國立中興大學附屬高級中學　112 學年度第 1 學期　高一期末考數學試題 命題：楊老師 審題：張老師

班級：一年______班　座號：______　姓名：__________________　試題共 4 頁+答案卡 1 張

備註：請於答案卡(卷)上劃(寫)上正確身分資料，若因未劃記書寫身分資料，或因劃記書寫錯誤，統一扣該科總成績 5 分。

滿分 110 分，超過 100 分以 100 分計算。

第壹部分：選擇題（占 28 分）

一、單選題（占 12 分）

說明：第 1 題至第 2 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。

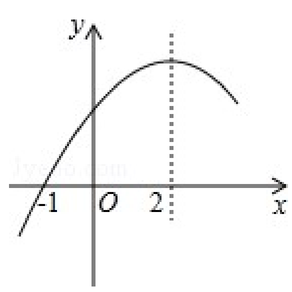
1. 設二次函數 $f(x)=kx^2+8x+(k+6)$，不論 x 是任何實數，$f(x)$ 的值恆正，則實數 k 的範圍為
   (1) $k<-6$
   (2) $k>2$
   (3) $-6<k<2$
   (4) $k<-6$ 或 $k>2$
   (5) 任意實數

2. 當 $-2\le x\le 1$ 時，二次函數 $y=-(x-m)^2+m^2+1$ 有最大值 4，則實數 m 的值為
   (1) $-\frac{7}{4}$
   (2) $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$
   (3) 2 或 $\sqrt{3}$ 或 $-\sqrt{3}$
   (4) 2 或 $-\sqrt{3}$
   (5) 2 或 $-\sqrt{3}$ 或 $-\frac{7}{4}$

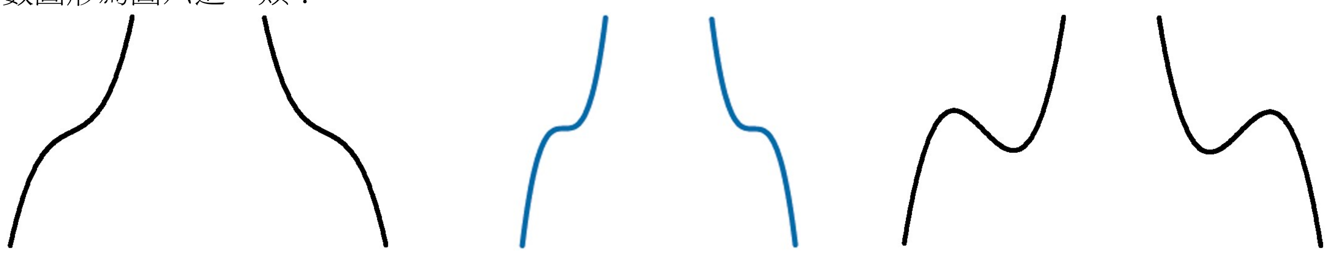
二、多選題（占 16 分）

說明：第 3 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

3. 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的部分圖形如右，且通過 $(-1,0)$，對稱軸為 $x=2$，請選出正確的選項。
   (1) $a+c=b$
   (2) $3a+b=0$
   (3) $25a+5b+c>0$
   (4) $8a+b+c>0$
   (5) 若圖形與 y 軸交點、頂點及 $(2,0)$ 形成直角三角形，則 $a=-\frac{1}{\sqrt{5}}$



4. 已知三次函數的圖形可以區分為圖一、圖二、圖三、圖四、圖五、圖六這六類，請問下列哪些選項中的三次函數圖形為圖六這一類？



圖一　圖二　圖三　圖四　圖五　圖六

(1) $y=x^3-x$

(2) $y=-x^3+3x^2-4x+3$

(3) $y=-x^3-3x^2+2x-1$

(4) $y=-x^3-3x^2-3x+2$

(5) $y=-(x-1)(x^2+4x+5)$

第貳部分：選填題（占 72 分）

說明：1.第 A 至 L 題，將答案劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（5-41）。
2.第 A 至 H 題，每題完全答對給 7 分，第 I 至 L 題，每題完全答對給 4 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 多項式 x^3+mx^2+5x+2 能被 x^2+nx+1 整除，則數對 $(m,n)=$ ___(⑤，⑥)___。

B. 多項式 $(x^2+2x-1)^6$ 除以 $x+3$ 的餘式為___⑦⑧___。

C. 若多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 1，除以 $x-2$ 的餘式為 1，除以 $x-3$ 的餘式為 3，則 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 的餘式為___⑨x^2—⑩x＋⑪___。

