21112 송재은

안녕하십니까? 저희는 2학년 11반 송재은, 이수연, 최가은, 최승현입니다. 최적화된 전염병 확산 모델링 및 시뮬레이션을 주제로 발표를하겠습니다. 수많은 전염병 중에서도 올해 5-6월 우리나라에서 급격히 퍼진 MERS에 관해 수리모델을 만들어보았습니다.

먼저, MERS란 무엇일까요? Middle East Respiratory Syndrome 의 약자로 중동 호흡기 증후군이라고 해석됩니다. 서아시아에서 발생한 코로나 바이러스에 의한 질병으로 치사율은 약 40%로 상당히 높습니다. (주요 증상은 발열, 기침, 숨이 차는 것으로 설사 등의 소화기 증상도 있습니다.)

그런데 우리나라에서 확산된 메르스는 중동과는 구별되는 독특한 점이 있습니다. 먼저, 한국형 메르스라는 뜻의 ‘코르스’라는 신조어가 생겼을 정도로 우리나라에서 유행한 메르스는 유난히 빠르게 전파되었으며 다수를 감염시킨 ‘슈퍼전파자’가 여러 명 생겼습니다.

이러한 메르스와 같은 전염병 확산을 파악하고 예측하기 위해 직접 실험하는 것이 불가능하므로 전염병 모델링은 상당히 중요합니다. 모델링을 통해 전염병의 전파추세나 특징을 알수 있으며 추후에 비슷한 질병이 발생했을 경우 예측하는데 도움이 된다. 특히 우리나라에서 메르스의 경우, 빠르게 전파될 뿐만 아니라 현재 백신과 마땅한 치료법이 없어, 환자의 증상을 완화시키는 정도의 치료밖에 이루어지지 않고 있는 상황이기에 수리모델이 더더욱 중요하다고 할 수 있습니다.

21124 최가은

수리 모델은 시간별 실제 데이터를 이용하여 유사한 전염병 발병 시 질병 확산을 예측하거나 적합한 대책을 세우는데 요긴하게 쓰입니다. 또한 수리 모델로 만들어 놓았을 때 대응 방법을 검토하고 효과적인 초기 대응 방법을 강구하는데 유용합니다. 이런 이유로 우리나라 데이터로 만든 모델이 필요하기 때문에 저희는 SIR 모델로 수리 모델링을 했습니다.

저희는 SIR 모델을 이용했는데요, 이 모델을 예를 들어 설명하자면 반에서 한 아이가 감기에 걸렸다고 생각했을 때 감염 가능한 집단인 S는 그 아이를 제외한 반 아이들, I 집단은 감기에 걸린 아이, 그리고 R 집단은 감기에 걸렸다가 다 나았거나 죽은 아이들이 됩니다.

이 모델에서는 몇 가지 가정을 전제로 하고 들어가는데요. 저희 모델에서는 질병의 잠복기, 새로 태어나는 인구, 메르스 이외의 원인으로 사망한 인구는 고려하지 않습니다. 따라서 전체 인구 N은 S, I, R 집단의 모든 인구를 더한 값과 같습니다. 베타, 감마는 각각 감염률과 회복률로서 dS dt, dI dt, dR dt의 각 식은 각 집단의 변화량을 의미합니다. 이 항은 써쎕티블 집단에서 감염되어 인펙티드 집단으로 이동하는 인구 수, 이 항은 인펙티드 집단에서 회복되거나 죽어서 리무브드 집단으로 이동하는 인구 수를 나타냅니다.

앞서 소개한 SIR모델을 만드는데 기초가 되는 몇 가지 수치해법 이론을 설명하겠습니다.

