יישירות סטיטית תקן של נכס לא ייעיל על בסיס הביטא שלו – נשאלת השאלה, האם אפשר לקבוע טווח ערכיים אפשרי. והתשובה לכך היא חיובית.  
מדובר ואיך זה עובד?

נניח (באופן זמני ביותר) שהמניה הנדונה עיליה (אני יודע שהוא לא... רגע): אם היא הייתה עיליה, הרי שהיא מתקיים בהיעדר רכיב סיכון לא שיטתי

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 \rightarrow \sigma_i^2 = 0.8^2 * 0.1^2 \rightarrow \sigma_i = 0.8 * 0.1 = 0.08$$

ואם כך – אם המניה הייתה עיליה, סטיטית התקן שלה הייתה 8%. אבל הואיל ואינה עיליה, נוכל לקבוע בהכרח שטיטית התקן שלה גבוהה מ-8% כי בהגדרה לסיכון השיטתי הניל צריך להוסיף רכיב סיכון לא שיטתי חיובי.

מסקנה:  
תמיד נוכל לומר שלגבי תיקים לא עילים ו/או נכסים בודדים / מנויות ספציפיות מתקיים:

$$\sigma_i > \beta_i * \sigma_M$$

### שאלה 2 – 67.2 – לפטור במפגש 2025 – הקשר בין סטיטית התקן, המתאים עם השוק ומדדויות השקעה

בשוק הhone נסחרות שתי מנויות אשר תוחלת התשואה שלן 30%.

למניה C סטיטית התקן של 25% ומקדם מתאים עם תשואת השוק של 0.3.

למניה D סטיטית התקן של 20% ומקדם מתאים עם תשואת השוק של 0.6.

נדרש:

- batuo את הביטא של כל מניה על בסיס סטיטית התקן של השוק כפרמטר.
- לפיו מניה ביטא גבוהה יותר?
- בנחתה שהמשכיע מחזק בתיק מבוזר והוא שוקל לצרף אחת מבין המניות לתיקו, לפיו מניה יעדיף לצרף לתיק ומדוע?

פתרון:

$$E(C) = 30\% \quad \sigma_C = 25\% \quad \rho_{C,M} = 0.3$$

$$E(D) = 30\% \quad \sigma_D = 20\% \quad \rho_{D,M} = 0.6$$

### סעיף א – מתן ביטוי לביטא של כל נכס

את הביטא ניתן לחשב כך:

$$\beta_i = \rho_{i,M} * \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

$$\beta_C = \rho_{C,M} * \frac{\sigma_C}{\sigma_M} = 0.3 * \frac{0.25}{\sigma_M} = 0.075 * \frac{1}{\sigma_M}$$

$$\beta_D = \rho_{D,M} * \frac{\sigma_D}{\sigma_M} = 0.6 * \frac{0.2}{\sigma_M} = 0.12 * \frac{1}{\sigma_M}$$

#### סעיף ב – הביטה הגבוהה יותר

$$\beta_D = 0.12 * \frac{1}{\sigma_M} > 0.075 * \frac{1}{\sigma_M} = \beta_C$$

הבטה הגבוהה יותר היא של מניה D.

בנחתה שהמשקיע מחזיק בתיק מבוזר והוא שוקל לצרף את מנויות לתיקו, איזו מניה יעדי לצרף לתיק  
ראשית מה משמעותו של תיק מבוזר?

תיק מבוזר = תיקיעיל.

אם התיק שמהווה נקודת מוצא הוא יעיל, כלומר מגוון בין מספר גדול של נכסים, תיק השוק וכיו"ב – איזי, כאשר נסיף לו נכס מסוכן כלשהו, חלק משמעותי מהסיפור הגלום בנכס המסוכן – יתפזר גם הוא (יקטן) לאור השילוב בתיקיעיל.

כך שלמעשה: **שילוב נכס מסוכן בתיקיעיל משפייע על הסיכון הכלול רק לפי הסיכון השיטתי (הבלתי ניתן לפיזור) בתיק שמלבים**, כלומר רק לפי הביטה שלו. במקרה זה: שני הנכסים מניבים את אותה תוחלת; נכס C במידה וישולב, ישפייע על הסיכון הכלול בהתאם לביטה הנמוכה שלו; ואילו נכס D, במידה וישולב, ישפייע על הסיכון הכלול בהתאם לביטה הגבוהה שלו. לכן, יעדי לשלב בתיק את נכס C (התרומה לתשואה – אותה תרומה, והעליה בסיכון – בהתאם לביטה – נמוכה יותר).

#### שאלה 67.3 – לפתור במפגש 2025א – הקשר בין תוחלת, סטיטית תקן וסיכון השיטתי

בשוק ההון הפעול בשוויי משקל נסחרות שתי מנויות, G ו- Q, אשר תוחלת התשואה שלן 30%. סטיטית התקן של מניה G גבוהה מסטיטית התקן של מניה Q.

נדרש:

- א. למי מבין המנויות סיכון כולל גובה יותר?
- ב. למי מבין המנויות סיכון שיטתי גובה יותר?
- ג. למי מבין המנויות סיכון לא שיטתי גובה יותר?

פתרון:

אזכור הנתונים:

$$E(G) = 30\%$$

$$E(Q) = 30\%$$

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

מושג חשוב: **שיעור משקל**.

כשאנו פועלים בעולם של הנחות ה-CAPM (חלק מהנדירים דנים בסיכון שיטתי / לא שיטתי, זה הרמז לכך),  
אנו יודעים שיש שני תתי מודלים:

המודל הקשור לתיקים ייעילים (4 הנוסחאות בראש מערך השיעור) המחייב מידע בדבר **שיעור עילות התיקים**;  
המודל הקשור לכל התיקים בכלל (גם אם הם לא ייעילים) וمبוסס על ביטא:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

מודל זה דורש הנחה הרבה יותר "רכה": שהשוק בשיעורי משקל. משמעות שיעורי המשקל היא שאין לחצים לשינוי מחירי הנכסים ולשינויו תשואתם. באופן כללי, תמיד יכול להיות שמניות מסוימות נוסקות ומניבות למשל ביצועי יותר. במקרה שכזה, זה לא אומר שהביטה שלහן תשתנה מיד; ואו אז, תוכלת תשואתנו תהיה גבוהה מהציפוי לפי המודל. אלא, שמצוות כזו הוא מצב זמני ואיננו שיעורי משקל, מודיע? משום שמצוות כזו כולם ירצו לקנות את המניה, מחירה יעלה והתשואה היחסית יורדת עד להתכנסות בשיעורי משקל (ואוטו דבר בכיוון ההפוך כאשר התשואה נמוכה מזו שמנבאה המודל).

בשונה מהנחה ייעילות, שלא תמיד מתקינה – הנחת שיעורי משקל מתקינה אלא אם קיימות ראיות סותרות בשאלת.

לכן, בתכליס: כשהאומרים "מתיקים שיעורי משקל" וזו גם ברייתן מחדל המשמעות היא שמשוואת ה-SML הקושרת בין ערכי הביטה (מקדם סיכון שיטתי) לבין תוכלת התשואה מתקינה.

**א. למי מבין המניות סיכון כולל גובה יותר?**

اذכור הנתונים:

$$E(G) = 30\%$$

$$E(Q) = 30\%$$

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

סיכון כולל – משמעו בשפה פשוטה: סטיטית תקן. ואין ספק שעיל פינטון מפורש, הסיכון הכלול הגבוה יותר הוא של מניה  $G$ .

**ב. למי מבין המניות סיכון שיטתי גבוה יותר?**

את הסיכון השיטתי אנו אומדים על בסיס ערך הביטה. את הביטה ניתן להעריך בהתאם לנדריון קו ה-SML המתאר את הקשר בין ביטה לתוכלת תשואה – שמתיקים בשיעורי משקל שנתנו בשאלת.

$$\begin{aligned}
 E(i) &= R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i \\
 E(G) &= 30\% = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_G \\
 E(Q) &= 30\% = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_Q
 \end{aligned}$$

בاهינתן שהמניות מניבות תוחלת תשואה זהה, ביטה (מקדם הסיכון השיטתי) ובהתאם, **הסיכון השיטתי שלון – זהה**.

בכלל, סיכון שיטתי מוגדר כך :

$$\beta_i^2 * \sigma_M^2$$

הואיל וסטיטת התקן של השוק היא ערך כללי שתקף לשוק כולם, פערים בסיכון השיטתי יכולים לנבוע רק מפערים ביטה, שפה כאמור לא מתקיימים (לאור התוחלת זהה).

ג. למי מבין המניות סיכון לא שיטתי גובה יותר?

הסיכון הכללי מוגדר כך :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

אם לשתי מניות יש את אותה הביטה, כМОבן שרכיב הסיכון השיטתי (באדום) זהה. והמשמעות היא שככל פער בינהן בסיכון הכללי יכול לנבוע רק מרכיב הסיכון הלא שיטתי (בכחול).

תזכורת נתונים :

$$E(G) = 30\%$$

$$E(Q) = 30\%$$

$$\sigma_G > \sigma_Q$$

از התוחלת אותה תוחלת ; הביטה אותה הביטה ; הסיכון השיטתי אותו סיכון שיטתי ; ולכן בהכרח הסיכון הגובה יותר במנוחי סטיטית תקן במניה  $G$  יכול לנבוע אך ורק מסיכון לא שיטתי גובה יותר במניה זו.

כלומר : **הסיכון הלא שיטתי במניה  $G$  גובה יותר.**

#### שאלה 67.4 – לפטור במפגש 2025 – הביטה מול סטיית התקן

הבטה של מניה G גבוהה מהבטה של מניה Q. להלן מספר טענות שנשמעו בישיבה בוועדת ההשകעות:

טענה 1: "מניה G בודאות עם סטיית התקן גבוהה יותר. הרוי הביטה שהיא מגד הסיכון העיקרי גובה יותר"

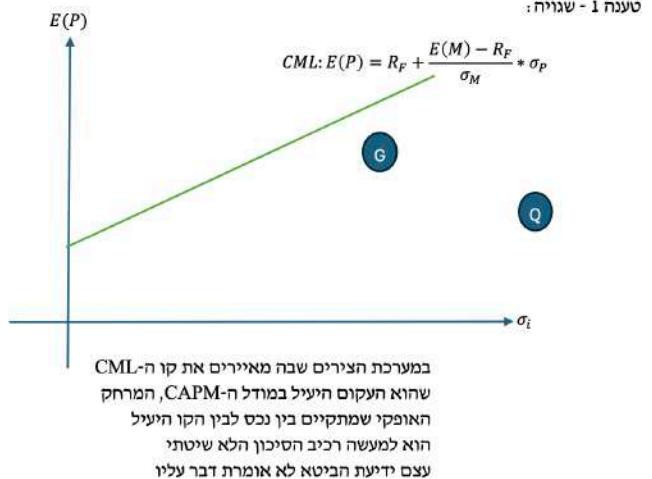
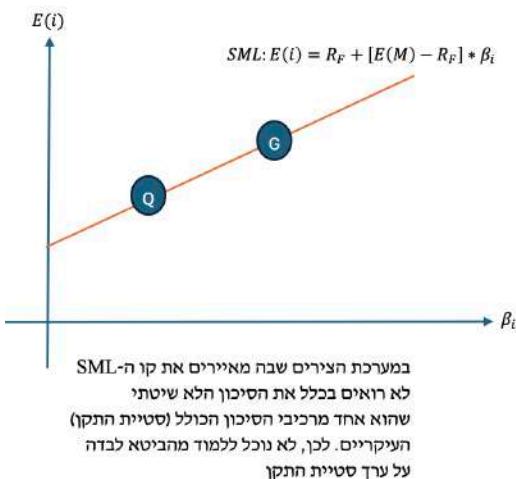
טענה 2: "אם מניה G גבוהה ומניה Q איננה גבוהה, למניה G סטיית התקן גבוהה יותר"

טענה 3: "אם שתי המניות ייעילות, למניה G סטיית התקן גבוהה יותר"

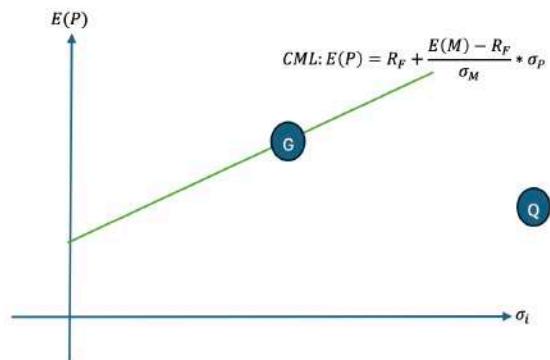
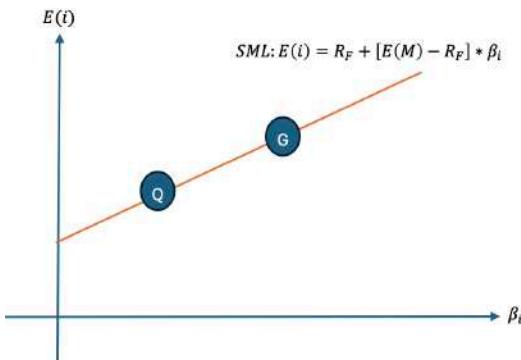
טענה 4: "אם שתי המניות אינן ייעילות, למניה Q סטיית התקן נמוכה יותר".

נדרש:

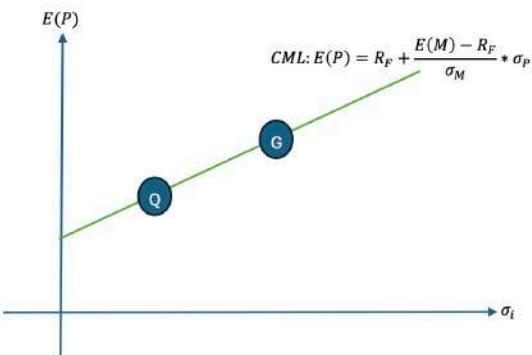
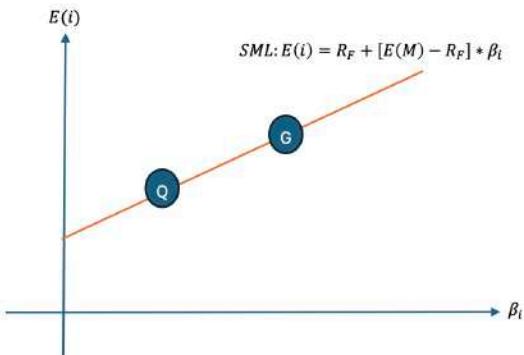
חוו דעתכם, לגבי כל טענה, האם היא נכונה או לא – וنمכו בהתאם.



טענה 2 - שגואה: המניה הייעילה מבון השתיים (G) נמצאת על קו ה-CML אך לא ניתן למקם בהיחס אליה את Q ללא מידע בדבר היקף הסיכון הלא שיטתי של Q:



טענה 3 - נכונה: אם שתי המניות יUILות, מניה עם ביטא גבוהה יותר וסיכון שיוטתי גבוה יותר (כי לא קיים רכיב סיכון נסוח):



טענה 4: נשלת בדיק באותו האופן שבו נשללה טענה 1.

### שאלה 68 - חילוץ ערכי ביטא על בסיס משקלים נכסיים בתיק

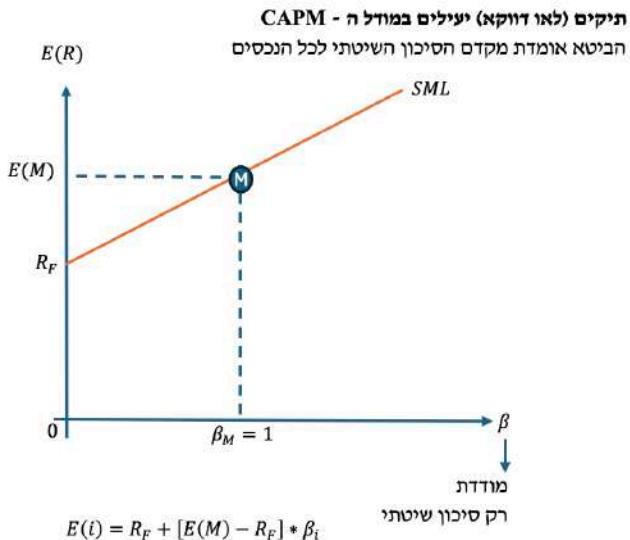
נתון תיק השקעות בעל הנכסים הבאים:

תוחלת תשואה	משקל (שיעור) השקעה בתיק	נכס
10%	0.65	א
22%	0.35	ב

ידוע כי תוחלת תשואת תיק השוק היא 12%, הריבית חסרת הסיכון היא בשיעור של 4%. מהי הביטא של תיק ההשקעות?

פתרון:

ברגע שהבנתי ששוואלים על הביטא, ואין נתוני יUILות, אני יודע שאני פועל בעולם הקשרים המתמטיים המאפיינים נכסים (וגם תיקים) לא יUILים. הקשר המרכזי שמתקיים בין הביטא לבין תיקים לא יUILים הוא הקשור לתוחלת תשואתם. המשוואה המתמטית המייצגת קשר זה היא:



המשוואה היא :

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בשלה זו, קיימים נתונים מלאים לגבי ריבית חסרת סיכון  $R_F$  שהינה 4%, תוחלת תשואת תיק השוק ( $E(M)$ ) שהינה 12%, ולכן אם נדע בנוסף את תוחלת תשואת התקיק שלו ( $i$ ) בהגדה נוכל לחלץ את הביתה כנעלם וסימנו.

תחילה, אפינו את תוחלת התשואת של התקיק המורכב משני הנכסים מסווגים, על בסיס נוסחת התוחלת המתאימה ל蹶ה כזה (של שני נכסים מסווגים כאמור).

נכס	משקל (שיעור) השקעה בתיק	תוחלת תשואת
א	0.65	10%
ב	0.35	22%

נוסחת תוחלת תיק השקעות המורכב מ-2 נכסים מסווגים בהינתן משקליהם ההשקעה בכל נכס :

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B)$$

ב换צבת משקליהם ההשקעה הנתונים בכל אחד מהנכסים א, ב נקבל :

$$E(P) = 0.65 * 0.1 + 0.35 * 0.22 = 14.2\%$$

למרות שמדובר בתיק ואף סומן באות P, חשוב מאד שלא לעבוד טכני. ובעצם לומר: אם אין סיבה מאד טובה להניח יעילות (כגון שהתיק ייעיל, או נתון שהוא מורכב רק מריבית חסרת סיכון ו/או תיק השוק) אז נניח אי יעילות, ובהתאם, המשוואה הרלוונטית המאפיינת את תוחלת התשואת ואשר תקפה גם למצווי אי יעילות היא המשוואת ה- SML :

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בהתבה נקבע :

$$14.2\% = 4\% + [12\% - 4\%] * \beta_P \rightarrow \beta_P = 1.275$$

**קיבלו כי הביטה של תיק ההשקעות הנתון בשאלת היא 1.275. תשובה סופית.**

#### שאלה 68.1 – חילוץ ערכי ביתא

ידוע כי לנכס א קיימת ביתא של 0.9 ואילו לנכס ב קיימת ביתא של 1.5. ידוע שנכס ב עיל, בעוד שנכס א לא עיל. לשני הנכסים סטיות תקן זהות. מהו מועד המתאים בין נכס א לתיק השוק?

פתרון :

השאלה מתחילה בדיוון בבייטה. זה אומר שאני ב- CAPM. יחד עם זאת, ולמרות נתוני הביטה, שככט מוביילים אוטוי לעולם לא עיל, ידוע שאחד הנכסים עיל וחברו – לא.

מהו הקשר המתאים בין עילות ובין ביתא? אחד הקשרים החזקים ביותר נשען על השפעת הביטה על הסיכון הכלול, כדלקמן :

אם מדובר בנכס יעיל בהכרח מתקיים :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 \rightarrow \sigma_i = \beta_i * \sigma_M$$

אם מדובר בנכס לא עיל בהכרח מתקיים :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2 \rightarrow \sigma_i > \beta_i * \sigma_M$$

הוائل ובhiveדר עילות נתקשה לקשר בין הביטה לסטיית התקן, ארצתה לפעול ככל שאני יכול קודם כל עם נוסחת הקשר בין ביתא לבין סיכון בתיק העיל.

לגביו נכס ב מהנו עיל, ידוע שהביטה שלו היא 1.5. לפיכך הוא מקיים (הנוסחה הראשונה מבין השתיים לעיל) :

$$\sigma_B = 1.5\sigma_M$$

בנ戎ו, סטיית התקן זו (של נכס ב העיל) זהה לסטיית התקן של נכס א (שאינו עיל) – כי נתון שסטיות התקן זהות :

$$\sigma_A = 1.5\sigma_M$$

בנוסף, בהינתן ששאלו על מועד המתאים בין נכס א לתיק השוק, ננסה לאתר נוסחה שRELACIONATE לנסיבות המקרה וכוללת את ההתייחסות למועד המתאים כאמור. נוסחה זו היא הנוסחה לחישוב ישר של הביטה שchnerה :

$$\beta_i = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M}$$

בקשר לנכס א מתקיים לפיכך :

$$\beta_A = \frac{\rho(A, M) * \sigma_A}{\sigma_M}$$

בנתוני השאלה נאמר שהביטה של הנכס היא 0.9. בנוסף הצלחנו לבטא את סטיית התקן של הנכס בתו  $\sigma_M$  1.5 וכך נקבל :

$$0.9 = \frac{\rho(A, M) * 1.5\sigma_M}{\sigma_M} \rightarrow \rho(A, M) = \frac{0.9}{1.5} = 0.6$$

מסקנה : מקדם המתאים בין נכס א לתיק השוק הוא 0.6.

#### תמציתת התיאחות לשאלת :

קיבלנו מידע לגבי ביטה של נכסים ; האחד מהם ייעיל. לכן הצלחנו לבטא בצורה מושלמת את הסיכון שלו (סטיית התקן שלו) כפונקציה של סיכון השוק (ללא תוספות).  
בහינתנו מידע ספציפי על כך שסיכון הנכס הנוסף (סטיית התקן) זהה, יכולנו להשתמש במידע זה כדי להציג בנוסחת הביטה, ולחלץ את מקדם המתאים עם השוק שמהווה חלק ממנו.

**שאלה 68.2 – הקשר היחסי שבין תוחלת התשואה ביחס לשואת השוק**  
למניה א ביטה של 1.5.

لتיק השוק תוחלת תשואה של 10%.

לנכס חסר סיכון וריבית של 5%.

בנסיבות ה-CAPM, חשבו את תוחלת התשואה של מניה א ובהתאם קבוע – האם נכוון לומר שאם הביטה גדולה פי 1.5 התוחלת של הנכס גבוהה פי 1.5 מזו של השוק? נמקו ל蹶ה הכללי.

פתרון :

מניה איננה נכס ייעיל.

הנתונים הכלומתיים הם :

$$\beta_A = 1.5$$

$$E(M) = 10\%$$

$$R_F = 5\%$$

ראשית נחשב את תוחלת התשואה של המניה. בהינתן שאיננה נכס ייעיל, ובנוסף קיימים נתונים ביטה את תוחלת התשואה אמור לפי משווהת ה – SML :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

נציב ונקבל :

$$E(A) = 5\% + [10\% - 5\%] * 1.5 = 12.5\%$$

בשפה גסה: תוחלת התשואה של תיק השוק 10%, אך תוחלת התשואה של נכס שהbijטא שלו 1.5 היא פחות מ-15% (מכפלת הבbijטא בתוחלת השוק). הסיבה לכך היא שכאשר הבbijטא גדלה בשיעור מסוים, רק הרכיב הקשור לסיכון גדל פי הבbijטא, הריבית חסרת הסיכון נותרת זהה.

**אם מגדילים אתbijטא פיא, תוחלת התשואה גדלה בפחות מפי א.**

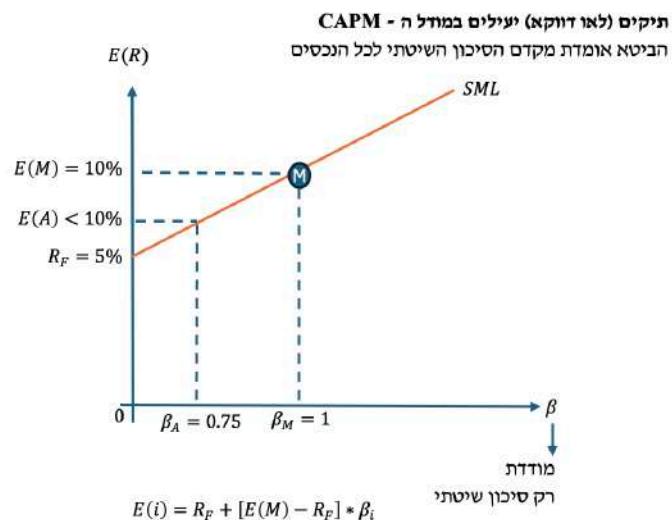
**שאלה 68.3 – ערךbijטא חיובי – האם המשמעות היא תוחלת גבואה מזו שלתיק השוק?**  
למוניה אbijetia של 0.75.

لتיק השוק תוחלת תשואה של 10%.

לנכס חסר סיכון ריבית של 5%.

פלפולוני טוען שלמוניה א יהיה בשוויי משקל שיעור תשואה (בתוחלת) שגובה מ-10%, וזאת לאור ערך גדול מ-0 שלbijetia. נמקוהתיחסותכם על בסיס חישוב מתאים והכללת הממצאים.

**פתרון :**



**פתרון גрафי:** ניתן לראות שכאשרbijetia חיובית אך קטנה מ-1, נמצאים משמאל לנקודת תיק השוק על גבי קו ה-SML ובהתאם, תוחלת תשואת הנכס (למרותbijetia חיובית, כל עוד היא קטנה מ-1) חייבת להיות נמוכה מזו שלתיק השוק.

אםbijetia חיובית וגובהה מ-1, אז תוחלת התשואה תהיה גבואה מזו שלתיק (נמצאים בנקודה ימינה ולמעלה מנקודה M על גבי קו ה-SML, כאן זה לא המקרה).

**פתרון מתמטי – בהצבה:**

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i \rightarrow 5\% + (10\% - 5\%) * 0.75 = 8.75\% < 10\% = E(M)$$

תמצית: **בשווי משקל**, שהוא למעשה המצב שמהווה את **ברירת המחדל** בקורס (מצב שבו אין ביקוש יתר או חסר למנה, כי המחירים מסונכרנים עם השווי הכלכלי) כל הנכסים בשוק ללא יוצא מן הכלל מקיימים את קו ה – SML. בהתאם לכך, כל מניה שהביטה שלה גובהה מ-1 תהיה בעלת תוחלת תשואה גבוהה מזו של השוק **ולהיפך**.

### **שאלה 69 – חילוצי ערכים על בסיס ה – CAPM – בעבר במפגש 2025**

לפניכם נתונים בדבר 3 מנויות, J, G, Q:

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	?	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
?	45%	30%	סטטיסטית תקן תשואה
0.7	0.8	?	מתאים עם השוק

נדרש:

- מיהי תוחלת תשואה של תיק השוק?
- מיהי הריבית חסרת הסיכון?
- מיהי סטטיסטית תקן של תשואת השוק?
- שחזרו את כל סימני השאלה. בטאו לגבי כל מניה האם היא אגרסיבית, דפנסיבית או ניטרלית.
- הניחו כי הנכסים משקיעים בתיק השוק 200,000 ש"ח, מתוך זה 120,000 ש"ח מהונכם העצמי והיתרה כחלואה. מיהי תוחלת תשואה וסטטיסטית תקן של תיק זה?
- בהמשך לסעיף ה, האם משקיע שונאי סיכון עשוי להשיקע בתיק זה?
- איירו את המשקיע שאפייניתם בסעיפים ה, ו לעיל על העוקם הגרפי המתאים.

פתרון:

א. + ב. **חילוץ תוחלת תשואה של תיק השוק וריבית חסרת סיכון בהתבסס על ערכי נכסים בודדים** לצד העבודה שנכסים בודדים אינם יעילים, הרי שבדומה לנכסים אחרים הם מקיימים את משוואת ה – SML. ספציפית, לגבי הנכסים J ו – Q, בהינתן גם ערכי תוחלת תשואתם וגם הביטה שלהם, ניתן לבנות צמד משוואות ב-2 נעלמים, שיהוו את הריבית חסרת הסיכון ואת תוחלת תיק השוק בהתאם.

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בבחביה:

$$(I) E(J) = 12.4\% = R_F + [E(M) - R_F] * 1.4$$

$$(II) E(Q) = 16.6\% = R_F + [E(M) - R_F] * 2.1$$

אני אישית (לא חובה) מאד אוחב כשאני נתקל בחילוצים אלו, לסמן את הביטוי  $E(M) - R_F$  (כנעלם x):

$$(I) \quad 0.124 = R_F + x * 1.4$$

$$(II) \quad 0.166 = R_F + x * 2.1$$

נחסיר את המשוואה (I) ממשוואת (II) ונקבל :

$$0.166 - 0.124 = R_F + 2.1x - (R_F + 1.4x)$$

נמשיך בכיף שלנו :

$$0.042 = 0.7x \rightarrow x = 0.06$$

נציב באחת מмежду המשוואות (אני אציב במשוואת I-I) :

$$(I) \quad 0.124 = R_F + 0.06 * 1.4 \rightarrow R_F = 0.04$$

$$R_F = 4\%$$

כידוע, x הוא :

$$x = E(M) - R_F \rightarrow 0.06 = E(M) - 0.04 \rightarrow E(M) = 0.1$$

$$E(M) = 10\%$$

ג. מהי סטיטית התקן של תשואת השוק?

את נתוני תיק השוק - תוחלת תשואת וסטיטית התקן, ב- 99% מהמקרים אנו מחלצים ולא מחשבים ישירות. כלומר, נשתמש באיזושהי נוסחה רלוונטית שבה מופיעה סטיטית התקן / התוחלת כנעלם, ונמשיך ממש בהצבות והחילוץ.

השאלה - איזו נוסחה תתאים ליתר נתוני השאלה ותאפשר לחלץ את סטיטית התקן של תיק השוק?

נוסחאות רלוונטית לחישוב ביטא, שתיהן כוללות את סטיטית התקן של תשואת השוק כנעלם :

$$\beta_i = \frac{\rho_{i,M} * \sigma_i}{\sigma_M}$$

וגם :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

נתוני השאלה :

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	?	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
?	45%	30%	סטיית תקן תשואה
0.7	0.8	?	מתאים עם השוק

על פניו, אני נגש למניה Q ואני מגלח שבהתאים לנוסחת החישוב הישירה הראשונה של ביטה אני מקבל :

$$\beta_Q = \frac{\rho_{Q,M} * \sigma_Q}{\sigma_M}$$

הערכים בירוק - נתוניים. הערכים שבחרור - 2 נעלמים, במשווה אחת. לא תופס.

אם אני נגש ל - J, אין לי את המתאים עם השוק בכלל.

אם אני נגש ל - G, אין לי את הביטה... אבל רגע! אולי אני יכול לחלץ את הביטה של G. זאת על בסיס משווהת ה - SML :

$$E(G) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_G$$

בhzבת נתוני תיק השוק ונכש חסר סיכון שגילינו בנדרישים א, ב נקבל :

$$14.8\% = 4\% + (10\% - 4\%) * \beta_G \rightarrow \beta_G = 1.8$$

נחזיר להגדרת ביטה על פי המתאים עם השוק, עברו נכש G, נקבל :

$$\beta_G = \frac{\rho_{G,M} * \sigma_G}{\sigma_M} \rightarrow 1.8 = \frac{0.8 * 0.45}{\sigma_M} \rightarrow \sigma_M = 20\%$$

ולכן כתשובה סופית לסעיף, סטיית התקן של תיק השוק היא 20%.

#### ד. שbezro' at cel simoni ha-shala

מניה Q	מניה G	מניה J	
2.1	1.8 בפתרון סעיף ג	1.4	ביטה
16.6%	14.8%	12.4%	תוחלת תשואה
60% ראו להלן	45%	30%	סטיית תקן תשואה
0.7	0.8	0.9333 ראו להלן	מתאים עם השוק

נשתמש בנוסחת הגדרת הביטה כדי לחלץ את מקדם המתאים של מניה J עם השוק :

$$\beta_J = \frac{\rho_{J,M} * \sigma_J}{\sigma_M} \rightarrow 1.4 = \frac{\rho_{J,M} * 0.3}{0.2} \rightarrow \rho_{J,M} \approx 0.933$$

גם עברו מניה Q, נשתמש בנוסחת הגדרת הביטה כדי לחלץ את סטיית התקן של תשואת הנכש :

$$\beta_Q = \frac{\rho_{Q,M} * \sigma_Q}{\sigma_M} \rightarrow 2.1 = \frac{0.7 * \sigma_Q}{0.2} \rightarrow \sigma_Q = 0.6 = 60\%$$

ה. הניחו כי הנכס משקיעים בתיק השוק 200,000 ש"ח, מtower זה 120,000 ש"ח מהו נכס העצמי והיתרה כהלוואה. מהי תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק זה?

תחילה, נסדר את הנתונים שהיצנו במאזך רב משאלות קודמות לגבי ריבית חסרת סיכון, ומופיע לנו תיק השוק (תוחלת תשואה וסטיית התקן). זה חשוב, משום שמדובר בתיק שכולל השקעה בתיק השוק וכן הלוואה (כי סכום ההשקעה עולה על ההון העצמי).

$$E(M) = 10\%$$

$$\sigma_M = 20\%$$

$$R_F = 4\%$$

משקל ההשקעה בתיק השוק ביחס להון העצמי:

$$W_M = \frac{200,000}{120,000} = 1\frac{2}{3}$$

באופן טבעי זה אומר ש:

$$W_F = 1 - W_M = 1 - 1\frac{2}{3} = -\frac{2}{3} < 0$$

כלומר, מדובר במשקיע שבהתאם לנתחים נוטל הלוואה בשיעור 2/3 (כ-66.67% מהו נון העצמי) ומשקיע את כספי הלוואה וכן את הון העצמי היחיד בתיק השוק. התקן שמתקיים בתוצאה מסוילוב של השקעה בתיק השוק והלוואה הוא תמיד יעיל במודל ה-CAPM, וכן נוכל לחשב את תוחלת התשואה וגם את סטיית התקן של התקן המשולב באמצעות הנוסחאות המתאימות לקרה היעיל:

$$E(P) = W_F * R_F + W_M * E(M) \rightarrow -\frac{2}{3} * 0.04 + 1\frac{2}{3} * 0.1 = 14\%$$

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M \rightarrow 1\frac{2}{3} * 0.2 \approx 33.33\%$$

מסקנה: תוחלת התשואה של התקן הנבחר היא 14%, וסטיית התקן שלו היא כ-33.33%.

ו. בהמשך לסעיף ה, האם משקיע שונא סיכון עשוי להשקיע בתיק זה?

לכואורה, עולה התההיה: הרוי סטיית התקן של התקן מסעיף ה גבואה יחסית (33.33%), אפלו גבואה מההשקעה בתיק השוק באופן מלא). יחד עם זאת, המשקיע מקבל פיצוי בדמות עוזף תוחלת תשואה بعد השקעה זו

(תשואה של 14% בתוחלת, שהיא גבוהה ב-10% מריבית חסרת סיכון, ואפילו גבוהה ב-4% מתוחלת תשואת השוק).

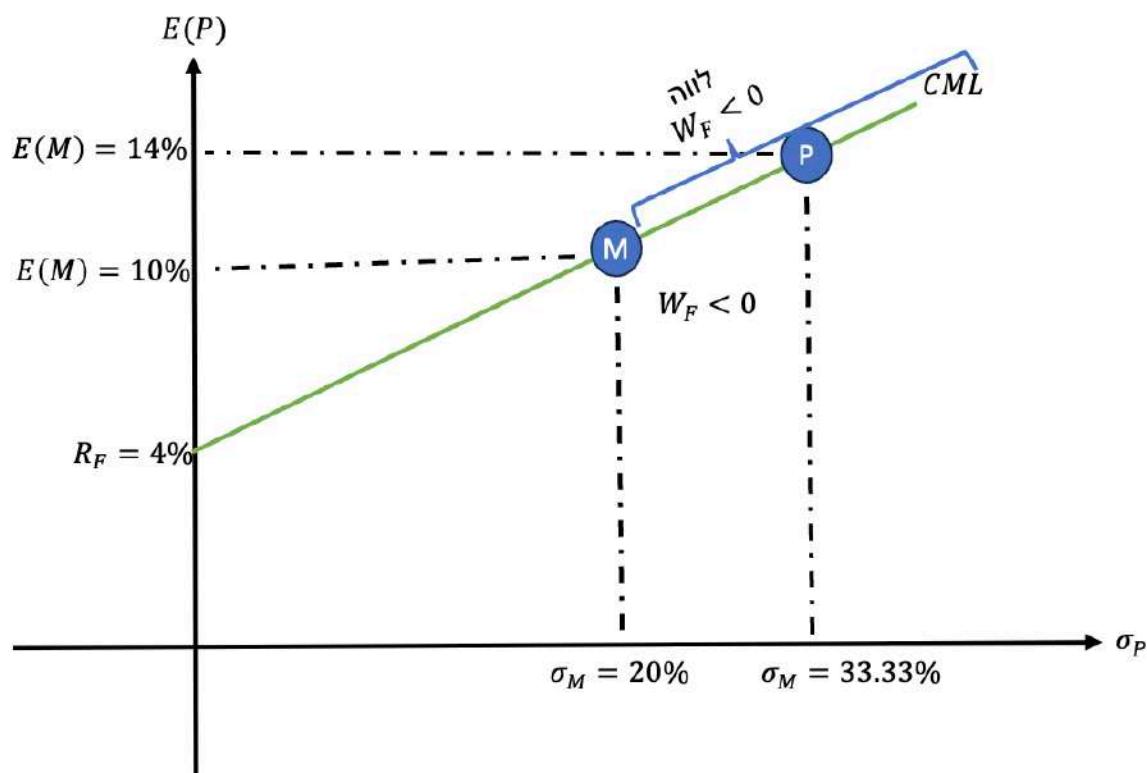
במלים אחרות - המשקיע שוקל תיק כזה מבין שהוא "מסוכן יותר" (שהה כשלעצמיו "רע") אך מנגד מודע לעודף התשואה אשר לו זיכה (שהה כשלעצמיו "טוב").

קיבלנו אם כך השפעות מנוגדות, או אם תרצו: תחלופה בין סיכון ותשואה. מבלתי להכיר את המשקיע אינדייבידואלית לא יוכל לטען שיש לשלול את התקיק עבור כל סוגים הסיכון בעולם ובהתאם, סוג סיכון עשוי (לא בהכרח, אך עשוי) לבחור בתיק כזה.

זכורו: **כל התקיקים על ה- CML המורכבים משילוב כלשהו של נכס חסר סיכון ותיק השוק הם יעילים. וכולם מהווים חלופות השקעה רלוונטיות / יעילות מנוקדות ראות שונים סיכון.**

בשורה התחתונה: תיק המשקיע על ה CML, הוא עשוי להיבחר - למטרות סיכוןו הגבוה.

ז. **איירו את המשקיע שאפיינתם בסעיפים ה-1 ו-2 על העוקם הגרפי המתאים.**  
סעיף זה הוא סעיף שמטרתו בעיקר לחזק ולסייע להבנה של ההסבר שנכלל בסעיף 1.



## טיפ נסס – חישוב מקדם המתאים על בסיס הסתברויות משותפות וערכיהם ספציפיים

סרטון :

<https://youtu.be/HKDOL1roI60?si=s5CXJfC29eyzBkf7>

שאלה 69.1 – מודל ה – CAPM, זיהוי תיקים יעילים על פי הרכב ההשקעות וערבי ביטא וסורי סיכון זההת מסע. השאלה עוסקת ברובה בחילוצים מתמטיים. האם יש דרכים נוספות לפתרון? בהחלט כן. מצורפת דרך אחת. כל עוד מקפידים לעבוד **לפי נוסחאות רלוונטיות לפי סוג הנכס**, זה עניין של צבעוניות בפתרון.

בשוק מניות בו מתקיימים מודל ה – CAPM מתקיימים שני תיקים יעילים: TICK 1 ו TICK 2. ידוע ששיעור ההשקעה בתיק השוק בתיק 1 הוא 70% ושיעור ההשקעה בתיק השוק בתיק 2 הוא 140%. תוחלת תשואה TICK 1 היא 20.5% ותוחלת התשואה של TICK 2 היא 31%. סטיית התקן של TICK 2 היא 42%.  
בנוסף, בשוק נסחרות המניות 3 ו 4 הנחשות כלא יעילות. תוחלת התשואה של מניה 3 היא 22% ושל מניה 4 היא 34%. סטיית התקן של מניה 3 היא 48%.

נדרש :

- האם נכונה הטענה שההרכב של התקנים היעילים כולל רק השקעות בתיק השוק ובנכש חסר סיכון (לרבות הלואה)? נמקו בקצרה ללא צורך בחישוב.
- חלצו את סטיית התקן של TICK השוק  $M$ .
- חלצו את סטיית התקן של TICK 1.
- חלצו את שער הריבית חסר הסיכון  $R_F$ .
- חלצו את תוחלת התשואה של TICK השוק ( $M$ ).
- מהי הביטא של המניות 3 ו 4 הגדרו אותן בהתאם לאגרסיבית, ניטרלית או דפסיבית.
- מהם רכיבי הסיכון במניה 3? בפרט, מהו רכיב הסיכון השיטתי (השאינו ניתן לפיזור) ומהו רכיב הסיכון השיטתי (הניתן לפיזור)?

פתרון :

### סעיף א – המשמעות של יעילות בהנחות CAPM

סביר את שני המשפטים הראשונים :

- בשוק מניות בו מתקיימים מודל ה – CAPM מתקיימים שני תיקים יעילים: TICK 1 ו TICK 2.
- ידוע ששיעור ההשקעה בתיק השוק בתיק 1 הוא 70% ושיעור ההשקעה בתיק השוק בתיק 2 הוא 140%.

מודל ה – CAPM הוא מודל לניהול תיקי השקעות, אשר מתקיים בסביבה כלכלית שבה קיימים גם נכסים מסוכנים וגם נכס חסר סיכון.

לפי הגדרות מודל ה – CAPM, כל התקיים היעילים מרכיבים משילוב כלשהו בין שני נכסים / תיקים : האחד, הוא נכס חסר סיכון  $R_F$ . השקעה בנכס חסר סיכון יכולה להיות גם "שלילית" או במשקל שלילי, ובמקרה כזה תייצג נטילת הלוואה (ש망תאפשרה במסגרת המודל).

הנכס השני שבו ניתן להשקיע במסגרת תיקים ייעילים הוא תיק השוק  $M$ . תיק השוק הוא השילוב האופטימלי של נכסים מסוכנים – זה אשר ניתן חלק מכספי ההשקעה אליו (או כולם) משמעו, שהחלק המסוכן בתיק מושקע בצורה אופטימלית.

