

◎請於答案卡上書寫並劃記正確的身分資料，若因未劃記、劃記不完全或劃記錯誤。造成讀卡錯誤者，扣總成績 5 分。

常用數值： $\log 2 = 0.3010$ ； $\log 3 = 0.4771$ ； $\log 7 = 0.8451$

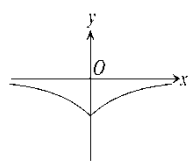
等比級數公式： $r \neq 1, 1 + r + r^2 + \cdots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1}$

一、配合題(共 10 分)

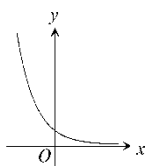
第 1 題至第 5 題，請將該題函數所對應的圖形，依圖形編號劃記在答案卡上。各題答對者得 2 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. () 設 $a > 1$ ， $y = a^{|x|}$ 。
2. () 設 $0 < a < 1$ ， $y = -a^x$ 。
3. () 設 $0 < a < 1$ ， $y = \log_a x$ 。
4. () 設 $a > 1$ ， $y = \log_{\frac{1}{a}}(-x)$ 。
5. () 設 $a > 1$ ， $y = |\log_a x|$ 。

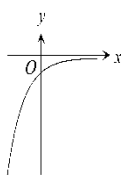
①



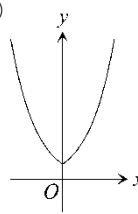
②



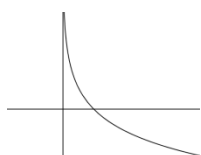
③



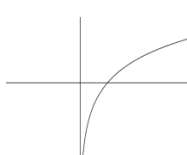
④



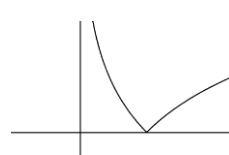
⑤



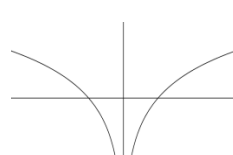
⑥



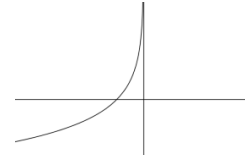
⑦



⑧



⑨



二、單選題(共 15 分)

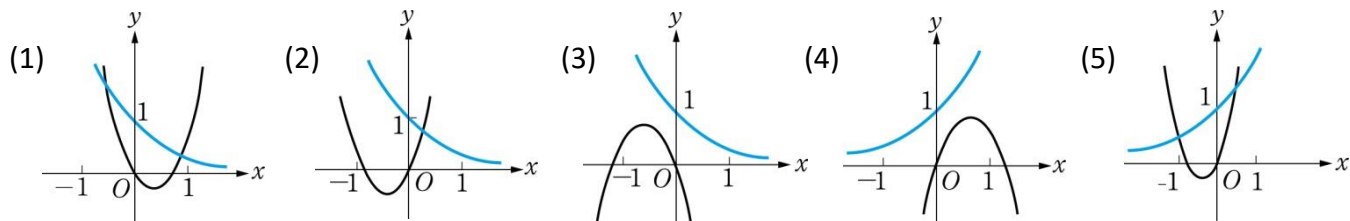
第 6 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請將正確選項畫記在答案卡。各題答對者得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

6. () 已知 $a = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$ 、 $b = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$ 、 $c = (\frac{1}{5})^{\frac{1}{5}}$ 、 $d = (\frac{1}{7})^{\frac{1}{7}}$ ，則此四個數的大小順序為下列何者？
 (1) $d < c < b < a$ (2) $a < b < d < c$ (3) $d < c < a < b$ (4) $b < a < d < c$ (5) $b < a < c < d$
7. () 已知 a 、 b 、 c 均為正數，且 $2^a = \log_{\frac{1}{2}} a$ ， $(\frac{1}{2})^b = \log_2 b$ ， $(\frac{1}{2})^c = \log_{\frac{1}{2}} c$ ，則此三個數的大小順序為下列何者？
 (1) $c < b < a$ (2) $b < c < a$ (3) $c < a < b$ (4) $a < c < b$ (5) $a < b < c$
8. () 設 n 為正整數，第 n 個費馬數 (Fermat Number) 定義為 $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ ，例如 $F_1 = 2^{(2^1)} + 1 = 2^2 + 1 = 5$ 、 $F_2 = 2^{(2^2)} + 1 = 2^4 + 1 = 17$ 。試問 $\frac{F_{12}}{F_{10}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？
 (1) 760 (2) 840 (3) 920 (4) 1000 (5) 1080

三、多選題(共 15 分)

第 9 題至第 11 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

9. () 在下列圖形中，二次函數 $y = ax^2 + bx$ 與指數函數 $y = \left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)^x$ 之圖形，可能是哪一選項？



10. () 考慮坐標平面上滿足 $4^x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$ 的點 $P(x, y)$ ，已知所有可能的點 $P(x, y)$ 構成的圖形為一直線，且該直線斜率為 m ，試問下列哪一個選項是正確的？

- (1) $(\log 3, \log 4)$ 是一個可能的 P 點
- (2) $(0, 0)$ 是一個可能的 P 點
- (3) 點 $P(x, y)$ 滿足 $xy \leq 0$
- (4) $m \leq -1$
- (5) 若 $(3, y_1)$ 、 $(4, y_2)$ 均為 $4^x = \left(\frac{1}{3}\right)^y$ 圖形上的點，則 $|y_2 - y_1| < 1$

