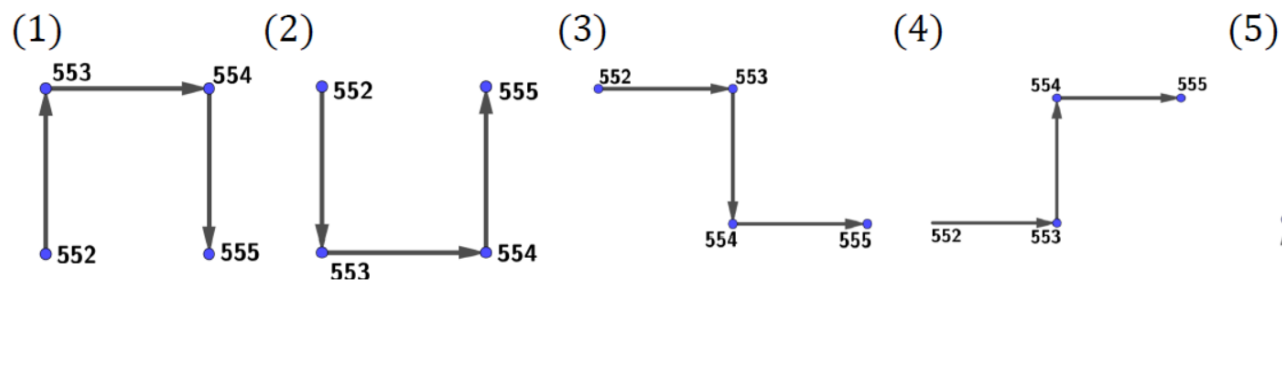
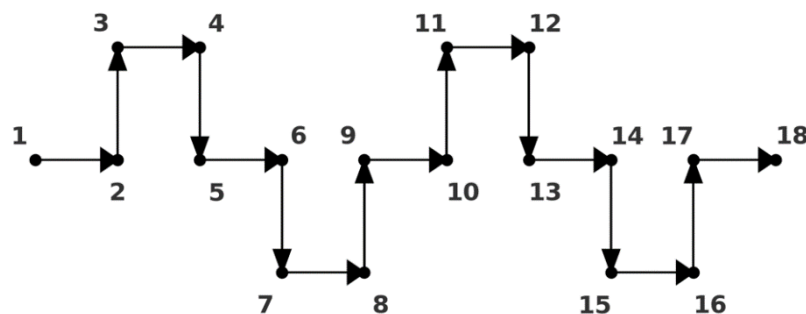


※答案卡請用 2B 鉛筆畫記，答案卷請用黑色或藍色原子筆作答，若資料遺漏導致無法判讀或批閱將扣成績五分。

第一部分：單選題（占 16 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中有一個是正確或最佳的選項，請將正確答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。每題答對，得 4 分；答錯或未作答者，該題以零分計算。

1. 將 1, 2, 3, 4, ... 依照下列的規律依序排列，1 當起始點，先往右移動一個單位標記為 2，然後往上移動一個單位標記為 3，再往右移動一個單位標記為 4，然後往下移動一個單位標記為 5，再往右移動一個單位標記為 6，然後往下移動一個單位標記為 7，再往右移動一個單位標記為 8，然後再往上移動一個單位標記為 9，重複以上動作後會得到如圖所示。



2. 右表為國稅局 2014 至 2024 的賦稅收入一覽表。根據右表數據以及下表數值，請問近 11 年來政府賦稅收入的平均成長率 (r)，最接近下列哪一個選項？

r	4%	5%	6%	7%	8%	9%
$(1+r)^{10}$	1.480	1.629	1.791	1.967	2.159	2.367
$(1+r)^{11}$	1.539	1.710	1.898	2.105	2.332	2.580
$(1+r)^{12}$	1.601	1.796	2.012	2.252	2.518	2.813

- (1) 5.42% (2) 5.89% (3) 6.17% (4) 6.85% (5) 8.02%

年份	賦稅收入（億元）
2014	18200
2015	19500
2016	20300
2017	21700
2018	23060
2019	24500
2020	26700
2021	28500
2022	30010
2023	32000
2024	35400

