Домашнее задание №2 студентки группы 6112

Щербина Елизаветы

Все задание выполнялось на языке программирования Python3 с использованием библиотек для работы с числами, графиками и таблицами.

Вариант 9

In [32]:

```
import numpy as np
import scipy as sc
import pandas as pd
from tqdm import trange
import math
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

Задача №1

Линейные системы уравнений. Устойчивость численных методов.

Рассматривается система уравнений малых колебаний маятника:

$$\dot{x} = \varepsilon\, x + 2y$$
$$\dot{y} = \varepsilon\, y - 2x$$

Начальные условия для системы:

$$x(0) = y(0) = 1, \varepsilon = 0,1$$

A. Точное решение системы

Точное решение системы однородных дифференциальных уравнений в точках *T =1, 10, 100, 1000* находим с помощью следующей формулы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0.1t} \\ e^{0.1t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} sin2t + cos2t \\ cos2t - sin2t \end{pmatrix}$$

In [33]:

```
t = 0
x_n = 1.0
y_n = 1.0

dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
data = {'T': [1, 10, 100, 1000], 'X': ['x', 'x', 'x', 'x'], 'Y': ['y', 'y', 'y
', 'y']}
results_second = pd.DataFrame(data=data)

i = 0
for i in range(4):
        x_n = math.exp(0.1*dots[i])*(math.sin(2*dots[i]) + math.cos(2*dots[i])
)
        y_n = math.exp(0.1*dots[i])*(math.cos(2*dots[i]) - math.sin(2*dots[i])
)

        results_second.at[i, 'X'] = str(x_n)
        results_second.at[i, 'Y'] = str(y_n)
```

In [34]:

```
results_second
```

Out[34]:

	T	X	Y
0	1	0.5450156906076808	-1.4648424534098445
1	10	3.5909245385783413	-1.3723604322834528
2	100	-8504.630386587978	29966.675704974434
3	1000	1.5122808215252288e+43	-3.487829447249174e+43

Б. Численные решения

Используя численные методы Эйлера (явный, неявный, с центральной точкой), явные методы Адамса порядка 3, 4 и Дормана-Принса, получить численные решения с шагом 0,01 для Т = 1, 10, 100, 1000. Объяснить полученные результаты. При использовании метода Адамса особое внимание обратить на переходной участок, где значения сеточной функции необходимо получать другим численным методом.

Явный метод Эйлера

$$u_{n+1}(t+\tau) = u_n(t) + \tau f(t_n, u_n), 0 \leqslant t \leqslant N-1$$

$$\begin{cases} \dfrac{x(t)}{dt} = 0,1x + 2y \\ \dfrac{y(t)}{dt} = -2x + 0,1y \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Результат вычислений представлен в таблице: T-точка, x, y - соответствующие координаты.

In [35]:

```
t = 0
x_n = 1.0
y_n = 1.0

dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
data = {'T': [1, 10, 100, 1000], 'X': ['x', 'x', 'x', 'x'], 'Y': ['y', 'y', 'y
', 'y']}
results_Euler_first = pd.DataFrame(data=data)

i = 0
while True:
        x_n_1 = x_n + 0.01*(0.1*x_n + 2*y_n)
        y_n_1 = y_n + 0.01*(-2*x_n + 0.1*y_n)
        x_n = x_n_1
        y_n = y_n_1
        t += 0.01

        if round(t, 3) == dots[i]:
            #print(i, dots[i], "x=", x_n, " y=", y_n)
            results_Euler_first.at[i, 'X'] = x_n
            results_Euler_first.at[i, 'Y'] = y_n
            i += 1

        if i >= 4:
            break
```

In [36]:

```
results_Euler_first
```

Out[36]:

	T	X	Y
0	1	0.559355	-1.49303
1	10	4.41863	-1.57501
2	100	-109900	199786
3	1000	7.58441e+51	1.49805e+52

Неявный метод Эйлера

$$u_{n+1} = u_n(t) + \tau f(t_n, u_{n+1}), 0 \leqslant t \leqslant N-1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau}(x(t+\tau) - x(t)) = 0,1x(t+\tau) + 2y(t+\tau) \\ \frac{1}{\tau}(y(t+\tau) - y(t)) = -2x(t+\tau) + 0,1y(t+\tau) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x(t+\tau)(\frac{1}{\tau} - 0,1) - 2y(t+\tau) = \frac{1}{\tau}x(t) \\ y(t+\tau)(\frac{1}{\tau} - 0,1) + 2x(t+\tau) = \frac{1}{\tau}y(t) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{n+1}(\frac{1}{\tau} - 0,1) - 2y_{n+1} = \frac{1}{\tau}x_n) \\ 2x_{n+1} + y_{n+1}(\frac{1}{\tau} - 0,1) = \frac{1}{\tau}y_n \end{cases}$$

Результат вычислений представлен в таблице: T-точка, x, y - соответствующие координаты.

In [37]:

```
t = 0
h = 0.01
x_n = 1.0
y_n = 1.0

dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
data = {'T': [1, 10, 100, 1000], 'X': ['x', 'x', 'x', 'x'], 'Y': ['y', 'y', 'y
', 'y']}
results_Euler_second = pd.DataFrame(data=data)

i = 0
while True:
        M1 = np.array([[(1/h - 0.1), -2.0], [2.0, (1/h - 0.1)]])
        v1 = np.array([(1/h)*x_n, (1/h)*y_n])
        sol = np.linalg.solve(M1, v1)

        x_n = sol[0]
        y_n = sol[1]

        t += 0.01

        if round(t, 3) == dots[i]:
            #print(i, dots[i], "x=", x_n, " y=", y_n)
            results_Euler_second.at[i, 'X'] = x_n
            results_Euler_second.at[i, 'Y'] = y_n
            i += 1

        if i >= 4:
            break
```

In [38]:

```
results_Euler_second
```

Out[38]:

	T	X	Y
0	1	0.53174	-1.43678
1	10	2.92048	-1.17458
2	100	-434.359	4199.21
3	1000	-7.70809e+34	-1.92982e+34

Метод Эйлера с центральной точкой

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2\tau f(t_n, u_n), 0 \leqslant t \leqslant N-1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} - 0,1 & -2 \\ 2 & \frac{1}{\tau} - 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} x_n \\ \frac{1}{\tau} y_n \end{pmatrix}$$

In [40]:

```
t = 0
h = 0.01
x_prev = 1.0
y_prev = 1.0

dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
data = {'T': [1, 10, 100, 1000], 'X': ['x', 'x', 'x', 'x'], 'Y': ['y', 'y', 'y
', 'y']}
results_Euler_third = pd.DataFrame(data=data)

M1 = np.array([[(1/h - 0.1), -2.0], [2.0, (1/h - 0.1)]])
v1 = np.array([(1/h)*x_prev, (1/h)*y_prev])
solut = np.linalg.solve(M1, v1)

x_cur = solut[0]
y_cur = solut[1]

x_l = []
y_l = []
t_l = []

i = 0
while True:
        x_next = x_prev + 2*h*(0.1*x_cur + 2*y_cur)
        y_next = y_prev + 2*h*(-2*x_cur + 0.1*y_cur)
        x_prev = x_cur
        y_prev = y_cur
        x_cur = x_next
        y_cur = y_next
        t += 0.01

        x_l.append(x_next)
        y_l.append(y_next)
        t_l.append(t)

        if round(t, 3) == dots[i]:
            #print(i, dots[i], "x=", x_next, " y=", y_next)
            results_Euler_third.at[i, 'X'] = x_next
            results_Euler_third.at[i, 'Y'] = y_next
            i += 1

        if i >= 4:
            break
```

In [41]:

```
results_Euler_third
```

Out[41]:

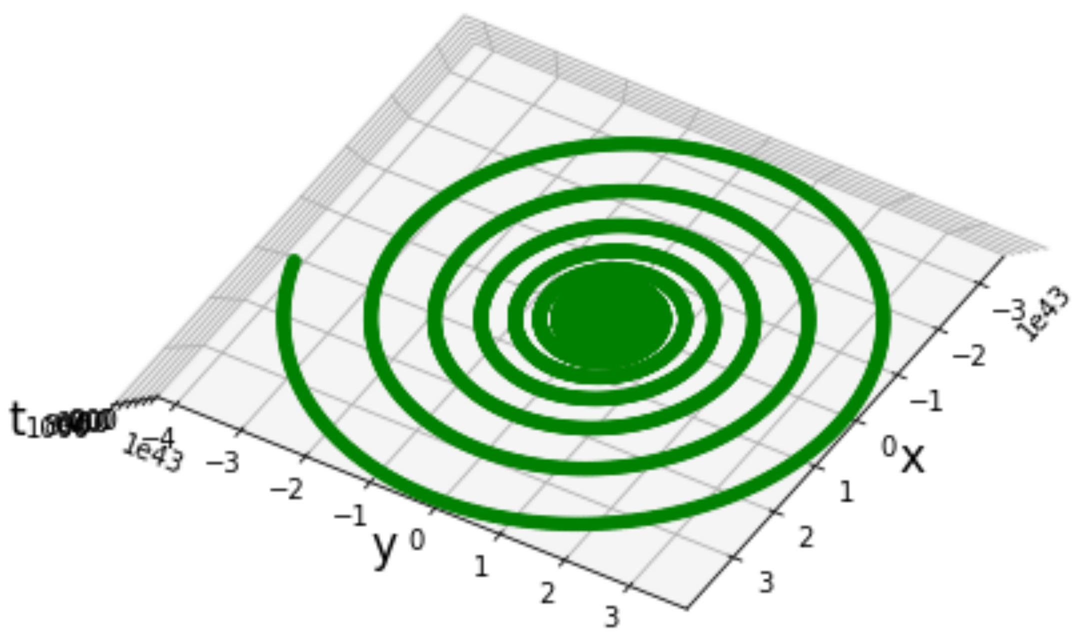
	T	X	Y
0	1	0.516004	-1.47691
1	10	3.56478	-1.45028
2	100	-7525.72	30320.6
3	1000	9.85773e+42	-3.75457e+43

In [42]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(x_l, y_l, t_l, color='green')
plt.show()

#plotly
```



