答案卷

一、多選題： (每題 5 分。所有選項均答對者得 5 分；錯一個選項得 3 分；錯二個選項得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。共 20 分)

1	2	3	4
(A)(C)(D)(E)	(A)(B)(E)	(B)(D)	(A)(B)(D)

二、填充題： (計分方式如下，共 80 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	56	60	64	68	72	76	80

1	2	3	4
$(4,1,5)$	-2	$(1,7,2)$	0 或 2
5	**6**	**7**	**8**
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$(16,-16)$	$(-6,-4)$	$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
9	**10**	**11**	**12**
$\begin{bmatrix} 1024 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1022 & 2046 \\ -1023 & 2047 \end{bmatrix}$	$4x-5y+3z=1$	$2x-y=-1$
13	**14**	**15**	**16**
$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$(12,3)$	134	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

一、多選題： (每題 5 分。所有選項均答對者得 5 分；錯一個選項得 3 分；錯二個選項得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。共 20 分)

1. 關於點 $P(3,1,2)$、點 $Q(2,0,4)$ 及直線 $L: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-2}{1}$，請選出正確的選項？ __________ 。

   (A) P 點在直線 L 上

   (B) Q 點在直線 L 上

   (C) 直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與直線 L 垂直

   (D) Q 點到直線 L 的距離為 $\sqrt{6}$

   (E) 包含 L 且與直線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 垂直之平面方程式為 $x+y-2z=0$

2. 考慮 x、y、z 的方程組 $\begin{cases} 2^x+3^y-5^z=3 \\ 2^{x+1}+3^y-5^z=5 \\ 2^x+5\cdot 3^y-a\cdot 5^z=16 \end{cases}$ ，其中 a 為實數，請選出正確的選項？ __________ 。

   (A) 若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $x=1$

   (B) 若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $y>0$

   (C) 若 (x,y,z) 為此方程組的解，則 $y<z$

   (D) 當 $a\neq 5$ 時，恰有一組 (x,y,z) 滿足此方程組

   (E) 當 $a=5$ 時，此方程組無解

3. 設 A、B 都是 2 階方陣，O 為 2 階零方陣，I 為 2 階單位方陣，請選出正確的選項？ __________ 。

   (A) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 恆成立

   (B) 若 $A^2=I$，則 $(ABA)^3=AB^3A$

   (C) 若 $A\neq O$ 且 $AB=AC$，則 $B=C$

   (D) $A^3-I=(A-I)(A^2+A+I)$ 恆成立

   (E) 若 $AB=O$，則 $A=O$ 或 $B=O$

4. 所謂「轉移矩陣」必須滿足下列兩個條件：(甲)該矩陣的每一個位置都是一個非負的實數；(乙)該矩陣的每一行的數字相加都等於 1，今設 A、B 是兩個 2×2 的轉移矩陣，C 是一個 2×1 的轉移矩陣，請選出正確的選項？ __________ 。

   (A) A^2 是轉移矩陣

   (B) AC 是轉移矩陣

   (C) $2A$ 是轉移矩陣

   (D) $\frac{1}{2}(A+B)$ 是轉移矩陣

   (E) $\frac{1}{4}(A^2+B^2)$ 是轉移矩陣

二、填充題： (計分方式如下，共 80 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	56	60	64	68	72	76	80

1. 已知 $A(2,3,1)$，$B(3,2,3)$ 是空間中的二點，求直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與平面 $3x-2y+z=15$ 的交點坐標。 ① 。

2. 空間中，一道雷射光由點 $A(a,3,-4)$ 射向點 $B(4,0,8)$，行走的路徑中與 y 軸交於 C 點，求 a 之值為 ② 。

3. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a & 5 \\ 2 & b & -3 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & c \end{bmatrix}$ 經過列運算後， 得 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，求序對 (a,b,c) 爲 ___3___。

4. 已知聯立方程式 $\begin{cases} x+ay+3z=0 \\ x+2y+(a+1)z=0 \\ x-2y+5z=0 \end{cases}$ 除了 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 的解，尚有其他解，求 a 的值爲 ___4___。

5. 已知矩陣 A、B 滿足 $A+B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，$A-B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，求 $A^2-B^2=$ ___5___。

6. 已知矩陣 $I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$，設 $(I-A)^5=aI+bA$，求序對 $(a,b)=$ ___6___。

7. 已知矩陣 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的反方陣爲 $\begin{bmatrix} 3 & \pi \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$，則聯立方程式 $\begin{cases} ax+by=-2 \\ cx+dy=0 \end{cases}$ 的解 $(x,y)=$ ___7___。

8. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，且 $B=APA^{-1}$，求
(1) 矩陣 $B=$ ___8___。　(2) 矩陣 $B^{10}=$ ___9___。　(3) 矩陣 $P^{10}=$ ___10___。

9. 空間中，設點 $P(1,0,-1)$，直線 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-3}{2}=\dfrac{z-4}{2}$，$L_2: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-3}{2}$，試求下列各題：
(1) 通過點 P 且包含直線 L_1 的平面方程式爲 ___11___。　(2) 包含直線 L_1 與 L_2 的平面方程式爲 ___12___。
(3) 直線 L_1 與 L_2 的距離爲 ___13___。

10. 設聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 恰有一組解 $(4,2)$，求聯立方程式 $\begin{cases} a_1x+2b_1y-3c_1=0 \\ a_2x+2b_2y-3c_2=0 \end{cases}$ 的解爲 $(x,y)=$ ___14___。

11. 菲歐烈王國中，有衆多魔導士公會，其中妖精的尾巴、蛇姬之鱗、青色天馬三大魔導士公會組成了一個策略聯盟，開始時各有 72、144、144 位魔導士，爲了讓魔導士們吸取其他公會的良好經驗，所以進行兩次移地修業。每次移地修業都是：將當時妖精的尾巴魔導士中的 $\dfrac{1}{4}$ 移到蛇姬之鱗、$\dfrac{1}{4}$ 移到青色天馬；將當時蛇姬之鱗魔導士中的 $\dfrac{1}{6}$ 移到妖精的尾巴、$\dfrac{1}{3}$ 移到青色天馬；將當時青色天馬魔導士中的 $\dfrac{1}{2}$ 移到妖精的尾巴、$\dfrac{1}{3}$ 移到蛇姬之鱗。則兩次的移地修業後，妖精的尾巴有 ___15___ 位魔導士。

12. 對於正整數 n，設 $(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\cdot\sqrt{2}$，其中 a_n、b_n 爲有理數，從恆等式 $(1+\sqrt{2})^{n+1}=(1+\sqrt{2})^n(1+\sqrt{2})$ 可推得 a_n、a_{n+1}、b_n、b_{n+1} 會滿足矩陣乘法 $\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ b_{n+2} \end{bmatrix}=T\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ b_n \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$，試求矩陣 $T=$ ___16___。(寫對一個即給分。)

答案卷

一、多選題：　(每題 5 分。所有選項均答對者得 5 分；錯一個選項得 3 分；錯二個選項得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以 0 分計算。共 20 分)

1	2	3	4

二、填充題：　(計分方式如下，共 80 分)

答對格數	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
得分	6	12	18	24	30	36	42	48	52	56	60	64	68	72	76	80

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16