11. () 已知 $1 < a$ ， $0 < x_1 < x_2$ ，設函數 $f(x) = a^x$ 與 $g(x) = \log_a x$ ，請選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 的圖形與 $g(x)$ 的圖形對稱於直線 $y = x$
- (2) $f(x)$ 的圖形與 $g(x)$ 的圖形沒有交點
- (3) $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$
- (4) $g\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{g(x_1) + g(x_2)}{2}$
- (5) 點 (s, t) 為函數 $f(x)$ 圖形上之一點，則點 $(t \times a^2, s + 2)$ 在函數 $g(x)$ 圖形上

四、選填題(共 60 分)

說明：第 A 至 L 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（12-38）。每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 方程式 $3^x - 28 \cdot 3^{\frac{x}{2}-1} + 3 = 0$ 的解為 12 或 13 14。

B. 設銀行利率的算法有單利和複利兩種：

(I) 單利：本利和 $S = \text{本金 } P \times (1 + \text{期利率} \times \text{期數})$ ；

(II) 複利：本利和 $S = \text{本金 } P \times (1 + \text{期利率})^{\text{期數}}$ 。

小興準備向銀行貸款 1 百萬元當做創業基金，其年利率為 2%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利（每年複利一次）計息還款，但給小興創業優惠改以單利計息還款。此優惠下，小興在三年期滿還款時可以比複利計息少繳 15 16 17 18 元？

C. 設 $f(x) = \frac{2a^x + a^{-x}}{2a^x - a^{-x}}$ ，且 $f(\alpha) = 4$ ， $f(\beta) = 6$ ，則 $f(\alpha + \beta) = \underline{19 \ 20}$ 。

D. 求 $(\log_8 9 + \log_{0.25} 3) \times (\log_{\frac{1}{3}} 0.5 + \log_9 16) + \frac{\log_4 125}{\log_8 5}$ 之值為 21。

E. 設 a, b, c, d 皆為正整數，且 $a \log_{5400} 2 + b \log_{5400} 3 + c \log_{5400} 5 = d$ ，則 $4 \log_6 d - \log_6 a - \log_6 b - 2 \log_6 c$ 之值為 22 23。

F. 若方程式 $x^{\log_2 x} = \frac{x^5}{64}$ 的兩根為 α 與 β ，則 $\alpha \times \beta$ 之值為 24 25。

G. 已知 $1 < k$ ，若 $\log_8 \frac{2}{k}$ 、 $\log_4 \frac{1}{k}$ 、 $\log_2 \frac{1}{k}$ 三個數依序成等比，則 k 之值為 26 27。

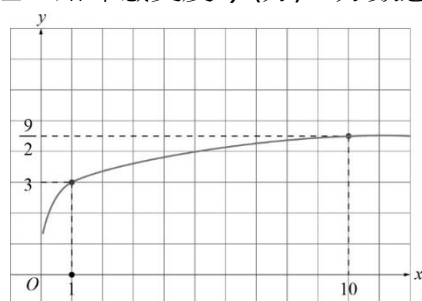
H. 在坐標平面上， Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(1, 1)$ ，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y = a \times 3^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為 28 29 $\leq a \leq$ 30。

I. 傳染病在發生初期時，由於大部分人未感染且無抗體，所以總感染人數大都以指數形式成長。在「初始感染人數為 P_0 ，且每位已感染者平均一天會傳染給 r 位未感染者」的前提下， n 天後感染到此疾病的總人數 P_n 可以表示為 $P_n = P_0(1+r)^n$ ，其中 $P_0 \geq 1$ 且 $r > 0$ 。已知某傳染病初期符合上述數學模型且每隔 12 天總感染人數會增加為 5 倍，試求 $\log_5 P_{20} - \log_5 P_{11}$ 的值為 31 32。(化為最簡分數)

J. 滿足 $1 + \frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 + \dots + (\frac{3}{2})^{n-1} > 998$ 的最小自然數 n 為 33 34。

K. 已知 $a > 1$ ， $f(x) = a^x$ ，若 A, B, C, D 為 x 軸上由左至右的四相異點，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ ，過 A, B, C, D 作 x 軸垂線分別交 $y = f(x)$ 的圖形於 E, F, G, H ，若 $\overline{AE} = 6$ ， $\overline{DH} = 384$ ，則 $\overline{BF} + \overline{CG}$ 之值為 35 36 37。

L. 19 世紀德國科學家費希納發現「主觀感覺與刺激強度的對數成正比」的規律。若人類對於食物的甜味感受度 y (分) 和食物本身的甜度 x (度) 之關係符合上述定律，即 $y = a \log x + b$ ，其關係如附圖所示。今有某種蛋糕原本讓顧客感受到的甜度為 s (分)，但是顧客普遍覺得不夠甜，若蛋糕師傅想調整甜度，重新製作一個讓顧客感受到甜度超過 $s+1$ (分) 的蛋糕，則重新製作的蛋糕本身的甜度至少要變為原來蛋糕的甜度的 38 倍。(整數倍)
註：甜味感受度 y (分)，分數愈高愈甜。甜度 x (度)， x 愈大表示含糖量愈高。



答案

一、配合題 (每題 2 分，共 10 分)

1	2	3	4	5
4	3	5	9	7

二、單選題 (每題 5 分，共 15 分)

6	7	8
5	4	3

三、多選題 (每題 5 分，共 15 分)

9	10	11
124	234	135

四、填充題 (每題 5 分，共 60 分)

A	B	C	D	E	F
$(4, -2)$	1208	13	5	-2	32
G	H	I	J	K	L
16	$-3 \leq a \leq 9$	$\frac{3}{4}$	16	120	5