먼저, 유한차분법입니다. 미분식을 차분화된 식으로 해석하는 유한의 개념을 도입하여 차분식을 작성합니다. 차분식은 미분식의 근사치를 구하는 것이며 컴퓨터는 제공된 데이터를 처리하는 역할만 하기 때문에 무수히 많은 수를 계산함으로써 근사치를 구하게 됩니다. 이 과정에서 발생하게 된 오차는 테일러급수로서 처리가 됩니다. 이 때, 테일러 방법의 가장 기초적인 형태는 오일러 방법이고, 이는 오차를 줄이기 위해 테일러급수법을 보완한 것입니다. 곧 보게 되실 코드는 오일러 방법을 이용하여 방정식의 수치해를 계산하는 MATLAB 코드입니다.

21126 최승현

저희가 이용한 유한차분법은 테일러정리입니다. 테일러정리는 수치해석학에서 가장 널리 쓰이는 정리들 중 하나입니다. 그 정의는 어느 구간에 미분가능한 함수를 유한 테일러 다항식과 근접할수록 0에 가까워지는 오류항의 합으로 표현할 수 있다는 것 입니다. 이것을 이용하여 비선형방정식을 선형방정식으로 근사하여 미분에 대한 유한차분식을 유도합니다. 함수 f가 한 개의 변수를 갖고, 실수집합에서 실수 집합으로 가는 매끄러운 함수일 때 테일러정리는 이러한 식으로 나타내어지고, 이때 이 항을 오차항이라고 합니다. 이 항을 정적분으로 나타내면 이런 식을 만족하고 이에 대한 증명은 정적분의 기본정리를 이용하고 식을 이렇게 변형한 뒤. 여러 차례 부분적분을 함으로써 테일러정리의 식을 구할 수 있습니다..

이러한 테일러 정리를 이용한 수치해법 중 가장 기본적인 방법인 오일러 방법을 선택했습니다. 이 방법은 테일러 일차 다항식까지 전개한 식을 사용하여 격자점에서 근사해를 구하는 방법입니다. 이 방법은 초기값이 주어지고 구하고자 하는 해의 미분방정식을 알 때 사용할 수 있습니다. 이것을 기하학적으로 보자면 이 파란색이 해의 그래프, 빨간색은 간격이 이 간격만한 격자점에서 오일러 방법을 이용하여 구한 근사해에 대한 그래프가 이렇게 나타납니다. 격자점 이외의 부분은 보간법을 통해 구합니다.

21114 이수연

저희는 시물레이션 프로그램인 맷랩 코드를 이용하여 SIR 모델로 계산되는 데이터와 실제 인펙티드 및 리무브드 인구 데이터를 맞추는 작업을 했습니다. 한국 메르스 공식 홈페이지에 게시된 자료를 참고로 하여 5월20일부터 7월 31일까지 감염자 수를 exI, 사망자와 회복된 사람 수의 합을 exR 이렇게 행렬로 넣고 그래프에 나타나도록 했습니다. 그리고 SIR 모델에서 첫날 감염자 2명, 리무브드 0명을 초기값으로 입력하고 전체 인구를 대한민국 인구로 해서 오일러 방법으로 풀 수 있게 코드를 짭니다. 그리고 베타와 감마에 어떤 식이나 수를 넣어서 코드를 실행하면 실제 데이터와 계산된 데이터가 그래프에 표시되고, 이걸 보면서 데이터가 서로 최대한 일치하는 베타 감마 값을 찾아보았습니다. 저희는 베타 감마를 어떻게 맞추느냐에 따라 네 가지 코드를 사용했는데요, 모두 기본적으로 지금 설명 드린 것과 같은 방식을 사용합니다.

첫 번째로는 베타 감마에 상수를 넣었는데, 이 경우에는 감염자 수는 늘어났다가 줄어드는데 감염율과 회복률은 상수로 계속 일정하기 때문에 감염자와 회복자가 실제보다 너무 많아집니다.

그래서 두 번째 코드에서는 이렇게 시간에 따라 감염률 베타가 감소하도록 익스포넨셜 함수로 정했습니다. 두 방법 모두 베타 감마에 들어갈 값을 일일이 대입해서 노가다로 찾았습니다.