D. 設 $f(x)=2x^4-8x^3+5x^2+2x+6$，則 $f(x)$ 除以 $(x-3)^3$ 的餘式為___⑫⑬$(x—3)^2$＋⑭⑮$(x—3)$＋⑯___。

E. 承上題，$f(3.001)=$ ___⑰.⑱⑲⑳___。（四捨五入到小數點以下第三位）

F. 滿足不等式 $x^2(x+5)(x-7)(x^2+x-12)(x^2+x+1)\le 0$ 的整數 x 有___㉑___個。

G. 若二次函數 $f(x)$ 有最大值，且 $|f(1)|=|f(3)|=|f(5)|=|f(7)|=16$，則 $f(x)$ 之最大值為__㉒㉓__。

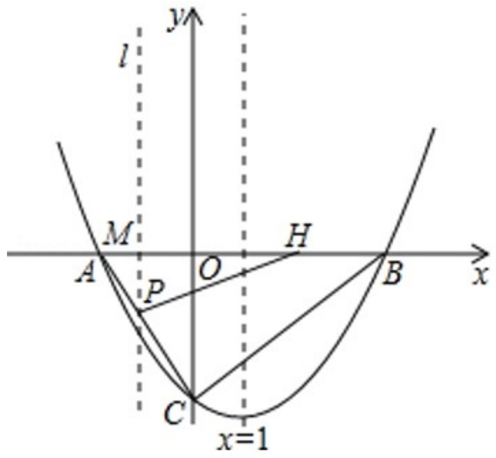
H. 多項式 $x^{113}+x^{112}$ 除以 x^2-3x+2 的餘式為__(㉔・㉕^{112}—㉖) x—㉗・㉘^{112}＋㉙__。

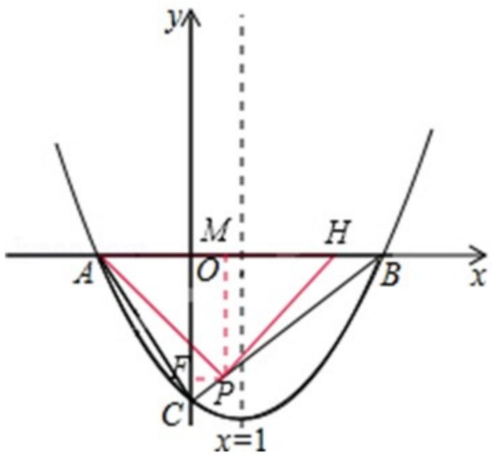
I. 設 x、y 為實數，且 $x^2+2y^2=1$，若 $3x+4y^2$ 的最大值為 M，最小值為 m，則數對 $(M,m)=$__($\frac{㉚㉛}{㉜}$, ㉝㉞)__。（化為最簡分數）

J. 已知三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+x+d$ 圖形的對稱中心為 $(\frac{1}{2},0)$，且 $ax^3+bx^2+x+d=0$ 的三根 $\frac{1}{2}$、α、β 滿足 $|\alpha|+|\beta|=2$，則 $a=$__㉟㊱__。

K. 若三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 圖形的對稱中心為 $(0,3)$，且在 $x=2$ 附近的一次近似為 $y=3x-11$，則 $a=$__$\frac{㊲}{㊳}$__。（化為最簡分數）

L. 如下圖，在平面直角坐標系中，拋物線 $y=ax^2+bx-4$ 與 x 軸交於點 $A(-2,0)$ 和點 B，與 y 軸交於點 C，拋物線的對稱軸為直線 $x=1$。若兩動點 M、H 分別從點 A、B 以每秒 1 個單位長度的速度沿 x 軸同時出發相向而行，當點 M 到達原點時，點 H 立刻掉頭並以每秒 $\dfrac{3}{2}$ 個單位長度的速度向點 B 方向移動，當點 M 到達拋物線的對稱軸時，兩點停止移動，經過點 M 的直線 l 與 x 軸垂直，交 $\overline{AC}$ 或 $\overline{BC}$ 於點 P。設點 M 的運動時間為 t 秒（$0 \leqq t \leqq 3$），點 M 的運動時間 t 與△APH 的面積 S 之函數關係式為 $S(t)=\begin{cases}-t^2+6t, & 0\le t\le 2\\ g(t), & 2<t\le 3\end{cases}$，則面積 $S(t)$ 的最大值為 $\dfrac{㊴㊵}{㊶}$。（化為最簡分數）





第參部分：加分題（占 10 分）

說明：第 M 至 O 題，配分標於題末，將答案劃記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（42-45）。每題完全答對才給分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

M-O 題為題組

$f(x)$ 為一多項式，已知對於任意實數 x，皆使 $x\cdot f(x)\cdot f(1-x)+x^3+100\ge 0$ 恆成立。

M. $f(x)$ 的次數為 ㊷ ：(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0 (5) 無次數。（單選題，2 分）

N. $f(2)$ 的最大可能值為 ㊸ 。（選填題，4 分）

O. $f(2)$ 的最小可能值為 ㊹㊺ 。（選填題，4 分）

附註：形如 $f\left(g(x)\right)$ 稱為合成函數，例如 $f(x)=x^2+x+1$，$g(x)=2x-1$，

則 $f\left(g(x)\right)=\left(g(x)\right)^2+\left(g(x)\right)+1=\left(2x-1\right)^2+\left(2x-1\right)+1$

