財團法人大學入學考試中心基金會 112學年度分科測驗試題 數學甲考科

請於考試開始鈴響起,在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

--作答注意事項---

考試時間:80分鐘

作答方式:

- 選擇(填)題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答;更正時以橡皮擦擦拭,切勿使用修正帶(液)。
- 除題目另有規定外,非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答;更正時,可以使用修正帶(液)。
- 考生須依上述規定劃記或作答,若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時,恐將影響成績。
- 答題卷每人一張,不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答,且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例:若答案格式是 (18-2), 而依題意計算出來的答案是 3/8, 則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的 △ 與第 18-2 列的 △ 劃記,如:

例:若答案格式是 $\underbrace{(19-1)(19-2)}_{50}$,而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時,則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的 □ 與第 19-2 列的 □ 劃記,如:

選擇(填)題計分方式:

- 單選題:每題有n個選項,其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者,得該題的分數;答錯、未作答或劃記多於一個選項者,該題以零分計算。
- 多選題: 每題有n個選項,其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定,所有選項均答對者,得該題全部的分數;答錯k個選項者,得該題 $\frac{n-2k}{n}$ 的分數;但得分

低於零分或所有選項均未作答者,該題以零分計算。

- 選填題每題有 n 個空格,須全部答對才給分,答錯不倒扣。
- ※試題中參考的附圖均為示意圖,試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇(填)題(占76分)

一、單選題(占18分)

說明:第1題至第3題,每題6分。

- 1. 坐標平面上,一質點由點 (-3,-2)出發,沿著向量 (a,1)的方向移動 5 單位長之後剛 好抵達 x 軸,其中 a 為正實數。試問 a 值等於下列哪一個選項?
 - (1) $\frac{\sqrt{13}}{2}$ (2) 2 (3) $\sqrt{5}$ (4) $\frac{\sqrt{21}}{2}$ (5) $2\sqrt{6}$

- 2. 放射性物質的半衰期 T 定義為「每經過時間 T,該物質的質量會衰退成原來的一 半」。鉛製容器中有A、B兩種放射性物質,其半衰期分別為 T_A 、 T_B 。開始記錄 時這兩種物質的質量相等,112天後測量發現物質 B的質量為物質 A的質量的四 分之一。根據上述,試問 T_A 、 T_B 滿足下列哪一個關係式?
- (1) $-2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$ (2) $2 + \frac{112}{T_A} = \frac{112}{T_B}$ (3) $-2 + \log_2 \frac{112}{T_A} = \log_2 \frac{112}{T_B}$
- (4) $2 + \log_2 \frac{112}{T_1} = \log_2 \frac{112}{T_2}$ (5) $2\log_2 \frac{112}{T_1} = \log_2 \frac{112}{T_2}$

3. 試問極限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} \left(\sqrt{4n^2 + 9 \times 1^2} + \sqrt{4n^2 + 9 \times 2^2} + \dots + \sqrt{4n^2 + 9 \times (n-1)^2} \right)$$

的值可用下列哪一個定積分表示?

(1)
$$\int_0^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$$

(2)
$$\int_{0}^{3} \sqrt{1+9x^2} dx$$

(1)
$$\int_0^3 \sqrt{1+x^2} \, dx$$
 (2) $\int_0^3 \sqrt{1+9x^2} \, dx$ (3) $\int_0^3 \sqrt{4+x^2} \, dx$

(4)
$$\int_0^3 \sqrt{4+9x^2} \, dx$$
 (5) $\int_0^3 \sqrt{4x^2+9} \, dx$

(5)
$$\int_0^3 \sqrt{4x^2 + 9} \, dx$$

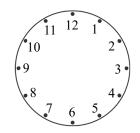
二、多選題(占40分)

說明:第4題至第8題,每題8分。

- 4. 設 a,b 為實數。已知四個數 -3,-1,4,7皆滿足 x 的不等式 $|x-a| \le b$,試選出正確的選項。
 - (1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式 $|x-a| \le b$
 - (2) 3,1,-4,-7滿足x的不等式 $|x+a| \le b$
 - (3) $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 2, \frac{7}{2}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a| \le \frac{b}{2}$
 - (4) b可能等於 4
 - (5) a,b可能相等

- 5. 考慮實係數多項式 $f(x) = x^4 4x^3 2x^2 + ax + b$ 。已知方程式 f(x) = 0有虚根 1 + 2i (其中 $i = \sqrt{-1}$),試選出正確的選項。
 - (1) 1-2i也是 f(x)=0的根
 - (2) a,b 皆為正數
 - (3) f'(2.1) < 0
 - (4) 函數 y = f(x)在 x = 1有局部極小值
 - (5) y = f(x) 圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0