Устойчивость метода Эйлера с центральной точкой:

Для проверки устойчивости решения с помощью метода Эйлера с центральной точкой воспользуемся определением устойчивости задачи, получим следующее соотношение:

$$||Ax - Ay|| \leq ||A|| \cdot ||x - y||,$$
$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 2 \\ -2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

А из линейности исходного уравнения можем сказать, что оно выполнено: ||A|| = C = const

Метод Адамса 3 и 4 порядков

Для решения ОДУ и систем ОДУ существуют *одностадийные методы Адамса* (линейные многошаговые методы). В общем виде методы Адамса могут быть записаны следующим образом:

$$u_{n+1} = u_n + \tau \sum_{j=0}^{k-1} n_j \Delta^j f_i$$

Значительно большее значение в вычислительной практике имеют неявные методы Адамса, которые можно записать как:

$$u_{n+1} = u_n - \tau \sum_{j=0}^{k} \widetilde{\gamma}_j \Delta^j f_{n+1}$$

Первые четыре неявных метода имеют вид:

$$k = 0 : u_{n+1} = u_n + \tau f_{n+1}$$
$$k = 1 : u_{n+1} = u_n + \tau(\frac{1}{2} f_{n+1} + \frac{1}{2} f_n)$$
$$k = 2 : u_{n+1} = u_n + \tau(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1})$$
$$k = 3 : u_{n+1} = u_n + \tau(\frac{9}{24} f_{n+1} + \frac{19}{24} f_n - \frac{5}{24} f_{n-1} + \frac{1}{24} f_{n-2})$$

Нас интересуют методы 3 и 4 порядков аппроксимации.

$$k = 2: Eu_{n+1} = u_n + \tau(\frac{5}{12}Au_{n+1} + \frac{8}{12}Au_n - \frac{1}{12}Au_{n-1})$$

$$(E - \frac{5\tau}{12}A)u_{n+1} = (E + \frac{8}{12}A\tau)u_n - \frac{\tau}{12}Au_{n-1}$$

$$u_{n+1} = (E - \frac{5\tau}{12}A)^{-1}((E + \frac{8}{12}A)\tau u_n - \frac{\tau}{12}Au_{n-1})$$

$$k = 3: Eu_{n+1} = u_n + \tau(\frac{9}{24}Au_{n+1} + \frac{19}{24}Au_n - \frac{5}{24}Au_{n-1} + \frac{1}{24}Au_{n-2})$$

$$(E - \frac{9\tau}{24}A)u_{n+1} = u_n + \frac{19}{24}\tau Au_n - \frac{5}{24}\tau Au_{n-1} + \frac{\tau}{24}u_{n-2}$$

$$u_{n+1} = (E - \frac{9\tau}{24}A)^{-1}(u_n + \frac{19}{24}\tau Au_n - \frac{5}{24}\tau Au_{n-1} + \frac{\tau}{24}u_{n-2})$$

В выводе формат данных представлен в виде данных в точке сначала для метода Адамса порядка 3, потом 4. После этого переходим к следующей точке.

In [31]:

```
h = 0.01
x_0 = 1.0
y_0 = 1.0

dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
data = {'T': [1, 10, 100, 1000], 'X': ['x', 'x', 'x', 'x'], 'Y': ['y', 'y', 'y
', 'y']}
results_Euler_third = pd.DataFrame(data=data)

M1 = np.array([[(1/h - 0.1), -2.0], [2.0, (1/h - 0.1)]])
v1 = np.array([(1/h)*x_0, (1/h)*y_0])
solut1 = np.linalg.solve(M1, v1)

x_1 = solut1[0]
y_1 = solut1[1]

M2 = np.array([[(1/h - 0.1), -2.0], [2.0, (1/h - 0.1)]])
v2 = np.array([(1/h)*x_1, (1/h)*y_1])
solut2 = np.linalg.solve(M2, v2)

x_2 = solut2[0]
y_2 = solut2[1]

M3 = np.array([[(1/h - 0.1), -2.0], [2.0, (1/h - 0.1)]])
v3 = np.array([(1/h)*x_2, (1/h)*y_2])
solut3 = np.linalg.solve(M3, v3)

x_3 = solut3[0]
y_3 = solut3[1]
```

```
#print('t= 0.01', "x=", x_1, " y=", y_1)
#print('t= 0.02', "x=", x_2, " y=", y_2)

# нужно две итерции метода Эйлера, для того чтобы найти u_{n-1} u_{n-2}
# для методов Адамса 3 и 4 порядков соответсвенно

E = np.matrix(((1.0, 0.0), (0.0, 1.0)))
A = np.matrix(((0.1, 2.0), (-2.0, 0.1)))
i=0
t = 0.02

ad3_sol00 = np.array([[x_0], [y_0]])
ad3_sol11 = np.array([[x_1], [y_1]])
ad3_sol22 = np.array([[x_2], [y_2]])

ad4_sol00 = np.array([[x_0], [y_0]])
ad4_sol11 = np.array([[x_1], [y_1]])
ad4_sol22 = np.array([[x_2], [y_2]])
ad4_sol33 = np.array([[0], [0]])

adams3_x = []
adams3_y = []
adams3_t = []

while True:
    ad3_sol22 = (np.linalg.inv(E - 5*h/12 * A)) * ((E + 8*h/12 * A) * ad3_sol1
1 - (h/12*A) * ad3_sol00)
    ad3_sol00 = ad3_sol11
    ad3_sol11 = ad3_sol22

    ad4_sol33 = (np.linalg.inv(E - 9*h/24 * A)) * ((E + 19*h/24 * A)*ad4_sol22
- 5*A*h/24*ad4_sol11 + A*h/24 * ad4_sol00)
    ad4_sol00 = ad4_sol11
    ad4_sol11 = ad4_sol22
    ad4_sol22 = ad4_sol33

    t += 0.01

    adams3_x.append(ad3_sol22[0])
    adams3_y.append(ad3_sol22[1])
    adams3_t.append(t)

    if round(t, 3) == dots[i]:
            print(i, dots[i], "x=", ad3_sol22[0], " y=", ad3_sol22[1])
            print(i, dots[i], "x=", ad4_sol22[0], " y=", ad4_sol22[1])
            i += 1

    if i >= 4:
        break
```

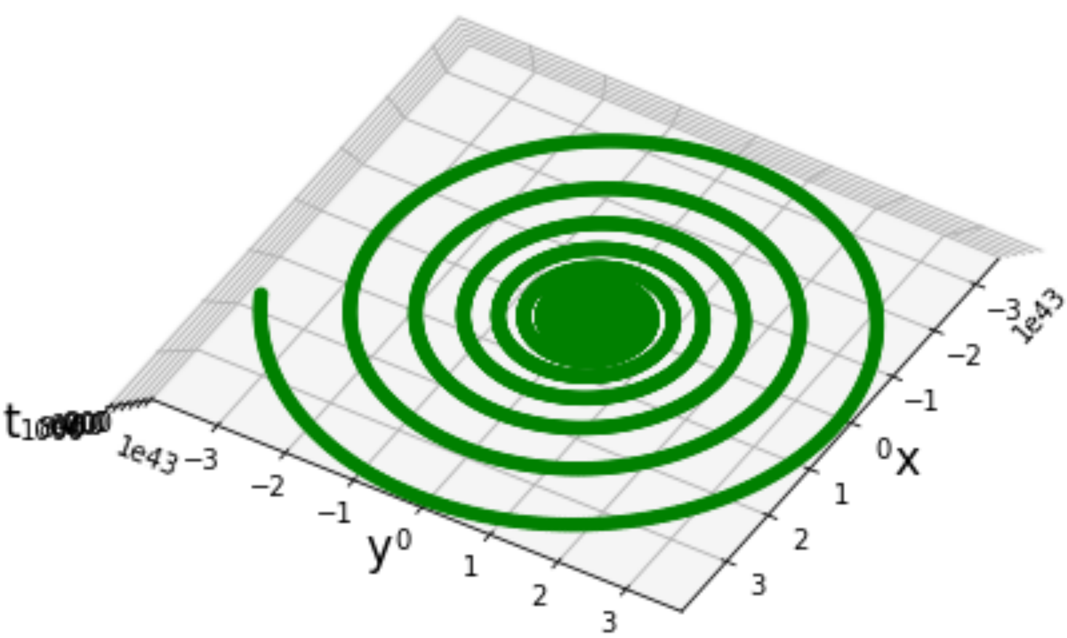
```
0 1.0 x= [[0.57348887]]  y= [[-1.45191731]]
0 1.0 x= [[0.54474753]]  y= [[-1.4642757]]
1 10.0 x= [[3.6133168]]  y= [[-1.298778]]
1 10.0 x= [[3.58944213]]  y= [[-1.37193558]]
2 100.0 x= [[-9091.80700195]]  y= [[29756.85592487]]
2 100.0 x= [[-8500.17931236]]  y= [[29955.0041669]]
3 1000.0 x= [[1.58128646e+43]]  y= [[-3.45481565e+43]]
3 1000.0 x= [[1.51153139e+43]]  y= [[-3.4865075e+43]]
```