$g\left(f(x)\right)=2\left(f(x)\right)-1=2\left(x^2+x+1\right)-1$

$f\left(f(x)\right)=\left(f(x)\right)^2+\left(f(x)\right)+1=\left(x^2+x+1\right)^2+\left(x^2+x+1\right)+1$

$g\left(g(x)\right)=2\left(g(x)\right)-1=2\left(2x-1\right)-1$

參考答案：

1. (2)
2. (4)
3. (1)(4)(5)
4. (3)(5)

A. $(4, 2)$

B. 64

C. x^2-3x+3

D. $41(x-3)^2+32(x-3)+3$

E. 3.032

F. 8

G. 20

H. $(3\cdot 2^{112}-2)x-3\cdot 2^{112}+4$

I. $(\frac{25}{8}, -3)$

J. -4（$f(x)=-4(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-\frac{3}{2})=-4x^3+6x^2+x-\frac{3}{2}$）

K. $\frac{7}{8}$（$f(x)=\frac{7}{8}x^3+\frac{-15}{2}x+3$）

L. $\frac{25}{3}$（$S(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cdot(6-t)\cdot 2t, & 0<t\le 2\\ \frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{2}t+1)\cdot(6-t), & 2<t\le 3\end{cases}$，$t=\frac{8}{3}$時，有最大值$\frac{25}{3}$）

M. (1)

N. 6

O. -6

<Sol>

L. ① $0\le t\le 2$時，$\Delta PAH=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot\overline{MP}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}-\overline{BH})\cdot(2\overline{AM})=\frac{1}{2}\cdot(6-t)\cdot 2t=-t^2+6t=-(t-3)^2+9$

$\therefore t=2$時，$\triangle APH$有最大值 8

② $2<t\le 3$時，$\Delta PAH=\frac{1}{2}\cdot\overline{AH}\cdot\overline{MP}=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}-\overline{BH})\cdot(\overline{MB})=\frac{1}{2}\cdot(\overline{AB}-\overline{BH})\cdot(\overline{AB}-\overline{AM})$

$=\frac{1}{2}\cdot(6-(5-\frac{3}{2}t))\cdot(6-t)=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}t+1)(6-t)=-\frac{3}{4}t^2+4t+3=-\frac{3}{4}(t-\frac{8}{3})^2+\frac{25}{3}$

其中$\overline{BH}=2-\frac{3}{2}(t-2)=5-\frac{3}{2}t$

$\therefore t=\frac{8}{3}$時，$\triangle APH$有最大值$\frac{25}{3}$

M. 設$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots \quad\Rightarrow\quad f(1-x)=a(1-x)^n+b(1-x)^{n-1}+\cdots$

故$x\cdot f(x)\cdot f(1-x)$的次數$1+n+n=2n+1$必為奇數

若$x\cdot f(x)\cdot f(1-x)+x^3+100$為奇函數，則$x\cdot f(x)\cdot f(1-x)+x^3+100$的值有正有負

因此次數$2n+1=3$，使得$x\cdot f(x)\cdot f(1-x)+x^3+100$為二次函數(偶函數)

$\therefore f(x)=ax+b$為一次函數

N. $x\cdot f(x)\cdot f(1-x)+x^3+100=x(ax+b)(a(1-x)+b)+x^3+100=(-a^2x^3+a^2x^2+b(a+b)x)+x^3+100$

$=(1-a^2)x^3+a^2x^2+b(a+b)x+100$為二次函數

$\Rightarrow\quad 1-a^2=0 \quad\Rightarrow\quad a=\pm 1$

① $a=1$時，$f(x)=x+b$

則$x\cdot f(x)\cdot f(1-x)+x^3+100=x^2+b(b+1)x+100\ge 0$恆成立

$\Rightarrow\quad (b(b+1))^2-4\cdot 1\cdot 100\le 0 \quad\Rightarrow\quad -20\le b(b+1)\le 20 \quad\Rightarrow\quad -5\le b\le 4$

$\therefore f(2)=2+b$的最大值 6，最小值-3

② $a=-1$時，$f(x)=-x+b$

則$x\cdot f(x)\cdot f(1-x)+x^3+100=x^2+b(b-1)x+100\ge 0$恆成立

$\Rightarrow\quad (b(b-1))^2-4\cdot 1\cdot 100\le 0 \quad\Rightarrow\quad -20\le b(b-1)\le 20 \quad\Rightarrow\quad -4\le b\le 5$

$\therefore f(2)=-2+b$的最大值 3，最小值-6