附录　参考答案

第23章　四边形

23.1(1)　多边形的内角和

1 B　2 B　3 D　4 7　5 50°　6 18°　7 120°

8 135°　[提示:设这个内角度数为 $x°$,边数为 n,则 $(n-2)\times180-x=2025$,所以 $n=\frac{2385+x}{180}$。因为 n 为正整数,$0°<x<180°$,所以 $n=14$,所以这个内角度数为 $180°\times(14-2)-2025°=135°$。]

9 72°　[提示:连接 CD,因为五边形 $CDEFG$ 的内角和为 $(5-2)\times180°=540°$,$\angle E=\angle F=\angle G=108°$,所以 $\angle CDE+\angle DCG=540°-(\angle E+\angle F+\angle G)=540°-108°\times3=216°$,所以 $\angle ADC+\angle BCD=\angle CDE+\angle DCG-(\angle BCG+\angle ADE)=216°-72°\times2=72°$,所以 $\angle A+\angle B=\angle ADC+\angle BCD=72°$。]

10 81°　[提示:正五边形 $ABCDE$ 的内角为 $\frac{(5-2)\times180°}{5}=108°$,所以 $\angle E=\angle EAB=108°$,因为四边形 $ABFG$ 为正方形,所以 $\angle ABG=45°$,所以 $\angle BHE=360°-108°-108°-45°=99°$,所以 $\angle DHB=180°-99°=81°$。]

11 从 n 边形的每个顶点出发,都有 $(n-3)$ 条对角线,去掉重复的,n 边形共有 $\frac{n(n-3)}{2}$ 条对角线。根据题意,可得 $n=\frac{n(n-3)}{2}$,即 $n^2-5n=0$,解得 $n=5$ 或 $n=0$(不符合题意,舍去),所以该 n 边形内角和为 $(5-2)\times180°=540°$。

12 (1) 115, 140　(2) $\angle P=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$　[提示:因为 DP、CP 分别平分 $\angle ADC$ 和 $\angle BCD$,所以 $\angle PDC=\frac{1}{2}\angle ADC$, $\angle PCD=\frac{1}{2}\angle BCD$, 所以 $\angle DPC=180°-\angle PDC-\angle PCD=180°-\frac{1}{2}\angle ADC-\frac{1}{2}\angle BCD=180°-\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle BCD)=180°-\frac{1}{2}(360°-\angle A-\angle B)=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$,即 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$。]　(3) $\angle P=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle E)-90°$。理由如下:五边形 $ABCDE$ 的内角和为 $(5-2)\times180°=540°$,因为 DP、CP 分别平分 $\angle EDC$ 和 $\angle BCD$,所以 $\angle PDC=\frac{1}{2}\angle EDC$, $\angle PCD=\frac{1}{2}\angle BCD$,所以 $\angle P=180°-\angle PDC-\angle PCD=180°-\frac{1}{2}\angle EDC-\frac{1}{2}\angle BCD=180°-\frac{1}{2}(\angle EDC+\angle BCD)=180°-\frac{1}{2}(540°-\angle A-\angle B-\angle E)=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle E)-90°$,即 $\angle P=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle E)-90°$。

13 (1) 由题意得：$\angle 1 = 360^\circ - 3 \times \frac{(5-2) \times 180^\circ}{5} = 36^\circ$。

(2) 五边形的内角和为 $(5-2) \times 180^\circ = 540^\circ$。因为 $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$，所以 $\angle A = 540^\circ - 120^\circ \times 4 = 60^\circ$。

(3) 3 块正三角形地砖与 2 块正方形地砖可以进行共顶点组合镶嵌。理由：设有 x 个正三角形，y 个正方形，若想进行共顶点组合镶嵌，则 $60x + 90y = 360$，即 $2x + 3y = 12$，这个二元一次方程的正整数解为 $x = 3$，$y = 2$，所以 3 块正三角形地砖与 2 块正方形地砖可以进行共顶点组合镶嵌。

23.1（2） 多边形的外角和

1 B 2 D 3 A 4 90°

5 6，120° [提示：多边形的内角和一定是 180° 的整数倍。因为 $840 \div 180 = 4 \cdots\cdots 120$，所以这个多边形的边数为 $4 + 2 = 6$，$\alpha = 120^\circ$。]

6 90° 7 90

8 35 [提示：设这个多边形的边数是 n，则 $(n-2) \cdot 180^\circ = 360^\circ \times 4$，解得 $n = 10$。则从这个多边形一个顶点可以引 7 条对角线，故这个多边形共有 $\frac{10 \times 7}{2} = 35$(条) 对角线。]

9 95° [提示：五边形的内角和为 $(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$，所以 $\angle BCD + \angle EDC = 540^\circ - 140^\circ - 120^\circ - 90^\circ = 190^\circ$。又因为 CP 和 DP 分别是 $\angle BCD$、$\angle EDC$ 的外角平分线，所以 $\angle PCD + \angle PDC = \frac{1}{2}(360^\circ - \angle BCD - \angle EDC) = 85^\circ$，所以 $\angle CPD = 95^\circ$。]

10 12 [提示：正三角形的内角为 60°，所以正 n 边形的内角是 $\frac{1}{2} \times (360^\circ - 60^\circ) = 150^\circ$，所以正 n 边形的外角是 $180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$，所以正 n 边形的边数 $n = 360 \div 30 = 12$。]

11 (1) 设这个多边形的边数为 n，则 $45^\circ \times n = 360^\circ$，解得 $n = 8$。所以这个多边形的边数为 8。

(2) 这个多边形的内角和为 $(n-2) \times 180^\circ = (8-2) \times 180^\circ = 1080^\circ$。

12 设这个多边形的一个外角的度数为 x，由 $x = \frac{1}{4}(180^\circ - x)$，解得 $x = 36^\circ$，可得多边形的边数为 $360^\circ \div 36^\circ = 10$。由边数可得内角和为 $(10-2) \times 180^\circ = 1440^\circ$。

13 连接 CG，因为 $\angle COG = \angle AOB$，所以 $\angle 6 + \angle 7 = \angle OCG + \angle OGC$。在五边形 $CDEFG$ 中，$\angle 1 + \angle 2 + \angle OCG + \angle OGC + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 540^\circ$，所以 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 + \angle 7 = 540^\circ$。

习题 23.1

1 C 2 B 3 D 4 6 5 7 6 7 7 100° 8 180°或 360°或 540°

9 130° [提示：因为 $2700 < 2750 < 2880$，即 $180 \times 15 < 2750 < 180 \times 16$，所以 $\angle A = 2880^\circ -$

$2750°=130°$。]

10 175° [提示：因为 $\angle A+\angle B+\angle ADC+\angle BCD=360°$，$\angle A+\angle B=200°$，所以 $\angle ADC+\angle BCD=360°-(\angle A+\angle B)=160°$。因为 DO_1 平分 $\angle ADC$，CO_1 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle O_1DC=\frac{1}{2}\angle ADC$，$\angle O_1CD=\frac{1}{2}\angle BCD$，所以 $\angle O_1DC+\angle O_1CD=\frac{1}{2}(\angle ADC+\angle BCD)$。因为 DO_2 平分 $\angle O_1DC$，CO_2 平分 $\angle O_1CD$，所以 $\angle O_2DC+\angle O_2CD=\frac{1}{2}(\angle O_1DC+\angle O_1CD)=\frac{1}{2^2}(\angle ADC+\angle BCD)$。同理可得 $\angle O_5DC+\angle O_5CD=\frac{1}{2^5}(\angle ADC+\angle BCD)=\frac{1}{32}\times160°=5°$，所以 $\angle CO_5D=180°-(\angle O_5DC+\angle O_5CD)=175°$。]

11 设这个多边形的一个内角为 x，外角为 $\frac{1}{5}x$。根据题意得 $x+\frac{1}{5}x=180°$，解得 $x=150°$，则 $360°\div(180°-150°)=360°\div30°=12$。所以该多边形的边数是 12。

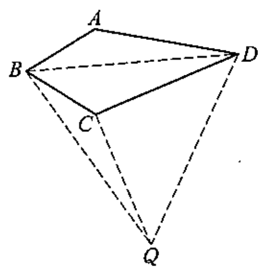
12 (1) 填表如下：

正多边形的边数	3	4	5	6	…	18
$\angle\alpha$ 的度数	60°	45°	36°	30°	…	10°

(2) 不存在，理由如下：假设存在正 n 边形使得 $\angle\alpha=21°$，则其一个外角的度数为 $21°\times2=42°$，$n=\frac{360°}{42°}=\frac{60}{7}$，所以不存在正 n 边形使得 $\angle\alpha=21°$。

13 (1) 在四边形 $ABCD$ 中，因为 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360°$，$\angle B=60°$，$\angle D=30°$，所以 $\angle A+\angle C=360°-60°-30°=270°$。

(2) AD、BD、CD 三者之间的等量关系为 $BD^2=AD^2+CD^2$，理由如下：如图，连接 BD，以 BD 为边向下作等边三角形 $\triangle BDQ$，连接 CQ，则 $\angle DBQ=60°$，$BD=BQ=DQ$，因为 $\angle ABC=\angle DBQ=60°$，所以 $\angle ABD=\angle CBQ$。在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBQ$ 中，因为 $\begin{cases}AB=CB,\\ \angle ABD=\angle CBQ,\\ BD=BQ,\end{cases}$ 所以



第 13 题图

$\triangle ABD\cong\triangle CBQ$(SAS)，所以 $AD=CQ$，$\angle A=\angle BCQ$。因为 $\angle A+\angle BCD=\angle BCQ+\angle BCD=270°$，所以 $\angle DCQ=90°$，所以 $CD^2+CQ^2=DQ^2$。因为 $CQ=AD$，$DQ=BD$，所以 $BD^2=CD^2+AD^2$。

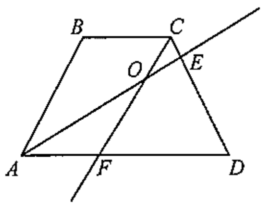
14 (1) $\angle1=\angle B$

(2) 因为 $CF\perp BD$，所以 $\angle BGC=90°$，所以 $\angle CBD+\angle BCG=90°$。又因为 $\angle BAC=\angle CBD$，所以 $\angle BAC+\angle BCG=90°$。因为 AC、CF 分别平分 $\angle BAD$、$\angle BCD$，所以 $\angle BAD=2\angle BAC$，$\angle BCD=2\angle BCG$，所以 $\angle BAD+\angle BCD=2(\angle BAC+\angle BCG)=180°$，所以四边

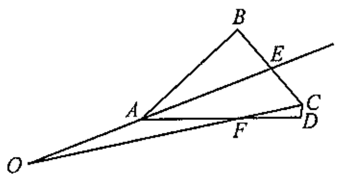
形 $ABCD$ 是对补四边形。

(3) 如图①，由四边形 $ABCD$ 是对补四边形，可得 $\angle B+\angle D=180°$，$\angle BAD+\angle BCD=180°$。因为 AO 平分 $\angle BAD$，CO 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle BAO=\angle DAO$，$\angle BCO=\angle DCO$。因为 $\angle B+\angle BAO+\angle AOC+\angle BCO=360°$，$\angle BAO+\angle BCO=90°$，所以 $\angle B+\angle AOC=270°$。因为 $\angle B=180°-\angle D$，所以 $\angle AOC-\angle D=90°$。

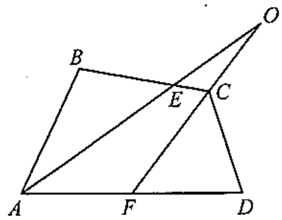
如图②，因为 $\angle AOC+\angle OAF=\angle D+\angle FCD$，$\angle OAF=180°-\angle DAE$，所以 $\angle AOC+180°-\angle DAE=\angle D+\angle FCD$，所以 $\angle AOC+180°=\angle D+\angle FCD+\angle DAE=\angle D+90°$，所以 $\angle D-\angle AOC=90°$。



第 14 题图①



第 14 题图②

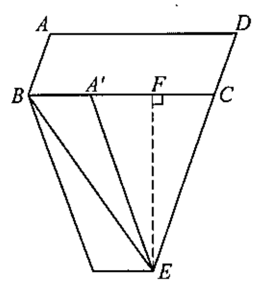


第 14 题图③

如图③，因为 $\angle AOC+\angle OAF=\angle CFD$，$\angle CFD+\angle D+\angle FCD=180°$，所以 $\angle AOC+\angle OAF+\angle D+\angle FCD=180°$，所以 $\angle AOC+90°+\angle D=180°$，所以 $\angle AOC+\angle D=90°$。

23.2(1)　平行四边形的性质(1)

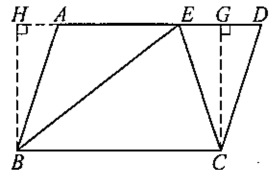
①D　❷A　③A　❹10　⑤50　❻$\frac{12}{5}$　⑦24　❽4　⑨$12+4\sqrt{3}$　[提示：如图，设 A 的对应点为 A'，过点 E 作 $EF\perp BC$ 于点 F。由旋转可得，$A'E=AD=6$，$\angle BA'E=\angle A$。因为点 D、C、E 在同一直线上，四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\angle A=\angle BCD$，所以 $\angle BA'E=\angle BCD$。因为 $\angle EA'C+\angle BA'E=180°$，$\angle ECA'+\angle BCD=180°$，所以 $\angle EA'C=\angle ECA'$，所以 $EA'=EC=AD=6$，所以 $FA'=FC=\frac{1}{2}A'C=\frac{1}{2}(BC-BA')=2$，$BF=BA'+A'F=2+2=4$。在 $Rt\triangle EFC$ 中，$EF^2=EC^2-FC^2=6^2-2^2=32$，在 $Rt\triangle BEF$ 中，$BE=\sqrt{BF^2+EF^2}=\sqrt{4^2+32}=4\sqrt{3}$，所以 $\triangle BCE$ 的周长为 $BC+CE+BE=6+6+4\sqrt{3}=12+4\sqrt{3}$。]



第 9 题图

❿3.6　[提示：如图，过点 B 作 $BH\perp AE$，交 EA 的延长线于点 H，过点 C 作 $CG\perp ED$ 于点 G。因为 $CG\perp ED$，$EC=DC$，所以 $DG=\frac{1}{2}DE$。因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BE=BC=AD=10$，$EC=DC=AB=6$，$AB\parallel CD$，所以 $\angle D=\angle BAH$。由 $\angle H=\angle CGD=90°$，

$AB=DC$，$\angle D=\angle BAH$，得 $\triangle HBA\cong\triangle GCD$，所以 $AH=DG=\frac{1}{2}DE$。设 $AH=EG=GD=x$，则 $AE=AD-DE=10-2x$，$EH=AE+AH=10-x$。在 Rt$\triangle ABH$ 中，$BH^2=AB^2-AH^2=36-x^2$。在 Rt$\triangle EBH$ 中，$BH^2=EB^2-EH^2=100-(10-x)^2$。所以 $100-(10-x)^2=36-x^2$，解得 $x=1.8$，所以 $DE=2x=3.6$。]



第 10 题图

⑪ (1) 由平行四边形的性质得 $AB\parallel CD$，$AD\parallel BC$，$AD=BC$，由平行线的性质和角平分线定义求出 $\angle ADG=\angle AGD$，$\angle BFC=\angle BCF$，进而可得 $AD=AG$，$BF=BC$，所以 $AG=BF$，所以 $AF=GB$。

(2) 由 $\angle ADC$ 与 $\angle BCD$ 互补及角平分线的定义，求出 $\angle EDC+\angle ECD=90°$，然后可得 $\angle FEG=90°$，则 $\triangle EFG$ 是直角三角形。

⓬ (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD=CB$，$\angle D=\angle B$。在 $\triangle AFD$ 和 $\triangle CEB$ 中，因为 $\begin{cases}AD=CB,\\ \angle D=\angle B,\\ DF=BE,\end{cases}$ 所以 $\triangle AFD\cong\triangle CEB$(SAS)。

(2) 因为 $AC=BC$，$\angle B=60°$，$BC=6$，所以 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $AB=BC=6$。因为点 E 为 AB 的中点，所以 $CE\perp AB$，$BE=AE=\frac{1}{2}AB=3$，所以 $\angle BEC=90°$。在 Rt$\triangle CEB$ 中，由勾股定理，得 $CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$。因为 $\triangle AFD\cong\triangle CEB$，所以 $AF=CE=3\sqrt{3}$，所以 AF 的长是 $3\sqrt{3}$。

⑬ (1) 由 $AE\perp BD$ 于点 E，$CF\perp BD$ 于点 F，得 $\angle AEB=\angle CFD=90°$。因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB\parallel CD$，$AB=CD$，所以 $\angle ABE=\angle CDF$，所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$，则 $AE=CF$。

(2) 取 AB 中点 G，连接 EG。因为 $\angle ABD=30°$，$\angle AEB=90°$，所以 $\angle EAG=60°$。因为 EG 为 Rt$\triangle ABE$ 中斜边 AB 上的中线，所以 $EG=AG=\frac{1}{2}AB$，所以 $\triangle AEG$ 为等边三角形，所以 $AE=AG=\frac{1}{2}AB=2$，所以 $BE=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$。因为 $AE=CF$，所以 $CF=2$。在 Rt$\triangle BCF$ 中，由勾股定理，得 $BF=\sqrt{BC^2-CF^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$，所以 $EF=BF-BE=4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$。

23.2（2） 平行四边形的性质（2）

① C ❷ A

③ B ［提示：过 C 作 $CF\perp AB$ 交 AB 的延长线于点 F。易证 $\triangle CBF\cong\triangle DAE$，所以 $CF=ED$，$BF=AE$。设 $BF=AE=x$，$AB=y$，则 $AF=AB+BF=x+y$，$EB=AB-AE=$

$y-x$。由勾股定理，得 $BD^2-BE^2=AC^2-AF^2$，因此 $BD^2-(y-x)^2=3^2-(y+x)^2$，化简得 $BD^2=9-4xy$，又因为 $AB\cdot AE=2$，即 $xy=2$，所以 $BD^2=1$，$BD=1$。]

4 9 5 12 6 $2\sqrt{13}$ 7 $\frac{6}{5}$ 8 $\sqrt{10}$ [提示：过点 A、C 分别作 $AM\perp BD$，$CN\perp BD$，垂足为 M、N。易证 $\triangle ADM$ 是等腰直角三角形，所以 $AM=DM$。因为 $AD=BC=3\sqrt{2}$，所以 $AM=DM=3$，同理，$BN=CN=3$。易证 $\triangle AMO\cong\triangle CNO$(AAS)，所以 $OM=ON$。因为 $AC=2AB$，所以 $AO=AB$。因为 $AM\perp BD$，所以 $BM=MO$，所以 $BM=MO=ON=\frac{1}{3}BN=1$。再利用勾股定理，得 $AB=\sqrt{10}$。]

9 8 或 10 10 (1) 1 (2) $\frac{5}{2}$

11 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD=BC$，$AD\parallel BC$，所以 $\angle EAO=\angle FCO$，$\angle OEA=\angle OFC$。因为点 O 为对角线 AC 的中点，所以 $AO=CO$。在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COF$ 中，因为 $\begin{cases}\angle EAO=\angle FCO,\\ \angle OEA=\angle OFC,\\ AO=CO,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOE\cong\triangle COF$(AAS)，所以 $AE=CF$，所以 $AD-AE=BC-CF$，即 $DE=BF$。

12 (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $OB=OD$，$AB=CD$，$AB\parallel CD$，所以 $\angle ABE=\angle CDF$。因为 $AE\perp BD$，$CF\perp BD$，所以 $\angle AEB=\angle CFD=90^\circ$。在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CDF$ 中，因为 $\begin{cases}\angle AEB=\angle CFD,\\ \angle ABE=\angle CDF,\\ AB=CD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE\cong\triangle CDF$(AAS)，所以 $BE=DF$。因为 $OB=OD$，所以 $OB-BE=OD-DF$，即 $OE=OF$。

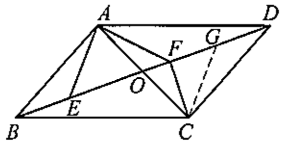
(2) 因为 $AE=EF=4$，所以 $OE=OF=\frac{1}{2}EF=2$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AEO$ 中，$AO=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$，所以 $AC=2AO=4\sqrt{5}$。

13 (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB\parallel CD$，$AB=CD$，所以 $\angle BAO=\angle DCO$，$\angle ABO=\angle CDO$。在 $\triangle BAO$ 和 $\triangle DCO$ 中，因为 $\begin{cases}\angle BAO=\angle DCO,\\ AB=CD,\\ \angle ABO=\angle CDO,\end{cases}$ 所以 $\triangle BAO\cong\triangle DCO$(ASA)，所以 $OA=OC$，$OB=OD$。

(2) 因为 O 为对角线 AC 的中点，所以 $OA=OC=\frac{1}{2}AC=5$。因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle EAC=\angle FCA$。又因为 $\angle AOE=\angle COF$，所以 $\triangle OAE\cong\triangle OCF$(ASA)，所以 $OE=OF=\frac{1}{2}EF=$

13。又因为 $\angle CAF=90°$，所以在 $Rt\triangle AOF$ 中，$AF=\sqrt{OF^2-OA^2}=12$。所以 $CF=\sqrt{AF^2+AC^2}=\sqrt{12^2+10^2}=2\sqrt{61}$。

14 (1) 如图，在 DF 上取点 G，使得 $FG=FC$，连接 CG。因为 $CF\perp BD$，所以 $\triangle CFG$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle CGF=45°$。因为 $\angle BAC=90°$，$AE\perp AF$，所以 $\angle BAE=\angle CAF$。因为 $\angle ABE+\angle AOB=90°$，$\angle ACF+\angle COF=90°$，且 $\angle AOB=\angle COF$，所以 $\angle ABO=\angle ACF$。在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ACF$ 中，因为 $\begin{cases}\angle ABE=\angle ACF,\\ AB=AC,\\ \angle BAE=\angle CAF,\end{cases}$



第 14 题图

所以 $\triangle ABE\cong\triangle ACF$(ASA)，所以 $AE=AF$，所以 $\triangle AEF$ 为等腰直角三角形，所以 $\angle AEF=45°=\angle CGF$，所以 $AE\parallel CG$，所以 $\angle EAO=\angle OCG$。因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以 $OA=OC$，在 $\triangle AOE$ 和 $\triangle COG$ 中，因为 $\begin{cases}\angle EAO=\angle GCO,\\ OA=OC,\\ \angle AOE=\angle COG,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOE\cong\triangle COG$(ASA)，所以 $OE=OG=OF+FG=OF+FC$。

23.2(3)　平行四边形的判定(1)

1 B　2 C　3 C　4 两组对边分别相等的四边形是平行四边形　5 ①②④　6 4
7 3，▱$ABCE$、▱$ABGC$、▱$AFBC$　8 平行四边形　9 3　10 3

11 因为 $DE=DC$，所以 $\angle DEC=\angle C$。又因为 $\angle B=\angle C$，所以 $\angle B=\angle DEC$，所以 $AB\parallel DE$。又因为 $AD\parallel BC$，即 $AD\parallel BE$，所以四边形 $ABED$ 是平行四边形。

12 (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD\parallel BC$，$AB=CD$，所以 $\angle DAE=\angle AEB$。因为 AE 平分 $\angle BAD$，所以 $\angle BAE=\angle DAE$，所以 $\angle BAE=\angle AEB$，所以 $BE=AB$，所以 $BE=CD$。　(2) 因为 $BE=AB$，BF 平分 $\angle ABE$，所以 $AF=EF$。在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle ECF$ 中，因为 $\begin{cases}\angle DAF=\angle CEF,\\ AF=EF,\\ \angle AFD=\angle EFC,\end{cases}$ 所以 $\triangle ADF\cong\triangle ECF$(ASA)，所以 $AD=CE$，所以四边形 $ACED$ 是平行四边形。

13 因为 $\triangle ABD$、$\triangle BCE$ 都是等边三角形，所以 $DB=AB$，$BE=BC$，$\angle DBA=\angle EBC=60°$，所以 $\angle DBE=60°-\angle EBA$，$\angle ABC=60°-\angle EBA$，所以 $\angle DBE=\angle ABC$。在 $\triangle DBE$ 和 $\triangle ABC$ 中，因为 $\begin{cases}DB=AB,\\ \angle DBE=\angle ABC,\\ BE=BC,\end{cases}$ 所以 $\triangle DBE\cong\triangle ABC$(SAS)，所以 $DE=AC$。又因为 $\triangle ACF$ 是等边三角形，所以 $AC=AF$，所以 $DE=AF$。同理，可得 $\triangle ABC\cong\triangle FEC$，所以

$FE=AB=AD$。因为 $DE=AF$，$AD=FE$，所以四边形 $ADEF$ 为平行四边形。

14 (1) 因为 $DF\parallel AB$，$CE\parallel AM$，所以 $\angle EDC=\angle ABD$，$\angle ECD=\angle ADB$，因为 AM 是 $\triangle ABC$ 的中线，且 D 与 M 重合，所以 $BD=DC$。在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle EDC$ 中，因为 $\begin{cases}\angle ABD=\angle EDC,\\ BD=DC,\\ \angle ADB=\angle ECD,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABD\cong\triangle EDC$(ASA)，所以 $AB=ED$，因为 $AB\parallel ED$，所以四边形 $ABDE$ 是平行四边形。

(2) 图中所有的平行四边形为▱$ABMG$、▱$AMCG$、▱$DEGM$、▱$ABDE$，理由如下：由(1)得，四边形 $ABMG$ 是平行四边形，所以 $AG\parallel BC$，$AB=MG$。因为 $CE\parallel AM$，所以四边形 $AMCG$ 是平行四边形。因为 $MG\parallel DE$，$CE\parallel AM$，所以四边形 $DEGM$ 是平行四边形，所以 $DE=MG$，所以 $AB=DE$。又因为 $DF\parallel AB$，所以四边形 $ABDE$ 是平行四边形。