In [32]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(adams3_x, adams3_y, adams3_t, color='green')
plt.show()

#plotly
```



Для метода Адамса 3 порядка аппроксимации построили график, описывающий поведение траектории в точке.

Метод Дормана-Принса

Метод Дормана-Принса - один из современных методов решения нежестких систем ОДУ, дающий наилучшие результаты. Он обладает наименьшей погрешностью среди всех схем порядка 8.

In [15]:

```
dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
```

```
dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
data = {'T': [1, 10, 100, 1000], 'X': ['x', 'x', 'x', 'x'], 'Y': ['y', 'y', 'y', 'y']}

h = 0.01
t = 0

A = np.matrix(((0.1, 2.0), (-2.0, 0.1)))

u_n1 = np.array([[0.0], [0.0]])
u_n  = np.array([[1.0], [1.0]])

rungkut_coef = [u_n1, u_n1, u_n1, u_n1, u_n1, u_n1, u_n1, u_n1]

B = np.array([[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[1/18, 1/18, 0, 0, 0, 0, 0, 0],
[1/12, 1/48, 1/16, 0, 0, 0, 0, 0],
[1/8, 1/32, 0, 3/32, 0, 0, 0, 0],
[5/16, 5/16, 0, -75/64, 75/64,0, 0, 0],
[3/8, 3/80, 0, 0, 3/16, 3/20, 0, 0],
[59/400, 29443841/614563906, 0, 0, 77736538/692538347, -28693883/1112000000, 23124283393/1800000000, 0],
[93/200, 16016141/946692911, 0, 0, 61564180/158732637, 22789713/633445777, 545815736/2771057229, -180193667/1043307555],
[0, 0, 0, 0, 0, -59238493/1068277825, 181606676/758867731, 561292985/797845732]])
R = 8

def CompRunKutCoef(v_n): # r - порядок коэффициента, v_n - предыдущее решение
    rungkut_coef.append(A * v_n)

    for i in range(1, R):
        coef_sum = np.array([[0.0], [0.0]])

        #if i == 1:
        #    rungkut_coef[1] = np.array(A * v_n)

        for j in range(1, i):
            #print("B * rung = ", np.array(B[i][j] * rungkut_coef[j]))
            coef_sum += np.array(B[i][j] * rungkut_coef[j])

        #print("coef_sum = ", coef_sum)
        rungkut_coef[i] = A * (v_n + h * coef_sum)
        #print("rungkut_coef = ", rungkut_coef)

#CompRunKutCoef(u_n)
#print(rungkut_coef)

l = 0
while True:
    coef_sum = 0

    CompRunKutCoef(u_n)

    #print(rungkut_coef)

    for k in range(1, R):
        coef_sum += np.array(B[R - 1][k] * rungkut_coef[k - 1])
```

```
    #print(coef_sum)

    u_n1 = u_n + h * np.array(coef_sum)
    u_n  = u_n1

    t += 0.01

    if round(t, 3) == dots[l]:
            print(l, dots[l], "x=", u_n1[0], " y=", u_n1[1])
            #results_Euler_third.at[i, 'X'] = x_next
            #results_Euler_third.at[i, 'Y'] = y_next
            l += 1

    if l >= 4:
        break
```

```
0 1.0 x= [1.47578617]  y= [-0.16353641]
1 10.0 x= [-0.72025726]  y= [-2.18639989]
2 100.0 x= [125.15492192]  y= [-135.78276841]
3 1000.0 x= [-1.89378438e+21]  y= [-7.52734096e+20]
```

B. Метод трапеций

Воспользуемся формулой для метода трапеций:

$$u_{n+1} = u_n + \tau(\frac{f_{n+1} + f_n}{2})$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 0.1\frac{\tau}{2} & -2 \\ 2 & 1 - 0.1\frac{\tau}{2} \end{pmatrix}^{-1} (E + \frac{\tau}{2}A) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$\text{где} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0.1 & 2 \\ -2 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Результат также увидим в последующей таблице

In [43]:

```
h = 0.01
E = np.array([[1.0, 0], [0, 1.0]])
A = np.array([[0.1, 2], [-2, 0.1]])
B = (np.linalg.inv(E - h / 2 * A)) * (E + h / 2 * A)
B = [[1.00080022, 0.02001801], [-0.02001801, 1.00080022]]
t = 0
x_n = 1.0
y_n = 1.0

x_list = []
y_list = []
t_list = []
dots = [1.0, 10.0, 100.0, 1000.0]
data = {'T': [1, 10, 100, 1000], 'X': ['x', 'x', 'x', 'x'], 'Y': ['y', 'y', 'y
', 'y']}
results_trapeze = pd.DataFrame(data=data)

i = 0
while i != 4:
        x_n_1 = B[0][0] * x_n + B[0][1] * y_n
        y_n_1 = B[1][0] * x_n + B[1][1] * y_n
        x_n = x_n_1
        y_n = y_n_1

        t += 0.01

        x_list.append(x_n)
        y_list.append(y_n)
        t_list.append(t)

        if round(t, 3) == dots[i]:
            results_trapeze.at[i, 'X'] = x_n
            results_trapeze.at[i, 'Y'] = y_n
            i += 1
```

In [44]:

```
results_trapeze
```

Out[44]:

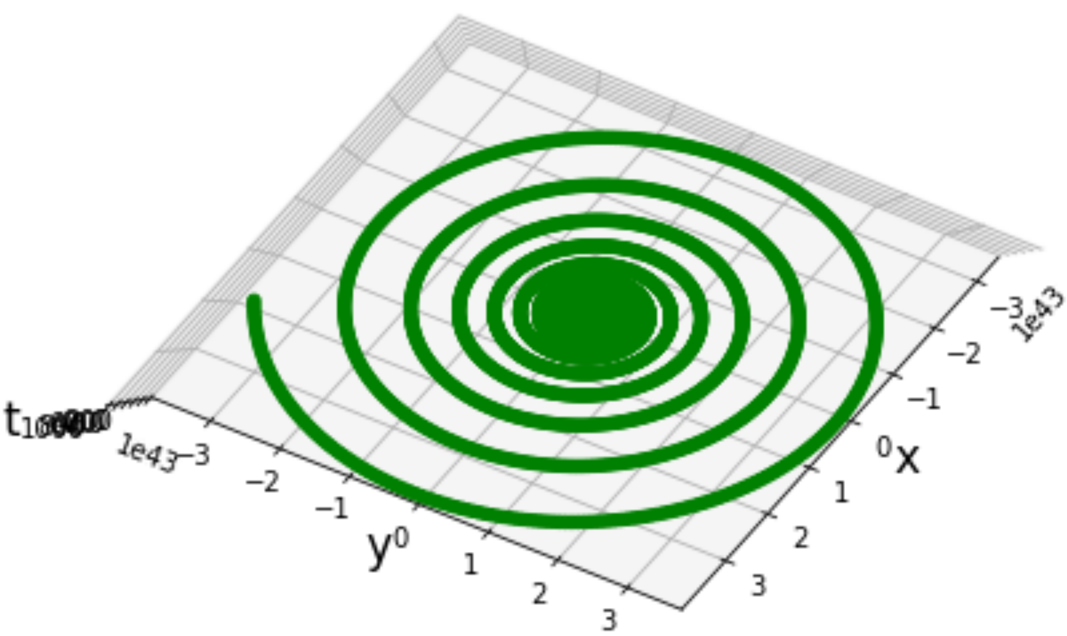
	T	X	Y
0	1	0.545107	-1.46479
1	10	3.59147	-1.36984
2	100	-8694.38	29879.8
3	1000	1.72267e+43	-3.3464e+43

In [34]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(np.array(x_list), np.array(y_list), np.array(t_list), color='green'
)
plt.show()

#plotly
```



E. Устойчивость метода Эйлера с центральной точкой (общий вид).

Расчетная формула метода получается из аппроксимации производной в левой части уравнения

$$y' = ay, y(t_0) = y_0$$

в точнке t_i разностью "назад" и имеет вид:

$$u_{n+1} = u_{n-1} + 2hau_n,$$

получаем разностное уравнение 2-го порядка:

$$u_{n+1} - 2hau_n u_n - y_{n-1} = 0$$

. Для исследования метода на неусточивость подставляем в разностное уравнение частное решение $u_n = \mu^n$. В результате чего получаем характеристическое уравнение и для устойчивости метода требуется, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы.

