大學入學考試中心 九十六學年度指定科目考試試題 數學甲

--作答注意事項---

考試時間:80分鐘

作答方式: 第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內劃記。修正時應以橡皮擦拭,請 勿在答案卡上使用修正液。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」,請在規定之欄位以較粗的黑色或藍色原子筆、鋼珠筆或中性筆作答,並標明題號。

第壹部分作答示例:請仔細閱讀下面的例子。

(一)單選題及多選題:只用1,2,3,4,5等五個格子,而不需要用到-,±以及6,7,8,9,0等格子。

例:若第1題為單選題,選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11,而正確的答案為7,亦即 選項(3)時,考生要在答案卡第1列3 劃記(注意不是7),如:

				解 答			欄						
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	ō	$\overset{\pm}{\square}$	

例:若第5題為多選題,正確選項為(1)與(3)時,考生要在答案卡的第5列的上與予劃記,如:

$$5 \quad \stackrel{1}{\blacksquare} \quad \stackrel{2}{\Box} \quad \stackrel{3}{\blacksquare} \quad \stackrel{4}{\Box} \quad \stackrel{5}{\Box} \quad \stackrel{6}{\Box} \quad \stackrel{7}{\Box} \quad \stackrel{8}{\Box} \quad \stackrel{9}{\Box} \quad \stackrel{0}{\Box} \quad \stackrel{-}{\Box} \quad \stackrel{\pm}{\Box}$$

(二)選填題的題號是 A, B, C, ..., 而答案的格式每題可能不同,考生必須依各題的格式填答,且每一個列號只能在一個格子劃記。

例:若第 C 題的答案格式是 $\frac{(20)(21)}{50}$,而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時,則考生必須分別在答案 卡的第 20 列的 一與第 21 列的 7 劃記,如:

第 壹 部 分 : 選 擇 題 (單 選 題 、 多 選 題 及 選 填 題 共 佔 79 分)

一、單選題(18分)

說明:第1至3題為單選題,每題選出一個最適當的選項,劃記在答案卡之「解答欄」。每 題答對得6分,答錯或劃記多於一個選項者倒扣1.5分,倒扣到本大題之實得分數為 零為止。未作答者,不給分亦不倒扣分數。

- 1. 設 $z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$, 試問複數 1-z 的絕對值爲以下哪一選項?
 - (1) $2\sin\frac{\pi}{7}$
 - (2) $\sin \frac{2\pi}{7}$
 - $(3) \quad \sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{7}$
 - (4) $\sqrt{2}(1-\cos\frac{2\pi}{7})$
 - $(5) \quad \sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{7}}$

- 2. 試問下列有關極限 $\lim_{x\to 1} \frac{|3-3x-x^2|-1}{x-1}$ 的敘述何者正確?
 - (1) 極限不存在
 - (2) 極限爲0
 - (3) 極限爲1
 - (4) 極限爲5
 - (5) 極限爲-2

3. 設 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{10}$ 是一等比數列,其首項 $a_1>1$ 且公比 r>1。坐標平面上有一質點 M 自原點 (0,0) 出發,依以下規則連續移動十次:第一次移動往右 $\log a_1$ 單位,第二次移動向上 $\log a_2$ 單位,第三次移動往右 $\log a_3$ 單位,第四次移動向上 $\log a_4$ 單位,依此類推直到第十次;即第 2k-1 次的移動是往右 $\log a_{2k-1}$ 單位,接著第 2k 次的移動是向上 $\log a_{2k}$ 單位。已知經過這十次的移動後,該質點 M 停在點 $(5+5\log 2,5+\frac{15}{2}\log 2)$ 的位置上,試問首項 a_1 與公比 r 組成的序對 (a_1,r) 爲以下哪

一選項?

(1) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$

 $(2) \quad \left(2\sqrt{2}, \sqrt{5}\right)$

 $(3) \quad \left(2, \sqrt{2}\right)$

(4) $(5, \sqrt{5})$

 $(5) (5, \sqrt{2})$

二、多選題(40分)

說明:第4至8題,每題各有5個選項,其中至少有一個是正確的。選出正確選項, 劃記在答案卡之「解答欄」。每題8分,各選項獨立計分,每答對一個選項, 可得1.6分,每答錯一個選項,倒扣1.6分,完全答對得8分;整題未作答者, 不給分亦不倒扣分數。在備答選項以外之區域劃記,一律倒扣1.6分。倒扣到 本大題之實得分數為零為止。