בעצם, בכל תיק השקעות ייעיל בהנחות ה – CAPM בחירת המשקיע למשעה מתמזהה בשאלת של "איזה חלק מכספי" יסקן. אותו חלק יושקע בתיק השוק, והיתר בנכס חסר סיכון הנושא ריבית חסרת סיכון.

הויאל וניתן ליטול הלוואות – משקל ההשקעה בתיק השוק יכול לעבור את 100%. במצב כזה נאמר שהמשקיע נוטל הלוואה ומסקיע גם את כספו הפרטיו וגם את כספי הלוואה בתיק השוק.

**לכון, ובתמצית: הטענה נכונה. בהנחות ה – CAPM כל התקיים היעילים מרכיבים מנכס חסר סיכון ו/או תיק השוק במשקלים רלוונטיים למשקיע.**

#### סעיף ב – סטיית התקן של תיק השוק (והקשר בין משקל ההשקעה לערך זה)

ידוע שסטיית התקן של תיק 2 שהוא תיק ייעיל (ולכן מרכיב רק מנכס חסר סיכון / הלוואה ותיק השוק) היא 42%. בכל תיק ייעיל במודל ה – CAPM, כל הרכיב המסוכן נובע מההשקעת חלק בתיק השוק. היתרתו המושקעת בנכסים מסוכנים לא תורמת לסיכון.

בהתאם, תיקים ייעילים במודל ה- CAPM מקיימים את המשפט שאומר שסטיית התקן של תיק ייעיל במודל ה – CAPM שווה למכפלת השיעור מכספי המשקיע ( $W$ ) המשקיע בתיק השוק ( $M$ ), בסטיית התקן של תיק השוק :

$M$ . כולם :

$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

ובהצבת נתונים תיק 2 שלפיהם סטיית התקן היא 42%, ומשקל (שיעור ההשקעה) בתיק השוק היא 140%, נקבל :

$$\sigma_2 = 140\% * \sigma_M = 42\% \rightarrow \sigma_M = 30\%$$

#### סעיף ג – סטיית התקן של תיק 1

גם תיק 1 הוא ייעיל, ובנוסף, על פי נתונים השאלה נאמר : משקל ההשקעה בתיק השוק בנכס זה הוא 70%, וסטיית התקן של התקן היא 21%.

בהתאם תיק 1 ייעיל, גם הוא מקיים את המשווה המציג את הקשר בין משקל ההשקעה בתיק השוק  $W$  לבין סטיית התקן של התקן הספציפי :

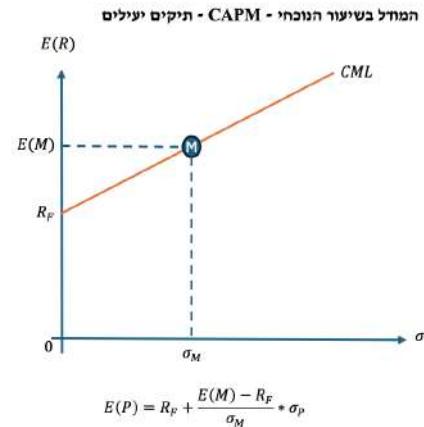
$$\sigma_P = W_M * \sigma_M$$

ובהצבת הנתונים בשאלת לגבי משקל ההשקעה בתיק השוק, לצד סטיית התקן של השוק, נוכל להגיע לסטיית התקן של התקן הספציפי 1 :

$$\sigma_1 = 70\% * 30\% = 21\%$$

#### סעיף ד – חילוץ הריבית חסרת הסיכון

הריבית חסרת הסיכון היא למעשה חלק מהמשוואת הישר שמנדר את התיקים הייעילים (לרובות אלו שבهم עסקנו בסעיפים קודמים).



בחרנו במשוואת זו כי היא אחד הקשרים שקיים בתיקים ייעילים, ואשר כוללים התייחסות לנכס חסר סיכון  $R_F$ .

להלן למשוואת ה- CML הקובעת את הקשר הבא לגבי כל התיקים הייעילים במודל:

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

רכיבו נתוני סיכון ותוחלת של התיקים הייעילים מנתוני השאלה והסעיפים הקודמים:

תיק 2	תיק 1	
31%	20.5%	תוחלת – נתונה בשאלת
42%	21%	סטיית תקן – חושבה לעיל

אם נתייחס לשיפועו כולם (המקדם של סטיית התקן של התקיק) בטור נעלם, נוכל לקבל בזריזות רבה את צמד המשוואות הבאות המתייחסות לתיקים הייעילים 1-2:

$$E(1): \quad (I) \quad R_F + x * 21\% = 20.5\%$$

$$E(2): \quad (II) \quad R_F + x * 42\% = 31\%$$

הפתרון המתתקבל מפתרון 2 משוואות בשני נעלמים הוא:

$$R_F = 10\%; \quad x = 0.5$$

מסקנה: הריבית חסרת הסיכון היא 10%.



#### סעיף ה – חילוץ תוחלת התשואה של תיק השוק

ה-א שהוא השיפוע של משווהת ה- CML המתאימה לתיקים ייעילים הוא למעשה :

$$\frac{E(M) - R_F}{\sigma_M}$$

בחצבת הערכים היודיעים לנו בשלב זה – סטיית התקן של תיק השוק במכנה, והריבית חסרת הסיכון במונה, נוכל להציג ולקבל (את הריבית חסרת הסיכון במונה חילצנו בסעיף ד, ואת סטיית התקן של השוק חילצנו בנדיש ב):

$$\frac{E(M) - 0.1}{0.3} = 0.5 \rightarrow E(M) = 25\%$$

#### סעיף ו – חילוץ הביטה של הנכונות הבודדות

הביטה היא מدد שנקרא "מקדם הסיכון השיטתי". מדובר ברכיב סיכון שמתקיים בכל תיק / נכס (בין אם הוא ייעיל ובין אם איינו ייעיל) למעט בנכס חסר סיכון (שבו הביטה אפס). מה מיוחד בביטחון בהשוויה לסטיית התקן? שabitatia לוכדת / מודדת רק את רכיב הסיכון שאינו ניתן לפייזור (השיטתי). לכן, הביטה יוצרת קשר בין ערכה (ערך הביטה) לבין תוחלת התשואה של כל נכס (גם אם הוא לא ייעיל וככל סיכון מיותר).

ברמה הפרקטית, כאשר השוק בשיווי משקל (ברירת מחדל), ולכן מקיים את משווהת ה- SML לגבי כלל הנכסים הנבחנים בו – ייעילים ולא ייעילים כאחת, יקימו את הקשר הבא :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

על פי נתוני השאלה, תוחלת הנכס הלא ייעיל (3) היא 22%.

בנוסף, תוחלת הנכס הלא ייעיל (4) היא 34%.

למרות שאינם ייעילים, ולכן הצבה במשווהה הלינארית של CML (ראו נדרשים קודמים) **אסורה**, כברירת מחדל מתקיים בשוק שיווי משקל שמאפשר להעריך את התוחלת של הנכסים על בסיס הביטה (וכן לחוץ את הביטה במידה וההתוחלת נזונה).

בנדרשים קודמים הראינו שהריבית חסרת הסיכון 10%, וכי תוחלת התשואה של תיק השוק 25%.

בחצבת נתוני הנכסים הלא ייעילים 3 ו-4 יותר הנתונים מנדירים קודמים, קיבל :

$$E(3) = 10\% + [25\% - 10\%] * \beta_3 = 22\% \rightarrow \beta_3 = 0.8$$

$$E(4) = 10\% + [25\% - 10\%] * \beta_4 = 34\% \rightarrow \beta_4 = 1.6$$

מעבר לעובדה שהביטה משקפת את האומד של הסיכון שאינו ניתן לפייזור ומשפיע על תוחלת התשואה בכל נכס – ברמה הסטטיסטית, היא מתארת את עצמת ההשתנות התשואה הנכס הספציפי ביחס לעוצמת השתנות תיק השוק. במלים אחרות : נכס בעל ביטה שקטנה מ-1 הוא נכס "דפנסיבי" מושם שעוצמת השתנות ערכיו תנודתית פחותה מזו של תיק השוק. נכס בעל ביטה שגדולה מ-1 הוא נכס "אגרסיבי". נכס שהביטה שלו היא 1 בדיקון נקרא נכס ניטרלי. בהתאם, נכס 3 הוא דפנסיבי (ביטה קטנה מ-1) ונכס 4 אגרסיבי (ביטה גדולה מ-1).

## סעיף ז – פיצול הסיכון לרכיביו – סיכון שיטתי ולא שיטתי

המשווהה מגדרה את שונות התשואה של כל נכס על בסיס סיכון רכיבי הסיכון שלו: רכיב הסיכון השיטתי (שאינו ניתן לפיזור ותלויה בביטא) ורכיב הסיכון הלא שיטתי (שניתן לפיזור, שניתן להמנע ממנו ע"י בנייה שונה של התקן) ואשר קיים רק בתיקים לא יעילים.

רכיב הסיכון השיטתי (המחובר הראשוני)  $\sigma_M^2 \beta_i^2$  והוא מהויה מכפלה של הביטה של הנכס ברכיבו בשונות של תיק השוק בעוד שרכיב הסיכון הלא שיטתי הוא "כל היתר"  $\sigma_{NS}^2$  (ולכן לעולם לא יחוש בפני עצמו אלא יחולץ).  
כלkommen :

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

הנדרש מבקש לחוץ את רכיב הסיכון השיטתי והלא שיטתי עבר נכס שהביטה שלו 0.8, כאשר ידוע שטיטית התקן של תיק השוק 30%, וטיטית התקן של הנכס עצמו היא 48%. כך אפשר לחוץ את רכיב הסיכון השיטתי (באדום) ואת רכיב הסיכון הלא שיטתי המחולץ בשלב הבא – בירוק :

$$0.48^2 = 0.8^2 * 0.3^2 + \sigma_{NS}^2 \rightarrow \beta_i^2 \sigma_M^2 = 0.0576 \quad \sigma_{NS}^2 = 0.1728$$

## **בהתמצית – אופן ההתייחסות לתרגיל זה:**

כשאנו דנים בתיקים יעילים במודל ה – CAPM עומדת לרשותנו ארסנל נוסחאות רחב למדוי שכוחו יפה רק לתיקים אלו (המודדרים כיעילים בנתוני השאלה).

ארסנל זה כולל בין היתר את משוואת הסיכון כפונקציה של משלבי השקעה וכן את משוואת הקו ישיר CML. יחד עם זאת, בתיקים יעילים מתקיימים גם קשרים מתמטיים נוספים, שאתם עשויים להידרש להם בשאלות שונות. נוסחאות נוספות אלו מרכזות לכט בראש מערך שיעור זה.

מעבר לכך אם עוסקים בחילוצים והגדירות הקשורות לתיקים לא יעילים, כל ארסנל נוסחאות הייעילות מאבד מתוקפו, ניתן לבצע שימוש בקשרים בין ביטה לתוחלת תשואת תיק, וכן במשוואת פירוק הסיכון לרכיביו.

## שאלה 70 - חילוץ יעילות ובדיקה של שווי משקל

להלן נתונים בדבר נכסים שונים בשוק הון :

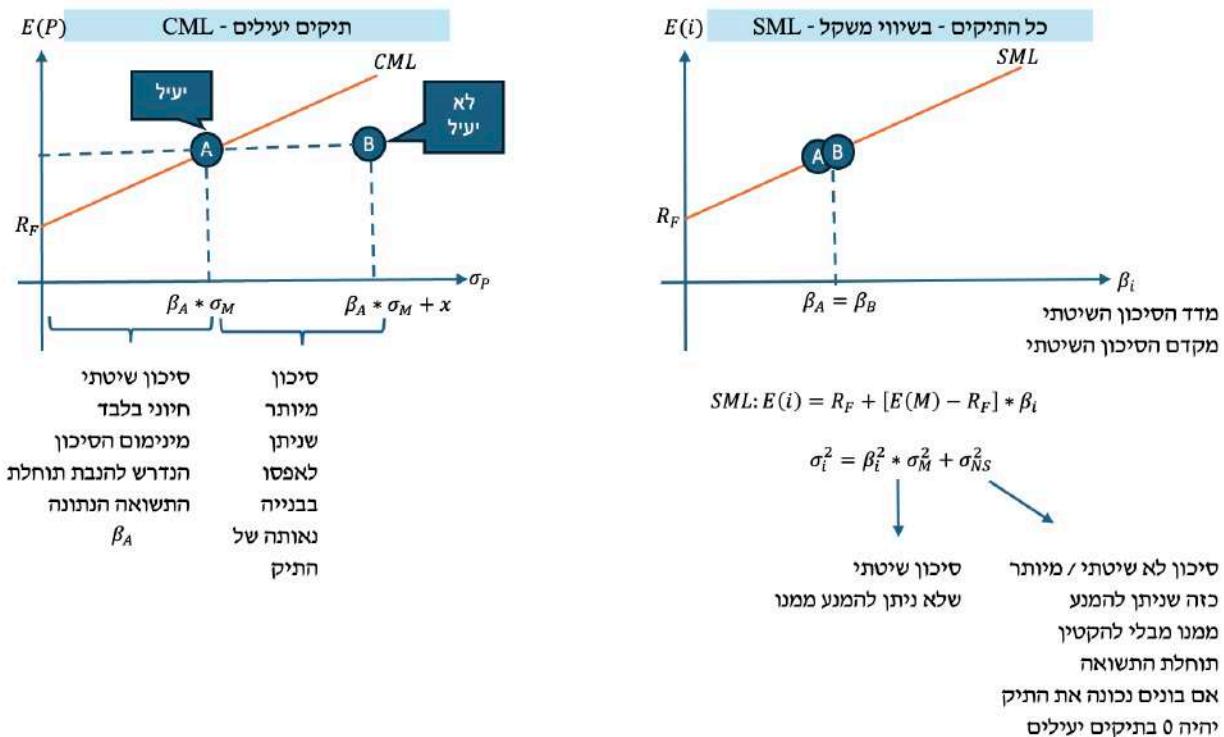
פרטים	נכס C	נכס D	תיק השוק	נכס חסר סיכון
תוחלת תשואה	22%	28%	25%	10%
סטטיסטיקת תקן	12%	25%	15%	0
ビיטה	0.8	1.4	1	0

נדרש :

- מי מבין הנכסים C או D הוא יעיל, אם בכלל? נמקו.
- האם שוק המניות בשווי משקל לפי SML? נמקו.
- כיצד יש לפעול על מנת להניב רווחי הון בשוק זה?

פתרון :

רקע: השאלה מתחילה בהבחנה בין שווי משקל ויעילות. וכייז מודל ה - **CAPM** יודע בכלל להתייחס לתיקים לא יעילים?



- יעילות ניתנת לבחון בכמה אופנים. הדרך הייעלה ביותר, בהינתן נתונים ביטא, תשען על הנוסחה הבאה שמתקינה רק בתיקים יעילים :

פרטים	נכס C	נכס D	תיק השוק	נכס חסר סיכון
תוחלת תשואה	22%	28%	25%	25%
סטיית תקן	12%	25%	15%	10%
ביטה	0.8	1.4	1	0

הראינו שנוסחה כללית לפירוק סיכון לרכיביו בתיק קלשה תהיה :

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

עוד ציינו, שכאשר מדובר בתיק **יעיל**, רכיב הסיכון המיותר / הלא שיטתי מתאפס :

$$\sigma_{NS}^2 = 0$$

מכאן שבתיקים יULLIM :

$$\sigma_P^2 = \beta_P^2 * \sigma_M^2$$

נציב את נתוני הנכסים C ו- D במשוואת זו. נכסים שיקיימו את המשוואת הם יעילים.

$$\sigma_C^2 = 0.12^2 = 0.8^2 * 0.15^2 \rightarrow 0.0144 = 0.0144$$

$$\sigma_D^2 = 0.25^2 = 1.4^2 * 0.15^2 \rightarrow 0.0625 = 0.0441$$

ב. כדי לבדוק האם שוק המניות בשוויי משקל, נבחן הצבה ב - SML וקיים המשוואת עבור כל נכס :

בבוחת שוויי משקל, כל הנכסים המסוכנים צריכיםקיימים את משוואת קו ה - SML.

המשוואת היא :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

נציב את הריבית חסרת הסיכון  $R_F = 10\%$  ואת תוחלת תשואת השוק  $E(M) = 25\%$  וואז קיבל :

$$E(i) = 10\% + [25\% - 10\%] * \beta_i$$

או בעצם :

$$E(i) = 10\% + 15\% * \beta_i$$

נציב את נתוני הביטה של נכס C - מגלת מהי התוחלת הצפואה, ומשווה אותה לתוחלת בפועל :

$$E(C) = 10\% + 15\% * 0.8 = 22\% = \text{תוחלת נתונה בפועל}$$

ולכן נכס C בשוויי משקל.

נציב את נתוני הביטה של נכס D - מגלת מהי התוחלת הצפואה, ומשווה אותה לתוחלת בפועל :

$$E(D) = 10\% + 15\% * 1.4 = 31\% > 28\% = \text{תוחלת נתונה}$$

המסקנה: נכס D איננו בשוויו משקל; תוחלותו בפועל (28%) נמוכה מזו הצפואה לאור רמת הסיכון השיטתי (הביטא) של הנכס ונתוני השוק (31%). במצב כזה, על פי המודל, נטען כי לאורך זמן המשקיעים יגלו שמדובר במניה מסוכנת מדי ביחס לתוכלת שהיא מניבה; המשקיעים יברחו מהנכס ומחירו צפוי לרדת.

אם התוחלת בפועל הייתה גבוהה מהczפואה בשוויו משקל - לפי המודל, לאורך זמן המשקיעים היו מගלים שמדובר במניה מדהימה ואטרקטיבית ביחס לרמת הסיכון שלה, וכך - היו רוכשים את הנכס בהמוניים ומחיר המניה היה עלה.

ג. כיצד יש לפעול על מנת להניב רוחחי הון בשוק זה?

כדי להניב רוחחי הון, נדרש לרכוש בזריזות נכסים המניבים תוכלת הגבוהה מזו הצפואה לפי SML. מדוע? כי לאורך זמן, בהנחות המודל, המשקיעים יגלו את התשואה העודפת הנ"ל, יתנפלו לרכוש את הנכס, ומחירו יעלם.

לחילופין, ניתן למכור בחסר נכסים המניבים תוכלת הנמוכה מזו הצפואה לפי SML. מדוע? כי לאורך זמן, בהנחות המודל, המשקיעים יגלו את תשואת החסר, יברחו מהמניה ומחירו ירד. בנתוני השאלה - נכס D הוא המניב תוכלת תשואה בחסר (نمוכה מהczפואה,  $28\% < 31\%$ ) ולכן נמכור נכס זה בחסר כדי להניב רוח הון.

#### מה למדתי מהשאלה?

- למדתי שחזק מודל CAPM בהקשר לנכסים ייעילים (קו ה - CML וباופן כללי - הנוסחאות 4-1 מתחילה מפגש ההנחה) עליינו ללמידה להתייחס גם לנכסים / **תיקים שאינם ייעילים**.
- התיחסות זו תהיה מבוססת על **ביתא**, ועל שני פיתוחים עיקריים :

  - האחד הוא SML, שבודח את הקשר שבין רמת הסיכון השיטתי (המצוורית) להשקעה בנכס (ביתא) לבין תוכלת התשואה.
  - הפיתוח הנוסף - הוא פירוק הסיכון לרכיביו (כך שבנכט לא ייעיל ישנו סיכון שיטתי ולא שיטתי).

- עוד הבחרנו, שה - SML צפוי להתקיים לכל סוגי הנכסים ללא תלות ביעילותם ובלבד שמדובר בנכסים בשוויו משקל.
- שווי משקל הוא ברירת מחדל בקורס.**
- יחד עם זאת, אם שאלה מבקשת לבדוק האם קיים שוויי משקל, זה אומר שהנחה מופרת, וצריך לבדוק אותה עבור כל נכס חדש על בסיס הצבה מתאימה של נתוני ב - SML.

**שאלה 71 - חישוב ערכי ביטא, תוחלת תשואה וטילובים**

בשוק ההון נסחרות המניות הבאות:

טילובים	טוחלת תשואה	שונות משותפת עם השוק
A	10%	0.009
B	15%	0.047
C	18%	0.03
D	7%	0.005

טבלת מקדמי מתאימים בין הנכסים:

D	C	B	A	
-0.3	0.3	-0.5	1	A
0.4	0.8	1		B
0.1	1			C
1				D

ריבית חסרת סיכון במשק מחושבת על בסיס נתוני מק"ם לשנה הנפוצה ב-100 ש"ח ומחירו היום 95.2381 ש"ח. כמו כן, ידוע כי תוחלת שיעור התשואה השנתית של תיק השוק היא 20% וטילוב התיק של תיק השוק 15%.

בשוק ההון מתקיימים מודלים - CAPM והשוק מצוי בשוויי משקל.

נדרש:

- חשבו את הביטה של כל נכס.
- חשבו את תוחלת התשואה של כל מניה.
- מה צפואה להיות בשנה הקרובת תוחלת התשואה השנתית של תיק המורכב מחלקים שווים של המניות C, B, A ו- D, ומהי טילוב התיק שלו?
- מהי תוחלת התשואה של תיק המורכב ממניות A ו- D בלבד וטילוב התיק שלו מינימלית?

פתרון:

השאלה עוסקת במגוון רחב של חישובים מתמטיים / סטטיסטיים, שעוזרים לנו להבין קצת יותר את האופן שבו מגיעים לערכים שבבסיס המודלים השונים ב- CAPM. בפרט:

- חשבו את הביטה של כל נכס.

נוסחה 1 - חישוב הביטה לפי היחס בין השונות המשותפת עם השוק  $Cov(i, M)$  לבין שונות תיק

השוק:

$$\beta_i = \frac{Cov(i, M)}{\sigma_M^2}$$

נוסחה 2 - חישוב הביטה לפי מקדם המתאים בין המניה לשוק מוכפל ביחס בין סטיית התקן של הנכס לבין סטיית התקן של השוק :

$$\beta_i = \rho(i, M) * \frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

בשאלה הספקטיבית זו, אני מקבל בטבלה את נתוני השונות המשותפת עם השוק. לכן נפעיל בנוסחה :

שונות משותפת עם השוק	סטיית התקן	
0.009	10%	A
0.047	15%	B
0.03	18%	C
0.005	7%	D

נתון בנוסף שסטיית התקן של תיק השוק 15%.

נציב ונקבל :

$$\beta_A = \frac{0.009}{0.15^2} = 0.4$$

$$\beta_B = \frac{0.047}{0.15^2} = 2.09$$

$$\beta_C = \frac{0.03}{0.15^2} = 1.33333$$

$$\beta_D = \frac{0.005}{0.15^2} = 0.2222$$

ב. חשבו את תוחלת התשואה של כל מניה

בהתדרה, שיווי משקל (לא יעילות) מתקיים כברירות מיוחד. לכן, אלא אם יש סיבה טובה להניח אחרת, משוואת ה - SML מתקיימת בשוק ההוון עבור כל סוגי הנכסים.

$$SML: E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

בשאלה נתון :

הרביה חסרת הסיכון  $R_F$  נדרשת לחילוץ מנתוני מק"ם שעולה היום 95.2381 ש"ח ונפוצה בעוד שנה בתמורה ל-100 ש"ח.

$$R_F = \frac{100}{95.2381} - 1 = 5\%$$

תוחלת התשואה של תיק השוק נתונה בשאלה :

$$E(M) = 20\%$$

וערכי הביטה של כל נכס בנפרד כבר חושבו :

$$SML: E(i) = 5\% + [20\% - 5\%] * \beta_i$$

או בעצם :

$$E(i) = 5\% + 15\% * \beta_i$$

נציב את ערכי הביטה השונים בשאלה ונקבל את תוחלות התשואה הרלוונטיות של כל אחד מהנכסים :

$$E(A) = 5\% + 15\% * 0.4 = 11\%$$

$$E(B) = 5\% + 15\% * 2.09 = 36.35\%$$

$$E(C) = 5\% + 15\% * 1.33333 = 25\%$$

$$E(D) = 5\% + 15\% * 0.2222 = 8.33\%$$

ג. מה צפואה להיות בשנה הקרובת תוחלת התשואה השנתית של תיק המורכב מחלקים שווים של המניות ו - D, B, C ו מהי סטיית התקן שלו ?

למרות שהשאלה עוסקת בעיקרו בעולמות ה - CAPM, חישוב התוחלת וסטיית התקן של תיקי השקעות המורכבים מnectים מסוימים בלבד - עוברת דרך דרכם ההגדרות של המודל הקודם (שיעור קודם) :

$$E(P) = W_B * E(B) + W_C * E(C) + W_D * E(D)$$

$$\sigma_P = \sqrt{W_B^2 \sigma_B^2 + W_C^2 \sigma_C^2 + W_D^2 \sigma_D^2 + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C * \rho(B, C) + 2W_B W_D \sigma_B \sigma_D * \rho(B, D) + 2W_C W_D \sigma_C \sigma_D * \rho(C, D)}$$

כאשר מדובר בתיק השקעות המורכב מ-3 מניות ב"חלקים שווים" הרי שהמשמעות היא :

$$W_B = W_C = W_D = \frac{1}{3}$$

נציב ונגלה :

$$E(P) = W_B * E(B) + W_C * E(C) + W_D * E(D)$$

$$E(P) = \frac{1}{3} * 36.35\% + \frac{1}{3} * 25\% + \frac{1}{3} * 8.33\% = 23.22\%$$

$$\sigma_P = \sqrt{W_B^2 \sigma_B^2 + W_C^2 \sigma_C^2 + W_D^2 \sigma_D^2 + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C * \rho(B, C) + 2W_B W_D \sigma_B \sigma_D * \rho(B, D) + 2W_C W_D \sigma_C \sigma_D * \rho(C, D)}$$

סטיית התקן	
15%	B

18%	C
7%	D

$$\sigma_P = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 0.15^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 0.18^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 0.07^2 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 0.15 * 0.18 * 0.8 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 0.15 * 0.07 * 0.4 + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 0.18 * 0.07 * 0.1}$$

והתוצאה (מקויה שלא טעיתי בהקלדה השם ירחים, העיקר שאתם מבינים את הדרך לעיל) :

$$\sigma_P = 11.251\%$$

ד. מהי תוחלת התשואה של תיק המורכב ממניות A ו- D בלבד וסטיית התקן שלו מינימלית?

גם הנדרש הזה חוזר לעולם של שני נכסים מסווגים בלבד. הראיינו בפגש הקודם, שכדי לחשב את תוחלת התשואה וסטיית התקן של תיק המורכב מ-2 נכסים מסווגים בלבד, علينا להשתמש תחילה בנוסחה לחילוץ משקליו השקעה בתיק מינימום סיכון :

$$W_A^{MNP} = \frac{\sigma_D^2 - \rho(A, D) * \sigma_A * \sigma_D}{\sigma_A^2 + \sigma_D^2 - 2 * \rho(A, D) * \sigma_A * \sigma_D}$$

ב换צבת נתונים השאלה נגלה :

$$W_A^{MNP} = \frac{0.07^2 - (-0.3) * 0.1 * 0.07}{0.1^2 + 0.07^2 - 2 * (-0.3) * 0.1 * 0.07} = 0.36649 \approx 36.65\%$$

$$W_D^{MNP} = 1 - W_A^{MNP} = 1 - 36.65\% = 63.35\%$$

וכעת נציב ערכים אלו בנוסחת התוחלת וסטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסווגים - ונוכל להגעה לנדרשים :

$$E(P) = W_A E(A) + W_D E(D)$$

$$E(P) = 0.3665 * 0.11 + 0.6335 * 0.08333 \approx 9.31\%$$

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_D^2 \sigma_D^2 + 2W_A W_D \sigma_A \sigma_D \rho(A, D)}$$

$$\sigma_P = \sqrt{0.3665^2 * 0.1^2 + 0.6335^2 * 0.07^2 + 2 * 0.3665 * 0.6335 * 0.1 * 0.07 * (-0.3)} \approx 4.83\%$$

מה למדנו מה שאלה זו?

- שישנן נוסחאות לחישוב הביטה באופן ישיר, במיוחד כשידוע מוקדם המתאים עם השוק או שונות משותפת עם השוק.
- שכאשר עוסקים בשילוב ספציפי בין נכסים מסווגים בלבד, אז גם כשמדבר במודל ה-CAPM למעשה חוזרים אחורה לנוסחאות של נכסים מסווגים בלבד.

## מפגש 6 - תרגול מסכם והিיערכות לבחינה (לא מעודכן!!!)

### מיini רציו:

מטרתנו לבצע דיוון מפורט במבנה הבחינה, ולאחר מכן לחתט טיפים ודוגשים להכנה, החלק העיקרי יכול פתרון שאלות בהדגש ככלו שנטבקשו על ידי הקהל. קישור ישיר להדרכה לקרה לבחינה 2024 ג - [קישור](#)

### הנחיות לבחינה

#### עדכון במבנה הבחינה ובחומר העזר המותר לשימוש, בסמסטר הנוכחי בעקבות המצב

הבחינה מורכבת מ - 20 שאלות רב ברירה בהן נדרש לסמן את התשובה הנכונה ביותר. אין בחריה בין השאלות ונדרש לענות על כל השאלות. השאלות מתייחסות ליחידות הלימוד השונות, בהתאם למשקל הייחסי שניתן ליחידות במפגשי ההנחייה:

**יחידה 1**, שאלת אחת לכל היותר אך יתכן גם ללא .

**יחידה 5**, 8 שאלות .

**יחידה 6**, 4 שאלות.

**יחידה 8**, 8 שאלות.

בחינה נדרש לסמן את התשובות הנכונות על גבי טופס המחשב המצורף לשאלון הבחינה (או להפריד את טופס המחשב משאלון הבחינה).

הבדיקה של השאלות מתבצעת על פי הסימן בטופס המחשב , אך נדרש להציג את החישובים וההסברים בצורה תמציתית ומסודרת (גם לשאלות התיאורטיות) כתיווחה במחברת הבחינה, שכן במקורה של טעות בתשובה מתבצעה בדיקה של הטווחה במחברת.

**לשימוש ליבכם, שאלות חישוביות לא יצקו בኒוקוד ללא הצגת דרך החישוב במחברת הבחינה!**

חומר העזר המותר לשימוש בבחינה:

**כל חומר עזר כתוב מותר לשימוש, כולל מחשבון מכל סוג.**

אסור בשימוש כל מכשיר אלקטרוני שבאמצעותו ניתן לאוצר מידע לרבות מכשיר טלפון נייד, מחשב נישא, שעון חכם ועוד'.

**מודולץ להביא לבחינה :**

1. זפירים מסוכמים המכילים את תמצית חומר הלימוד - נסחאות, הסברים ונוסחים מהותיים שהסטודנט הוכיח באופן עצמאן.

2. מחשבון.

3. גספח א' לחלק ד - טבלאות היון .

**בהצלחה מצוות הקורס**

### נקודות עיקריות ממפגש ההכנה לבחינה:

- **בקישור** מידע בדבר מבנה הבחינה. שימו לב לחובת הצגת הדרך בمعנה לשאלות רב-ברירה, וכן לעובדה שכל חומר עזר כתוב מותר בשימוש.
- הבחינה עצמה נמשכת 3 שעות, וכוללת 20 שאלות.
- היחידות המרכזית הן ייח' 5 ו-8, כמובן צריך גם את ייח' 6 ויכולת להיות שאלה תיאורטיבית על ייח' 1.
- בדרך כלל, בבחינה, השאלות מסודרות לפי ייחידות (במלים אחרות, לאatakל בתרכיש שבו יש שאלה על ייחידה 5, ואז על ייחידה 8, ואז על ייחידה 6, ופתאום חזרים ליחידה 1 – בסבירות ממד גבוהה). יחד עם זאת, **הסוגיות בתוך היחידות אינן מובדיות** (כלומר, אין כל הכרח شبיחידה 8 למשל, השאלות הראשונות יהיו על מרכיבי' ורך העוקבות על CAPM).

### מאגרי שאלות עיקריים לטובת למידה:

- **מטלות:** פתרון חוזר של המטלות צריך להתבסס על פתרון רציף שלහן, ללא סיוע כלשהו של מערכ מיפוי המטלות. יש חסרונו עצום להשקעה שלי במיפוי מטלות – והיא – שבדרך כלל אני עלול להתרגל להישען עליה ולהקצת זמן מועט מדי לבחינה: "לאיזה נושא זה קשור? מה הכללי?". זה כמובן חשוב מאד בתחום הבחינה להבנה (ובאופן כללי – אבל לקרה הבחינה זה קריטי).
- **מבחנים לדוגמא:** באתר יש 8 בחינות – בחלק מהמקרים השאלות הלא רלוונטיות (אלו שירדו מchromרי הסטטוס) סומנו, בחלק אחר זה ברור מהנתונים (ואם לא, אפשר לשאול ואtan גם כמה טיפים על זה). התשובות לרוב הבחינות מופיעות לאחר השאלה (למעט בחינה 8, הפתרונות להן בשאלון – בסופו, ולא בקובץ נפרד).
- **שאלות מהשיעורים + ממחברת הקורס.** בין אם עברנו על שאלה מסוימת / סוגיה בין אם לאו – היא רלוונטית. ודאו שידיעים לפתור ולהתyiיחס לכל השאלות במחברת.
- **לא לוותר על הרצפים באתר** – כוללים הסברים תמציתיים ברוב הנושאים העיקריים, מהפשט למורכב, וגם ובעיקר – שאלות בדרגת קושי מורכבת בסוף כל ייחידה תחת הכותרת "בחן את עצמך". אני כמנחה לא חשוב לבחינה האמיתית – אבל בסטטורים האחראוניים סטודנטים חזרו והציגו את החשיבות של פתרון מעמיק של שאלות "בחן את עצמך" ככלי להבנה לבחינה בהיבטים של סוגיות וניסוח.

### אופן הלמידה – המלצה חברית (כি כל אחד יאמץ לו דרכו)

- בדרך כלל, לפחות עבורי, האתגר העיקרי בבחינה, במיוחד בשלבים הראשונים להכנה לךראתה, זהו הקושי להבחין בין סוגיות שאלות, סוגים כלים, סוגים אפלו – באיזו ייחידה או תטמודל מדבר. ואם אני חלילה כושל בזזה, זה מורייד ביטחון וכמובן יכול להוביל לא רק לטעות בפתרון, אלא לבזבוז זמן קולוסאלי. המרכזת בדרך כלל שאלת את השאלה לפי סדר היחידות. ועדיין, בכל נושא יש תת-נושאים וקשרים שונים.
- לכן המלצה שלי היא לפתרון שאלות לפי נושאים, אבל אחר כך לפתרון אותן בערבותיה.

- למשל: אני פותר את מטלה 11, פותר את מטלה 12, וזו בונה לעצמי סוג של "מיקס" מהשאלות הללו. לוקח את השאלות ומעריבב אותן. וזו אני פותר מחדש (גם אם לא באופן מלא, כי חילוץ המשוואה הסופית טיפה פחותה היסטורי מותהיליך העובדה, כתיבת המשוואה הנכונה וכן הלאה) ומסביר לעצמי למה בחרתי דוקא בכלי זהה, מה בשאלת מבחינת מילות המפתח והדינן עזר לי להבין אליו כלי להשתמש וכן הלאה. טיפים עיקריים בנושא שמאד מבלבלים אותי – אני גם מעתיק לדף הנוסחאות.
- רק לאחר שסיימתי עם השאלות בצורה "ሞפרדת", וזו בצורה "מעורבלת", אני עוברת ל מבחנים לדוגמא, וזאת לאור העובדה שאין לצפות לmitsvoi כל הסוגיות האפשריות (או אפילו רוב רובן) על בסיס המבחנים לדוגמא באתר בלבד (הם כן מצוינים וכוללים שאלות מכל היחידות אבל לא מכל הסוגיות והפתרונות הפוטנציאליים).

## התנהלות בבחינה עצמה

- משך הבחינה 3 שעות.
- הבחינה כוללת 20 שאלות (במשקל זהה של 5 נק' לשאלת).
- המשמעות: 9 דקotas לשאלת.
- שווה לשקלול לדלג על כל שאלה מורכבת / שמסתבכת, וללכט על הנושאים / הניסוחים פשוטים ביותר תחילת. בהחלט ניתן מניסיוני לפטור חלק מהשאלות בפחות זמן, ובכך להגדיל את משך הזמן הממוצע שניtin להקצות לשאלות המורכבות.

## לאחר הבחינה

- **מרכז ההוראה מפרסמת תשובות סופיות לאחר קיומם הבחינה באתר הקורס.**
- אתם יכולים לרשום לעצמכם את תשובותיכם לצורך השוואה; אבל השוואת התשובות שלכם לא מביאה בחשבון בדיקת דרך ולא מביאה בחשבון מיסיחים חליפיים שלעתים מרכזות הקורס מאשרת כמצחים בניקוד חלקי. לכן יש מצב שתתבאו סתם.
- פרק הזמן למתן ציונים – עד 10 ימי עבודה. שرون מאד חוצה, ובמקרים רבים, חולף פרק זמן קצר יותר עד החזונה.

## לאחר קבלת הציון

- אפשר להזמין את מחברת הבחינה, אבל אי אפשר לקבל העתק מהשאלון.
- אפשר ליצור קשר מייל עם מרכזות הקורס [sharons@openu.ac.il](mailto:sharons@openu.ac.il) ולתאם שיחה (לעתים אפשר גם ל晤ת פגישה פיזית ברגענה כדי לראות את השאלה).
- לגבי ערורים:
  - ערורים צריכים להיות מקטועים. כמובן, יש לציין את השאלות הספציפיות ואת הסיבה המקצועית בעיטה נדרש תיקון. תיקון יבוצע רק בהתקנים טעות בבדיקה – כמובן: אם נרשם "לא בוצעה התאמת ריבית" והיא כן בוצעה. או "בוצע שימוש בערך עתידי במקום ערך נכון" ובסוף מתרברר לכם שכן השתמשם בערך נכון וכן הלאה. במקרים אחרות, בדרך כלל, ערורים כגון "רשמתי את הנושא הנכונה – פשוט לא יצא לי טוב. אם אפשר ניקוד חלקי על הנושא הנכונה". עוד המלצה: לא לירוח לכל כיוון. זה נראה לא רציני.
  - מסיבות טכניות, בטופס המשוב לבחינה, לצערנו, בשלב זה אין אפשרות לחזוי של "נכו"חלקית". למה הכוונה? נניח שיש מוניטי תשובה. התשובה הנכונה היא ג, אך מרכזות ההוראה זיכתה לפניהם מסורת הדין את תשובה א כנכונה חלקית. במערכת זה יסומן כתשובה "נכונה" אבל תקבלו רק 3 נקודות (ולפעמים 2). זו לא טעות וחבל על הזמן בערעור – כדי לוודא היכן טיעיתם – ראו לעיל באדום – בטופס התשובות של המרכזות באתר הקורס בלבד.

