國立興大附中 112 學年度 第 1 學期　高二數學 A 期末考試題　　命題：孟老師　審題：吳老師

班級：二年___班　座號：_____　姓名：__________　　試題卷共 4 頁

★請於答案卡上書寫並畫記正確的身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，造成閱卷老師讀卡或閱卷困擾者，統一扣該科總成績 5 分。

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 4 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 將向量 $\overrightarrow{c}=(4,7)$ 分解成兩個等長且垂直的向量 $\overrightarrow{a}=(2,1)$ 和 $\overrightarrow{b}=(x,y)$ 之線性組合，其中 $x>0$，若 $\overrightarrow{c}=r\overrightarrow{a}+s\overrightarrow{b}$，求實數 $r+s$ 之值？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5)以上皆非。

2. 設 $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ 為兩個長度皆為 1 的平面向量。若 $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 的夾角為 75°，求 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的內積？

(1) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(2) $-\dfrac{1}{2}$　(3) $\dfrac{1}{2}$　(4) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(5) 以上皆非。

3. 設坐標平面上，直線 L：$8x-15y+2=0$ 與 y 軸的其中的一個夾角為 θ，求 θ 的正弦值？

(1) $\dfrac{2}{15}$　(2) $\dfrac{8}{15}$　(3) $\dfrac{8}{17}$　(4) $\dfrac{15}{17}$　(5) 以上皆非。

4. $\triangle ABC$ 內接於圓心為 O 之單位圓 (即圓心為原點，半徑為 1 的圓)。若 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{2}\,\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，則 $\angle ABC$ 等於多少度？

(1) 37.5°　(2) 67.5°　(3) 75°　(4) 135°　(5)以上皆非。

5. 已知坐標平面上，兩向量分別為 $\overrightarrow{u}=(1,2)$，$\overrightarrow{v}=(3,4)$，求以 $3\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}$ 與 $2\overrightarrow{u}+3\overrightarrow{v}$ 為相鄰兩邊的平行四邊形面積？

(1) 21　(2) 22　(3) 23　(4) 24　(5)以上皆非。

二、多選題（占 32 分）

說明：第 6 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 設坐標平面上O為原點，A點$(a,0)$，B點$(0,b)$，其中 a,b 皆為非零的實數。若C、D兩點在直線$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$上，且滿足$\overrightarrow{OC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{BD}=7\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{OC}$垂直$\overrightarrow{OD}$。試選出正確的選項。

(1) A、B、C三點必共線
(2) 長度比$\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$
(3) $5\overrightarrow{OD}=7\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OB}$
(4) D點$(\frac{4a}{3},\frac{-b}{3})$
(5) 長度比值$\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\sqrt{14}$

7. 設三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=6$。且△ABC 的重心、外心、垂心分別為 G、K、H。請選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
(2) 向量內積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{53}{2}$
(3) 向量內積 $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}=18$
(4) 向量內積 $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{AC}$
(5) 向量內積 $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$

8. 若實數 a,b,c 使得聯立方程組 $\begin{cases}ax-8y=b\\2x-8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 無解。試選出正確的選項。

(1) $a=2$
(2) $b\neq 6$
(3) $c=6$
(4)若聯立方程組 $\begin{cases}2x-8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 有解，則聯立方程組 $\begin{cases}ax-8y=b\\x-4y=3\end{cases}$ 必無解
(5)若聯立方程組 $\begin{cases}2x-8y=c\\x-4y=3\end{cases}$ 無解，則聯立方程組 $\begin{cases}ax-8y=b\\x-4y=3\end{cases}$ 必無解

9. 設坐標平面上，有一個三角形 ABC，以及相異的三點 P,Q,R 滿足以下的線性組合：

$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AR}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$。試選出正確的選項。

(1) P,Q,R 皆在△ABC 的內部　(2) 線段$\overline{PQ}$平行於線段$\overline{BC}$
(3) $\frac{\Delta ABP面積}{\Delta ABC面積}=\frac{3}{5}$　(4) △ACP 面積=△ABQ 面積
(5) △ACP 面積：△ACR 面積：△ACQ 面積：△ABR 面積 ＝1：2：3：4