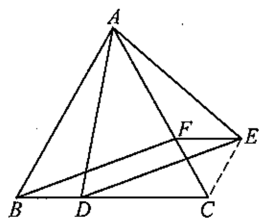
23.2(4) 平行四边形的判定(2)

① D **2** B ③ A **4** 平行四边 ⑤ 4 **6** 6 cm 5 cm ⑦ 对角线互相平分的四边形是平行四边形 **8** 3 ⑨ ①②③⑤

10 4.8 或 8 或 9.6 [提示：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $BC=AD=12\,\text{cm}$，$AD\parallel BC$，因为以点 P、D、Q、B 为顶点的四边形是平行四边形，所以 $PD=BQ$。因为 P 的运动速度是 $1\,\text{cm/s}$，所以点 P 运动到点 D 需 $12\div1=12(\text{s})$。设运动时间为 t s，则 $0<t\leqslant12$。当 $0<t\leqslant3$ 时，$12-t=12-4t$，解得 $t=0$，不符合题意，舍去；当 $3<t\leqslant6$ 时，$12-t=4(t-3)$，解得 $t=4.8$；当 $6<t\leqslant9$ 时，$12-t=12-4(t-6)$，解得 $t=8$；当 $9<t\leqslant12$ 时，$12-t=4(t-9)$，解得 $t=9.6$。综上所述，$t=4.8$ 或 8 或 9.6。]

⑪ 根据已知条件，利用 ASA 判定 $\triangle BEO\cong\triangle DFO$，可得 $EO=FO$。根据 $AE=CF$，可得到 $OA=OC$。再根据 $BO=DO$，可得四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

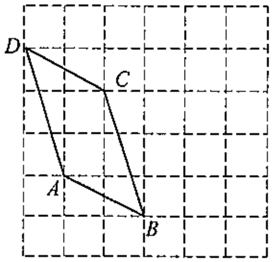
12 如图，连接 EC。因为 $\triangle ABC$、$\triangle ADE$ 都是等边三角形，所以 $AB=AC$，$AD=AE$，$\angle BAC=\angle DAE=\angle ABC=\angle ACB=60°$，所以 $\angle BAD=\angle CAE$，所以 $\triangle BAD\cong\triangle CAE$(SAS)，所以 $BD=EC=1$，$\angle ACE=\angle ABD=60°$。因为 $EF\parallel BC$，所以 $\angle EFC=\angle ACB=60°$，所以 $\triangle EFC$ 是等边三角形，所以 $EF=EC=BD=1$，所以四边形 $BDEF$ 是平行四边形。



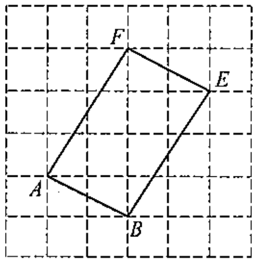
第 12 题图

⑬ (1) 如图①，平行四边形 $ABCD$ 即为所求，$BC=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}=AD$，$AB=DC=\sqrt{5}$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。(答案不唯一)

(2) 如图②，平行四边形 $ABEF$ 即为所求，平行四边形 $ABEF$ 的面积为 8。



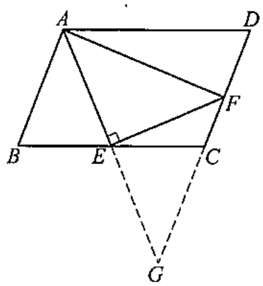
第 13 题图①



第 13 题图②

14 (1) 因为 $AB \parallel CD$,所以 $\angle ABC+\angle BCD=180°$。因为 $\angle ABC=\angle ADC$,所以 $\angle ADC+\angle BCD=180°$,所以 $AD \parallel BC$,所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

(2) 如图,延长 AE、DC 交于点 G。因为 $AB \parallel CD$,所以 $\angle BAE=\angle G$。因为点 E 为 BC 边的中点,所以 $BE=CE$。在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle GCE$ 中,因为 $\begin{cases}\angle BAE=\angle G,\\ \angle AEB=\angle GEC,\\ BE=CE,\end{cases}$ 所以 $\triangle ABE \cong \triangle GCE$(AAS),所以 $AE=GE$,$AB=GC$。因为 $EF \perp AE$,所以 EF 垂直平分 AG,所以 $AF=GF$。因为 $CF=3$,$DF=4$,四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB=CD=CF+DF=3+4=7$,所以 $AF=GF=GC+CF=AB+CF=7+3=10$。因为 $AF \perp CD$,所以 $\angle AFD=90°$,所以 $BC=AD=\sqrt{AF^2+DF^2}=\sqrt{10^2+4^2}=2\sqrt{29}$,所以 $CE=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{29}=\sqrt{29}$。因为 $AF=GF$,$\angle AFG=90°$,所以 $\triangle AFG$ 是等腰直角三角形,所以 $AG=\sqrt{2}AF=10\sqrt{2}$,$AE=\frac{1}{2}AG=5\sqrt{2}$。



第 14 题图

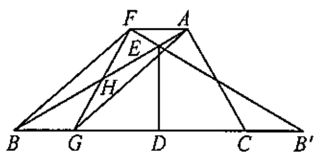
习题 23.2

1 C **2** B 3 B **4** 10 5 120°

6 40° [提示:由平行四边形的性质可得 $AD \parallel BC$,$AO=CO$,所以 $\angle ABC+\angle BAD=180°$,所以 $\angle BAD=120°$。由 OE 垂直平分 AC,可得 $AE=EC$,所以 $\angle CAE=\angle ACE$。因为 $AD \parallel BC$,所以 $\angle DAC=\angle ACB=\angle BAE$,所以 $\angle BAE=\frac{120°}{3}=40°$。]

7 ①②③ **8** 14 cm 或 16 cm

9 6 [提示:如图,因为在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A=90°$,$\angle B=30°$,$AC=4$,所以 $\angle ACB=60°$,取 BC 中点 M,连接 AM,易证 $\triangle ACM$ 为等边三角形,所以 $BC=2CM=2AC=8$,所以 $\angle ACB'=120°$。因为翻折,所以 $AC=FG=4$,$\angle FGB'=\angle ACB=60°$,所以 $\angle FGB=$



第 9 题图

120°。因为四边形 $AFBG$ 是平行四边形，所以 AB、FG 相互平分，交于点 H，所以 $FH=HG=\frac{1}{2}FG=2$。在 $\triangle BGH$ 中，$\angle GBH=30°$，$\angle HGB=120°$，所以 $\angle GHB=180°-30°-120°=30°$，所以 $BG=HG=2$，所以 $CG=BC-BG=8-2=6$。]

10 (1) $3\sqrt{34}$ (2) 12 [提示：当窗户开到最大时，$DP\perp MN$。根据勾股定理，可得 $AP=12\ \text{cm}$；在关闭状态下，$PA=PD+AD=9+15=24(\text{cm})$，所以窗户从关闭状态到开到最大的过程中，支点 P 移动的距离为 $24-12=12(\text{cm})$。]

11 (1) 由旋转可得，$\triangle ABE\cong\triangle AFD$，所以 $\angle BAE=\angle FAD$，$AE=AD$。因为 $AB=BE$，所以 $\angle BEA=\angle BAE$，所以 $\angle BEA=\angle FAD$，所以 $AD\parallel BC$。因为 $AE=BC$，所以 $AD=BC$，所以四边形 $ABCD$ 为平行四边形。 (2) 因为 $BE=AB$，所以由旋转的性质，得 $AB=BE=AF=DF=3$。因为 $EF=2$，所以 $AE=AF+EF=5$，所以 $BC=AE=5$。因为四边形 $ABCD$ 为平行四边形，所以四边形 $ABCD$ 的周长为 $2(BC+AB)=2\times8=16$。

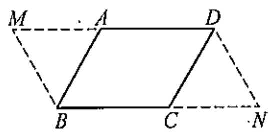
12 当点 F 在点 D 的左边时，因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD\parallel BC$，$AD=BC$。当 $FD=EC$ 时，四边形 $FECD$ 是平行四边形。因为 $BC=12\ \text{cm}$，E 是 BC 的中点，所以 $AF=FD=EC=6\ \text{cm}$，所以点 F 运动的时间为 $6\div2=3(\text{s})$。

当点 F 在点 D 的右边时，同理可知，$DF=6\ \text{cm}$ 时，四边形 $FCED$ 是平行四边形，此时 $AF=AD+DF=18\ \text{cm}$，所以点 F 运动的时间为 $18\div2=9(\text{s})$。

综上所述，当点 F 运动 3 s 或 9 s 时，以点 F、E、C、D 为顶点的四边形是平行四边形。

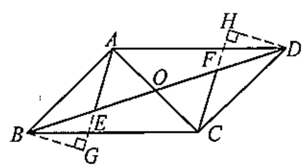
13 (1) 选择④⑥，一组对角相等，且一组对边平行的四边形是平行四边形。证明：因为 $AD\parallel BC$，所以 $\angle BAD+\angle ABC=180°$。因为 $\angle BAD=\angle BCD$，所以 $\angle BCD+\angle ABC=180°$，所以 $AB\parallel CD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。(选法不唯一)

(2) 如图①，延长 DA、BC 并截取 $AM=AB$，$CD=CN$。因为 $AB+AD=CD+CB$，所以 $AM+AD=CN+CB$，即 $MD=BN$。因为 $AD\parallel BC$，所以四边形 $MBND$ 是平行四边形，所以 $MB=DN$，$\angle M=\angle N$。因为 $AM=AB$，$CD=CN$，所以 $\angle M=\angle MBA$，$\angle N=\angle NDC$，所以 $\angle MBA=\angle NDC$，所以 $\triangle AMB\cong\triangle CND$，所以 $AB=CD$。因为 $AB+AD=CD+CB$，所以 $AD=BC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。



第 13 题图①

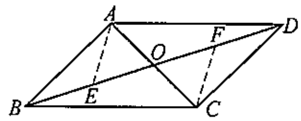
(3) 法 1：选择①：$AB=CD$，如图②，分别在 OB、OD 上截取 $OE=OA$、$OF=OC$。延长 AE、CF，过点 B、D 作 $BG\perp AE$、$DH\perp CF$，垂足为点 G、H。因为 $OE=OA$，$OF=OC$，所以 $\angle OAE=\angle AEO$，$\angle OFC=\angle OCF$。因为 $\angle AOE=\angle FOC$，所以 $\angle OAE=\angle AEO=\angle OFC=\angle OCF$，所以 $\angle BEG=\angle HFD$。因为 $OA+OD=OB+OC$，所以 $OE+OD=OB+OF$，即 $ED=BF$，所以 $ED-EF=BF-EF$，即 $BE=DF$，所以 $\text{Rt}\triangle BEG\cong\text{Rt}\triangle DFH$，所以 $BG=HD$。又因为 $AB=DC$，



第 13 题图②

所以 Rt△ABG≌Rt△CDH，所以∠BAE=∠DCF。又因为∠OAE=∠OCF，所以∠BAE+∠OAE=∠DCF+∠OCF，即∠BAO=∠DCO，所以 AB // DC，因为 $AB=DC$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

法 2：选择③：AB // DC，如图③，分别在 OB、OD 上截取 $OE=OA$、$OF=OC$。因为 $OE=OA$，$OF=OC$，所以∠OAE=∠AEO，∠OFC=∠OCF。因为∠AOE=∠FOC，所以∠OAE=∠AEO=∠OFC=∠OCF，所以∠AEB=∠DFC。因为 AB // DC，所以∠ABE=∠CDF。因为 $OA+OD=OB+OC$，所以 $OE+OD=OB+OF$，即 $ED=BF$，所以 $ED-EF=BF-EF$，即 $BE=DF$。所以△ABE≌△CDF，所以 $AB=DC$。又因为 AB // DC，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。



第 13 题图③

23.3（1） 矩形

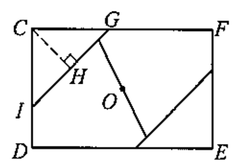
① B ❷ A ③ B ❹ 4 ⑤ 1 ❻ $3\sqrt{3}$

⑦ $-\frac{2}{5}x^2+4x$ ［提示：连接 PD。$S_{\triangle BPD}=\frac{1}{2}\cdot BP\cdot CD=4x$。因为 $\frac{S_{\triangle MBP}}{S_{\triangle DBP}}=\frac{BM}{BD}$，又因为 $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=10$，所以 $\frac{S_{\triangle MBP}}{4x}=\frac{10-x}{10}$，所以 $S_{\triangle MBP}=-\frac{2}{5}x^2+4x$。］

❽ 2.4 或 2 ［提示：因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以∠B=∠C=90°。当 $BP=CQ$，$AB=PC$ 时，△ABP≌△PCQ。因为 $AB=CD=12$ cm，所以 $PC=AB=12$ cm，所以 $BP=BC-CP=20-12=8$(cm)，所以 $t=8\div 2=4$(s)，$CQ=BP=8$ cm，所以 $x=8\div 4=2$；当 $AB=CQ$，$BP=CP$ 时，△ABP≌△QCP。因为 $BP=CP$，$BC=20$ cm，所以 $BP=CP=10$ cm，所以 $t=10\div 2=5$(s)，所以 $x=12\div 5=2.4$。综上所述，x 的值为 2.4 或 2。］

⑨ $\frac{8}{3}$ ［提示：因为 $CD=CP=6$，所以∠CPD=∠CDP。因为∠APD=90°，所以∠APE+∠CPD=90°。又因为∠ADP+∠CDP=90°，所以∠ADP=∠APE。因为∠EAP+∠PAD=∠ADP+∠PAD=90°，所以∠EAP=∠ADP，所以∠EAP=∠APE，所以 $AE=EP$。设 $AE=EP=x$，则 $EB=6-x$，$EC=6+x$。在 Rt△EBC 中，因为∠B=90°，所以 $EC^2=EB^2+BC^2$，所以 $(x+6)^2=(6-x)^2+8^2$，解得 $x=\frac{8}{3}$，即 $AE=\frac{8}{3}$。］

❿ 8，$7+5\sqrt{2}$ ［提示：因为对称中心 O 到矩形较长边的距离为 4，所以矩形较短边的长为 8。因为矩形相邻两边之比为 2∶3，所以矩形的长边长为 12，因为等腰直角三角形的腰长与矩形较长边之比为 5∶12，所以等腰直角三角形的腰长为 5。如图，过点 C 作 $CH\perp GI$。$GF=CF-CG=12-5=7$。在等腰 Rt△CGI 中，由勾股定理得到斜边长为 $5\sqrt{2}$，则 $CH=\frac{1}{2}GI=$

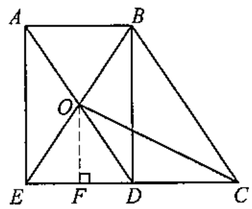


第 10 题图

$\frac{5}{2}\sqrt{2}$。所以图②中“鱼”首尾高 h 的值为$\frac{5}{2}\sqrt{2}+7+\frac{5}{2}\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}$。]

⑪ (1) 因为 O 为 AD 的中点，所以 $AO=DO$。因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AB \parallel CD$，所以 $\angle BAO=\angle EDO$。又因为 $\angle AOB=\angle DOE$，所以 $\triangle AOB \cong \triangle DOE$(ASA)，所以 $AB=DE$，所以四边形 $ABDE$ 是平行四边形。因为 $\angle BDC=90°$，所以 $\angle BDE=90°$，所以平行四边形 $ABDE$ 是矩形。

(2) 如图，过点 O 作 $OF \perp DE$ 于点 F。因为四边形 $ABDE$ 是矩形，所以 $DE=AB=4$，$OD=\frac{1}{2}AD$，$OB=OE=\frac{1}{2}BE$，$AD=BE$，所以 $OD=OE$。因为 $OF \perp DE$，所以 $DF=EF=\frac{1}{2}DE=2$。由勾股定理，可得 $AD=\sqrt{AE^2+ED^2}=6$，所以 $OD=\frac{1}{2}AD=3$，所以 $OF=\sqrt{OD^2-DF^2}=\sqrt{5}$。因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $CD=AB=4$，所以 $CF=CD+DF=6$。由勾股定理，得 $OC=\sqrt{OF^2+CF^2}=\sqrt{(\sqrt{5})^2+6^2}=\sqrt{41}$。



第 11 题图

⑫ (1) 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $BC=AD$，$\angle C=90°$。因为 $AD=BF$，所以 $BC=BF$。因为 $BF \perp AE$，所以 $\angle BFE=\angle C=90°$。在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle BFE$ 中，因为 $\begin{cases}BE=BE,\\BC=BF,\end{cases}$ 所以 $\mathrm{Rt}\triangle BCE \cong \mathrm{Rt}\triangle BFE$，所以 $\angle CBE=\angle FBE$，即 BE 平分 $\angle CBF$。

(2) 由(1)知 $\mathrm{Rt}\triangle BCE \cong \mathrm{Rt}\triangle BFE$，所以 $\angle CEB=\angle FEB$。因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $AB=CD$，$AB \parallel CD$，所以 $\angle CEB=\angle ABE$，所以 $\angle FEB=\angle ABE$，所以 $AB=CD=AE$。因为 $AD=BF=6$，$DE=CD-CE=AE-CE=AE-2$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，由勾股定理，得 $AD^2+DE^2=AE^2$，所以 $6^2+(AE-2)^2=AE^2$，所以 $AE=10$，所以 $AB=10$。

⑬ (1) 因为 M 是 AD 的中点，所以 $AM=DM$。因为 $AE \parallel BC$，所以 $\angle AEM=\angle DCM$。又因为 $\angle AME=\angle DMC$，所以 $\triangle AEM \cong \triangle DCM$(AAS)，所以 $AE=CD$。因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，所以 $BD=CD$，所以 $AE=BD$。又因为 $AE \parallel BD$，所以四边形 $AEBD$ 是平行四边形。

(2) 延长 AD 至 G，使 $GD=AD$，连接 CG。因为 $\angle CDG=\angle BDA$，$CD=BD$，所以 $\triangle CDG \cong \triangle BDA$(SAS)，所以 $GC=AB$，$\angle G=\angle BAD$。因为 $\angle BAD=\angle CAD$，所以 $\angle G=\angle CAD$，所以 $GC=AC$，所以 $AB=AC$。因为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，所以 $AD \perp BC$，所以 $\angle ADB=90°$。由(1)可知，四边形 $AEBD$ 是平行四边形，所以平行四边形 $AEBD$ 是矩形。

⑭ (1) 连接 BD，与 AC 相交于点 O。因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $OA=OC$，$OB=OD$，$AB \perp BC$。因为 $AE=CF$，所以 $OA-AE=OC-CF$，即 $OE=OF$。因为 $OE=OF$，$OB=OD$，所以四边形 $BEDF$ 是平行四边形。

(2) 因为 $AB \perp BC$，$AB=3$，$BC=4$，所以 $AC=5$。因为 $BE \perp AC$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB \cdot BC=$

$\frac{1}{2}AC\times BE$，所以 $BE=\frac{12}{5}$，所以 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\frac{9}{5}$，所以 $CF=AE=\frac{9}{5}$，所以 $EF=5-2\times\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$，所以 $BF=\sqrt{BE^2+EF^2}=\frac{\sqrt{193}}{5}$。

23.3（2） 菱形

① A ❷ D ③ C ［提示：连接 BD。由 $\angle A=60°$，可证 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CBD$ 是等边三角形。所以 $\angle A=\angle DBF=60°$，$AD=DB$，$AE=BF$，所以 $\triangle ADE\cong\triangle BDF$，所以 $DE=DF$，$\angle ADE=\angle BDF$，所以 $\angle EDF=60°$。所以 $\triangle DEF$ 是等边三角形，所以 $DE=\sqrt{6}$。过点 E 作 $EH\perp AD$ 于点 H，由勾股定理可得 $AD=1+\sqrt{3}$。］

❹ 24 ⑤ $\frac{24}{5}$ ❻ 8 ⑦ 2 ❽ 4.5 ［提示：因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $OA=OC$，$OB=OD=\frac{1}{2}BD$，$BD\perp AC$，所以 $BD=2OB=12$。因为 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}AC\times BD=54$，所以 $AC=9$。因为 $AE\perp BC$，所以 $\angle AEC=90°$，所以 $OE=\frac{1}{2}AC=4.5$。］

⑨ $\frac{3}{5}$ ［提示：设 $AB=x$，$AM=y$，则 $MB=MD=2x-y$。在 $Rt\triangle ABM$ 中，$AB^2+AM^2=BM^2$，即 $x^2+y^2=(2x-y)^2$，解得 $x=\frac{4}{3}y$，所以 $MD=MB=2x-y=\frac{5}{3}y$，所以 $\frac{AM}{MD}=\frac{y}{\frac{5}{3}y}=\frac{3}{5}$。］

❿ 1.4 ［提示：作 $MH\perp CB$ 交 CB 的延长线于点 H，由 $\angle ABC=120°$，得 $\angle HBM=60°$，则 $\angle BMH=30°$，取 MB 中点 F，连接 HF，易证 $\triangle HBF$ 为等边三角形，所以 $BM=2BF=2BH$，$MH=\sqrt{3}BH$。由菱形的性质，得 $BC=AB=2$，则 $BE=\frac{1}{2}BC=1$。由折叠得 $EM=AM=2-2BH$。在 $Rt\triangle MHE$ 中，由勾股定理，得 $MH^2+EH^2=EM^2$，所以 $(\sqrt{3}BH)^2+(1+BH)^2=(2-2BH)^2$，解得 $BH=0.3$，则 $AM=1.4$。］

⑪ (1) 因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=BC$，$AD\parallel BC$，$AD=BC$，所以 $\angle EAD=\angle F$。因为 E 是 CD 的中点，所以 $CE=ED$。在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle FCE$ 中，因为 $\begin{cases}\angle EAD=\angle F,\\ \angle AED=\angle FEC,\\ DE=CE,\end{cases}$

所以 $\triangle ADE\cong\triangle FCE$(AAS)，所以 $AD=CF$，所以 $CF=BC$。

(2) 由(1)得，$AB=BC=CF=2$，所以 $BF=4$。在 $Rt\triangle BAF$ 中，$\angle BAF=90°$，所以 $AF=\sqrt{BF^2-AB^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，所以 $S_{\triangle ABF}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot AF=\frac{1}{2}\times2\times2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$。

12 (1) 因为 $AB=AD$，所以 $\angle ABD=\angle ADB$。因为 $\angle ABD=\angle CBD$，所以 $\angle CBD=\angle ADB$，所以 $AD \parallel BC$。又因为 $AB \parallel CD$，所以四边形 $ABCD$ 是菱形。

(2) 连接 AC，交 BD 于点 O。因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB=BC$，$AC \perp BD$。设 $BE=x$，则 $AB=3x$。由 $AB=BC$，可得 $3x=x+4$，解得 $x=2$，所以 $AB=6$，$BE=2$，$EC=4$。因为 $AE \perp BC$，所以 $\angle AEB=\angle AEC=90°$，所以 $AE=\sqrt{AB^2-BE^2}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$，$AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{32+16}=4\sqrt{3}$，所以 $AO=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$，所以 $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=\sqrt{36-12}=2\sqrt{6}$，所以 $BD=2BO=4\sqrt{6}$。

13 (1) 由折叠可知，$PB=PE$，$BF=EF$，$\angle BPF=\angle EPF$。因为 $EF \parallel AB$，所以 $\angle BPF=\angle EFP$，所以 $\angle EFP=\angle EPF$，所以 $PE=EF$，所以 $PB=BF=FE=EP$，所以四边形 $BFEP$ 是菱形。

(2) 由折叠可知 $EC=BC=AD=5$。因为在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，$CD=AB=3$，所以 $DE=\sqrt{5^2-3^2}=4$，所以 $AE=1$。设 $PE=x$，则 $PB=x$，$AP=3-x$。在 $\mathrm{Rt}\triangle APE$ 中，由勾股定理得 $AE^2+AP^2=PE^2$，所以 $(3-x)^2+1^2=x^2$，解得 $x=\frac{5}{3}$，即菱形 $BFEP$ 的边长为 $\frac{5}{3}$。

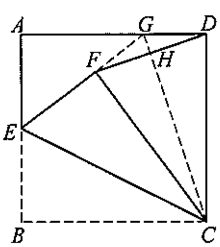
23.3（3） 正方形

1 C **2** C **3** D **4** $\frac{1}{2}$ **5** $2\sqrt{5}$ **6** 1 **7** $\sqrt{2}-1$

8 $\sqrt{5}$ [提示：连接 AC、FC。由题意得 $AB=BC=1$，$GC=GF=3$。由勾股定理，得 $AC=\sqrt{2}$，$CF=3\sqrt{2}$。因为 $\angle ACD=\angle DCF=45°$，所以 $\triangle ACF$ 是直角三角形，所以 $AF=\sqrt{AC^2+CF^2}=2\sqrt{5}$。因为 H 是 AF 中点，所以 $CH=\frac{1}{2}AF=\sqrt{5}$。]

9 $2+2\sqrt{2}$ [提示：作 $FH \parallel BC$ 交 BD 于点 H。首先证明 $\triangle OHF$ 是等腰直角三角形，推出 $HF=BH=2$，所以 $OB=2+\sqrt{2}$，$AB=\sqrt{2}OB=2+2\sqrt{2}$。]