## מייפוי בסיסי של עיקרי החומרה למי שרצה סוג של Brief מסכם:

יחידה	הסתעפויות (לא ממצה) – נחמד לעBOR על זה ולודא שהמושגים מכלכליים מוכר לאחר סיום הלמידה
5	<p><b>ברובד הבסיסי:</b></p> <p>חישובי ערך עתידי - של סכום יחיד, של סדרה (מע"ס - FVFA, לוח א-2 בנספח א לפרק ד), לרבות מספר סדרות, התאמות זמן ותקופה, התאמות ריבית (כיצד חיבת התאמים בחישובים סדרתיים לפיק חזה בין תשלומים) וככל חילוצי ערכים (הפקדות, ריבית, תקופות וכיו"ב) כאשר הערך העתידי נתון.</p> <p>חישובי ערך נוכחי (שנקראים גם חישובי שווי / חישובי מחיר - מענ"ס - PVFA - לוח א-4 בנספח א לפרק ד) - כנ"ל (של סכום יחיד, של סדרה וכו'), לרבות של מספר סדרות ולרבות סדרה אינטואטיבית.</p> <p>חישובי ריבית - על בסיס מגוון נסחאות - המרת ריבית נקובה לאפקטיבית, התיאחות לריבית מראש, שילוב של ריבית דרייבית וריבית מראש, וגם חילוץ ריבית מנתוני סדרות (לוויית CD וכו' ... אתה מוחזיר כל חודש CD וכו' ... מהי הריבית המגולמת בעסקה). ברמת "מה להציג" – רוב חישובי הריבית ומעברי הריבית ב מבחנים הם המערבים הבסיסיים ביותר הנשנים על <math>1 - \frac{1}{(1+r)}</math>. בכל מקרה שבו בשאלת המרת הריבית מבוצעת בדרך אחרת, חשוב להבין מדוע, ובמידה ולא בהיר – להקפיץ שאלה.</p> <p><b>ברובד המורכב יותר - יישומים:</b></p> <p>ישומים ממשמעם ש: (א) לא בהכרח מצינים בפנוי את הערך הנוכחי / העתידי. אני צריך להסיק מסוג השאלה את סוג הכללי. (ב) בדרך כלל, שאלות כאלו נשענות על חילוץ. להלן דוגמאות:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- בחירה בין חלופות (על ידי חישוב הערך הנוכחי של כל חלופה - ובחירה במשתלמת יותר).</li> <li>- הפקדות ומשיכות (אני אוהב לקרוא לזה "אייזון אקטוארי") - שבדרכ כל אלו פותרים על ידי חישוב FV של הפקדות והשוואות ל - PV של המשיכות.</li> <li>- חילוצי ערכים: ידוע הערך הנוכחי; יש לחלו ריבית; ידוע הערך העתידי - יש לחלו מספר תשלומים; ידוע סכום סכום החסכו, יש לחלו את סכום ההפקדה וכיו"ב.</li> <li>- הלוואות - במיוחד (אבל לא רק!) הלוואות שפייצר (החזירים קבועים) והלוואות הנפרעות בהחזרי קרו שווים (לוח סילוקין רגיל). כולל שינויים בלוח - ההלוואה בתנאים מסוימים, ובשלב מסוימים משתנה, ועוד אז - צריך לחשב את יתרת ההלוואה עבר השינוי ולפירוש אותה כ"הלוואה חדשה" לפי התנאים החדשניים.</li> <li>- ספציפית לגבי הלוואות – הדיוון במחברת הקורס השוטפת הוא מצומצם יחסית, יש לדאוג להרחיב מהריצפים ובנוסף ניתן (לא חובה) להסתיע בחומרה הנוספים שבסוף מחברת הקורס.</li> </ul>
6	<p><b>ברובד הבסיסי:</b></p> <p style="text-align: center;"><b>סוגיות הקרייטריונים לבחינת כדיות השקעות</b></p> <p>חישוב NPV – ענ"ג</p> <p>חישוב IRR – שט"פ</p> <p>חישוב PI – מדד רווחיות</p> <p>חישוב החזר הון שנתי.</p> <p>כדיות לפי כל קרייטריו</p> <p style="text-align: center;"><b>סוגי פרויקטים</b></p>

<p>צריך לדעת קודם כל אילו סוג פרויקטים קיימים, ואיך מזהים את המבנה התזרימי שלהם.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- קונבנציונליים של השקעות (מתחללים מتوزרים שלילי / שליליים ובהמשך הופכים לחובי / חיוביים בלבד).</li> <li>- קונבנציונליים של נטילת הלוואות – מתחללים מتوزרים / תזרימיים חיוביים, ובהמשך הופכים לשיליים / שליליים (צורת עוקום ענין "הפוכה" עולה משמאלי לימין, קרייטריון IRR הפוך).</li> <li>- לא קונבנציונליים : מספר היפוכי סימן שונה מ-1, כל פרויקט שלא עונה לאחת מ-2 ההגדרות הקודמות.</li> <li>- לדעת אילו קרייטריונים רלוונטיים / לא רלוונטיים ובאיוזה מצב. <a href="#">ראו כאן טבלה רלוונטיות</a></li> </ul>	
<p><b>פרויקטים שונים / מתחרים / דירוגי פרויקטים / סטירה בין קרייטריונים / הצגה גרפית</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- הצגה גרפית של פרויקטים – קונבנציונליים של השקעה (ירודים משמאלי לימין, כולל הנקודות שלמדו לאפיונים המלא), וקונבנציונליים של הלוואה (הופכים) ולא קונבנציונליים (שאין להם תיאור גרפי ספציפי).</li> </ul> <p><b>בהתאם דירוג פרויקטים (מי עדיף על מי / מה לבצע / בחירה בין פרויקטים :</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- בלתי תלויים (אפשר לעשות מה שנחפץ, ללא מגבלות). הקרייטריונים מוצבים בכיוונים דומים*.</li> <li>- מוצאים זה את זה (יש לדרגם, ולבחר אחד מתוכם בלבד, לכל היותר) – ההחלטה הכלכלית הבונה היא לבחור בפרויקט שסכום ענין NPV. יחד עם זאת, אם דרישים ספציפית ליישם דירוג לפי שת"פ – נעשה מה שמקשיים.</li> <li>- מגבלת תקציב (ניתן לבצע מספר פרויקטים, כל עוד תקציב ההשקעה בזמן אפס לא חורג מסכום נתון מוגדר). דרוש מאיתו לבדוק – אילו פרויקטים ניתנים לביצוע במוגבלת תקציב ההשקעה.</li> <li>- לשים לב לקרייטריונים שניtinן לישם כדי לקבל החלטות בכל אחד מהמקירים, ולקשרים בינו הקרייטריונים.</li> <li>- למשל: קרייטריון הענין תמיד מוביל להחלטה נכונה כלכלית;</li> <li>- קרייטריון השת"פ עלול להוביל להחלטות שגויות ולסתירה (למשל בשוגד ה השקעה שונה, או כשהפרויקטים מוצאים זה את זה).</li> </ul>	
<p><b>בסיסי – מימון בתנאי סיכון :</b></p> <p><b>1. נכסים מסוכנים בודדים – הבחירה בינויהם ודירותם</b></p> <p>חישוב תוחלת תשואה וסטטיסטית תקן – נכסים בודדים</p> <p>בחירה בין נכסים מסוכנים בודדים לפי תוחלת-שונות, על פי התוחלת וסטטיסטית התקן שלהם [זכרו : הקרייטריון מניח שנאות סיכון של המשקיע, והבדיקה לצורכי הכרעה היא גם של סטטיסטית התקן וגם של התוחלת].</p> <p>בחירה גם מנקודות ראות משקיעים אחרים – ההגדרות הבסיסיות שהוצעו לאוהבי סיכון ואדיישים לסיכון.</p> <p>נקודות של שעלו :</p> <p>דges : אם ישנו נתוני התפלגות (הסתברות לכל אירוע) לוודא תמיד שהם משלימים ל-100% : אם ההסתברויות לא משלימות ל-100% חובה ליצר תריחס נוספת עם ההסתברות המשילמה שתוצאתו 0. למשל, אם מציגים פרויקט שינייב 100 ש"ח בהסתברות 30%, ו-200 ש"ח בהסתברות 60%, ואין מידע נוסף – אני חייב ליצור שורה נוספת נוספת שבה אציין שהסתברות 10% (המשלים של 1-30% ל-60%-100%) התקובל.0.</p>	8

**דש נסף:** אם פרויקט מסוים מניב בכל מצב טبع תקבול גבוהה מחברו, הוא יוערך על ידי כל סוג המשקיעים ללא תלות ביחס לסטיכון. למשל: פרויקט שנותן 100 או 200 תמיד יהיה עדיף מפרויקט שנותן 4 בזודאות. אבל אם מבקשים לשפטו ספציפית לפי קriterיוו תוחלת שנותן – אל תשתמשו בכלל זה אלא בבדיקה של ערכי התוחלת והשנותן.

## 8. המשמעות של שימוש נכסים מסווגים בלבד - גישת תיקי השקעות (נושאות סטטיסטיות) :

- תוחלת תושאות תיק המורכב משני נכסים מסוימים (לפי משקל השקעה בכל נכס). סטיית תקן של תיק המורכב משני נכסים מסוימים (לפי משקלים ומקדמים מתאימים / שונות משותפת -  $COV$ ). ברוב רובן של השאלות לא תצטרכו לחשב את מקדם המתאים או השונות המשותפת בעצמכם. יחד עם זאת, זה קורה לעיתים (לא בוצע ב厯גשימים). התנאי להקטנת סיכון והיכולת לאירוע את עקומת תמהילי ההשקעה לפיו:  $\frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}} < \rho$  זה התנאי שמאפשר הקטנת סיכון.

תיק מיניומים סיכון - משקל ההשקעה בכל נכס בתיק כזה  $W_A^{MRP}$ . הן לשם חילוץ המשקלים עצם, והן לשם הצבה בנוסחאות תוחלת / סטיית תקן של תיק כדי לחשב את ערכיו. היכולת להציג גרפית את עוקום תמהילי ההשקעה האפשריים ולקבוע איזה חלק הוא עיל (בחירת המשקיע הפוטנציאלית). זכרו – עיילות מתחילה מminiומים סיכון ונמשכת ימינה ולמעלה. יכולת בוחלת להיות שאלת (לא נפוץ, ובדרך כלל לא יותר משאלת אחת) על 3 נכסים מסוימים, הריאנו נושאות ארוכות שפטורות זאת). האמת – תתפללו זהה.

8.3 מודל CAPM – המרכיב בייתור: שכולל אפשרות להשקעה חסרת סיכון ולוואות, וידוע בהתייחס גם

لتיקי השקעות עילאיים, וגם לתיקים / נכסים שאינם עילאיים :

מודל ה - CAPM - כשדנו במודל ספציפית, או כאשרנו מזהה נתונים הרלוונטיים רק למודל כגון נכס חסר סיכון,תיק השוק, אג"ח ממשלתית (נכס חסר סיכון במילימ' אחירות), או כשמדוברים על ביתא, או כששאלת סיכון,תיק השוק, אג"ח ממשלתית (נכס חסר סיכון במילימ' אחירות) / לא שיטתי (סיכון שאינו ניתן לפיזור / הניתן לפיזור).

## בשאלה עסקת בתיקים ייעלים – עולם ה CML :

- אם בשאלת יש נתון מפורש שהתקיך יעל.
  - ו/או שהתקיך מורכב רק משלילוב כלשהו של נכס חסר סיוכו ותיק השוק.
  - ו/או שהתקיך מורכב מתיקים ייעילים אחרים.
  - אז ורק אז יוכל להסיק אוטומטית שהתקיך יעל, וכן כל להשתמש בנוסחאות הרלוונטיות המתאימות לתיקים ייעילים.
  - רבות מהשאלות במאובץ כזה – ידרשו בעיקר יישומים של חילוץ באמצעות הנוסחאות הללו.

בששאלה לא מאפשרת להנich שהתיק יעליל – עולם ח – SML :

- המשוואות הרלוונטיות התקיפות לכל סוגי התיקים (לרובות לא יעילים) מתקיימות בברירת מחדל.
  - בנוסף, שימוש במשוואות אלו מניה קיומו של שיווי משקל.
  - במקרה אחר: בברירת מחדל, שיווי משקל (קיים משוואות ה-*SML* ופיתוחו לשוגה) הוא בוגר בריית מחדל, בעוד שיעילות איננה בריית מחדל (או לעיל).

<p>- <b>ייתכנו גם שאלות ששואלות "האם מתקיים שוויי משקל". אם אני נתקל בשאלת כזו – אוטומטית מופרת ההנחה של שוויי משקל כברירת מחדל.</b></p> <p><b><u>דגשים נוספים:</u></b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- משווהות ה - TML ולהכיר גם בرمה התיאורטיבית חשיבות הביטה כמדד סיכון (במוקם חשיבות סטיטית התקן כמדד סיכון).</li> <li>- רכיבי הסיכון : סיכון שיטתי (איןנו ניתן לפיזור) סיכון לא שיטתי (ניתן לפיזור).</li> <li>- הבדלים עקרוניים בין תיקים ייעילים ולא ייעילים : למשל, סיכון לא שיטתי אפס כשהתיק ייעיל ; למשל – כאשר ביטה עולה בשיעור מסוים, אם התקיק ייעיל – הסיכון עולה באותו שיעור ואם התקיק לא ייעיל, לא ניתן להסיק מכך על הסיכון הכלול (סטיטית התקן). נושא זה הוא מורכב, דרך התרגול העיקרית שלו צריכה להיות מהמחברת ודרך ריכזו בהיר של הנושאות בהקשר זהה.</li> <li>- <b><u>חילוקים מגוונים ממד מכל סוג <a href="#">המשוואות הרלוונטיות</a>.</u></b></li> <li>- חישוב מוקדם מתאים / שונות משתפת של נכסים בוודדים עם השוק : לעיתים אפשר לחוץ מתוך ההגדרה המתמטית של הביטה, ולעתים יש צורך בחישוב ישיר של מוקדם המתאים (שאלה ארכואה ממד).</li> </ul>	
---	--

## שאלה 1.7 – מטלה 12 – יח' 8 (סמסטר 2024ב)

1.7 הנicho כי לפניכם ההשעויות הבאות:

26	12	4	% תשואה ב-	השעיה א': הסתרות
0.5	0.3	0.2		השעיה ב': תשואה ב- % הסתרות
30	18	8	% תשואה ב-	
0.3	0.4	0.3		

סמןו את הקביעה הנכונה -

- א. משקיעים אוהבי סיכון יהיו אדישים בין א' ל-ב'.
- ב. כל שוני הסיכון יעדיפו את ב' על א'.
- ג. כל שוני הסיכון יעדיפו את א' על ב'.
- ד. כל המשקיעים יעדיפו את ב' על א'.
- ה. אף אחת מהtheses עליל אינה נכונה.

פתרונות :

כאן זיהיתי מצב שבו מדברים על ההשעויות מסוכנות נפרדות. עצם קיומם הסיכון נובע מכך שקיימים ערכי תשואה שונים אפשריים לכל השעיה, כאשר ההסתברות לכל תשואה אפשרית ידועה. במצב זה, מיד שאל את עצמי – באיזה תט מודל מדובר? האם מדובר במודל CAPM שכולל נתוני ביתא? נתוני שוק? ריבית חסרת סיכון? התשובה – לא. האם מדובר במודל שלילוב של שני נכסים מסוכנים? התשובה לא. אף טענה / היגד לא מציין זאת, ובנוסף – אין מידע בדבר מקדים המתאים

, שצורך להתקיים כאשר דנים בשילובים מסוכנים כאמור.

בכפוף לכך שיש לקבוע מהויחס ההעדפה של צרכנים בין נכסים בודדים אלו, נdag לחשב את תוחלת התשואה ואת סטיית התקן שלהם בנפרד, לפי ערכי התפלגיותיהם. התוחלת תחושב על בסיס מכפלת ההסתברות לכל תשואה בתשואה הרלוונטית, סטיית התקן תחושב על בסיס ההפרשים בין התשואות תוחלת:

תוחלת תשואה של נכס בודד כאשר התפלגות תשואותיו ידועה (ידועה הסתרות ו גם תשואה):

$$E(A) = P_1 * R_1 + P_2 * R_2 + P_3 * R_3 \dots$$

ובחצבה :

$$E(A) = 0.2 * 0.04 + 0.3 * 0.12 + 0.5 * 0.26 = 0.174 = 17.4\%$$

$$E(B) = 0.3 * 0.08 + 0.4 * 0.18 + 0.3 * 0.3 = 0.186 = 18.6\%$$

סטיית התקן של נכס בודד כאשר התפלגות תשואותיו ידועה :

$$\sigma_A = \sqrt{P_1 * [R_1 - E(A)]^2 + P_2 * [R_2 - E(A)]^2 + P_3 * [R_3 - E(A)]^2 + \dots}$$

ובחצבה :

$$\sigma_A = \sqrt{0.2 * [0.04 - 0.174]^2 + 0.3 * [0.13 - 0.174]^2 + 0.5 * [0.26 - 0.174]^2} \approx 0.09 = 9\%$$

$$\sigma_B = 0.085 = 8.5\%$$

רכיב זה הממצאים :

נכס ב	נכס א	תוחלת
18.6%	17.4%	
8.5%	9%	ס. תקן

כדי לבחור בין הנכסים, בהנחת אי שילוב, הרי שהדבר תלוי בטען המשקיע :  
אם המשקיע שונא סיכון – הרי שבמימד התוחלת מועדף נכס ב (תוחלתו גבוהה יותר).  
במימד סטיית התקן מועדף נכס ב (סיכוןנו נמוך יותר).

במצב כזה – כמובן שהmarktיע יעדיף את נכס ב. ניתן גם לומר במצב כזה שי"ל פי קритריון תוחלת שונות יועדף נכס ב". **לכן טענה ב נכס ב וטענה ג שגויה.**

אם המשקיע אוהב סיכון – הרי שבמימד התוחלת מועדף נכס ב (תוחלתו גבוהה יותר).  
במימד סטיית התקן מועדף נכס א (סיכוןנו גבוהה יותר, והmarktיע אוהב סיכון)  
במצב כזה, לא ניתן לקבוע (בהתנחת ההשפעות הסותרות) מה יעדיף אהוב הסיכון.  
**משמעותו לב: מצב שבו אומרים "לא ניתן לקבוע" משמעו, שאוהבי סיכון שונים יכולים לפעול / להעדיף בצורה שונה. אי היכולת לקבוע אין משמעות אידישות.** **לכן טענה א מטה שגויה, וכן טענה ד שגויה.**

אם המשקיע אדיש לסיכון – הרי שבמימד התוחלת מועדף נכס ב (תוחלתו גבוהה יותר).  
מימד סטיית התקן – פשוט לא רלוונטי עבורו  
במצב כזה, מועדף נכס ב.

#### סיכום ביניים:

כל המשקיעים מגלים העדפה במימד התוחלת לפרויקט שתוחלתו היא הגבוהה יותר.  
במימד הסיכון, המשקיעים נבדלים זה מהה בעדפותיהם לפי היחס לסיכון:  
שונא סיכון – במימד הסיכון, יעדיף את הפרויקט בעל הסיכון הנמוך יותר.  
אהוב סיכון – במימד הסיכון, יעדיף את הפרויקט בעל הסיכון הגבוה יותר.  
אדיש לסיכון – לא יתיחס בכלל לסיכון וישפטו / ידרוג על פי תוחלת בלבד.  
בכל מקרה שבו קיימת סתירה בין העדפות בממדים השונים (פרויקט א עדיף לפני פרויקט ב עדיף לפני מימד סיכון)  
לא ניתן להכריע / לקבוע העדפה / אידישות בין הפרויקטים.

## מטלה 12 – שאלה 1.8 (סמסטר 2024)

### 1.8 סmeno את הקביעה הנכונה -

- א. COV או מקדם המתאים לאפשרים לפזר סיכון על-ידי גיון.
- ב. גישת פיזור סיכון באמצעות גיון אפשרית רק במקרים פיננסיים, לאחר ונכסים פיזיים אינם ניתנים לחלוקת.
- ג. פיזור הסיכון ניתן לביצוע רק כאשר יש מתחם שלילי בין תשואות הנכסים.
- ד. פיזור הסיכון ניתן לביצוע רק כאשר אין בכלל מתחם בין תשואות הנכסים.
- ה. תשובות ב' ו-ג' נכונות.

**נתיחה לכל טענה בנפרד:**

#### טענה א: ה-COV או מקדם המתאים לאפשרים לפזר סיכון על ידי גיון

הטענה נכונה. גיון משמעו – שילוב נכסים שונים בתיק ההשקעות. כאשר משלבים נכסים מסוכנים, הנוסחה לחישוב סטיית התקן היא אחת מבין שתי הוריאציות הבאות:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho(A, B)}$$

הגדרת מקדם המתאים ברמה הסטטיסטית היא:

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

כלומר וריאציה לנוסחת סטיית התקן של תיק השקעות המורכב משני נכסים מסוכנים:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B COV(A, B)}$$

גם ברמה האינטואיטיבית – היכולת לפזר את הסיכון תלוי בתשובה לשאלת "האם ועד כמה הנכסים מתנהגים אותו דבר".

#### טענה ב: גישת פיזור הסיכון אפשרית רק במקרים פיננסיים מאחר ונכסים פיזיים אינם ניתנים לחלוקת

השליליה של טענה זו נובעת מהמציאות שבהחלטה ניתן לרכוש בחלוקת גם נכסים פיזיים. כגון: קבוצת רכישה לבניינים, כגון קרנות Private Equity, קרנות REIT. אכן לא דיברנו על זה בקורס – מבחינותנו שנדע לקראת המבחן שהפרשנות שלנו כרגע עודכנה לגרסה המודרנית בהקשר זה.

#### טענה ג: פיזור הסיכון ניתן לביצוע רק כאשר יש מתחם שלילי בין תשואות הנכסים

הטענה שגויה, כי התנאי לפיזור (צמצום) הסיכון איננו מקדם מתאים שלילי אלא:

$$\rho(A, B) < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$$

בاهינתן העובדה שהיחס בין סטיות התקן חיובי תמיד, גם מקדמי מתאימים חיוביים שנמכרים מהיחס אפשרו הקטנת הסיכון.

**טענה ד: פיזור הסיכון ניתן לביצוע רק כאשר אין בכלל מתאימים בין תשואת הנכסים**  
הטענה שוגה, כי התנאי לפיזור (צמצום) הסיכון אינו מקדם מתאום 0 (אין בכלל מתאום) אלא:

$$\rho(A, B) < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$$

בاهינתן העובדה שהיחס בין סטיות התקן חיובי תמיד, גם מקדמי מתאימים חיוביים שנמכרים מהיחס אפשרו הקטנת הסיכון.

### שאלה 8 – מבחן 6

#### שאלה 8

חברת "חישבון" בע"מ זוקה למכונית דפוס חדשה. בשוק קיימים שני סוגי מכוניות דפוס:

סוג א	סוג ב
אורך חיים	4 שנים
עלות רכישה	45,000 ש"ח
עלות תפעול שנתית	20,000 ש"ח

שתי המכוניות בעלות תפוקה זהה לחלווטין, החברה אינה משלם מס, ומהיר ההון שלה 15% לשנה.  
בנחתה שמדובר בהזדמנויות השקעה חד-פעמיות, **איזה מכונה כדאי לחברת לרכוש?**

- א. מכונה מסוג א.
- ב. מכונה מסוג ב.
- ג. לא ניתן להשוות בין מכוניות בעלות אורך חיים שונה.
- ד. לא ניתן לקבוע העדפה, בהיעדר מידע על ההכנסות.
- ה. תשובות ג-ד נכונות.

**פתרון:**

סוגיית המס לא רלוונטית לבחינה. כאשר אני נדרש להכריע בין השעות שתזרימיהן ידועים, וגם מחיר ההון ידוע – אזי גם אם אורך החיים שונה, הרי בהינתן העובדה שלא ניתן לחזור על ההשקעות – פשוט אחשב NPV לכל השקעה, ואעדיף את זו שהענין שלה גבוהה יותר.

$$NPV_A = -45,000 - 90,000 * PVFA(15\%, 4) = -301,950$$

$$NPV_B = -200,000 - 20,000 * PVFA(15\%, 3) = -245,664$$

למרות שני ערכי הענין לכארה שליליים, הדבר נובע רק מכך שאין נתונים כמותיים לגבי ההכנסות. במצב זה, יעדף הפרויקט שענין הוצאותיו הוא ה"גובה ביותר" (הכי פחות שלילי) לעומת תשובה ב.

## בחן את עצמך – רצפים – ייחידה 5 – שאלה 17

### שאלה 17

בנק מציע הלוואות בסך 300 אלף ש"ח.

הלוואה אחת ניתנת לשנתיים כאשר הריבית בשיעור 2% לחודש מושלמת עם פרעון הקרן בתום התקופה. לחילופין, נตอนן הבנק הלוואה לשנתיים של 300 אלף ש"ח כאשר הריבית בסך 100 אלף ש"ח מנוכה מראש עם מתן הלוואה.

### שאלה 17

לא הסתומים

ניקוד השאלה:

5.00

3 סימון שאלה

יש לבחור תשובה אחת:

- א. מכיוון שהריבית השנתית על הלוואה הראשונה היא כ-27%, בעוד שהריבית השנתית על הלוואה השנייה כ-33%, כדאי לבחור ב haloah השניה כ-22.5%.
- ב. הריבית השנתית ב haloah השניה נמוכה מהריבית השנתית שב haloah הראשונה.
- ג. הריבית השנתית ב haloah השניה נמוכה מהריבית השנתית שב haloah הראשונה.
- ד. אין אפשרות לחשב את הריבית השנתית ב haloah השניה, כיון שהיא מושלמת מראש.
- ה. תשובות ב א-ג נכונות.

הגשת תשובה

### פתרון:

על בסיס נתונים השאלה ומשמעות התשובה, אני מסיק שמדובר בשאלת העוסקת ברייבית אפקטיבית (משוםSCP) הנתונים באפשרויות התשובה הם באחוזי ריבית).

ננתח בהתאם לכלים הרלוונטיים את היכולת לחשב את הריבית האפקטיבית בכל הלוואה והלוואה. כזכור שהלוואה יעדיף את הלוואה בעלת הריבית הנמוכה ביותר.

חולהפה 1: הלוואה לשנתיים, בריבית 2% לחודש, המושלמת עם פרעון הקרן בתום התקופה. כברירת מחדל – חישובי ריבית בקורס הם בגישת "רייבית האפקטיבית". זה אומר ש כדי למתאם ריבית חודשית לשנתית (כי אפשרויות התשובה מציגות ריבית שנתית) :

$$r_{annual} = (1 + r_{month})^{12} - 1 \rightarrow (1 + 2\%)^{12} - 1 = 26.8\%$$

חולופה 2: זו הולופה המעניינת יותר, משום שלמרות שנדרש פתרון ריבית אפקטיבית באחוזים, כל הנתונים לגביים הם כספיים. באפרט, אני רוצה להביא לידי ביטוי הלוואה בסך 300,000 ש"ח לשנתיים עם ריבית מראש של 100,000 ש"ח.

	0	2	
--	---	---	--

ネットת הלוואה (קרן)	300,000		(300,000)	החז'ר קרן
ニックי ריבית מראש	(100,000)			לא תוספות
תזרים נטו	$P_0 = 200,000$		$P_t = (300,000)$	לכן : סך ההחז'ר

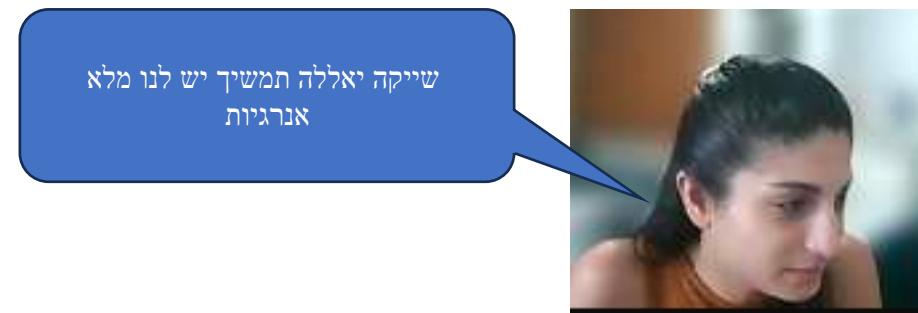
אם אני יודע כמה לוקחים בזמן 0, וכמה מחזירים בזמן 2, הריבית לכל השנתיים היא לפי היחס בין סך התשלומים בתום התקופה (בערך מוחלט) לבין התקובל נטו בתחילת התקופה, כל זה – פחות אחת :

$$r_e(2 \text{ years}) = \frac{P_t}{P_0} - 1 \rightarrow r_e = \frac{300,000}{200,000} - 1 = 50\%$$

וכעת, כדי לתרגם את הריבית האפקטיבית זו מפרק זמן של שנתיים לפרק זמן של שנה, משתמש בנוסחת ההמרה של ריבית אפקטיבית אלא שהמערך של החזקה יהיה חצי כדי לעבור משנתיים לשנה :

$$r_{annual} = (1 + r_{2years})^{\frac{1}{2}} - 1 \rightarrow (1 + 50\%)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 22.47\%$$

ולכן, התשובה היא. הריבית האפקטיבית בחלוקת ב היא כ- 22.5% וערך זה נמוך יותר מהריבית האפקטיבית בחלוקת א.



## שאלה 10

הניחו כי בשוק ההון קיימות שתי מניות בלבד: מקדם המתאים בין המניות הוא אפס.

מניה B	מניה A	תוחלת תשואה
10%	20%	תוחלת תשואה
20%	10%	סטיית תקן

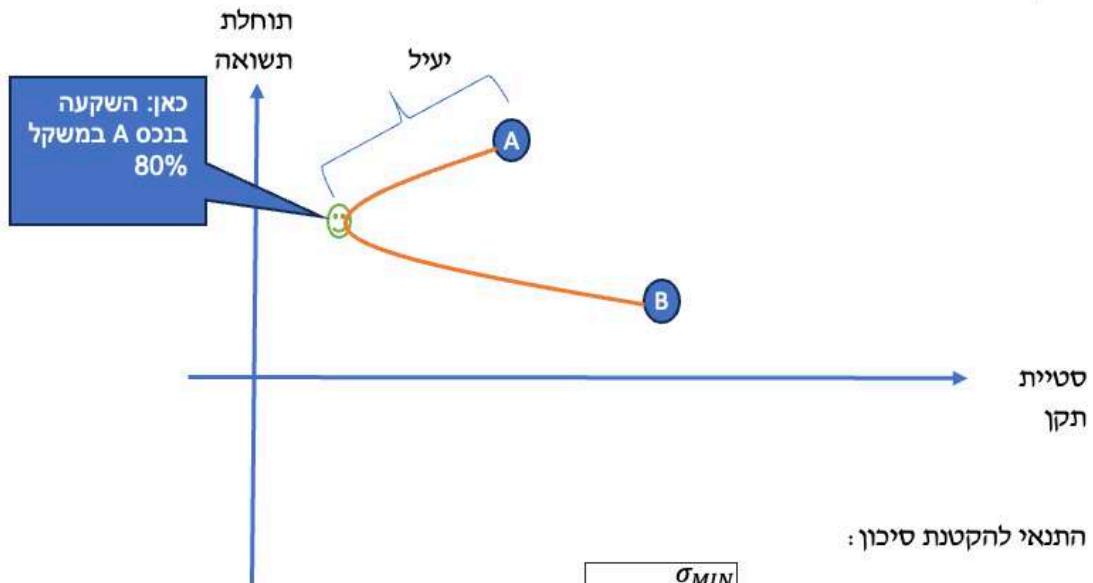
**בחרו את הטענה הנכונה עבור משקיע דוחה סיכון:**

- אף משקיע לא יشكיע יותר מ-20% מכיספו במניה B.
- אף משקיע לא יشكיע פחות מ-20% מכיספו במניה B.
- יתכן כי המשקיע יבחר להשקיע 70% מכיספו במניה A ו-30% מכיספו במניה B.
- כל המשקיעים יבחרו לחלק את כספם בין A ל- B, בין 0% ל-100% בכל מניה.
- כל המשקיעים יבחרו להשקיע 100% מכיספם במניה A בעלת תוחלת התשואה המרבית.

**פתרון בעמוד הבא.**

שני נכסים מסוכנים <<< מקדים מותאם נתון >>> היגדים מדברים על אפשרויות שלוב: תיקי השקעות.

באופן כללי: גרפית.



התנאי להקטנת סיכון :

$$\rho_{A,B} < \frac{\sigma_{MIN}}{\sigma_{MAX}}$$

מקדם המתאים הוא 0. ואם הוא אפס, הוא בהכרח קטן ממהיחס בין סטיות התקן.

הויל והשאלה דורשת ידע מסווני על הרכב התיקים היעילים, עליינו להשתמש בנוסחה שתעזר להגדיר את תיק מינימום סיכון (סמייל) שמננו והלאה ממשיכה היעילות.

$$W_A^{MRP} = \frac{\sigma_B^2 - \rho * \sigma_A * \sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2 * \rho * \sigma_A * \sigma_B}$$

נציב :

$$W_A^{MRP} = \frac{0.2^2 - 0 * 0.1 * 0.2}{0.1^2 + 0.2^2 - 2 * 0 * 0.1 * 0.2} = 0.8$$

מסקנה: תיק מינימום סיכון כולל 80% השקעה ב - A ו- 20% השקעה ב - B.

היעילות מתקיימת בתיקים אשר :

כוללים 80% או יותר ב - A  
כוללים 20% או פחות ב - B

התשובה א. כי שראינו לעיל, אף השקיע לא ישקיע יותר מ- 20% מכיספו ב - B.

מבחן 4 - שאלה 7

שאלה 7

لهן מספר נתונים על מנויות A ו- B:

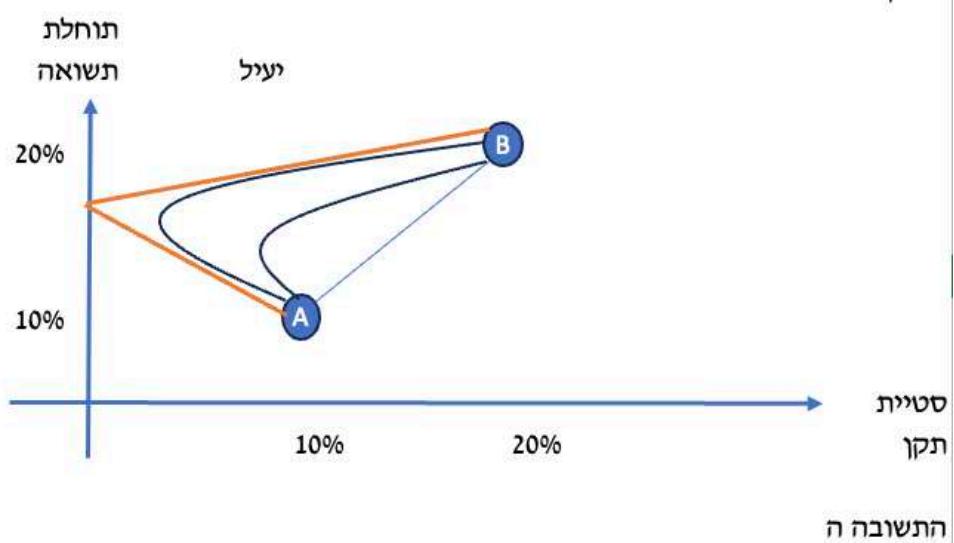
	מניה B	מניה A
תוחלת	20%	10%
סטטיסטית תקן	20%	10%

תיק המפוזר בין שתי המניות (לא אפשרות למכירה בחסר) עשוי להניב:

- תוחלת שיעור תשואה הנמוכה מ- 20% וסטטיסטית תקן הגבוהה מ- 10%.
- תוחלת שיעור תשואה בין 10% ל- 20% וסטטיסטית תקן בין 10% ל- 20%.
- תוחלת שיעור תשואה בין 10% ל- 20% וסטטיסטית תקן הנמוכה מ- 20%.
- תוחלת שיעור תשואה וסטטיסטית תקן הגבוהות מ- 10%.
- כל התשובות נכונות.

פתרונות:

באופן כללי: גרפית.



**מבחון 4 - שאלה 9** **שאלה 9**

הטבלה הבאה מתארת את התוחלת וסטיית התקן של שתי מניות:

B	A	מניה
20%	15%	תוחלת
25%	20%	סטיית התקן

מקדם המתאים בין שתי המניות הוא 0.5 (מינוס חצי).

משקיע מחלק את כספו שווה בשווה בין שתי השקעות. סטיית התקן של תיק המניות המשולב

היא:

- א. 11.46%
- ב. 19.52%
- ג. 13.91%
- ד. 16.20%
- ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**פתרון:**

השכעה בחלוקת שווה בין השקעות משמעה משקל השקעה שווה לשתייהן כלומר  $50\% \cdot W_A = W_B$ . את סטיית התקן של התקין המשולב אפשר לחשב בקלות בהינתן כל יתר הנתונים (לרובות מקדם המתאים) על בסיס הנוסחה לחישוב סטיית התקן בתיק השקעות המורכב מ-2 נכסים מסוכנים:

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

**בהצבה מקבלים:**

$$\sigma_P = \sqrt{0.5^2 * 0.2^2 + 0.5^2 * 0.25^2 + 2 * 0.5 * 0.5 * 0.2 * 0.25 * (-0.5)} = 11.46\%$$

ובהתאם, התשובה א.

8. הטבלה הבאה מתרetta את התוחלת וסטיית התקן של שתי מניות:

		מניה
B	A	
30%	10%	תוחלת תשואה
80%	25%	סטיית התקן

מקדמת המתאים בין שתי המניות הוא 0.7.

משקיע היכול להשكيיע בשתי מניות אלו בלבד מעוניין להשיג תשואה של 21% על כספו. סטיית התקן של תיק המניות המשולב היא:

- א. 27.56%
- ב. 52.49%
- ג. 78.85%
- ד. 67.04%

ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**פתרונות – בעמוד הבא**

- א. המשקלים (W) אינם ידועים.  
 ב. תוחלת תשואת התקן כן ידועה.

לכן:

נשתמש בנוסחת תוחלת תשואת התקן לחילוץ המשקלים.  
 ואז: נציב בנוסחת סטיטית התקן וסימנו.

$$E(R_P) = W_A * E(A) + (1 - W_A) * E(B)$$

$$0.21 = W_A * 0.1 + (1 - W_A) * 0.3$$

$$0.21 = 0.1W_A + 0.3 - 0.3W_A$$

$$0.2W_A = 0.09$$

WA =	0.45
WB = (1 - WA) =	0.55

נעבור לנוסחת סטיטית התקן :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2 * W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

$$\sigma(P) = \sqrt{0.45^2 * 0.25^2 + 0.55^2 * 0.8^2 + 2 * 0.45 * 0.55 * 0.25 * 0.8 * 0.7}$$

**52.49%**

מבחן 6 – שאלה 7

7. לפניכם נתונים על תשואת השוק ועל תשואת מניה חברת "מאור" במהלך 4 השנים האחרונות:

שנה	תשואת מניה	תשואת תיק השוק
1	21%	13%
2	18%	21%
3	22%	38%
4	-5%	8%

מכאן הביטה של חברת "מאור" היא:

- א. 0.399  
 ב. 0.631  
 ג. 2.68  
 ד. 1.24  
 ה. אף תשובה מהנ"ל אינה נכונה.

פתרונות:

באופן כללי, ברובות מן השאלות הדורשות את הביטה, היא מחולצת מຕוך משווהת ה-SML שתפקידה לקשר בין הביטה לבין תוחלת התשואה. משווהת ה-SML היא:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

ברמת תוחלת התשואה של השוק ושל הנכס – אוכל לחשב אותו באופן ישיר מຕוך הנתונים. איך? אנו מניחים בקורס שams מקבלים נתוני סדרה עתית של תשואות נכסים, מייחסים הסתברות התרחשות זהה לכל אירוע קרי – ההסתברות לכל תוצאה היא לפי 1 חלקי מספר האירועים / מספר התוצאות. בשפה קצר יותר פשוטה: כאן מדובר ב-4 שנים, אנו מניח שהסתברות לתוצאה שנתית כלשהי היא  $\frac{1}{4}$  כלומר 25%.

תשואת השוק - M	תשואת המניה - i	הסתברות
13%	21%	25%
21%	18%	25%
38%	22%	25%
8%	-5%	25%

תוחלת המניה ותוחלת תיק השוק בהתאם תהינה:

$$E(i) = 25\% * 21\% + 25\% * 18\% + 25\% * 22\% + 25\% * (-5\%) = 14\%$$

באופן דומה :

$$E(M) = 20\%$$

למרות הערכים הסטטוגנומיים הללו, עדיין ישנים שני גנלים המשווים – ריבית חסרת סיכון וגם הביטא שנדרש לחלץ. לכן, עת אני נכשל בהגיא בצורה מחלצת לביטא, אctrיך את תהליך החישוב היישר שלה. נוסחתה חישוב הביטא באופן ישיר היא בעלת שתי וריאציות :

$$\beta_i = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M}$$

או :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2}$$

נלך על הגרסה ה-2 שתיחסן ממוני לחשב סטטיסטית תקן של המניה (אפשר גם ללבת על הגרסה הראשונה). התיאור המילולי של נוסחתה הוא : נסכום את המכפלה של כל הסטברות בשני ערכים : ההפרש בין תשואת הנכס הראשון לתוחלתו, וההפרש בין תשואת הנכס השני (השוק) לתוחלתו :

$$COV(i, M) = P_1 * [R_{i1} - E(i)] * [R_{M1} - E(M)] + P_2 * [R_{i2} - E(i)] * [R_{M2} - E(M)] * \dots$$

בchezba :

$$\begin{aligned} COV(i, M) &= 25\% * [21\% - 14\%] * [13\% - 20\%] \\ &+ 25\% * [18\% - 14\%] * [21\% - 20\%] \\ &+ 25\% * [22\% - 14\%] * [38\% - 20\%] \\ &+ 25\% * [-5\% - 14\%] * [8\% - 20\%] = \textcolor{red}{0.008175} \end{aligned}$$

כעת, לטובת מכנה חישוב הביטא, נחשב את השונות של תיק השוק :

$$\sigma_M^2 = 25\% * (13\% - 20\%)^2 + 25\% * (21\% - 20\%)^2 + 25\% * (38\% - 20\%)^2 + 25\% * (8\% - 20\%)^2$$

ונקבל :

$$\sigma_M^2 = 0.01295$$

מפה ניתן לחשב את הביטא לפי נוסחתה לעיל :

$$\beta_i = \frac{COV(i, M)}{\sigma_M^2} = \frac{0.008175}{0.01295} \approx 0.631$$

בהתאם, התשובה היא ב .

הערה קטנה: ברגע שידועים את השונות המשותפת  $Cov$  אין שום בעיה לחשב את מקדם המתאים. לא נדרשנו כאן לכך, אבל שנדע, באופן כללי:

$$\rho(A, B) = \frac{Cov(A, B)}{\sigma_A * \sigma_B}$$

כלומר את מקדם המתאים ניתן לחשב לפי היחס בין השונות המשותפת בין הנכדים כהגדולה לעיל לבין מכפלת סטיות התקן של הנכדים הבודדים.

**מבחן 6 - שאלה 8**

8. בשוק ההון, המצוין בשוויו משקל לפי ה- CAPM, נסחרות שתי מנויות A ו- B. תוחלת התשואה של מניה A היא 12%, ותוחלת התשואה של מניה B היא 24%. הביטה של מניה B היא 1.5 ושער ריבית נטול סיכון הוא 6%. מכאן הביטה של מניה A היא :
- 0
  - 0.75
  - 1
  - 0.5
- ה. לא ניתן לדעת ללא ידיעת תוחלת תשואת תיק השוק.

פתרון :

<b><math>R_F</math></b>	<b>B</b>	<b>A</b>	
6%	24%	12%	<b>תוחלת</b>
0	1.5	?	<b>הביטה</b>

בשאלה קודמת לעיל רأינו שניתן לחשב את הביטה על בסיס נתונים מפורטים של תשואות אפשריות של שוק ומניה. החישוב לעיל הتبסס על ההגדרה של השונות המשותפת. יחד עם זאת, סוגים חישובים אלו הכוונים שונות משותפת המחשבת באופן ישיר הם פחות נפוצים. רוב השאלות בדרך כלל ידרשו חילוץ מבחן הנוסחאות הרלוונטיות היכולות את רכיב הביטה, כשהנהנת שוויי SML שקשורת בין הביטה לבין תוחלת התשואה של כל הנכסים בהנחה שווי משקל (שזו הנחת ברירת מחדל) :

$$E(B) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_B \rightarrow 24\% = 6\% + [E(M) - 6\%] * 1.5 \rightarrow E(M) = 18\%$$

$$E(A) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_A \rightarrow 12\% = 6\% + [18\% - 6\%] * \beta_A \rightarrow \beta_A = 0.5$$

התשובה הנכונה היא ד.

#### מבחן 4 - שאלה 8

##### שאלה 8

נתונים שני תיקים יעילים - A ו- B. שעור התשואה על תיק A הוא 10% ועל תיק B הוא 20%. סטיית התקן של תיק B גדולה פי 3 מסטיית התקן של תיק A. שער ריבית נטול סיכון:

- א. 5%
- ב. 10%
- ג. 12.5%
- ד. 7.5%
- ה. 15%

**פתרון:**

נרכז את הנתונים:

$R_F$	B	A	תוחלת תשואה
?	20%	10%	סטיית התקן
0	$3x$	$x$	

ככל, חילוצים מערביים תוחלות תשואת נכסים ב-CAPM מtabססות על נוסחאות SML ו-CML, כתלות בנתונים. עיקר ההתייחסות לעולמות ה-SML היא כאשר קיים דיוון / נתוני הקשורים לביטא. כאן, כל הנתונים קשורים יותר לסטיית התקן, ויחד עם נתון היעילות המפורש בדבר הנכסים, נראה ש- CML לרובות מתיישוואתיו – ישרתו אותו.

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

$$\sigma(P) = (1 - W_F) * \sigma_M$$

$$\sigma(P) = \beta_P * \sigma_M$$

למרות שיש כאן מגוון נוסחאות – נשים לב שככל, ככל דרושות את נתוני השוק שלא קיימים בה. יחד עם זאת, לצרכים של חילוץ ריבית חסרת סיכון אפשר לבצע "מניפולציה" על משוואת ה-CML הראשונה (העלונה) ופושט להתייחס לשיפוע כנעלם.

$$E(P) = R_F + \alpha * \sigma_P$$

נתוני התקנים:

$$A: 10\% = R_F + \alpha * x$$

$$B: 20\% = R_F + \alpha * 3x \rightarrow 20\% = R_F + 3\alpha * x$$

כעת, ניתן להתייחס לביטוי  $\alpha x$  בתור נעלם ראשון, ולביטוי  $R_F$  בתור נעלם שני, ולפתור שתי משוואות בשני געלמים:

$$(I) 0.1 = R_F + \alpha x$$

$$(II) 0.2 = R_F + 3\alpha x$$

בפתרון המשוואות מתקיים:  $R_F = 5\%$

התשובה א.

