國立中興大學附屬高級中學 110 學年度第 2 學期 第 1 次期中考 高三 自然組 數甲 試題卷
命題：吳老師 審題：黃老師
班級：三年 ____ 班 座號：_________ 姓名：_______________ 試題共 4 頁，答案卡 1 張

*請於答案卡(卷)上畫(寫)上正確身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，統一扣該科總成績 5 分。

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 4 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

(　　)1. 重複執行伯努力試驗 n 次，已知成功次數的期望值為 150 次，成功次數的標準差為 10 次，則這個伯努力試驗應最有可能為下列哪一個選項？

(1) 擲一公正骰子，以 1 或 6 點為成功，其他點數為失敗

(2) 擲一公正骰子，以 1 或 6 點為失敗，其他點數為成功

(3) 擲一公正骰子，以奇數點為成功，偶數點為失敗

(4) 擲一公正骰子，以 1 點為成功，其他點數為失敗

(5) 擲一公正骰子，以 1 點為失敗，其他點數為成功

(　　)2. 若方程式 $x^2+ax+3-i=0$ 的兩根為 $1-i$ 與 β，試問 a 的值為下列哪一個選項？

(1) $3+3i$　(2) $3-3i$　(3) 3　(4) -3　(5) $-3i$

(　　)3. 設函數 $f(x)=a(x-1)^4+k$，其中 a,k 為實數且 $a\neq 0$。已知函數值 $f(x)$ 的正負情形如附表，則方程式 $f(x)=0$ 有多少個**正實根**？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 4 個　(5) 無法判斷

x	1	2	$x>2$
$f(x)$	負數	正數	正數

(　　)4. 甲、乙、丙三人進行「黑白黑白我勝利」的猜拳遊戲，每人每次出拳為手心或手背。現在規定甲與另外兩人不同者則甲獲勝且遊戲終止，否則繼續下一局比賽。已知每次出拳都為獨立事件，隨機出拳，直到甲第一次勝利為止。舉例：第一次出拳三人都出手背，則繼續第二次出拳；第二次出拳為乙、丙兩人出手背，甲出手心，則甲獲勝並停止遊戲。求停止遊戲所需次數的標準差為下列哪一個選項？

(1) $\sqrt{6}$　(2) $2\sqrt{2}$　(3) $2\sqrt{3}$　(4) $2\sqrt{6}$　(5) 3

(　　)5. 已知兩複數 z 與 $z+i$ 皆為方程式 $x^n=1$ 的複數根，求滿足此條件的最小正整數 n 為何？

(1) 4　(2) 6　(3) 8　(4) 10　(5) 12

二、多重選題（占 32 分）

說明：第 6 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　)6. 在複數平面上有 A,B 兩點，其所代表的複數分別為 z_1 與 z_2 ，O 為原點，若 $|z_1|=\sqrt{3}$ ，$\dfrac{z_2}{z_1}=1+\sqrt{3}i$ 。請選出正確的選項。

(1) $|z_2|=2\sqrt{3}$　(2) $\angle AOB=\dfrac{\pi}{6}$　(3) ΔOAB 的面積為 $3\sqrt{3}$　(4) $|z_1+z_2|=\sqrt{21}$　(5) $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$

(　　)7. 某科系宣稱該系新生男女錄取的比例相等。今檢定男女錄取的比例，並列出前三個步驟如下：

①假設「男女錄取的比例相等」；

②確立檢定統計量為「隨機抽取 11 名新生中女生的人數」；

③設定顯著水準為 0.05。

已知隨機變數 X 表示女生的人數，根據附表，試選出隨機變數 X 的拒絕域。

k	$p(X=k)$	$P(X\le k)$	$P(X>k)$	k	$p(X=k)$	$P(X\le k)$	$P(X>k)$
0	0.0004882813	0.0004882813	0.9995117188	6	0.2255859375	0.7255859375	0.2744140625
1	0.0053710938	0.0058593750	0.9941406250	7	0.1611328125	0.8867187500	0.1132812500
2	0.0268554688	0.0327148438	0.9672851563	8	0.0805664063	0.9672851563	0.0327148438
3	0.0805664063	0.1132812500	0.8867187500	9	0.0268554688	0.9941406250	0.0058593750
4	0.1611328125	0.2744140625	0.7255859375	10	0.0053710938	0.9995117188	0.0004882813
5	0.2255859375	0.5000000000	0.5000000000	11	0.0004882813	1.0000000000	0.0000000000

(1) 0　(2) 1　(3) 2　(4) 10　(5) 11

(　　)8. 已知 $f(x)=2x^4-11x^3+16x^2+10x-31$，若 $f(2+i)=a+bi$ ，其中 a,b 皆為實數。請選出正確的選項。

(1) $a=-1$

(2) $b=1$

(3) $f(-2-i)=a-bi$

(4)已知 $f(2)<0$、 $f(3)>0$ ，以初始值 $a_1=3$，則利用牛頓法求出 a_2 為 2.68

(5)已知 $f(x)=0$ 恰有一負根，且 $f(-1.5)>0$ ，則此負根最接近的整數為 -2

(　　)9. 設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$，請選出正確的選項。

(1) $\overline{\omega^{10}}=1$

(2) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^3)(1-\omega^4)=5$

(3) $\frac{1}{1-\omega}+\frac{1}{1-\omega^2}+\frac{1}{1-\omega^3}+\frac{1}{1-\omega^4}=2$