Составляем характеристическое уравнение:

$$\mu^2 - 2ah\mu - 1 = 0$$

Его корни:

$$\mu_{1,2} = ah \pm \sqrt{a^2h^2 + 1}$$

Видно, что один из корней $|\mu_2| > 1$ при a<0, что показывает неустойчивость процесса при любых значениях ah. Следовательно, множество абсолютной устойчивости в данном случае всего.

Задача №2

Нелинейная система уравнений.

Модель свертывания крови. Система ОДУ, описывающая динамику образования основных метаболитов в реакции свертывания крови:

$$\frac{du_1}{dt} = K_1 u_1 u_2 (1 - U_1) \frac{1 + K_2 u_1}{1 + K_3 u_3} - u_1,$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_1 - K_4 u_2$$

$$\frac{du_3}{dt} = K_5 u_1^2 - K_6 u_3$$

Особые точки рассматриваемой системы определяются корнями следующего полинома:

$$f(u_1) = u_1 (\frac{K_1 K_2}{K_4} u_1^3 + (\frac{K_1}{K_4}(1 - K_2) + \frac{K_3 K_5}{K_6}) u_1^2 - \frac{K_1}{K_4} u_1 + 1)$$

В системе всегда существует нулевая особая точка. Она устойчива при любых значениях параметров. Кроме того, у рассматриваемого полинома всегда есть один отрицательный корень. Соответственно, количество его положительных корней, определяющих особые точки системы, может меняться в зависимости от параметров модели от нуля до двух.
Удобно рассматривать поведение системы при изменении параметра K_2, определяющего скорость наработки активатора и параметра K_6,определяющего скорость инактивации ингибитора, поскольку от K_2 зависит только первое уравнение системы, от K_6 - только третье.
Построим бифуркационную диаграмму в диапазоне изменения параметра K_6 от 0 до 0,2 при фиксированном значении K_2. Используемые в модели константы приведены в табл.1.
До значения $K_6 = 0,0173$ в системе существует единственная особая точка - нулевая. При $K_6 > 0,00173$ рождаются еще две особые точки. Первая из них является неустойчивой (при $K_6 < 0,193$ - это седло-узел, при $K_6 > 0,193$ - это седло-фокус). При увеличении значения параметра K_6 происходит уменьшение соответствующего значения $u_{1\text{ст}}$. Вторая особая точка, являющаяся неустойчивой при малых значениях параметра K_6 в результате бифуркации Хопфа становится устойчивой ($K_6 = 0,0692)$. При данном значении параметра K_2 вблизи бифуркации Хопфа в рассматриваемой системе уравнений происходит бифуркация рождения устойчивого предельного цикла из петли сепаратриссы (осевой линии) седло-узла.
Провести расчеты на интервале времени $0 < t <= 20$ методами Рунге-Кутты первого, второго, третьего и четвертого порядка аппроксимации. Исследуйте зависимость численного решения от шага интегрирования при различных значениях параметра $K_6 = 0,0173, 0,018, 0,019, 0,02$

Решение:

для нахождения начальных точек использовались первые три уравнения и факт о том, что в системе всегда существует нулевая особая точка, тогда с помощью Wolphram Alpha были посчитаны начальные условия для каждого значения параметра K_6:

K_6	**0.0173**	**0.018**	**0.019**	**0.02**
x_0	$\frac{173}{14790}$	$\frac{6}{493}$	$\frac{19}{1497}$	$\frac{20}{1479}$
y_0	$\frac{17300}{128673}$	$\frac{2000}{14297}$	$\frac{19000}{128673}$	$\frac{20000}{128673}$
z_0	$\frac{768947777105}{66425644607148}$	$\frac{6368013675}{205017421627}$	$\frac{982186905175}{16606411151787}$	$\frac{1453415530175}{16606411151787}$

In [26]:

```
k1 = 6.85
k2 = 11
k3 = 2.36
k4 = 0.087
k5 = 17
k6 = 0.0173

coordinates = [[173/14790, 17300/128673, 768947777105/66425644607148], [6/493,
2000/14297, 6368013675/205017421627],
               [19/1497, 19000/128673, 982186905175/16606411151787], [20/1479,
20000/128673, 1453415530175/16606411151787]]

H = [0.01, 0.1, 0.5, 1.0]
```

```
K6 = [0.0173, 0.018, 0.019, 0.02]

t = 0

data = {'Coordinates': ['x', 'y', 'z'], 'h1': ['x', 'x', 'x'], 'h2': ['y', 'y'
, 'y'], 'h3': ['y', 'y', 'y'], 'h4': ['y', 'y', 'y']}
results_k6_1_RC_1 = pd.DataFrame(data=data)
data = {'Coord': ['x', 'y', 'z'], 'h1': ['x', 'x', 'x'], 'h2': ['y', 'y', 'y']
, 'h3': ['y', 'y', 'y'], 'h4': ['y', 'y', 'y']}
results_k6_2_RC_1 = pd.DataFrame(data=data)
data = {'Coord': ['x', 'y', 'z'], 'h1': ['x', 'x', 'x'], 'h2': ['y', 'y', 'y']
, 'h3': ['y', 'y', 'y'], 'h4': ['y', 'y', 'y']}
results_k6_3_RC_1 = pd.DataFrame(data=data)
data = {'Coord': ['x', 'y', 'z'], 'h1': ['x', 'x', 'x'], 'h2': ['y', 'y', 'y']
, 'h3': ['y', 'y', 'y'], 'h4': ['y', 'y', 'y']}
results_k6_4_RC_1 = pd.DataFrame(data=data)

x_n = coordinates[0][0]
y_n = coordinates[0][1]
z_n = coordinates[0][2]

t = 0
h0 = H[0]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_1_RC_1.at[0, 'h1'] = x_n
        results_k6_1_RC_1.at[1, 'h1'] = y_n
        results_k6_1_RC_1.at[2, 'h1'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[1]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_1_RC_1.at[0, 'h2'] = x_n
        results_k6_1_RC_1.at[1, 'h2'] = y_n
        results_k6_1_RC_1.at[2, 'h2'] = z_n
        i += 1
        break
```

```
t = 0
h = H[2]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_1_RC_1.at[0, 'h3'] = x_n
        results_k6_1_RC_1.at[1, 'h3'] = y_n
        results_k6_1_RC_1.at[2, 'h3'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[3]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_1_RC_1.at[0, 'h4'] = x_n
        results_k6_1_RC_1.at[1, 'h4'] = y_n
        results_k6_1_RC_1.at[2, 'h4'] = z_n
        i += 1
        break

results_k6_1_RC_1
```

Out[26]:

	Coordinates	h1	h2	h3	h4
0	x	0.000225314	2.1895e-11	9.52776e-23	4.03037e-67
1	y	0.0727191	0.0127449	0.00215146	0.000348457
2	z	0.0269121	0.0190355	0.0134476	0.00948559

In [27]:

```
k1 = 6.85
k2 = 11
k3 = 2.36
k4 = 0.087
```

```
k4 = 0.087
k5 = 17
k6 = 0.018

coordinates = [[173/14790, 17300/128673, 768947777105/66425644607148], [6/493,
2000/14297, 6368013675/205017421627],
               [19/1497, 19000/128673, 982186905175/16606411151787], [20/1479,
20000/128673, 1453415530175/16606411151787]]

H = [0.01, 0.1, 0.5, 1.0]
K6 = [0.0173, 0.018, 0.019, 0.02]
t = 0

data = {'Coordinates': ['x', 'y', 'z'], 'h1': ['x', 'x', 'x'], 'h2': ['y', 'y'
, 'y'], 'h3': ['y', 'y', 'y'], 'h4': ['y', 'y', 'y']}
results_k6_2_RC_1 = pd.DataFrame(data=data)

x_n = coordinates[1][0]
y_n = coordinates[1][1]
z_n = coordinates[1][2]
t = 0
h0 = H[0]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_2_RC_1.at[0, 'h1'] = x_n
        results_k6_2_RC_1.at[1, 'h1'] = y_n
        results_k6_2_RC_1.at[2, 'h1'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[1]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_2_RC_1.at[0, 'h2'] = x_n
        results_k6_2_RC_1.at[1, 'h2'] = y_n
        results_k6_2_RC_1.at[2, 'h2'] = z_n
        i += 1
        break
```

```
t = 0
h = H[2]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_2_RC_1.at[0, 'h3'] = x_n
        results_k6_2_RC_1.at[1, 'h3'] = y_n
        results_k6_2_RC_1.at[2, 'h3'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[3]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_2_RC_1.at[0, 'h4'] = x_n
        results_k6_2_RC_1.at[1, 'h4'] = y_n
        results_k6_2_RC_1.at[2, 'h4'] = z_n
        i += 1
        break

results_k6_2_RC_1
```