3. 右表為興大附中學生參加 114 學測的六筆考科數據，下表為阿皓本次 114 學測的成績。二月二十五日一早看到成績簡訊，阿皓與班上及隔壁班的同學皆在討論比較哪個科目考得比較好，若以校內成績來看，要比考得最好的科目，阿皓適合拿哪個科目的成績出來與同學一較高下？

科目	國文	英文	數學 A	數學 B	社會	自然
級分	12	13	11	12	12	13

- (1) 國文 (2) 英文 (3) 數學 A (4) 社會 (5) 自然

科目	平均級分	標準差
國文	11.66	1.74
英文	10.55	2.62
數學 A	8.09	2.72
數學 B	9.75	2.76
社會	11.06	2.16
自然	11.33	2.1

4. Derek老師在分析興大附中 114 學測的數 A 考得如何，他從教務處的資料庫撈出 114 學測數據，下表是本次 114 學測本校數 A 的應考分數資料。本次應考數 A 人數 470 人，最低 2 級分，最高 15 級分。剛好任教班的三位小老師阿呈、阿維、阿豪來詢問Derek老師待會上課內容，三位看到老師在分析成績打算幫忙，Derek老師就請他們算最簡單的頂標、前標、均標分數，阿呈立刻回答頂標分數是 A 級分；接著阿維回答前標分數是 B 級分；最後阿豪回答均標分數是 C 級分，Derek老師一臉驚訝的看著，三位竟然可以秒答全對。請問這三位回答的序組 (C,B,A) 是下列何者？

級分	2	3	4	5	6	7	8
人數	6	13	22	41	54	62	77
級分	9	10	11	12	13	14	15
人數	58	41	36	33	15	10	2

頂標	成績位於第 88 百分位數的考生級分
前標	成績位於第 75 百分位數的考生級分
均標	成績位於第 50 百分位數的考生級分
後標	成績位於第 25 百分位數的考生級分
底標	成績位於第 12 百分位數的考生級分

- (1) (7,10,11) (2) (7,11,12) (3) (8,10,11)
 (4) (8,10,12) (5) (8,11,12)

第二部分：多選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 學測成績 15 級分制的計算方式為：前 1% 學生平均原始得分除以 15，作為該科之級距。考生原始得分 0 分得 0 級分，高於 0 分但低於或等於 1 個級距是 1 級分，高於 1 個級距但低於或等於 2 個級距是 2 級分，以此類推到 14 級分；原始得分高於 14 個級距，則為滿級分 15 級分。
- 學測成績 60 級分制的計算方式為：前 1% 學生平均原始得分除以 60，作為該科之級距。考生原始得分 0 分得 0 級分，高於 0 分但低於或等於 1 個級距是 1 級分，高於 1 個級距但低於或等於 2 個級距是 2 級分，以此類推到 59 級分；原始得分高於 59 個級距，則為滿級分 60 級分。
- 以學測成績 15 級分制來舉例說明，假設數 A 考科分數最高之前 1% 學生平均原始得分為 96 分，則級距為 $96/15 = 6.4$ 。考生如果原始得分為 0 分，則為 0 級分；考生如果原始得分高於 0 分，但低於或等於 6.4 分(1個級距)，則為 1 級分；考生如果原始得分高於 6.4 分，但低於或等於 12.8 分(2個級距)，則為 2 級分，以此類推到 14 級分；考生如果原始得分高於 89.6 分(14個級距)，則為滿級分 15 級分。
- 興大附中於 114 學測共有 505 人參加，下列針對學測某考科成績的敘述，哪些選項是正確的？
- (1) 假設全國前 1% 學生平均原始得分為 90 分，若阿萱考 68 分，則以 60 級分制計算可得 46 級分
 (2) 假設全國前 1% 學生平均原始得分為 90 分，且原始得分阿萱比阿嘉高 11 分，則以 60 級分制計算阿萱與阿嘉可能同級分
 (3) 假設 A 班學生的原始成績用 60 級分制計算，A 班學測級分的中位數為 40 級分，若改以 15 級分制計算，則 A 班學測級分的中位數為 10 級分
 (4) 假設 A 班學生的原始成績用 15 級分制計算，A 班學測級分的平均為 8.5 級分，若改以 60 級分制計算，A 班學測級分的平均為 34 級分
 (5) 假設 A 班學生的原始成績用 15 級分制計算，A 班學測級分的標準差為 P 級分，若改以 60 級分制計算，A 班學測級分的標準差為 Q 級分，則 $Q \geq 4P$
6. 假設數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ， $Y: y_1, y_2, \dots, y_n$ ，其平均為 μ_x, μ_y ，標準差為 σ_x, σ_y ，相關係數為 $r_{x,y}$ 。
 數據 $P: p_1, p_2, \dots, p_n$ ， $Q: q_1, q_2, \dots, q_n$ ，其平均為 μ_p, μ_q ，標準差為 σ_p, σ_q ，相關係數為 $r_{p,q}$ 。
 下列關於數據統計的相關敘述哪些是正確的？(以下選項的 i 皆為 $i = 1, 2, 3, \dots, n$ 及 α, β 皆為非 0 實數)
- (1) 若 $y_i = \alpha x_i + \beta$ ，則 $\mu_y = \alpha \mu_x + \beta$ (2) 若 $y_i = \alpha x_i + \beta$ ，則 $\sigma_y = \alpha \sigma_x$
 (3) 若 $y_i = \alpha x_i + \beta$ ，則 $|r_{x,y}| = 1$ (4) 若 $q_i = \frac{1}{\sigma_p} p_i - \frac{\mu_p}{\sigma_p}$ ，則 $\mu_p = 1, \sigma_p = 0$
 (5) 假設 Y 對 X 的迴歸直線為 $y = m_1 x + b_1$ ，Q 對 P 的迴歸直線為 $q = m_2 p + b_2$ 。
 若 $m_1 > m_2 > 0$ ，則 $r_{x,y} > r_{p,q}$ 。