מה למדנו מהשאלה?

שבשאלות תики השקעות ב-CAPM הדורשות חילוץ, ניתן להתייחס לשיפור היישר הרלוונטי (בין אם CML כמודגם לעיל, או SML שבו השיפור הוא ההפרש בין תוחלת השוק לנכס חסר סיכון) בתור נעלם יחיד, לטובות המשך הפיתוח.

### מבחן 3 - שאלה 9

#### שאלה 9

לפי ה-CAPM, אם לתשואה שני נכסים שונים אותו מקדם מתאים עם תשואת תיק השוק, הרי:

- לשנייהם אותה תוחלת שיעור תשואה אך סטיית תקן שונה.
- לשנייהם אותה תוחלת שיעור תשואה ואותה סטיית תקן.
- לשנייהם אותה סטיית תקן אך תוחלת שיעור התשואה יכולה להיות שונה.
- לנכש בעל סטיית התקן הגבוהה יותר גם תוחלת שיעור תשואה גבוהה יותר.
- כל התשובות הנ"ל אינן נכונות.

פתרון:

מקדם המתאים עם השוק הוא אחד מהרכיבים הבסיסיים בהגדרת ערך הביטא של נכס (מקדם הסיכון השיטתי). שחררי ידוע ש:

$$\beta = \frac{\rho(i, M) * \sigma_i}{\sigma_M}$$

וכעת, אם לשני הנכסים מקדים מתאם זהה עם השוק, והרי ידוע שהמכנה זהה משומש שהוא משקף את סטיית התקן של השוק עצמו, הרי שהגורם היחיד שבדיל בין הנכסים ויופיע על הביטה הוא סטיית התקן. במלים אחרות, בהצגה טיפה שונה של הנוסחה לעיל מקבלים:

$$\beta = \frac{\rho(i, M)}{\sigma_M} * \sigma_i$$

וממשמעותו היא שכלל שטיית התקן גבוהה יותר, הביטה גבוהה יותר. בהינתן שבשווי משקל (שזו בירור המחדל) ככל שהביטה עולה תוחלת התשואה עולה (לפי משווהת ה-SML), הרי שבמקרה זה ככל שטיטת התקן גבוהה יותר גם תוחלת התשואה של הנכס גבוהה יותר בהתאם.

תזכורת לגבי משווהת ה-SML:

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

התשובה ד.

### מבחן 3 - שאלה 10

#### שאלה 10

דני השקיע את כספו בתיק השקעות ייעיל. מנהל התקיק הודיע לו כי לכל תוספת של 2% לsiccon (כלומר, לסטיטית התקן) על השקעתו, יוכל להגדיל את תוחלת שיעור התשואה ב- 2.5%. דני הודיע למנהל התקיק כי אין ברצונו לסכן את כספו והוא מבקש להשקיע את כספו ללא Siccon. מנהל התקיק הודיע לדני כי השקעה ללא Siccon משלמת ריבית של 5%. מכאן שמשוואת ה- CML (ב אחוזים) היא:

- א.  $\mu_P = 2.5 + 1.25 \cdot \sigma_P$
- ב.  $\mu_P = 5 + 2.5 \cdot \sigma_P$
- ג.  $\mu_P = 5 + 1.25 \cdot \sigma_P$
- ד.  $\mu_P = 2.5 + 2 \cdot \sigma_P$

ה. אין מספיק נתונים המאפשרים את מציאת משוואת ה- CML.

#### פתרון:

ראשית, נמפה את נתונים השאלה, מהברור יותר לברור פחות. נתון שדני השקיע ללא Siccon, והוא מניב תשואה (ריבית) בשיעור 5%.

$$R_F = 5\%$$

בנוסף נתון: "לכל תוספת של 2% לsiccon קרי סטיטית התקן, תוחלת שיעור התשואה תגדל ב-2.5%". איך נפרש משפט זה? הוואיל ומדובר בתיקים ייעילים, קיים קשר בין סטיטית התקן לבין התוחלת, שmbוטא במשוואת ה- CML.

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

אם ידוע שעלייה בסטיטית התקן של 2% מגדילה את התוחלת ב- 2.5% ;

הרי שעלייה בסטיטית התקן של 1% מגדילה את התוחלת ב- 1.25% / 2 = 0.625% .

ההגדירה של העלייה בתוחלת כתוצאה מעלייה של 1% בסטיטית התקן – היא למעשה שיפוע ה- CML. ובהתאם היא הערך המספרי של תוצאה הביטוי שבאוזם.

ולכן בהינתן ריבית חסרת Siccon של 5% ושיפוע (אדום) של 1.25%, הנוסחה תהיה (ב אחוזים) :

$$E(P) = 5 + 1.25\sigma_P$$

לכן התשובה הנכונה היא ג.

## מבחן 2 - שאלה 9

9. הנה כי שוק ההון מצוי במצב של שווי משקל לפי CAPM. לمنיה A תוחלת תשואה של 15%

ו-  $\beta$  של  $\frac{1}{2}$ . לمنיה B תוחלת תשואה של 20% ו-  $\beta$  של 1. לمنיה C תוחלת תשואה של

30%. מה תהיה ה-  $\beta$  של מניה C?

- א. 1.3
- ב. 0
- ג. 2
- ד. 1.8
- ה. -0.5

**פתרון:**

ראשית, הדיון כאן הוא במצב של שווי משקל – אף אחד לא מדבר על יעילות. בנוסף, יש דיון בתנאי ביתא. זה די גורם לחדול ל עמוק ה-SML.

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

**כאשר בהצבת נתוני הנכסים נקבל:**

$$A: 15\% = R_F + [E(M) - R_F] * \frac{1}{2}$$

$$B: 20\% = R_F + [E(M) - R_F] * 1$$

את צמד המשוואות הללו בשני נעלמים בהחלה אפשר לפתור ולהגיע לערכי נכס חסר סיכון ותיק השוק בהתאם.

ספציפית כאן – אפשר לקצר טיפונת את התהילה אם זוכרים משפט מרכז שחשוב לדעת בכל מקרה: **הביתא של תיק השוק היא תמיד 1, כי ביתא היא ממד סיכון יחסית – והשוק – "מסוכן כמו השוק".** זה אומר שבתנאי שווי משקל, תוחלת של נכס בעל ביתא 1 זהה בהכרח לתוחלת השוק. לכן תוחלת תיק השוק זהה לתוחלת B.

$$E(M) = E(B) \text{ because } \beta_B = 1 \rightarrow E(M) = 20\%$$

נחזיר למשווה הראשונה מבין המשוואות לעיל ונוכלحلץ ריבית חסרת סיכון:

$$15\% = R_F + [20\% - R_F] * \frac{1}{2} \rightarrow R_F = 10\%$$

לבסוף, נציב את נתוני תיק השוק, ריבית חסרת סיכון ותוחלת C במשוואת ה-SML ונחלץ את הנעלם היחיד שהוא הביתא שלו:

$$C: 30\% = 10\% + [20\% - 10\%] * \beta_C \rightarrow \beta_C = 2$$

לכן התשובה ג.

מבחן 1 - שאלה 10

10. בשווי משקל לפי CAPM תוחלת התשואה של מניה משקפת את שער הריבית נטול הסיכון

בתוספת פרמייה בגין:

- הסיכון שאנו נימיך לפיזור.
- סטיית התקן של המניה.
- הסיכון המתן לפיזור.
- סטיית התקן של תיק השוק.
- תשובות א' ו- ד' נכונות.

פתרונות:

יעילות איננה ברירת מחדל!

יותר מזה: מניה בודד (נכס בודד) בדרך כלל במודל CAPM איננו יעיל משום שהוא לא מפזר סיכון. לכן, המודל הרלוונטי הוא תורת המודל ה- 2. צריך להביט על נוסחה מתאימה לתוחלת.

נוסחת תוחלת של תיק "לא ייעיל" ב - CAPM :

$$E(i) = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_i$$

במילים: תוחלת הנכס היא ריבית חסרת סיכון בתוספת ההפרש בין תשואת תיק השוק, לריבית חסרת סיכון, וכל זה - כפול מודד הסיכון ביטה.

כדי להבין מה משקפת ביטה, נפצל לפי הגדרת רכיבי הסיכון:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 * \sigma_M^2 + \sigma_{NS}^2$$

סיכון כולל
סיכון לא  
שיטתי,  
שאינו ניתן לפיזור
סיכון שיטתי,  
תלוי בביטא  
ניתן לפיזור

נסדר את הדיון:

כשמדובר במניה בודד / תיק לא ייעיל ב - CAPM  
תוחלת התשואה תלויות בביטא  
ביטה קובעת סיכון שיטתי (שאינו ניתן לפיזור) לכן התשובה A.

לגביה תשובה D, שימוש לב, שסטיית התקן של השוק לא קובעת את ביטה, לכן כשלעצמה לא קובעת את תוחלת הנכס.

### מבחן 1 - שאלה 6

6. לחברה מסוימת אפשרות להשקיע ב-2 פרויקטים המוצאים זה את זה אשר דוחים השקעה של 100 ש"ח. פרויקט A יניב תזרים מזומנים שנתי נטו של 115 ש"ח بعد שנה. פרויקט B יניב תזרים מזומנים שנתי נטו של 120 ש"ח بعد שנתיים. שני הפוחיקטים ניתנים לביצוע פעם אחת בלבד ומחירו ההן 5%. בחרו את הטענה הנכונה:
- א. נבחר בפרויקט A לפי כלל הענ"ג, ב- B לפי כלל השת"פ, וב- A לפי מدد הרוחניות.
  - ב. נבחר בפרויקט B לפי כלל הענ"ג, ב- A לפי כלל השת"פ, וב- B לפי ממד הרוחניות.
  - ג. נבחר בפרויקט A לפי כלל הענ"ג, ב- A לפי כלל השת"פ, וב- A לפי ממד הרוחניות.
  - ד. נבחר בפרויקט B לפי כלל הענ"ג, ב- B לפי כלל השת"פ, וב- A לפי ממד הרוחניות.
  - ה. נבחר בפרויקט B לפי כלל הענ"ג, ב- A לפי כלל השת"פ, וב- A לפי ממד הרוחניות.

### מבחן 1 - שאלה 7

7. לפירמה מחיר הון של 10%. כלכלי הפירמה בנתו פרויקט השקעה קונבנציונלי ומצאו כי במחair ההון של הפירמה ממד הרוחניות של הפרויקט שווה ל-1. עבור איזה תחום של מחירי הון הפוחיקט יהיה כדאי?
- א. בתחום שבו  $10\% < K$  הפרויקט כדאי.
  - ב. בתחום שבו  $10\% > K$  הפרויקט כדאי.
  - ג. רק כאשר  $10\% = K$  הפרויקט כדאי.
  - ד. אין מספיק נתונים כדי לקבוע.
  - ה. אף תשובה מהל' לאינה נכונה.

### מבחן 3 - שאלה 6

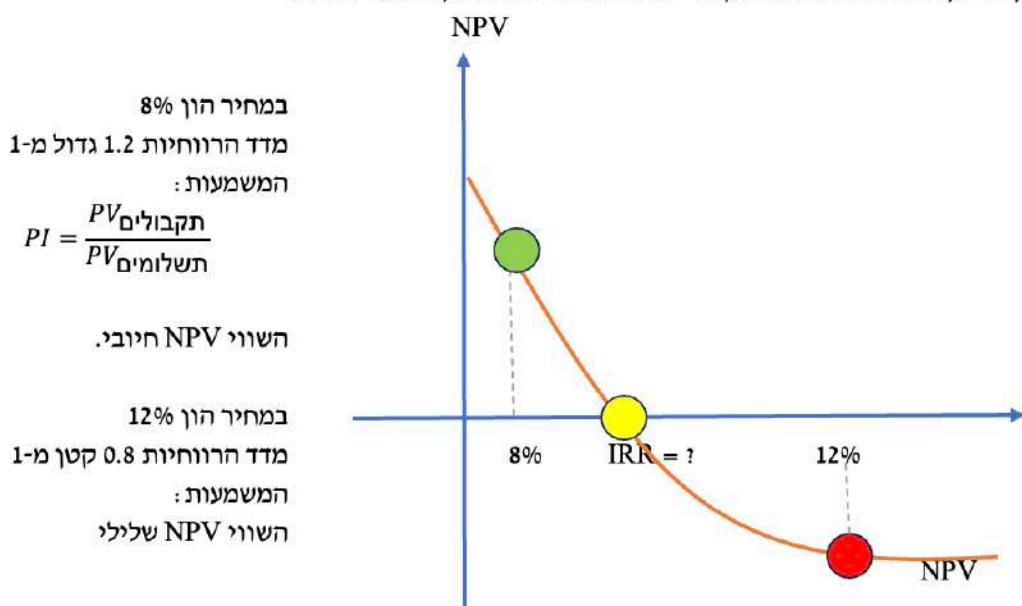
#### שאלה 6

חברה בוחנת השקעה בפרויקט קונבנציונלי. במחיר הון של 8% ממד הרוחניות של הפרויקט הוא 1.2, ואילו במחיר הון של 12% הוא 0.8. מכאן שהשת"פ של הפרויקט:

- גבוה מ- 12%.
- נמוך מ- 8%.
- שווה ל- 10%.
- נמצא בין 8% ל- 12%.
- לא ניתן לדעת על סמך נתונים אלו בלבד.

**פתרון:**

כמעט בכל השאלות על פרויקטים שלא כוללות ערכיים מסוימים של תזרימי מזומנים - הגף מאד חשוב. כאשר מדובר בפרויקטים **קונבנציונליים** של השקעה - הזרה הגורפית של עוקם העניין היא:



התשובה: 7.

## מבחן 2 - שאלה 6

6. איזה מהמשפטים הבאים אינו תמיד נכון?
- א. שת"פ הינו שער ההיוון שבו הענ"ג שווה 0.
  - ב. ממד רוחניות גדול מ- 1 מעיד על ענ"ג חיובי.
  - ג. דרגה פרויקטיבים לפי קритריון הענ"ג תמיד יהיה זהה לדרגה פרויקטיבים לפי קритריון השת"פ.
  - ד. יתכונו מספר שת"פים לפרויקט.
  - ה. כל המשפטים הרשומים לעיל נכונים תמיד.

### פתרון:

- א. נכון - לפי ההגדרה. גם בתרשים וגם לפי ההגדרה המתמטית, מדובר במדד ההורן (שער ההיוון) שבו הענ"ג 0.
- ב. נכון - בהכרח ממד רוחניות גבוהה מ-1 מעיד על ענ"ג חיובי.
- ג. לא נכון - בהחלט **יתכונו** סטיירות בין ענ"ג לבין שת"פ.  
זכרו: שת"פ מציג רוחה באחיזות.  
ענ"ג מציג שווי בכסף.
- ה. לא נכון. מثال מציגים לי לחקיע היום 1 ש"ח ולקבל עוד שנה 2 ש"ח. השת"פ - מטורף 100%.
- ה. לא נכון. ההשפעה הכספית זניחה.
- ד. בהחלט **יתכון** שלפרויקט מסוים יהיה מספר שת"פים - בתנאי שהוא לא קונבנציונלי. פירוט בעמוד הבא.
- ה. לא נכון.

הצגה תרשימית רלוונטית בעמוד הבא.

NPV

קונבנציונלי של הלוואה

NPV

קונבנציונלי של השקעה

NPV

לא קונבנציונלי

לא קונבנציונלי

NPV

מחייה חתונה

NPV

מחייה חתונה

לא קונבנציונלי

לא קונבנציונלי

NPV

מחייה חתונה

NPV

מחייה חתונה

**מבחן 2 - שאלה 7**

7. תזרים המזומנים הנקי הצפוי מפרויקט מסוים הוא 13,000 ש"ח לשנה בתום כל אחת משלוש השנים הבאות. שט"פ הפרויקט הוא 10%, וענ"נ הפרויקט הוא 2,420 ש"ח. מכאן שמחיר ההון

לפיו חושב ענ"נ הפרויקט הוא:

- א. 6%
  - ב. 8%
  - ג. 10%
  - ד. 135%
- ה. לא ניתן לחשב את מחיר ההון מאחר ואין מספיק נתונים.

**פתרון – בעמוד הבא:**

כאנ התזרומים ידועים. לנו בדרך כלל בשאלות לגבי פרויקטים כאלו אני עובד מתמטית ולא גרפית.  
זהירות: בהכרח ובגדרה, כאשר קיים ערך שת"פ מספרי חייבות להיות השקעה.  
הואיל ואינה נתונה, אך היא כמובן מדרשת לחישוב הענין, עלינו לחוץ אותה וначילה.

0	1	2	3
-32,329	13,000	13,000	13,000
敖פן חילוץ			
למטרה			

נתון שת"פ הפרויקט - IRR.  
זכרו: השת"פ הוא מחיר ההון שאמ מצייבים אותו במשוואת NPV התוצאה אפס.

$$-x + 13,000 * pva(10\%, 3) = 0$$

2.4869

$$-x + 13,000 * 2.487 = 0$$

$$x = 32,329$$

נתון: ענין הפרויקט (שודרש היון במחיר ההון האמיטי הספציפי של החברה שאינו נתון):

$$-32,329 + 13,000 * pva(k, 3) = 2,420$$

$$pva(k, 3) = \frac{32,329 + 2,420}{13,000} = 2.673$$

נלק לוח א-4 בנספח א לפרק ד, ונחפש עבור  $t=3$  את הריבית שМОBILE ל-2.673.

לוח א-4 ש.ז. ש.ז. המתקבל מזיה תקופה במשך $t$ תקופות						
$t$	$r$	1%	2%	3%	4%	5%
1		0.990	0.980	0.971	0.962	0.952
2		1.970	1.942	1.913	1.886	1.859
3		2.941	2.884	2.829	2.775	2.723
						2.673

6%

ולכן התשובה חסופה היא:

**מבחן 3 - שאלה 5**

**שאלה 5**

להלן נתונים זומי המזומנים של פרויקט מסוים:

4	3	2	1	0	שנה
זום מזומנים					
1,000	700	500	300	-1,500	

מהו הע"נ של הפרויקט, אם מחיר ההון הוא 10% לשנה בשנים 1-2, 12% בשנה 3 ו-15% בשנה 4.

- א. 256
- ב. 312
- ג. 400
- ד. 329
- ה. 344

**פתרונות:**

0	1	2	3	4
-1500	300	500	700	1000

10%                    10%                    12%                    15%

$$\begin{aligned}
 NPV = & -1,500 + 300 * (1 + 10\%)^{-1} + 500 * (1 + 10\%)^{-2} \\
 & + 700 * (1 + 12\%)^{-1} * (1 + 10\%)^{-2} + 1,000 * (1 + 15\%)^{-1} * (1 + 12\%)^{-1} * (1 + 10\%)^{-2} =
 \end{aligned}$$

**344.13**

## מפגש 7 – מקורות המימון של החברה – הון עצמי וhone זר, ומשמעותם (יח' 11-9)

### מיפוי רציו – יח' 11-9

יח' 7-5 העניקו לנו את הכלים הבסיסיים בחישובים פיננסיים: ערך נוכחי (PV), ערך עתידי (FV) ויישומיהם – בפרויקטים, בהלוואות, ובהערכת כדיאות השקעות.

יח' 8 העבירה אותנו לעולם של סטטיסטיקה: של סיכון ומידתו, של קבלת החלטות רלוונטיות בתנאי סיכון, וכן ההשפעה של פיזור סיכון (לפי גישת תייקי השקעות) על הערך למשך.

יח' 11-9 מוציאות אותנו מהפוזיציה של המשקיע ומחזירות אותנו לכובע מכבלי ההחלטה בחברה – בהיבט זה שחברה צריכה **לגייס מימון** כדי לבצע את פעילותה, ומימון זה מרכיב **hone עצמי** (מניות) וhone זר (הלוואות ואג"ח, כאשר היח' מתרכזות בעיקר באג"ח).

אנחנו רצча, בהתאם:

א. לדעת טכנית איך מבצעים חישובי שווי וחישובים קשורים של אגרות חוב.

ב. כיצד לתמוך מניות לפי מודל מסוים ספציפי (מודל גורדון – "היוון הדיבידנדיס") וכייזד להלץ ערכיהם מהמודל.

ג. כיצד שילוב מקורות מימון בתמיהיל כזה או אחר – ובפרט: יותר חוב / יותר hone עצמי – משפיע על הסיכון, על מחיר ההון המשוקל של החברה WACC, ועל שווי החברה (מה עדיף לחברת בהיבט השאות ערכה ובאיזה הקשר – למן hone עצמי או hone זר).

### פרק 1: חישובי אג"ח (יח' 9)

#### אג"ח – הגדרה:

אג"ח – אגרת חוב – היא מכשיר פיננסי שמנפיקת חברה ואשר מחייב אותה לשלם לאוחז בה תזרימי מזומנים ממשני סוגים:

א. קופון – מכפלה של הריבית הנקובה  $B_2$  (המודדרת באג"ח) בערך הנקוב  $B$  (המודדר באג"ח).

ב. הערך הנקוב עצמו – שכברירת מחדל בקורס שלנו מושלם בתשלום אחד בתום חי האג"ח (אם לא – צריך להביא לידי ביטוי את פרעונות לשיעורין במסגרת תזרימי המזומנים למשך).

**מחיר האג"ח** נקבע בתוור הערך הנוכחי PV של תזרימי המזומנים הנ"ל, מנקודת ראות המשקיע (רווח האג"ח). את חישוב ה- PV מבססים על התזרמים של הקופונים והערך הנקוב, כאשר ההיוון מתבצע בריבית שנקבעת "מחיר ההון הזור" / "ריבית השוק על אג"ח" / "שיעור תשואה לפדיון". המסר המרכז כאו הוא – שבעוד שהחברה היא זו שקובעת בתשקיף הנפקת האג"ח את התזרמים שהיא מתחייבת לשלם לאוחז באג"ח, המשקיע הוא שקבע את שווייה על בסיס חישוב הערך הנוכחי של תזרימים אלו בריבית שהוא דורש.

בקצרה: בזוז שהריבית הנקובה קובעת את התזרמים, הריבית להיוון היא בדרך כלל שונה, ונקבעת על ידי המשקיעים.

### שאלה 9.1 – תמחור בסיסי של אג"ח – שנים שלמות

חברת "אלון סיון" בע"מ הנפקה ב-1.1.2020 אג"ח אשר ערכה הנקוב 100,000 ש"ח. האג"ח נושא ריבית שנתי נקובה בשיעור 5% המשולמת בתום כל שנה (תשלום הריבית יבוצע לראשונה ב-31.12.2020). ערכה הנקוב של האג"ח ייפרע בתשלום אחד בתום שנת 2026.

נדרש :

- מהו מחיר האג"ח במועד הנפקתה, אם ידוע שבמועד זה שיעור התשואה לפדיון הוא 8% לשנה?
- כיצד תשתנה תשובתכם, אם חלפה שנה ממועד ההנפקה (תשלום קופון אחד כבר בוצע), ובמועד זה, שיעור התשואה לפדיון הוא 4% לשנה?
- כיצד תוכלם להסביר את הקשר בין שיעור התשואה לפדיון לשווי האג"ח? התיחסו להגדרות מקובלות בשוק (פרמייה, נכון, פארו).

פתרון :

#### פתרון סעיף א

תזרים המזומנים הבסיסי שמקבל המשקיע, כל תקופת תשלום (וכאן – כל שנה) נקרא קופון, והוא מוחשב כמכפלת הריבית הנקובה בערך הנקוב :

$$\text{Coupon(Annual)} \text{ or } C = r_B * B = 5\% * 100,000 = 5,000$$

פרט לכך, בתום חי האג"ח (בחלוף 7 שנים מההנפקה) המחזיק באג"ח יקבל גם את הערך הנקוב (סכום נוסף) בסך 100,000 ש"ח.

מחיר האג"ח הוא, לפיכך, הינו של סדרת תזרימי מזומנים קבועים בסך 5,000 ש"ח כל אחד, ובנוסף, הינו תזרים חד פעמי של 100,000 ש"ח בתום שנת 2026.

בעוד שallow תזרימי המזומנים, ההינו עצמו (הריבית המזונה לטובת חישוב ה-PV, הערך היום של האג"ח, במועד הנפקתה) היא שיעור התשואה לפדיון שנקבע על ידי המשקיעים.

$$P_B = C * PVFA(k_D, t) + B * (1 + k_D)^{-t}$$

$$P_B = 5,000 * PVFA(8\%, 7) + 100,000 * (1 + 8\%)^{-7} = 84,379.04$$

מקרה :

סימן	משמעות
$C = r_B * B$	קופון : תזרים המזומנים התקופתי למשקיע, לפי ריבית נקובה מוכפלת בערך הנקוב
$r_B$	ריבית נקובה
$B$	ערך נקוב
$P_B$	שווי האג"ח
$k_D$	שיעור תשואה לפדיון / ריבית השוק / מחיר ההון הזר / התשואה שדרושים בעלי החוב
$t$	מספר תזרימי המזומנים הקבועים (תזרימי הקופון) שנותרו ערב התמחור.

## פתרונות סעיף ב

אם חלפה שנה ממועד ההנפקה, זה אומר שמספר תזרימי המזומנים שהאג"ח צפואה להניב מפה ואילך (ועל בסיס זה ייקבע ערכה) יהיה 6 (לפי 7 תזרימי מזומנים בסך הכל, בגין האחד שכבר בוצע).

שינויו נוסף שנותן בשאלת הוו ששיעור התשואה לפדיון (היריבת להיוון) ירד ל-4%. היריבת בשיעור התשואה לפדיון לעולם לא תשפיע על הריבית הנקובה שנקבעת במועד הנפקת האג"ח, ולכן סכום הקופון נותר זהה והוא **בלתי תלוי בשיעור התשואה לפדיון**, אשר השינוי בו ישפיע רק על הריבית שנזין לטובת חישוב ה-PV.

$$P_B = 5,000 * PVFA(4\%, 6) + 100,000 * (1 + 4\%)^{-6} = 105,242$$

(\*) הערכה: שווי של כל מכשיר פיננסי / השקעה, לרבות אג"ח, הוא תמיד הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים העתידיים שנותר לו (למכשיר הפיננסי) להניב לנקודת ההשקעה. תזרימי ההיסטוריים שנתקבלו בידי משלקאים בעבר אינם חלק מהשווי והתמחיר לנקודת הזמן הנוכחי.

## פתרונות סעיף ג

באופן גס, המחשנו את מערכת הקשרים הבאה בין הריבית הנקובה, שיעור התשואה לפדיון, הערך הנקוב ושווי האג"ח.

מושג	במלים	התוצאה	במלים	כאשר
אג"ח בניכויין	מחיר האג"ח נמוך מהערך הנקוב	$P_B < B$	כאשר שיעור התשואה לפדיון גבוה מהריבית הנקובה (סעיף א)	$k_D > r_B$
אג"ח בפרמייה	מחיר האג"ח גבוה מערכה הנקוב	$P_B > B$	כאשר שיעור התשואה לפדיון נמוך מהריבית הנקובה (סעיף ב)	$k_D < r_B$
אג"ח בפארי מלשון Parity	מחיר האג"חurreca שווה הנקוב	$P_B = B$	כאשר שיעור התשואה לפדיון זהה לריבית הנקובה (לא הוצג)	$k_D = r_B$

שאלה 9.2 – הנחות יסוד לגבי אג"ח – חילוץ שיעור תשואה לפדיון מאג"ח מסויימת לטובת אג"ח אחרת בשוק ההון קיימות שתי אגרות חוב. אג"ח "א" בעלות ערך נקוב של 100 ש"ח, נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 8% לשנה, המשולמת בתום כל שנה. ערכה הנוכחי של האג"ח ייפרע בעוד 7 שנים, ותשלום הקופון האחרון בוצע אטמול. שווייה של אגרת חוב זו הוא 90.263 ש"ח.

אג"ח ב שהוא אג"ח נוסף שנסחרת בשוק שערכה הנוכחי 100, נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 5% לשנה שגム היא משולמת בתום כל שנה, התשלום האחרון בוצע אטמול, וערכה הנוכחי ייפרע בעוד 11 שנים.

נדרש:

- חשבו את שווי האג"ח מסווג ב.
- הניחו כתה כי בשונה מהנתון, אג"ח ב תשלם את הקופון הקרוב שלו בעוד חודש אחד. פדיוןה בחולף 3 שנים וחודש מהיום. כמו כן, הניחו כי האג"ח משולמת ריבית בתדירות רבעונית. בהתאם לשינויים אלו, מה יהיה שווי אג"ח ב במצב החדש?

פתרון:

### פתרון סעיף א

התבסטי על נתוני אג"ח א:

$$P_B(A) = 8\% * 100 * PVFA(k_D, 7) + 100 * (1 + k_D)^{-7} = 90.263$$

המטרה הראשונית שלנו היא להיעזר בנתוני תזרימי המזומנים של אג"ח א ושווייה, על מנת לחלץ את שיעור התשואה לפדיון, שהוא הריבית להיוון.

בקורס זה אנו מניחים ששיעור התשואה לפדיון של כל אגרות החוב המתוארות זהה, אלא אם נאמר מפורשות אחרת. טכנית: ה-IRR שמחלצים בגין אג"ח מסויימת, כוחו יהיה לתמחר אג"ח אחריות (כברירת מחדל). הפתרון של משואה זו הוא מסורבל מדי (לכן במלטה ובמקרים רבים בבחינות, יהיו לכל היותר שני תזרימיים, שנייתן יהיה לחלץ IRR שליהם על בסיס פתרון משואה ריבועית). אני הצגתי יישום אקסלי פשוט:

	H	I	J	K
8			-90.263	0
9			8	1
10			8	2
11			8	3
12			8	4
13			8	5
14			8	6
15			108	7
16				
17	=IRR(J8:J15)	10%	חילוץ	

ה-IRR שהיא פונקציה אקסליית, זהה במחותה ל-IRR מיח' 6: אנו בעצם טוענים ש-IRR שבאupon כללי משקף את שיעור התשואה התקופתי המוצע בפרויקט למשקיע, באג"ח – משקף את שיעור התשואה המתקבל (והנדרש) על ידי המשקיע באג"ח, ככלומר שיעור תשואה לפדיון.

וכעת, אشتמש בשיעור התשואה לפדיון אשר חולץ לשם יישום תמהור שווי אג"ח ב, על פי נתוניה : אג"ח ל-11 שנה, שנושאת ריבית נקובה בשיעור 5%.

$$P_B(B) = 5\% * 100 * PVFA(10\%, 11) + 100 * (1 + 10\%)^{-11} = 67.525$$

### פתרונות סעיף ב

הנחנו כעת כי בשונה מהנתנו, אג"ח ב תשלם את הקופון הקרוב שלה בעוד חודש אחד. פדיונה בחלוף 3 שנים וחודש מיהו. כמו כן, הנחנו כי האג"ח משלם ריבית בתדירות רבועונית. בהתאם לשינויים אלו, מה יהיה שוויי אג"ח ב מצב החדש ?

התאמת ריבית הקופון לתשלום רבועוני : נשים לב, שתחילה עליי לחשב את הקופון מחדש. אם הריבית הנקובה השנתית 5%, אך תדירות תשלום הקופון היא כל רביעון, עליי לחשב ריבית נקובה רבועונית ועל בסיסה קופון רבועוני.

התאמת של ריבית נקובה מתקופה לתקופה, מבוצע באמצעות חילוק פשוט (לא באמצעות ריבית דרייבית / חזקה). בשפה פשוטה :

$$r_B(\text{quarter}) = \frac{r_B(\text{Annual})}{4} \rightarrow r_B(\text{quarter}) = \frac{5\%}{4} = 1.25\%$$

התאמת שיעור התשואה לפדיון לרבעון : הויאל ומדובר באג"ח שיוצרת סדרת תשלום ריבועוניים, גם שיעור התשואה לפדיון (הריבית להיוון) צריך להיות מותאם למונחים של רביעון. לעיל ראיינו ששיעור התשואה לפדיון לשנה (שהולץ מנתוני אג"ח שתזרימיה שנתיים) הוא 10%. נתקן זאת לשיעור תשואה לפדיון רבועוני. שיעור תשואה לפדיון הוא במונחים אפקטיבים. המשמעות היא **ההתאמת שיעור התשואה לפדיון מתקופה לתקופה מבוצעת באמצעות חזקה מתאימה ולא(!) באמצעות כפל או חילוק**.

$$k_D(\text{quarter}) = [1 + k_D(\text{annual})]^{\frac{1}{4}} - 1 \rightarrow (1 + 10\%)^{\frac{1}{4}} - 1 = 2.4114\%$$

כדי לחשב כעת את שווי האג"ח, נתבבש על תזרימי הקופון (לפי הריבית הנקובה הרבעונית, 1.25%) וכן על שיעור התשואה לפדיון הרבעוני. אבל גם נרצה לדעת כמה תזרימי מזומנים ישנים ומתי הם מתרחשים.

בנתון : האג"ח תשלם קופון בעוד חודש, ולאחר מכן תמשיך ותחיה עוד 3 שנים שלמות. ב-3 השנים השלימות ישנים 12 קופונים רבועוניים  $12 = 3 * 4$ , אך בנוסף קיימים קופון נוסף בעוד חודש, ולכן מספר הקופונים הכלול הוא 13. **שימוש לב: סדרת קופונים, 13 במספר, בשחרាជון בעוד חודש ולאחריו המרווח בין קופונים רבועוני.**

$$P_B(B) = 1.25\% * 100 * PVFA(2.4114\%, 13) * (1 + 10\%)^{\frac{2}{12}} + 100 * (1 + 10\%)^{-(3+\frac{1}{12})} = 88.57$$

הypothesis רביעוני: ריבית נקייה רביעונית כפול ערך נקי	1.25% * 100
היוון סדרת הקופונים הרביעוניים, בשיעור תשואה לפדיון רביעוני, בהתאם למספר הקופונים	$PVFA(2.4114\%, 13)$
הויל והypothesis הראשון בעוד חודש, ומרווח הזמן בין כל הקופונים העוקבים 3 חודשים, הערך הנוכחי הסדרתי מוביל אותנו 3 חודשים לפני התזרים הראשון, והואיל והתזרים הראשון בעוד חודש – מגיעים בזמן 2- (מינוס שתיים, בחודשים). כדי לתקן את התוצאה בזמן 0 נכפול באחת ועוד הריבית בחזקה רלוונטי. השתמשתי כאן בריבית להיוון שנתיות, בחזקת 2/12 משום שגורם להיוון הוא לחודשיים קדימה.	$(1 + 10\%)^{\frac{2}{12}}$
ערך הנוכחי של הקופונים נוסיף את הערך הנוכחי מוכפל ב-1 ועוד שיעור תשואה לפדיון במונחים שנתיים, מותאם בזמן 0 בחזקה שלילית בסכום יחיד של 3 שנים. וחודש (מועד קבלת התזרים הבודד ביחס להיום).	$100 * (1 + 10\%)^{-(3 + \frac{1}{12})}$

**שאלה 9.3 – חישובי אג"ח בסיסיים (לתרגול בית)** תמהור אג"ח בנקודות זמן מאוחרות ממועד הנפקה להלן נתונים לגבי אגרת חוב שערכה הנקוב 100 ש"ח אשר הונפקה ב-1.9.2020: האג"ח מבטיחה ריבית שנתיות נקייה בשיעור 10%, כאשר תשלום הריבית מדי שנה בסוף חודש אוגוסט. במועד הפדיון הסופי 30.8.2028 המשקיע יקבל גם את הקrho.

נדרש: מהו המחיר המרבי שהיה מוכן תשלום המשקיע עבור האגרת בתאריך 1.1.2022, אם ידוע ששיעור התשואה לפדיון של אג"ח דומות הוא 17% אפקטיבי לשנה?

פתרון:

$$P_B = 100 * 10\% * pVFA(17\%, 7) * (1 + 17\%)^{\frac{4}{12}} + 100 * (1 + 17\%)^{-(6 + \frac{8}{12})} = 84.62$$

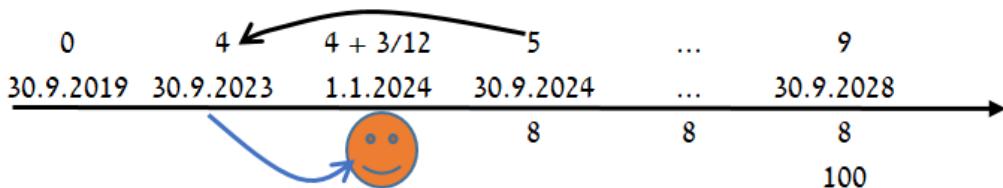
**שאלה 9.4 – חישובי אג"ח (לבית)**

חברת "גינוי שועלם" הנפקה ב-30.9.2019 אגרת חוב שערכה הנקוב 100 ש"ח. אגרת החוב נושאת ריבית שנתיות נקייה בשיעור 8% אשר מושלמת מדי שנה בסוף חודש ספטמבר. במועד הפדיון הסופי 30.9.2028 יקבל המשקיע גם את הקrho. מהו המחיר המרבי שהיה מוכן תשלום המשקיע עבור האג"ח ב-1.1.2024, בהנחה ששיעור התשואה לפדיון של אג"ח דומות במועד זה הנו 12% לשנה?

#### פתרון שאלה 9.4

אגרת החוב הונפקה ב-30.9.2019 משלם בהגדלה תשולמי קופון שנתיים ב-30.9.30 של כל שנה. סכומו של קופון שנתי הוא כריגל המכפלה הפחותה של הריבית הנקובה (8%) בערך הנקוב (100) וMSC סכומו 8 ש"ח. בנוסף, יבוצע תשלום אחד וחיד של סך הערך הנקוב ב-30.9.2028 לידי המחזיק באג"ח (100). שיעור התשואה להיוון – ריבית להיוון – 12%.

נקודות התמחור (ההוויה לצרכי השאלה) היא ה-1.1.2024. נכוון לנקודת זמן זו המיצגת את מועד התמיהיר, נותרו עוד 5 תזרימי קופון לביצוע, ב-30.9.30 של כל אחת מהשנים: 2024, 2025, 2026, 2027, 2028.



מהוון לאחר בריבית  
מתאימה: זמן 9  
ערך נקוב, תשלום אחד  
בתום התקופה  
זמן 4+3/12  
כלומר 4+9/12 לאחר  
\_PB = 8 \* PVFA(12%, 5) \* (1 + 12%)<sup>3/12</sup> + 100 \* (1+12%)<sup>-(4+9/12)</sup>

זמן:	5
תזרימי קופון, נותרו עוד 5	
купון	
לצורך	
תקופתי	
היון	
ריבית נקובה	
זמן 5	
ניזיון	
את שיעור	
כפול ערך נקוב	
התשואה	
8% * 100	
לפדיון	
	9

$$PB = 88.04$$

הסבר: עליינו לדעת כי מחיר אגרת חוב הוא תמיד הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים העתידיים שיקבל המשקיע כתוצאה מרכישתה במועד החישוב. במקרה שלנו, אנו נדרשים לתמחר את האג"ח ליום 1.1.2024, נקודת זמן המאוחרת ב-4 שנים ו-3 חודשים ממועד הנפקתה הנוכחי. נכוון למועד זה, האג"ח צפוי לשלם למחזיקים 5 תזרימי מזומנים שנתיים בגובה הקופון, ב-30.9.30 של כל שנה עוקבת, וכן ב-30.9.2028 תקובל חד פערمي בגובה הערך הנקוב.

הערך של סדרת הקופונים מוביל בהגדלה תקופת תשלום אחת אחרת (שנה אחרת) ביחס למועד התקובל הקרוב ביותר נכוו למועד החישוב. הויל וה קופון הקרוב יחולק ב-30.9.2024, חישוב הערך הנוכחי בהתבסס על PVFA מוביל ל-3.09.2023. מכאן, עלינו לקדם את התוצאה על ידי דחיפה קדימה של התוצאה במשך 3 חודשים, ולהוסיף לכך את הערך הנוכחי של הסכום היחיד המתkeletal בתום התקופה (הערך הנוכחי).

שים לב, שכל הערכים מהוונים בשיעור התשואה לפדיון. לעולם לא מהוונים בריבית הנקובה. הריבית הנקובה קבועה תזרימיים, אופן היוגם תלוי בריבית שמקפת את התשואה הנדרשת / מחיר ההון.

## פרק 2: חישובי תמחור מניות (יח' 11)

**מינימציו:** שווי אג"ח / מחיר הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שהוא משלהן למשקיעים. באופן כללי – שווי נכס הוא הערך הנוכחי של התזרימיים הנקיים שיתקבלו בידיו רוכשו.

גם לגבי מניות – אנו נניסם את אותו עיקרון – **שווי מניה הוא הערך הנוכחי של תזרימי המזומנים שצופים המשקיעים במניה לקבל.**

בעוד שבאג"ח תזרימי המזומנים כוללים קופון וערך נקוב, במניות – תזרימי המזומנים של המשקיעים כוללים **דיבידנדים** (ואם יש מידע על מכירת המניה – גם התקובל במכירתה).

המודל הבסיסי לפחות באופן הסביר העקרוני שלו, יצא מנקודת הנחה שההשקעה במניות היא השקעה לטווח ארוך. ובطוחה הארוך הזה, לא זו בלבד אנו צופים ממשקיעים לקבל דיבידנדים – אנו מצפים שסכום הדיבידנד יעלה עם הזמן (בהתאם לקצב התפתחות החברה).

ואם זה כך, התהlik הטכני שמלואה תמחור מניות יישען **תכל'ס על שני עקרונות:**

א. **שווי מניה הוא ערך נוכחי של סדרת דיבידנד אינסופית.**

ב. **סדרת תזרימי הדיבידנד האינסופית – במקרים רבים – צומחת.**

### הנוסחה הטכנית לתמחור מניה – מודל היון הדיבידנדים – גורדיון

$$P_S = \frac{DIV}{k_E - g}$$

כאשר :

סימן	משמעות
$P_S$	מחיר המניה – Price of Share
$DIV$	הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחראי לשיעור הצמיחה קבוע
$k_E$	מחיר ההון העצמי, התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות
$g$	שיעור הצמיחה הקבוע לנוכח של הדיבידנדים

דges חשוב: כמו בכל נוסחה של חישוב ערך נוכחי סדרתי (וכאן – מדובר בערך נוכחי של סדרה אינסופית צומחת), התוצאה המתkeletal מימוש הנוסחה מובילת אותנו לנקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד תזרימי המזומנים הראשוני בסדרה.

### א. אופן חישוב מחיר ההון העצמי $k_E$ :

- אם מחיר המניה נתון, יחד עם פרמטרים נוספים, אפשר לחלץ את מחיר ההון העצמי על בסיס הцевה בנוסחה.
- בנוסף – חיבור ליה' 8: התשואה הנדרשת על מנת בודדת נקבעת על ידי קו ה-SML. לכן, אם קיימים נתונים רלוונטיים, ניתן גם לחשב את  $k_E$  כך:

$$k_E = R_F + [E(M) - R_F] * \beta_E$$

- ביה' 11-10 (בחלקו העיקרי שדן במבנה ההון והשפעתו על שווי החברה) קיים משפט נוספים שנראה "המשפט השני של מודיליאני ומילר" והוא מאפשר לחשב את מחיר ההון העצמי בחברה. נגיעה לה.

