

УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ФАКУЛЬТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ
«Моделирование движения в среде Wolfram Mathematica»

Выполнил студент:

Ярощук Владислав Викторович

Группа:

М3108

Проверил:

Санкт-Петербург, 2019 г.

Содержание

1. Задачи	2
2. Решение задач	3
2.1. Прямолинейное движение под действием переменной силы	3
2.2. Визуализация движения с потерей энергии	5
2.3. Визуализация баллистического движения	7
3. Вывод	9

Часть 1

Задачи

1. Используя функционал Wolfram Mathematica, получить графики изменения координаты и ускорения тела, движущегося под действием переменной силы;

2. Используя функционал Wolfram Mathematica, визуализировать движение тела с потерей энергии в результате отскока;

3. Используя функционал Wolfram Mathematica, визуализировать движение тела по баллистической траектории с учетом силы сопротивления воздуха.

Часть 2

Решение задач

2.1. Прямолинейное движение под действием переменной силы

Требуется получить график изменения переменной силы, а также ускорения и координаты тела, на которое эта сила действует. Сила задана кусочной функцией:

$$F(t) = \begin{cases} 3t, & t \leq 5 \\ 0, & 5 < t \leq 10 \\ -2t, & t > 10 \end{cases}$$

Получим уравнения и ускорения и координаты тела:

$$a(t) = \frac{F(t)}{m}$$
$$x(t) = \int a(t) dt$$

Моделируем движение тела в Wolfram Mathematica. Используем инструменты: **Piecewise**, **Integrate**, **Plot**.

Листинг программы Mathematica:

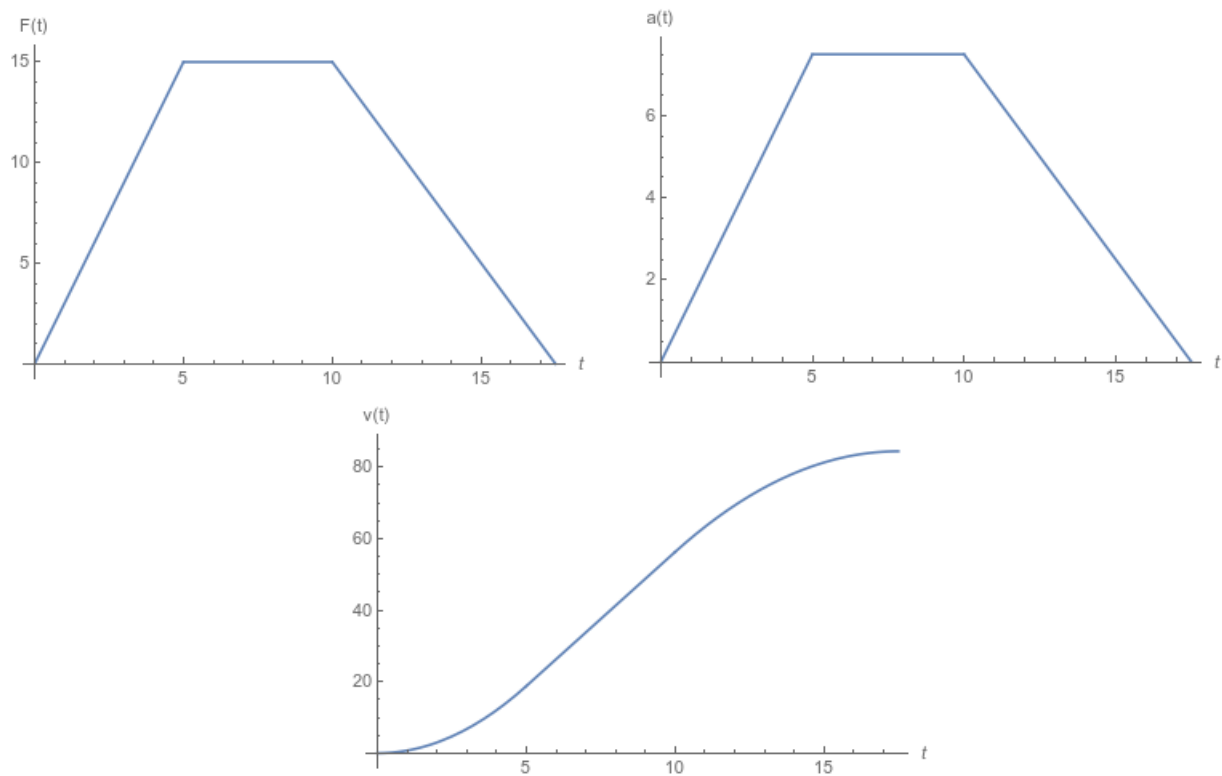
```
1 (* Исходные параметры *)
2 m = 2;
3 F1[t_] = 3*t;
4 F2[t_] = 0;
5 F3[t_] = -2*t;
6
7 (* Кусочно заданная функция силы от времени *)
8 F[t_] = Piecewise[
9   {
10    {F1[t], t <= 5},
11    {F[5] + F2[t - 5], 5 < t <= 10},
12    {F[10] + F3[t - 10], t > 10}
13   }, 0
14 ];
15
16 (* Функции ускорения и координаты от времени *)
17 a[t_] = F[t] / m;
```

```

18 x[t_] = Integrate[a[t], t];
19
20 (* Построение графиков *)
21 Plot[F[t], {t, 0, 17.5}, AxesLabel -> {t, "F(t)"}]
22 Plot[a[t], {t, 0, 17.5}, AxesLabel -> {t, "a(t)"}]
23 Plot[x[t], {t, 0, 17.5}, AxesLabel -> {t, "v(t)"}]