10 $\frac{96}{5}$ [提示：如图，延长 EF 交 AD 于点 G，连接 CG，CG 与 DF 交于点 H。因为四边形 $ABCD$ 是边长为 8 的正方形，所以 $AB=BC=CD=AD=8$，$\angle A=\angle B=\angle ADC=90°$。因为 E 为 AB 的中点，所以 $BE=AE=4$。根据折叠的性质，可得 $BE=EF=4$，$BC=CF=8$，$\angle B=\angle CFE=90°$，所以 $CF=CD=8$，$\angle CFG=90°$。在 $\mathrm{Rt}\triangle CFG$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle CDG$ 中，$\begin{cases}CF=CD,\\CG=CG,\end{cases}$ 所以 $\mathrm{Rt}\triangle CFG \cong \mathrm{Rt}\triangle CDG$，所以 $DG=FG$。设 $DG=FG=x$，



第 10 题图

则 $EG=EF+FG=4+x$，$AG=AD-DG=8-x$。在 $\mathrm{Rt}\triangle AEG$ 中，$AE^2+AG^2=EG^2$，所

以$4^2+(8-x)^2=(4+x)^2$，解得$x=\frac{8}{3}$，所以$DG=FG=\frac{8}{3}$。在Rt△CFG中，$CG=\sqrt{FG^2+CF^2}=\frac{8\sqrt{10}}{3}$。因为$FG=DG$，$CF=CD$，所以$CG\perp DF$，$DH=FH$，所以$CD\cdot DG=\frac{1}{2}CG\cdot DF$，即$\frac{8}{3}\times 8=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{10}}{3}\times DF$，所以$DF=\frac{8\sqrt{10}}{5}$，所以$DH=\frac{4\sqrt{10}}{5}$，所以$CH=\sqrt{CD^2-DH^2}=\frac{12\sqrt{10}}{5}$，所以$S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}DF\cdot CH=\frac{1}{2}\times\frac{8\sqrt{10}}{5}\times\frac{12\sqrt{10}}{5}=\frac{96}{5}$。]

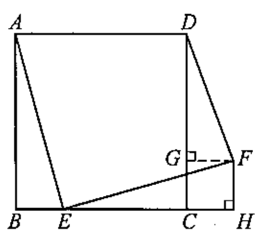
⑪ 过点O作$OH\perp AB$于点H。因为$OH\perp AB$，$OF\perp AC$，$OG\perp BC$，且AO平分$\angle BAC$，BO平分$\angle ABC$，所以$OH=OG$，$OH=OF$，所以$OG=OF$。又因为$\angle C=\angle OGC=\angle OFC=90°$，所以四边形$OGCF$是矩形。再由$OG=OF$，可得四边形$OGCF$是正方形。

⑫ (1) 因为四边形$ABCD$是正方形，所以$\angle ADG=\angle C=90°$，$AD=CD$。因为$AG\perp ED$，所以$\angle FAD+\angle FDA=\angle FDG+\angle FDA=90°$，所以$\angle FAD=\angle FDG$。在△ADG和△DCE中，因为$\begin{cases}\angle GAD=\angle EDC,\\ AD=DC,\\ \angle ADG=\angle C,\end{cases}$所以$\triangle ADG\cong\triangle DCE$(ASA)，所以$DG=EC=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}CD$，即点$G$是$CD$的中点。

(2) 延长DE，交AB的延长线于点H。因为$AH\parallel DC$，所以$\angle H=\angle EDC$。因为E是BC中点，所以$BE=EC$。在△BHE和△CDE中，因为$\angle H=\angle EDC$，$\angle HEB=\angle DEC$，$BE=CE$，所以$\triangle BHE\cong\triangle CDE$(AAS)，所以$BH=DC=AB$，所以$B$是$AH$的中点。又因为$\angle AFH=90°$，所以$BF=\frac{1}{2}AH=AB$，即$AB=FB$。

⑬ (1) 因为四边形$ABCD$是正方形，所以$AB=BC$，$\angle B=\angle BCD=90°$。因为$FH\perp BH$，所以$\angle H=90°$，所以$\angle H=\angle B$，所以$\angle BAE+\angle AEB=90°$。因为$\angle AEF=90°$，所以$\angle FEH+\angle AEB=90°$，所以$\angle BAE=\angle FEH$。在△AEB和△EFH中，因为$\begin{cases}\angle B=\angle H,\\ \angle BAE=\angle FEH,\\ AE=EF,\end{cases}$所以$\triangle AEB\cong\triangle EFH$(AAS)，所以$BE=FH$，$AB=EH$，所以$BC=EH$，即$BE+EC=EC+CH$，所以$BE=CH$。

(2) 如图，过点F作$FG\perp CD$于点G，则$\angle FGC=\angle GCH=\angle CHF=90°$，所以四边形$CGFH$是矩形，因为$BE=CH$，$BE=FH$，所以$CH=FH=x$，所以$CG=x$，所以$DG=DC-CG=4-x$。在Rt△DFG中，$DF=\sqrt{DG^2+FG^2}=\sqrt{(4-x)^2+x^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}$，所以$DF$的长为$\sqrt{2x^2-8x+16}$。



第13题图

⑭ (1) ①因为$AF\parallel BE$，所以$\angle FAD=\angle ECD$，$\angle AFD=\angle CED$。因为D是AC的中点，

所以$AD=CD$。在$\triangle ADF$和$\triangle CDE$中,因为$\begin{cases}\angle FAD=\angle ECD,\\ \angle AFD=\angle CED,\\ AD=CD,\end{cases}$所以$\triangle ADF\cong\triangle CDE$(AAS)。

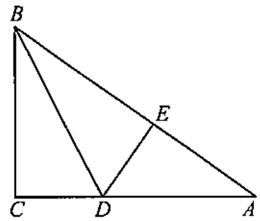
② 因为$\triangle ADF\cong\triangle CDE$,所以$AF=CE$,因为$AF\parallel BE$,所以四边形$AFCE$是平行四边形,所以$AE=FC$。

(2) 四边形$AFCE$是矩形,证明:因为四边形$AFCE$是平行四边形,所以$AD=DC$, $ED=DF$。因为$AC=BC$, $\angle CDE=2\angle B=60°$,所以$\angle BAC=\angle B=30°$,所以$\angle ACE=\angle B+\angle BAC=60°$,所以$\triangle DCE$为等边三角形,所以$CD=ED$,所以$AC=EF$,所以四边形$AFCE$是矩形。

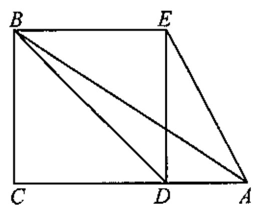
(3) 当$EF\perp AC$, $\angle B=22.5°$时,四边形$AFCE$是正方形,理由如下:因为$\angle B=\angle BAC=22.5°$,所以$\angle ACE=45°$。因为$EF\perp AC$,且四边形$AFCE$为平行四边形,所以四边形$AFCE$为菱形。又因为$\angle ACE=45°$,所以$\triangle CDE$是等腰直角三角形,所以$CD=DE$,所以$AC=EF$,所以此时,四边形$AFCE$为正方形。

习题 23.3

① C ❷ C ③ D ❹ 3 ⑤ 4 ❻ 16 ⑦ 4 ❽ $\frac{\sqrt{2}}{2}a$

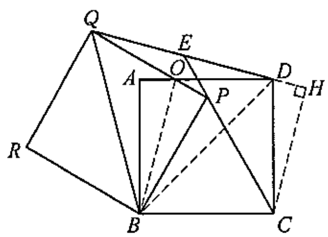


第 9 题图①



第 9 题图②

⑨ $\frac{3}{2}$或 3 [提示:如图①,当$\angle AED=90°$时,由折叠知,$\angle BED=\angle C=90°$,所以$\angle AED+\angle BED=90°+90°=180°$,所以$E$点落在$AB$上,$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$,所以$BE=BC=3$, $AE=AB-BE=2$。设$CD=x$, $DE=CD=x$, $AD=4-x$。在$\mathrm{Rt}\triangle AED$中,由勾股定理,得$(4-x)^2=x^2+2^2$,解得$x=\frac{3}{2}$,所以$CD=\frac{3}{2}$。如图②,当$\angle ADE=90°$时,$\angle C=\angle CDE=\angle DEB=90°$,所以四边形$CDEB$是矩形,因为$CD=DE$,所以四边形$CDEB$是正方形,所以$CD=BC=3$。综上所述,若$\triangle ADE$为直角三角形,则$DC$的长为$\frac{3}{2}$或 3。]



第 10 题图

❿ $\sqrt{26}$ [提示:连接BD,设AD与PQ交于点O,连接BO,过点C作$CH\perp ED$,交ED的延长线于点H。由旋转,可得$AB=RB=PB$。又因为$\angle A=\angle OPB=90°$,所以$\mathrm{Rt}\triangle OAB\cong\mathrm{Rt}\triangle OPB$,所以$\angle OBP=\angle OBA=\frac{1}{2}\angle PBA$, $OA=OP$。因为$AD=PQ$,所以$AD-AO=PQ-PO$,即$OQ=OD$,所以$\angle ODQ=\angle OQD$。在四边形$ABPO$中,$\angle PBA+\angle AOP=180°$,又因为$\angle ODQ+\angle OQD+\angle DOQ=180°$,所以可知$\angle PBA=2\angle ODQ$,所以$\angle PBO=\angle ODQ$。因

为 $BP=BC$,所以 $\angle BPC=\angle BCP$,所以 $\angle PCB=\frac{1}{2}(180^\circ-\angle PBC)=\frac{1}{2}[180^\circ-(90^\circ-2\angle PBO)]=45^\circ+\angle PBO$。又因为 $\angle EDB=\angle ADB+\angle ODQ=45^\circ+\angle ODQ$,所以 $\angle PCB=\angle EDB$,所以 $\angle CED=\angle DBC=45^\circ$。因为 $CH\perp EH$,所以 $\angle CHE=90^\circ$,所以 $\triangle CHE$ 是等腰直角三角形,所以 $CH=EH=\frac{CE}{\sqrt{2}}=5$, $DH=EH-ED=1$。在 $Rt\triangle CHD$ 中,由勾股定理得 $CD=\sqrt{CH^2+DH^2}=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$,所以 $AB=\sqrt{26}$。]

⑪ (1) 因为 $AE\perp CE$, $AF\perp CF$,所以 $\angle AEC=\angle AFC=90^\circ$。又因为 CE、CF 分别平分 $\angle ACB$ 与它的邻补角 $\angle ACD$,所以 $\angle BCE=\angle ACE$, $\angle ACF=\angle DCF$,所以 $\angle ECF=\angle ACE+\angle ACF=\frac{1}{2}(\angle BCE+\angle ACE+\angle ACF+\angle DCF)=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$,所以四边形 $AECF$ 为矩形。

(2) 因为四边形 $AECF$ 是矩形,所以 $AC=EF$, $AN=CN$, $EN=FN$,所以 $EN=CN$,所以 $\angle NEC=\angle NCE$。因为 CE 平分 $\angle ACB$,所以 $\angle NCE=\angle BCE$,所以 $\angle NEC=\angle BCE$,所以 $MN\parallel BC$。

⑫ (1) 因为点 O 是 AC 中点, $EF\perp AC$,所以 EF 是 AC 的垂直平分线,所以 $AF=CF$, $AE=CE$, $OA=OC$。因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD\parallel BC$,所以 $\angle CAF=\angle ACE$, $\angle AFE=\angle CEF$。在 $\triangle AOF$ 和 $\triangle COE$ 中,因为 $\begin{cases}\angle AFE=\angle CEF,\\ \angle CAF=\angle ACE,\\ OA=OC,\end{cases}$ 所以 $\triangle AOF\cong\triangle COE$(AAS),所以 $AF=CE$,所以 $AF=CF=CE=AE$,所以四边形 $AECF$ 是菱形。

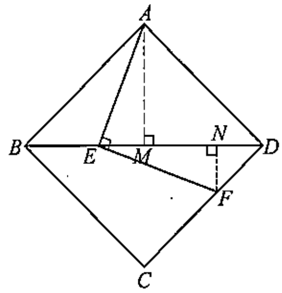
(2) 因为四边形 $AECF$ 是菱形,所以 $AC\perp EF$, $AO=CO$, $EO=FO$。因为 $AE=8$, $AC+EF=20$,所以 $AO+EO=\frac{1}{2}(AC+EF)=10$,所以 $(AO+EO)^2=100$,即 $AO^2+EO^2+2AO\cdot EO=100$。在 $Rt\triangle AOE$ 中, $AO^2+EO^2=AE^2=64$,所以 $2AO\cdot EO=100-64=36$,所以四边形 $AECF$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot EF=2AO\cdot EO=36$。

⑬ (1) 连接 AC 交 BD 于点 O。因为四边形 $ABCD$ 为菱形,所以 $AO=CO$, $BO=DO$, $AC\perp BD$。因为 $BE=DF$,所以 $FO=EO$,所以 EF 和 AC 互相垂直平分,所以四边形 $AECF$ 是菱形,所以 $\angle AFE=\angle AEF=45^\circ$,所以 $\angle EAF=90^\circ$,所以菱形 $AECF$ 为正方形。

(2) 因为 $DF=BE=3$, $BD=4$,所以 $EF=10$,所以 $AC=10$,所以 $S_{菱形ABCD}=\frac{1}{2}BD\cdot AC=20$。

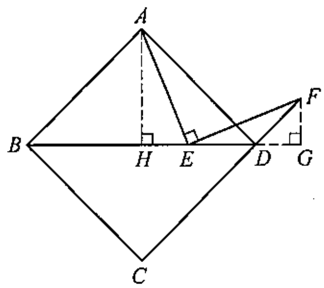
⑭ (1) $DE+CD=AE$,理由:因为 $CD\perp BD$, $AE\perp BD$, $AB\perp BC$,所以 $\angle ABC=\angle D=\angle AEB=90^\circ$,所以 $\angle ABE+\angle CBD=\angle C+\angle CBD=90^\circ$,所以 $\angle ABE=\angle C$。因为 $AB=BC$,所以 $\triangle ABE\cong\triangle BCD$,所以 $BE=CD$, $AE=BD$。因为 $BD=BE+DE$,所以 $DE+CD=AE$。

(2) $AD=\sqrt{2}BE+DF$。理由：如图①，过点A作$AM\perp BD$于点M，过点F作$FN\perp BD$于点N。由(1)可得$\triangle AEM\cong\triangle EFN$，所以$AM=EN$，$EM=FN$。因为四边形$ABCD$是正方形，所以$\angle FDN=\angle ADM=45°$，$AB=AD$，所以$\triangle FDN$和$\triangle ADM$为等腰直角三角形，所以$FN=DN=EM$，$AD=\sqrt{2}AM$，$DF=\sqrt{2}FN$。因为$AB=AD$，$AM\perp BD$，所以$BM=DM$，即$BE+EM=MN+EM$，所以$BE=MN$。由(1)可知$AM=MN+FN$，所以$\frac{\sqrt{2}}{2}AD=BE+\frac{\sqrt{2}}{2}DF$，所以$AD=\sqrt{2}BE+DF$。



第 14 题图①

(3) $AD=\sqrt{2}BE-DF$。理由：如图②，过点A作$AH\perp BD$于点H，过点F作$FG\perp BD$，交BD的延长线于点G。因为$AH\perp BD$，$FG\perp BD$，$AE\perp EF$，所以$\angle AHE=\angle G=\angle AEF=90°$，所以$\angle AEH+\angle HAE=\angle AEH+\angle FEG=90°$，所以$\angle HAE=\angle FEG$。又因为$AE=EF$，所以$\triangle HAE\cong\triangle GEF$，所以$HE=FG$。因为在正方形$ABCD$中，$\angle BDC=45°$，所以$\angle FDG=\angle BDC=45°$，所以$\angle DFG=45°$，所以$\triangle DFG$是等腰直角三角形，所以$FG=\frac{\sqrt{2}}{2}DF$，所以$HE=FG=\frac{\sqrt{2}}{2}DF$。因为$\angle ADB=45°$，$AH\perp HD$，所以$\triangle ADH$是等腰直角三角形，所以$HD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，所以$DE=HD-HE=\frac{\sqrt{2}}{2}AD-\frac{\sqrt{2}}{2}DF$，所以$BD-BE=DE=\frac{\sqrt{2}}{2}AD-\frac{\sqrt{2}}{2}DF$。因为$BD=\sqrt{2}AD$，所以$\sqrt{2}AD-BE=\frac{\sqrt{2}}{2}AD-\frac{\sqrt{2}}{2}DF$，所以$AD=\sqrt{2}BE-DF$。



第 14 题图②

23.4（1） 三角形的中位线

1 B 2 C 3 B ［提示：连接AM、DM、AD。先根据勾股定理求得斜边$BC=\sqrt{2}$，利用直角三角形斜边上的中线性质得到$AM=\frac{1}{2}EF$，$DM=\frac{1}{2}EF$，则$AM=DM$，于是可判断点M在AD的垂直平分线上，则点M运动的轨迹为$\triangle ABC$的中位线，然后根据三角形中位线性质可得点M经过的路线长为$\frac{1}{2}BC=\frac{\sqrt{2}}{2}$。］

4 1 5 8 6 15.5 7 $\frac{7}{2}$ 8 1 ［提示：延长AE交BC于点D，先证$\triangle AEC\cong\triangle DEC$，得到$AC=CD$。利用勾股定理求得$AC=5$。再结合$E$是$AD$中点，$F$是$AB$中点，利

用中位线定理得 $FE=\frac{1}{2}BD=1$。]

⑨ $\frac{5}{2}$ [提示:易证明 $\triangle BNA\cong\triangle BNE$,得到 $BA=BE$, $AN=NE$。同理 $\triangle CMA\cong\triangle CMD$,得到 $CA=CD$, $MA=MD$。因为 $AB+AC+BC=19$, $BC=7$,所以 $BE+CD+7=19$,即 $BE+CD=12$,所以 $BD+DE+DE+CE=12$,即 $BC+DE=12$,所以 $DE=5$,由 MN 是 $\triangle ADE$ 的中位线,得 $MN=\frac{1}{2}DE=\frac{5}{2}$。]

⑩ $6\sqrt{3}$ [提示:取 AM 中点 E,连接 NE、MN。因为点 E 是 AM 中点,所以 $AE=EM=\frac{1}{2}AM=3$。因为 $AN=3$,所以 $AN=AE$。又因为 $\angle NAM=60°$,所以 $\triangle ANE$ 是等边三角形,所以 $NE=AN=3$, $\angle AEN=\angle ANE=60°$,所以 $NE=ME$, $\angle ENM=\angle EMN$。因为 $\angle ENM+\angle EMN=\angle AEN=60°$,所以 $\angle ENM=\frac{1}{2}\angle AEN=30°$,所以 $\angle ANM=\angle ANE+\angle ENM=60°+30°=90°$。由勾股定理,得 $MN=\sqrt{AM^2-AN^2}=3\sqrt{3}$。再由 M、N 分别是 CD、BC 的中点,得 $BD=2MN=6\sqrt{3}$。]

⑪ (1) 因为▱$ABCD$ 的对角线相交于点 O,所以 $OB=OD=\frac{1}{2}BD$, $OA=OC=\frac{1}{2}AC$。因为 $BD=2AD$,所以 $OD=AD$。因为 $DE\perp AC$,所以 $AE=OE=\frac{1}{2}AO$,所以 $AC=4AE$。

(2) 连接 EF。由(1)知 E 是 OA 的中点,又因为 F 是 OB 的中点,G 是 CD 的中点,所以 $EF\parallel AB\parallel CD$, $EF=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}CD$, $DG=\frac{1}{2}CD$,所以 $EF\parallel DG$, $EF=DG$,所以四边形 $DEFG$ 是平行四边形,所以 $FG=ED$。因为 $BD=10$, $AC=8$,所以 $OD=5$, $OE=2$,所以 $FG=ED=\sqrt{OD^2-OE^2}=\sqrt{21}$。

⑫ 四边形 $EGFH$ 是平行四边形,理由如下:因为 E、G 是 AB、AC 的中点,所以 $EG\parallel BC$,且 $EG=\frac{1}{2}BC$。因为 F、H 分别是 DC、DB 的中点,所以 $FH\parallel BC$,且 $FH=\frac{1}{2}BC$。所以 $EG\parallel FH$,且 $EG=FH$,所以四边形 $EGFH$ 是平行四边形。

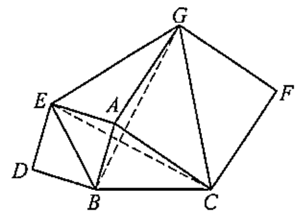
⑬ (1) 因为 E、F 分别是 BC、AC 的中点,所以 EF 是$\triangle ABC$ 的中位线,所以 $EF\parallel AB$,且 $EF=\frac{1}{2}AB$。又因为 $AB=2AD$,即 $AD=\frac{1}{2}AB$,所以 $AD\parallel EF$, $AD=EF$,所以四边形 $AEFD$ 是平行四边形,所以 AF 与 DE 互相平分。

(2) 因为在 Rt$\triangle ABC$ 中, $\angle BAC=90°$, $AB=8$, $BC=12$,所以 $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{12^2-8^2}=4\sqrt{5}$。由(1)知,$OA=OF$,且 $AF=CF$,所以 $OA=\frac{1}{4}AC=\sqrt{5}$。在 Rt$\triangle AOD$ 中,

$\angle DAO=90°$，$AD=\frac{1}{2}AB=4$，$OA=\sqrt{5}$，所以 $DO=\sqrt{DA^2+OA^2}=\sqrt{4^2+(\sqrt{5})^2}=\sqrt{21}$。

14 (1) 因为 E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、AD 的中点，所以 EF、GH 分别是 $\triangle ABC$、$\triangle ADC$ 的中位线，所以 $EF=\frac{1}{2}AC$，$EF \parallel AC$，$GH=\frac{1}{2}AC$，$GH \parallel AC$，所以 $EF=GH$，$EF \parallel GH$，所以四边形 $EFGH$ 是平行四边形，所以 $EH \parallel FG$。因为 $AC \perp BD$，所以 $EF \perp BD$。因为 EH 是 $\triangle ABD$ 的中位线，所以 $EH \parallel BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$，所以 $EH \perp EF$，所以四边形 $EFGH$ 是矩形。因为 $AC=BD$，$EH=\frac{1}{2}BD$，$EF=\frac{1}{2}AC$，所以 $EH=EF$，所以四边形 $EFGH$ 是正方形，所以四边形 $ABCD$ 是"中方四边形"。

(2) 如图，连接 BG、EC。因为四边形 $ABDE$ 和四边形 $ACFG$ 都是正方形，所以 $AB=AE$，$\angle EAB=90°$，$AG=AC$，$\angle GAC=90°$，所以 $\angle EAB+\angle BAC=\angle BAC+\angle GAC$，即 $\angle EAC=\angle BAG$。在 $\triangle AEC$ 和 $\triangle ABG$ 中，因为 $\begin{cases}AE=AB,\\ \angle EAC=\angle BAG,\\ AC=AG,\end{cases}$ 所以 $\triangle AEC \cong \triangle ABG$(SAS)，所以 $EC=BG$，$\angle AEC=\angle ABG$。因为 $\angle CEB+\angle EBG=\angle AEB-\angle AEC+\angle ABE+\angle ABG=\angle AEB+\angle ABE=90°$，所以 $EC \perp BG$。因为 $EC=BG$，$EC \perp BG$，所以由(1)知，四边形 $BCGE$ 是"中方四边形"。



第 14 题图

23.4(2) 三角形的重心

1 A　2 C　3 D　4 2.2　5 1　6 $\frac{8}{3}$

7 1∶1∶1 [提示：延长 AG 交 BC 于点 D，则点 D 是 BC 的中点，且 $DG=\frac{1}{2}AG$，所以 $S_{\triangle BDG}=S_{\triangle CDG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}$，所以 $S_{\triangle BCG}=S_{\triangle BDG}+S_{\triangle CDG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$。同理，可知 $S_{\triangle BCG}=S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ACG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$，故答案为 1∶1∶1。]

8 $\frac{24}{5}$ [提示：设点 C 到 AB 的距离为 h。由线段垂直平分线的性质推出 $AD=CD=6$，所以 $DE=\frac{1}{2}CD=3$。由 $AD+BC=AB$，得 $BC=DB$。又因为 $DE=EC$，所以 $BE \perp CD$。由勾股定理，得 $BD=\sqrt{DE^2+BE^2}=5$。由三角形面积公式得到 $\frac{1}{2}\times5\times h=\frac{1}{2}\times6\times4$，所以 $h=\frac{24}{5}$。]

9 $\sqrt{13}$ [提示：延长 BG 交 AC 于点 D。由三角形重心定理得出 $BD=3$。易证 $\triangle ADG \cong$

$\triangle CDG$(SSS)，所以 $BD \perp AC$，再利用勾股定理求出 $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{13}$。]

❿ 24

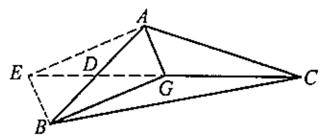
⑪ 由点 G 是$\triangle ABC$ 的重心，得到 $CG=2HG$，于是得到 $HG=\frac{1}{3}CH$，所以 $S_{\triangle AHG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACH}$。根据 CH 为 AB 边上的中线，于是得到 $S_{\triangle ACH}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{\triangle AHG}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，即可得 $S_{\triangle AGH}:S_{\triangle ABC}=\frac{1}{6}$。

⓬ 因为$\triangle ABC$ 的中线 BE、AD 交于点 F，所以点 F 是$\triangle ABC$ 的重心，所以 $AF=\frac{2}{3}AD$，$BF=2EF$。因为 $AD=12$，所以 $AF=8$。因为 BE 是$\triangle ABC$ 的中线，所以 $AE=\frac{1}{2}AC=10$。因为 $AD\perp BE$，所以 $EF=\sqrt{AE^2-AF^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，所以 $BF=12$，$BE=18$。