### שאלה 11.1 תמחור מניות בסיסי – מודל גורדיון

מנית AM היא מניה הנסחרת בבורסה לנירות ערך בתל אביב. על פי תחזיות האנליסטים, המניה צפוייה לחלק לבלי המניות בעוד שנה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה. שיעור הדיבידנד צפוי לצמוח כל שנה ב-3%. התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה היא 13%.

- מהו מחיר המניה היום?
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הקרוב ביוטר, בסך 10 ש"ח, יתקבל מחר?
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד האחרון בסך 10 ש"ח חולק אטמול?
- מהו מחיר המניה אם, בשונה מהנתנו, הדיבידנד הקרוב ביוטר בסך 10 ש"ח צפוי להתקבל בעוד 8 שנים (כלומר, בתום כל אחת מהשנתיים 1-7 אין תקופת דיבידנד בכלל).
- מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הצפוי הוא 10 ש"ח בעוד שנה, 20 ש"ח בעוד שנים, 30 ש"ח בעוד 3 שנים, 48 ש"ח בעוד 4 שנים, ובכל שנה עוקבת, יצמוך סכום הדיבידנד בשיעור קבוע של 3%?

פתרון:

### פתרון סעיף א

$$P_S = \frac{DIV}{k_E - g} \rightarrow P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} = 100$$

הויל והדיבידנד הקרוב ביוטר הוא בעוד שנה, ומרוחך הזמן בין כל שני תזרימי דיבידנד עוקבים הוא שנה, אני מוקפץ "אתחת אחרת" ביחס למועד הדיבידנד הקרוב. אם הדיבידנד עוד שנה, קפיצה אתחת אחרת מובילה לזמן 0 וסיימת. בקיצור: תזרימי "תום תקופה" בקטע הכי רגיל שיש.

### פתרון סעיף ב

"מחיר" מבחןינו = "עוד דקה" כלומר התזרמים העתידיים הקרובים ביוטר הוא בזמן 0 (תזרימי תחילת תקופה). לפיכך, חישוב הערך הנוכחי שמקפיד אוטומטית אתחת אחרת – מוביל בזמן -1. עליי לתקן על ידי מכפלה באחת ועוד הריבית (מחיר ההון העצמי) פעם אחת:

$$P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%) = 113$$

דרך נוספת היא להתבסס על משווהת היון אשר נוטלת את התזורים הראשוני בלבד, ואת יתר התזוריים מזמן 1 כפונה בלבד:

$$P_S = 10 + \frac{10 * (1 + 3\%)}{13\% - 3\%} = 113$$

מה עשיתי כאן? התיחסתי לכך שהتوزרים הראשוני בסך 10 ננטנו הוא תזרים מיידיים, ולכן ערכו הנוכחי זהה לסכומו. התזוריים העוקבים מזמן 1 כפונה, כוללים (במיוחד בהקשר לתזרים בזמן 1) צמיחה בשיעור של 3% (לשנה). לכן המונה מוגלץ זאת. המכנה נותר זהה, וכך הוא בעצם מהו סדרת תזוריים מזמן 1 כפונה בזמן 0 לפי העיקרונו של "אחת אחרת" במצב כזה לא תדרש התאמה (כי מתיחסים בזמן 0 בלבד, ולזמן 1 כפונה בלבד).

**מדוע הצגתי דרך זו? בדרך זו יש יתרון כאשר בשאלת מסויימת רוצים לחוץ את שיעור התשואה להון העצמי.**

#### פתרון סעיף ג

מהו מחיר המניה אם הדיבידנד האחרון בסך 10 ש"ח חולק אטמול?

תבילה, הצהרה: שווי נכס בעולם לא מוגלץ שווי של תזוריים היסטוריים, אלא רק תזוריים עתידיים. התזוריים העתידיים הם פונקציה של התזוריים ההיסטוריים ושיעור הצמיחה. בפרט, אם הדיבידנד האחרון חולק אטמול, הרי שהדיבידנד הבא צפוי בעוד שנה ועד לתום אותה שנה, הדיבידנד יצמץ ב-3%.

$$P_S = \frac{10 * (1 + 3\%)}{13\% - 3\%} = 103$$

מה עשינו כאן? במנה קיימים התזוריים העתידיים הקרוב ביותר, בעוד שנה – 10 ההיסטורי בתוספת צמיחה שנתיות. במכנה, ההפרש בין מחיר ההון העצמי לשיעור הצמיחה. והואיל והדיבידנד הקרוב ביותר הוא בעוד שנה, ערכו הנוכחי שמקפיד את אחרת מוביל בדיקות בזמן 0 ללא צורך בהתאמה.

#### פתרונות סעיף ד

מהו מחיר המניה אם, בשונה מהנתנו, הדיבידנד הקרוב ביותר בסך 10 ש"ח צפוי להתקבל בעוד 8 שנים (כלומר, בתום כל אחת מהשנים 1-7 אין תקولي דיבידנד בכלל).

$$P_S = \frac{10}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%)^{-7} \approx 42.51$$

מה עשינו כאן?

מדובר ב-10 ש"ח וזהו הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחורי הצמיחה קבועה. לכן זה המחיר בנוסחה. במכנה – ההפרש בין מחיר ההון לבין שיעור הצמיחה. אלא שהואיל וחישבנו את הערך הנוכחי של סדרה שהחלה בזמן 8, הקפיצה האוטומטית אחת אחרת לא מובילה אליו Bởiו אני רוצה אלא לנקודה שהיא "אחד אחרת" כלומר בזמן 7. לכן עלי לבצע התאמה נוספת זמן 7 לזמן אפס, וזאת על ידי:  $(1 + 13\%)^{-7}$

#### פתרונות סעיף ה

מהו מחיר המניה אם הדיבידנד הצפוי הוא 10 ש"ח בעוד שנה, 20 ש"ח בעוד שנים, 30 ש"ח בעוד 3 שנים, 48 ש"ח בעוד 4 שנים, ובכל שנה עוקבת, יצמץ סכום הדיבידנד בשיעור קבוע של 3%?

סעיף זה מציג בפנינו מצב שבו שיעור הצמיחה משנה 1 לשנה 2 הוא 100%, שיעור הצמיחה מהשנה ה-2 ל-3 הוא 50%, שיעור הצמיחה מהשנה ה-3 ל-4 הוא 60%, ורק לאחר מכן שיעור הצמיחה מתקבע על 3%. כאשר אנחנו מתמחרים מニアות לפיה מודל גורדון: **תמיד ולאחר נרצה להזות את אותו דיבידנד שאחורי הצמיחה קבועה. כאן ספציפית – אחרי התזרים של תום שנה 4, הצמיחה מתקבעת.** לכן, נוכל ליחס את נוסחת גורדון על התזרים בזמן 4.

כיצד אומرت ההגדלה? המחיר בנוסחת גורדון הוא תזרים הדיבידנד הקרוב ביותר שאחורי שיעור הצמיחה קבוע. את התזרים הראשונים (לא כולל תזרים זמן 4) נהוו "ידנית" בנפרד:

$$P_S = 10 * (1 + 13\%)^{-1} + 20 * (1 + 13\%)^{-2} + 30 * (1 + 13\%)^{-3} + \frac{48}{13\% - 3\%} * (1 + 13\%)^{-3} \approx 378$$

שלושת המחוברים הראשונים הם התזרים הבודדים בשנים 1, 2 ו-3, טרם התקבועות הצמיחה. המחבר הרביעי הוא התזרים בזמן 4 שאחורי הצמיחה קבועה ולאחר מכן הופעל מודל גורדון (נוסחת ההיוון של הסדרה הצומחת). החישוב מוביל אחת אחרת (כיהה לסדרה) ככלומר בזמן 3, ויש צורך לבצע התאמה נוספת בזמן 4 לזמן אפס על ידי מכפלה מתאימה.

## שאלה 11.2 – תמהור מניות – המצח המבריק – לבית

מנית "המצח המבריק" חילקה לפני דקה דיבידנד בסכום של 10 ש"ח למניה. התכנון הוא לחלק דיבידנד כל 5 שנים. שיעור הצמיחה השנתי הוא 4%. התשואה הנדרשת על ידי משקיעים בחברות דומות היא 14% לשנה.

נדרש :

- מהו המחיר המרבי שתסכימו לשלם על המניה היום?
- כיצד, אם בכלל, תנסה תשובהכם בהנחה שאתם מעוניינים להחזיק במניה 8 שנים בלבד?

פתרונות :

פרק :

בכלל, תמהור מניה הוא הערך הנוכחי של הדיבידנדים שיתקבלו. כאשר **הדיבידנדים צומחים** (בשיעור קבוע) **לאינסוף**, קיימת נוסחה רלוונטית לחישוב הערך הנוכחי, כדלקמן :

$$P_S = \frac{Div}{k_E - g}$$

כאשר  $Div$  הוא הדיבידנד העתידי הקרוב ביותר שאחוריו הצמיחה קבועה,  $k_E$  הוא שיעור הצמיחה הנדרש, ושיעור הצמיחה הוא  $g$ . כמו כל נוסחת היון סדרה, גם נוסחה זו מובילה לנקודת הזמן שהוא "אתה אחרת" ביחס לתזרים הראשונים בסדרה.

פתרונות סעיף א :

$$k_E(5 \text{ years}) = (1 + 14\%)^5 - 1 = 0.925414582 = 92.5414582\%$$

$$g(5 \text{ years}) = (1 + 4\%)^5 - 1 = 0.216652902 = 21.6652902\%$$

$$P_S = \frac{10 * (1 + 4\%)^5}{0.925414582 - 0.216652902} = 17.1659$$

מסקנה : שווי המניה היום, המבטא את הערך הנוכחי של סדרת הדיבידנדים האינסופית הצומחת הוא 17.1659 ש"ח.

שימוש לב : כמו כל היון סדרה, גם ערך הנוכחי של סדרה אינסופית צומחת מוביל תמיד לנקודת הזמן שהיא תקופת תשלום אחת לפני מועד התזרים הראשונים בסדרה. ספציפית כאן, הדיבידנד הקרוב הוא בעוד 5 שנים (כי התזרויות 5 שנתיות, והאחרון חולק לפני דקה). לכן, כאשר מהוונים סדרה זו, ו קופצים 5 שנים לאחר מועד התזרים הראשונים, מגיעים בדיקן לזמן אפס והכל מצוין.

בוחלט יתכן שהתזרים הראשונים יהיה בנקודת זמן אחרת, ואז תדרשנה התאמות.

**פתרונות סעיף ב:**

מחיר המניה אינו פונקציה של תקופת ההחזקה בה, כאשר הפרמטרים להיוון קבועים. זאת מושם שככל הערך של "לא מתකבל" לאור המכירה המוקדמת (דיבידנדים לאחר זמן 8), יփוך להיות מוגלים במחיר המכירה. מטעמי קוצר היריעה לא נוכיח משפט זה (יש על זה דיון רחוב יותר בחלקים אחרים במחברת).

**שאלה 11.3 בנושא שימוש במחיר מניה כדי לאמוד את מחיר ההון העצמי של החברה – לבית רוחוי** חברת "סקט לומדים" גדו בשנים האחרונות בקצב של 8% בשנה. בתום השנה הם הסתכמו ב-2 ש"ח למניה. מחיר המניה בשוק הוא 30 ש"ח והחברה החליטה לחלק דיבידנד בסכום של 1.2 ש"ח בסוף שנת הפעולות הקרובה.

מהו מחיר המון העצמי של החברה, לפי מודל הצמיחה של גורדון, בהנחה ששיעור צמיחה הדיבידנד שווה לשיעור הגדול ברוחוי החברה?

**פתרונות :**

מחיר המניה הוא הערך הנוכחי של תזרימי הדיבידנד ובהינתן ההנחה שהם צומחים בשיעור קבוע לאינסוף, הנוסחה הרלוונטית להיווןם היא :

$$P_s = \frac{DIV}{k_E - g}$$

המונח  $k_E$  מייצג את שיעור התשואה הנדרש על המון העצמי, ולתשומת לכם שלעתים מסומן כ-  $k_s$  וכן משקף את מחיר המון ( $k$ ) הנדרש بعد השקעה במניות החברה ( $s = \text{shares}$ ).

כך או אחרת, בהצבת נתוני השאלה נקבל :

$$30 = \frac{1.2}{k_E - 8\%} \rightarrow k_E = 12\%$$

ואשר על כן, מחיר המון העצמי של החברה הוא 12%.

## מפגש 8 – ההשפעה של תמהיל מקורות המימון על שווי החברה ומהירות ההון

### מינוי רציו:

לאחר שבמפגש הקודם עסקנו בתמהור מנויות ואג"ח על בסיס נסחאות הערך הנוכחי, הגיע הזמן לעבור להשפעות של מבנה ההון (מהו הרכב גיוס המימון בחברה – שיעור ההון העצמי במימון מנויות, ושיעור ההון הזר במימון אג"ח) על:

- א. שווי החברה.
  - ב. התשואה הנדרשת על ידי משלקעים – בסך הכל וברמת בעלי המניות (החלטות ניהול).
- יח' 10 ו-11 בich' הלימוד מחולקות כך שיח' 10 עוסקת בעיקר בהשפעות על שווי החברה, ויח' 11 בתשואה הנדרשת / מחיר ההון הכלול. אנחנו נתיחס להכל כ"מקרה אחת".

לשם כך עליינו להגדיר מספר הגדרות עקרוניות וזו לתרגל לעייפה:

### מחיר ההון המומוצע המשוקל

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

מחיר ההון המומוצע המשוקל הוא בעצם חישוב ממוצע של התשואה הנדרשת על ידי כל המשלקעים בפירמה. למעשה, בפירמה יש שתי אוכלוסיות משלקעים:

המשלקעים בהון עצמי – שהתשואה הנדרשת על ידם מסומנת כ- $k_S$ .

המשלקעים בהון זר (רוכשי האג"ח) – שהתשואה הנדרשת על ידם מסומנת כ- $k_D$ .

במסגרת מחיר ההון המשוקל, אנו כופלים כל תשואה הנדרשת על ידי משלק היחסי של משלקעים אלו בסך מקורות המימון בחברה – כך שאט  $k_S$  אני כופל ב-  $\frac{S}{V}$  ככלומר בחלק שמהווה ההון העצמי בסך מקורות

הימון בחברה, ואת  $k_D$  אני כופל ב-  $\frac{D}{V}$  ככלומר בחלק שמהווה ההון הזר / האג"ח בסך מקורות המימון בחברה.

מעניין לראות שرك את רכיב עלות המימון בהון זר אנו כופלים ב-1 פחות שיעור המס  $t$  כאשר הסיבה לכך היא שהוצאות מימון הון הוצאה מוכרת לצורך מס.

יש עוד דרך, עקיפה יותר, להגיע למחיר ההון המומוצע המשוקל. אנחנו טוענים ש:

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

למעשה הטענה היא – שאם חברת נמצאת ב"שיעור משקל" הרי שהיחס שלה בין הרווחים התפעוליים (נקראים גם הכנסה תפעולית נקייה, NOI, ראשית תיבות של Net Operating Income) בኒקי מס לבין סך ההון שגיגיטה, אמרור לספק את דרישות התשואה של המשלקעים בגורף (WACC).

המשפט הראשון של מודיליאני ומילר M&M – הקשר בין מינוף פיננסי ושווי החברה:

$$V^L = V^U + t * D$$

ambil להוכיח – כאשר חברה פועלת בעולם ללא סיכון פשיטת רגל ועם מסים – ככל שרכיב המימון בהתחייבויות/non זר / אג"ח גבוהה יותר, כך שווי החברה הכלול גבוהה יותר (לאור מגן המס על עלויות המימון). אם שיעור המס 0 – שווי החברה הכלול הוא בلت תלו依 באופן המימון של החברה.

**המשפט השני של מודיליאני ומילר – הקשר בין מינוף פיננסי ושיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות:**

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כולם יודעים שככל שנותלים התחייבויות בהיקף משמעותי יותר, הסיכון לבעליים (במונחי ההשתנות האפשרית של רוחיהם) גבוה יותר. לכן, הם (בעלי המניות בחברה עם רכיב חוב גבוה יותר) ידרשו תשואה גבוהה יותר. הקשר בין שיעור המינוף לבין שיעור התשואה מבוטא במשוואה זו, כאשר  $\frac{D}{S}$  מבטא את התשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות בחברה ממונפת (עם מינוף פיננסי = עם חוב), ואילו  $k_S^U$  זה מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה זהה בכל מובן למעט העובדה שאינה ממונפת.

**שאלה 11.1 – הרעיון הכללי מאחורי מחיר ההון המשוקל / תשואה משוקללית**  
לחברת "הנקניק הלאומי" אגרות חוב שערכן הנקוב 200,000 ש"ח ו-400,000 מניות.

האג"ח היא צמיחה (לאינסוף) והריבית הנקובה עלייה 6% לשנה.  
מחיר האג"ח מיד לאחר תשלום הריבית השנתית הוא 80% מערכה הנקוב.  
מחיר המניה בשוק הוא 2 ש"ח.  
החברה מחלקת את כל רוחיה כדיבידנד במזומנים.  
שיעור המס החל על החברה הוא 25%.  
הרווח התפעולי של החברה השנה היה 300,000 ש"ח.

נדרש :

- חשבו את שווי ההון העצמי של החברה.
- חשבו את שווי החוב של החברה.
- חשבו את השווי הכלול של החברה והסבירו את מושמו.
- חשבו את מחיר ההון המשוקל של החברה.

פתרונות :

**סעיף א – שווי ההון העצמי**

שווי ההון העצמי בחברה הוא השווי הכלול של מנויותיה. שווי זה הוא הערך הנוכחי של התזריריים המכראפיים שצפויים לנבייע לידיהם של בעלי המניות – תזרימי הדיבידנד.  
בשאלה נתנו – שהדיבידנדים זהים לרוח (הכוונה היא לרוחה הנקוי אלא אם נאמר אחרת). לכן, אם נוכל לחשב את הרוחה הנקוי, נוכל להוון אותו (PV) וכן נקבל את השווי הכלול של ההון העצמי.  
אלא שכאן – האמת היא שאין בכך צורך, כי מסלול חליפי ומהיר יותר במקרים רבים – יהיה מכפלת מחיר המניה במספר המניות :

$$S = N_S * P_S \rightarrow S = 400,000 * 2 = 800,000$$

#### סעיף ב – חשבו את שווי החוב

גם כאן אין צורך בהיוונים מיוחדים. ידוע הערך הנוכחי של האג"ח והוא שמחירו הוא 80% מערכה הנוכחי:

$$D = 200,000 * 80\% = 160,000$$

#### סעיף ג – שווי החברה

כשאנו דנים ביחס 10-11 בשווי החברה, אנו דנים בשווי שטף חברת האג"ח לכל אוכלוסיות המשקיעים בה – בשפה פשוטה, אנו סוכמים גם את שווי ההון העצמי (שווי החברה לבני המניות) וגם את שווי ההון הזר (החוב).

$$V = S + D = 800,000 + 160,000 = 960,000$$

#### סעיף ד – חשבו את מחיר ההון המשוקל של החברה (WACC)

נוסחה 1 :

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

נוסחה 2 :

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

לדעתך, במקרה זה, נוסחה 2 תוביל אותנו למקום הנכון מהר יותר.

$$WACC = \frac{300,000 * (1 - 25\%)}{960,000} = 0.234375 = 23.4375\%$$

וסייםנו, איזה כיף.

**שאלה 10.1 – משחק בין משוואות – שווי החברה, דרגת המינוף והקשר בין חברות**  
חברת "הנקניק" (N) וחברת "הקבב" (K) הן שתי חברות הפעולות באותו ענף, וחשופות לsiccon תפעולי זהה.

להלן נתונים חברת הנקניק :

הרווח הכספי הצפוי בחברה N מותפלג כדלקמן :

200,000 ש"ח בהסתברות 60%.

350,000 ש"ח בהסתברות 40%.

בחברה 100,000 מנויות שערך השוק שלן הוא 60% מהשווי הכללי של החברה, וכן אגרות חוב צמיות (קונסול).  
מחיר ההון הכללי (המוצע המשוקל) של החברה הוא 20%.

הרווח הכספי הצפוי בחברת K הוא רבע מהרווח הצפוי בחברה N בכל מצב טבעי.  
בחברה 80,000 מנויות ואגרות חוב צמיות שערכן הנקוב 50,000 ש"ח והן נושאות ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה. מחיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח.

נתונים משותפים :

שיעור התשואה על אג"ח כל החברות בשוק זהה.

שיעור מס החברות הוא 25%.

נדרש :

- א. מהי תוחלת ה-ROI בכל אחת מהחברות?
- ב. מהו השווי הכללי של חברת N?
- ג. מהו שווי המניות בחברה N? מהו שווי החוב בחברה N?
- ד. הניחו שתאגיד N שינה את מבנה ההון שלו והיא ממומנת בהון עצמי בלבד. מה יהיה שווייה?
- ה. בהמשך לסעיף ד, חשבו את מחיר ההון העצמי בחברה N.
- ו. חשבו את השווי הכללי של חברת K בהנחה שלא הייתה ממונפת.
- ז. חשבו את השווי הכללי של חברת K בהינתן דרגת המינוף שלה.
- ח. חלצו את מחיר ההון המשוקל של חברת K.
- ט. חשבו את מחיר המניה של כל אחת מהחברות.
- י. הצמדו נתונים הבסיס. הניחו כי אתם מחזקים ב-4% מהו שווי המניות של חברת N שמחירה בשוק גבוה ב-10% מזה שמצוותם בסעיף קודם (מניה K מתומחת בשווי הוגן). הראו כיצד ניתן ליצור רווחי ארביטראז'.

פתרונות :

**פתרונות סעיף א – תוחלת הרווח הכספי בכל חברת :**

חברה N : חברת K (רבע מהרווחים) :

50,000 ש"ח בהסתברות 60%	200,000 ש"ח בהסתברות 60%
87,500 ש"ח בהסתברות 40%	350,000 ש"ח בהסתברות 40%

$$E(NOI_N) = 200,000 * 60\% + 350,000 * 40\% = 260,000$$

$$E(NOI_K) = 50,000 * 60\% + 87,500 * 40\% = 65,000$$

#### פתרון סעיף ב - מהו השווי הכללי של חברת N?

מחיר ההון הכללי (הממוצע המשוקל - WACC) של חברת N הוא 18%. בנוסף ידוע שהיעור מס החברות 25%. כshednim בשווי הכללי של החברה, רוצים לדעת את שווייה מנקודות ראות כל אוכלוסיות השקיעים בה. זה בעצם ביטוי הפוך לנוסחת מחיר ההון המוצע המשוקל:

$$WACC = \frac{NOI * (1 - t)}{V}$$

מכך נגזר:

$$V = \frac{NOI * (1 - t)}{WACC} \rightarrow \frac{260,000 * (1 - 25\%)}{20\%} = 975,000$$

#### פתרון סעיף ג - מהו שווי המניות בחברה N? מהו שווי החוב בחברה N?

נתון: בחברה 100,000 מניות שערך השוק שלן הוא 60% מהשווי הכללי של החברה, וכן אגרות חוב צמיות (קונסול).

$$S = 60\% * V \rightarrow S = 60\% * 975,000 = 585,000$$

$$D = V - S \rightarrow D = 975,000 - 585,000 = 390,000$$

#### פתרון סעיף ד - הניחו בעת כי חברת N שינתה את מבנה ההון שלה והיא ממומנת בהון עצמי בלבד. מה יהיה שווייה?

[מינוי רצוי – המשפט ה-1 של M&M יודיע בצוරהיפה בין שווי חברה ממונפת לבין שווי חברה לא ממונפת. אבל מה עושים כשרוצים לחייב שווי חברה ממונפת אחת לשווי חברה ממונפת אחרת? את זה המשפט לא יודיע בפועל בצוරה ישירה. לכן, פעולמים בתהיליך חילוץ. משתמשים בשווי הכללי של החברה ממונפת ידועה, מגיעים דרכו לשווי של חברה לא ממונפת – למרות שהיא היפוטטית, ואז אפשר להשתמש בכך כבסיס לשווי החברה ממונפת השנייה על בסיס נתונים המnof שלה]

בסעיף ב מצאנו כי:

$$V^L(N) = 975,000$$

לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר, הרו שמותקינים:

$$V^L(N) = V^U + t * D \rightarrow 975,000 = V^U + 25\% * 390,000 \rightarrow V^U = 877,500$$

#### פתרון סעיף ה - בהמשך לסעיף ד, חשבו את מחיר ההון העצמי בחברה N.

"בהמשך לסעיף ד" – להמשיך עם ההנחה לפיה חברת N לא ממונפת.

$$V^U(N) = \frac{NOI * (1 - t)}{k_S^U}$$

מה זה הנוסחה זו? אנו ראיינו שבאופן כללי, שווי חברה כולל מתקבל על ידי היון התזורים התפעולי בኒקיי מס במחיר ההון הכלול WACC. אם בחברה אין מנוּף פיננסי, ה-WACC בעצם זהה למחיר ההון העצמי (בחברה הלא ממונפת כאמור) שנחוג לסמנו ב-  $k_S^U$ .

נזכיר:

$$877,500 = \frac{260,000 * (1 - 25\%)}{k_S^U} \rightarrow k_S^U = 0.222222222 \approx 22.22\%$$

#### פתרונות סעיף ו - חשבו את השווי הכלול של חברה K בהנחה שלא הייתה ממונפת

חברה K היא חברה בעלת סיכון תפעולי זהה לחברת N שנדונה בסעיפים קודמים, אך נבדلت ממנה ברמת הסיכון העסקי / דרגת המנוּף. ספציפית בסעיף זה – נטרלו פער זה, וביקשו לחשב את שווייה בהנחה שמדוברת בהון עצמי בלבד.

$$V^U(K) = \frac{65,000 * (1 - 25\%)}{22.22222222\%} = 219,375$$

מה קרה פה? השתמשנו במונה בתוחלת הרווח התפעולי בחברה K ובשיעור המס הכללי במשק, במכנה כללו את מחיר ההון העצמי של חברה לא ממונפת, אשר תמיד יהיה זהה בין חברות אם הן חשופות לאותו סיכון תפעולי.

בעלי המניות דורשים תשואה על השקעתם אם אין מנוּף פיננסי (אם אין התחריביות) רק בגין הסיכון התפעולי. וכן, אם הסיכון התפעולי זהה לנטו, הם ידרשו תשואה זהה. לכן מחיר ההון העצמי בהנחה אי מנוּף בשתי חברות – זהה.

#### פתרונות סעיף ז - חשבו את השווי הכלול של חברה K בהינתן דרגת המנוּף שלה

בשאלה נתון: מחיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח.  
לפי המשפט ה-1 של מודיליאני ומילר, מתקיים כי:

$$V^L = V^U + t * D$$

$$V^L(K) = 219,375 + 25\% * 45,000 = 230,625$$

#### פתרונות סעיף ח - חלצו את מחיר ההון המשוקל של חברה K

$$WACC(K) = \frac{NOI * (1 - t)}{V} \rightarrow WACC(K) = \frac{65,000 * (1 - 25\%)}{230,625} \rightarrow WACC(K) = 21.138\%$$

**פתרונות סעיף ט - חשבו את מחיר המניה של כל אחת מהחברות**

$$S(N) = 585,000$$

$$N_S(N) = 100,000$$

$$S(K) = V^L(K) - D \rightarrow S(K) = 230,625 - 45,000 \rightarrow S(K) = 185,625$$

$$N_S(K) = 80,000$$

מחיר המניה של כל חברת יחולש לפי היחס בין השווי הכללי של ההון העצמי בה (שהוא השווי של מנויותיה) מחלוקת במספר המניות :

$$P_S(N) = \frac{S(N)}{N_S(N)} = \frac{585,000}{100,000} = 5.85$$

$$P_S(K) = \frac{S(K)}{N_S(K)} = \frac{185,625}{80,000} = 2.3203125$$

**פתרונות סעיף י - הגדדו לנוטוני הבסיס. הניחו כי אטם מחזיקים ב-4% מהן המניות של חברת N שמחירה בשוק גבוה ב-10% מזה שמצוות בסעיף קודם (מניה K מתומחרת בשווי הוגן). הראו כיצד ניתן ליצור רווחי ארביטראז'.**

שינוי בתזרים העתידי	תזרים בהווה	
$-\left(\frac{1}{9} * 390,000\right) * (1 - 25%) * 4\%$	$585,000 * (1 + 10%) * 4\% = 25,740$	מחיר של הנכס המתומחר ביטר (N)
$+\left(\frac{1}{9} * 45,000\right) * (1 - 25%) * 16\%$	$-185,625 * 4\% * 4 = -29,700$	קונה את הנכס המקורי (K) שמתומחר בשווי הוגן
-700	$+ \frac{700}{\frac{1}{9}} = +6,300$	הלוואה
0	2,340 זה, ורך זה – רווח הארביטראז'	סך הכל

בחברה K ידוע :

ואגרות חוב צמיהות שערכו נקוב 50,000 ש"ח והן נשאות ריבית נקובה בשיעור 10% לשנה. מחיר האג"ח בשוק הוא 45,000 ש"ח.

הואיל וזו אג"ח צמיהה (לנצח), מתקיים שווייה (מחיר) הוא הערך הנוכחי של תזרימי הריבית הנקובה האינסופיים :

$$D = \frac{r_B * B}{k_D} \rightarrow 45,000 = \frac{50,000 * 10\%}{k_D} \rightarrow k_D = \frac{1}{9}$$

כברהה, אפשר להגיע לרווח הארביטראז' גם כך (התמhor ביתר) אבל זה לא מחליף בשום צורה ואופן את החישוב היישיר:

$$585,000 * 10\% * 4\%$$

**שאלה 10.2 – יישום ספציפי של המשפט השני של מודיליאני ומילר**

ידוע שוויי חברת המומנת בהון עצמי בלבד שהכנסתה התפעולית נטו היא 350 אלף ש"ח לשנה הנו 2,187.5 אלף ש"ח.

נדרש:

- חשבו את מחיר ההון העצמי של החברה.
- מהו שיעור התשואה שנדרש על ידי בעלי המניות של חברת זהה ברמה התפעולית ובסדר הגדל אם הריבית בגין האג"ח היא 7% והחברה ממומנת בחוב בשיעור 30%? הניחו עולם ללא מס.

פתרונות:

**פתרונות סעיף א – חילוץ מחיר ההון העצמי של החברה, בהינתן הכנסתה התפעולית ושווייה**  
כאשר חברת המומנת בהון העצמי בלבד, מתקיים:

$$S = \frac{NOI * (1 - t)}{k_S} \rightarrow 2,187.5 = \frac{350 * (1 - 0)}{k_S} \rightarrow k_S = 16\%$$

**פתרונות סעיף ב – המירה של מחיר ההון העצמי ללא מנוף למחיר ההון העצמי בחברה עם מנוף**  
לפי המשפט ה-2 של מודיליאני ומילר, ניתן לחשב את מחיר ההון העצמי בחברה ממונפת כפונקציה של מחיר ההון העצמי בחברה מקבילה לא ממונפת והיחס בין היחס להון העצמי:

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

בהתבה נקבל:

$$k_S^L = 16\% + (16\% - 7\%) * (1 - 0) * \frac{0.3\cancel{\text{ף}}}{0.7\cancel{\text{ף}}} = 19.8571428\%$$

למעשה, כאשר מספרים שהחברה ממומנת בחוב בשיעור 30%, המשמעות היא שהחוב D הוא 30% מסך שווי החברה כלומר 30% מ-V. המשמעות העולה מכך, בהכרח, היא ששווי ההון העצמי S הוא 70% מה-V. היחס בין שווי החוב לשווי ההון יוצר אם כך את ביטויו המוצטמצם לעיל שMOVIL לתוצאות מספרית.

**שאלה 10.3 – המשפט השני של מודיליאני ומילר, יישום נוסף**

בחברה קיימים מחיר הון משוקל בשיעור 25% לאחר מס. החברה ממומנת ב-55% חוב ו-45% הון עצמי, וכפופה למס בשיעור 30%. החוב נושא ריבית בשיעור 5%.

נדרש :

- מ疼 מחיר הון העצמי של החברה?
- מה היה מחיר הון העצמי בחברה, במידה והיא הייתה נטולת מנו?

פתרון :

**פתרון סעיף א – מהו מחיר הון העצמי של החברה?**

מחיר הון משוקל, הנ吐ן בשאלה, הוא בעל ההגדרה הבאה :

$$WACC = k_S * \frac{S}{V} + k_D * (1 - t) * \frac{D}{V}$$

כאשר מספרים לנו שהחברה ממומנת ב-55% חוב וב-45% הון עצמי, למעשה מבשרים לנו ש :

$$\frac{D}{V} = 0.55 \quad \text{and} \quad \frac{S}{V} = 0.45$$

נציב נתון זה יחד עם יתר הנתונים הבולטים בשאלה במשוואת ה-WACC :

$$25\% = k_S * 0.45 + 5\% * (1 - 30\%) * 0.55 \rightarrow k_S = 51.27777\%$$

**פתרון סעיף ב – מה היה מחיר הון העצמי בחברה, במידה והיא הייתה נטולת מנו?**

מעבר ממחיר הון העצמי בחברה עם מנוף למחיר הון העצמי בחברה נטולת מנוף ולהפך – נשען על המשפט ה-2 של מודיליאני ומילר :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

$$51.27777\% = k_S^U + (k_S^U - 5\%) * (1 - 30\%) * \frac{0.55}{0.45} \rightarrow k_S^U = 29.33\%$$

**דיבונים נוספים והבהרות - שווי החברה, מחיר ההון, סיכוןים ומודל מודיליאני ומילר**

א. מה ניתן לומר על השינוי בסיכון לבעלי המניות כאשר חברת פיננסית (גדול / קטן / לא משתנה)?

התשובה: הסיכון תמיד גדול כתוצאה מנטילת חוב, שבעקבותיו – רויבץ על החברה נטול תשלום עלויות מימון ללא תלות בהצלחתה העסקית.

ב. כיצד תגדירו את הסיכון הנובע ממינוף פיננסי / סיכון פיננסי בעולם שאין בו אפשרות רגל (הנחה היסודית של מודל מודיליאני ומילר)?

אם חברה לעולם לא יכולה להתפרק ולהפוך לחדלות פרעון, אזי הסיכון הנובע ממינוף הוא אך ורק העלייה בשונות של הרווח לבעליים כתוצאה מנטילת התחייבויות.

ג. כיצד תגדירו את הסיכון הנובע ממינוף פיננסי / סיכון פיננסי בעולם שיש בו אפשרות לפשיטת רגל (מודל מעשי, שתקף כל אימת שלא צריך לשימוש / לא מציינים בשאלת התיאורטית את מודיליאני ומילר)?

זה נכון שבדרכ כל אנו בוחנים סיכון במונחי שונות / סטיית תקן; אבל אם עוברים לעולם עם סיכון פשיטת רגל, אנחנו למשה מושגים למטריית הסיכון את הסיכון לפשיטת רגל שסבירותנו נדלה ככל שהמיןוף הפיננסי גדול.

ד. לפי משפט מודיליאני ומילר, עליה בדרגת המינוף הפיננסי משמעה עלייה בשיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות, וזאת – גם בעולם עם מסים וגם בעולם ללא מסים

התשובה נכונה; בrama הטכנית – אפשר ממש להציג את נוסחת המשפט השני של מודיליאני ומילר :

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

כאשר חלה עלייה במינוף הפיננסי, ככלmore ביחס בין  $S/D$ , שיעור התשואה הנדרש על ידי בעלי המניות גדול, אבל מעבר לזה – באופן אינואיטיבי – גם בעולם ללא סיכון פשיטת רגל (ראו סעיף ב) השונות של הרווח לבעליים נדלה כתוצאה ממינוף ובהתאם הם ידרשו תשואה גבוהה יותר.

ה. לפי מודיליאני ומילר, ככל שנקטינו את ה-  $k_S^U$  ונקרב אותו יותר ל-  $k_D$ , אז השפעת המינוף על העלייה בתשואה הנדרשת על ידי בעלי המניות תהיה חלשה יותר.

כoon. מודיע?

$$k_S^L = k_S^U + (k_S^U - k_D) * (1 - t) * \frac{D}{S}$$

ככל שההפרש המסומן באדום קטן יותר, כאשר כל השאר קבוע – כך פרמיית הסיכון הנובעת ממינימלית תהיה קטנה יותר.

ו. לפי מודיליאני ומילר, אם חברת נוטלת על עצמה מנוון פיננסי גבוה יותר (ممמן את עצמה בשיעור גבוה יותר של חוב), הדבר לא ישפיע על שיעור הריבית על החוב.

זכרו: מודיליאני ומילר פועלים בעולם שבו אין סיכון פשיטת רגל/חזרות פרעון. בהינתן הנחה זו, עליה במינוף הפיננסי איןנה מגדילה את הסיכון לכשל פירעון (שהרי הוא אפס תמיד) ובהתאם, התשואה שידרשו המלויים תהיה זהה – ככלומר, שיעור הריבית על החוב קבוע ובلتוי תלוי בדרגת המינוף. הטענה נכונה.

## נספה - הלוואות

הקלות רשות המדריכת באופן מكيف: [כאן](#)  
כמו כן תוכלו ללמידה על פי מערכת הרצפים באתר (יח' 5, הלוואות).  
ישומים מתקדמים יותר תמצאו להלן, עם פתרונות מאד מפורטים.

**שאלה לענ' (לימוד עצמי 1) - לוח סילוקין שפיר מול לוח סילוקין רגיל**  
נטלים הלוואה בסך 100,000 ש"ח הנפרעת ב-5 תשלומים שנתיים. הריבית השנתית היא 6%. הציגו את לוח הסילוקין באופן השוואתי כאשר הוא מוחשב לפי שיטת שפיר (הזרים שווים) ולפי שיטת לוח וגיל (הזרים קרן קבועים). הסבירו בקצרה באופן מילולי את ההבדל בין הלוואות.

**פתרון :**  
נושא הלוואות הוא נושא שכדי ללמידה לאט כדי להבין לעומק, גם בחיים. מצד שני, אי אפשר לתפור עליו שיעור שלם מוחמת משקלו. לכן נציג היבטים בסיסיים בלבד, וכך לדאג לכם, מקשר לכם להפña [הקלטה נוספת](#) ללמידה עמוקה של הנושא.

ובקצרה: החזרי הלוואה בשיטת "שפיר" משמעם שהתשלום התקופתי קבוע, ובעצם יוצר סדרה קבועה. כפועל יוצא, מתקיים כי סכום הלוואה הוא הביטוי המהווה את הערך הנוכחי של ההזרים קבועים, מה שקצת מזכיר את השאלה הקודמת.

$$PV = LOAN = pmt * PVFA(r, t) \rightarrow pmt = \frac{LOAN}{pvfa(r, t)}$$

از בעצם, בהגדלה: התשלום התקופתי קבוע בgni הלוואה שפיר ניתן לחישוב על בסיס היחס בין סכום הלוואה  $L$  - PVFA המגדיר את הריבית התקופתית  $r$  ומספר ההזרים  $t$ .

$$PMT = \frac{100,000}{pvfa(6\%, 5)} = \frac{100,000}{4.212} \approx 23,742$$

לאחר שהתשלום התקופתי ידוע בלוח שפיר, השלב הבא הוא לחשב את התשלום התקופתי בgni ריבית. התשלום בgni ריבית הוא המכפלה הפשוטה של יתרת הלוואה לתקופה קודמת באחוז הריבית. כך למשל, הריבית המשולמת במסגרת התשלום ה-1 תהיה:

$$INT_1 = 100,000 * 6\% = 6,000$$

לאחר שאני יודע מה תשלום הריבית, אני בעצם מחלץ את התשלום על חשבון הקרן בתווך ההפרש בין התשלום הכלול לבין תשלום הריבית:

$$PRN_1 = PMT - INT_1 = 23,742 - 6,000 = 17,742$$

יתרת ההלוואה לאחר כל תשלום היא ההפרש בין יתרת ההלוואה לתקופה קודמת - בין תשלום הקרן :

$$BAL_1 = BAL_0 - INT_1 = 100,000 - 17,742 = 82,258$$

בשונה מכך, החזרי הלוואה המבוצעים בשיטת "החזרי קון שווים" מבוצעים במנגנון שונה לगמרי, אשר על בסיסו יש לחשב תחילת את התשלומים התקופתיים על חשבו הקרן, ורק אז את הריבית ואת התשלום הכללי. כך למשל, בלוח סילוקין "רגיל", תחילת נחשב את התשלומים הקבוע על חשבו הקרן, המסומן PRN, וזאת על בסיס הפרופורציה בין סכום ההלוואה למספר התשלומים :

$$PRN = \frac{100,000}{5} = 20,000$$

הואיל והתשלומים על חשבו הקרן קבוע, יתרת הקרן תמיד פוחתת בסכום קבוע זה.

$$BAL_1 = 100,000 - 20,000 = 80,000$$

$$BAL_2 = 80,000 - 20,000 = 60,000$$

רק בשלב הזה - מחשבים בלוח הרגיל את התשלום ע"ח ריבית, לפי יתרת הקרן לתקופה קודמת, כפול אחוז הריבית :

$$INT_1 = 100,000 * 6\% = 6,000$$

וכן :

$$INT_2 = 80,000 * 6\% = 4,800$$

לבסוף, השלב האחרון בעיסוק בלוח הסילוקין הרגיל הוא לטעון שהתשלום התקופתי הכללי מורכב מסכום התשלומים ע"ח הקרן יחד עם התשלום על חשבו הריבית :

$$PMT_1 = PRN_1 + INT_1 = 20,000 + 6,000 = 26,000$$

לוח רגיל				
שלב 2	שלב 1	שלב 3	שלב 4	
BALANCE	PRN	INT	PMT	
יתרת	ע"ח קון	ע"ח ריבית	תשלום כולל	סכום התשלומים
100,000				0
80,000	20,000	6,000	26,000	1
60,000	20,000	4,800	24,800	2
40,000	20,000	3,600	23,600	3
20,000	20,000	2,400	22,400	4
0	20,000	1,200	21,200	5

לוח שפיצר - חישובים מעוגלים לבן אין איפוס בתא האחרון				
שלב 4	שלב 3	שלב 2	שלב 1	
BALANCE	PRN	INT	PMT	
יתרת	ע"ח קון	ע"ח ריבית	תשלום כולל	סכום התשלומים
100,000				0
82,258	17,742	6,000	23,742	1
63,451	18,807	4,935	23,742	2
43,516	19,935	3,807	23,742	3
22,385	21,131	2,611	23,742	4
51	22,334	1,408	23,742	5

מעבר לתהיליך החישובי על בסיסו בינוי טבלאות אלו, שיעיריו הומחשו בתהיליך המתמטי לעיל, והרחבות אודוטיו תמצאו פה **בהקלטה נוספת**, לעיתים עשויות להישאל שאלות תאוריה לגבי הלווחות וההבדל ביניהם. בהקשר זה, ניתן לשים לב לכך שבלוח סילוקין שפייצר סך כל אחד מהתשלומים הראשוניים, קרי **PMT** (כאן: **התשלום הראשון והשני**), יותר נמכים מאשר במקבילו של הלוח המקורי. למשל:

$$PMT_1(\text{Shpizer}) = 23,742 < 26,000 = PMT_1(\text{Ragil})$$

לעומת זאת, בתשלומים האחרונים / המאוחרים, התשלום בלוח המקורי נמוך יותר מסך התשלום התקופתי בשפייצר. כך למשל, בתשלום ה-4:

$$PMT_4(\text{Shpizer}) = 23,742 > 22,400 = PMT_4(\text{Ragil})$$

בנוסף ניתן לטעון ש:

- בלוח שפייצר, תשלום הריבית התקופתית, בכל תקופה, גבוהה יותר מאשר בלוח רגיל (למעט בתשלום הראשון, שבו קיימים שוויון).
- בלוח שפייצר, סך תשלומי הריבית גבוהה יותר מאשר בלוח סילוקין רגיל.
- בלוח שפייצר סך התשלומים גבוה יותר מאשר בלוח סילוקין רגיל.
- לגי איזה לוח עדיף: רק כאשר נüber לדיון פרויקטים (יחידה 6) ובבחירה את מחיר ההון של המשקיע, נוכל לדון בכך. בינתיים, אנו מתמקדים רק ביכולת לחשב את הערכים בלוח ולהבין את "סדרי הגודל" שלהם (מה גדול מהם וכיו"ב).