7. 設有 10 筆二維數據資料 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{10}, y_{10})$ ，已知 $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 60$ ， $y_1 + y_2 + \dots + y_{10} = 50$ ， X 與 Y 的相關係數為 0.9，且 y 對 x 的迴歸直線通過點 $(4, 1)$ 。令 $x'_i = \frac{x_i - 6}{\sigma_x}$ ， $y'_i = \frac{y_i - 5}{\sigma_y}$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, 10$ 。若 σ_x, σ_y 分別為 X 數據與 Y 數據之標準差，則下列選項哪些是正確的？
- (1) y 對 x 的迴歸直線斜率為 2 (2) 數據 (x_1, y_1) 在直線 $y = 2x - 7$ 上
- (3) $(x'_1)^2 + (x'_2)^2 + \dots + (x'_{10})^2 = 1$ (4) y' 對 x' 的迴歸直線斜率為 0.9
- (5) Y 數據的標準差大於 X 數據的標準差

第三部分：選填題（占 48 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（8-35）
 2. 第 A 題到第 H 題答對得 6 分，答錯不倒扣，該題未完全答對不給分。

- A. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等差數列，且 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ 。已知 $a_{11} = 70$ ， $a_1 + a_2 + a_3 = 831$ ，則 S_n 的最大值為 ⑧ ⑨ ⑩ ⑪。
- B. 某數列 $\langle b_n \rangle$ 共有 25 項，且滿足 $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = 3n^2 - n$ 。若刪去某項 b_k 後，剩下的 24 項算術平均數為 71，則刪除的 $b_k =$ ⑫ ⑬ ⑭。
- C. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = 3$ 及 $a_n = a_{n-1} + 3n + 2^{n-2}$ ， $n \geq 2$ ，則 $a_{13} =$ ⑮ ⑯ ⑰ ⑱。
- D. 等差數列 1, 2, 3, ..., 28, 29 的標準差為 \sqrt{a} ，求整數 $a =$ ⑲ ⑳。
- E. 阿善的班導因大家這次學測數A考得不錯，班導打算發獎學金給班上的每位同學。這次全班最高有 15 級分，最低有 8 級分，全班學測數A的算術平均數為 12 級分，標準差為 2 級分，本次要發放的獎學金依照每個人的學測級分來計算，計算公式為 $y_i = 2x_i^2 - 75$ ，即每位同學的學測級分 (x_i) 平方後再乘以 2 倍，最後再減掉 75，得到最終的數值就是獎學金 (y_i) 。此時班導請阿善計算平均每位同學要發多少獎學金，阿善回答這次獎學金 (y_i) 的算術平均數為 ㉑ ㉒ ㉓ 元。