⑬ (1) 延长 BG，交 AC 于点 D。因为 G 是$\triangle ABC$ 的重心，$BG=2GD$，所以 BD 是$\triangle ABC$ 的中线，即 GD 是$\triangle AGC$ 的中线。因为 $AG\perp GC$，所以 $\angle AGC=90°$，所以 $GD=\frac{1}{2}AC=2$，所以 $BG=2GD=4$。

(2) $S_{\triangle GBC}=\frac{2}{3}S_{\triangle BCD}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times 9=3$。

⓮ 如图，延长 CG 交 AB 于点 D，延长 GD 至点 E，使 $ED=GD$，连接 AE、BE。因为 G 是$\triangle ABC$ 的重心，所以 $AD=DB$，$\frac{DG}{DC}=\frac{1}{3}$，所以 $S_{\triangle ABG}=S_{\triangle ADG}+S_{\triangle BDG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ADC}+\frac{1}{3}S_{\triangle BDC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}$。



第 14 题图

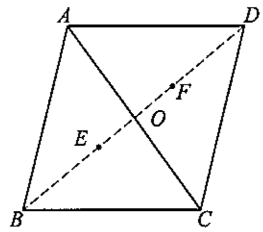
在$\triangle ADE$ 和$\triangle BDG$ 中，因为$\begin{cases}AD=BD,\\ \angle ADE=\angle BDG,\\ DE=DG,\end{cases}$所以$\triangle ADE\cong\triangle BDG$(SAS)，所以 $AE=BG=12$，$\angle AEG=\angle BGE$，所以 $AE\parallel BG$，所以四边形 $AGBE$ 为平行四边形。因为 G 是$\triangle ABC$ 的重心，所以 $DG=\frac{1}{2}CG=\frac{13}{2}$，所以 $DE=DG=\frac{13}{2}$，所以 $EG=DE+DG=13$。因为 $AE^2+AG^2=12^2+5^2=169$，$EG^2=13^2=169$，所以 $AE^2+AG^2=EG^2$，所以 $\angle EAG=90°$，所以四边形 $AGBE$ 为矩形，所以 $\angle AGB=90°$，所以 $S_{\triangle ABG}=\frac{1}{2}AG\cdot BG=\frac{1}{2}\times 5\times 12=30$，所以 $S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle ABG}=90$。设$\triangle ABC$ 中 AB 边上的高为 h，所以$\frac{1}{2}AB\cdot h=90$，所以 $h=\frac{180}{13}$。

习题 23.4

① D ❷ A ③ A ❹ 42 ⑤ 22 或 26 ❻ 8 ⑦ 144

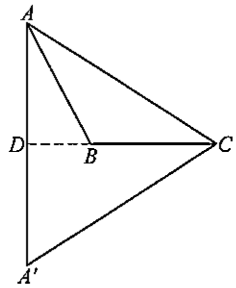
8 13 ［提示：延长 CG 交 AB 于点 H，由勾股定理的逆定理，可得 $\triangle AGB$ 是直角三角形，则 $GH=\frac{1}{2}AB=\frac{13}{2}$，再由 G 是三角形的重心，可得 $CG=2GH=13$。］

9 $\frac{16}{3}$ ［提示：如图，连接 BD，BD 与 AC 交于点 O。设点 E 为 $\triangle ABC$ 的重心，点 F 为 $\triangle ADC$ 的重心，因为 O 是 AC 的中点，所以点 E、F 都在线段 BD 上。因为四边形 $ABCD$ 为菱形，所以 $AC\perp BD$，$OA=OC=\frac{1}{2}AC=6$，$OB=OD$。所以 $OB=OD=\sqrt{AB^2-OA^2}=8$。因为点 E 为 $\triangle ABC$ 的重心，点 F 为 $\triangle ADC$ 的重心，所以 $OE=\frac{1}{3}OB=\frac{8}{3}$，$OF=\frac{1}{3}OD=\frac{8}{3}$。所以 $\triangle ABC$ 与 $\triangle ADC$ 的"重心距"为 $OE+OF=\frac{16}{3}$。］



第 9 题图

10 $\frac{\sqrt{13}}{2}$ ［提示：如图，延长 CB 与 AA' 交于点 D。因为点 A 关于直线 BC 的对称点是点 A'，所以 $AC=A'C$，$AD=A'D$，$AD\perp CD$。因为 $\triangle ABC$ 是等高底三角形，BC 是等底，所以 $AD=BC$。因为点 B 是 $\triangle AA'C$ 的重心，所以 $AD=BC=\frac{2}{3}CD$。设 $AD=BC=2x$，则 $CD=3x$，所以 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{4x^2+9x^2}=\sqrt{13}x$，所以 $\frac{AC}{BC}=\frac{\sqrt{13}x}{2x}=\frac{\sqrt{13}}{2}$。］



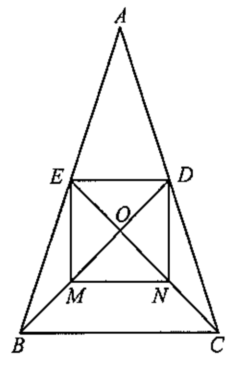
第 10 题图

11 (1) 因为 $AB=AC$，$AD\perp BC$，所以 $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times 16=8$(cm)。在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=6$ cm。因为 BE、AD 是 $\triangle ABC$ 的中线，所以点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $OD=\frac{1}{3}AD=\frac{1}{3}\times 6=2$(cm)。

(2) 因为 $AD\perp BC$，所以 $\angle ODB=90°$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ODB$ 中，$OB=\sqrt{BD^2+OD^2}=2\sqrt{17}$ cm。因为点 O 是 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $OE=\frac{1}{2}OB=\sqrt{17}$ cm。

12 (1) 因为 AB、AC 是等腰 $\triangle ABC$ 的两腰，所以 $AB=AC$，因为 BD、CE 是中线，所以 $AD=\frac{1}{2}AC$，$AE=\frac{1}{2}AB$，所以 $AD=AE$，又因为 $\angle A=\angle A$，所以 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$，所以 $BD=CE$。

(2) 四边形 $DEMN$ 为正方形。理由如下：如图，因为 E、D 分别是 AB、AC 的中点，所以 $AE=\frac{1}{2}AB$，$AD=\frac{1}{2}AC$，ED 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $ED\parallel BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$。因为 M、N 分别是线段 BO、CO 的中点，所以

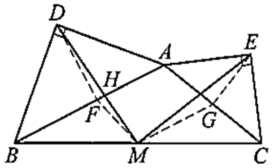


第 12 题图

$OM=BM$，$ON=CN$，MN 是 $\triangle OBC$ 的中位线，所以 $MN \parallel BC$，$MN=\frac{1}{2}BC$，所以 $ED \parallel MN$，$ED=MN$，所以四边形 $EDNM$ 是平行四边形。由(1)知 $BD=CE$，又因为 $OE=ON$，$OD=OM$，$OM=BM$，$ON=CN$，所以 $OB=OC$，$DM=EN$，所以四边形 $EDNM$ 是矩形。因为 $\triangle ABC$ 的重心到顶点 A 的距离与底边长相等，所以 O 到 BC 的距离为 $\frac{1}{2}BC$，即 $\triangle BOC$ 是等腰直角三角形，所以 $BD \perp CE$，所以四边形 $DEMN$ 是正方形。

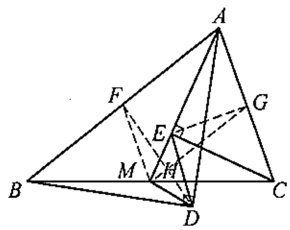
⑬ (1) $AF=AG=\frac{1}{2}AB$；$MD=ME$。

(2) 数量关系：$MD=ME$；位置关系：$MD \perp ME$。理由如下：如图①，取 AB、AC 的中点 F、G，连接 DF、FM、MG、EG，设 AB 与 DM 交于点 H。因为 $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 都是等腰直角三角形，所以 $\angle DFA=\angle EGA=90°$，$DF=AF=\frac{1}{2}AB$，$EG=AG=\frac{1}{2}AC$。因为点 M 是 BC 的中点，所以 FM 和 MG 都是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $AF \parallel MG$，$AF=DF=MG$，所以四边形 $AFMG$ 是平行四边形，所以 $FM=AG=GE$，$\angle AFM=\angle AGM$，所以 $\angle DFM=\angle MGE$。在 $\triangle DFM$ 和 $\triangle MGE$ 中，因为 $\begin{cases} FM=GE, \\ \angle DFM=\angle MGE, \\ DF=MG, \end{cases}$ 所以 $\triangle DFM \cong \triangle MGE$(SAS)，所以 $MD=ME$，$\angle FDM=\angle GME$。所以 $\angle BHM=90°+\angle FDM=90°+\angle GME$，$\angle BHM=\angle HMG=\angle DME+\angle GME$，所以 $\angle DME=90°$，即 $MD \perp ME$。



第 13 题图①

(3) $DE=2\sqrt{2}$。理由如下：如图②，分别取 AB、AC 的中点 F、G，连接 MF、DF、MG、EG，设 DF 和 MG 交于点 H。因为 $\triangle ADB$ 和 $\triangle AEC$ 都是等腰直角三角形，所以 $\angle DFA=\angle EGA=90°$，$DF=AF=\frac{1}{2}AB$，$EG=AG=\frac{1}{2}AC$。因为点 M 是 BC 的中点，所以 FM 和 MG 都是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $AF \parallel MG$，$AF=DF=MG$，所以四边形 $AFMG$ 是平行四边形，所以 $FM=AG=GE$，$\angle AFM=\angle AGM$，所以 $\angle DFM=\angle MGE$。在 $\triangle DFM$ 和 $\triangle MGE$ 中，$FM=GE$，$\angle DFM=\angle MGE$，$DF=MG$，所以 $\triangle DFM \cong \triangle MGE$(SAS)。所以 $MD=ME$，$\angle FDM=\angle GME$。因为 $DF \perp AB$，即 $\angle FHM=90°$。又因为 $\angle FHM=\angle HMD+\angle FDM$，所以 $\angle FHM=\angle HMD+\angle GME=\angle DME=90°$，所以 $\triangle DME$ 是等腰直角三角形。在 $\text{Rt}\triangle DME$ 中，$MD=ME=2$，由勾股定理，得 $DE=2\sqrt{2}$。



第 13 题图②

单元练习二十三

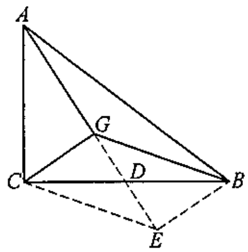
①A ❷A ③B ❹C

⑤A [提示:连接 BP,根据等边三角形的性质,得到 AD 是 BC 的垂直平分线,所以 $BP=CP$,当点 B、P、E 三点共线时,$BP+PE=CP+PE$ 的值最小,此时点 P 是$\triangle ABC$ 的重心。]

❻B [提示:显然 FG 是$\triangle ABE$ 的中位线,所以 $FG\parallel BE$。因为 $\angle E=90°$,所以 $\angle AFG=\angle E=90°$,故①正确。因为 $\angle AFG=90°$,点 P 是 AG 中点,所以 $FP=AP=\frac{1}{2}AG$,所以 $\angle FAB=\angle AFP$。因为 $\angle FPG=\angle FAB+\angle AFP$,所以 $\angle FPG=2\angle FAB$,故②正确。当四边形 $AOBE$ 是正方形时,$FG=\frac{1}{2}EB=\frac{1}{2}AO=\sqrt{2}$, $AF=\frac{1}{2}AE=\sqrt{2}$,所以 $S_{\triangle FGO}=\frac{1}{2}FG\cdot AF=1$,故③错误。在②中,有 $PG=PF=\frac{1}{2}AG=1$, $GO=2$,所以 $PO=\sqrt{PG^2+GO^2}=\sqrt{5}$,故当点 F 在线段 OP 上时,OF 的最小值为$\sqrt{5}-1$,故④正确。]

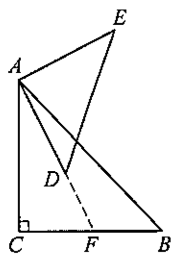
⑦135 ❽36 ⑨8 ❿①②③④ ⑪2

⓬2 [提示:如图,延长 AG 交 BC 于点 D,再延长 GD 到点 E,使得 $DE=DG$,连接 CE、BE。因为 AD 是中线,所以 $CD=BD$,所以四边形 $CGBE$ 是平行四边形,所以 $BE=CG$。因为 G 为 $\triangle ABC$ 的重心,所以 $AG=\frac{2}{3}AD$, $GD=\frac{1}{3}AD$,所以 $AG=GE$,所以 $\triangle BEG$ 是以 GA、GB、GC 的长为三边长的三角形。因为 $AC^2+BC^2=AB^2$,所以 $\angle ACB=90°$,所以 $S_{\triangle BEG}=S_{\triangle BCG}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4=2$,所以以 GA、GB、GC 的长为三边长的三角形的面积是 2。]



第 12 题图

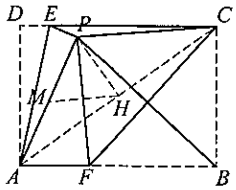
⑬$2\sqrt{5}$ [提示:因为在等腰直角三角形 ABC 中,$\angle C=90°$,所以 $AC=BC$, $AB=\sqrt{2}AC$。又因为 $\triangle ABC$ 的周长为 6,所以 $AB+AC+BC=\sqrt{2}AC+2AC=6$,则 $AC=6-3\sqrt{2}$。如图,延长 AD 交 BC 于点 F。因为点 D 是 $\triangle ABC$ 的重心,所以 $CF=\frac{1}{2}BC$,即 $CF=\frac{1}{2}AC$。在直角 $\triangle ACF$ 中,由勾股定理,得 $AF=\sqrt{AC^2+CF^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}AC=\frac{\sqrt{5}}{2}\times(6-3\sqrt{2})=3\sqrt{5}-\frac{3\sqrt{10}}{2}$,则 $AD=\frac{2}{3}AF=2\sqrt{5}-\sqrt{10}$。在等腰 Rt$\triangle ADE$ 中,$AD=AE=2\sqrt{5}-\sqrt{10}$, $DE=\sqrt{2}AD=2\sqrt{10}-2\sqrt{5}$。所以 $\triangle ADE$ 的周长$=AD+DE+AE=2\times(2\sqrt{5}-\sqrt{10})+2\sqrt{10}-2\sqrt{5}=2\sqrt{5}$。]



第 13 题图

⓮8 或 5 或$\frac{25}{8}$ ⑮4.8

16 $\sqrt{2}$ [提示:设 $AD=BC=x$。连接 AC,过点 P 作 $PH\perp AC$ 于点 H。由翻折的性质可知,$PA=PC=BC=x$。因为 $\angle EPC=150°$,所以 $\angle APC=120°$,因为 $PH\perp AC$,所以 $AH=CH$,$\angle APH=\angle CPH=60°$,$\angle PAH=30°$。取 AP 中点 M,连接 MH,易证 $\triangle MPH$ 是等边三角形,所以 $PH=PM=\frac{1}{2}AP=\frac{1}{2}x$,所以 $AH=\sqrt{AP^2-PH^2}=\sqrt{x^2-\left(\frac{1}{2}x\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$,$AC=2AH=\sqrt{3}x$。因为四边形 $ABCD$ 是矩形,所以 $\angle D=90°$,所以 $CD=AB=\sqrt{AC^2-BC^2}=\sqrt{(\sqrt{3}x)^2-x^2}=\sqrt{2}x$,所以 $\frac{AB}{AD}=\frac{\sqrt{2}x}{x}=\sqrt{2}$。]



第 16 题图

17 (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $CD\parallel AB$,所以 $\angle DCA=\angle CAB$。因为 $\angle BAC=\angle DAC$,所以 $\angle DAC=\angle DCA$,所以 $AD=DC$,所以四边形 $ABCD$ 是菱形。

(2) 连接 BD,交 AC 于点 O。因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AC\perp BD$,$AO=\frac{1}{2}AC=\sqrt{3}$。由勾股定理,得 $BO=\sqrt{AB^2-AO^2}=1$,所以 $BD=2BO=2$。所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}AC\cdot BD=2\sqrt{3}$。

18 (1) 因为 $DE\parallel AC$,$CE\parallel BD$,所以四边形 $OCED$ 是平行四边形。因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $AC\perp BD$,所以 $\angle COD=90°$,所以四边形 $OCED$ 是矩形。

(2) 因为四边形 $OCED$ 是矩形,所以 $\angle ACE=90°$,$OD=CE$。因为四边形 $ABCD$ 是菱形,所以 $OD=\frac{1}{2}BD=3$,所以 $CE=3$。在 Rt$\triangle ACE$ 中,$AE=\sqrt{AC^2+CE^2}=5$。

19 (1) 因为点 D、E、F 分别是$\triangle ABC$ 三边的中点,所以 DF、DE 是$\triangle ABC$ 的中位线,所以 $DF\parallel AC$,$DE\parallel AB$,所以四边形 $AFDE$ 是平行四边形。

(2) 因为 E、F 分别是 AC、AB 的中点,所以 $AC=2AE=2$,$AB=2AF=4$。因为四边形 $AFDE$ 是矩形,所以 $\angle A=90°$。在 Rt$\triangle ABC$ 中,$BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=2\sqrt{5}$。

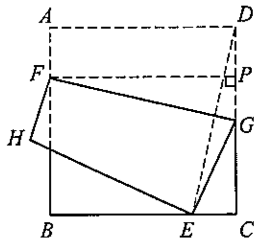
20 (1) 因为矩形 $FECG$ 由矩形 $ABCD$ 旋转得到,所以 $FE=AB=DC$,$\angle F=\angle EDC=90°$。因为 $FH\parallel EC$,所以 $\angle EHF=\angle CED$,所以 $\triangle EDC\cong\triangle HFE$。

(2) 四边形 $BEHC$ 为平行四边形。证明如下:因为 $\triangle EDC\cong\triangle HFE$,所以 $EH=EC$。因为矩形 $FECG$ 由矩形 $ABCD$ 旋转得到,所以 $EH=EC=BC$。又因为 $EH\parallel BC$,所以四边形 $BEHC$ 为平行四边形。

21 (1) 证明 $\triangle ABE\cong\triangle BCF$ 即可得出 $AE=BF$。

(2) $GE=BF$。理由如下:过点 A 作 $AN\parallel GE$,交 BC 于点 N。由(1)可知 $\triangle ABN\cong\triangle BCF$,所以 $AN=BF$。又因为 $AG\parallel NE$,$AN\parallel GE$,所以四边形 $ANEG$ 是平行四边形,所以 $AN=GE$,所以 $GE=BF$。

(3) 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle A=\angle ADC=\angle C=90^\circ$，$AD=CD$。如图，作 $FP\perp CD$ 于点 P，连接 DE。则四边形 $AFPD$ 是矩形，所以 $\angle DCE=\angle FPG=90^\circ$。由翻折知 $GF\perp DE$，所以由(1)可得 $\triangle FPG\cong\triangle DCE$，所以 $DE=FG=41$。在 $\mathrm{Rt}\triangle CDE$ 中，由勾股定理，得 $CE=\sqrt{41^2-40^2}=9$(cm)。



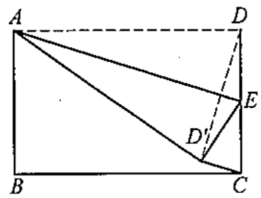
第 21 题图

22 (1) 连接 AF，易证 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ADE$ 全等，所以 $AE=AF$，$\angle BAF=\angle DAE$，进而可证明 $\angle EAF=90^\circ$，则 $\triangle AEF$ 是等腰直角三角形，所以 $\angle AEF=45^\circ$。

(2) 过点 N 作 $NI\perp CD$ 于点 I，则四边形 $BCIN$ 是矩形，$EI=CE-CI=10$。再证 $\triangle ABM$ 和 $\triangle NIE$ 全等，得 $BM=EI=10$。

(3) 连接 EM，设 EC 中点为 K，连接 HK，设 FC 中点为 G，连接 HG。设 $BM=a$，$DE=BF=b$，则 $BM=CM=a$，$AB=CD=BC=2a$，$EC=2a-b$，$FM=a+b$，$FC=2a+b$。由(1)知 AH 垂直平分 EF，则 $EM=FM=a+b$。在 $\mathrm{Rt}\triangle EMC$ 中，由勾股定理，得 $EM^2=EC^2+MC^2$，即 $(a+b)^2=a^2+(2a-b)^2$，解得 $2a=3b$。所以 $EC=2a-b=2b$，$FC=2a+b=4b$，$BC=CD=3b$，由(2)知 $EI=BM=a$，则 $BN=IC=EC-EI=\frac{1}{2}b$，继而得 $AN-BN=AB-2BN=2b$。再根据三角形中位线定理得四边形 $HGCK$ 为矩形，则 $HG=EK=CK=\frac{1}{2}EC=b$，$HK=FG=GC=\frac{1}{2}FC=2b$。在 $\mathrm{Rt}\triangle BHG$ 中，$BG=BC-CG=3b-2b=b$，由勾股定理，得 $BH=\sqrt{2}b$，即 $\sqrt{2}BH=2b$，所以 $AN-BN=\sqrt{2}BH$。

23 (1) $ED'=\frac{1}{2}CD$。理由如下：如图①，由翻折的性质可知 $AD=AD'$，$DE=D'E$，所以 AE 垂直平分线段 DD'。因为 $CD'\parallel AE$，所以 $DD'\perp CD'$，所以 $\angle DD'C=90^\circ$。因为 $DE=D'E$，所以 $\angle ED'D=\angle EDD'$。因为 $\angle ED'D+\angle ED'C=90^\circ$，$\angle EDD'+\angle ECD'=90^\circ$，所以 $\angle ED'C=\angle ECD'$，所以 $ED'=EC$，即 $ED'=EC=DE$，所以 $ED'=\frac{1}{2}CD$。

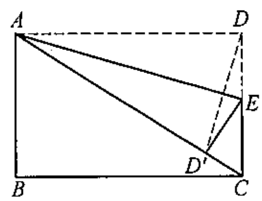


第 23 题图①

(2) $DE=\frac{5\sqrt{34}-25}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$ 或 5 或 15。

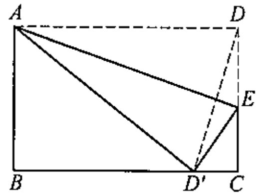
当 $\triangle CED'$ 为直角三角形时，分四种情况：

① 当 $\angle ED'C=90^\circ$ 时，如图②。由折叠得，$ED=ED'$，$\angle AD'E=\angle ADE=90^\circ$，所以 $\angle ED'C+\angle AD'E=90^\circ+90^\circ=180^\circ$，所以 A、D'、C 三点共线。因为 $\angle AD'E=90^\circ$，所以 $ED'\perp AC$，设 $ED=ED'=x$，



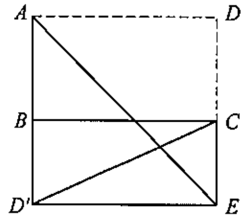
第 23 题图②

在 $Rt\triangle ADC$ 中，$\angle ADC=90°$, $AD=5$, $CD=3$,所以 $AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{5^2+3^2}=\sqrt{34}$,因为 $S_{\triangle ADC}=S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ACE}$,所以 $\frac{1}{2}AD\cdot DC=\frac{1}{2}AD\cdot ED+\frac{1}{2}AC\cdot ED'$,即 $\frac{1}{2}\times5\times3=\frac{1}{2}\times 5\cdot x+\frac{1}{2}\times\sqrt{34}\cdot x$,解得 $x=\frac{5\sqrt{34}-25}{3}$,所以此时 $DE=\frac{5\sqrt{34}-25}{3}$。



第 23 题图③

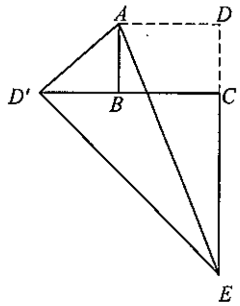
② 当 $\angle ECD'=90°$时，如图③。由折叠得，$ED=ED'$, $AD'=AD=5$。在 $Rt\triangle ABD'$ 中，$\angle B=90°$,所以 $BD'=\sqrt{AD'^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,所以 $CD'=BC-BD'=5-4=1$。设 $ED=ED'=x$，则 $CE=DC-ED=3-x$。在 $Rt\triangle ECD'$ 中，$\angle C=90°$,所以 $CE^2+CD'^2=ED'^2$,即 $(3-x)^2+1^2=x^2$,解得 $x=\frac{5}{3}$,所以此时 $DE=\frac{5}{3}$。



第 23 题图④

③ 当 $\angle D'EC=90°$ 时，如图④。由折叠得，$ED=ED'$, $AD'=AD=5$, $\angle AD'E=\angle ADE=90°$,又因为 $\angle DAD'=90°$,所以四边形 $ADED'$ 是正方形，所以此时 $DE=AD=5$。

④ 当 $\angle ECD'=90°$,且点 E 在 DC 的延长线上时，如图⑤。由折叠得，$D'E=DE$, $AD'=AD=5$。设 $D'E=DE=m$,则 $CE=DE-DC=m-3$。在 $Rt\triangle ABD'$ 中，$\angle ABD'=90°$, 所以 $BD'=\sqrt{AD'^2-AB^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,所以 $D'C=BD'+BC=4+5=9$。在 $Rt\triangle D'CE$ 中，$\angle D'CE=90°$,所以 $D'C^2+CE^2=D'E^2$,即 $9^2+(m-3)^2=m^2$，解得 $m=15$,所以此时 $DE=15$。