- 4. 某校高三共有300位學生,數學科第一次段考、第二次段考成績分別以 *X、Y* 表示,且每位學生的成績用0至100評分。若這兩次段考數學科成績的相關係數為0.016,試問下列哪些選項是正確的?
 - (1) X與Y的相關情形可以用散佈圖表示
 - (2) 這兩次段考的數學成績適合用直線 X = a + bY 表示 X 與 Y 的相關情形 (a,b 為常數 , $b \neq 0$)
 - (3) X+5 與 Y+5 的相關係數仍爲0.016
 - (4) 10X 與 10Y 的相關係數仍爲 0.016
 - (5) 若 $X' = \frac{X \overline{X}}{S_X}$ 、 $Y' = \frac{Y \overline{Y}}{S_Y}$,其中 \overline{X} 、 \overline{Y} 分別爲 X、 Y 的平均數, S_X 、 S_Y 分別爲 X、 Y 的標準差,則 X' 與 Y' 的相關係數仍爲 0.016

- 5. 設 P(x) 是一個五次實係數多項式。若 P(x) 除以 x-3 的餘式是2,且商 Q(x) 是一個係數均爲正數的多項式,試問下列哪些選項是正確的?
 - (1) P(x) = 0 與 Q(x) = 0 有共同的實根
 - (2) 3是 P(x) = 2 唯一的實根
 - (3) P(x) 不能被 x-4 整除
 - (4) P(x) = 0 定有小於3的實根
 - (5) P(x) 除以 (x-3)(x+3) 的餘式也是2

6. 設 a 是不爲零的實數,且以下的三元一次方程組有解:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{x}{a} = z-2 \\ \frac{y+1}{3} = z-2 \end{cases}$$

試問下列哪些選項是正確的?

- (1) a = 2
- (2) 原方程組有唯一解

(3) 方程組
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{x}{a} = z-2 \end{cases}$$
 有無窮多解

(4) 方程組
$$\begin{cases} \frac{x}{a} = z - 2 \\ \frac{y+1}{3} = z - 2 \end{cases}$$
 有唯一解

(5) 方程組
$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} = \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} = z-4 \end{cases}$$
 有無窮多解

- 7. 有關矩陣 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 與矩陣 $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, 試問下列哪些選項是正確的?
 - (1) AB = BA
 - $(2) \quad A^2B = BA^2$
 - (3) $A^{11}B^3 = B^6A^5$
 - (4) $AB^{12} = A^7$
 - (5) $(ABA)^{15} = AB^{15}A$

- 8. 考慮坐標平面上函數 $y=x^3+2x+3$ 的圖形(x爲任意實數),試問下列哪些選項是正確的?
 - (1) 圖形有最高點,也有最低點
 - (2) 圖形有水平切線
 - (3) 圖形與任一水平直線恰有一交點
 - (4) 若 (a,b) 在圖形上,則 (-a,-b+6) 也在圖形上
 - (5) 圖形與三直線 x=0, x=1, y=0 所圍成的區域之面積大於4

三、選填題(21分)

說明:A至C各題為選填題,劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (9-18)內。 每一題完全答對得7分,答錯不倒扣;未完全答對不給分。

A. 某公司共有6個工廠,各工廠的產量都一樣,且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知道,第k個工廠的產品不良率爲 $\frac{k}{50}$,其中k=1,2,3,4,5,6,

B. 在坐標平面上,一圓通過點 (-2,7),且與直線 4x+3y-14=0 相切於點 (-1,6),若此圓的方程式爲 $x^2+y^2+ax+by+c=0$,則 a= ①① , b= ① , b= ① , c= ① 。

C. 張師傅想爲公司設計底面爲正方形且沒有蓋子的一個長方體紙盒,裡面白色,外面灰色。在灰色部分的面積爲432平方公分的限制之下,爲了使紙盒的容量達到最大,他應將此無蓋長方體紙盒的底面每邊邊長設計爲 ① 18 公分。

——————以下第貳部分的非選擇題,必須作答於答案卷—————

第貳部分:非選擇題(佔21分)

說明:本大題共有二題計算證明題,答案務必寫在答案卷上,並於題號欄標明題號 (一、二)與子題號((1)、(2)),同時必須寫出演算過程或理由,否則將予扣分。 每題配分標於題前。

- 一 . 設 $f(x) = x^3 6x^2 x + 30$,且 a, b 是方程式 f(x) = 0的兩正根。
 - (1)(3分) 求解三次方程式 f(x)=0。
 - (2) (8分) 若 $\triangle ABC$ 中, $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = b$, $\angle ACB = 120^{\circ}$,且 D, E 是 \overline{AB} 上兩點,滿足 $\overline{BD} = \overline{BC}$, $\overline{AE} = \overline{AC}$,試求 $\triangle CDE$ 的面積。

- 二. 設 $\triangle ABC$ 的 三 頂 點 坐 標 分 別 爲 A(-2,7,15) 、 B(1,16,3) 、 C(10,7,3) 。
 - (1)(5分) 試求通過 $A \times B \times C$ 三點的平面方程式。
 - (2) (5分) 試求 ΔABC 的外心坐標。