Out[27]:

	Coordinates	h1	h2	h3	h4
0	x	0.000318285	3.88217e-11	1.84191e-22	2.7049e-66
1	y	0.0782849	0.0137502	0.00232117	0.000375943
2	z	0.0424574	0.0296131	0.0206267	0.0143436

In [28]:

```
k1 = 6.85
k2 = 11
k3 = 2.36
k4 = 0.087
k5 = 17
```

```
k5 = 17
k6 = 0.019

coordinates = [[173/14790, 17300/128673, 768947777105/66425644607148], [6/493,
2000/14297, 6368013675/205017421627],
               [19/1497, 19000/128673, 982186905175/16606411151787], [20/1479,
20000/128673, 1453415530175/16606411151787]]

H = [0.01, 0.1, 0.5, 1.0]
K6 = [0.0173, 0.018, 0.019, 0.02]
t = 0

data = {'Coordinates': ['x', 'y', 'z'], 'h1': ['x', 'x', 'x'], 'h2': ['y', 'y'
, 'y'], 'h3': ['y', 'y', 'y'], 'h4': ['y', 'y', 'y']}
results_k6_3_RC_1 = pd.DataFrame(data=data)

x_n = coordinates[2][0]
y_n = coordinates[2][1]
z_n = coordinates[2][2]
t = 0
h0 = H[0]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_3_RC_1.at[0, 'h1'] = x_n
        results_k6_3_RC_1.at[1, 'h1'] = y_n
        results_k6_3_RC_1.at[2, 'h1'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[1]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_3_RC_1.at[0, 'h2'] = x_n
        results_k6_3_RC_1.at[1, 'h2'] = y_n
        results_k6_3_RC_1.at[2, 'h2'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
```

```
h = H[2]


while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_3_RC_1.at[0, 'h3'] = x_n
        results_k6_3_RC_1.at[1, 'h3'] = y_n
        results_k6_3_RC_1.at[2, 'h3'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[3]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_3_RC_1.at[0, 'h4'] = x_n
        results_k6_3_RC_1.at[1, 'h4'] = y_n
        results_k6_3_RC_1.at[2, 'h4'] = z_n
        i += 1
        break

results_k6_3_RC_1
```

Out[28]:

	Coordinates	h1	h2	h3	h4
0	x	0.000264901	2.90328e-11	1.35564e-22	1.94745e-66
1	y	0.0795236	0.013945	0.00235406	0.000381271
2	z	0.0618504	0.0422826	0.028863	0.0196662

In [29]:

```
k1 = 6.85
k2 = 11
k3 = 2.36
k4 = 0.087
k5 = 17
k6 = 0.02
```

```
k6 = 0.02

coordinates = [[173/14790, 17300/128673, 768947777105/66425644607148], [6/493,
2000/14297, 6368013675/205017421627],
               [19/1497, 19000/128673, 982186905175/16606411151787], [20/1479,
20000/128673, 1453415530175/16606411151787]]

H = [0.01, 0.1, 0.5, 1.0]
K6 = [0.0173, 0.018, 0.019, 0.02]
t = 0

data = {'Coordinates': ['x', 'y', 'z'], 'h1': ['x', 'x', 'x'], 'h2': ['y', 'y'
, 'y'], 'h3': ['y', 'y', 'y'], 'h4': ['y', 'y', 'y']}
results_k6_4_RC_1 = pd.DataFrame(data=data)

x_n = coordinates[3][0]
y_n = coordinates[3][1]
z_n = coordinates[3][2]
t = 0
h0 = H[0]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_4_RC_1.at[0, 'h1'] = x_n
        results_k6_4_RC_1.at[1, 'h1'] = y_n
        results_k6_4_RC_1.at[2, 'h1'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[1]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_4_RC_1.at[0, 'h2'] = x_n
        results_k6_4_RC_1.at[1, 'h2'] = y_n
        results_k6_4_RC_1.at[2, 'h2'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[2]
```

```python
while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_4_RC_1.at[0, 'h3'] = x_n
        results_k6_4_RC_1.at[1, 'h3'] = y_n
        results_k6_4_RC_1.at[2, 'h3'] = z_n
        i += 1
        break

t = 0
h = H[3]

while True:
    x_n_1 = x_n + h*(k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n)
    y_n_1 = y_n + h*(x_n - k4*y_n)
    z_n_1 = z_n + h*(k5*(x_n**2)-k6*z_n)

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1
    z_n = z_n_1
    t += h
    if round(t, 3) == 20:
        results_k6_4_RC_1.at[0, 'h4'] = x_n
        results_k6_4_RC_1.at[1, 'h4'] = y_n
        results_k6_4_RC_1.at[2, 'h4'] = z_n
        i += 1
        break
```

In [30]:

```python
def Runge_Cutta_1(x_n, y_n, z_n):
    K0x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K0y = x_n - k4*y_n
    K0z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n_1 = x_n + h*1*K0x
    y_n_1 = y_n + h*1*K0y
    z_n_1 = z_n + h*1*K0z

    return(x_n_1, y_n_1, z_n_1)

def Runge_Cutta_2(x_n, y_n, z_n):
    K0x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K0y = x_n - k4*y_n
    K0z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n = x_n + h*1*K0x
    y_n = y_n + h*1*K0y
```

```
    y_n = y_n + h*1*K0y
    z_n = z_n + h*1*K0z

    K1x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K1y = x_n - k4*y_n
    K1z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n_1 = x_n + h*0.5*K1x
    y_n_1 = y_n + h*0.5*K1y
    z_n_1 = z_n + h*0.5*K1z

    return(x_n_1, y_n_1, z_n_1)

def Runge_Cutta_3(x_n, y_n, z_n):
    K0x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K0y = x_n - k4*y_n
    K0z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n = x_n + h*1*K0x
    y_n = y_n + h*1*K0y
    z_n = z_n + h*1*K0z

    K1x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K1y = x_n - k4*y_n
    K1z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n = x_n + h*(0*K1x + K1x)
    y_n = y_n + h*(0*K1y + K1y)
    z_n = z_n + h*(0*K1z + K1z)

    K2x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K2y = x_n - k4*y_n
    K2z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n_1 = x_n + h*(1/6*K0x +2/3*K1x+1/6*K2x)
    y_n_1 = y_n + h*(1/6*K0y +2/3*K1y+1/6*K2y)
    z_n_1 = z_n + h*(1/6*K0z +2/3*K1z+1/6*K2z)

    return(x_n_1, y_n_1, z_n_1)

def Runge_Cutta_4(x_n, y_n, z_n):
    K0x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K0y = x_n - k4*y_n
    K0z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n = x_n + h*1*K0x
    y_n = y_n + h*1*K0y
    z_n = z_n + h*1*K0z

    K1x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K1y = x_n - k4*y_n
    K1z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    x_n = x_n + h*(0*K0x + K1x)
    y_n = y_n + h*(0*K0y + K1y)
    z_n = z_n + h*(0*K0z + K1z)
    ''
    K2x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
```

```
    K2y = x_n - k4*y_n
    K2z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    #для K4
    x_n = x_n + h*(0*K0x + 0*K1x + 1*K2x)
    y_n = y_n + h*(0*K0y + 0*K1y + 1*K2y)
    z_n = z_n + h*(0*K0z + 0*K1z + 1*K2z)

    K3x = k1*x_n*y_n*(1-x_n)*(1+k2*x_n)/(1+k3*z_n)-x_n
    K3y = x_n - k4*y_n
    K3z = k5*(x_n**2)-k6*z_n

    #Для подсчета РК 4 порядка:
    x_n_1 = x_n + h*(1/6*K0x + 2/6*K1x + 2/6*K2x + 1/6*K3x)
    y_n_1 = y_n + h*(1/6*K0y + 2/6*K1y + 2/6*K2y + 1/6*K3y)
    z_n_1 = z_n + h*(1/6*K0z + 2/6*K1z + 2/6*K2z + 1/6*K3z)

    return(x_n_1, y_n_1, z_n_1)
```

In [31]:

```
print(results_k6_1_RC_1)
print(results_k6_2_RC_1)
print(results_k6_3_RC_1)
print(results_k6_4_RC_1)
```

	Coordinates	h1	h2	h3	h4
0	x	0.000225314	2.1895e-11	9.52776e-23	4.03037e-67
1	y	0.0727191	0.0127449	0.00215146	0.000348457
2	z	0.0269121	0.0190355	0.0134476	0.00948559

	Coordinates	h1	h2	h3	h4
0	x	0.000318285	3.88217e-11	1.84191e-22	2.7049e-66
1	y	0.0782849	0.0137502	0.00232117	0.000375943
2	z	0.0424574	0.0296131	0.0206267	0.0143436

	Coordinates	h1	h2	h3	h4
0	x	0.000264901	2.90328e-11	1.35564e-22	1.94745e-66
1	y	0.0795236	0.013945	0.00235406	0.000381271
2	z	0.0618504	0.0422826	0.028863	0.0196662

	Coordinates	h1	h2	h3	h4
0	x	0.000985495	3.01721e-10	2.02135e-21	2.19501e-63
1	y	0.0989004	0.0176325	0.00297656	0.000482092
2	z	0.0872547	0.0584774	0.0391198	0.0261167

Вывод:

Сверху можно увидеть 4 таблички для 4 разных параметров K_6 (K_6 = [0.0173, 0.018, 0.019, 0.02]) посчитанные значения x, y, z при разных шагах (h = [0.01, 0.1, 0.5, 1.0]). Из полученных данных можно сделать вывод, что, чем больше шаг, тем больше погрешность.