第 23 题图⑤

综上所述，满足条件的 DE 的长为 $\frac{5\sqrt{34}-25}{3}$ 或 $\frac{5}{3}$ 或 5 或 15。

第 24 章　平面直角坐标系

24.1(1)　平面直角坐标系的引入

① A　❷ C　③ A　❹ 5　⑤ $(-3, 2)$　❻ 四　⑦ $(-4, 3)$或$(4, -3)$

❽ -1 或 0 ［提示：因为格点 $P(2m-1, m+2)$在第二象限，所以 $\begin{cases}2m-1<0,\\ m+2>0,\end{cases}$ 解得 $-2<m<\frac{1}{2}$。因为点 P 的横、纵坐标均为整数，所以 m 是整数，所以 m 的值为-1 或 0。］

⑨ 5

❿ $(-9, -9)$或$(3, -3)$ ［提示：因为点 $P(2m+1, m-4)$ 到两坐标轴的距离相等，所以 $|2m+1|=|m-4|$,所以 $2m+1=m-4$ 或 $2m+1=-m+4$,解得 $m=-5$ 或 1。所以点 P 的坐标为$(-9, -9)$或$(3, -3)$。］

⑪ (1) $-\frac{1}{2}<m<3$ (2) 点 P 的坐标为 $(3, -2)$ 或 $(-3, -5)$

⓬ (1) 点 $A(2, 3)$ 不是完美点 (2) 由 $2a-b=6$，可得 $b=2a-6$，代入 $P\left(a-1, \frac{b}{2}+1\right)$ 中得完美点坐标为 $(a-1, a-2)$。若 $a-1$ 是正数，则 $a-2$ 可能是正数也可能是负数，即在第一或第四象限；若 $a-1$ 是负数，则 $a<1$，所以 $a-2$ 必然是负数，在第三象限，故完美点一定不在第二象限。 (3) 解方程组 $\begin{cases} m+n=4, \\ m-n=2t, \end{cases}$ 得到 $\begin{cases} m=2+t, \\ n=2-t, \end{cases}$ 所以点 B 坐标为 $(2+t, 2-t)$。因为点 B 是完美点，则 $a-1=2+t$，$\frac{b}{2}+1=2-t$，解得 $a=3+t$，$b=2-2t$。代入 $2a-b=6$ 中，得 $2(3+t)-(2-2t)=6$，解得 $t=\frac{1}{2}$。所以当 $t=\frac{1}{2}$ 时，以方程组的解为坐标的点 B 是完美点。

⑬ (1) $(11, 4)$ (2) 设点 P 为 (a, b)，则 $P'(a+3b, 3a+b)$，可得 $\begin{cases} a+3b=5, \\ 3a+b=7, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=2, \\ b=1, \end{cases}$ 所以 $P(2, 1)$。

24.1（2） 简单图形的坐标表达

① B ❷ B ③ C ❹ $-3<m<\frac{1}{2}$ ⑤ 二 ❻ 0，0 ⑦ 0.5 或 -1

❽ $(9, 3)$ 或 $(-9, 3)$ 或 $(-9, -3)$ 或 $(9, -3)$ ⑨ $(-2, 6)$ 或 $(-2, 0)$

❿ $(4, 6)$ [提示：根据点 P 的坐标为 $(2x, x+3)$，点 M 的坐标为 $(x+1, 2x)$，PM 平行于 x 轴，可以得到 $x+3=2x$，解得 $x=3$，所以 $M(4, 6)$。]

⑪ (1) 根据题意，可得点 A 的坐标为 $(-3, -1)$，点 B 的坐标为 $(1, 0)$。 (2) 略 (3) $(-3, 1)$

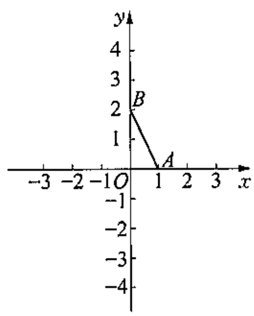
⓬ (1) 点 P 的坐标为 $(-12, 0)$ (2) 点 P 的坐标为 $(-2, 5)$ (3) 点 P 的坐标为 $(-4, 4)$

⑬ (1) 因为 $B(-3, -2)$，点 C 在 y 轴右侧，$BC \parallel x$ 轴且 $BC=4$，所以点 C 的坐标为 $(-3+4, -2)$，即 $(1, -2)$。

(2) $BC=4$，点 A 到 BC 的距离为 $1+2=3$，所以三角形 ABC 的面积为 $4\times 3\times\frac{1}{2}=6$。

⓮ (1) 因为 $A(1, 0)$，$B(0, 2)$，所以 $S=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$。

(2) 因为 $S_1=2$，$S_2=3$，所以 $\frac{1}{2}\times 1\times|y|=2$，$\frac{1}{2}\times 2\times|x|=3$，所以 $y=\pm 4$，$x=\pm 3$。因为 $xy>0$，所以 $x=3$，$y=4$ 或 $x=-3$，$y=-4$，所以 C 点坐标为 $(3, 4)$ 或 $(-3, -4)$。



第 14 题图

24.1(3)　物体位置的坐标表示

① C　② A　③ B　④ (1, 1)或(−1, −1)　⑤ (−1, 1)　⑥ (−3, 3)或(2, −2)
⑦ (3, 5)　⑧ 3或12

⑨ $(1,\ 2\sqrt{2})$, $\left(\frac{8}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$　[提示:因为$A(0,\ 2\sqrt{2})$, $C(4,\ 0)$,所以$OA=BC=2\sqrt{2}$, $OC=AB=4$。设$AM=a$,则$OM=MB=4-a$。在直角三角形OAM中,$OA^2+AM^2=OM^2$,所以$a^2+(2\sqrt{2})^2=(4-a)^2$,解得$a=1$,所以$M(1,\ 2\sqrt{2})$, $OM=3$。由折叠可得$\angle MOC'=90°$, $OA=BC=OC'=2\sqrt{2}$。因为$\angle AOC=90°$,所以$\angle MOC'-\angle MON=\angle AOC-\angle MON$,即$\angle AOM=\angle C'ON$。又因为$\angle OAM=\angle OC'N=90°$,所以$\triangle OAM\cong\triangle OC'N$,所以$ON=OM=3$。由等面积法可得点$C'$的纵坐标为$-2\sqrt{2}\times1\div3=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$,则横坐标为$\sqrt{(2\sqrt{2})^2-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2}=\frac{8}{3}$,所以$C'\left(\frac{8}{3},\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$。]

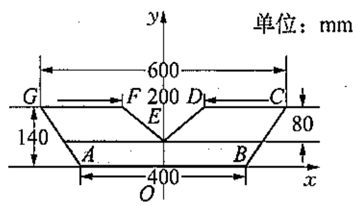
⑩ $(2^{2012},\ 2^{2012})$　[提示:根据题意得点M每次旋转45°,所以点M旋转一周需转8次,因为$2025=253\times8+1$,所以点M_{2025}在第一象限的角平分线上。因为$\triangle OM_1M_2$是等腰直角三角形,所以$OM_1=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$,同理可得$OM_2=(\sqrt{2})^2$, $OM_3=(\sqrt{2})^3$, $OM_4=(\sqrt{2})^4$, $OM_5=(\sqrt{2})^5$, $OM_6=(\sqrt{2})^6$, …, $OM_n=(\sqrt{2})^n$,所以$OM_{2025}=(\sqrt{2})^{2025}$,所以$M_x=M_y=\frac{\sqrt{2}}{2}OM_{2025}=2^{1012}$,所以点$M_{2025}$的坐标为$(2^{2012},\ 2^{2012})$。]

⑪ (1) 略　(2) 略　(3) $D(3,\ -1)$

(4) $S_{\triangle ABC}=3\times5-\frac{1}{2}\times2\times5-\frac{1}{2}\times3\times3-\frac{1}{2}\times1\times2=4.5$。

⑫ (1) 点C的坐标为$C(2,\ 2)$　(2) (3, 1)或(5, 3)或(3, 5)。

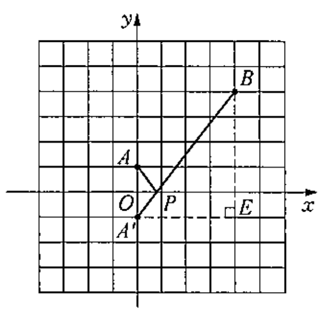
⑬ 如图,以底线段的中点为原点,以底线段所在直线为x轴,其垂直平分线为y轴建立平面直角坐标系,轮廓线上各个转折点如图。其坐标分别是:$A(-200,\ 0)$, $B(200,\ 0)$, $C(300,\ 140)$, $D(100,\ 140)$, $E(0,\ 60)$, $F(-100,\ 140)$, $G(-300,\ 140)$。(答案不唯一)



第13题图

⑭ (1) 如图,$A(0,\ 1)$, $B(4,\ 4)$。(坐标系的位置不唯一)

(2) 如图,作点A关于x轴的对称点A',连接$A'B$交x轴于点P,则点P即为水泵站的位置(两点之间,线段最短)。$PA+PB=PA'+PB=A'B$, $A'B$即为所用水管的最短长度。过点B、A'分别作x轴、y轴的垂线交于点E。因为点A的坐标为$(0,\ 1)$,点B的坐标为$(4,\ 4)$,所以点A'的坐标为$(0,\ -1)$,所以$A'E=4$, $BE=$



第14题图

华东师大版一课一练

5,所以在 Rt$\triangle A'BE$ 中,$A'B=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$。故所用水管的最短长度为$\sqrt{41}$千米。

习题 24.1

1 C　2 C　3 B　4 (1, 1)　5 (5, 2)或(5, −2)　6 二

7 第二、四,原点,第一或第三象限　8 一　9 (2, 3)或(2, −3)

10 (1) (10, 11)　(2) (−5, −5)或(5, −5)　[提示:(1) 点 $A(3, 4)$的"2 级关联点"的坐标是$(2\times3+4,\ 3+2\times4)$,即点 $A(3, 4)$ 的"2 级关联点" 的坐标是(10, 11)。　(2) 点 $B(2b-1,\ b+2)$ 的"-2 级关联点"C 的坐标为$[-2(2b-1)+b+2,\ 2b-1-2(b+2)]$,即 $C(-3b+4,\ -5)$。因为点 C 到 x 轴、y 轴的距离相等,所以点 C 坐标为(−5, −5)或(5, −5)。]

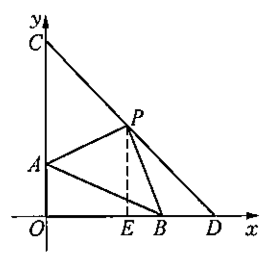
11 (1) 因为点 P 在 y 轴上,所以 $2m-6=0$,解得 $m=3$,所以 $m+1=3+1=4$,所以点 P 的坐标为(0, 4)。　(2) 因为点 P 纵坐标比横坐标大 5,所以 $m+1-(2m-6)=5$,解得 $m=2$,所以 $2m-6=2\times2-6=-2$, $m+1=2+1=3$,所以点 P 的坐标为(−2, 3)。

12 (1) 因为点 $P(2a-2,\ a+5)$ 到 x 轴的距离为 2,所以 $|a+5|=2$,所以 $a+5=\pm2$,解得 $a=-3$ 或 -7。当 $a=-3$ 时,$2a-2=2\times(-3)-2=-8$, $a+5=-3+5=2$;当 $a=-7$ 时,$2a-2=2\times(-7)-2=-16$, $a+5=-7+5=-2$。所以 P 点坐标为(−8, 2) 或(−16, −2)。
(2) 因为点 Q 的坐标为(4, 5),直线 $PQ\parallel y$ 轴,所以 $2a-2=4$, $2a=6$,解得 $a=3$,所以 P 点坐标为(4, 8)。

13 (1) 5　(2) 点 $B(4-2a,\ -2)$ 是"完美点",所以$|4-2a|=|-2|$,所以 $4-2a=2$ 或 $4-2a=-2$,解得 $a=1$ 或 $a=3$。　(3) 因为点 $C(-2,\ 3b-2)$ 的长距为 4,且点 C 在第二象限内,所以 $3b-2=4$,解得 $b=2$,所以 $9-2b=5$,所以点 D 的坐标为(5, −5),因为点 D 到 x 轴、y 轴的距离都是 5,所以点 D 是"完美点"。

14 (1) 因为$\sqrt{a-b+3}+|2a+b-12|=0$,所以$\begin{cases}a-b+3=0,\\2a+b-12=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=3,\\b=6,\end{cases}$所以 $A(0, 3)$, $B(6, 0)$,所以 $OA=3$, $OB=6$,所以 $\triangle AOB$ 的面积$=\frac{1}{2}\times3\times6=9$。

(2) 如图,过点 P 作 $PE\perp x$ 轴于点 E,设点 P 的横坐标为 x,则 $OE=x$, $\angle PED=90°$, $BE=6-x$。因为 $C(0, 9)$, $D(9, 0)$,所以 $OC=OD=9$,所以 $DE=9-x$, $\angle PDE=45°$,所以 $PE=DE=9-x$,所以 $S_{\triangle PAB}=S_{梯形AOEP}+S_{\triangle PEB}-S_{\triangle AOB}=\frac{5}{3}S_{\triangle AOB}$,所以$\frac{1}{2}(3+9-x)\cdot x+\frac{1}{2}(6-x)\cdot(9-x)-9=\frac{5}{3}\times9$,解得 $x=2$,所以点 P 的横坐标为 2。

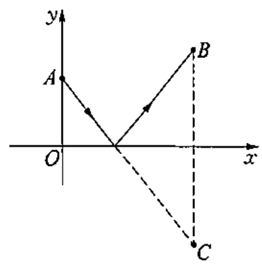


第 14 题图

24.2　两点间的距离公式

1 D　2 C　3 C　4 −9 或 5　5 (−3, 3)或(−3, −1)　6 3　7 $\left(0,\ -\frac{2}{3}\right)$

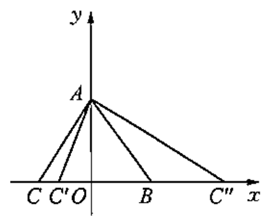
❽ $\sqrt{41}$ ［提示：因为$B(4,\ 3)$，所以B关于x轴的对称点$C(4,\ -3)$，则从点A发出的光经x轴反射后过点B，经过的路程长为AC的距离，即$\sqrt{(4-0)^2+(-3-2)^2}=\sqrt{41}$。］



第8题图

⑨ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ［提示：因为$m-n^3-3=0$，所以$n^3=m-3$，所以$2n^3+4=2m-6+4=2m-2$。因为$P(m,\ 2n^3+4)$，所以点P到原点距离为$\sqrt{m^2+(2n^3+4)^2}=\sqrt{m^2+(2m-2)^2}=\sqrt{5m^2-8m+4}=\sqrt{5\left(m-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$，因为$\left(m-\frac{4}{5}\right)^2\geqslant 0$，所以$5\left(m-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{4}{5}\geqslant\frac{4}{5}$，所以点$P$到原点$O$的距离的最小值为$\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$。］

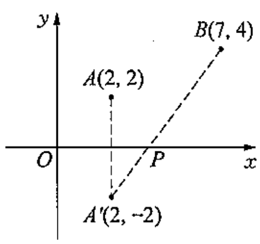
❿ $(-3,\ 0)$或$(-2,\ 0)$或$(8,\ 0)$ ［提示：如图，当$BA=BC$时，$C'(-2,\ 0)$或$C''(8,\ 0)$；当$AB=AC$时，$C(-3,\ 0)$。综上所述，点C的坐标为$(-3,\ 0)$或$(-2,\ 0)$或$(8,\ 0)$。］



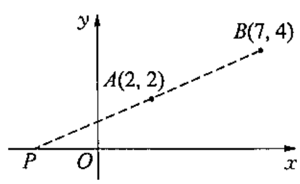
第10题图

⑪ (1) $\sqrt{13}$，$\sqrt{10}$，$\sqrt{5}$ (2) $\angle ABO$不是直角。理由如下：由(1)知$OA=\sqrt{13}$，$OB=\sqrt{10}$，$AB=\sqrt{5}$，因为$(\sqrt{5})^2+(\sqrt{10})^2=15\neq(\sqrt{13})^2$，所以$\angle ABO$不是直角。 (3) 设$A(3,\ m)$，因为$\triangle AOB$是直角三角形，当$\angle ABO=90°$时，则$OA^2=AB^2+OB^2$，所以$3^2+m^2=(3-1)^2+(m-3)^2+10$，整理得$6m=14$，解得$m=\frac{7}{3}$；当$\angle AOB=90°$时，则$AB^2=OA^2+OB^2$，所以$(3-1)^2+(m-3)^2=3^2+m^2+10$，整理得$6m=-6$，解得$m=-1$；当$\angle BAO=90°$时，则$OB^2=AB^2+OA^2$，所以$10=(3-1)^2+(m-3)^2+3^2+m^2$，整理得$m^2-3m+6=0$，$\Delta<0$，方程无解。综上所述，当点$A$在$(3,\ -1)$或$\left(3,\ \frac{7}{3}\right)$时，$\triangle AOB$是直角三角形。

⓬ (1) 如图①，作点A关于x轴的对称点$A'(2,\ -2)$，连接$A'B$交x轴于点P，则$A'B$的长即为汽车到A、B两村距离之和的最小值。因为$B(7,\ 4)$，所以$A'B=\sqrt{(7-2)^2+(4+2)^2}=\sqrt{61}$。



第12题图①



第12题图②

(2) 如图②，当点P为BA的延长线与x轴的交点时，汽车到A、B两村距离之差最大，线段

AB 的长即为汽车到 A、B 两村距离之差的最大值。$AB=\sqrt{(7-2)^2+(4-2)^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$。

⑬ (1) $2\sqrt{5}$；$\sqrt{5}$　(2) $\angle BAD$ 是直角。理由如下：因为 $AB=\sqrt{5}$，$AD=2\sqrt{5}$，$BD=5$，所以 $AB^2+AD^2=5+20=25=BD^2$，所以 $\angle BAD=90°$。　(3) 设点 B 到直线 CD 的距离为 h，$CD=\sqrt{(5-2)^2+(1-5)^2}=5$。因为 $B(2, 0)$，$D(2, 5)$，所以 $BD \parallel y$ 轴，所以 $S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}BD\cdot(x_C-x_B)=\frac{1}{2}CD\cdot h$，所以 $\frac{1}{2}\times5\times(5-2)=\frac{1}{2}\times5h$，所以 $h=3$，所以点 B 到直线 CD 的距离为 3。

习题 24.2

① B　❷ C　③ C　❹ $\sqrt{13}$　⑤ 8　❻ $3\sqrt{5}$　⑦ 4

❽ (6, 0) 或 (4, 0)。　[提示：设点 $P(a, 0)$，因为 $A(3, 3)$、$B(7, 1)$，所以 $AP=\sqrt{(a-3)^2+(0-3)^2}$，$BP=\sqrt{(a-7)^2+(0-1)^2}$，$AB=\sqrt{(7-3)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{5}$。因为 $\angle APB=90°$，所以 $AP^2+BP^2=AB^2$，所以 $[\sqrt{(a-3)^2+(0-3)^2}]^2+[\sqrt{(a-7)^2+(0-1)^2}]^2=20$，解得 $a=6$ 或 $a=4$，所以点 $P(6, 0)$ 或 (4, 0)。]

⑨ (7, 1) 或 (4, −4)

❿ (0, 0) 或 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 (−2, 0)　[提示：因为点 P、A、B 在 x 轴上，所以 P、A、B 三点不能构成三角形。设点 P 的坐标为 $(m, 0)$。当 $\triangle PAC$ 为直角三角形时，① $\angle APC=90°$，易知点 P 在原点处，坐标为 (0, 0)；② $\angle ACP=90°$ 时，因为 $\angle ACP=90°$，所以 $AC^2+PC^2=AP^2$，所以 $(2\sqrt{3})^2+2^2+m^2+2^2=(m+2\sqrt{3})^2$，解得 $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，所以点 P 的坐标为 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$。当 $\triangle PBC$ 为直角三角形时，① $\angle BPC=90°$，易知点 P 在原点处，坐标为 (0, 0)；② $\angle BCP=90°$ 时，因为 $\angle BCP=90°$，所以 $BP^2=BC^2+PC^2$，所以 $(2-m)^2=(2^2+2^2)+(2^2+m^2)$，所以 $m=-2$，所以点 P 的坐标为 (−2, 0)。综上所述，点 P 的坐标为 (0, 0) 或 $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ 或 (−2, 0)。]

⑪ (1) 因为 $A(3, 3)$，$B(-3, 1)$，所以 $AB=\sqrt{(3+3)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{10}$。

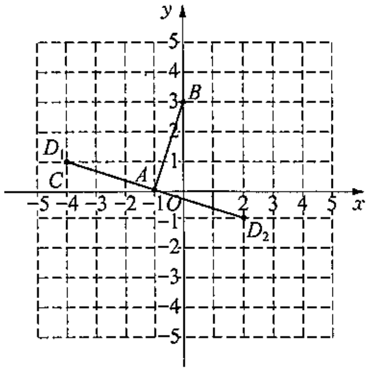
(2) 因为 $A(3, 3)$，$B(-3, 1)$，$C(1, -1)$。所以 $AC=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{4+16}=2\sqrt{5}$，$AB=2\sqrt{10}$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $\angle ACB=90°$，所以 $AC\perp BC$。

⓬ 因为点 A、B、C 的坐标分别为 (−1, 4)、(−4, −2)、(2, −5)，所以 $AC=\sqrt{(-1-2)^2+(4+5)^2}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$，$AB=\sqrt{(-1+4)^2+(4+2)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，$BC=\sqrt{(-4-2)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，所以 $AB^2+BC^2=45+45=90$，$AC^2=90$，所以 $AB^2+BC^2=AC^2$，所以 $\angle B=90°$，所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times3\sqrt{5}=\frac{45}{2}$。

⑬ (1) 由题意得 $\frac{2}{3}a+4=0$，$a=-6$，所以 $M(-16, 0)$。 (2) 利用与 y 轴平行的直线上点的横坐标相同得到 $\frac{11}{6}a-5=\frac{3}{2}a$，解得 $a=15$，所以 $M\left(\frac{45}{2}, 14\right)$，$Q\left(\frac{45}{2}, -8\right)$，所以 $MQ=22$。

⓮ (1) 如图所示，线段 AB、AD 即为所求。

(2) 作 $D_1C\perp x$ 轴于点 C。因为 $AB=AD_1$，$AB\perp AD_1$，易证 $\triangle ACD_1\cong\triangle BOA$，所以 $D_1C=AO=1$，$AC=BO=3$，所以 $D_1(-4, 1)$。同理可知 $D_2(2, -1)$。所以点 D 的坐标为 $(-4, 1)$ 或 $(2, -1)$。



第 14 题图

⑮ (1) 过点 C、点 D 向 y 轴作垂线，垂足分别为点 M、N，易证 $\triangle OCM\cong\triangle DON$(SAS)，可得 $\angle COM=\angle ODN$，$OC=OD$。因为 $\angle DON+\angle ODN=90°$，所以 $\angle COM+\angle DON=90°$，所以 $\angle COD=90°$，所以 $\triangle COD$ 是等腰直角三角形。

(2) 连接 DA。由 $OA=OB$，$OC=OD$，$\angle BOA=\angle COD=90°$，可证 $\triangle OCB\cong\triangle ODA$，所以 $AD=CB=1$，而 $OC=OD=2$，故 $CD=2\sqrt{2}$。根据勾股定理逆定理可证 $\angle ADC=90°$，所以 $\angle OCB=\angle ODA=\angle ODC+\angle ADC=135°$。 (3) 作 $CF\perp OA$，点 F 为垂足。由勾股定理，得 $CF^2=CE^2-EF^2$，$CF^2=CA^2-AF^2=CA^2-(AE+EF)^2$。设 $EF=x$，则有 $5^2-x^2=7^2-(3+x)^2$，解得 $x=\frac{5}{2}$。在 Rt$\triangle CEF$ 中，由勾股定理，得 $CF=OF=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，所以 $\triangle OCA$ 的面积 $=\frac{1}{2}OA\cdot CF=\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}+3\right)\times\frac{5}{2}\sqrt{3}=\frac{75+55\sqrt{3}}{8}$。

24.3(1) 平移

① D ❷ B ③ C ❹ (3, 2) ⑤ $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 或 $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ ❻ (0, −2) ⑦ (7, 0)

❽ 3

⑨ (1) 将点 $A(1, 1)$ 进行“1 型平移”后的对应点 A' 的坐标为 $(1+1, 1-1)$，即为 $(2, 0)$。

(2) $-3\leqslant t\leqslant -1$ 或 $t=1$。

❿ (51, 50) [提示：观察发现，第 2 次跳动至点(2, 1)，第 4 次跳动至点(3, 2)，第 6 次跳动至点(4, 3)，第 8 次跳动至点(5, 4)，…，第 $2n$ 次跳动至点 $(n+1, n)$，所以第 100 次跳动至点(51, 50)。]

⑪ (1) 因为 $\triangle ABC$ 中任意一点 $P(x, y)$ 经平移后对应点为 $P_1(x-5, y+2)$，所以 $\triangle ABC$ 的平移规律为：向左平移 5 个单位，向上平移 2 个单位。因为 $A(4, 3)$，$B(3, 1)$，$C(1, 2)$，所以点 A_1 的坐标为 $(-1, 5)$，点 B_1 的坐标为 $(-2, 3)$，点 C_1 的坐标为 $(-4, 4)$。

(2) $\triangle A_1B_1C_1$ 的面积 $=3\times2-\frac{1}{2}\times1\times3-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times1\times2=\frac{5}{2}$。