F. 四數 $a、b、c、d$ 為公比是整數的等比數列，且滿足 $a + d = -52$ ， $b + c = 12$ ，則 $ac - bd =$ ②④ ②⑤ ②⑥ ②⑦。

G. 某學期有 100 位同學報名重補修課程，經系統顯示每位同學報名費的算術平均數為 700 元，標準差為 x 元，後來發現繳費資料有誤，阿豐需繳交 800 元卻輸入成 500 元，阿寬需繳交 700 元卻輸入成 1000 元，若更正後系統顯示的標準差為 y 元，試問 $x^2 - y^2 =$ ②⑧ ②⑨ ③⑦ ③⑧。

H. 已知某數列 $\langle a_n \rangle$ 的前 n 項和 $S_n = 2a_n - 2025$ ，則 $\frac{S_{20}}{S_{10}}$ 的值為 ③② ③③ ③④ ③⑤。

第四部分：混合題（占 12 分）

說明：請將每題答案書寫在答案卷上，未在答案卷上作答者不予計分。

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{2}{3}$ ， $a_n = \frac{3a_{n-1} - 1}{4a_{n-1} - 1}$ ($n \geq 2$)。

- 1. 請計算 $a_2、a_3、a_4$ ，求序對 (a_2, a_3, a_4) 。(填充題，2 分，全對才給分)
- 2. 推測數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項通式。(填充題，2 分)
- 3. 請利用數學歸納法，驗證第 2 題的推測結果。(證明題，8 分)

< 試題結束，請記得檢查，並將答案塗在答案卡上以及書寫在答案卷上，祝考試順利 >

◎參考公式

一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2] - n\mu_X^2}$

二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

相關係數 $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$

班級：一年____班 座號：_____ 姓名：_____ 混合題得分：_____

第四部分：混合題（占 12 分）

說明：請使用黑色或藍色原子筆作答。

1. 第 1 題，請將答案填入空格。（填充題，2 分，全對才給分）
2. 第 2 題，請將答案填入空格。（填充題，2 分）
3. 第 3 題，請將證明過程書寫清晰於框內，本題共 8 分。

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{2}{3}$ ， $a_n = \frac{3a_{n-1} - 1}{4a_{n-1} - 1}$ ($n \geq 2$)。

1. 請計算 a_2 、 a_3 、 a_4 ，求序組 (a_2, a_3, a_4) 。

$(a_2, a_3, a_4) = ($ _____ , _____ , _____ $)$ 。

2. 推測數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項通式。

$a_n =$ _____。

3. 請利用數學歸納法，驗證第 2 題的推測結果。

參考答案 敬請指正

單選題

1. 5	2. 4	3. 3	3. 4
-------------	-------------	-------------	-------------

多選題

5. 1 2	6. 1 3	7. 1 4 5
---------------	---------------	-----------------

填充題

A. 2107	B. 146	C. 4368	D. 70
E. 221	F. -288	G. 1200	H. 1025

混合題

1. $(a_2, a_3, a_4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \frac{5}{9} \right)$ 。

2. $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ 。

3.

1° 當 $n = 1$ 時， $a_1 = \frac{2}{3}$ ， $a_1 = \frac{1+1}{2 \cdot 1+1} = \frac{2}{3}$ ，兩式相等，成立。 (2 分)

2° 假設 $n = k$ 時成立，即 $a_k = \frac{k+1}{2k+1}$ 。 (2 分)

則 $n = k + 1$ 時， $a_{k+1} = \frac{3a_k - 1}{4a_k - 1} = \frac{3 \cdot \frac{k+1}{2k+1} - 1}{4 \cdot \frac{k+1}{2k+1} - 1}$ (2 分)

$$= \frac{\frac{3k+3-2k-1}{2k+1}}{\frac{4k+4-2k-1}{2k+1}} = \frac{k+2}{2k+3} = \frac{(k+1)+1}{2(k+1)+1} \quad \text{亦成立。} \quad (1 \text{ 分})$$

3° 由數學歸納法得知，對所有的正整數 n ，本命題成立。 (1 分)