Задача №3

Особые точки и особые траектории.

Условие:

Для взаимоотношений "хищник-жертва" или "паразит-хозяин" модель Лотки-Вольтерры имеет вид:

$$\frac{dy_1}{dt} = \varepsilon_1 y_1(1 - a_{11}y_1 - a_{12}y_2),$$
$$\frac{dy_2}{dt} = \varepsilon_2 y_2(c + a_{21}y_1 - a_{22}y_2),$$

где y_1 -плотность популяции хозяев, а y_2 -плотность популяции паразитов. Все параметры задачи положительны, у системы имеется четыре особые точки, причем точка (0,0) является особой. Определить характер и устойчивость этих особых точек. Исследовать поведение фазовых траекторий для системы ОДУ вблизи "ненулевых" особых точек с помощью двух методов Рунге-Кутты (первого и четвертого порядка аппроксимации). Объяснить поведение фазовых траекторий, значения параметров $\varepsilon_1 = 2, \varepsilon_2 = 0,5, a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{21} = 2, a_{22} = 5.$

Решение:

Найдем четыре особые точки. Если в положении равновесия $f(x_0) = 0$, можем рассмотреть систему из двух уравнений для нахождения особых точек, подставив константы в первоначальную модель:

$$\begin{cases} 2x(1 - x - 2y) = 0 \\ \frac{1}{2}y(c + 2x - 5y) = 0 \end{cases}$$

Пусть x = 0, тогда $y = 0$ и $y = \frac{c}{2}$ Отсюда получаем две точки: $(0; \frac{c}{5})$ и $(0; 0)$
Теперь пусть y = 0, получаем точки $(1; 0)$. И еще одна точка $(\frac{5}{9} - \frac{2c}{9}; \frac{c}{9} + \frac{2}{9})$.

Матрица Якоби в общем виде выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} f_x' & f_y' \\ g_x' & g_y' \end{pmatrix}$$

Для нашей задачи:

$$A = \begin{pmatrix} 2 - 4x - 4y & -4x \\ y & \frac{c}{2} + x - 5y \end{pmatrix}$$

Рассмотрим **точку 1: (0,0)**, подставим в матрицу A:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{c}{2} \end{pmatrix}$$

Характеристические корни: $\lambda_1 = c, \lambda_2 = \frac{c}{2}$
Считая, что $\lambda_1 > 0$ и $\lambda_2 = c$, а $c > 0$ (по условию), то два характеристических корня действительные положительные - это неустойчивый узел (параболы).

Рассмотрим **точку 2: (1,0)**, подставим в матрицу A:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 0 & \frac{c}{2} + 1 \end{pmatrix}$$

Характеристические корни: $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \frac{c+2}{2}$
Считая, что $\lambda_1 < 0$ и $\lambda_2 = \frac{c+2}{2} > 0$, т.к $c > 0$ (по условию), то два характеристических корня действительные разных знаков - это седло (гиперболы).

Рассмотрим **точку 3: (0,$\frac{c}{5}$)**, подставим в матрицу А:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4c}{5} & 0 \\ \frac{c}{5} & \frac{c}{2} - \text{c} \end{pmatrix}$$

Характеристические корни: $\lambda_1 = -\frac{c}{2}, \lambda_2 = \frac{-4c+10}{5}$
Считая, что $\lambda_1 < 0, \text{если} c > 10/4, \text{и} \lambda_1 > 0, \text{если} c < 10/4$ и $\lambda_2 = \frac{-4c+10}{5} < 0$, т.к $c > 0$ (по условию). В случае, когда два характеристических корня действительные разных знаков - это седло (гиперболы), когда два характеристических корня действительные отрицательные - это устойчивый узел (параболы).

Рассмотрим **точку 4:** $(\frac{5}{9} - \frac{2c}{9}; \frac{c}{9} + \frac{2}{9})$, подставим в матрицу А:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 - \frac{4}{9}(7-c) & -\frac{4}{9}(5-2c) \\ \frac{1}{9}(c+2) & \frac{c}{2} - \frac{7c}{9} - \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

Характеристические корни: $\lambda_1 = \frac{1}{12}(-\sqrt{3}\sqrt{11c^2 - 12c - 20} + c - 10)$,
$\lambda_2 = \frac{1}{12}(\sqrt{3}\sqrt{11c^2 - 12c - 20} + c - 10)$
В зависимости от константы можем получить различные значения характеристических корней: как с положительной, так и с отрицательной мнимой частями. От этого будет зависеть неустойчив или, соответственно, устойчив узел.

Метод Рунге-Кутта 1 порядка (метод Эйлера)

In [43]:

```
initial_dots = [[1.1, 0.1], [0.95, 0.05], [1.5, 0.2], [0.1, c/5+0.1], [0.3, c/
5+0.3], [1, c/5+1], [5/9-2*c/9+0.1, c/9+2/9+0.1], [5/9-2*c/9+0.4, c/9+2/9+0.4]
, [5/9-2*c/9+0.7, c/9+2/9+0.7]]
x_list = [[],[],[],[],[],[],[],[],[]]
y_list = [[],[],[],[],[],[],[],[],[]]
t = 0
h = 0.01
c = 10 #пусть
tlst = []

for i in range(len(initial_dots)):
    x_n = initial_dots[i][0]
    y_n = initial_dots[i][1]
    while True:
        x_list[i].append(x_n)
        y_list[i].append(y_n)
        tlst.append(t)

        x_n_1 = x_n + h*(2*x_n*(1-x_n-2*y_n))
        y_n_1 = y_n + h*(0.5*y_n*(c+2*x_n-5*y_n))

        x_n = x_n_1
        y_n = y_n_1

        t += 0.1

        if round(t, 3) == 10000:
            print(i, "x =", x_n, " y =", y_n)
            break
    t=0
```

```
0 x = 4e-323  y = 2.0000000000000044
1 x = 4e-323  y = 1.9999999999999978
2 x = 4e-323  y = 2.0000000000000044
3 x = 4e-323  y = 2.0000000000000044
4 x = 4e-323  y = 2.0000000000000044
5 x = 4e-323  y = 2.0000000000000044
6 x = -4e-323  y = 1.9999999999999978
7 x = -4e-323  y = 1.9999999999999978
8 x = -4e-323  y = 1.9999999999999978
```

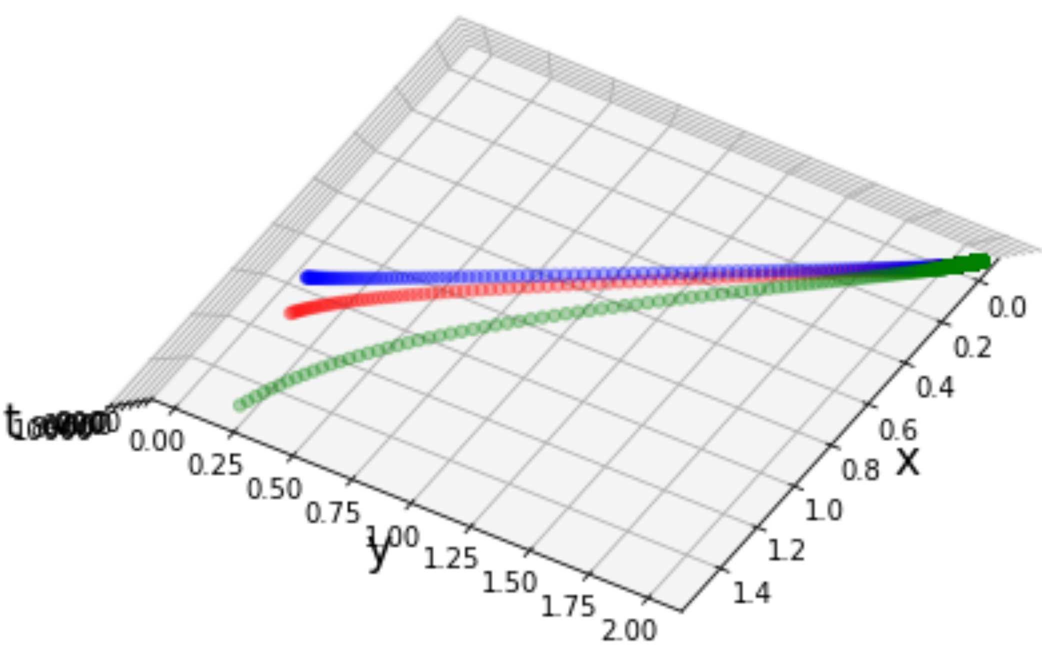
In [48]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