이렇게 찾으면 정확도도 떨어지고 시간도 오래 걸리기 때문에 세 번째 코드에서는 오차가 최소인 값을 자동으로 찾도록 했습니다. 간단히 설명 드리자면, 베타와 감마를 각각 5%비율로 증가 감소시켜서 오차를 행렬로 나타내고, 그 값이 가장 작은 원소를 찾은 뒤에, 여기에 해당하는 베타 감마 값을 다시 정의해서 이 과정을 반복합니다. 이때 저희가 사용하는 오차는 계산된 값과 실제 값의 오차의 제곱을 평균 내서 루트를 씌운 것으로, 알엠에스이라는 오차 구하는 방법입니다.

마지막 코드에서는 전체를 첫날부터 열 번째 날, 열 번째 날부터 열아홉 번째 날 이런 식으로 열흘 길이로 나누어서 구간별 베타와 감마를 구했습니다. 앞에서는 전체적인 오차를 줄이는데 초점을 두고 베타 감마 값을 찾았다면, 이 코드에서는 앞의 구간의 마지막 값이 다음 구간의 첫 번째 값이 되기 때문에 오차를 줄이기 위해서 이렇게 구간의 처음 값과 끝 값을 맞추었습니다. 그래서 모든 구간을 한번에 그래프로 나타내면 이렇게 됩니다.

이렇게 보면 베타와 감마 값이 메르스 확산과 비슷한 추세로 증가했다가 감소하는 것을 확인할 수 있었습니다. 그리고 이 값을 바탕으로 기초 복제율을 구했는데요. 기초 복제율 알 제로는 전염병 모델링을 하는데 중요하게 보는 값 중에 하나로, 이게 1보다 크면 질병 확산이 늘어나고, 작으면 줄어드는 것으로 생각됩니다. 그래서 시간에 따른 기초 복제 비율을 구하면, 감염이 많이 일어날 때는 값이 컸다가 질병 확산이 주춤하면서 값이 줄어든다는 것을 확인 수 있습니다.

SIR 모델을 사용하여 국내에서의 메르스 확산 데이터를 수치적으로 분석했고, 실제 데이터와 최대한 일치하는 감염률과 회복률 값을 구했다. 이 때 감염률과 회복률은 감염자 수 변화 추세와 비슷하게 증가했다가 다시 감소하고, 기초 재생산 비율은 질병의 확산이 약화됨에 따라 감소하는 것을 확인할 수 있었다. 이러한 방식의 모델링을 통해 유사한 전염병이 발병할 경우에 시기별 감염 추이를 예측하고 적절한 시기에 백신 투여, 병실 수 확대, 환자 격리 등의 방법으로 대응할 수 있다.

21126 최승현

테일러정리는 비선형방정식을 선형방정식으로 근사하여 나타내는 정리입니다. 예를들어 해의 그래프가 이러한 개형을 가질 때 테일러 정리를 이용한 선형방정식은 이러한 그래프를 가지게 되는 식 입니다. 이를 통해 유한한 계산만 가능한 컴퓨터 미분에 대한 유한차분법을 유도할 수 있습니다. 함수 f가 한 개의 변수를 갖는 함수이고, 실수집합에서 실수 집합으로 가는 매끄러운 함수일 때 다음과 같이 나타낼 수 있습니다. 이 정리에 대한 증명은 정적분의 기본정리와 부분적분을 통해 할 수 있고 R함수는 다음과 같은 극한값을 만족하게 됩니다. R함수는 x0와 h가 변수인 함수로써 테일러 전개의 k번째 항에대한 일반항, 나머지항이 됩니다.

오일러 방법은 테일러 일차 다항식까지 전개한 식에서 오차항인 이것을 고려하지 않고 좌표점에 대한 근사 해를 구하는 방법입니다.