12 (1) (3, −4), (−2, 0)　(2) $(a-5, b+4)$　(3) $S_{\triangle ABC}=4\times4-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times4\times1-\frac{1}{2}\times2\times3=7$。

13 (1) 由 $A(1, 3)$平移到 $B(3, 0)$，可得向右平移 2 个单位，再向下平移 3 个单位，所以点 $O(0, 0)$平移后的坐标为$(2, -3)$，即 $C(2, -3)$，$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}=\frac{9}{2}$。因为 $S_{\triangle AOD}=2S_{\triangle ABC}$，所以 $S_{\triangle AOD}=9$。当 D 点在 x 轴上时，$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OD\times3=9$，则 $OD=6$，所以 $D(6, 0)$ 或 $D(-6, 0)$；当 D 点在 y 轴上时，$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OD\times1=9$，则 $OD=18$，所以 $D(0, -18)$或 $D(0, 18)$。所以 $D(6, 0)$或 $D(-6, 0)$或$(0, -18)$或$(0, 18)$。　(2) 设点 Y 为 y 轴正半轴上一点，延长 BC 交 y 轴于点 E。因为 $OA\parallel BC$ 及 $\angle AOB=60°$，所以 $\angle AOY=\angle BEY=30°$，再用三角形的内角和为 180°，分三种情况可求。① 当 P 在 y 轴的正半轴上时，$\angle BCP=\angle CPO+30°$；② 当 P 在线段 OE 上时（不与点 O 重合，可与点 E 重合），$\angle BCP+\angle CPO=210°$；③ 若 P 在 E 点下方时，$\angle BCP=\angle CPO+150°$。综上所述，$\angle CPO$ 与 $\angle BCP$ 的数量关系是 $\angle BCP=\angle CPO+30°$ 或 $\angle BCP+\angle CPO=210°$ 或 $\angle BCP=\angle CPO+150°$。

24.3（2）　轴对称

1 C　**2** A　**3** C　**4** (2, 1)　**5** 7　**6** −1, 2　**7** (3, −4)　**8** $a>1$　**9** 2

10 $\left(0, \frac{9}{4}\right)$　[提示：因为 $\angle C=90°$，$AC\perp x$ 轴，$\angle AOB=90°$，所以四边形 $AOBC$ 是矩形。因为点 C 的坐标为$(3, 6)$，所以 $OB=AC=6$，$OA=BC=3$。由轴对称可知，$\angle MAB=\angle CAB$。因为 $OB\parallel AC$，所以 $\angle CAB=\angle ABO$，所以 $\angle MAB=\angle ABO$，所以 $AN=BN$。在 Rt$\triangle AON$ 中，因为 $AN^2=OA^2+ON^2$，所以 $(6-ON)^2=3^2+ON^2$，解得 $ON=\frac{9}{4}$，所以 $N\left(0, \frac{9}{4}\right)$。]

11 (1) $a=-8$, $b=-5$　(2) $(4a+b)^{2025}=-1$。

12 (1) 画图略。

(2) 由图可得，$B_1(5, -2)$　(3) $(2-a, b)$

13 (1) (−1, 0), (−3, −4)　(2) 因为 $m+2>m+1$，所以点 A 关于 x 轴对称的点 $M(m+1, -m-2)$。因为 $m<1$，所以 B 点关于 x 轴对称的点 $N(m, -1)$，因为 $C(m+1, 1)$，所以 $MC=m+3$，所以 $S_{\triangle MNC}=\frac{1}{2}\times(m+3)\times1=\frac{7}{4}$，解得 $m=\frac{1}{2}$。　(3) 因为 $E(1, 5)$，$F(5, 5)$，所以 $EF=4$。当 $\angle GEF=90°$ 时，$G(1, 9)$；当 $\angle GFE=90°$ 时，$G(5, 9)$；当 $\angle EGF=90°$ 时，$G(3, 7)$。因为 $a<b$，所以 $a-\frac{1}{2}<b$，$a-1<b$，所以 $P'\left(a-\frac{1}{2}, -b\right)$，$Q'(a-1, -b)$。

当 $G(3,\ 7)$ 在线段 $P'Q'$ 上时,$a-1\leqslant 3$, $a-\frac{1}{2}\geqslant 3$, $-b=7$,解得 $\frac{7}{2}\leqslant a\leqslant 4$, $b=-7$,此时 $a>b$,舍去。当 $G(1,\ 9)$ 在线段 $P'Q'$ 上时,$a-1\leqslant 1$, $a-\frac{1}{2}\geqslant 1$, $-b=9$,解得 $\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 2$, $b=-9$,此时 $a>b$,舍去;当 $G(5,\ 9)$ 在线段 $P'Q'$ 上时,$a-1\leqslant 5$, $a-\frac{1}{2}\geqslant 5$, $-b=9$,所以 $\frac{11}{2}\leqslant a\leqslant 6$, $b=-9$,此时 $a>b$, 舍去。综上所述,点 G 不可能在线段 $P'Q'$ 上。

习题 24.3

1 A 2 B

3 C [提示:首先作出 B 点关于 x 轴的对称点 $B'(4,\ -3)$,连接 AB' 交 x 轴于点 P,则 P 点即为所求。此时,$PA+PB$ 的值最小,即 $PA+PB=AB'=\sqrt{(4+2)^2+(-3-1)^2}=2\sqrt{13}$。]

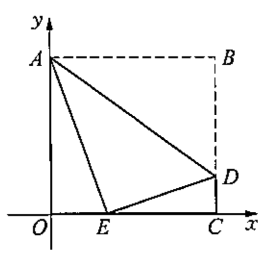
4 $(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$ 5 -5 6 5 7 $(-2,\ 2)$ 8 $(3,\ -1)$

9 $(1,\ 5)$ 10 $(-\sqrt{2},\ \sqrt{3})$

11 (1) 由 $A(-4,\ 1)$, $B(1,\ 1)$,可得 $C(-3,\ 3)$。所以由两点间距离公式,得 $AB=5$, $AC=\sqrt{5}$, $BC=2\sqrt{5}$,所以 $AC^2+BC^2=5+20=25=AB^2$, $\triangle ABC$ 是直角三角形。 (2) 先在图中画出点 C 关于直线 AB 的对称点为点 D,可得 $D(-3,\ -1)$。 (3) $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times 5\times 2=5$,所以 $S_{四边形ACBD}=2\times 5=10$,所以 $S_{\triangle ABM}=10$。设 $M(0,\ m)$,所以 $\frac{1}{2}\times 5\times|m-1|=10$,解得 $m=5$ 或 $m=-3$,所以 $M(0,\ -3)$ 或 $(0\ ,5)$。

12 (1) 画图略。$C_1(-2,\ 1)$。 (2) $S_{\triangle ABC}=5\times 5-\frac{1}{2}\times 5\times 2-\frac{1}{2}\times 5\times 4-\frac{1}{2}\times 1\times 3=\frac{17}{2}$。 (3) $(-2,\ -4)$ 或 $(6,\ 4)$。理由如下:因为点 $P(a,\ a-2)$ 与点 Q 关于 x 轴对称,$PQ=8$,所以 $|a-2|=4$,解得 $a=6$ 或 -2, 所以点 P 的坐标为 $(-2,\ -4)$ 或 $(6,\ 4)$。

13 (1) $(3,\ 4)$, $(0,\ 1)$ (2) 能。如图,因为四边形 $OABC$ 为矩形,所以 $BC=OA=4$, $AB=OC=m$, $\angle AOC=\angle DCE=90°$。由折叠的性质,得 $DE=BD=BC-CD=4-1=3$, $AE=AB=m$。在 Rt$\triangle CDE$ 中,由勾股定理,得 $CE=\sqrt{DE^2-CD^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$,则 $OE=OC-CE=m-2\sqrt{2}$。在 Rt$\triangle AOE$ 中,由勾股定理,得 $OA^2+OE^2=AE^2$,即 $4^2+(m-2\sqrt{2})^2=m^2$,解得 $m=3\sqrt{2}$。综上所述,随着 m 的变化,点 E 能恰好落在 x 轴上,此时 m 的值为 $3\sqrt{2}$。



第 13 题图

单元练习二十四

1 B 2 B 3 A 4 B 5 D 6 B 7 $(-2, 1)$ 8 (1) $(-2, -1)$，$(2, 1)$ (2) $(3, a)$ (3) -3，4 (4) 3，-4 9 $(x, -1)(-2 \leqslant x \leqslant 3)$ 10 $(0, 3)$或$(-4, 0)$
11 $(5, 2)$

12 $(-5, 3)$ ［提示：过 C 作 $CE \perp OE$ 于点 E，先利用正方形的性质证明 $\triangle CBE \cong \triangle BAO$，结合点 A 的坐标为$(0, 2)$，点 B 的坐标为$(-3, 0)$，从而可得 C 坐标是$(-5, 3)$。］

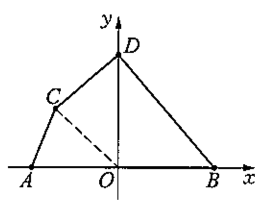
13 $(-3\sqrt{2}-3, 0)$ ［提示：根据题意，得出 $AB \parallel x$ 轴，据此可推出 $CD=BC$。易求得 $BO=CO=3$，$BC=CD=3\sqrt{2}$，所以 $OD=3\sqrt{2}+3$，所以点 D 的坐标为$(-3\sqrt{2}-3, 0)$。］

14 4 或$\frac{43}{8}$ ［提示：$AC^2=3^2+4^2=25$，$AD^2=(-3+6)^2+(0-z)^2=9+z^2$，$CD^2=(0+6)^2+(4-z)^2=z^2-8z+52$。当 $AC=AD$ 时，$25=9+z^2$，解得 $z=4$ 或 -4。当 $z=-4$ 时，A、C、D 三点共线，舍去。当 $AC=CD$ 时，$25=z^2-8z+52$，即 $z^2-8z+27=0$，方程无解。当 $AD=CD$ 时，$9+z^2=z^2-8z+52$，解得 $z=\frac{43}{8}$。综上所述，$z=4$ 或$\frac{43}{8}$。］

15 $\left(-\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right)$ ［提示：连接 $A'A$，交 BD 于点 G，作 $A'F \perp BO$ 于点 F。由翻折可得 $A'A \perp DB$，$A'B=OB=8$。因为 $S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2} \cdot DO \cdot OB=\frac{1}{2} \cdot BD \cdot OG$，所以$\frac{1}{2} \times 4 \times 8=\frac{1}{2} \times \sqrt{4^2+8^2} \times OG$，所以 $OG=\frac{8\sqrt{5}}{5}$，所以 $A'O=2OG=\frac{16\sqrt{5}}{5}$，$BG=\sqrt{OB^2-OG^2}=\sqrt{8^2-\left(\frac{8\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\frac{16\sqrt{5}}{5}$。因为 $S_{\triangle A'OB}=\frac{1}{2} \cdot A'O \cdot BG=\frac{1}{2} \cdot OB \cdot A'F$，所以$\frac{1}{2} \times \frac{16\sqrt{5}}{5} \times \frac{16\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{2} \times 8 \times A'F$，所以 $A'F=\frac{32}{5}$，所以 $OF=\sqrt{A'O^2-A'F^2}=\frac{16}{5}$，所以点 A' 的坐标为$\left(-\frac{32}{5}, \frac{16}{5}\right)$。］

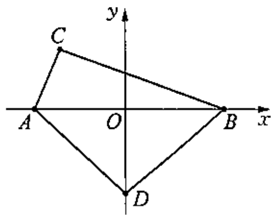
16 5 ［提示：连接 AB，要求出 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(4-x)^2+4}$ 最小值，即求 $AP+PB$ 长度的最小值，据两点之间线段最短可知 $AP+PB$ 的最小值就是线段 AB 的长度。因为 $A(0, 1)$，$B(4, -2)$，所以 $AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$。］

17 $\left(0, \frac{24}{5}\right)$或$(0, -3)$ ［提示：设点 D 到 x 轴的距离为 h。因为 $A(-3, 0)$，$B(3, 0)$，所以 $AB=3-(-3)=6$。如图①，当点 D 在 y 轴正半轴上时，连接 CO。$S_{四边形ABDC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle COD}+S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2} \times 3 \times 2+\frac{1}{2} \times h \times 2+\frac{1}{2} \times 3 \times h=15$，解得 $h=\frac{24}{5}$，此时点 D 的坐标为$\left(0, \frac{24}{5}\right)$。



第 17 题图①

如图②，当点 D 在 y 轴负半轴上时，$S_{四边形ACBD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 6\times 2+\frac{1}{2}\times 6h=15$，解得 $h=3$，此时点 D 的坐标为 $(0,\ -3)$。综上所述，点 D 的坐标为 $\left(0,\ \frac{24}{5}\right)$ 或 $(0,\ -3)$。]



第 17 题图②

18 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$，$(-3,\ 0)$，$(3,\ 0)$ [提示：因为 $A(-\sqrt{5},\ 0)$，$B(\sqrt{5},\ 0)$，所以 $OA=OB=\sqrt{5}$。分类讨论如下：当点 C 在 y 轴(除去原点)上时，$OC\perp AB$，则 OC 垂直平分 AB，所以 $AC=BC$。因为 $AC+BC=6$，所以 $AC=BC=3$。因为 $\angle AOC=90°$，所以 $OC=\sqrt{AC^2-OA^2}=2$，所以点 C 的坐标为 $(0,\ 2)$ 或 $(0,\ -2)$；当点 C 在 x 轴上时，设 $C(m,\ 0)$。若点 C 在点 A 左侧，则 $AC=-\sqrt{5}-m$，$BC=\sqrt{5}-m$，所以 $AC+BC=-2m=6$，解得 $m=-3$，所以 $C(-3,\ 0)$；若点 C 在线段 AB 上，则 $AC+BC=AB=OA+OB=\sqrt{5}+\sqrt{5}\neq 6$，不符合题意；若点 C 在点 B 右侧，则 $AC=m+\sqrt{5}$，$BC=m-\sqrt{5}$，所以 $AC+BC=2m=6$，解得 $m=3$，所以 $C(3,\ 0)$。综上所述，所有满足条件的点 C 的坐标为 $(0,\ 2)$，$(0,\ -2)$，$(-3,\ 0)$，$(3,\ 0)$。]

19 (1) 画图略。

(2) 画图略。点 $A_1(0,\ 2)$。

(3) $B_1(4,\ -2)$。设 $P(0,\ a)$，因为以 A_1、B_1、P 为顶点的三角形面积为 6，所以 $\frac{1}{2}\times|2-a|\times 4=6$，解得 $a=-1$ 或 5，所以点 P 坐标为 $(0,\ -1)$ 或 $(0,\ 5)$。

20 (1) 8，12

(2) 由题意得点 P 移动了 5 秒时，所走的路程为 $2\times 5=10$，因为 $OA=8<10$，所以此时点 P 移动到 AB 上，且与点 A 的距离为 2，所以 $P(8,\ 2)$。

(3) 当点 P 到 x 轴的距离为 5 个单位长度时，点 P 的纵坐标为 5。①当点 P 在 AB 上时，$P(8,\ 5)$，点 P 移动的时间为 $(8+5)\div 2=6.5$(秒)。②当点 P 在 OC 上时，$P(0,\ 5)$，点 P 移动的时间为 $(8+12+8+12-5)\div 2=17.5$(秒)。所以点 P 移动的时间为 6.5 秒或 17.5 秒。

(4) 因为点 P 到两个坐标轴的距离相等，所以分 2 种情况进行讨论：①点 P 与点 O 重合，当点 P 从点 O 开始出发时，此时移动时间为 0 秒；当点 P 回到点 O 时，此时移动时间为 $(8+12+8+12)\div 2=20$(秒)。②当点 P 在 AB 上时，此时点 $P(8,\ 8)$，移动时间为 $(8+8)\div 2=8$(秒)。综上所述，存在点 P 到 x 轴、y 轴的距离相等，此时点 P 的移动时间为 0 秒或 8 秒或 20 秒。

21 (1) $S_{\triangle ABC}=3\times 4-\frac{1}{2}\times 2\times 1-\frac{1}{2}\times 2\times 3-\frac{1}{2}\times 2\times 4=12-1-3-4=4$。

(2) 当点 P 在 x 轴上时，设 $P(x,\ 0)$。因为 $S_{\triangle ABP}=4$，所以 $\frac{1}{2}\times|x-2|\times 1=4$，解得 $x=-6$ 或 10，所以 $P(-6,\ 0)$ 或 $(10,\ 0)$；当点 P 在 y 轴上时，设 $P(0,\ y)$。因为 $S_{\triangle ABP}=4$，所以 $\frac{1}{2}\times|y-1|\times 2=4$，解得 $y=5$ 或 -3。所以 $P(0,\ 5)$ 或 $(0,\ -3)$。综上所述，点 P 坐标为

$(-6,\ 0)$或$(10,\ 0)$或$(0,\ 5)$或$(0,\ -3)$。

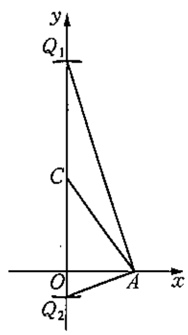
22 (1) $B(\sqrt{3},\ 1)$，$D(-1,\ -2\sqrt{3})$。 (2) 由题意可知$AB=\sqrt{3}+1$，$BC=1+2\sqrt{3}$。①当$t=1$时，点P在AB上，则$AP=\sqrt{3}$，所以点P到y轴的距离为$\sqrt{3}-1$，所以$P(\sqrt{3}-1,\ 1)$。②当$t=3$时，$PC=1+2\sqrt{3}+1+\sqrt{3}-3\sqrt{3}=2$，则$\triangle PDC$的面积$=\frac{1}{2}CD\cdot PC=\frac{1}{2}\times(1+\sqrt{3})\times 2=1+\sqrt{3}$。

23 (1) 存在，设点P的坐标为$(0,\ y)$。因为$A(3,\ 0)$，$C(0,\ 4)$，所以$OA=3$，$OC=4$，所以$PC=|y-4|$，所以$S_{\triangle ACP}=\frac{1}{2}PC\cdot OA=\frac{1}{2}\times|y-4|\times 3=9$，解得$y=10$或$y=-2$，此时点$P$的坐标为$(0,\ 10)$或$(0,\ -2)$。

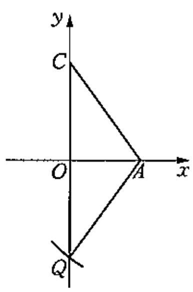
(2) 存在，由勾股定理，得$AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=5$，当$\triangle ACQ$是等腰三角形时，有以下三种情况：

① 当$AC=CQ$时，如图①所示，则$CQ=AC=5$，所以点Q的坐标为$(0,\ 9)$或$(0,\ -1)$。

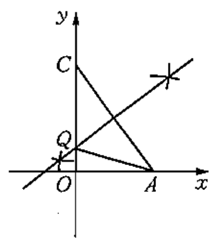
② 当$AC=AQ$时，如图②所示，则$AQ=AC=5$。因为$OA\perp CQ$，所以$OQ=OC=4$，所以点Q的坐标为$(0,\ -4)$。



第23题图①



第23题图②

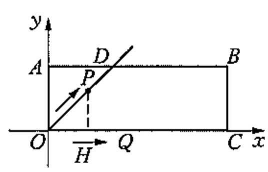


第23题图③

③ 作AC的垂直平分线交y轴于点Q，如图③所示，则$AQ=CQ$，所以$\triangle ACQ$是等腰三角形。设$OQ=a$，则$AQ=CQ=OC-OQ=4-a$。在$\mathrm{Rt}\triangle AOQ$中，由勾股定理得$AQ^2=OQ^2+OA^2$，所以$(4-a)^2=a^2+3^2$，解得$a=\frac{7}{8}$，所以点Q的坐标为$\left(0,\ \frac{7}{8}\right)$。

综上所述，点Q的坐标是$(0,\ 9)$或$(0,\ -1)$或$(0,\ -4)$或$\left(0,\ \frac{7}{8}\right)$。

24 (1) 如图，作$PH\perp x$轴于点H。因为$\angle AOC=90°$，OD平分$\angle AOC$，所以$\angle POH=45°$，所以$\triangle POH$是等腰直角三角形，所以$PH=OH=\frac{OP}{\sqrt{2}}$。因为$OP=\sqrt{2}t$，所以$PH=OH=t$，所以点$P$的坐标为$(t,\ t)$。因为$OQ=2t$，点$Q$在$x$轴上，所以点$Q$的坐标为



第24题图

$(2t, 0)$。

(2) 因为四边形 $OABC$ 是矩形，所以 $\angle AOC=\angle OAB=90°$。因为 OD 平分 $\angle AOC$，所以 $\angle AOD=\angle DOQ=45°$，所以 $\triangle AOD$ 是等腰直角三角形，所以 $AO=AD=2$，$OD=2\sqrt{2}$，所以 $t=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=2$。

(3) 因为点 P 的坐标为 (t, t)，点 Q 的坐标为 $(2t, 0)$，点 B 的坐标为 $(6, 2)$，所以 $PQ^2=(2t-t)^2+(0-t)^2=2t^2$，$PB^2=(t-6)^2+(t-2)^2=2t^2-16t+40$，$BQ^2=(2t-6)^2+(0-2)^2=4t^2-24t+40$。分三种情况讨论：① 当 $PQ=PB$ 时，$PQ^2=PB^2$，则 $2t^2=2t^2-16t+40$，解得 $t=\frac{5}{2}$；②当 $PQ=BQ$ 时，$PQ^2=BQ^2$，则 $2t^2=4t^2-24t+40$，解得 $t=2$ 或 $t=10$；③ 当 $PB=BQ$ 时，$PB^2=BQ^2$，则 $2t^2-16t+40=4t^2-24t+40$，解得 $t=0$(不符合题意，舍去) 或 $t=4$(此时 P、Q、B 三点共线，不符合题意，舍去)。综上所述，当 t 的值为 $\frac{5}{2}$ 或 2 或 10 时，$\triangle PQB$ 为等腰三角形。

第 25 章　一次函数

25.1　变量与函数

① D　❷ C　③ D　❹ 4　⑤ 0　❻ 2

⑦ (2, 4)　[提示：将 $y=\frac{3x-2}{x-1}$ 化为 $y=3+\frac{1}{x-1}$，所以 $x=2$，$y=4$。]

❽ $y=180-2x$　⑨ $y=2x+30$　❿ $S=-5x+\frac{35}{2}$

⑪ (1) $h=\frac{\sqrt{3}}{2}x$　(2) $x=4$

⓬ (1) $h=8$　(2) $S=4x$　(3) 当 $x=4$ 时，$S=4\times 4=16$。

⑬ (1) 5.9, 7.6　(2) y 与 x 之间的函数表达式为 $y=1.7x+0.8$。

(3) 当 $x=60$ 时，$y=60\times 1.7+0.8=102.8$。所以 60 节链条总长度为 102.8 cm。

25.2 (1)　正比例函数的概念

① B　❷ A　③ C　❹ 2　⑤ $y=-2x$　❻ $-\frac{5}{8}$　⑦ -1　❽ 1　⑨ -2 , 843

❿ $-\frac{4}{3}$　[提示：因为自变量 x 的值增大 3 时，函数值 y 相应减少 4，所以 $y-4=k(x+3)$，即 $y-4=kx+3k$，所以 $3k=-4$，所以 $k=-\frac{4}{3}$。]

11 (1) y 与 x 之间的函数表达式为 $y=5x$。 (2) 当 $x=-3$ 时，$y=-15$。

12 (1) 设 $y=k(x+2)(k\neq 0)$。当 $x=3$ 时，$y=7$，所以 $7=5k$，$k=\frac{7}{5}$，所以 $y=\frac{7}{5}x+\frac{14}{5}$。

(2) 当 $x=-1$ 时，$y=-\frac{7}{5}+\frac{14}{5}=\frac{7}{5}$。

13 (1) 设 $y_1-3=k_1x$，$y_2=k_2(x-2)$，则 $y=y_1+y_2=k_1x+3+k_2(x-2)$。把 $x=2$，$y=7$ 和 $x=1$，$y=0$ 代入，得 $\begin{cases}2k_1+3=7,\\k_1+3-k_2=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=2,\\k_2=5,\end{cases}$ 所以 $y=2x+3+5(x-2)=7x-7$，所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=7x-7$。 (2) 当 $x=4$ 时，$y=21$。 (3) 当 $y=6$ 时，$x=\frac{13}{7}$。

14 (1) $y=\frac{1}{2}BC\cdot x=\frac{1}{2}\times 8\times x=4x$。它是正比例函数。 (2) 略 (3) 当 x 每增加 1 时，面积 y 增加 4。

25.2(2) 正比例函数的图像

1 A 2 B 3 C 4 (1, 2)，原点 5 2 6 $\frac{4}{3}$ 7 2

8 (1, 2)或(−1, −2) 9 > 10 3

11 (1) 正比例函数表达式为 $y=-2x$ (2) 略

(3) 将点(2, −5)代入 $y=-2x$，左边 $=-5$，右边 $=-4$，左边 $\neq$ 右边，所以点(2, −5)不在此函数图像上。 (4) 将点 $A(a, 8)$ 代入 $y=-2x$，得 $-2a=8$，解得 $a=-4$，所以 $A(-4, 8)$。

12 (1) 这三个正比例函数的图像都具有以下性质：①都是直线；②都经过原点；③都只经过两个象限。(写一条即可) (2) 由题意可得 $A\left(m, \frac{1}{2}m\right)$，$B(m, km)$，$C(m, -2m)$。因为 $AB=BC$，所以点 B 是 AC 的中点，所以有 $km-\frac{1}{2}m=-2m-km$，解得 $k=-\frac{3}{4}$。