**שאלה לע 2 (לימוד עצמי 2) - הלוואות ושינויים בהן: לוח סילוקין שפייצר ורגיל, דרך מקוצרת לחילוץ ערכיים (לא טבלאות)**

נטלתם הלוואה בסכום של 100,000 ש"ח הנפרעת בתשלומים חודשיים שווים (לוח שפייצר) במשך 3 שנים. הריבית בגין הלוואה היא ריבית שנתית **פשוטה (נקובה)** בשיעור של 24%. בחלוף שנה, הצעה הבנק ללקוח לשנות את אופן החזור ללוח סילוקין רגיל, ולהקוח הסכום.

נדרש:

- מהו החזר ה-13, כפי שהוא צפוי לפני השינוי, ולכמה הוא התעדכן לאחר השינוי?
- מהו החזר ה-19 לאחר השינוי?

**פתרון סעיף א**

ידוע שסכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזירה. לכן, עבור לוח שפייצר הנפרע בתשלומים שווים בתום כל חודש, מתקיים שסכום הלוואה הוא בהגדלה הערך הנוכחי של החזירה הקבועים. כך מתקבל הביטוי הבא:

$$PV = LOAN = pmt * PVFA(r, t)$$

שמננו אפשר לגזור את הנוסחה הבאה:

$$pmt = \frac{LOAN}{pvfa(r, t)}$$

בchezba נקבל את התשלום התקופתי הקבוע לפני השינוי, שימו לב שמתיחסים למספר התשלומים הכלל לפני השינוי, כלומר בהסכם המקורי עליו חתמתי, שמצוין פירעון בתשלומים חודשיים במשך 3 שנים קרי 36 תשלוםמים:

$$pmt = \frac{100,000}{pvfa(2\%, 36)} = \frac{100,000}{25.489} \approx 3,923$$

מדוע הריבית 2%? ראשית, נתון שהריבית 24% היא שנתית, וחיברים להמיר אותה לחודשית כדי לטפל בסדרת החזרים המבוצעת כל חודש. שנית, אופן ההמרה של ריבית משנה לחודש תלוי בסוג הריבית. כברירת מחדל, את ההמרה מבצעים עם חזקה מותאמת, אלא שכן **נתון שהריבית היא פשוטה** והמשמעות היא שמתמטית, חישוב ערכיה היחסית לחודש מבוצע על ידי חילוק פשוטה ב-12.

$$r = \frac{24\%}{12} = 2\%$$

שימו לב, כל הסדר הלוואה בשיטת שפייר, מתחילה בחישוב התשלום התקופתי הקבוע בשפייר. הויל ובלו שפייר, כל התשלומים הם קבועים, המשמעות היא **שהחזר ה-13 יהיה צפוי אלמלא השינוי הוא 3,923**.

**כעת ננסה לטפל במשמעות של השינוי והשלכתו על התשלומים ביתרת חיי הלוואה:**

כדי לבדוק מה ההשפעה של השינוי באופן החזר הלוואה (שינוי מלוח שפייר לרגיל), יש לחשב את יתרת הלוואה רגע לפני השינוי. ליתרת הלוואה עבר השינוי נתייחס כל "הלוואה חדשה" שנפרוס על שארית התקופה לפי תנאי הלוואה העדכניים.

נתון: שינוי אחרי שנה (אחרי 12 תשלוםמים חודשיים).

לכן נרצה: את יתרת הלוואה לאחר 12 תשלוםמים חודשיים.

**יתרת הלוואה היא הערך הנוכחי של שארית החזרה - אלו שטרם בוצעו. לעיתים אני אוהב לסמן זאת כך:**

$$BAL_n = pmt * pvfa(r, t - n)$$

כאשר:

הערך  $BAL_n$  מסמל את יתרת הלוואה השפייר לאחר התשלום שמספרו הסידורי  $t$ .

הערך  $t$  מציין את התשלום התקופתי הקבוע.

הערך  $n$  מציין את הריבית התקופתית (لتקופת תשלום).

הערך  $r$  מציין את מספר התשלומים הכלל בלוואה.

הערך  $m$  מציין את מספר הסידורי של התשלום הספציפי שעליו שואלים.

$$BAL_{12} = 3,923 * pva(2\%, 36 - 12) = 3,923 * pva(2\%, 24) = 3,923 * 18.914 \approx 74,200$$

כעת, כאשר ידוע שבמועד השינוי (רגע לאחר התשלום ה-12) יתרת ההלוואה היא 74,200, ויש לפרש סכום זה בשיטת החזירים שונה (לוח סילוקין רגיל) אנו נטען שיש להתייחס ליתריה זו כאל "הלוואה חדשה" שתפרנס לפי הנוסחאות של הלוח הרגיל.

בלוח רגיל ידוע שהתשלום התקופתי ע"ח הקrho הוא היחס בין סכום ההלוואה לבין מספר התשלומים :

$$PRN = \frac{LOAN}{t}$$

נציב ונקבל את התשלום על חשבו הקrho, PRN, בלוח רגיל בתשלום ה-13, לאחר השינוי :

$$PRN_{13} = \frac{74,200}{24} \approx 3,092$$

אך כדי להגיע לתשלום הכלול, יש להוציא לתשלום על חשבו הקrho בלוח הרגיל גם את תשלום הריבית. ולשם חישוב הריבית (INT), علينا לכפול את יתרת ההלוואה לזמן 12 (רגע לאחר השינוי) בשיעור הריבית :

$$INT_{13} = BAL_{12} * r$$

נציב ונקבל :

$$INT_{13} = 74,200 * 2\% = 1,484$$

כך שהתשלום הכלול ה-13 הוא :

$$PMT_{13} = PRN + INT_{13} = 3,092 + 1,484 = 4,576$$

**תשובהינו הסופית לסעיף זה היא:**

**התשלום ה-13 בהנחה שלא היה חל שינוי: 3,923 ש"ח.**

**התשלום ה-13 בגין השינוי: 4,576 ש"ח.**

**פתרון סעיף ב**

סך התשלום ה-19 מחושב גם הוא על בסיס לוח סילוקין רגיל (מדובר בתשלום שבוצע לאחר השינוי). הואיל ולוח הסילוקין רגיל, התשלום בגין הקrho PRN הוא תמיד קבוע, והוא מחושב לפי הפרופורציה הפשטota שבין יתרת ההלוואה ערב השינוי למספר התשלומים שנותר ערב השינוי :

$$PRN_{13} = PRN_{14} = PRN_{15} = \dots = PRN_{19} = \frac{74,200}{24} \approx 3,092$$

כמו במקרה הקודם, נרצה לדעת לא רק את התשלום ע"ח הקרון, אלא את התשלום הכללי ע"ח הקרון וכן ע"ח ריבית, יחד. הואיל וידוע שבכל לוח סילוקין, הריבית היא המכפלה הפחותה של יתרת ההלוואה לתקופה קודמת בשיעור הריבית, הרי שמתקיים:

$$INT_{19} = BAL_{18} * r = (74,200 - 3,092 * 6) * 2\% = 1,113$$

רגע שי, מה עשית פה? לחתמי את יתרת ההלוואה לזמן 12, עבר שינוי התנאים שהוא בסך 74,200, וממנה הפחתתי את 6 תשלוםיו הקבועים בלוח החדש, בסך 3,092 ש"ח כל אחד, בגין התשלומים שבוצעו בתום כל אחד מהחודשים 18-13 כולל. כך מגעים ליתרת ההלוואה העדכנית לזמן 18, שהוא בהגדרה הבסיס לחישוב תשלום הריבית בזמן 19.

$$PMT_{19} = PRN_{19} + INT_{19} = 3,092 + 1,113 = 4,205$$

התשובה הסופית: 4,205 ש"ח.

סיכוםו: כאשר אני מזזה שאלה שבה קיים לוח שפייצר שבמבחן מוצע שינוי תנאיו ללוח רגיל, אפעל כדלקמן:

- אוחשב את התשלום התקופתי הקבוע בשפייצר (PMT של שפייצר).
- אוחשב את יתרת ההלוואה ערב (רגע לפני) שינוי התנאים, זאת בתורו הערך הנוכחי של תשלוםיו השפייצר "שטרם בוצעו".
- ATIICHES ליתרת ההלוואה כל "הלוואה חדשה".
- אפרוס אותה ואוחשב את תשלוםיה מאותה נקודה ואילך בהתאם לגישת הלוח הרגיל (תשלומי קרו קבועים, ריבית לפי מכפלת שיעור הריבית ביתרת הקון של התקופה קודמת).

### שאלת לעז (לימוד עצמי 3) - שווי הלואה מסובסדת

קיבלתם הלואה לעידוד עסקים בסכום של 500,000 ש"ח לתקופה של 10 שנים. ההלוואה נשאת ריבית שנתית בשיעור 3% והיא מוחזרת בתשלומים שנתיים שווים (לוח שפייצר). ידוע שהריבית האלטרנטיבית שבה יכולת ליטול אשראי מהבנק היא 8%. בנסיבות אלו, מהו שווי ההטבה?

פתרון:

תחילה, כמו תמיד בשפייצר, נחשב את התשלום התקופתי הקבוע בגין ההלוואה (ה - PMT) לפי הריבית בפועל.

$$PMT = \frac{LOAN}{pva(r, t)} = \frac{500,000}{pva(3\%, 10)} = \frac{500,000}{8.5302} \approx 58,615$$

לאחר שהתשלום בפועל חשוב לפי הריבית בפועל, ערך ההלוואה נטו יחשב באופן שמתיחס לערך הנוכחי הכלול של התזרים (גם של ההלוואה עצמה בסימן חיובי, וגם הערך הנוכחי של ההזרים בסימן שלילי), בהתחשב בעלות המימון האלטרנטיבית (ריבית 8%) :

$$NPV = +500,000 - 58,615 * PVFA(8\%, 10) = 500,000 - 58,615 * 6.71 \approx 106,693$$

הסימון NPV הוא קיצור של Net Present Value, או במלים אחרות - ערך נוכחי "נקי" או "כ כולל" של כל התזרים, משומש שבעצם עליינו להתייחס גם לתזרים החיובי של ההלוואה עצמה, וגם לערך הנוכחי של התזרים השליליים, כדי לקבל את השווי נטו. למעשה, מעבר להערכת הכללית לפיה שווי ההטבה הוא 106,693, אנו טוענים שערך זה מבטא את העובדה שההזר התקופתי בסך 58,615 כבר מגלה את הריבית בפועל 3%, אך המכפלה ב - PVFA הרלונטי ל- 8% עוזרת להבין כמה ריבית "choschim". הויאל וchoschim ריבית גבוהה מזו שמשלמים, הערך הכלול חיובי.

מבחן 6

3. לקחתם משכנתא של 600,000 ש"ח בריבית של 6% לשנה. המשכנתא מוחזרת במשך 20 שנים בתשלומים סופ' חודשיים שווים. לאחר 7 שנים ממועד קיימת המשכנתא (מיד עם התשלום האחרון של השנה השביעית), החזרתם סכום של 100,000 ש"ח (בנוסף לתשלום הקבוע בגין המשכנתא). מהו התשלום החודשי החדש אם הריבית השנתית נותרה ללא שינוי, ומספר התשלומים הכלול יותר ללא שינוי?

- א. 3,244 ש"ח.
- ב. 41,014 ש"ח.
- ג. 3,374 ש"ח.
- ד. 4,298 ש"ח.
- ה. 2,414 ש"ח.

פתרון :

התשובה הסופית - ג. להלן פירוט:

ישומי יח' 5 הם מגוונים: הם כוללים חישובי ערך עתידי ("כמה הצبور בעתיד בהנחה שתפקיד..."), חישובי ערך נוכחי ("מהו הערך הנוכחי / מהו השווי היום"), חילוצים המתבססים על הגדרות אלו, חישובי ריבית אפקטיבית ויישומים נוספים.

ספציפית כאן מדובר באחד היישומים הפחותים יותר של ערך נוכחי: הלוות. ומדובר? משום שלמעשה ניתן לומר את שני המשפטים הבאים, **שכוחם יפה במיוחד להלוות הנפרעת בתשלומים שווים (=שפיכר)**:

- משפט 1: סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי (PV) של החזירה.
- משפט 2: יתרת הלוואה היא הערך הנוכחי (PV) של יתרת החזירה.

זהינו כאן הלוואה שתשלומיה קבועים (עלים לגדר סדרה קבועה). הדבר הראשון שארצה לעשות הוא לחלץ את ערכיה, ובמיוחד את התזוזים התקופתי בעדיה "טרם השינויים המתוארים". ואם כך, בהינתן שסדרת התשלומים קבועה, ניתן לטעון שמתקימת המשוואה הבאה:

$$LOAN = PMT * PVFA(r, t)$$

הערך LOAN הוא סכום ההלוואה.  
הערך PVFA הוא בעצם ערך מענ"ס (לוח א-4) שמתאים למספר התשלומים  $t$  ושיעור הריבית  $r$

$$600,000 = PMT * PVFA(0.5\%, 240)$$

בעצם: מס' התשלומים כאן הוא כמספר החודשים - ב-20 שנים ישנו 240 תשלום חודשיים. בנוסף, אנו זוקקים לריבית החודשית (הריבית לפרקי הזמן בין תשלום). הוайл והריבית הנenna - 6% - היא שנתית, יש חלקה ב-12 כדי להגיעה לריבית חודשית  $= 0.5\% = 12 / 6\%$  (ההנחה היא שהריבית נקובת).

בහינתו העובדה שלא ניתן לחלץ מלוחות ההיוון (לוח א-4) מקדמים בריבית שהיא שבר ובמספר תשלום חודשיים כאמור, ניעזר בנוסחה המתמטית של PVFA, כדלקמן:

$$PVFA(r, t) = \frac{1 - \frac{1}{(1+r)^t}}{r}$$

בהצבה קיבל:

$$PVFA(0.5\%, 240) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.5\%)^{240}}}{0.5\%} \approx 139.581$$

שיםו לב, ערך ריבית של 0.5% במנוחי שבר עשרוני הוא 0.005. כלומר:

$$PVFA(0.005, 240) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.005)^{240}}}{0.005} \approx 139.581$$

נזכור לנוסחת המקור של סכום הלואה כערך הנוכחי של החזירה

$$600,000 = PMT * 139.581 \rightarrow PMT \approx 4,298.58$$

כעת לאחר שטיפנו בחישוב החזר הבסיסי, נזכור לשאלת להשתלשות שלה שאומרת שאחרי 7 שנים בדיקות, רגע לאחר התשלום בזמן זה, סילקנו עוד 100,000 ש"ח. מה זה אומר בעצם, שנרצה לבדוק את יתרת ההלוואה לאחר 7 שנים, ממנה להפחית (לנכונות) 100,000 ש"ח, ואת היתרנה הניל לפרק על פני יתרת חיי ההלוואה.

משפט 2: יתרת הלואה לכל מועד היא הערך הנוכחי של יתרת החזירה. יתרת ההלוואה ערב השינוי היא היתרתו לאחר 7 שנים או - לאחר 84 תשלום חודשיים:

$$BAL_{84} = 4,298.58 * PVFA(0.5\%, 240 - 84)$$

או בעצם:

$$BAL_{84} = 4,298.58 * PVFA(0.5\%, 156)$$

נציב בנוסחה המתמטית של PVFA או מענ"ס :

$$PVFA(0.5\%, 156) = \frac{1 - \frac{1}{(1 + 0.5\%)^{156}}}{0.5\%} \approx 108.14$$

נזור לחישוב היתרה :

$$BAL_{84} = 4,298.58 * 108.14 = 464,850$$

מיתרה זו עליינו לנכوت את התשלום המידי החד פעמי שבוצע מיד לאחר התשלום ה-84 :

$$BAL_{84}(Net) = 464,850 - 100,000 = 364,850$$

נבע פרישה מחדש של יתרה עדכנית זו משל מדובר היה בהלוואה חדשה בסכום זה אשר נפרשת על פני 156 תשלומים (התשלומים שנותרו ; אלו שבמספרם הכללי אין שינוי כאמור) :

$$364,850 = PMT_{New} * PVFA(0.5\%, 156) \rightarrow 364,850 = PMT_{New} * 108.14$$

וכך מגיעים לסכום התשלום הקבוע החדש / העדכני והנמוך. יותר, כאמור :

$$PMT_{New} = 3,374$$

(\*) הערכה : יש הטוענים שבמוקם לציין שסכום ההלוואה שווה לערך הנוכחי של החזרה, ומכך לחלץ את PMT אפשר פשוט לחלק את סכום ההלוואה ב-PVFA. זה נכון, אבל זה לא יעזור בהלוואות הנפרעות בתזרימי תחילת תקופה, או במספר נתוני סדרות וכן הלאה.

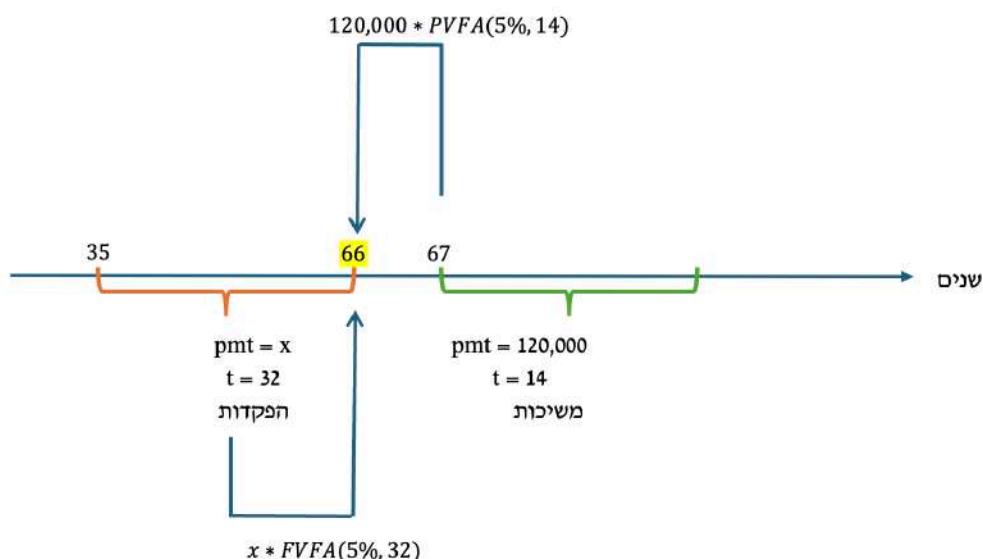
4. הניחו כי היום הנוכחי חוגגים את יום ההולדת ה- 35 שלהם. הנוכחי פותחים היום קרן פנסיה שבה תפקדו הפקדות שנתיות שוות שיימשו עד שתחגגו יום הולדת 66 (כולל). ההפקודה הראשונה בקרן היא היום. המשיכות מקרן הפנסיה יחולו כאשר תחגגו את יום ההולדת ה- 67 שלהם. אתם מעריכים כי תמשכו 14 משיכות שנתיות בגובה של 120,000 ש"ח כל אחת מקרן הפנסיה. מהי ההפקודה השנתית הנדרשת בשנים שבחן תפקדו אם ידוע כי קרן הפנסיה מניבת תשואה של 5% לשנה, ותשואה זו תימשך כל עוד יש כסף בקרן הפנסיה?

- א. 15,775 ש"ח.
- ב. 16,563 ש"ח.
- ג. 15,023 ש"ח.
- ד. 52,500 ש"ח.
- ה. 54,251 ש"ח.

פתרון :

התשובה א.

כאשר מדובר בועלמן של סדרת הפקדות שלאחריהן סדרת משיכות - מתקיים המשפט הבא: הערך העתידי של הפקדות הוא הערך הנוכחי של המשיכות, לאותה נקודת זמן. אישית, אני אוהב לקרוא לשאלות אלו "אייזון אקטוארי" שכן תחסיבים מעין אלו מקובלים מאד בפנסיה וביבטוחים. אני מאד אוהב לעבוד בשאלות כאלה עם ציר הזמן.



ספציפית במקרה זה, הערך העתידי של ההפקדות הובילנו לבדוק לזמן 66 (כי ערך עתידי של סדרה מבטא את התוצאה במנוחי נקודת הזמן של התזרים האחרון / ההפקדה האחרון), וגם הערך הנוכחי של המשיקות הסדרתיות הובילנו לאותו הזמן (כי ערך הנוכחי של סדרה מבטא את התוצאה במנוחי נקודת הזמן שהיא מוקדמת בתקופת תשלום אחת ממועד התזרים הראשון בסדרה. למעשה, הויאל וסדרת המשיקות החלו בזמן 67, ההיוון שלה (PV) כסדרה בהגדירה מוביל "אחד אחריה" קרי לזמן 66. והואיל ובמקרה זה, לפיכך, מתקינה זהות בתזמנוניים בין חישוב PV הפקדות ל- PV משיקות, כל מה שנותר לעשות הוא להשוות בין הערכים לאותה נקודת זמן - ולחוץ את החסר :

$$x * FVFA(5\%, 32) = 120,000 * PVFA(5\%, 14)$$

: כלומר :

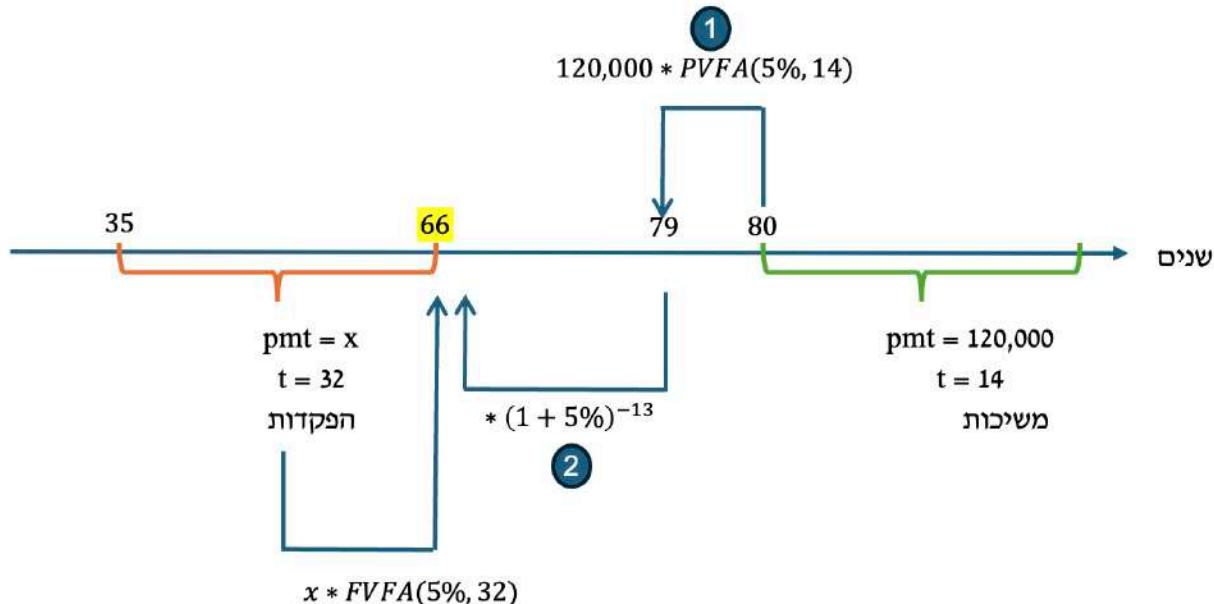
$$x * 75.299 = 120,000 * 9.899 \rightarrow x = 15,776$$

(\*) הערכה : בחישובי איזון אקטוארי, הערך החיווני הוא לבטא גם את ההפקדות וגם את המשיקות במנוחים של אותה נקודת זמן בדיקוק. את נקודת הזמן אתם למורי יכולם לבחור בעצמכם : אני מאד אוהב להציג את הערכים "באמצע". לפעמים זה גם חוסך כמה מהלכים חישוביים. מי מביניכם שמעדיף תמיד לבטא ערך הנוכחי לזמן "0" גם של ההפקדות וגם של המשיקות, ורק אז להשוות ביניהם - זה יעבוד גם.

---

### הרחבה לשאלת

בנתוני שאלת קודמת, הניחו בעת כי את ההפקדות ממשיכים לבצע מזמן 35 עד זמן 66 כולל, אך המשיכות מתחילה רק החל מיום הולצת ה-80. בסך הכל מוצעות 14 ממשיכות בתום כל שנה, ושיעור הריבית עודנו 5%, סכום המשיכת עודנו 120,000 ש"ח לשנה.



משוואת הפתרון תשתנה לतצורה :

$$x * FVFA(5\%, 32) = 120,000 * PVFA(5\%, 14) * (1 + 5\%)^{-13}$$

ואפשר כמובן לחץ את x. משיקולי זמן לא נבצע עית.

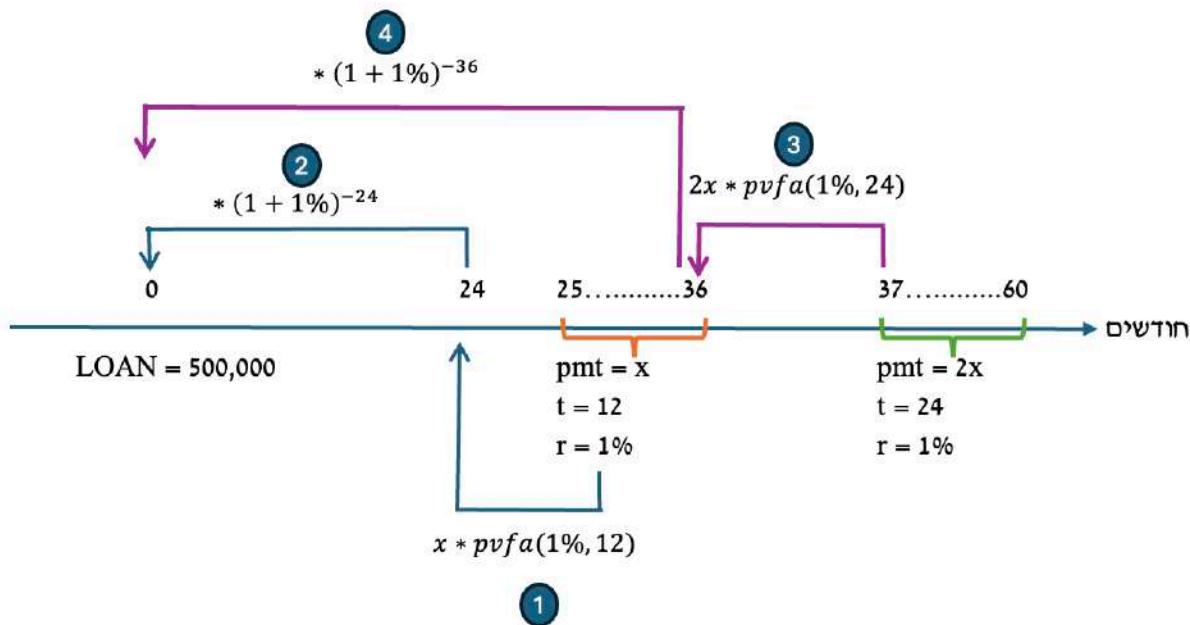
### שאלת בקשת הקהל - הלוואה עם גרייס (דחיה במועד התשלומים והתאמות זמן)

בנק אמונונים בע"מ מציע ללקוחותיו הלוואה בסכום של 500,000 ש"ח שתפרע בתשלומים חודשיים, כלהלן: החל ממועד החודש ה-25 ובמשך שנה (12 תשלומים), יבוצע תשלום חודשי קבוע. החל ממועד החודש ה-37, ובמשך שנתיים, יבוצע תשלום חודשי קבוע בסכום כפול.

מהו ההחזר החודשי במהלך 12 התשלומים הראשונים, אם ידוע שהריבית החודשית 1%?

פתרון:

סכום הלוואה הוא הערך הנוכחי של החזרה. וכשאני אומר זאת אני מתייחס לכל החזרים, לא יוצאה מן הכלל. לעומתנו, במקרה זה, החזרים אינם קבועים כי אם משתנים; והם כוללים שני חלקים: סדרת החזרים הראשונים, מזמן 25 לזמן 36 בסכום מסוים וסדרת החזרים שנייה מזמן 37 לזמן 60 בסכום אחר. את שתי הסדרות חייבים לחזון (PV) בזמן אפס, על מנת לבטא את המשפט.



המשוואת העקרונית לפיה סכום ההלוואה (זמן 0) הוא הערך הנוכחי של כלל החזרה (זמן 0) :

$$500,000 = PV(\text{סדרה 1}) + PV(\text{סדרה 2})$$

במצב, כולל התאמות מתבקשות לריביות הסדרות (כדי להובילו בזמן 0), נקבל:

$$500,000 = x * PVFA(1\%, 12) * (1 + 1\%)^{-24} + 2x * PVFA(1\%, 24) * (1 + 1\%)^{-36}$$

$$500,000 = x * 11.255 * (1 + 1\%)^{-24} + 2x * 21.243 * (1 + 1\%)^{-36}$$

והתוצאה המתבקשת :

$$x \approx 12,967$$

מסקנה: כל אחד מ-12 התשלומים הראשונים שסומן כ-  $x$  הוא 12,967 ש"ח.

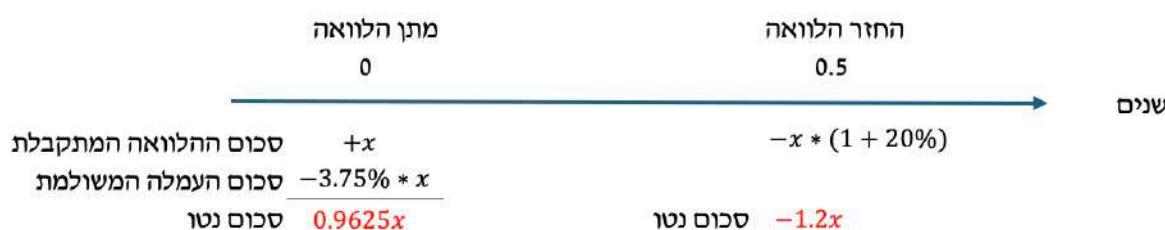
### שאלה 3

בנק מלאוה סכום חד-פעמי שיוחזר בצירוף הריבית בתום חצי שנה ממועד מתן ההלוואה. הריבית החצי-שנתית שגובה הבנק היא 20%. פרט לריבית, מנכה הבנק במועד מתן ההלוואה עמלת מראש של 3.75% מסכום ההלוואה. **הרווח האפקטיבי השנתי שגובה הבנק היא :**

- |       |   |
|-------|---|
| 47.5% | נ |
| 55.0% | ב |
| 55.4% | א |
| 49.4% | ת |
| 24.7% | ט |

**פתרון:**

האפקטיבית לתקופת העסקה: הערך המוחלט של התשלום בתום התקופה בין סכום התקובל בתחילת - פחות אחת, הוא הריבית נטו (לאחר כל פעולה או ניכוי מקביל), ואת הסכום הכלל המשולם בתום התקופה - נטו, יוכל להתבסס על המשפט הטוען כי: **היחס בין**



הሪיבית האפקטיבית לחצי שנה (תקופת העסקה) לפי היחס בין הערכיהם פחות אחתת היא:

$$r_e(\text{hazi shana}) = \frac{P_{0.5}}{P_0} - 1 = \frac{1.2\mathfrak{K}}{0.9625\mathfrak{K}} - 1 = 24.675\%$$

וחוויל ושאלו על הריבית האפקטיבית לשנה שלאהה - מעבר מריבית אפקטיבית אחת לאחרת מבצעים עם מעריך חצקה מוחמים (הנחת ריבית דרייתית) ולא עם רפל פשוו (ושי חצאים רשותה):

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{hazishang})^2 - 1 = (1 + 24.675\%)^2 - 1 \approx 55.4\%$$

### המשובח:

אפשר גם לפטור שאלה זו על בסיס נוסחת הריבית האפקטיבית המשלבת בין ריבית מראש / ניכוי מראש לבין ריבית בתום התקופה :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1$$

כאן :

$$r_e = \frac{\left(1 + \frac{20\%}{1}\right)^2}{\left(1 - \frac{3.75\%}{1}\right)^2} - 1 = 55.4\%$$

מה הילך כאן?

המונה כוללת את הריבית החצי שנתיית, שבהיעדר נתונים בדבר חישובה, מחושבת פעמי אחת בחצי שנה. העילינו בריבוע – כי צריך לחזור לשנה.

המכנה כולל את הניכוי מראש, גם הוא חצי שנתי. אמן לא נאמר שאכן מדובר בשיעור חצי שנתי, אך מהעובדת שזהו הניכוי הכללי בעסקה חצי שנתי מסיקים שאכן מדובר בערך חצי שנתי כאמור.

מבחן 7

חידה 6

שאלה 7

פירמה השקעה 5,000 ש"ח בפרויקט שהענ"ג שלו הוא 7,000 ש"ח. **מהו הערך הנוכחי של זרמי המזומנים?**

- א. 12,000 ש"ח.
- ב. 5,000 ש"ח.
- ג. 7,000 ש"ח.
- ד. אי-אפשר לחשב ללא קבלת נתון לגבי אורך חיי הפרויקט.
- ה. אי-אפשר לחשב ללא קבלת נתון לגבי מחיר ההון של הפירמה.

נתון :

$$NPV = 7,000$$

ידוע שה- $NPV$  הוא הערך הנוכחי הנקי נתו של כלל תזרימי המזומנים : החובים והשלילים גם יחד. ההשערה הראשונית בפרויקט נתונה, והיא בגדיר תזרים מזומנים שלילי בזמן אפס בגובה ההשערה. בעצם, אוכל לבטא את ה- $NPV$  כך :

$$NPV = -5,000 + PV_{\text{תזרימיים}} = 7,000 \rightarrow PV_{\text{תזרימיים}} = 7,000 + 5,000 = 12,000$$

התשובה א.

## הכוונה וטיפוסים לגבי ייח' 8 - נושאים חילוציים מוגווניים (בהתאם לשאלת שנותקבלה בדוא"ל)

תודה על התרגול היום!

אשmach אם תוכל בתרגול הבא לעبور על תרגילים מהנושאים הבאים מיח' 8 :

חישוב ביטה בואריציות השונות

חישוב מקדם המתאים

חישוב המשקלים השונים

### יח' 8 - חישוב ביטה

יח' 8 עוסקת בעיקרו במספר נושאים מרכזיים :

1. חישובי תוחלת וסתיות תקן של **נכסים בודדים**, לרבות בחירה ביניהם (תוחלת/שונות). הקל ביותר.
2. חישובי תוחלת, סטיית תקן ומשקלים, של תики השקוות המורכבים **מנכסים מסווגים בלבד**. דרוש בכך כלל בעיקר ידיעות לגבי הנוסחאות הסטטיסטיות השונות (לפרטים של קבלת החלטות - ממליץ מאד על אירור עקום התיקים האפשריים).

3. עולם ה - **CAPM** :

3.1 **נכסים / תикиים בעליים - מקיימים את משוואת ה - CML**, מבוססי סטיית תקן, מקיימים רשיימה סגורה של נוסחאות **"יחודיות"**. בעליות איננה ברירת מחדל! נשתמש בנוסחאות אלו רק כאשר יש סיבה מפורשת.

3.2 **נכסים / תикиים שאינם בעליים - מקיימים את משוואת ה - SML**, מבוססים על ביטה, כוללים הבחנה בין סיכון "שיתתי" (שאינו ניתן לפיזור) ו"לא שיתתי" (ניתן לפיזור). רשיימת הנוסחאות והמאפיינים בהינתן אי בעליות מופיעה **כאן** (גם תикиים בעליים מקיימים משוואות אלו, אלא שיישוםם בקשר זה יהיה פחות סביר).

3.3 היבט הסטטיסטי ה"מורכב" של CAPM : חישוב מקדם המתאים עם השוק, חישוב שונות הקשורות עם השוק, חישוב ישר / חילוץ של ביטה וכיו"ב. בזיהירות רבה אני אומר (לא כתבתתי את המבחן ואני חושף אליו) - נושא זה חשוב שיכיח.

ואם כך, המקרים העיקריים שבהם נחשב ביטה הם ככל שבהם נקלט נתונים SML ופשטן נחלץ מתוכם ערכי ביטה מתאימים (רכיב 3.2 להלן) או מצב שבו נפעל לחשב את ביטה/מקדם מתאים בעצמו - באופן מייגע למדי (רכיב 3.3). **בתכני מפגש 6 במחברת זו** תוכלו למצוא דוגמא מפורטת לאופן חישוב מקדמי המתאים והביטה ( מבחן 6, שאלה 7).

### חישוב מקדם המתאים

מקדם המתאים מוגדר סטטיסטיית בטור השונות המשותפת בין שני נכסים (ראו הדגמה בפסקה קודמת) לבין סטיות התקן של הנכסים. למעשה, הואיל וסתיות תקן של נכסים בודדים ניתן לחישוב בדרך כלל יחסית בקלות, החלק הקשה ביותר בחישוב ישר של מקדם המתאים - הוא מציאת השונות המשותפת :

$$\rho(A, B) = \frac{COV(A, B)}{\sigma_A \sigma_B}$$

מקרה :

ה-COV הוא השונות המשותפת בין הנכדים (לאו דזוקא בהקשר ל-SML).

הערכים  $\sigma_A, \sigma_B$  מייצגים את סטיות התקן של כל אחד מהנכדים, בהתאם.

הערך  $\rho(A, B)$  הוא ערך מוקדם המתאים בין A ל-B.

הערה : ספציפית ב-SML, אפשר לעיתים לחץ את מוקדם המתאים בין הנכס לשוק לפי הגדרת ביטה. אבל חישוב מוקדם המתאים במקרה הכללי / סטטיסטית, הוא כאמור.

### חישוב המשקלים השונים

ככל, בично 8, המונח "משקל" המסומן באות W משקף את "האחוז מכיספנו המושקע בנכס מסוימים" או "בתיק מסוימים". למושג זה מגוון רחב של יישומים :

**בعالם של נכסים מסוימים בלבד :**

מקובל להציב את ערכי המשקלים ;

או לחץ אותם מהנוסחאות הסטטיטיסטיות של חישובי תוחלת וסטיית התקן של תיק המורכב מ-2 נכסים מסוימים בלבד ;

או להשתמש בנוסחת תיק מינימום סיכון כדי למצוא את ההרכבת (המשקלים) בתיק בעלי הסיכון המינימלי, ובהתאם - לזהות (אם מייירם גרא) היכן מתחילה הייעילות. למשל ראו תרגילה.

וכן ראו דיוון מלא ומורכב יותר לגבי המודלים ואופן ההיסטוריה, הפתרון וקבלת החלטות בעלים עם נכסים מסוימים בלבד שמתחייב כאן.

### CAPM בעולם ה-

תמיד יש חריגים ושאלות צבוניות! אבל השימוש הנפוץ ביותר במשקלים הקשור לנכסים / תיקים ייעילים ובהינתן ייעילות, ערכי המשקלים מייצגים את שיעור ההשקעה בתיק השוק (WM) ואת שיעור ההשקעה בנכס חסר סיכון (WF) בהתאם. משקלים אלו ניתנים גם לחילוץ מנוסחאות התוחלת וסטיית התקן של תיקים ייעילים וראו גם נוסחאות ייחודיות.

### שאלה קהיל נספת - כיצד מבוצעת הבדיקה בין עולם של "נכסים מסווגים בלבד" לבין CAPM?

שאלות CAPM מתחדשות, בדרך כלל, באחד או יותר מהמאפיינים הבאים:

- במקרים רבים, פשוט נזהה את הסימול: CAPM.
- ישנים נתונים / דיון בדבר "נכס חסר סיכון" (גם אם ערכו המספרי לא נתון).
- ישנים נתונים / דיון בדבר "אג'ח מושתתת" (קירוב לנכס חסר סיכון).
- ישנים נתונים / דיון בדבר "תיק השוק".
- ישנים נתונים / דיון בדבר ערכי ביתא.
- ישנים נתונים / דיון לגבי הלוואות (אחד מהמאפיינים של CAPM הוא יכולת ללוות בריבית חסרת סיכון).

כל שהמאפיינים לא מתקימים, אבל כן מציגים מספר נכסים מסווגים עם אפשרות שילוב ביניהם, אז עוסוק בנכסים מסווגים בלבד.

### השאלה הבאה מתקהל:

בצורה "עדינה" את מודל "תוחלת-שונות" עבור דירוג פרויקטים או נכסים מסווגים ביחיד

### 8 (ללא אפשרות שילוב, נכסים מסווגים בודדים)

לפי ההגדרה היבשה, מודל "תוחלת-שונות" שלעתים נקרא בשם הנרדף "תוחלת-סטיטית תקן" קבוע שפרויקט מסויים (A) יועדף על פני פרויקט אחר (B) אם ורק אם מתקיים כל התנאים הבאים **במצטבר**:

$$\text{תנאי 1: } E(A) \geq E(B) \text{ וגם}$$

$$\text{תנאי 2: } \sigma_A \leq \sigma_B \text{ וגם}$$

תנאי 3: נדרש שפחות אחד משני אי השיווינוים לעיל יתקיים בגרסת החזקה (לא סימן ה"=>".

כדי להדגים, נציג מספר פרויקטים מתחדשים וננסה לשפטם לפי תוחלת וסטיטית תקן בין כל זוג סדר שלהם.

מקרה 1:

B	A	
15%	20%	תוחלת
70%	30%	סטיטית תקן

נבחן באופן טכני על פי התנאים:

$$\text{תנאי 1: } E(A) \geq E(B) . \text{ האם מתקיים? כן. } 20\% > 15\% .$$

$$\text{תנאי 2: } \sigma_A \leq \sigma_B . \text{ האם מתקיים? כן. } 30\% < 70\% .$$

תנאי 3: נדרש שפחות אחד משני אי השיווינוים לעיל יתקיים בגרסת החזקה (לא סימן ה"=>".