```

Полученные графики:



2.2. Визуализация движения с потерей энергии

Требуется визуализировать движение тела, брошенного горизонтально, с учетом «отскока» от поверхности с потерей энергии. Для упрощения модели потеря энергии при каждом соударении составляет 20% от исходной.

Имеем уравнения движения тела в проекциях на оси:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}; \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \end{aligned}$$

По второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

В проекциях на оси:

$$\begin{aligned} Oy : ma_y &= -mg; \quad a_y = -g; \\ Ox : ma_x &= 0; \quad a_x = 0 \end{aligned}$$

Конечные уравнения движения тела:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}; \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}t \end{aligned}$$

Конечная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = v_0; \\ x''(t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases}$$

Дополнительное условие для моделирования «отскока» при итеративном поиске численных решений дифференциальных уравнений:

$$y'(t) = \begin{cases} -0.8 * y'(t), & \text{если } y(t) = 0 \\ y'(t), & \text{иначе} \end{cases}$$

Пояснение: при касании поверхности телом вертикальная скорость инвертируется с потерей 20% (происходит «отскок» с потерей энергии)

Моделируем движение тела в Wolfram Mathematica. Используем инструменты: **NDSolve**, **Evaluate**, **ParametricPlot**, **WhenEvent**.

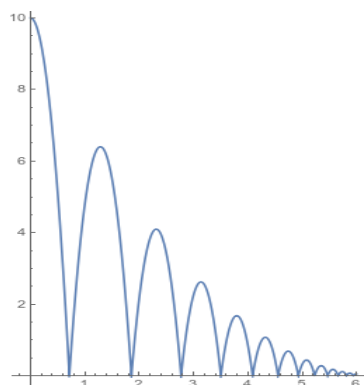
Листинг программы Mathematica:

```

1 (* Исходные параметры *)
2 g = 9.8;
3 y0 = 10;
4 v0x = 0.5;
5
6 (* Получение численного решения систем дифференциальных уравнений *)
7 ndsY = NDSolve[
8   {y''[t] == -g, y[0] == y0, y'[0] == 0,
9     WhenEvent[y[t] == 0, y'[t] -> -0.8 y'[t]]},
10  y,
11  {t, 0, 15}
12 ];
13
14 ndsX = NDSolve[
15   {x''[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == v0x},
16   x,
17   {t, 0, 15}
18 ];
19
20 (* Построение графика *)
21 ParametricPlot[
22   Evaluate[{x[t], y[t]} /. Flatten@{ndsX, ndsY}],
23   {t, 0, 12}
24 ]
25

```

Полученный график:



2.3. Визуализация баллистического движения

Требуется визуализировать движение тела, брошенного под углом к горизонту с учетом сопротивления ветра. Для упрощения модели сопротивление ветра задается постоянной силой, направленной против направления проекции начальной скорости тела на ось Ox .