13 (1) 30 km/h (2) 由题意可得 $s=30t$。当 $t=1$ 时，$s=30$，汽车离 A 城 30 km。 (3) 当 $s=100$ 时，$t=\frac{10}{3}$，汽车行驶了 $\frac{10}{3}$ h。

14 (1) $m=4$ (2) 是 (3) 存在，由(1)得 $m=4$，所以 $A(4, -6)$。因为 $AB\perp x$ 轴交于点 B，所以点 B 的坐标为(4, 0)，所以 $S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}OB\cdot AB=\frac{1}{2}\times 4\times|-6|=12$。因为 $\triangle AOP$ 的面积是 $\triangle ABO$ 面积的一半，所以 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABO}=6$。设点 P 的坐标为 $(x, 0)$，则 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\times|x|\times 6=6$，解得 $x=2$ 或 $x=-2$。所以点 P 的坐标为(2, 0)或(−2, 0)。

25.2（3） 正比例函数的性质

① B ❷ B ③ B ❹ 减小 ⑤ -2（只要是负数即可，答案不唯一） ❻ 二、四 减小 ⑦ 1 ❽ -2 ⑨ $\frac{2}{3}$

❿ $\sqrt{3}$ ［提示：过点 B 作 $BC\perp x$ 轴于点 C。因为点 A 的坐标为 $(2,0)$，所以 $OA=2$。又因为 $\triangle OAB$ 为等边三角形，所以 $OC=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times2=1$，$BC=\sqrt{OB^2-OC^2}=\sqrt{3}$，所以点 B 的坐标为 $(1,\sqrt{3})$。因为正比例函数 $y=kx$ 的图像经过点 B，所以 $\sqrt{3}=1\times k$，解得 $k=\sqrt{3}$，所以 k 的值为 $\sqrt{3}$。］

⑪ (1) 把点 $(2,-4)$ 代入正比例函数 $y=kx$，得 $-4=2k$，解得 $k=-2$。 (2) 把点 $(-1,m)$ 代入 $y=-2x$，得 $m=2$。 (3) 方法 1：$y_1=(-2)\times\frac{1}{2}=-1$，$y_2=(-2)\times(-2)=4$，$y_3=(-2)\times1=-2$，所以 $y_3<y_1<y_2$。方法 2：因为函数 $y=-2x$ 中，y 随 x 的增大而减小，且 $-2<\frac{1}{2}<1$，所以 $y_3<y_1<y_2$。

⓬ (1) 因为 $y=(2k-4)x$ 的图像经过第二、四象限，所以 $2k-4<0$，$k<2$。又因为 k 为正整数，所以 k 的值为 1。 (2) 将 $k=1$ 代入 $y=(2k-4)x$，得 $y=-2x$，所以当 $x=3$ 时，$y=-2\times3=-6$，所以点 $A(3,-9)$ 不在这个函数的图像上。

⑬ (1) 因为 $k^2-3=1$，且 $k+\frac{1}{3}\neq0$，所以 $k=\pm2$。 (2) 因为 $k+\frac{1}{3}>0$，即 $k>-\frac{1}{3}$，所以 $k=2$，所以正比例函数的表达式为 $y=\frac{7}{3}x$。 (3) 因为 $k+\frac{1}{3}<0$，即 $k<-\frac{1}{3}$，所以 $k=-2$，所以正比例函数的表达式为 $y=-\frac{5}{3}x$。

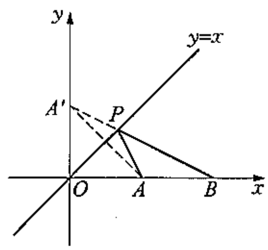
⓮ (1) 由条件可得 $4=-2k$，解得 $k=-2$，所以 $y_2=-2x$。当 $x=4$ 时，$y_2=-2\times4=-8$，即 $n=-8$。 (2) 由条件可得 $a=4h$，$b=kh$，$c=-\frac{1}{4}h$，所以 $AB=|4h-kh|$，$BC=\left|-\frac{1}{4}h-kh\right|$。因为 $AB=2BC$，所以 $|4h-kh|=2\left|-\frac{1}{4}h-kh\right|$。当 $h=0$ 时，A、B、C 三点都与原点重合，不符合题意。当 $h\neq0$ 时，则 $|4-k|=2\left|-\frac{1}{4}-k\right|$，所以 $4-k=2\left(-\frac{1}{4}-k\right)$ 或 $4-k=-2\left(-\frac{1}{4}-k\right)$，解得 $k=-\frac{9}{2}$ 或 $k=\frac{7}{6}$。所以 $k=-\frac{9}{2}$ 或 $k=\frac{7}{6}$。

习题 25.2

① C ❷ A ③ B ❹ $y=-x$（答案不唯一） ⑤ -2 ❻ $n\geqslant2$ ⑦ -6

8 $y=\frac{1}{3}x$ **9** (1) 100 (2) 8

10 $\sqrt{5}$ [提示:如图,作 A 点关于直线 $y=x$ 的对称点 A',则 $A'(0,1)$。连接 $A'B$,交直线 $y=x$ 于点 P,此时 $PA+PB$ 最小。由题意可得 $OA'=OA=1$, $BO=2$, $PA'=PA$,所以 $PA+PB=PA'+PB=A'B=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$。]



第 10 题图

11 (1) $m=-2$ (2) 将(3, 4)代入,得 $3(m-2)+m+2=4$,解得 $m=2$。

12 设 $y_1=k_1x$, $y_2=k_2(x+1)$,则 $y=k_1x-2k_2(x+1)$,根据题意得 $\begin{cases}3=k_1-4k_2,\\5=2k_1-6k_2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=1,\\k_2=-\frac{1}{2}。\end{cases}$ 所以 $y=x-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)(x+1)=2x+1$。

13 (1) 因为点 A 的横坐标为 3,且△AOH 的面积为 3,所以 $HA=2$,所以点 A 的纵坐标为 -2,所以点 A 的坐标为(3, −2)。因为正比例函数 $y=kx$ 的图像经过点 A,所以 $3k=-2$,解得 $k=-\frac{2}{3}$,所以正比例函数的表达式为 $y=-\frac{2}{3}x$。 (2) 存在。因为 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}OP\cdot AH=5$,所以 $OP=5$。所以点 P 的坐标为(5, 0)或(−5, 0)。

25.3(1) 一次函数的概念

1 A **2** B **3** B **4** $y=x-\frac{11}{3}$ **5** ①③ **6** 3 **7** −2 **8** −12, 4

9 −1 **10** $y=\frac{x-2}{4}$, 一次

11 (1) $y=-7$ (2) $x=2$ (3) $0<x<\frac{3}{2}$

12 (1) 当 $m=-2$ 时, $y=(m-2)x^{3-|m|}+m+7$ 是一次函数。 (2) 当 $y=3$ 时, $x=\frac{1}{2}$。

13 (1) $y=-2x-2$ (2) 当 $x=-2$ 时, $y=2$;当 $x=4$ 时, $y=-10$。

14 (1) 由题意可得, $y+a=k(x-b)(k\neq0)$,所以 $y=kx-kb-a$,所以 y 是 x 的一次函数。

(2) 把 $x=-1$ 时, $y=-15$; $x=7$ 时, $y=1$ 分别代入 $y=kx-kb-a$,得 $\begin{cases}-15=-k-kb-a,\\1=7k-kb-a,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=2,\\kb+a=13,\end{cases}$ 则该一次函数为 $y=2x-13$。

25.3(2) 一次函数的图像

1 B **2** B **3** C **4** 3, $-\frac{3}{2}$ **5** $\frac{5}{2}$ **6** $\frac{1}{4}$ **7** ±2 **8** $y=-2x+2$

⑨ ②④

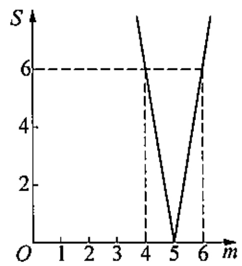
❿ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ ［提示：设 $C(0,\ b)$，由折叠可知 $AC=A'C$，$AB=A'B=5$，所以 $A'O=A'B-OB=2$，$A'C=AC=4-b$。在 $Rt\triangle A'OC$ 中，$A'C^2=A'O^2+OC^2$，所以 $(4-b)^2=2^2+b^2$，解得 $b=\frac{3}{2}$，所以 $C\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$。再由 $B(3,\ 0)$，$C\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$，可得 $l_{BC}:y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$。］

⑪ (1) 略　(2) 一次函数的表达式是 $y=2x-1$。　(3) 一次函数与 x 轴的交点坐标为 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$。

⓬ (1) 一次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+2$。　(2) 当 $y=0$ 时，$x=-4$，所以 $A(-4,\ 0)$。设 $P(m,\ n)$，则 $S_{\triangle AOP}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot|n|=8$，即 $8=\frac{1}{2}\times4\times|n|$，$n=\pm4$。当 $n=4$ 时，$m=4$；当 $n=-4$ 时，$m=-12$。所以 $P(4,\ 4)$ 或 $(-12,\ -4)$。

⑬ (1) $S=\frac{1}{2}\times6\times|-2m+10|=\begin{cases}-6m+30(m\leqslant5),\\6m-30(m>5)。\end{cases}$　(2) 当 $m\leqslant5$ 时，$-6m+30=12$，解得 $m=3$，所以 $P(3,\ 4)$；当 $m>5$ 时，$6m-30=12$，解得 $m=7$，所以 $P(7,\ -4)$。所以点 P 的坐标为 $(3,\ 4)$ 或 $(7,\ -4)$。

(3) 画出图像如下：



第 13 题图

⓮ (1) $D(2,\ 1)$ 或 $D(-2,\ 1)$ 或 $D(0,\ -1)$。　(2) $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ 或 $y=-x-1$。

25.3(3)　一次函数的性质

① D　❷ C　③ C　❹ $>$　⑤ $y=-x+1$(答案不唯一)　❻ -3 或 -2

⑦ ①②③④　❽ $(\sqrt{3},\ \sqrt{3}+1)$ 或 $(-\sqrt{3},\ \sqrt{3}-1)$

⑨ 二、三 ［提示：由题意得，$a+b=kc$，$b+c=ka$，$a+c=kb$，三式相加得 $2(a+b+c)=k(a+b+c)$。所以有 $k=2$ 或 $a+b+c=0$。当 $k=2$ 时，$y=2x+2$，则直线过第一、二、三象限。当 $a+b+c=0$ 时，$a+b=-c$，于是 $k=\frac{a+b}{c}=-1$，所以 $y=-x-1$，所以直线过第二、

三、四象限。综合上述两种情况，直线一定过第二、三象限。]

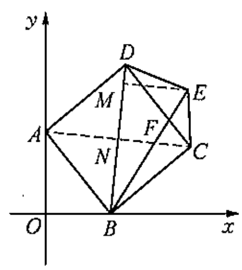
10 1或7 [提示：$\begin{cases}y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4},\\y=-x+9,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=5,\\y=4,\end{cases}$所以$A(5,4)$，则$AF=\sqrt{(5-2)^2+4^2}=5$。设点$F$的对应点为$F'$，点$F'$的坐标为$\left(n,\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}\right)$，点$P$的坐标为$(2,m)$。根据折叠可知$AF=AF'$，所以$\sqrt{(n-5)^2+\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}-4\right)^2}=5$，即$(n-5)^2+\left(\frac{3}{4}n+\frac{1}{4}-4\right)^2=25$，解得$n=1$或$n=9$，所以$F'(1,1)$或$(9,7)$。当$F'(1,1)$时，由$PF=PF'$，得$\sqrt{(2-1)^2+(m-1)^2}=|m|$，即$(2-1)^2+(m-1)^2=m^2$，解得$m=1$；当$F'(9,7)$时，由$PF=PF'$，得$\sqrt{(2-9)^2+(m-7)^2}=|m|$，即$(2-9)^2+(m-7)^2=m^2$，解得$m=7$。所以点$P$的纵坐标为1或7。]

11 (1) $y=-2x+4$ (2) ①点P的坐标为$\left(\frac{7}{3},-\frac{2}{3}\right)$。 ② 由题意，得$C(3,0)$，设$l_1$与$x$轴的交点为$D$，则$CD=3-2=1$，所以$S_{\triangle CPA}=S_{\triangle CDA}+S_{\triangle CDP}=\frac{1}{2}CD\times|y_A|+\frac{1}{2}CD\times|y_P|=\frac{1}{2}\times1\times4+\frac{1}{2}\times1\times\frac{2}{3}=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$。

12 (1) $m=\frac{3}{2}$，直线AB的函数表达式为$y=-\frac{3}{4}x+3$。 (2) 因为点$P(t,y_1)$在线段AB上，所以$y_1=-\frac{3}{4}t+3(0\leqslant t\leqslant2)$。因为点$Q(t-1,y_2)$在直线$y=2x-\frac{5}{2}$上，所以$y_2=2(t-1)-\frac{5}{2}=2t-\frac{9}{2}$，所以$y_1-y_2=-\frac{3}{4}t+3-\left(2t-\frac{9}{2}\right)=-\frac{11}{4}t+\frac{15}{2}$。因为$-\frac{11}{4}<0$，所以$y_1-y_2$随$t$的增大而减小，所以当$t=0$时，$y_1-y_2$的最大值为$\frac{15}{2}$。

13 (1) 由题意得$A(0,4)$，$B(3,0)$，所以$OB=3$，$OA=4$。过点C作$CH\perp x$轴，垂足为点H。易证$\triangle OAB\cong\triangle HBC$，所以$CH=OB=3$，$BH=AO=4$，$OH=OB+BH=7$，所以$C(7,3)$。同理可得$D(4,7)$。

(2) 如图，过点E作$EM\perp BD$于点M，连接AC交BD于点N，则$CN=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}BD$，设旋转角$\angle DBE$的大小为$x$。因为四边形$ABCD$是正方形，所以$\angle BDC=45°$，$AC=BD$，$AC\perp BD$。因为$\angle DFE=\angle DBE+\angle BDC=x+45°$，又因为$DE=DF$，所以$\angle DEF=\angle DFE=x+45°$。由旋转的性质，得$BD=BE$，所以$\angle BDE=\angle BED=x+45°$。因为$\angle BDE+\angle BED+\angle DBE=180°$，所以$x+45°+x+45°+x=180°$，所以$x=30°$。因为在$\mathrm{Rt}\triangle BEM$中，$\angle EBM=x=30°$，易得$EM=\frac{1}{2}BE=$



第13题图

$\frac{1}{2}BD$。所以 $EM=CN$。因为 $EM\perp BD$，$AC\perp BD$，所以 $EM\parallel CN$。所以四边形 $EMNC$ 是平行四边形。所以 $BD\parallel CE$。由 $B(3,0)$，$D(4,7)$，得直线 BD：$y=7x-21$。设直线 CE 的表达式为 $y=7x+m$。将点 $C(7,3)$ 代入，得 $49+m=3$，解得 $m=-46$，故直线 CE 的表达式为 $y=7x-46$。

25.3（4） 一次函数、一次方程与一次不等式

1 C　2 B　3 A　4 $x=-2$　5 $x<1$　6 $x>4$　7 $x<0$　8 ①②④

9 -21 ［提示：解不等式组 $\begin{cases}\frac{5x-a}{3}-x\leqslant 3,\\ 3x<2x+1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x\leqslant\frac{a+9}{2},\\ x<1。\end{cases}$ 因为其解集为 $x<1$，所以 $\frac{a+9}{2}\geqslant 1$，$a\geqslant -7$。因为一次函数 $y=(a+4)x+a+2$ 与 y 轴交于负半轴，所以 $a+2<0$ 且 $a\neq -4$，即 $a<-2$ 且 $a\neq -4$，所以 $-7\leqslant a<-2$ 且 $a\neq -4$，故答案为 $-7-6-5-3=-21$。］

10 $1\leqslant x\leqslant 3$ ［提示：由 $mx+n\geqslant kx+b$，得 $x\geqslant 1$；由 $kx+b\geqslant 0$，得 $x\leqslant 3$；由 $mx+n\geqslant 0$，得 $x\geqslant -2$。所以解集为 $1\leqslant x\leqslant 3$。］

11 (1) 点 A 坐标为 $(1,-3)$。 (2) $\triangle ABC$ 的面积为 9。 (3) 根据图像可知，$y_1>y_2$ 时，x 的取值范围是 $x<1$。

12 (1) $y=-2x+1$　(2) $m>\frac{5}{3}$　(3) 因为一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 的图像过点 $(-1,3)$，且 $k<0$，由图像可得当 $x<-1$ 时，总有 $y>3$，所以 $t\leqslant -1$。

13 (1) 直线 l_1 的表达式为 $y=2x+2$。 (2) 由条件可知 $C(0,2)$，$D(0,-4)$，所以 $CD=2-(-4)=6$。设点 P 的坐标为 $(m,2m+2)$，所以 $S_{\triangle CDP}=\frac{1}{2}CD\cdot|x_P|=\frac{1}{2}\times 6\cdot|x_P|=18$，解得 $x_P=6$ 或 $x_P=-6$，所以点 P 的坐标为 $(6,14)$ 或 $(-6,-10)$。 (3) 根据函数图像可得，当 $-2<x\leqslant -1$ 时，$-x-4<kx+b\leqslant 0$，即不等式 $-x-4<kx+b\leqslant 0$ 的解集为 $-2<x\leqslant -1$。

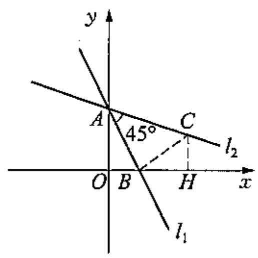
习题 25.3

1 D　2 B　3 B ［提示：由已知直线可求得 $A(6,0)$，$B(0,8)$，所以 $AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=10$。过点 M 作 $MH\perp AB$ 于点 H。因为 AM 平分 $\angle BAO$，易证 $\triangle AMO\cong\triangle AMH$，所以 $AH=AO=6$，$BH=AB-AH=4$，$OM=MH$。设 $OM=MH=a$，则 $BM=8-a$。在 $\mathrm{Rt}\triangle BMH$ 中，$BM^2=MH^2+BH^2$，即 $(8-a)^2=a^2+4^2$，解得 $a=3$。所以 $M(0,3)$，所以可求得直线 AM 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$。］

❹ $\frac{3}{4}$ ❺ $x>1$ ❻ $x<2$ ❼ $\frac{24}{7}$

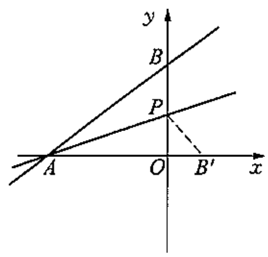
❽ 2 [提示:原分式方程去分母得:$a+3(x-2)=x$,解得$x=\frac{6-a}{2}$。因为关于x的分式方程$\frac{a}{x-2}+3=\frac{x}{x-2}$的解为正整数,所以$\frac{6-a}{2}$是正整数,且$x-2=\frac{6-a}{2}-2\neq 0$,所以$a$是偶数,$a<6$且$a\neq 2$。因为关于$x$的一次函数$y=(a+3)x+6$的图像经过第一、二、三象限,所以$a+3>0$,所以$a>-3$,所以符合条件的所有整数$a$的值为$-2$、0、4,所以符合条件的所有整数$a$的值之和为$-2+0+4=2$。]

❾ $y=-\frac{1}{3}x+2$ [提示:如图,设l_1与x轴交于点B,作$BC\perp AB$,交l_2于点C,作$CH\perp x$轴于点H。因为$AB\perp BC$,所以$\angle ABC=90°$。又因为$\angle BAC=45°$,所以$\triangle ABC$是等腰直角三角形,所以$AB=BC$。因为$CH\perp x$轴,所以$\angle AOB=\angle CHB=\angle ABC=90°$,所以$\angle OAB+\angle ABO=\angle ABO+\angle CBH=90°$,所以$\angle OAB=\angle CBH$,所以可证$\triangle OAB\cong\triangle HBC$,所以$OB=CH$,$OA=BH$。由$l_1$:$y=-2x+2$,可知$A(0,2)$,$B(1,0)$,所以$CH=1$,$BH=2$,$OH=OB+BH=3$,所以$C(3,1)$。由$A(0,2)$,$C(3,1)$,可得$l_2$:$y=-\frac{1}{3}x+2$。]

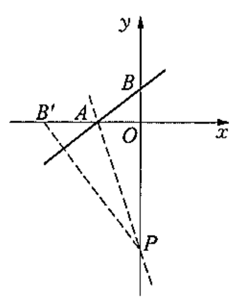


第9题图

❿ $(0,-12)$或$\left(0,\frac{4}{3}\right)$ [提示:因为直线$y=\frac{3}{4}x+3$与x轴、y轴分别交于点A、B,所以$A(-4,0)$、$B(0,3)$,所以$OA=4$,$BO=3$,所以$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$。因为翻折,所以$PB=PB'$,$AB=AB'=5$,设$OP=m$。当P在y轴正半轴时,如图①,因为$PB=PB'=3-m$,$OB'=AB'-AO=5-4=1$。在Rt$\triangle POB'$中,由勾股定理,得$PB'^2=OB'^2+OP^2$,$m^2+1^2=(3-m)^2$,解得$m=\frac{4}{3}$,所以P的坐标为$\left(0,\frac{4}{3}\right)$。当$P$在$y$轴负半轴时,如图②,因为$PB=PB'=3+m$,$OB'=OA+AB'=4+5=9$。在Rt$\triangle POB'$中,由勾股定理,得$PB'^2=OB'^2+OP^2$,$m^2+9^2=(3+m)^2$,解得$m=12$,所以$P$的坐标为$(0,-12)$。综上所述,符合条件的点$P$的坐标为$(0,-12)$或$\left(0,\frac{4}{3}\right)$。]



第10题图①



第10题图②

⓫ (1) $A(1,-4)$,$m=5$。 (2) $\triangle ABC$的面积$=\frac{1}{2}\times 6\times 4=12$。
(3) 当$y_1<y_2$时,x的取值范围是$x>1$。

⓬ (1) $m=1$ (2) 略 (3) 当$-4<y<0$时,x的取值范围是$2<x<6$。

⑬ (1) 由题意得，$A(-2, 0)$，$B(2, 4)$，所以 $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(0-4)^2}=4\sqrt{2}$。 (2) 因为 $B(m, n)$，$C(c, n)$，所以 $BC \parallel x$ 轴，且 $BC=c-m$。因为 $A(-2, 0)$，$D(d, 0)$，所以 $AD=d+2$。因为 $c-d=m+2$，所以 $c-m=d+2$，即 $BC=AD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

⑭ (1) $k=2$，一次函数表达式为 $y=2x-1$。 (2) 由题意可得 $\frac{5-3}{m-2}=3$，解得 $m=\frac{8}{3}$。

(3) 由 $A(1, 2)$，$B(2, 5)$，$C(4, 8)$，可知 $k_{AB}=\frac{5-2}{2-1}=3$，$k_{AC}=\frac{8-2}{4-1}=2$，因为 $k_{AB}\neq k_{AC}$，所以 $A(1, 2)$，$B(2, 5)$，$C(4, 8)$ 不在同一直线上。

25.4 一次函数的应用

① A ② D

③ C [提示：小明到早餐店之前的速度为 $480\div 8=60$(m/min)，则从早餐店出来后的速度变为 $60\times 1.2=72$(m/min)，小明从早餐店到图书馆所用时间为 $(1200-480)\div 72=10$(min)。因为小明 8:30 从家出发，9:00 到达图书馆，所以小明从家到图书馆所用时间为 30 min，$30-8-10=12$(min)，所以小明在早餐店就餐用时 12 分钟。]

④ $y=5x+7(x>1)$ ⑤ 2 ⑥ 250 ⑦ 3.6

⑧ 220 [提示：当 $x>10$ 时，设 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=kx+b$，根据题意得 $\begin{cases}10k+b=100,\\20k+b=180,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=8,\\b=20,\end{cases}$ 所以 $y=8x+20$。当 $x=25$ 时，$y=8\times 25+20=220$。所以王叔叔在该家水果店一次购买 25 kg 该种水果，需要付款 220 元。]

⑨ 8 [提示：设方式 A 的函数表达式为 $y_1=k_1x$，方式 B 的函数表达式为 $y_2=k_2x+20$。由图像得，当 $x=500$ 时，$y_1=y_2$，所以 $500k_1=500k_2+20$，整理得 $k_2-k_1=-\frac{1}{25}$。当 $x=300$ 时，$y_2-y_1=300k_2+20-300k_1=300(k_2-k_1)+20=300\times\left(-\frac{1}{25}\right)+20=8$，所以如果一个月上网 300 分钟，那么方式 B 产生的费用比方式 A 高 8 元。]

⑩ ①②

⑪ (1) 甲的速度为 $\frac{60}{6}=10$ km/h，乙的速度为 $\frac{60}{4-2.5}=40$ km/h。 (2) 由图可知，$l_{OC}: y=10x$，$l_{DE}: y=40x-100$，联立得 $x=\frac{10}{3}$，所以乙出发 $\frac{10}{3}-2.5=\frac{5}{6}$(小时)后，甲乙两人相遇。

(3) 由(2)得 $l_{OC}: y=10x$，$l_{DE}: y=40x-100$，由 $|10x-40x+100|=15$，得 $x=\frac{17}{6}$ 或 $\frac{23}{6}$，$\frac{17}{6}-2.5=\frac{1}{3}$(h)，$\frac{23}{6}-2.5=\frac{4}{3}$(h)。当乙到达终点后，$60-10x=15$，解得 $x=4.5$，$4.5-2.5=2$(h)。所以乙出发 $\frac{1}{3}$ 小时或 $\frac{4}{3}$ 小时或 2 小时后，甲乙两人相距 15 千米。