三、選填題（占 48 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（10–27） 2. 第 A 至 H 題：每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。 3. 若答案為分數，必須化為最簡分數；若為根式，必須化為最簡根式。並注意分子、分母的列號順序。

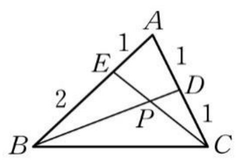
A. 設 $\overrightarrow{a}=(4,5)$，$\overrightarrow{b}=(2,3)$，$\overrightarrow{c}=(3,k)$，若 $\overrightarrow{a}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上的正射影與 $\overrightarrow{b}$ 在 $\overrightarrow{c}$ 上的正射影相同，

則實數 $k=$ $\underline{(10)(11)}$ 。

B. 求二階行列式 $\begin{vmatrix} \sqrt{2024}+3\sqrt{5}+\sqrt{101} & 3\sqrt{5} \\ \sqrt{2024}+3\sqrt{5}-\sqrt{101} & \sqrt{2024}-\sqrt{101} \end{vmatrix}$ 之值= $\underline{(12)(13)(14)(15)}$ 。

C. $\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{AC}$ 中點，E 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AE}:\overline{EB}=1:2$，$\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 相交於 P，

若 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求實數 $x+y$ 之值＝ $\underline{\dfrac{(16)}{(17)}}$ 。(最簡分數)



D. <u>小興</u>和<u>小附</u>一起練習踢足球。假設足球場地是一個坐標平面，當<u>小興</u>在起點 P $(-15,2)$ 將球沿著向量$(5,k)$的方向踢出一段 30 單位長的線段後，恰好被在 Y 軸上的<u>小附</u>用腳控制，將球停在該線段上的點 Q$(0,w)$。若 k 為正實數，則 k 值= $\underline{(18)\sqrt{(19)}}$ 。(最簡根式)

E. 設$\triangle ABC$，邊長 $\overline{AB}=3$、$\overline{AC}=4$，且 $\angle CAB=30^\circ$。若 $\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，且 $-1\le\alpha\le2$，$1\le\beta\le3$，則 P 點所形成的圖形區域面積為 $\underline{(20)(21)}$ 。

F. 設坐標平面上，向量 $\overrightarrow{u}$ =（15 , 5）且直線 $L:3x-y+2=0$。若 $\overrightarrow{u}$ 在 L 上的正射影為（m , n），

求實數 $m+n$ 之值= $\underline{\quad(22)(23)\quad}$ 。

G. 坐標平面上有一個邊長為 4 的正方形 ABCD，已知有兩點 E、F 分別位在 $\overline{AB}$ 邊與 $\overline{BC}$ 邊上，且滿足 $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$，

$\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$，若 P 為 $\overline{AD}$ 邊上的一點，則 $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PF}$ 的最小值為 $\underline{\quad(24)(25)\quad}$ 。

H. 設 a , b 皆為實數，滿足 $a^2+b^2+2a-4b-11=0$，若當數對 $(a\,,b)=(x\,,y)$ 時，則 $3a-4b$ 會有最大值，

求此時 x 之值= $\underline{\frac{(26)}{(27)}}$ 。(最簡分數) 。

參考答案

一、單選題　1. (1)　2.(4)　3.(4)　4. (2)　5. (5)

二、多選題　6.(1)(5)　7.(1)(3)(5)　8.(4)　9.(2)(3)(4)(5)

三、選填題　A. -3　B. 1878　C. $\frac{3}{5}$　D. $5\sqrt{3}$　E.36　F.12　G.11　H. $\frac{7}{5}$

A10	A11	B12	B13	B14	B15	C16	C17	D18	D19
−	**3**	**1**	**8**	**7**	**8**	**3**	**5**	**5**	**3**
E20	E21	F22	F23	G24	G25	H26	H27		
3	**6**	**1**	**2**	**1**	**1**	**7**	**5**		