לכן פרויקט A עדיף על B.

מקרה 2 :

B	A	
20%	20%	תוחלת
70%	30%	סטיית תקן

נבחן באופן טכני על פי התנאים :

תנאי 1 :  $E(A) \geq E(B)$  . האם מתקאים? כן.  $20\% = 20\%$

תנאי 2 :  $\sigma_A \leq \sigma_B$  . האם מתקאים? כן.  $30\% < 70\%$

תנאי 3 : נדרש לפחות אחד משני אי השיוויונים לעיל יתקיים בגרסה חזקה (ללא סימן ה"=<"). מתקאים לכן פרויקט A עדיף על B.

מקרה 3 :

B	A	
20%	25%	תוחלת
30%	30%	סטיית תקן

נבחן באופן טכני על פי התנאים :

תנאי 1 :  $E(A) \geq E(B)$  . האם מתקאים? כן.  $25\% > 20\%$

תנאי 2 :  $\sigma_A \leq \sigma_B$  . האם מתקאים? כן.  $30\% = 30\%$

תנאי 3 : נדרש לפחות אחד משני אי השיוויונים לעיל יתקיים בגרסה חזקה (ללא סימן ה"=<"). מתקאים לכן פרויקט A עדיף על B.

מקרה 4 :

B	A	
20%	25%	תוחלת
30%	35%	סטטיסטית תקן

נבחן באופן טכני על פי התנאים :

תנאי 1 :  $E(A) \geq E(B)$  . האם מתקיים? כן.  $25\% > 20\%$

תנאי 2 :  $\sigma_A \leq \sigma_B$  . האם מתקיים? לא.  $35\% > 30\%$

אינו אפילו צריך לבדוק את התנאי השלישי. ברגע שתנאי אחד מופר - מיד נטען שלא נוכל לייצר העדפה של A על B.

از אولي B עדיף על A? אבודוק על פי התנאים :

תנאי 1 :  $E(B) \geq E(A)$  . האם מתקיים? כן.  $20\% < 25\%$

אני אפילו לא צריך להמשיך. ברגע שתנאי אחד מופר, מיד נטען שלא נוכל לייצר העדפה.

והמסקנה המתבקשת : במקרה זה (מקרה 4) לא נוכל לדעת מי מבין הנכסים הבודדים יעדף על ידי משקיע שונה סיכון.

#### שאלה שנייה המציא - בניסוח מסיחים "מעט שונה"

בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסוימים בלבד, ניתן להשקיע באחת מבין שתי מנויות : C ו- D. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 40%, וסטטיסטית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וסטטיסטית התקן שלה 35%. אמןו הוא משקיע שונה סיכון הפעול בשוק זה. סמןו את הטענה הנכונה :

- אמנון יבחר למשקיע בנכס C לאור סטטיסטית התקן הנמוכה יותר.
- אמנון יבחר למשקיע בנכס D לאור תוחלת התשואה הגבוהה יותר.
- אמנון יהיה אדיש באשר לבחירה בין הנכסים (הם שקולים מבחינתו).
- לא ניתן לדעת איזה נכס יעדיף אמןו.
- אין אף תשובה נכונה.

שיקחה! ברגע שנכס מסוים (C) מניב תוחלת נמוכה יותר, הוא "נפסל" מיד ואינו עדיף, לפחות לא באופן ודאי. ברגע שנכס אלטרנטיבי D הוא בסיכון גבוהה יותר, גם הוא "נפסל" מיד ואינו עדיף, לפחות לא באופן ודאי. נמצאים פה במקרה קלאסי שבו לכל נכס יש יתרון מסוים וחסרונו מסוים. במצב כזה, שני הנכסים "יעילים" והמשקיע יתלבט ביניהם, ויבחר לפי טעמיו האינדיבידואליים. התשובה D.



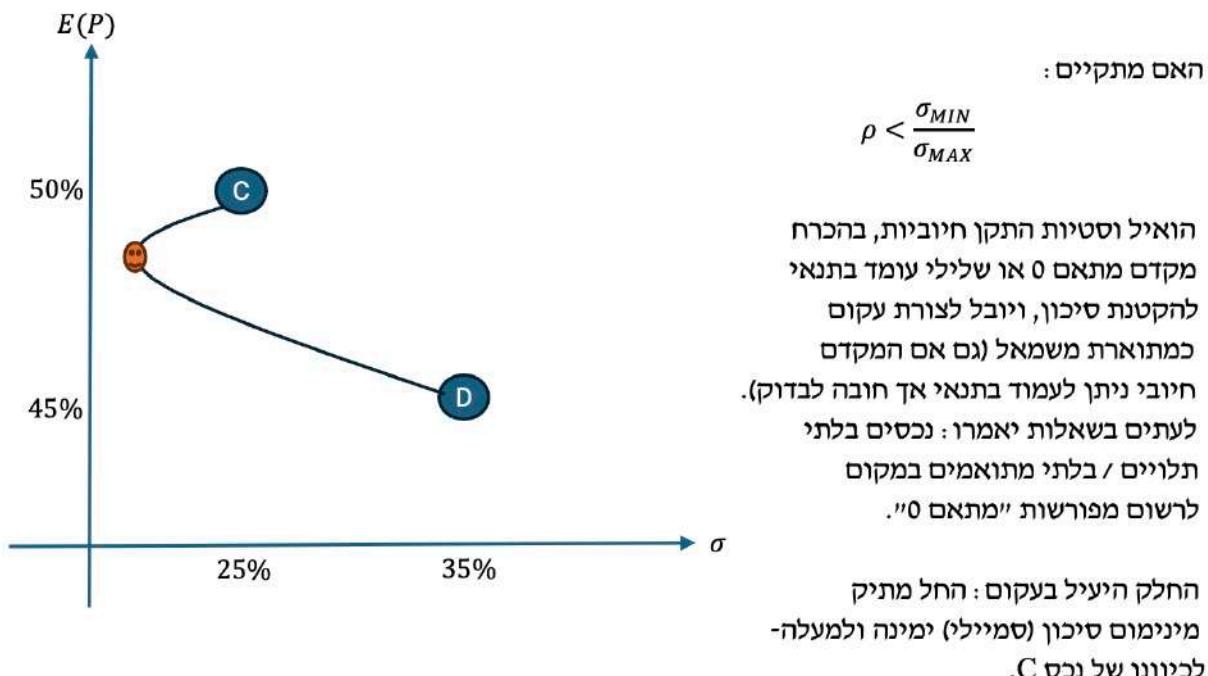
שלמה ס

שאלה נוספת - לבקשת הקהיל - אפשר לשלב ושאלים על ייעילות בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסווגים בלבד, ניתן להשיקע באחת מבינן שתי מניות: C ו-D ו/או לשלב ביניהן. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 50%, וסטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וסטיית התקן שלה 35%. שלמה הוא משקיע שונא סיכון הפעול בשוק זה. וידוע שקדם המתאים בין הנכסים הוא 0. סמן את הטענה הנכונה:

- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכספיו בנכס D.
- בחכרה שלמה יבחר להשיקע 100% מכספיו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, שכלל חלק מהנכסים שימושיים ב-C וחלק אחר ב-D.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכספיו בנכס D.
- כל התשובות שגויות.

**פתרון (התשובה ד', להלן הנמקה מפורטת):**

כאשר אני ניגש לשאלה שדנה בבחירה משקיע בעולם הכלול שני נכסים מסווגים בלבד עם אפשרות שילוב ביניהם, מאי מאי חשוב לבחון את עיקום תמהילי ההשיקעה האפשריים מהשילובים השונים, שכן הדבר יוניק ביטוי חזותי נוח לעיכול בדבר המשמעות של השילובים והיעילות.



נפאל לחישוב משקל ההשיקעה בכל נכס בתיק מינימום סיכון (מינימום שונות/מינימום סטיית התקן):

$$W_C^{MRP} = \frac{\sigma_D^2 - \rho * \sigma_C * \sigma_D}{\sigma_C^2 + \sigma_D^2 - 2 * \rho * \sigma_C * \sigma_D}$$

בהתבה אקבל :

$$W_C^{MRP} = \frac{0.35^2 - 0 * 0.25 * 0.35}{0.25^2 + 0.35^2 - 2 * 0 * 0.25} \approx 0.6622 = 66.22\%$$

למעשה, בנקודות "סמיילי" משקיעים כ-66% בנכס C. אנו יודעים שההשकעות היעילות הן בהכרח הסמיילי או נקודות קרובות יותר ל- C מאשר שיעור השקעה גבוהה יותר ב- C ביחס לנקודות הסמיילי. בשפה פשוטה: כל שונאי הסיכון יבחרו להשקיע לפחות 66.22% בנכס C. זה גם אומר ששיעור (משקל) ההשקעה בנכס D (הערך המשלים) יהיה מקסימום 33.78%, כל שונאי הסיכון יבחרו להשקיע 33.78% או פחות בנכס D.

א. ייתכן שלמה יבחר להשקיע 70% מכספיו בנכס D.

שגוי. המקסימום שישקיע בנכס D הוא 33.78%. מדוע? כי בסמיילי ההשקעה בנכס D היא בשיעור 33.78%, וכל שקל נוספת שנשקיע בנכס D יקרב אותנו מהסמיילי ל-D, ככלمر יכניס אותנו לצד התחרותן של העוקום שאיננו עיל. **יעילות מתיקיימת בתיק מינימום סיכון וכן בתיקים הנמצאים ימינה ולמעלה ממנו.**

ב. בהכרח שלמה יבחר להשקיע 100% מכספיו בנכס C, שכן סטיטית התקן שלו היא המינימלית. שגוי. ראשית מושם שבהינתן האפשרות לשלב, הסיכון ב- C איננו מזערני, ניתן להקטין את הסיכון מעבר על ידי שילוב הנכסים (והגעה לנקודות הסמיילי).

שנייה, מושם שנקודת C היא אمنה יעה (חלק מהעוקום העיל, שמתחליל מהסמיילי ונמשך ימינה ולמעלה) אבל היא איננה הנקודת העילית היחידה. לכן **ייתכן שתבחר אבל לא בהכרח תבחר.**

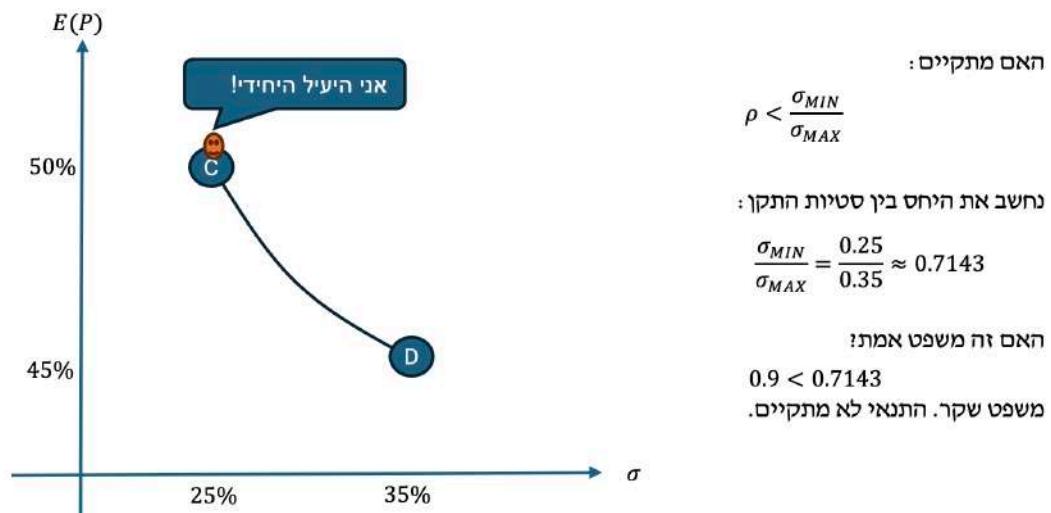
ג. שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, שכולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D. שגוי. כמשמעותם "שלמה יבחר" המשמעות = בהכרח יבחר. וזה כמובן לא נכון, כי למروת שתיק מינימום סיכון (סמיילי) הוא עיל, קיימות אפשרויות השקעה יעילות נוספות שאולי יבחר בהן (כל חלק העוקום מהסמיילי ימינה ולמעלה).

ד. **ייתכן שלמה יבחר להשקיע 20% מכספיו בנכס D.** נכון. ראיינו שההגדרה היא, במקרה זה, שכל שונאי הסיכון ישקיעו 33.78% או פחות בנכס D. משקל השקעה של 20% או פחות בנכס D אכן אפשרי, **ויתכן (לא בהכרח) שייבחר.**

שאלה נוספת - לבקשת הקהיל - אפשר לשלב ושאלים על יעילות  
בשוק הון שבו נסחרים נכסים מסווגים בלבד, ניתן להשיקע באחת מבינן שתמי מניות: C ו- D ו/או לשלב ביניהן. ידוע שתוחלת התשואה של מניה C היא 50%, וסטיית התקן שלה 25%. כמו כן, תוחלת התשואה של מניה D היא 45%, וסטיית התקן שלה 35%. שלמה הוא משקיע שונא סיכון הפועל בשוק זה. וידוע שקדם המתאים בין הנכסים הוא 0.9. סמנו את הטענה הנכונה:

- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכיספו בנכס D.
- בhcרכה שלמה יבחר להשיקע 100% מכיספו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, ש כולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכיספו בנכס D.
- כל התשובות שגויות.

פתרון (התשובה הנכונה ב, להלן הנמקה מלאה):



- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 70% מכיספו בנכס D.
- ממש לא! השקעה של 100% ב- C היא היחידה הרלוונטית (היעילה) בנסיבות המקרה.
- בhcרכה שלמה יבחר להשיקע 100% מכיספו בנכס C, שכן סטיית התקן שלו היא המינימלית.  
נכון.
- שלמה יבחר בתיק מינימום סיכון, ש כולל חלק מהנכסים שימושיים ב- C וחלק אחר ב- D שגוי. במקרה זה, מינימום סיכון (לאור מבחן מקדם המתאים) מתקבל אגב השקעת 100% מכיספי המשקיע בנכס C בלבד.
- ייתכן שלמה יבחר להשיקע 20% מכיספו בנכס D. שגוי מאותה סיבה.

לבקשת הקהל - תוחלת תשואת תיק השקעות המורכב מ-3 נכסים מסוכנים:

$$E(P) = W_A * E(A) + W_B * E(B) + W_C * E(C)$$

סטיית תקן של תיק השקעות המורכב מ-3 נכסים מסוכנים:

---

$$\sigma_P = \sqrt{W_A^2 \sigma_A^2 + W_B^2 \sigma_B^2 + W_C^2 \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

## שאלות קהל נספנות - מפגש 6 עדכני

### מבחן 2

3. פירמה משלמת ריבית  $R\%$  לחודש למקורות המימון שלה. מה שעור ההנחה המקסימלי אותו מוכנה הפירמה להעניק על מנת שהמימון של הכספי המתkeletal כתוצאה מהקדמתה הגבוהה יהיה זול יותר מהכספי שתגיים הפירמה מקורות המימון שלה?

א.  $\frac{I}{I-R}\%$

ב.  $\frac{I}{R}\%$   
ג.  $R\%$

ד.  $\frac{R}{I-R}\%$

ה. אף תשובה מהן"ל אינה נכונה.

**תשובה רשמית ורחיבת ההסביר:**

3. תשובה נכונה: ה'  
נניח כי הפירמה מכירה מוצר באשראי לחודש. מחירו של המוצר הוא 100 שקלים. נניח עוד כי הריבית היא 10% לחודש. ערכו הנוכחי של התשלום הוא  $90.9 = \frac{100}{1.1}$ . הפירמה תהיה מוכנה לקבל 90.9 ש"ח בזמן מקום לחת את האשראי. לכן שיעור ההנחה המקסימלי שהפירמה מוכנה לקבל הוא 9.09% או באופן כללי  $\frac{R}{I+R}\%$ .

שאלה זו כוללת שני אתגרים: האתגר הראשון הוא בעובדה שמדובר בשאלת מבוססת פרמטרים ולא ערכיים כספיים. כתוצאה לכך, באופן טבעי, התהlik של הפתרון והפיתוח שלו מורכב יותר. האתגר השני - הוא אתגר ניסוחי. הרי.Di בירור שams היו שואלים למשל מהו הערך הנוכחי של התזורים המתkeletal, בהינתן תזורים נתון - או אפילו בהינתן נעלמים, יכולנו להתייחס אליו. כאשר דנים בהנחה הקשורה להקדמת גבייה - בעצם דנים בשאלת: האם ההנחה (שפוגעת בשווי שהפירמה מקבלת) מובילה לכך שעדינו במנוחי ערך הנוכחי הסכום המתkeletal בניכוי הנחה גבוהה מ(או לפחות זהה) לערך הנוכחי של התזורים (ללא הנחה) המהוון. בשפה קצר יותר פשוטה, הביטוי הבסיסי ציל:

$$(תשלום עתידי) PV = (\textrm{זמן בניכוי הנחה}) PV$$

אחד מהטריקים להתמודד עם העולם הפרטורי בהינתן שכל הערכים הם אחוזיים, הם לבטא את הסכומים כ- 100 ואת הריבית כשיעור מסוים - למשל, 10%. הויל והנתונים דנים בריבית חודשית, ובתקופה של חודש :

$$PV = 100 * (1 + 10\%)^{-1}$$

או :

$$PV = \frac{100}{(1 + 10\%)}$$

בالمשך נקבל :

$$PV = \frac{100}{(1 + 10\%)} = 90.91$$

ועכשיו השאלה היא מעט יותר מוגדרת :

מהו שיעור ההנחה שモבייל אותו מ-100 ל-90.91?

$$\frac{90.91}{100} - 1 = -9.091\%$$

ניקח את כל הביטויים האפשרויות התשובה, ונציב בהם את שיעור הריבית הנתונה, ונגלה עברו מי מהם מתקבל הערך של 9.091% :

$$\frac{I}{I - R} \%$$

$$\frac{I}{R} \%$$

$$\frac{R}{I - R} \%$$

ביטוי א

$$\frac{1}{1 - 10\%} = 1.11 \text{ Wrong}$$

ביטוי ב :

$$\frac{1}{10\%} = 10 \text{ Wrong}$$

ביטוי ג :

$$10\% \text{ Wrong}$$

ביטוי ד :

$$\frac{10\%}{1 - 10\%} = 0.11 \text{ Wrong}$$

ולכן התשובה ה. ככלור, יתרה על הנסota לפתח אלגברית ביטויים שאינני בטוח בהם ולהגיע לפתרונות שמידת שקיולון המתמטית לאפשרויות המונה מוטלת בספק, המלצתה : לבטא במספרים ולבזוק מה עונה לכלל.

שאלה 6

להלן נתוניים זרמי המזומנים של פרויקט מסוים:

שנה	2	1	0
זרם מזומנים	-100	120	-60

סמן את הקביעה הנכונה:

- הפirma תשקיע בפרויקט זה רק אם מחיר ההון הוא 5%.
- הפרויקט זה אין שט"פ.
- הפרויקט זה יש שני שט"פים.
- הפרויקט אינו כדאי להשקעה עבורה כל מחיר הון.
- תשובה ב' ו- ד' נכונות.

פתרון :

בرمת אפיון הפרויקט, תזרימי המזומנים משנים את סימנים משלילי לחובי (פעם אחת) ומחובי לשילי (פעם שנייה).

כאשר תזרימי המזומנים בפרויקט הופכים את סימנים מספר פעמיים השונה מ-1, אז מדובר בפרויקט שמוגדר כלא קוונציאוני.

במקרים רבים זה אומר שלא ניתן לקבל החלטה באשר לכדיות הפרויקט לפי כלל השט"פ. כדי לאפיון את כדיות הפרויקט במצב כזה, מומלץ בחום לנסות לבנות את התצורה של עוקום הענ"ן ועל בסיסו להסיק מסקנות.

הצורה של עוקום הענ"ן מושפעת מנקודות החיתוך של העוקום עם הציר האופקי והאפיון הכללי של עוקום הענ"ן - אני מוחשב שט"פ (לא שט"פ במובן של ערך כלכלי לקבלה החלטות, אלא שט"פ במובן מתמטי גרפי שיעזר להאייר את צורת עוקום הענ"ן). תוצאות: מיצאה מתמטית של ערכי השט"פ דורות בניהת משווהת ה- $NPV$ ,  $NPV = 0$ .

הזנת מחיר ההון כנעלם, והשווה את המשווהה ל-0 כלהלן:

$$NPV = -60 + 120 * (1 + IRR)^{-1} - 100 * (1 + IRR)^{-2} = 0$$

את הטכניות שאנו אוהב כדי לפתור משווהה כזו היא לסמן:

$$X = (1 + IRR)^{-1}$$

אז קיבל את המשווהה הבאה:

$$-60 + 120 * X - 100 * X^2 = 0$$

אני יכול לסדר את זה כך שהיא אחרת:

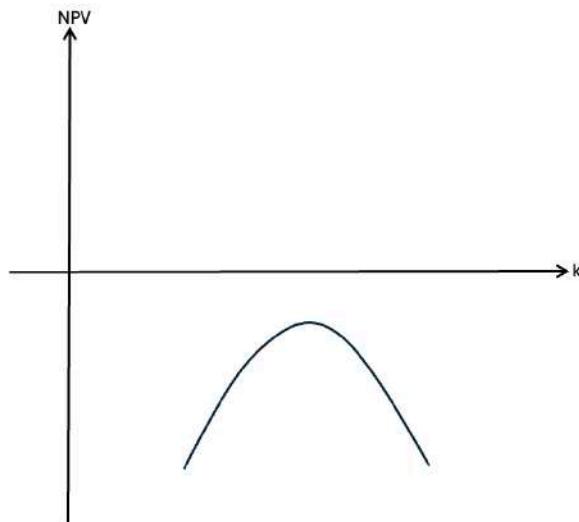
$$-100X^2 + 120X - 60 = 0$$

אז להשתמש בנוסחת משווהה ריבועית כדי לנסות לפתור:

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-120 \pm \sqrt{120^2 - 4 * (-100) * (-60)}}{2 * (-100)} = \frac{-120 \pm \sqrt{-9,600}}{-200}$$

הואיל והביטוי מתחת לשורש שלילי, זה אומר שאנו פתרון למשווהה ריבועית זו. אין שט"פ.

ואם כך, מדובר בעקבות עניין שאיננו חוצה את הציר האופקי כלל ברמה הגרפית. בנוסף בהינתן שזו משווהה ריבועית, חשוב (לצרכיהם כלליים) לדעת את הצורה הכללית שלה: בוכה או מחייכת? בהינתן המקדם השילילי של הערך בריבוע, הפרבולה בוכה (כמוני).



א. הפirma תשקיע בפרויקט זה רק אם מחיר ההון הוא %0.

ב. פרויקט זה אין שת"פ.

ג. פרויקט זה יש שני שת"פים.

ד. הפרויקט אינו כדאי השקעה עבור כל מחיר הון.

ה. תשובות ב' ו- ד' נכונות.

המשמעות המסתכם בהתייחס להיגדים אלו יהיה:

א. שגוי - הפרויקט אינו כדאי אף מחיר הון.

ב. נכון - ראו הנמקה לעיל

ג. שגוי - כי בנכון. ראו חישוב לעיל.

ד. נכון - בהינתן צורת התרשים ומיקומו בתנאים אלו, העניין שלילי בכל מחיר הון.

ה. **התשובה המלאה ביותר.**

## שאלה 4

4. לקחתם הלוואה בגובה של 10,000 ש"ח בריבית שנתית 10% לפחות 5 שנים. החזר הלוואה בתשלומים זהים של קרן וריבית המשולמים בסוף כל שנה. יתרת הקרן לאחר התשלום השני:

- א. 5,512 ש"ח.
- ב. 5,964 ש"ח.
- ג. 4,487 ש"ח.
- ד. 6,560 ש"ח.
- ה. 6,000 ש"ח.

פתרון :

השאלה עוסקת בחלוקת הנפרעת בתשלומים "זהים" = תשלום קבועים, השווים זה לזה (סדרה קבועה). הלוואה הנפרעת בשיטה זו - נקראת גם "הלוואת שפייצר" (אם טרם עשיתם זאת - בבקשתך דאגו לעבור על נספח ההפניות ללימוד עצמי שדן בנושא הלוואות).

ביסוד הלוואת שפייצר ההבנה שסכום הלוואה שאני נוטל היום הוא בהגדרה הערך הנוכחי (ערך שאני מקבל היום) של סדרת ההחזרים העתידיים. בעצם, זה אומר שמתקדים הביטוי הבא:

$$LOAN = PMT * PVFA(r, t)$$

כאשר :

הערך LOAN מייצג את סכום הלוואה.

הערך T PMT מייצג את התשלום התקופתי הקבוע בגין הלוואה.

הערך r מייצג את הריבית לפרק הזמן בין תשלומים.

הערך t מייצג את מספר התשלומים הכלול בחלוקת.

כל שאלה על הלוואה הנפרעת בתשלומים קבועים (שפייצר, כאמור) מתחילה מניתוח בסיסי של ההחזר התקופתי הקבוע בחלוקת.

$$10,000 = PMT * PVFA(10\%, 5)$$

ולכן התשלום התקופתי הקבוע, כל שנה, הוא :

$$10,000 = PMT * 3.791 \rightarrow PMT \approx 2,638$$

הנדרש דרש את יתרת הקרן לאחר התשלום ה-2. **אנו טוענים שתורת הקרן היא בהגדרה הערך הנוכחי של התשלומים שנוטרו.**

$$BAL_n = PMT * PVFA(r, t - n)$$

כלומר :

$$BAL_n = 2,638 * PVFA(10\%, 5 - 2)$$

או בעצם :

$$BAL_n = 2,638 * PVFA(10\%, 3) = 2,638 * 2.487 = 6,560$$

התשובה ד.

## מבחן 2

11. הניחו כי שוק ההון נמצא בשווי משקל לפי CAPM. נתונים שני תיק השקעות בעליים A ו- B. תיק B צפוי להניב תשואה (E(R<sub>B</sub>)) כפולת מזו של תיק A (E(R<sub>A</sub>)) אולם סטיית התקן של תיק B (σ<sub>B</sub>) גבוהה פי שלוש מזו של תיק A (σ<sub>A</sub>). על פי נתונים אלו שער ריבית נטול סיכון הוא:

- א. E(R<sub>B</sub>)/2
- ב. E(R<sub>A</sub>)/2
- ג. σ<sub>A</sub>/3
- ד. σ<sub>B</sub>/3

ה. לא ניתן לקבוע ללא נתונים על תוחלת תשואת תיק השוק.

פתרון :

שווי משקל לפי CAPM בהיעדר נתונים נוספים - אין משמעותם ; משמעו ש- SML בודאות מתקיים (ברירות מחדל).  
ספציפית כאן, לצד נתונים שווי המשקל גם דагו לציין בפנוי שקיים שני תיקים השקעות **בעליים** המסומנים כ-A ו- B בהתאם.

$$E(B) = 2E(A)$$

$$\sigma_B = 3\sigma_A$$

נדרש :

$$R_F = ?$$

בהתנחתה תיקים בעליים, ב-CAPM, בהינתן גם ערכי תוחלת וגם ערכי סטיית התקן שהקשר ביניהם מבוטא בקו ה - CML, אנסה לעובד עמו.

$$CML: E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

אם שואלים ספציפית על RF, ואין צורך אמתי לחלק את יתר הפרמטרים מהנוסחה, נוח מאד ליציג את שיפוע קו ה CML כנעלם אחד.

$$(I) \quad E(A) = R_F + \alpha * \sigma_A \rightarrow \text{multiply by 3} \rightarrow 3E(A) = 3R_F + 3\alpha * \sigma_A$$

$$(II) \quad E(B) = R_F + \alpha * \sigma_B \rightarrow 2E(A) = R_F + \alpha * 3\sigma_A$$

נחסיר את המשוואה (II) ממשוואת (I) ונקבל :

$$3E(A) - 2E(A) = 3R_F + 3 * \alpha * \sigma_A - [R_F + \alpha * 3\sigma_A]$$

ובהמשך פיתוח קיבל בהתאם לתשובה ב :

$$E(A) = 2R_F \rightarrow R_F = \frac{E(A)}{2}$$

## שאלה מתוך הרצפים באתר

### יחידה 8

קטגוריות "בחן את עצמך"

### שאלה 10

בחרו את הטענה הנכונה, בהינתן התפלגות תשואות שני נכסים פיננסיים, לפי המצב הכלכלי במשק -

מצב כלכלי	הסתברות	תשואת נכס 1	תשואת נכס 2
גאות	16%	0.25	4%
ריגיל	12%	0.50	6%
מיתון	8%	0.25	8%

### שאלה 10

לא חסתיים

ניקוד השאלה:

5.00

3 סימן שאלה

יש לבחור תשובה אחת:

- א. נכס מספר 1 עדיף מנכס מספר 2 לפי קритריון תוחלת שנות.
- ב. נכס מספר 2 עדיף מנכס מספר 1 לפי קритריון תוחלת שנות.
- ג. אי-אפשר לקבל החלטה בין הנכסים, ללא ידיעת סוג המשקיע.
- ד. אפשר ליצור תיק ששונותו שווה ל-0, על-ידי שילוב של נכס 1 ונכס 2.
- ה. לא ניתן לדעת דבר לגבי אפשרות שילוב שני הנכסים, מאחר שאין נתונים לגבי המתאים ביניהם.

פתרון :

האתגר המרכזי בשאלה זו טמון בהיגד ד. בהתאם להיגד, הר依 שלפחות עקרונית, ניתן לשלב בין הנכסים. על מנת לבחון את השפעות השילוב בין נכסים מסוימים, علينا לדעת מקדם המתאים בין תשואות הנכסים, כאשר מקדם מותאם זה איננו נתון בשאלה.

חישוב מקדם המתאים בעצמנו על בסיס נתוני התפלגות תשואות הוא אקט מעט אכזרי וארוך, אך ניתן לבצעו בהתאם לפירוט שסיפקתי בפתרונם למבון 6 שאלה 7 כאמור בפרק שיעור 6.

באופן כללי :

תחילה علينا לחשב את התוחלת של כל נכס :

$$E(1) = 0.25 * 0.16 + 0.5 * 0.12 + 0.25 * 0.08 = 0.12 = 12\%$$

$$E(2) = 0.25 * 0.04 + 0.5 * 0.06 + 0.25 * 0.08 = 0.06 = 6\%$$

סטיתת התקן של כל נכס :

$$\sigma_1 = \sqrt{0.25 * (0.16 - 0.12)^2 + 0.5 * (0.12 - 0.12)^2 + 0.25 * (0.08 - 0.12)^2} = 2.8284\%$$

$$\sigma_2 = \sqrt{0.25 * (0.04 - 0.06)^2 + 0.5 * (0.06 - 0.06)^2 + 0.25 * (0.08 - 0.06)^2} = 1.4142\%$$

נכס 1 מניב תוחלת גבוהה יותר מנכס 2, אך גם סיכון גבוה יותר. לכן לא ניתן לקבוע מי מבין הנכסים עדיף לפי תוחלת שונות.

בבקשר לשאלת - מהי משמעות השילוב, علينا לחשב את מקדם המתאים. מקדם המתאים מחושב כך על בסיס התפלגות תשואות הנכסים :

$$\rho_{1,2} = \frac{P_1 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + P_2 * [R_{1i} - E(1)] * [R_{2i} - E(2)] + \dots}{\sigma_1 * \sigma_2}$$

במצביה :

$$\rho_{1,2} = \frac{0.25 * [0.16 - 0.12] * [0.04 - 0.06] + 0.5 * [0.12 - 0.12] * [0.06 - 0.06] + 0.25 * [0.08 - 0.12] * [0.08 - 0.06]}{0.028284 * 0.014142} = -1$$

כאשר מקדם המתאים בין נכסים מסווגים הוא 1-, בהגדרה ניתן לבנות משלוב כלשהו שליהם נכס חסר סיכון / נכס בעל סטיית תקן אפס.

התשובה הנכונה : ד.

### מבחן 7

#### שאלה 4

נכס כלשהו צפוי לתת למשקיע הכנסה בגובה 100 ש"ח בעוד שנה. ידוע כי מחיר הנכס בעוד שנה (מיד לאחר קבלת ההכנסה) יהיה 600 ש"ח. בהנחה שהמשקיע דורש מהנכס תשואה בגובה 15% לשנה, מהו המחיר המרבי שהייה מוכן לשלם עבור הנכס היום?

- א. 700 ש"ח.
- ב. 535 ש"ח.
- ג. 609 ש"ח.
- ד. 522 ש"ח.
- ה. 622 ש"ח.

פתרון :

מנקודת ראותי היום, כשאני מביט על הערך שצפוי לנבוע מהנכס בעתיד, אני מבין שהוא מורכב מ-2 חלקים: בעוד שנה נקלט (אם נשלם היום) 100 ש"ח, בנוסף נחזיק בנכס שוויו (לתוכם אותה שנה) 600. סך הערך העתידי שניבעת לי כמשכיע בעוד שנה מהנכס הוא  $700 = 100 + 600$ . כל מה שצריך לעשות הוא להוון ערך זה שנה אחת לאחר מכן במחיר ההון הנוכחי - וקיים שווי להיום :

$$PV = 700 * (1 + 15\%)^{-1} \approx 609$$

**מעתה אדע: אם מבקשים שווי נכס, ונותנים גם תזרימי המזומנים העתידיים, וגם את שוויו לאחר תזרימיים עתידיים אלו, אתייחס לתזרימי המזומנים וגם לשווי העתידי בתור העריכים שצורך להוון (לחשב PV בಗינם) כדי לדעת מה השווי היום / מה המחיר המרבי שמוכנים לשלם עד הנכס היום.**

## בחן את עצמך - יח' 8

אם ידוע כי תוחלת תשואת תיק השוק היא 20% וריבית חסרת סיכון היא 4%, מה יהיה הרכיב התקין שתוחלת תשואתו היא **36%**?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. חסרים נתונים סיכון בשוק.
- ב. חסירה ה- $\beta$  של התקין.
- ג. 200% בתיק השוק ו-100% הלואאה בשער ריבית חסר סיכון.
- ד. מדובר בתיק המורכב ארכורט ורכך מהשקעה בתיק השוק.
- ה. לא ניתן להגיע לתיק כזה.

**7**  
שאלות  
לא חסתיים  
תיקוד השאלה:  
5.00  
3 סימן שאלת

[הגשת תשובה](#)

השאלה כוללת מידע בדבר תיק השוק וריבית חסרת סיכון. אוטומטית אני במודול ה- CAPM. במודול זה, אלא אם יש מגבלות מיוחדות - המשקיע צפוי לבחור בתיקים ייעילים, אלו המקיימים את הנוסחאות המוגנות לעולם ייעיל. אחת מבן הנוסחאות הקשורות במידעה רבה לשיעור (משקל) ההשקעה בתיק השוק ובנכש חסר סיכון בהתאם בתיק ייעיל היא:

$$E(P) = W_F * R_F + (1 - W_F) * E(M)$$

אם נציב את ערכי השאלה הרלוונטית:

$$0.36 = W_F * 0.04 + (1 - W_F) * 0.2$$

$$0.36 = W_F * 0.04 + 0.2 - 0.2W_F$$

$$0.36 - 0.2 = -0.16W_F \rightarrow W_F = -1$$

כאשר משקל ההשקעה ב-  $WF$  שלילי, המשמעות היא שהמשקיע נוטל הלוואה. הלוואה מבוטאת ביחס להון העצמי של המשקיע; ככלומר אם  $WF = -1$  המשמעות היא  $WF = -100\%$  ככלומר המשקיע נוטל הלוואה בשיעור 100% מהוינו העצמי הראשוני, ומשקיע את כל 200% הכספיים (כספי המקורי פלוס כספי הלוואה) בתיק השוק.

כך שבסך הכל התשובה ג':

הלוואה בשיעור 100%, והשיקעת מלאה הכספיים - 200% בתיק השוק.

## שאלת שני בובו - ריבית נקובה והמטרה

שואלת בובו: אם אני צריכה לעשות התאמה של נניח ריבית נקובה של 24% שנתית לחודשית על מנת לחשב PVFA או FVFA, אז ברגע שעשיתי לה חלק 12 וקיבלתי את ה-2 אני מציבה אותה בנוסחאות הרלוונטיות בלי חשש נכוו?

התיחסות:

ככל - את צודקת. אם הריבית היא נקובה, התהליך הבסיסי שנרצה לבצע הוא להמיר אותה לנקובה לתקופת חישוב אחת, על ידי חלוקה.

הרי באופן כללי, כאשר רצינו להמיר ריבית נקובה לאפקטיבית (ריבית דרייבית):

$$r_e = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1$$

אם למשל מספרים לי על צורך בדיאן בהלוואת שפיצר (הנפרעת בחזרים קבועים), כאשר תזרות החזר היא חודשית והריבית הנקובה היא 24%, לאורה - אני צריכה להמיר אותה לאפקטיבית:

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{n}\right)^m - 1$$

איך אשלים נוסחה זו ומה הקשר לשאלת שלי?

ראשית, אם עסקה נפרעת בתשלומים חודשיים הרי גם אם לא אמרו - המשמעות היא שהריבית מחושבת כל חודש.

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^m - 1$$

אבל מה מעריך החזקה? ובכן, הוайл ואנחנו עובדים עם סדרה שהיא חודשית, למעשה אנחנו רוצים ריבית לחודש אחד. לכן מעריך החזקה 1.

$$r_e = \left(1 + \frac{24\%}{12}\right)^1 - 1 = \frac{24\%}{12} = 2\%$$

לכן את צודקת, אבל הגישה המפורטלת הזו לתשובה נועדה לעזור לנו להבין שהחלוקת ב-12 אינה סוג של "נוסחה חדשה". היא למעשה התוצאה של מקרה פרטי שבו הריבית מחושבת כל חודש, ואני זוקים לריבית לחודש אחד בלבד.

## שאלה 6

שת"פ של פרויקט מסווג השקעה, המניב תזרים מזומנים שנתי קבוע, הוא 20%. אורך חיiproject הוא 8 שנים. מכאן שמדד הרוחניות של הפרויקט במחיר הון של 15% הוא: (התשובות מופיעות ברמת דיקט של 2 ספרות אחרי הנקודה)

- א. 1.33
- ב. 1.04
- ג. 1.17
- ד. 0.86
- ה. אי-אפשר לחשב עקב מחסור בתנאים.

פתרונות :

אמנם הערכים אינם נתונים, אבל תזרימי המזומנים של הפרויקט קבועים. חלק מהתהליך של חישוב מדד הרוחניות מערב במקרים ובים את חישוב ה-  $NPV$ , בהתאם, להלן ניסיון לחשב את העניין בהתאם. בחישוב העניין, תמיד מתבססים על מחיר ההון של החברה בפועל - המטרה היא לחשב את שווי הפרויקט מנקודת ראות החברה הספציפית ובשים לב עלות גiros ההון (מחיר ההון) בחברה הספציפית כאמור. מחיר ההון כ- 15%, וכך נקבל :

$$NPV = -X + CF * PVFA(15\%, 8)$$

ニיצב אני בפני שוקת שבורה, נעלמי רבים מדי.

לעומת השימוש במחיר הון לחישוב העניין, שלא סיפק אותנו, יש גם נתון בדבר השת"פ. על פי ההגדרה, בשונה מהעניין שהוא מחיר ההון של החברה הספציפית, השת"פ הוא אותו מחיר הון (טיאורטי) שMOVIL לאיפוס משווהת העניין.

$$0 = -X + CF * PVFA(20\%, 8) \rightarrow 0 = -X + CF * 3.837 \rightarrow X = 3.837CF$$

נחזיר לנוסחתה  $NPV$  וציב ערך זה של  $X$  :

$$NPV = -X + CF * PVFA(15\%, 8)$$

$$NPV = -X + CF * 4.4873$$

$$but X = 3.837CF$$

therefore:

$$NPV = -3.837CF + CF * 4.4873$$

$$NPV = -3.837CF + 4.4873CF$$

אחת ההגדרות שהענ��נו במחברת הקורס למדד הרווחיות היא :

$$PI = \frac{PV_{\text{טקבולים}}}{|PV_{\text{תשולם}}|} = \frac{4.4873CF}{3.837CF} \approx 1.17$$

### תגבור למלואים מס' 3 (פגש 1 בקבוצת תגבור שנייה) - 3.3.2024

בutor התחלת, בהיבט מנהלות, חומרו למידה ואופן ההכנה, היישורת האחורה מוביילה לגיבוש המלצות בסיסיות להכנה לבחינה :

- א. מחברת הקורס / סיכון הקורס של המנחים שלהם.
- ב. מטלות - ובמיוחד מטלה 11 [גם מטלה 12 חשוב, אבל 11 קצר יותר "מקיפה" מבחינת סוג נושאים ביחס 5 שבחן היא נוגעת].
- ג. רצפים באתר - בכל השאלות שם, אבל בעיקר בהדגש שאלה "בחן את עצמך" לסיום היחידה. לפחות חלק מבין הנוחים בבחינה טוענים שלעתים מבנה השאלות ואופן הניסוח דומה לשאלונים אלו.
- ד. לאחר שלבים אלו, ותוך כדי אני מגבש לעצמי "תהליכי עבודה" (ונוסחאות) ; "סיכון" ; "טעויות נפוצות". כך אני מיציר דף / דפי נוסחאות שמתואימים אישית עברוי.
- ה. מבחנים לדוגמא - חשוב להציג! גם לימוד פרפקט של כל המבחנים ממש לא מבטיח הינה ראייה לבחינה! המבחנים הם כען טעימה / תרגול נוספת בהתבסס על התכנים השונים, אך הם אינם מתוימים לספק את כל הזויות / הניסוחים לבחינה בפועל.
- ו. חשוב מאד להשוויל - כאשר פותרים שאלה, לא להסתפק רק בהגעה לפתרון הנכון - אלא להיות מסוגל לשאול את עצמי בתהילך: **למה השתמשתי בכלי זהה? מה יכול לשנות לי? להבין לעומק כל שאלה שפותרים כי בסופו של יומם יש לצפות לוריאציות ולא "לשינויים מספרים".**

#### ביקשTEM סוג של סקירה בסיסית של נושאי הקורס:

דיסקלימר: אין דבר כזה. כלומר, ברמותי כסטודנט, ההסתעפויות של הנושאים השונים לסוגיות משנה, ניסוחים ומרקם קצה, מובילים לכך שככל ניסיון להכללה רבתית של נושאים ובהתאם טכניקות פתרון (פחות לפיה הניסיון שלו) נדון לכשלון.