POINTS_F_NUM = 100000

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(np.array(x_list[0]), np.array(y_list[0]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='red')
ax.scatter(np.array(x_list[1]), np.array(y_list[1]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='blue')
ax.scatter(np.array(x_list[2]), np.array(y_list[2]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='green')
plt.show()

#plotly
```



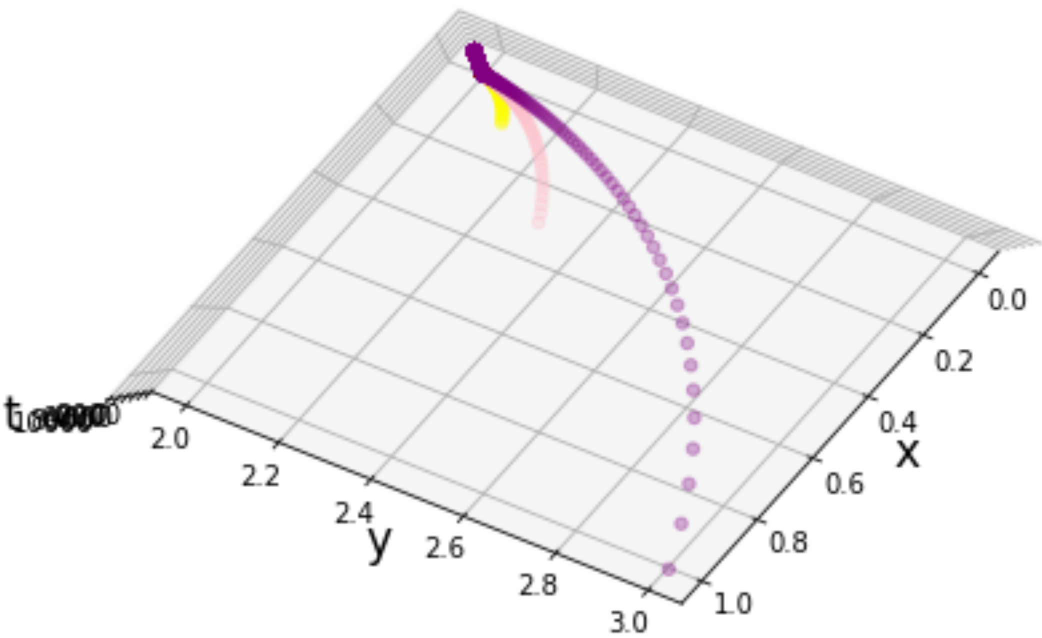
In [49]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

POINTS_F_NUM = 100000

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(np.array(x_list[3]), np.array(y_list[3]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='yellow')
ax.scatter(np.array(x_list[4]), np.array(y_list[4]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='pink')
ax.scatter(np.array(x_list[5]), np.array(y_list[5]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='purple')
plt.show()

#plotly
```



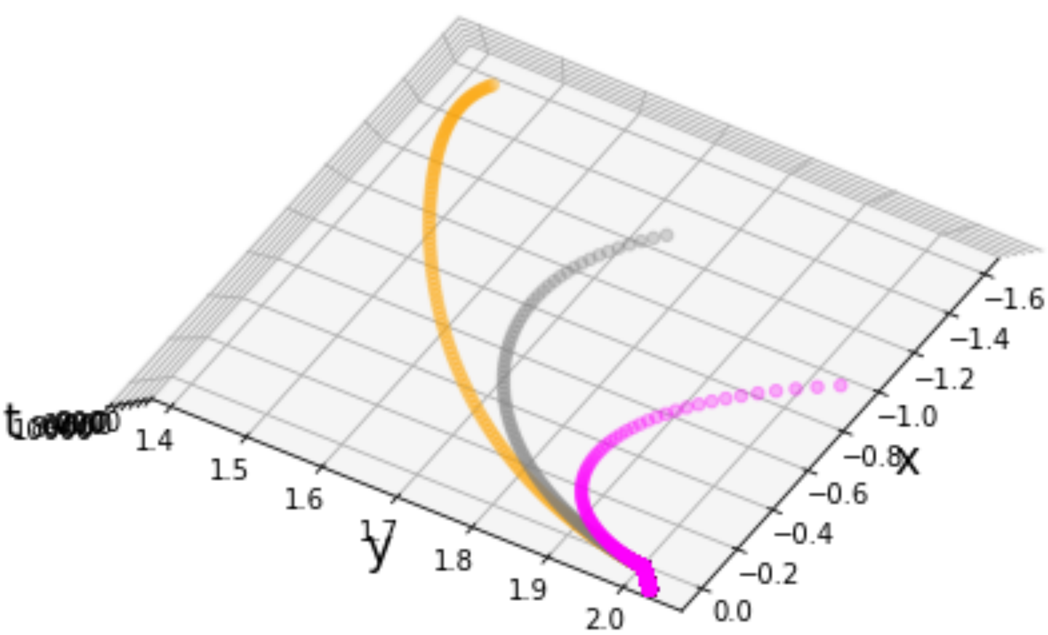
In [50]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

POINTS_F_NUM = 100000

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(np.array(x_list[6]), np.array(y_list[6]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='orange')
ax.scatter(np.array(x_list[7]), np.array(y_list[7]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='grey')
ax.scatter(np.array(x_list[8]), np.array(y_list[8]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='magenta')
plt.show()

#plotly
```



** Метод Рунге-Кутта 4 порядка**

$$u_{n+1} = u_n + \tau(\gamma_1 * K_1 + \gamma_2 * K_2 + \gamma_3 * K_3 + \gamma_4 * K_4)$$
$$K_1 = f(t_n, u_n)$$
$$K_2 = f(t_n + \alpha_2\tau, u_n + \tau\beta_{21}K_1)$$
$$K_3 = f(t_n + \alpha_3\tau, u_n + \tau(\beta_{31}K_1 + \beta_{32}K_2))$$
$$K_4 = f(t_n + \alpha_4\tau, u_n + \tau(\beta_{41}K_1 + \beta_{42}K_2 + \beta_{43}K_3))$$

In [52]:

```
initial_dots = [[1.1, 0.1], [0.95, 0.05], [1.5, 0.2], [0.1, c/5+0.1], [0.3, c/
5+0.3], [1, c/5+1], [5/9-2*c/9+0.9, c/9+2/9+0.9], [5/9-2*c/9+1.2, c/9+2/9+1.2]
, [5/9-2*c/9+0.7, c/9+2/9+0.7]]
```

```
x_list = [[],[],[],[],[],[],[],[],[]]
y_list = [[],[],[],[],[],[],[],[],[]]

def Runge_Cutta_4(x_n, y_n):
    #для K1
    x_n_1 = x_n + h*(2*x_n*(1-x_n-2*y_n))
    y_n_1 = y_n + h*(0.5*y_n*(c+2*x_n-2*y_n))

    x_n = x_n_1
    y_n = y_n_1

    K1x = 2*x_n*(1-x_n-2*y_n)
    K1y = 0.5*y_n*(c+2*x_n-2*y_n)

    #для K2
    x_n = x_n + h*0.5*K1x
    y_n = y_n + h*0.5*K1y

    K2x = 2*x_n*(1-x_n-2*y_n)
    K2y = 0.5*y_n*(c+2*x_n-2*y_n)

    #для K3
    x_n = x_n + h*(0*K1x + K2x)
    y_n = y_n + h*(0*K1y + K2y)

    K3x = 2*x_n*(1-x_n-2*y_n)
    K3y = 0.5*y_n*(c+2*x_n-2*y_n)

    #для K4
    x_n = x_n + h*(0*K1x + 0*K2x + 1*K3x)
    y_n = y_n + h*(0*K1y + 0*K2y + 1*K3y)

    K4x = 2*x_n*(1-x_n-2*y_n)
    K4y = 0.5*y_n*(c+2*x_n-2*y_n)

    #Для подсчета РК 4 порядка:
    x_n_1 = x_n + h*(1/6*K1x + 2/6*K2x + 2/6*K3x + 1/6*K4x)
    y_n_1 = y_n + h*(1/6*K1y + 2/6*K2y + 2/6*K3y + 1/6*K4y)

    return(x_n_1, y_n_1)

t=0
h=0.01
c = 2 #пусть

tlst = []

for i in range(len(initial_dots)):
    x_n = initial_dots[i][0]
    y_n = initial_dots[i][1]

    while True:
        x_list[i].append(x_n)
        y_list[i].append(y_n)
        tlst.append(t)

        ans = Runge_Cutta_4(x_n, y_n)
```

```
        x_n = ans[0]

        y_n = ans[1]

        t += 0.1

        if round(t, 3) == 1000:
            print(i, "x =", x_n, " y =", y_n)
            break
    t=0
```