(4) $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\cdots+\omega^{2022}=1+\omega+\omega^2+\omega^3$

(5) $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}+\cos\frac{8\pi}{5}=1$

三、選填題（占 48 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（10–23）。 2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. z 是複數，且 $2z+2\left|\bar{z}\right|=3+2i$，則 $z=\dfrac{⑩+⑪⑫i}{⑬⑭}$。(化為最簡)

B. 某工廠有 5 台機器在運作，設隨機變數 X 表示正在使用的台數，其機率函數為 $f(x)=\begin{cases}k(\frac{1}{2})^x & ,0\le x\le 5\\ 0 & ,x\ge 6\end{cases}$，$k$ 為實數，

求至少有 2 台在使用的機率為 $\dfrac{⑮}{⑯⑰}$。 (化為最簡分數)

C. 化簡 $\dfrac{(\sin 86^\circ+i\cos 86^\circ)^{10}(\cos 32^\circ-i\sin 32^\circ)^4}{(\cos 242^\circ+i\sin 242^\circ)}=\dfrac{\sqrt{⑱}}{⑲}+\dfrac{⑳}{㉑}i$。(化為最簡)

D. 設隨機變數 X 的機率分布如表。已知 X 的期望值為 4 ，則 $2X$ 的標準差為 $\dfrac{㉒\sqrt{㉓}}{㉔}$ 。 (化為最簡根式)

X	1	5	8
機率	$\frac{1}{3}$	b	$2b-1$

E. 設方程式 $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 的五個根在複數平面上依序對應到 P_1 ， P_2 ， P_3 ， P_4 ， P_5 五點，求五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的面積為 $\dfrac{㉕\sqrt{㉖}}{㉗}$ 。 (化為最簡根式)

F. 假設 $-4 \le k \le -2$ 且已知 α, β 為方程式 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的兩個實數根，則 $\alpha^2+\beta^2$ 的最大值為 ㉘ ㉙ 。

G. 甲、乙兩人參加籃球比賽，每場比賽不得和局，若每局甲獲勝的機率為 $\frac{3}{5}$ 。規定先勝三局者可獲得獎金 5000 元。進行至甲勝 2 局、乙勝 1 局時，因故中止比賽，則甲應分配得獎金 ㉚ ㉛ ㉜ ㉝ 元才合理。

H. 已知兩複數 z_1 與 z_2 ，滿足 $|z_1-(3+2i)|=3$ ， $|iz_2-2|=1$ ，求 $|z_1-z_2|$ 的最大值為 ㉞ 。

＜試題結束，請記得檢查，並將答案劃記在答案卡上，祝考試順利＞

解 答

一、單選題　**1.(1)**　**2.(4)**　**3.(2)**　**4.(3)**　**5.(5)**

二、多重選題　**6.(1)(4)**　**7.(1)(2)(4)(5)**　**8.(2)(4)**　**9. (1)(2)(3)**

三、選填題　**A.** $\frac{5+12i}{12}$　**B.** $\frac{5}{21}$　**C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$　**D.** $\frac{8\sqrt{3}}{3}$

E. $\frac{5\sqrt{3}}{4}$　**F.** 18　**G.** 4200　**H.** 9

已知兩複數 z_1 與 z_2，滿足 $|z_1-(3+2i)|=3$，$|iz_2-2|=1$，求 $|z_1-z_2|$ 的最大值？　9

已知兩複數 z 與 $z+i$ 皆為方程式 $x^n=1$ 的複數根，求滿足此條件的最小正整數 n 為何？　12

圓形跑道上有 A,B 兩障礙區，跑車在 A,B 處發生故障(完全靜止不動)的機率分別為 $\frac{1}{10},\frac{1}{6}$。現在一輛跑車自起點出發，經過 A 再經過 B 環繞跑道，未故障前可以一圈接一圈繼續跑，直到跑車故障為止，求此輛跑車環繞跑道(需完整跑完一圈)圈數的期望值為何？　3

已知 α,β 為方程式 $x^2-(k-2)x+(k^2+3k+5)=0$ 的兩個實數根，則 $\alpha^2+\beta^2$ 的最大值是多少？$(-4\le k\le -\frac{4}{3})$　18

z 是複數，且 $2z+2|\bar{z}|=3+2i$，則 $z=$__________　$\frac{5}{12}+i$

某工廠有 5 台機器在運作，設隨機變數 X 表示正在使用的台數，其機率函數 $f(x)$ 為 $f(x)=\begin{cases} k(\frac{1}{2})^x & ,0\le x\le 5 \\ 0 & ,x\ge 6 \end{cases}$，求至少有 2 台在使用的機率為何？

設隨機變數 X 的機率分布如表。已知 X 的期望值為 4，則 X 的標準差為何？　$\frac{4\sqrt{3}}{3}$

X	1	5	a
機率	$\frac{1}{3}$	b	$2b-1$

化簡 $\frac{(\sin 86^\circ+i\cos 86^\circ)^{10}(\cos 32^\circ-i\sin 32^\circ)^4}{(\cos 242^\circ+i\sin 242^\circ)}=$　$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

設方程式 $z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$ 的五個根在複數平面上依序對應到 P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 五點，求五邊形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ 的面積為何？　$\frac{5\sqrt{3}}{4}$