בכל זאת, כדי לייצר איזשהו פרימיניג כללי למטרות הקורס, שאולי יסייע לאחדים מכם, להלן "כיוון" עקרוני לנושאים עיקריים וסוגי הסתעפויות מובהקות :

יחידה	הסתעפויות (לא ממצה)
5	<p><b>ברובד הבסיסי:</b></p> <p>חישובי ערך עתידי - של סכום יחיד, של סדרה (מע"ס - FVFA, לוח א-2 בנספח א לכרך ד), לרבות מספר סדרות, התאמות זמן ותקופה, התאמות ריבית (כפי הריבית חייבת להתאים בחישובים סדרתיים לפרק הזמן בין תשולםים).</p>

<p>חישובי ערך הנוכחי (שנקרים גם חישובי שווי / חישובי מחיר - מענ"ס - PVFA - לוח א-4 בנספח א לפרק ד) -</p> <p>כנ"ל (של סכום יחיד, של סדרה וכו').</p> <p>חישובי ריבית - על בסיס מגוון נושאות - המרת ריבית נקובה לאפקטיבית, התיאחות לריבית מראש, שילוב של ריבית דרייבית וריבית מראש, וגם חילוץ ריבית מתווני סדרות (לוויית כך וכך ... אתה מוחזר כל חודש וכך וכך ... מהי הריבית המגולמת בעסקה).</p> <p><b>ברובץ המורכב יותר - יישומים:</b></p> <p>בחירה בין חלופות (על ידי חישוב הערך הנוכחי של כל חלופה - ובחירה במשתלמת יותר).</p> <p>הפקודות ומשיכות (אני אוהב לקרוא לזה "אייזון אקטוארי) - שבדרך כלל אנו פותרים על ידי חישוב PV של הפקודות והשוואות ל - PV של המשיכות.</p> <p>חילוצי ערכיים : ידוע הערך הנוכחי, יש לחץ ריבית ; ידוע הערך העתידי - יש לחץ מספר תשלומיים ; ידוע סכום סכום החסכו, יש לחץ את סכום ההפקודה וכיו"ב.</p> <p>הלוואות - במיוחד (אבל לא רק!) הלוואות שפיר (חזרים קבועים) והלוואות הנפרעות בהחזרי קרו שווים (לוח סילוקין רגיל). כולל שינויים בלוח - ההלוואה בתנאים מסוימים, ובשלב מסוימים משתנה, ואו אז - צריד לחשב את יתרת ההלוואה ולפרוס אותה כ"הלוואה חדשה" לפי התנאים החדשניים.</p>	
<p><b>ברובץ הבסיסי:</b></p> <p>חישוב NPV - ענ"נ, חישוב IRR - שט"פ, חישוב PI - מDDR רווחיות, חישוב החזר הון שנתי. כדיות לפיה כל קרייטריוון.</p> <p><b>סוגי פרויקטים:</b></p> <p>קונבנציונליים של השקעות קונבנציונליים של נטילת הלוואות (צורת גרפ הרכבה, קרייטריוון IRR הפוך).</p> <p>לא קונבנציונליים.</p> <p>לדעת אילו קרייטריוונים רלוונטיים / לא רלוונטיים ובאיזה מצב.</p> <p><b>ברובץ המורכב יותר:</b></p> <p>הציה גראפית של פרויקטים.</p> <p>בחירה ודרוג בין פרויקטים במצבים שונים :</p> <p>בלתי תליים (אפשר לעשות מה שנחפוץ, ללא מגבלות).</p> <p>מושciaים זה את זה (יש לדרוג, ולבחר אחד מתוכם בלבד, לכל היוטר).</p> <p>מגבלת תקציב (ניתן לבצע מספר פרויקטים, כל עוד תקציב ההשקעה בזמן אפס לא חורג מסכום נתון מוגדר).</p> <p>לשיט לב לקרייטריוונים שנייתן לישם כדי לקבל החלטות בכל אחד מהמרקדים, וקשרים בין הקרייטריוונים.</p> <p>למשל : קרייטריוון הענ"נ תמיד מוביל להחלטה נכונה כלכלית ;</p> <p>קרייטריוון השט"פ עלול להוביל להחלטות שגויות ולסתירה (למשל כshedול ההשקעה שונה, או כשהפרויקטים מושciaים זה את זה).</p>	6
<p><b>בסיסי:</b></p> <p>חישוב תוחלת תשואה וסטיתת תקן - נכסים בודדים.</p> <p>בחירה בין נכסים מסוימים בודדים לפי תוחלת-שונות, על פי התוחלת וסטיתת התקן שלהם.</p> <p>המשמעות של שילוב בין נכסים מסוימים בלבד - גישת תיקי השקעות (נוסחאות סטטיסטיות) :</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- תוחלת תשואת תיק המורכב משני נכסים מסוימים (לפי משקליהם השקעה בכל נכס).</li> <li>- סטיתת תקן של תיק המורכב משני נכסים מסוימים (לפי משקלים ומוקדים מותאמים).</li> </ul>	8

<ul style="list-style-type: none"> <li>- תיק מינימום סיכון - משקל ההשקעה בכל נכס בתיק כזה.</li> <li>- היכולת להציג גרפית את עקומת תמהילי ההשקעה האפשריים ולקבוע איזה חלק הוא יועל (בחירה המשקיע הפטונציאלית).</li> </ul> <p>מודל ה - CAPM - שדנו במודל ספציפית, או שאני מזהה נתונים הרלוונטיים רק למודל כגון נכס חסר סיכון, תיק השוק, אג"ח ממשלתית (נכס חסר סיכון במילימ' אחרות).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- תיקים ייעילים (לא ברירת מחדל) אם אמרו שיעיל, חלק גדול מהשאלות דורשות יישום על בסיס חילוץ מהמאפיינים המתמטיים של התקים היעילים הללו באמצעות הנוסחאות <a href="#">הלו</a>.</li> </ul>	
<p><b>מורכב:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- מודל ה - CAPM כשהדינו הוא לא רק בנכסיים ייעילים / תיקים ייעילים - עולם ה - SML : משוואת ה - SML וחשיבות הביטא כמדד סיכון (במקום חשיבות סטיטית התקן כמדד סיכון).</li> <li>- רכיבי הסיכון : סיכון שיטתי (איןנו ניתן לפיזור) סיכון לא שיטתי (ניתן לפיזור).</li> <li>- הבדלים עקרוניים בין תיקים ייעילים ולא ייעילים.</li> <li>- חילוצים מגוונים מאד מכל סוגי <a href="#">המשוואות הרלוונטיות</a>.</li> <li>- חישוב מקדים מתאימים / שונות משתפת עם השוק (שאלה אורך מאד).</li> </ul>	

וכעת, עד שתחליטו אחרת, אנו נצמד לחוות הדעת של חלק מהנבחנים והנבחנות, ונפתחו שאלות נבחרות מ"בחן את עצמן" ברכפי האתר :

מתוך "בחן את עצמך" ביחידה 5:

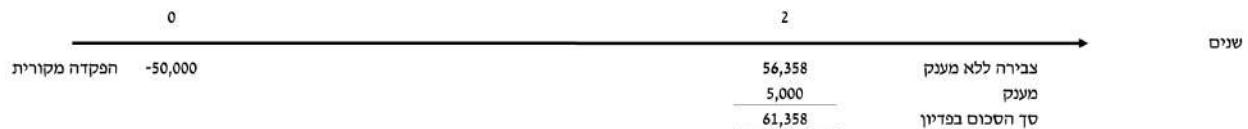
### שאלה 5

בנק "הידיד" מצוי למפקדים 50,000 ש"ח מענק בשיעור 10% מסכום ההפקדה המזוכה מידית בחשבן הפיקדון. בנוסף מצוי הבנק ריבית של 0.5% לחודש על סכום ההפקדה המקורי בלבד, דהיינו המענק אינו צובר ריבית. תכנית החיסכון סגורה לשנתיים.

#### מהי הריבית השנתית האפקטיבית שהבנק מעניק?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 16.2%
- ב. 6.2%
- ג. 10.8%
- ד. 22%
- ה. 11.9%



הסברים נוספים:

הפקדה המקורית היא 50,000 כנותן. לכאורה נשאלת השאלה - אם מתකבל מענק מיידי, האין הדבר מקטין את הערך המוחלט של ההפקדה בזמן אפס (בסיימון חיובי)? בכלל, התשובה לכך הייתה "כן" אם היה ניתן שהענק מתකבל ישירות לעו"ש / בזמן. אבל כאן - אלו לא פניו הדברים. המענק מזוכה בחשבן הפיקדון עצמו, ובהתאם, יתקבל רק במועד הפיקדון עצמו - בעוד שנים, וזה בשיעור של 10% מסכום ההפקדה המקורי של 50,000 ולמן הסכום הנ"ל  $5,000 = 10\% * 50,000$  הוא אחד מרכיבי התקובל במועד הפיקדון.

פרט לכך וכנותן, קיבל המשקיע את הסכום המקורי ללא המענק - 50,000, בתוספת צבירת ריבית חודשית נתונה של 0.5%, אשר תצטבר במשך שנים. בהינתן שבמהלכן של שנים אלו ישנים 24 חודשים, סך הצבירה בגין ההפקדה לתום שנים:

$$50,000 * (1 + 0.5\%)^{24} \approx 56,358$$

סך התקובל כולל מענק שזוכה לחשבן הפיקדון, וכ כולל הפיקדון עם צבירת ריבית בגיןו, מוביל לסכום בפדיון שהוא בסך הכל:

$$56,358 + 5,000 = 61,358$$

ואם כך: המשקיע מפקיד 50,000 ומקבל בעוד שנים 61,358.

הרכיבת האפקטיבית לשנתיים, לכל תקופת העסקה, המגולמת בכך ניתנת לחילוץ לפי היחס בין הערכיהם:

$$r_{ef}(2 \text{ years}) = \frac{61,358}{50,000} - 1 = 22.716\%$$

הוائل ונדרשה ריבית אפקטיבית לשנה אחת, אפשר לתקן את הריבית זו באמצעות חזקה מתאימה (זו לא ריבית נקובה, היא אפקטיבית) :

$$r_{ef}(\text{annual, 1 year}) = [1 + r_{ef}(\text{2 years})]^{\frac{1}{2}} - 1$$

ובהצבה :

$$r_{ef}(\text{annual, 1 year}) = [1 + 22.716\%]^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 10.8\%$$

#### שאלה 11 - בוחן את עצמן - יח' 8

בשוק נסחרות שתי מניות ונכס חסר סיכון. תשואת נכס חסר סיכון 3%. מקדם המתאים בין שתי המניות (א ו-ב) הוא 0.2.

מניה א - בעלייה תוחלת תשואה של 10% וסטיית תקן של 4%.

מניה ב - בעלייה תוחלת תשואה של 18% וסטיית תקן של 6%.

משקיע בונה תיק המשלב 20% ממניה א, 70% ממניה ב ו-10% השקעה בנכס חסר סיכון. **התיק שנתקבל הינו בעל סטיית תקן של** - (התשובות מופיעות ברמת דיק של ספרה אחת לאחר הנקודה)

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 4.1%
- ב. 4.6%
- ג. 4.4%
- ד. 4.3%
- ה.

לא ניתן לחשב, שכן חסר נתונים לגבי סטיית התקן של הנכס חסר הסיכון והמתאים בינו לבין נכסים א ו-ב.

פתרונות :

כאשר שאלת דורשת ממני להתייחס לשילוב ספציפי של נכסים מסוימים - גם אם משורבב גם נכס חסר סיכון למשחק - אני לא נמצא במודל ה - CAPM אלא במודל שיקול נכסים מסוימים. בדרך כלל, מודל ה - CAPM עוסק בתיקים לא ייעילים, או בתיקים ייעילים המהווים שילוב של תיק השוק ונכס חסר סיכון בלבד. כמובן, בסך הכל, זו שאלה טכנית יחסית - לשלב בין נכסים ולהגיע לסטיית התקן של התקיק המשולב. מה שלכארה מטריד אותי - זו העובדת שמדובר בשילוב 3 נכסים, בעוד שרוב הזמן עסקנו בשילוב 2 נכסים מסוימים בלבד.

סטיית התקן של תיק השקעות המורכב מ-2 נכסים בלבד :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A * W_B * \sigma_A * \sigma_B * \rho_{A,B}}$$

כשיש שלושה נכסים מסוכנים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

הוائل וכאן נכס אחד מהשלושה הוא חסר סיכון והואיל וסתיתת התקן של נכס חסר סיכון הינו 0 בהגדרה, מתקיים :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + W_C^2 * \sigma_C^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B} + 2W_A W_C \sigma_A \sigma_C \rho_{A,C} + 2W_B W_C \sigma_B \sigma_C \rho_{B,C}}$$

או בעצם :

$$\sigma(P) = \sqrt{W_A^2 * \sigma_A^2 + W_B^2 * \sigma_B^2 + 2W_A W_B \sigma_A \sigma_B \rho_{A,B}}$$

כלומר בהצבה נקבל :

$$\sigma(P) = \sqrt{0.2^2 * 0.04^2 + 0.7^2 * 0.06^2 + 2 * 0.2 * 0.7 * 0.04 * 0.06 * 0.2} \approx 4.4299\%$$

**בקירוב, התשובה ג.**

#### חידה 8 - בוחן את עצמן - שאלה 13

$$E(r_M) = 10\%, \sigma(r_M) = 10\%, r_f = 6\%$$

בהתהה שהמשקיעים בוחרים להשקיע את כספם בתיק **יעיל** המורכב ממשקיעה בתיק השוק ובנכסים נטול סיכון. **משקיע א** בוחר בתיק **יעיל** עם תוחלת תשואה של 7% ואילו **משקיע ב** בוחר תיק **יעיל** עם סטיית התקן תשואה של 7%.

#### סמןו את הקביעה הנכונה -

יש לבחור תשובה אחת:

- א. משלם א שונא סיכון יותר מאשר ממשקיע ב.
- ב. משלם ב שונא סיכון יותר מאשר ממשקיע א.
- ג. לא ניתן לדעת מנתוני השאלה מי מהמשקיעים יותר שונא סיכון.
- ד. שני המ muschiים שונאי סיכון במידה זהה.
- ה. שני המ muschiים אוהבים סיכון במידה זהה.

פתרונות :

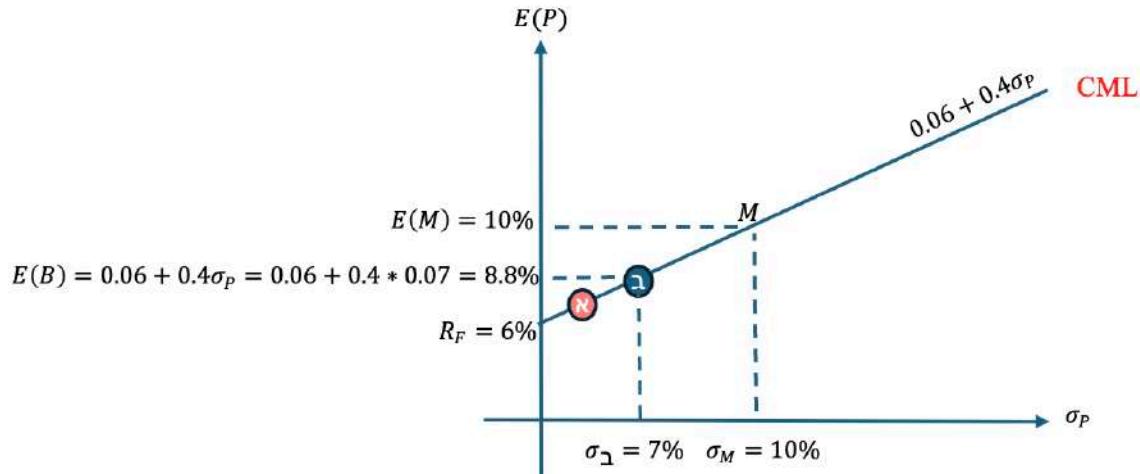
שילוב של תיק השוק ונכס חסר סיכון ליצירת תיק **יעיל** - מודל ה - CAPM. הנוסחה הקלאליסטית ביותר לתיקים **יעילים ב- CAPM** היא קו ה - CML שמציג את הקשר בין סטיית התקן לבין תוחלת התשואה של התקן היעיל.

$$E(P) = R_F + \frac{E(M) - R_F}{\sigma_M} * \sigma_P$$

ב换כבות הנתונים הכלליים בשאלה, הנוסחה תהיה :

$$E(P) = 0.06 + \frac{0.1 - 0.06}{0.1} * \sigma_P \rightarrow E(P) = 0.06 + 0.4\sigma_P$$

מעבר כעט לאירור רלוונטי ונסביר את תוצאותיו :



הסביר :

ראשית אירנו את קו ה - CML ורשמו את נוסחאתו.  
 הוכיחו את סטיית התקן של נכס במשוואת ה - CML ומצאו שתוחלת תשואתו 8.8%.  
 בהגדרה, נכס A שתוחלתו נמוכה מכך - 7% בלבד - נמצא משמאל ולמטה ביחס לנכס B, כלומר משקף סיכון נמוך יותר.  
 העובדה משקיע א בחר בתיק בעל סיכון נמוך יותר, למורות ה"מחיר" בדמיות תוחלת תשואה נמוכה יותר - מעידה עליו כזו שהוא "יותר שונא סיכון" מהמשקיע ב.  
 שימו לב: שניהם שונים סיכון, כל המודל מניה שנאת סיכון, אך משקיעים הבוחרים להמצא שמאלה ולמטה יותר, הם בעלי דרגת שנאת סיכון גבוהה יותר בהגדרה.  
 התשובה A.

**שאלת קהל - ריביות והמרתן**

בהמרת ריבית, או חישוב ריבית - כיצד מובצת התאמה של התקופה / הזמן של הריבית האפקטיבית, לפי איזו נוסחה, איך מזחים זאת, וنمנים מבלבול?

משמעות:

הדיון בשאלות הקורס עוסק תמיד בRibbit "אפקטיבית". Ribbit אפקטיבית היא למעשה הריבית ה"כוללת" שמשקפת את כל ההשפעות של עלויות המימון על העסקה (כולל Ribbit דרייבית, עלות, Ribbit מושך וכן הלאה). בדרך כלל, נתקל בחישובי Ribbit והמרתנה ב-3 הקשיים:

**א. מקבלים שאלת שכוללת נתונים של סדרה / סדרות של תזרימי מזומנים, וצריך להתאים את הריבית האפקטיבית כדי "לעבד" ולהשאיב את הנדרש באשר לסדרה.**

המחשה:

מהו הערך הנוכחי של סדרת תקבולים הכוללת 100 ש"ח שישולם בתום כל חודש במשך שנה, ו-200 ש"ח בתום כל חודש עוקב במשך שנתיים, אם ידוע שהריבית השנתית היא 12.6825%?

פתרון:

במקרים כלליים, כאשר נתונה הריבית להיוון, כבירות מחדל היא Ribbit "אפקטיבית" ובעצם הפעולה הנדרשת היא למתאים אותה / להמיר אותה מתקופה אחת לאחרת - למשל, כאן: המושך והתזרומים הם כל חודש, והריבית היא שנתית - הנדרשת המרה של הריבית משנה לחודש. את ההמרה מבצעים באמצעות "מערך חזקה" רלוונטי:

$$r_e = (1 + r)^n - 1 = (1 + 12.6825\%)^{\frac{1}{12}} - 1 = 1\%$$

למעשה: התבססנו על 1 ועוד Ribbit אפקטיבית שנתית נתונה, ומערך חזקה הוא למעשה היחס בין התקופה הנדרשת (חודש, כי זה פרק הזמן בין תזרימי בסדרות שלגביהם נדרש החישוב) לבין התקופה הנתונה (שנה).

הפתרון עצמו, של השאלה, יהיה:

$$PV = 100 * PVFA(1\%, 12) + 200 * (1 + 1\%)^{-12}$$

כי הסדרה הראשונה החלה בזמן 1, לכן הערך הנוכחי מוביל בזמן 0 (עיקרונו "אחדת אחרת"), הסדרה השנייה מתחילה בזמן 13, לכן הערך הנוכחי מוביל בזמן 12 (עיקרונו "אחדת אחרת") ולאחר מכן יש לתאם 12 תקופות נוספות לאחר.

טיפ: לקוראים ולקוראות המطلבים לגבי אופן היישום של התאמות הזמן בחישובי ערך הנוכחי ועתידי, מומלץ לעיין בדוגמאות המלויות בגרפים ותיאור מוד מפורט, כאן - [ערך עתידי עם התאמות](#), וכן - [ערך נוכחי עם התאמות](#).

ב. מקבלים נתוניים מפורטים למדи על סדרה, עם או ללא עמלות, ורכיבי תזרימי מזומנים נוספים, וצריך לגנות את הריבית האפקטיבית הגלומה בהסדר.

המקרה: ינו שוקל לרכוש מחשב Macbook Air M3 חדש. עלות המחשב במזמן 5,000 ש"ח. היבואן מציע לשלם על המחשב בפריסת ל-36 תשלומים שווים "ללא ריבית". פרט לתשלום התקופתי הקבוע, נדרש לשלם ליבואן בכל חודש עמלת סliquה בסכום של 30 ש"ח. התשלומים יבוצעו בתום כל חודש. נדרש: מהי הריבית האפקטיבית השנתית הגלומה בהסדר?

$$\text{התשלום הקבוע ללא ריבית (לא כולל עמלת סliquה):} \\ \frac{5,000}{36} \approx 138.89 \\ \text{עמלת סliquה:} \\ \underline{30} \\ \text{סך הכל תשלום חודשי:} \\ 168.89 \text{ ש"ח.}$$

כדי לגנות את הריבית בסדרת תשלומים, נשתמש במשפט: **"מחיר המוצר במזמן הוא הערך הנוכחי של התשלומים בעדי, מהו ניימ (PV) לפי הריבית המגולמת בעסקה".**

$$5,000 = 168.89 * PVFA(r, 36)$$

$$PVFA(r, 36) = \frac{5,000}{168.89} \\ PVFA(r, 36) = 29.605$$

נigraph ללוח א-4 בנספח א לכרך ד, ונחפש בהינתן 36 תשלומים  $t=$  את שיעור הריבית  $r$  שמוביל לערך קרוב ככל הניתן ל-29.605. מקבלים 1%.

$$r = 1\%$$

הריבית שחילצנו מותוק נתוני סדרה שאיבריה חודשיים, היא תמיד ריבית אפקטיבית חודשית. הויאל ודרשו ריבית אפקטיבית שנתית, עליינו בהתאם אותה. עם מעיריך חזקה מותאים!

$$r_e(\text{annual}) = (1 + r_{\text{monthly}})^{12} - 1 = (1 + 1\%)^{12} - 1 = 12.6825\%$$

וזו תשובהנו הסופית: הריבית השנתית היא 12.6825%.

ג. מקרה שבו יש להמיר **ריבית נקובה / ריבית דרייבית / ריבית מראש למונחי ריבית אפקטיבית**.  
 במקרה כזה, בדרך כלל נזהה שאלות שכלי הדיוון שלו הוא בשיעורי ריבית בלבד. לא רק זאת, שאלות אלו נזהה במקרים רבים את המונחים "הריבית מחושבת כל \_\_\_\_\_" או "הריבית מושלמת מראש", ולא נזהה סדרות או סכומים כספיים.  
 זהו המקרה ה"מורכב יותר" שדורש יישום נוסחאות מגוונות לחישוב הריבית האפקטיבית כאמור. נציג מספר אפשרויות.

**המחשה 1 : ריבית דרייבית**  
 מהי הריבית האפקטיבית השנתית אם ידוע שהריבית הנקובה השנתית היא 8% והיא מחושבת כל 4 חודשים?

כאשר נתונה ריבית נקובה המוחושבת כל ייחידת זמן (חודש / רבעון / שבועיים / חצי שנה...), הדבר הבסיסי להמיר את הריבית מנקובה לאפקטיבית היא על בסיס הנוסחה המתאימה לעקרון ה"ריבית דרייבית":

צעד ראשון : לוקח את הריבית הננתונה, ומחלק אותה למספר תקופות החישוב שלה (כדי להגיע לריבית לתקופה חישוב בודדת) :

$$r = \frac{R}{n}$$

במקרה שלנו, נתונה ריבית נקובה שנתית (R) נתון היא מחושבת כל 4 חודשים (3 פעמיים בשנה). לכן כדי ליציר ריבית לתקופה חישוב אחת, נחלק את הריבית הנתונה ב-3:

$$r = \frac{8\%}{3} = 2.66667\%$$

זו הריבית לתקופה חישוב אחת - ל-4 חודשים. בשלב הבא, נרצה להמיר אותה מ-4 חודשים חוזרת לשנה לפי נוסחת הריבית האפקטיבית:

$$r_{annual} = (1 + r_{4\ Months})^3 - 1 = (1 + 2.66667\%)^3 - 1 \approx 8.22\%$$

אפשר גם לאחד את שני צעדי העבודה לביטוי אחד ויחיד :

$$r = \left(1 + \frac{R}{n}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{8\%}{3}\right)^3 - 1 = 8.22\%$$

### המחשה 2 : ריבית דרייבית וריבית מראש

בנק "הנקניקים" מציע لكم הלוואה בסך 100,000 ש"ח לשנה. הלוואה נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל רביעון ומשולמת בתום התקופה, וכן דורש עמלת ערך מסוים בשיעור שנתי של 8% בחישוב חצי שנתי המשולמת בתחילת התקופה. מהי הריבית האפקטיבית השנתית בהסדר?

גם כאן, למרות אזכור הסכום הכספי של הלוואה, מדובר בשאלת ריבית טהורה, הערכיים אחווזיים, אין נתונים בדבר סדרות תשלוםים ונדרשת ריבית באחויזים כן (לא ערךכספי). אני מזהה בשאלת הזו  
שני מוקדי כוח :

ריבית שנתית נקובה בשיעור 12% המוחשבת כל רביעון ומשולמת בתום התקופה (בתום השנה). חילק זהה פשוט יחסית :

$$r = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{12\%}{4}\right)^4}{\left(1 - \frac{8\%}{2}\right)^2} - 1 \approx 22.13\%$$

### המחשה 3 : ריבית דרייבית וריבית מראש - דוגמא נוספת

בנק "קובעים" של קש"י מציע لكم הלוואה בסך 500,000 ש"ח לשנתיים. הלוואה נושא ריבית שנתית נקובה בשיעור 10% המוחשבת כל חודש ומשולמת בתום התקופה. כמו כן, נושא ההלוואה עמלת הקמת הלוואה בשיעור שנתי של 5% בחישוב רביעוני המשולמת בתום התקופה. במועד פירעון הלוואה, יש לשלם בנוסף דמי סילוק בשיעור 8% מקרן הלוואה הראשונית (לא עמלות ערך מסוימים או ריבית צבורה). מהי הריבית האפקטיבית השנתית?

$$r_e(\text{שנתיים}) = \frac{\left(1 + \frac{R}{n}\right)^m}{\left(1 - \frac{R_d}{n_d}\right)^{m_d}} - 1 = \frac{\left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{24} + 8\%}{\left(1 - \frac{5\%}{4}\right)^8} - 1 \approx 43.81\%$$

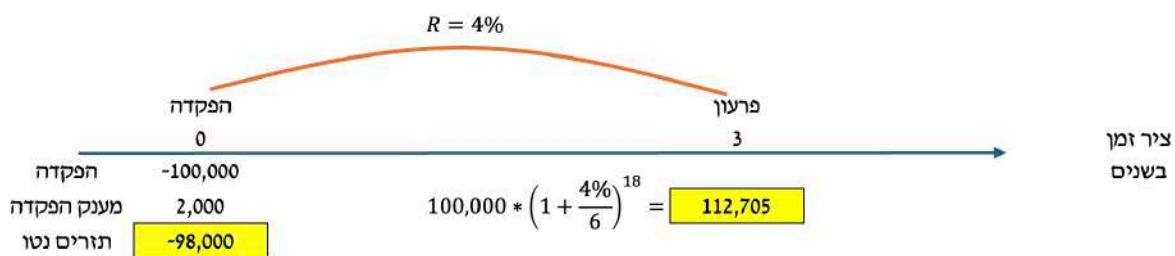
כעת, המרה מריבית אפקטיבית לשנתיים לריבית אפקטיבית לשנה אחת היא פשוטה במינוח :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 43.81\%)^{\frac{1}{2}} - 1 \approx 19.92\%$$

מסקנה : הריבית האפקטיבית לשנה היא כ-19.92%

המחשה 4 : ריבית דרייבית וריבית מראש שמוגדרת באופן כספי הפקדתו בפיקדון סכום של 100,000 ש"ח. בהתאם לתנאי הפקדתו, הוא צובר ריבית שנתית נקובה בשיעור 4% המוחשבת כל חודשים. קרן הריבית והפקדתו תפרעו בתום התקופה - בחלוף 3 שנים. מיד במועד ההפקדה לפיקדון מזוכה בחשבון העו"ש של המפקיד "מענק הפקדה" בסכום של 2,000 ש"ח. מהי הריבית השנתית האפקטיבית המגולמת בעסקת ההפקדה?

השאלה זו שונה מקודמתה, משום שנתוני הריבית (ומענק הפקדה הוא חלק מכך) הם בחלוקת באחזois ובחלוקם בערכאים כספיים. כאשר אני מקבל בשאלה זו, אני מעדיף להתייחס לערכאים הכספיים באופן מלא, ולהשאיב את הריבית האפקטיבית דוקא לפי היחס ביניהם.



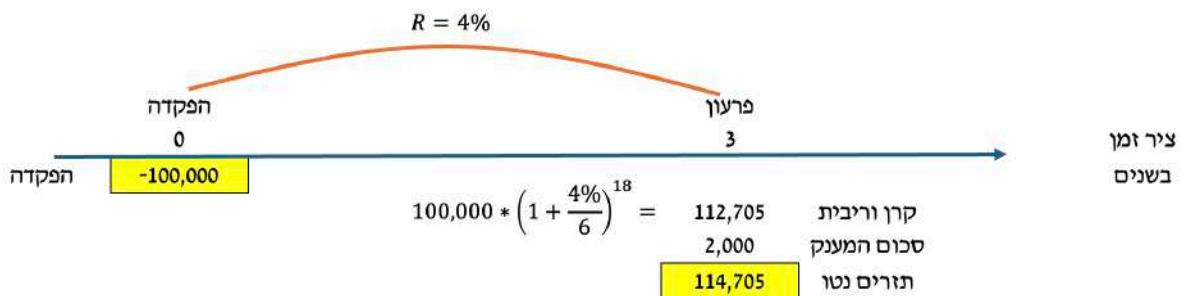
כדי לחשב את הריבית האפקטיבית במצב זה, נתבוס על היחס בין סך התקובל בתום התקופה לבין ההשקעה נטו בתחילת התקופה (ערך המוחלט) :

$$r_e(3 \text{ years}) = \frac{112,705}{98,000} - 1 = 15\%$$

אם ארצת להתאים את הריבית למועדים של שנה אחת :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 15\%)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 4.77\%$$

המחשה 5 : ריבית דרייבית וריבית מרأس, הגדרה כספית - וציבורה לפקדון  
 חזרו על חישוביכם בהמחשה 4 אם ידוע שהבנק קבוע כי מענק ההפקדה **מצטרף** לפקדון, וכי הריבית  
 בפקדון מוחושבת על סכום ההפקדה הראשוני (ללא סכום המענק).



ריבית אפקטיבית לתקופת העסקה כולה, 3 שנים :

$$r_e(3 \text{ years}) = \frac{114,705}{100,000} - 1 = 14.705\%$$

אם ארצה להתאים את הריבית למונחים של שנה אחת :

$$r_e(\text{annual}) = (1 + 14.705\%)^{\frac{1}{3}} - 1 \approx 4.68\%$$

**שאלה נוספת - מרכיבים - יח' 5 - בוחן את עצמן - שאלה 7**

לחברה מוצעות שתי אלטרנטיבות ללקיחת הלוואה על סך 100,000 ש"ח, למשך שנה:

1. ריבית של 3.5% לחודש, מחושבת כל חצי שנה.

2. ריבית של 21.6% לשנה וניכוי מראש של %X בתחילת השנה.

באיזה שער ניכוי מראש (%X), תהיה החברה אדישה בין שתי האלטרנטיבות?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 19.5%
- ב. 14.4%
- ג. 16.9%
- ד. 24.8%
- ה. 20.4%

**הגשת תשובה**

**פתרונות :**

כאשר נתונים לי ערכים של ריבית או ניכוי מראש באחזois, וMbpsים שנבחר בחלוקת העדיפה, הדיוון של מtbody על חישוב הריבית האפקטיבית בכל חלופה - בהלוואות נבחר בריבית האפקטיבית הנמוכה ביותר, ובהשקעות - בריבית האפקטיבית הגבוהה ביותר.

יש כאן שני מקרים:

מקרה 1 - כולל ריבית לחודש, מחושבת כל חצי שנה. צריך להגיע לריבית אפקטיבית לשנה, שהיא תקופת ההלוואה.

כאשר הריבית "מחושבת כל", את המרת הריבית לאפקטיבית נבע בשני שלבים: בשלב ראשון, ניקח את הריבית הנתונה (נקובה) ונכפול או נחלק אותה כדי להגיע לתקופת חישוב. במלים אחרות, כאן הריבית הנתונה היא 3.5% לחודש, אבל הואיל ומוחשבת כל חצי שנה, נכפול אותה ב-6. התוצאה: 21%. בשלב השני, מtbody על הריבית לתקופת חישוב ועל העלאה בחזקה רלוונטי, כדי להמיר את התוצאה מתקופת חישוב לתקופה הכוללת הנדרשת.

$$r_e = (1 + R * n)^m - 1$$

בתוך הסוגרים: המרת הריבית הנתונה (חודשית) לתקופת חישוב אחת (חצי שנה) זו את ע"י מכפלה ב-6.

במעריך החזקה: המרת הריבית לתקופת חישוב (חצי שנה) לשנה (הנדשת) זו את על ידי חזקה 2.

$$r_e = (1 + 3.5\% * 6)^2 - 1$$

$$r_e(option1) = (1 + 21\%)^2 - 1 = 46.41\%$$

מקרה 2 - כולל ריבית "בסוף התקופה" שמשלמים בשיעור 21.6% וכן ניכוי מראש בשיעור לא ידוע (x). במצב שבו יש שילוב של ריבית "בסוף" וריבית " מראש", ניצרך שבר שבמונה שלו כולל את תוספת הריבית בתום התקופה, ובמקרה - את ניכוי הריבית מראש בתחלת התקופה. הנוסחה תהיה:

$$r_e = \frac{1 + r}{1 - d} - 1$$

$$r_e(option2) = \frac{1 + 21.6\%}{1 - d} - 1$$

אדישות בין ריבית זו לריבית שחילצנו במקרה 1 תתקיים כאשר יהיה שווין בין הריביות, כלומר:

$$r_e(option1) = r_e(option2)$$

$$46.41\% = \frac{1 + 21.6\%}{1 - d} - 1$$

מפה רק נותר לפטור משווה בנים אחד:

$$d = 16.94\% \approx \textcolor{yellow}{16.9\%}$$

המסר העיקרי של השאלה הוא: למורות שברוב המקרים כשנתונה "ריבית המחשבת מס' פעמים" שלב הפעולה הראשון הוא חלק (למשל, ריבית שנתית נקובת המחשבת כל חצי שנה – חלק ב-2, ריבית חצי שנתית נקובת המחשבת כל חדש – חלק ב-6 וכן הלאה), הרי שכאשר הריבית הנקובת הנתונה היא "קצרה" יותר בתקופתה מאשר תקופת חישוב – נבצע מכפלה ולא כפל שלה (כלומר: ריבית חודשית המחשבת כל חצי שנה – כפול ב-6. ריבית לחודשים המחשבת כל 8 חודשים – כפול ב-4).

## שאלה 8 - בוחן את עצמך - ייח' 5

ה השקעה בפרויקט מסויים עולה כיום 100,000 ש"ח ואינה מביאה תקבולות כלשהם במשך מספר שנים. לאחר מספר שנים זה, מתחילת הפרויקט להניב תקבולות של 25,000 ש"ח לשנה, לפחות.

כמה שנים לכל היותר תהיה מוכן לחכotta עד להתחלתו של זרם התקבולות הקבוע, אם שער הריבית השנתי הינו **13%**?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. 5
- ב. 9
- ג. 23
- ד. 6
- ה. 18

[הגשת תשובה](#)

פתרונות :

**בשואלים על פרויקט, לגבי "מה אתה מוכן לעשות / לחכotta / לשלם..." בעצם שואלים על המצב שבו  $NPV = 0$  שזו הנקודה המוגדרת בטור "מינימום הכספיות".**

הערך הנוכחי של ההשקעה היום - הוא בסימן שלילי, בגובה עלות ההשקעה.  
הערך הנוכחי של התקבולות, בהיותם סדרה אינסופית, נשען על נוסחת החישוב של ערך נוכחי של סדרה אינסופית בסימן חיובי :

$$PV = \frac{PMT}{r}$$

במקרה שלנו אם נחבר את העריכים, אלא שיש לזכור שערך נוכחי של סדרה מוביל אותו אחד לפני תחילתה. אז אם נסמן את עיתוי התזרים כ- $t$ , הרי כדי לבטא את התזרים בזמן 0 ובהתאם את ה-  $NPV$  :

$$NPV = -100,000 + \frac{25,000}{13\%} * (1 + 13\%)^{-(n-1)} = 0$$

או :

$$NPV = -100,000 + \frac{\frac{25,000}{13\%}}{(1 + 13\%)^{n-1}} = 0 \rightarrow n = 6.34 \approx 6$$

מפה ואילך - או שפטורים את המשוואה באמצעות שימוש ב- $t=0$ , או שמציבים ב- $t=0$  את כל אפשרויות המענה בשאלת, ובוחנים متى המשוואה מתקינה.

מדוע  $t=0$ ? התזרים העתידי מתחילה בזמן כלשהו, זמן  $t$ . חישוב ערך נוכחי של סדרת תזרים מהראשון שבהם בזמן  $t$  מוביל בהגדה "אחד אחריה" כולם בזמן  $t=0$ . זה אומר שההתאמה נוספת מזמן  $t=0$  בזמן 0 דורשת התאמה של  $t=1$ -ת תקופות נוספות לאחר.

### שאלה 13 - בוחן את עצמו - ייחידה 5

הפקדתם  $x$  ש"ח בתוכנית חסכו. להפתעתכם, כעבור 5 שנים גיליתם כי סכום הכספי גדל ב-40%. כמה שנים נוספות עליכם להמתין עד אשר סכום ההפקדה הראשונית יוכפל?

יש לבחור תשובה אחת:

- א. כ-4.5 שנים
- ב. כ-5.5 שנים
- ג. כ-1.5 שנים
- ד. כ-10.5 שנים
- ה. לא ניתן לחשב שכן גם הסכום וגם הריבית אינם ידועים

הגשת תשובה

לפי נתוני השאלה:

$$x * (1 + r)^5 = 1.4x$$

ניצמצם את שני האגפים ב-  $x$ :

$$(1 + r)^5 = 1.4$$

נמשיך כדי לפטור את הריבית. לשם כך, נוציא שורש 5 (או בחזקת  $1/5$ ) משני האגפים:

$$1 + r = 1.4^{\frac{1}{5}}$$

בשימוש פיתוח:

$$r = 1.4^{\frac{1}{5}} - 1 = 6.961\%$$

עכשו נציב את הריבית זו ונראה כמה תקופות צבירת ריבית יובילו להפיכת  $x$  ל-  $2x$ .

$$1.4 * (1 + 6.961\%)^n = 2x$$

ערבי  $n$  -  $x$  מעתמנים:

$$1.4 * 1.06961^n = 2$$

וההתשובה:

$$n = 5.3 \approx 5.5$$

12. חוסך מעוניין להבטיח לעצמו ולילדיו תקבול חצי שנתי אינסופי קבוע (בכל סוף מחצית שנה) החל מועד 10 שנים (תקבול ראשון בסוף שנה 10), בגובה 8% מהכנסתו השנתית שועומדת על 60,000 ש"ח. ידוע כי תכניות החסוך בبنק נותנות ריבית אפקטיבית שנתית של 8.16% במהלך 5 השנים הקרובות ולאחר מכן הריבית צפואה לעלות ולעומוד באופן קבוע על שיעור של 10.25% אפקטיבי לשנה. מהו הסכום אותו נדרש החוסך להפקיד היום על מנת שיוכל לבצע את תכניותיו?

א. 37,991 ש"ח  
 ב. 39,815 ש"ח  
 ג. 41,806 ש"ח  
 ד. 19,422 ש"ח

ה. לאחר והריבית משתנה לאורך התקופה ומאיך מדובר בסדורה אינסופית, הרוי שלא ניתן לפתור את השאלה.

הפתרון :

$$PV = \frac{\frac{4,800}{5\%}}{(1 + 10.25\%)^{4.5} * (1 + 8.16\%)^5} = 41,806$$

### המלצות למידה בישורת האחרונה

במפגש הקודם - הצגנו טבלה לרכיבו נושאים עיקריים. אבל צריך גם בתהליך הלמידה לוודא שנשאר מספיק זמן לעטיפת הפינות ולפתרון של שאלות "מעורבות" (մמחנים / שלא לפי נושאים) כדי להתרגל להבנה ביניהם לקרأת הבדיקה וכדי לייצר מיננות של התמצאות של דפי הנושאות. בהתאם, בהינתן שבוחנתכם ב-3/12, להלן מתחווה אפשרי (חשוב גם - **בחן את עצמך** בדף הatr) :

זמן עבודה	נושא עיקרי	דgesים והערות
יום אחד	סגירת פינה בריביות - יח' 5	להיעזר בפגישה
יום אחד	סיום כל יח' 5 ללא יוצאה מן הכלל	שאלות קשות מהמחברת בחן את עצמך ברכפים מטלה שאלות ממחנים על יח' 5
יום אחד	יחידה 6 - פרויקטים יחידה 8 – פרויקטים בודדים, שילוב בין 2 תיקים מסוכנים, כולל גרפים, כולל ייעילות, כולל תיק מינימום סיון... יחידה 6 – להבין היטב את צורת הגրפים : לא רק את הקרטירוניים טכנית, אלא גם את סוגי הפרויקטטים ואת ההשפעה על איזה קריטריון רלוונטי וכו'.	יח' 6 - בוחן את עצמך ברכפים שאלות ממחנים על יח' 6 שאלות במחברת (הקצרות)
יומיים	יחידה 8 - מודל CAPM - תיקים ייעילים, תיקים לא ייעילים, ריכוז נסחאות של כל המצבים פתרונות מבחןים - באתר הקורס יש 8 מבחנים, כ-96 שאלות אמריקאיות, מתוכן אני מעריך שכ-70 בלבד רלוונטיות (יח' שלא בחומר)	דges מרכז - יח' 8 CAPM : הבדיקה בין המרקמים (יעילות / אי יעילות, ביתא מול סטיתת תקן, הגրפים הרלוונטיים). להתמקד בשאלות הקשורות לחייב פרמטרים ברמה אלגברית ויזיה נסחה מתאימה לחייב. מעבר למחברת – בוחנות.
יומיים	נתו מבחןים	התאמות דפי נסחאות לטעויות נפוצות ב berhasilה גדולה