- 6. 設 a,b,c,d,r,s,t 皆為實數,已知坐標空間中三個非零向量 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$ 、 $\overrightarrow{v}=(c,d,0)$ 及 $\overrightarrow{w}=(r,s,t)$ 滿足內積 $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 。考慮三階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$,試選出正確的 選項。
 - (1) 若 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$,則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$
 - (2) 若 $t \neq 0$,則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$
 - (3) 若存在一個向量 $\overrightarrow{w'}$ 滿足 $\overrightarrow{w'} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{w'} \cdot \overrightarrow{v} = 0$ 且外積 $\overrightarrow{w'} \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{0}$,則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$
 - (4) 若對任意三個實數 e,f,g,向量 (e,f,g)都可以表示成 $\overline{u},\overline{v},\overline{w}$ 的線性組合,則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$
 - (5) 若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,則 A的行列式不等於 0
- 7. 有一個依順時針方向依序標示 1,2,...,12 數字的圓形時鐘(如圖所示)。 一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子,然後每次投擲一 枚均匀銅板,依投擲結果,照以下規則移動這枚棋子的位置:



- 若出現正面,將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點
- 若出現反面,將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。

例如:若投擲銅板三次均為正面,則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置,第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數 n,令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置, $P(X_n = k)$ 代表 $X_n = k$ 的機率(其中 k = 1,2,...,12),且令 $E(X_n)$ 代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

- (1) $E(X_1) = 6$
- (2) $P(X_2 = 12) = \frac{1}{4}$
- (3) $P(X_8 = 5) \ge \frac{1}{2^8}$
- (4) $P(X_8 = 4) = P(X_8 = 8)$
- $(5) \quad E(X_8) \leq 7$

- 8. 複數平面上,設 \overline{z} 代表複數z的共軛複數,且 $i=\sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。
 - (1) 若 z = 2i ,則 $z^3 = 4iz$
 - (2) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\alpha$, 則 $|\alpha| = 2$
 - (3) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3 = 4i\alpha$ 且令 $\beta = i\alpha$,則 $\beta^3 = 4i\beta$
 - (4) 滿足 $z^3 = 4iz$ 的所有非零複數 z 中,其主輻角的最小可能值為 $\frac{\pi}{6}$
 - (5) 恰有 3 個相異非零複數 z滿足 $z^3 = 4iz$

三、選填題(占18分)

說明:第9題至第11題,每題6分。

9. 已知平面上直角 $\triangle ABC$ 的三邊長 $\overline{AB} = \sqrt{7}$ 、 $\overline{AC} = \sqrt{3}$ 、 $\overline{BC} = 2$ 。 若分別以 \overline{AB} 與 \overline{AC} 為 底邊在 $\triangle ABC$ 的外部作頂角等於 120° 的等腰三角形 $\triangle MAB$ 與 $\triangle NAC$,

則
$$\overline{MN}^2 = \frac{9-1)(9-2)}{9-3}$$
。(化為最簡分數)

10. 坐標空間中有方向向量為(1,-2,2)的直線L、平面 $E_1:2x+3y+6z=10$ 與平面

 $E_2: 2x + 3y + 6z = -4$ 。則 L 被 E_1 、 E_2 所截線段的長度為 $\frac{(10-1)(0-2)}{(10-3)}$ 。(化為最簡分數)

- 11. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動,規則如下:主辦單位準備編號 1、2、...、9 的牌卡十張,其中編號 8 的牌卡有兩張,其他編號的牌卡均只有一張。從這十張 牌隨機抽出四張,且抽出不放回,依抽出順序由左至右排列成一個四位數。若排 成的四位數滿足下列任一個條件,就可獲得獎品:
 - (1) 此四位數大於 6400
 - (2) 此四位數含有兩個數字 8

例如:若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8,則此四位數為 5828,可獲得獎品。

依上述規則,共有 (11

1-1)	(11-2)	11-3	11-
	\sim	\sim	\sim

4) 個抽出排成的四位數可獲得獎品。

第貳部分、混合題或非選擇題(占24分)

說明:本部分共有 2 題組,選填題每題 2 分,非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題 號的作答區內作答。選擇(填)題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答,更 正時以橡皮擦擦拭,切勿使用修正帶(液)。非選擇題請由左而右橫式書寫,作答 時必須寫出計算過程或理由,否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

設 a,b 為實數,並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形與圓 $\Omega: x^2+y^2-3y+b=0$ 皆通過點 $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$,並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述,試回答下列問題。

- 12. 試求向量 \overrightarrow{CO} 與 \overrightarrow{CP} 夾角的餘弦值。(非選擇題,2分)
- 13. 試證明 y = f(x) 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。(非選擇題, 4分)
- 14. 試求 y = f(x) 圖形上方與 Ω 下半圓弧所圍區域的面積。(非選擇題, 6 分)

15-17 題為題組

坐標平面上,設 Γ 為中心在原點且長軸落在 y軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉 θ 角(其中 $0<\theta<\pi$)的線性變換將 Γ 變換到新橢圓 $\Gamma':40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180$,點 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為 Γ' 上離原點最遠的兩點之一。根據上述,試回答下列問題。

15. 橢圓
$$\Gamma'$$
的長軸長為 $(15-1)$ $\sqrt{(15-2)}$ 。(化為最簡根式)(選填題, 2 分)

- 16. 試求 Γ' 短軸所在的直線方程式與短軸長。(非選擇題, 4分)
- 17. 已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 x軸上,且 P'點的 x坐標大於 0。 試求 P 點的坐標。(非選擇題,6分)