Имеем уравнения движения тела в проекциях на оси:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2}; \\ x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \end{aligned}$$

Разложим начальную скорость на проекции

$$\begin{aligned} v_{0y} &= v_0 \cdot \sin(\alpha); \\ v_{0x} &= v_0 \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

По второму закону Ньютона:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}}$$

В проекциях на оси:

$$\begin{aligned} Oy : ma_y &= -mg; \quad a_y = -g; \\ Ox : ma_x &= -F_{\text{сопр}} \quad a_x = -\frac{F_{\text{сопр}}}{m} \end{aligned}$$

Конечные уравнения движения тела:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_0 t \cdot \sin(\alpha) - \frac{gt^2}{2}; \\ x(t) &= x_0 + v_0 t \cdot \cos(\alpha) - \frac{F_{\text{сопр}} t^2}{2m} \end{aligned}$$

Конечная система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ x'(0) = v_0 \cdot \cos(\alpha); \\ x''(t) = \frac{-F_{\text{сопр}}}{m} \end{cases}; \quad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = v_0 \cdot \sin(\alpha) \\ y''(t) = -g \end{cases}$$

Моделируем полет тела в Wolfram Mathematica. Используем инструменты **NDSolve**, **Evaluate**, **ParametricPlot**

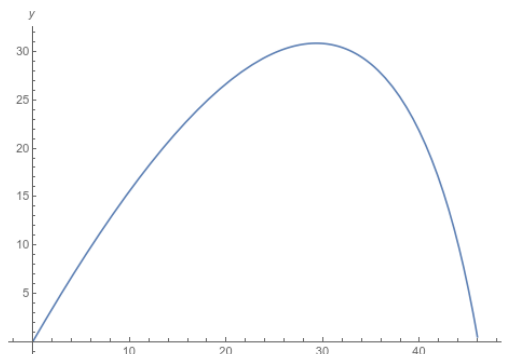
Листинг программы Mathematica:

```

1 (* Исходные параметры *)
2 v = 28.4;
3 angle = Pi/3;
4 g = 9.8;
5 ResistForce = 4;
6 Mass = 2;
7
8 (* Получение численного решения систем дифференциальных уравнений *)
9 ndsY = NDSolve[
10   {y''[t] == -g, y'[0] == v * Sin[angle], y[0] == 0},
11   y,
12   {t, 0, 10}
13 ];
14
15 ndsX = NDSolve[
16   {x''[t] == -ResistForce / Mass, x'[0] == v * Cos[angle], x[0] == 0},
17   x,
18   {t, 0, 10}
19 ];
20
21 (* Построение графика *)
22 ParametricPlot[
23   {Evaluate[{x[t], y[t]} /. Flatten[{ndsX, ndsY}]}],
24   {t, 0, 5},
25   AxesLabel -> {x, y}
26 ]
27

```

Полученный график:



Часть 3

Вывод

Выполнены поставленные задачи:

- Построены графики зависимости координаты и ускорения тела от времени, движущегося под действием переменной силы;
- Построена визуализация движения тела с потерей энергии в результате отскока;
- Построена визуализация движения тела, брошенного под углом к горизонту, с учетом силы сопротивления воздуха.

Для выполнения были использованы инструменты Wolfram Mathematica:

- Plot - построение двумерных графиков функций;
- ParametricPlot - построение двумерных графиков параметрически заданных функций;
- NDSolve - численное решение систем дифференциальных уравнений;
- Evaluate - интерполяция дискретных значений функции, полученной в результате численного решения систем дифференциальных уравнений;
- WhenEvent - реагирование на событие (равенство функции нулю);
- Piecewise - кусочное задание функций;
- Integrate - интегрирование функций.