```
0 x = 1.2e-322  y = 1.0000000000000107
1 x = 1.2e-322  y = 0.9999999999999974
2 x = 1.2e-322  y = 1.0000000000000107
3 x = 1.2e-322  y = 0.9999999999999946
4 x = 1.2e-322  y = 0.9999999999999974
5 x = 1.2e-322  y = 1.0000000000000109
6 x = 1.2e-322  y = 1.0000000000000107
7 x = 1.2e-322  y = 1.0000000000000109
8 x = 1.2e-322  y = 1.0000000000000107
```

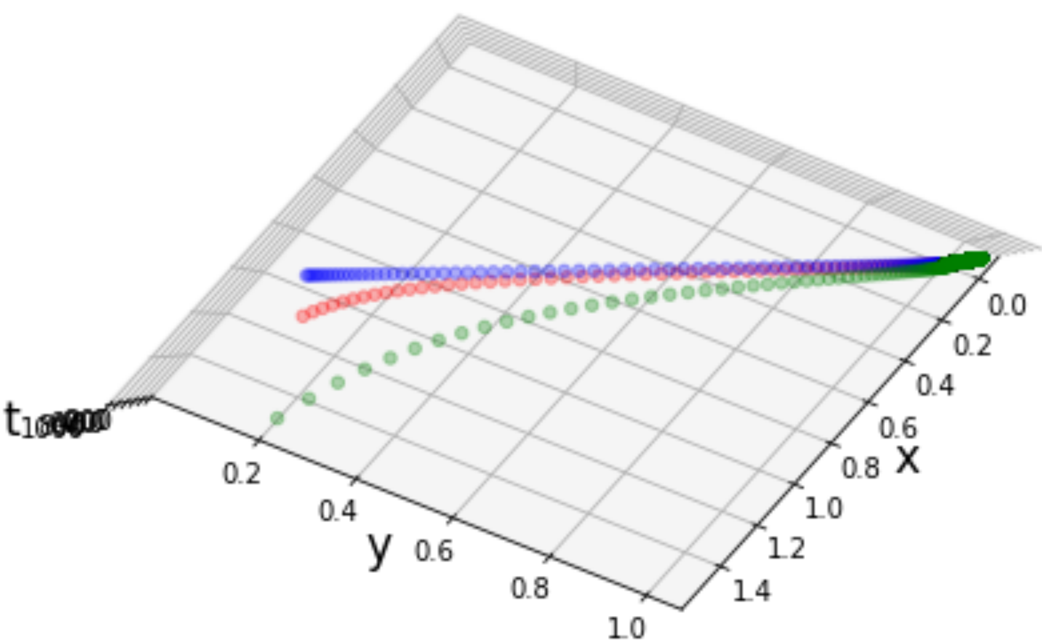
In [54]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

POINTS_F_NUM = 10000

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(np.array(x_list[0]), np.array(y_list[0]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='red')
ax.scatter(np.array(x_list[1]), np.array(y_list[1]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='blue')
ax.scatter(np.array(x_list[2]), np.array(y_list[2]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='green')
plt.show()

#plotly
```



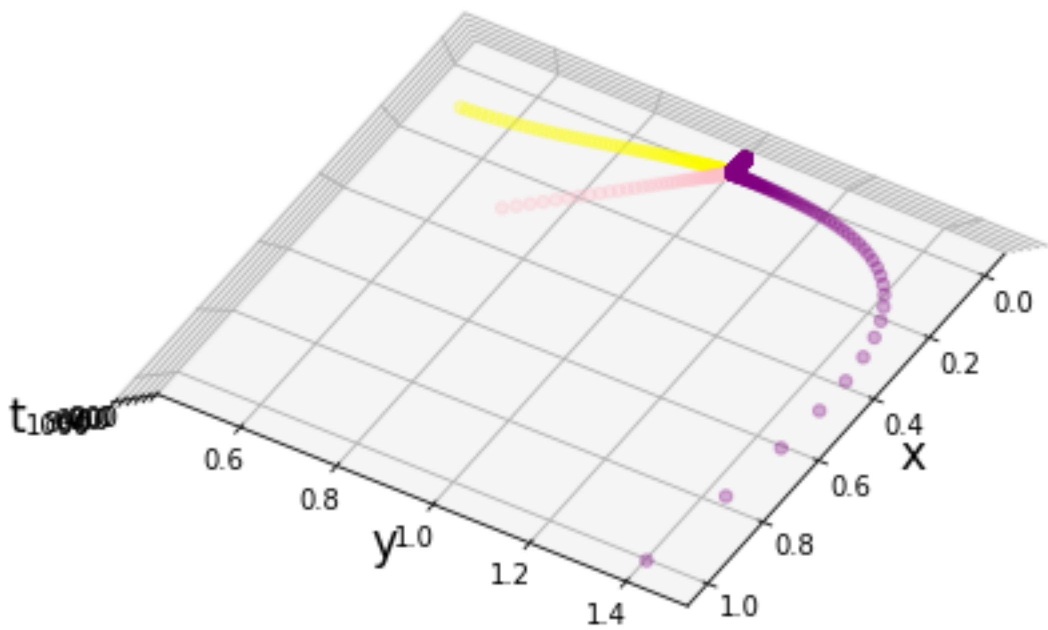
In [55]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

POINTS_F_NUM = 10000

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(90, 30)
ax.scatter(np.array(x_list[3]), np.array(y_list[3]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='yellow')
ax.scatter(np.array(x_list[4]), np.array(y_list[4]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='pink')
ax.scatter(np.array(x_list[5]), np.array(y_list[5]), np.array(tlst)[:POINTS_F_
NUM], color='purple')
plt.show()

#plotly
```



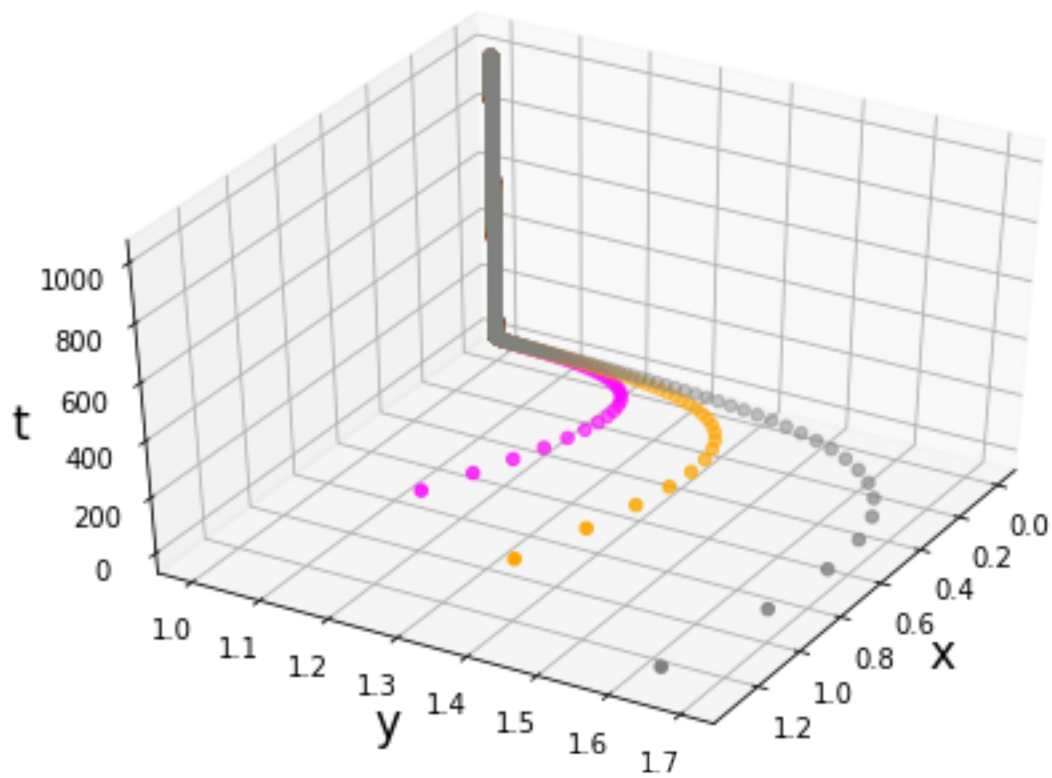
In [57]:

```
fig = plt.figure()
ax = Axes3D(fig)

POINTS_F_NUM = 10000

ax.set_xlabel('x', fontsize=17)
ax.set_ylabel('y', fontsize=17)
ax.set_zlabel('t', fontsize=17)
ax.view_init(40, 30)
ax.scatter(np.array(x_list[6]), np.array(y_list[6]), np.array(tlst)[:POINTS_F_NUM], color='orange')
ax.scatter(np.array(x_list[7]), np.array(y_list[7]), np.array(tlst)[:POINTS_F_NUM], color='grey')
ax.scatter(np.array(x_list[8]), np.array(y_list[8]), np.array(tlst)[:POINTS_F_NUM], color='magenta')
plt.show()

#plotly
```



Вывод:

В ходе решения данной задачи использовалось 2 метода исследования окрестностей изучаемых ненулевых особых точек: каждый график - это отдельная особая точка. Здесь мы видим случаи, когда t>0, поэтому, грубо говоря, нам видна только часть фазовой плоскости, но этого в целом достаточно, чтобы убедиться в справедливости посчитанных в первой части задачи данных. Точка B (второй график в двух методах) оказывается неудачной. Поведение фазовых траекторий везде по сути одно и то же: в начале, ближе к значению в точке, результаты совпадают больше всего. Чем дальше от исследуемой точки, тем больше они расходятся.