参考公式及可能用到的數值

1. 首項為a,公差為d的等差數列前n項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為a,公比為 $r(r \neq 1)$ 的等比數列前n項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和:
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
; $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式: sin(A+B) = sin A cos B + cos A sin B

$$cos(A+B) = cos A cos B - sin A sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

4. Δ*ABC* 的正弦定理: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin R} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (*R* 為 Δ*ABC* 外接圓半徑)

 $\triangle ABC$ 的餘弦定理: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$,

算術平均數
$$\mu_X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$
 ; 標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} (\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\mu_X^2)}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$

相關係數
$$r_{X,Y} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$$

最適直線(迴歸直線)方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

- 7. 参考數值: $\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\pi \approx 3.142$ $\sin 23^{\circ} \approx 0.40$, $\sin 37^{\circ} \approx 0.60$, $\sin 53^{\circ} \approx 0.80$, $\cos 23^{\circ} \approx 0.92$, $\cos 37^{\circ} \approx 0.80$, $\cos 53^{\circ} \approx 0.60$
- 8. 對數值: $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 5 \approx 0.6990$, $\log 7 \approx 0.8451$
- 9. 若 $X \sim B(n,p)$ 為二項分布,則期望值 E(X) = np,變異數 Var(X) = np(1-p);若 $X \sim G(p)$ 為幾何分布,則期望值 $E(X) = \frac{1}{p}$,變異數 $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$ 。

112年分科測驗答題卷

數學甲考科

112年分科測驗答題卷

財團法人大學入學考試中心基金會

112 學年度分科測驗 數學甲考科

答題卷	
※考試開始鈴響起,經確認確為本人之應試號碼與姓名後,於「確認後考生簽名」欄以正楷簽全名。使用備用	確認答題卷應試號碼與姓名正確無誤

答題卷者,請務必於「確認後考生簽名」欄簽全名。 ※請詳閱試題本上作答注意事項與答題卷劃記及書寫注 意事項。

※選擇題正確作答樣例:

請用正楷簽全名

應試號碼、條碼、姓名 (不得污損、塗改或破壞)

第壹部分、選擇(填)題(占76分)

確認後

考生簽名

注意:考生如未能劃滿方格,或不依試題本之作答注意事項劃記致機器無法正確辨識答案時,恐將影響成績。

_	1	1	2	3	4	5	6 	7	8	9	0	_	±	
_	2	1	2 2 2 2	3	4	5	6	7	8	9 9	0	ā	± ± ±	
_	3	1	2	3	4	5	6	7	8		0 0	_	±	
_	4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	
_	5	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	
_	6	1	2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2 2	3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3	4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5 5	6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6 6	7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7 7	8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8 8	9 9 9 9		_ _ _	± ± = ±	
_	7	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	- - -	±	
_	8	1	2	3	4	5	6 	7	8	9	0	_	± ± ±	
_	9-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	
_	9-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	
_	9-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	
_	10-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	
_	10-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9 9	0	_	±	
_	10-3	1	2	3	4	5	6	7	8	9 9	0	- - - - - - - - - -	± ± ± ± ± ± ± ± ± ± ±	
_	11-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0 0	_	±	
_	11-2	1	2	3	4	5	6	7		9		_	±	
_	11-3		2	3 3	4	5	6 6 —	7 7 —	8 8 —	9	0 0	- - -	±	
_	11-4	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	

第1頁/共4頁

第貳部分、混合題或非選擇題(占24分)

題號	作 注意: 1.應依據題號順序,於作答區內作答。2.除另有規定外,書寫時應由左至右橫式書寫。3.作答須清晰,若未依規定而導致答案難以辨 識或評閱時,恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或無關之文字、圖案符號等。
12	【請用 <u>黑色墨水的筆</u> 作答】
13	【請用 <u>黑色墨水的筆</u> 作答】

第2頁/共4頁

題號	注意:	1.應 識或	依據題	號順序, ,恐將景	於作答區 /響成績	內作答4.不得	作 •2.除另 於作答區	有規定外 書寫姓/	、,書寫B 名、應試	₹ 寺應由左 號碼或系	至右横式 無關之文	品 (書寫。3 字、圖第	.作答須 ※符號等	[清晰,若未依規定而導 2。	事致答案難以辨
14														【請用 <u>黑色墨水</u>	的筆 作答】
15-1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	【請用 <u>2B</u>	鉛筆 作答】
15-2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	_	±	【請用 <u>2B</u>	<u>鉛筆</u> 作答】
16														【請用 <u>黑色墨水</u>	的筆 作答 】

題號	注意:	作 : 1.應依據題號順序,於作答區內作答。2.除另有規定外,書寫時應由左 識或評閱時,恐將影響成績。4.不得於作答區書寫姓名、應試號碼或影	正 至右橫式書寫。3.作答須清晰,若未依規定而導致答案難以辨 無關之文字、圖案符號等。
16			【請用 <u>黑色墨水的筆</u> 作答】
17			【請用 <u>黑色墨水的筆</u> 作答】