12 (1) 设购进 A、B 两种模型每件分别需 x 元、y 元。由题意得 $\begin{cases}10x+5y=1000,\\4x+3y=550,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=25,\\y=150,\end{cases}$ 所以购进 A、B 两种模型每件分别需 25 元、150 元。 (2) 设购进 A 种模型 a 件，购进 B 种模型 b 件。由题意得 $\begin{cases}25a+150b=10\,000,\\a\leqslant 8b,\end{cases}$ 解得 $b\geqslant\frac{200}{7}$。因为 B 种模型最多购进 33 件，所以 $\frac{200}{7}\leqslant b\leqslant 33$。因为 b 是整数，所以 $b=29$、30、31、32、33，则对应的 a 为 226、220、214、208、202，故商店共有 5 种进货方案：购进 A 种模型 226 件，B 种模型 29 件；购进 A 种模型 220 件，B 种模型 30 件；购进 A 种模型 214 件，B 种模型 31 件；购进 A 种模型 208 件，B 种模型 32 件；购进 A 种模型 202 件，B 种模型 33 件。 (3) 若购买 B 种模型 m 件，则购买 A 种模型 $(400-6m)$ 件，$W=20(400-6m)+30m=-90m+8000$，因为 $-90<0$，所以 W 随 m 的增大而减小，所以当 $m=29$ 时，W 最大，最大值为 5390 元。

13 (1) 3000 (2) 设 $y_2=kx+b$，因为图像过 $(0,\ 3000)$ 和 $(4,\ 3800)$，所以 $\begin{cases}b=3000,\\4k+b=3800,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=3000,\\k=200,\end{cases}$ 所以 $y_2=200x+3000$。 (3) 采用了方案一，理由如下：设 $y_1=kx$，因为图像过 $(4,\ 2400)$，所以 $4k=2400$，解得 $k=600$，所以 $y_1=600x$。若按照方案一发工资，则 $600x>5000$，解得：$x>\frac{25}{3}$，若按照方案二发工资，则 $200x+3000>5000$，解得 $x>10$。因为销量没有超过 10 万元，所以采用了方案一。

14 任务 1：设一件 B 型无人机的进价为 x 元，则一件 A 型无人机的进价为 $(x+300)$ 元。由题意得 $\frac{15\,000}{x+300}=\frac{6000}{x}\times 2$，解得 $x=1200$。所以一件 B 型无人机的进价为 1200 元，一件 A 型无人机的进价为 1500 元。

任务 2：设商场购进 A 型无人机 m 件，销售利润为 W 元。由题意得 $W=(2000-1500)m+(100-m)(1800-1200)=-100m+60\,000$，因为 $-100<0$，所以 W 随 m 的增大而减小，且 $50\leqslant m\leqslant 100$。所以 $m=50$ 时，W 有最大值 55 000 元。商场购进 A 型无人机 50 件，B 型 50 件，利润最大，最大利润为 55 000 元。

习题 25.4

1 C 2 B 3 B 4 9℃ 5 1730 6 150 7 0.35

8 $y=-\frac{1}{2}x+2$ [提示：由中位线定理，可得 $y=\frac{1}{2}B'C=\frac{1}{2}(BC-BB')=\frac{4-x}{2}=-\frac{1}{2}x+2$。]

9 (1) 4 (2) $x \geqslant 3$ [提示：由题意得 $y_{甲}=\begin{cases}8(0<x\leqslant 1),\\2x+6(x\geqslant 2),\end{cases}$ $y_{乙}=\begin{cases}6(0<x\leqslant 1),\\3x+3(x\geqslant 2)。\end{cases}$ 当 $y_{甲}\leqslant y_{乙}$ 时，$2x+6\leqslant 3x+3$，解得 $x\geqslant 3$。]

10 (1) $x=-w+116$

(2) 1300 [提示：当 $w=25$ 时，$x=-25+116=91$，所以 $y=100\times 91-7800=1300$。]

11 (1) 设当 $2\leqslant t\leqslant 4$ 时，s 与 t 之间的函数表达式为 $s=kt+b$（k、b 为常数，且 $k\neq 0$），将坐标 $A(2,\ 30)$ 和 $B(4,\ 74)$ 分别代入 $s=kt+b$，得 $\begin{cases}2k+b=30,\\4k+b=74,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=22,\\b=-14,\end{cases}$ 所以 s 与 t 之间的函数表达式为 $s=22t-14(2\leqslant t\leqslant 4)$。 (2) 当 $s=63$ 时，$22t-14=63$，解得 $t=3.5$，所以他们共同骑行了 3.5 h。

12 (1) 设 $y=kx+b\ (k\neq 0)$，把 $(12,\ 80)$，$(14,\ 70)$ 代入到 $y=kx+b\ (k\neq 0)$ 中，得 $\begin{cases}12k+b=80,\\14k+b=70,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-5,\\b=140,\end{cases}$ 所以 y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-5x+140$。

(2) 由题意可列一元二次方程 $(x-10)(-5x+140)=280$，整理得 $x^2-38x+336=0$，解得 $x=14$ 或 24。当 $x=14$ 时，$\frac{14-10}{10}\times 100\%=40\%<70\%$，符合题意；当 $x=24$ 时，$\frac{24-10}{10}\times 100\%=140\%>70\%$，不符合题意。所以该商品的售价为 14 元 / 件。

单元练习二十五

1 C 2 A 3 D 4 C 5 D 6 D 7 $y=-\frac{3}{20}x-\frac{1}{5}$ 8 0

9 $y=x-1$（答案不唯一） 10 $>$ 11 2（答案不唯一，$m<3$ 即可） 12 ①③④

13 $x<1$ 14 $k>\frac{1}{2}$ 15 $(7,\ 3)$

16 $y=120x+1680$ [提示：因为 $(234+6)\div 45=5\frac{1}{3}$，所以要装完师生 240 人，客车总数不能少于 6 辆。因为每辆客车上至少要有 1 名教师，共有教师 6 名，所以客车总数不能大于 6 辆（否则有的车上将没有教师，不符合题意），所以租用的客车一共是 6 辆。因为租用 x 辆甲种客车，所以租用 $(6-x)$ 辆乙种客车，所以 $y=400x+280(6-x)=120x+1680$。]

17 $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$ [提示：连接 CD，作 $CH\perp AO$ 于点 H。因为 C、D 分别是 AB、OB 的中点，所以 CD 为 $\triangle AOB$ 的中位线，所以 $CD=\frac{1}{2}AO$，$CD/\!/AO$。又因为 $CH\perp AO$，所以 $CH/\!/DO$，$\angle CHP=\angle DOP=90°$，易证四边形 $CHOD$ 是矩形，所以 $CH=OD$，所以 $\triangle CHP\cong\triangle DOP$。由直线 $y=\frac{2}{3}x+4$，得 $A(-6,\ 0)$，所以 $OH=\frac{1}{2}AO=3$，$OP=PH=\frac{1}{2}OH=\frac{3}{2}$，故

$P\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$。]

18 1或$\frac{3}{7}$ [提示:过点A作$AC\perp x$轴于点C,过点M作$MN\perp x$轴于点N。因为$A(1,\ 4)$,$B(5,\ 0)$,$M(3,\ 2)$,所以$AC=4$,$OB=5$,$MN=2$,所以$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OB\cdot AC=10$。因为一次函数$y=kx+b$的图像经过点$M$,且将$\triangle OAB$分成面积之比为$2:3$的两部分,所以分类讨论如下:①当一次函数$y=kx+b$的图像与边$OB$相交时,设交点为$D$,则$S_{\triangle BDM}:S_{四边形AODM}=2:3$,所以$S_{\triangle BDM}=\frac{2}{5}S_{\triangle OAB}=4$。又因为$S_{\triangle BDM}=\frac{1}{2}BD\cdot MN$,所以$BD=\frac{4\times 2}{2}=4$,所以$OD=OB-BD=1$,所以$D(1,\ 0)$。把点$M(3,\ 2)$,$D(1,\ 0)$分别代入$y=kx+b$,得$\begin{cases}3k+b=2,\\k+b=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=1,\\b=-1。\end{cases}$②当一次函数$y=kx+b$的图像与边$OA$相交时,设交点为$E$,则$S_{\triangle AEM}:S_{四边形OBME}=2:3$,所以$S_{\triangle AEM}=\frac{2}{5}S_{\triangle OAB}$。连接$OM$。因为$M$为$AB$的中点,所以$S_{\triangle OAM}=\frac{1}{2}S_{\triangle OAB}$,所以$S_{\triangle AEM}=\frac{4}{5}S_{\triangle OAM}$,所以$AE=\frac{4}{5}OA$,所以$OE=\frac{1}{5}OA$,所以$E\left(\frac{1}{5},\ \frac{4}{5}\right)$。把点$M(3,\ 2)$,$E\left(\frac{1}{5},\ \frac{4}{5}\right)$分别代入$y=kx+b$,得$\begin{cases}3k+b=2,\\\frac{1}{5}k+b=\frac{4}{5},\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\frac{3}{7},\\b=\frac{5}{7}。\end{cases}$综上所述,$k$的值为1或$\frac{3}{7}$。]

19 (1)$\begin{cases}a=-1,\\k=1。\end{cases}$ (2)$S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot y_C=\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$。

20 (1)l_1的表达式为$y=\frac{1}{2}x+3$。 (2)$n<2$

21 (1)直线l的表达式为$y=-2x+2$。 (2)当$-2<m<4$时,$-6<n<6$。
(3)设$Q(a,\ -2a+2)$。因为点$A(1,\ 0)$和点$B(0,\ 2)$,所以$OA=1$,$OB=2$,所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$。因为$S_{\triangle OBQ}:S_{\triangle OBA}=1:3$。所以$S_{\triangle OBQ}=\frac{1}{2}\times 2\times|a|=\frac{1}{3}$,所以$a=\pm\frac{1}{3}$,所以点$Q$的坐标为$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{8}{3}\right)$或$\left(\frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right)$。

22 (1)选择甲种购票方式时,设y关于x的函数表达式为$y_{甲}=kx$,将$(4,\ 100)$代入,得$100=4k$,解得$k=25$,所以$y_{甲}=25x$;选择乙种购票方式时,设y关于x的函数表达式为$y_{乙}=k'x+b$,将$(0,\ 100)$,$(12,\ 250)$分别代入,得$\begin{cases}100=b,\\250=12k'+b,\end{cases}$解得$\begin{cases}k'=12.5,\\b=100,\end{cases}$所以$y_{乙}=12.5x+100$。
(2)因为$y_{乙}=12.5x+100$,当$x=0$时,得$y_{乙}=100$,所以购买一张动物园年卡的费用为

100元。

(3) 联立得$\begin{cases}y_{甲}=25x,\\y_{乙}=12.5x+100,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=8,\\y=200,\end{cases}$所以直线$y_{甲}=25x$与直线$y_{乙}=12.5x+100$的交点为(8, 200)。当$0<x<8$时,直线$y_{甲}=25x$在直线$y_{乙}=12.5x+100$的图像下方,即$y_{甲}<y_{乙}$,所以此时选择甲种购票方式更划算;当$x=8$时,直线$y_{甲}=25x$与直线$y_{乙}=12.5x+100$交于点(8, 200),即此时选择甲种购票方式或乙种购票方式同样划算;当$x>8$时,直线$y_{甲}=25x$在直线$y_{乙}=12.5x+100$的图像上方,即$y_{甲}>y_{乙}$,所以此时选择乙种购票方式更划算。

㉓ (1) 图略。$x=7$, $y=4$这组数据是错误的。 (2) 设这个一次函数的表达式为$y=kx+b$(k、b为常数,且$k\neq0$)。将坐标(2, 2)和(4, 3)分别代入$y=kx+b$,得$\begin{cases}2k+b=2,\\4k+b=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=0.5,\\b=1,\end{cases}$所以这个一次函数的表达式为$y=0.5x+1$。 (3) 当$x=18$时,得$y=0.5\times18+1=10$。所以秤钩所挂物重是10斤。

第26章　反比例函数

26.1　反比例函数

① D　❷ A　③ B　❹ ②⑤⑥　⑤ -9　❻ ①②④

⑦ 矩形的面积S一定时,矩形的长a是矩形的宽b的反比例函数;$a=\frac{S}{b}$(S为常数,且$S>0$)。

❽ 反　[提示:因为y与$2z$成反比例,比例系数为k_1,所以$y=\frac{k_1}{2z}$。因为z与$\frac{1}{2}x$成正比例,比例系数为k_2,所以$z=k_2\times\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}k_2x$,所以$y=\frac{k_1}{2z}=\frac{k_1}{2\times\frac{1}{2}k_2x}=\frac{\frac{k_1}{k_2}}{x}$,因为$k_1\cdot k_2\neq0$,所以$y$关于$x$成反比例。]

⑨ $<$　[提示:由题意可得$k_1=\frac{m}{m+2}$, $k_2=\frac{m+1}{m+3}$,所以$k_1-k_2=\frac{m}{m+2}-\frac{m+1}{m+3}=\frac{m(m+3)-(m+1)(m+2)}{(m+2)(m+3)}=\frac{-2}{(m+2)(m+3)}$。因为$m>0$,所以$k_1-k_2<0$,所以$k_1<k_2$。]

❿ $(2\sqrt{6}, 0)$　[提示:设$A\left(m, \frac{3\sqrt{3}}{m}\right)$,则$OE=m$, $AE=\frac{3\sqrt{3}}{m}$。由$\triangle AOB$是等边三角形,可得$OE=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}OA$,所以$AE=\sqrt{OA^2-OE^2}=\sqrt{3}OE$,所以$\frac{3\sqrt{3}}{m}=\sqrt{3}m$, $m=\sqrt{3}$,所以

$A(\sqrt{3}, 3)$，$OB=OA=2OE=2\sqrt{3}$，$B(2\sqrt{3}, 0)$。设 $C\left(n, \frac{3\sqrt{3}}{n}\right)$，则 $OF=n$，$CF=\frac{3\sqrt{3}}{n}$，所以 $BF=OF-OB=n-2\sqrt{3}$。同理，得 $CF=\sqrt{3}BF$，所以 $\frac{3\sqrt{3}}{n}=\sqrt{3}(n-2\sqrt{3})$，$n^2-2\sqrt{3}n-3=0$，解得 $n=\sqrt{3}+\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{3}-\sqrt{6}$（舍），所以 $BD=BC=2BF=2\sqrt{6}-2\sqrt{3}$，所以 $OD=OB+BD=2\sqrt{3}+2\sqrt{6}-2\sqrt{3}=2\sqrt{6}$，所以 $D(2\sqrt{6}, 0)$。]

11 (1) 由题意可设 $y=\frac{k}{x^2}$。将 $x=3$，$y=4$ 代入表达式，得 $4=\frac{k}{3^2}$，解得 $k=36$，所以 $y=\frac{36}{x^2}$。

(2) 当 $x=5$ 时，$y=\frac{36}{5^2}=\frac{36}{25}$。 (3) 当 $y=6$ 时，$6=\frac{36}{x^2}$，所以 $x^2=6$，$x=\pm\sqrt{6}$。

12 由题意可设 $y_1=k_1x(k_1\neq0)$，$y_2=\frac{k_2}{x}(k_2\neq0)$。当自变量 $x=1$ 时，$y_1-y_2=-3$；当自变量 $x=2$ 时，$y_1=y_2$，则 $\begin{cases}k_1-k_2=-3,\\ 2k_1=\frac{k_2}{2},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=1,\\ k_2=4。\end{cases}$ 故 $y_1=x$，$y_2=\frac{4}{x}$。

13 (1) 因为在面积为定值的一组菱形中，当菱形的一条对角线长为 4 cm 时，它的另一条对角线长为 12 cm，所以 $S_{菱形}=\frac{1}{2}\times4\times12=24(\mathrm{cm}^2)$。因为菱形的两条对角线的长分别为 x cm，y cm，所以 $S_{菱形}=\frac{1}{2}xy=24$，所以 y 关于 x 的函数表达式为 $y=\frac{48}{x}(x>0)$。这个函数是反比例函数，比例系数是 48。

(2) 因为其中一个菱形的一条对角线长为 6 cm，所以它的另一条对角线长为 $\frac{48}{6}=8(\mathrm{cm})$，所以这个菱形的边长为 $\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2+\left(\frac{8}{2}\right)^2}=5(\mathrm{cm})$。

26.2（1） 反比例函数的图像与性质（1）

1 A 2 B 3 C 4 4 或 -4，-2 5 $m<-7$ 6 $y=-\frac{2}{x}$（答案不唯一）

7 $a>1$ 或 $a<-1$ 8 $y_1<0<y_2$ 9 $(-2, 3)$

10 1 [提示：由条件可知反比例函数图像在第一、三象限，且在每个象限内，y 随着 x 的增大而减小，所以当 $x=-4$ 时，$y=-1$，即 $-1=\frac{k}{-4}$，$k=4$，所以反比例函数表达式为 $y=\frac{4}{x}$，所以当 $2\leqslant x\leqslant4$ 时，y 随着 x 的增大而减小，所以当 $x=4$ 时，y 取得最小值，最小值为 $y=\frac{4}{4}=1$。]

11 (1) 反比例函数的表达式为 $y=\frac{20}{x}$。 (2) $a=-1$

12 因为反比例函数 $y=\frac{3-2m}{x}$,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,所以 $3-2m>0$,解得 $m<\frac{3}{2}$,所以正整数 m 的值是 1。

(13) (1) 因为反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图像经过 $A(3, m)$、$B(1, 6)$ 两点,所以 $k=3m=6$,所以 $m=2$, $k=6$。 (2) 因为在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 中,$k=6>0$,所以此函数的图像在每一象限内 y 随 x 的增大而减小。①当 $0<y_1<y_2$ 时,$0<x_2<x_1$,②当 $y_1<y_2<0$ 时,$x_2<x_1<0$,③当 $y_1<0<y_2$ 时,$x_1<0<x_2$。

14 (1) ① 列表:

x	…	-6	-5	-4	-3	-2	0	1	2	3	4	…
y	…	$-\frac{4}{5}$	-1	$-\frac{4}{3}$	-2	-4	4	2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{4}{5}$	…

② 画图略。

(2) ① 图像是中心对称图形;② 当 $x>-1$ 时,y 随着 x 的增大而减小。 (3) 函数 $y=\frac{4}{x+1}$ 的图像是由函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图像向左平移 1 个单位,其对称中心的坐标为 $(-1, 0)$。 (4) 函数 $y=\frac{4}{x+1}+2$ 的图像在 $y=\frac{4}{x+1}$ 的基础上向上平移 2 个单位,当 x 满足 $-1<x\leqslant 3$ 时,$y\geqslant 3$。

26.2(2) 反比例函数的图像与性质(2)

(1) B **2** B (3) A **4** $k>1$ (5) 2 **6** 四 (7) -1(答案不唯一)

8 $x_1>x_2$ (9) $>$ **10** 3 [提示:设 $A(m, 0)$,则 $D\left(m, \frac{k}{m}\right)$,所以 $AD=\frac{k}{m}$。因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AD\parallel BC$, $AD=BC=\frac{k}{m}$。设 $C\left(n, \frac{k}{n}\right)$。$S_{\triangle ABE}=S_{\triangle CBE}-S_{\triangle CBA}=\frac{1}{2}\cdot CB\cdot x_C-\frac{1}{2}\cdot CB\cdot(x_C-x_A)=\frac{1}{2}\times\frac{k}{m}\times n-\frac{1}{2}\times\frac{k}{m}\times(n-m)=\frac{1}{2}\times\frac{k}{m}\times m=\frac{k}{2}$,所以 $S_{\triangle ABE}=\frac{k}{2}=\frac{3}{2}$,所以 $k=3$。]

(11) (1) $k=-8$ (2) 图像在第二、四象限

(3) 因为 $k=-8<0$,所以在每个象限内 y 随 x 的增大而增大。画图略。

(4) $B\left(\frac{1}{2}, -16\right)$ 在反比例函数的图像上,$C(-3, 5)$ 不在反比例函数的图像上。

12 (1) $AH=3$ (2) $k=6$ (3) y_1 与 y_2 的大小关系为 $y_1>y_2$。

13 因为点 $A(a, y_1)$、$B(a+3, y_2)$都在反比例函数的图像上，所以 a、$a+3$ 均不为 0。当 a 与 $a+3$ 同号，即 $a>0$ 或 $a<-3$ 时，A、B 在同一象限内。因为 $y=\frac{k}{x}(k<0)$在每个象限内，y 随 x 增大而增大，所以 $y_1<y_2$；当 a 与 $a+3$ 异号，即 $-3<a<0$ 时，$y_1>0>y_2$。

习题 26.2

1 C　2 A　3 D ［提示：连接 CO，取 AB 的中点 D，连接 DO。由 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+2$，得 $A(-2\sqrt{3}, 0)$，$B(0, 2)$，所以 $OA=2\sqrt{3}$，$OB=2$，$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=4$，所以 $OD=BD=\frac{1}{2}AB=2$，所以 $OD=BD=OB$，所以$\triangle OBD$ 为等边三角形，所以$\angle OBA=60°$，所以$\angle BAO=30°$。由翻折，可得$\angle CAB=\angle BAO=30°$，所以$\angle CAO=60°$。作 $CH\perp x$ 轴于点 H，可得 $AH=OH=\frac{1}{2}AO=\sqrt{3}$，$CH=\sqrt{AC^2-AH^2}=3$，所以 $C(-\sqrt{3}, 3)$，所以 $k=-3\sqrt{3}$。］

4 增大　5 4　6 $m<n$　7 3　8 $k<3$　9 $y<0$ 或 $y>1$

10 $y=\frac{7}{x}$ ［提示：设正方形 $BCGH$ 的边长为 x，正方形 $OCDF$ 的边长为 y，则 $B(x, y)$，根据题意可得$\begin{cases}x^2+y^2=50,\\x+y=\frac{1}{2}\times16,\end{cases}$所以$(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy=14$，所以 $xy=7$。因为点 $B(x, y)$在反比例函数图像上，所以 $k=xy=7$，所以反比例函数的表达式为 $y=\frac{7}{x}$。］

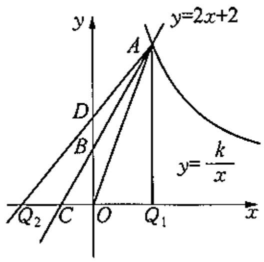
11 (1) y 关于 x 的函数表达式为 $y=\frac{16}{x}$。 (2) 将图形补成矩形后，可得 $S_{\triangle AOB}=8\times4-\frac{1}{2}\times2\times8-\frac{1}{2}\times4\times4-\frac{1}{2}\times2\times4=12$。

12 (1) 将点 $B(1, 3)$ 代入反比例函数的表达式，得 $k=1\times3=3$，所以反比例函数表达式为 $y=\frac{3}{x}$。因为 $A(-3, a)$在反比例函数的图像上，所以 $-3a=3$，$a=-1$。因为一次函数 $y=mx+n$ 图像过点 $A(-3, -1)$，$B(1, 3)$，所以$\begin{cases}-3m+n=-1,\\m+n=3,\end{cases}$解得$\begin{cases}m=1,\\n=2,\end{cases}$所以一次函数的表达式为 $y=x+2$。

(2) 在 $y=x+2$ 中，当 $x=0$ 时，$y=2$；当 $y=0$ 时，$x=-2$，所以 $C(-2, 0)$，$D(0, 2)$，所以 $S_{\triangle OBD}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$，所以 $S_{\triangle OCP}=4S_{\triangle OBD}=4$。设点 P 的坐标为$\left(m, \frac{3}{m}\right)$，所以$\frac{1}{2}\times2\times\frac{-3}{m}=4$，解得 $m=-\frac{3}{4}$，所以 $P\left(-\frac{3}{4}, -4\right)$。

⑬ (1) 这个反比例函数的表达式为 $y=\frac{6}{x}$。 (2) 图略

(3) 由图知 $E(6,4)$，令 $\frac{6}{x}=4$ 得，$x=\frac{3}{2}$。因为 $6-\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$，所以矩形 $ABCD$ 向左平移 $\frac{9}{2}$ 个单位时，点 E 落在反比例函数图像上。



第 14 题图

⑭ (1) 因为直线 $y=2x+2$ 经过点 $A(2,a)$，所以 $a=2\times2+2=6$，所以点 $A(2,6)$。因为点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$ 的图像上，所以 $k=2\times6=12$，所以反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}(x>0)$。 (2) ①当点 Q 在 x 轴正半轴上时，如图，因为 $\angle BOA=\angle OAQ_1$，所以 $AQ_1/\!/y$ 轴，所以点 $Q_1(2,0)$。②当点 Q 在 x 轴负半轴上时，如图，设 AQ_2 与 y 轴交于点 $D(0,b)$。因为 $\angle BOA=\angle OAQ_2$，所以 $OD=AD$，则 $2^2+(6-b)^2=b^2$，解得 $b=\frac{10}{3}$，

所以 $D\left(0,\frac{10}{3}\right)$。设直线 AQ_2 表达式为 $y=mx+n$，则有 $\begin{cases}2m+n=6,\\ n=\frac{10}{3},\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\frac{4}{3},\\ n=\frac{10}{3},\end{cases}$ 所以直线 AQ_2 的表达式为 $y=\frac{4}{3}x+\frac{10}{3}$。当 $y=0$ 时，$x=-\frac{5}{2}$，即点 Q_2 的坐标为 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$。综上所述，点 Q 的坐标为 $(2,0)$ 或 $\left(-\frac{5}{2},0\right)$。

26.3 反比例函数的应用

① C ❷ B ③ D ❹ 40 ⑤ $y=\frac{1600}{x-30}(x>30)$ ❻ (1) $\lambda=\frac{300}{f}$ (2) 4

⑦ $v=\frac{48}{t}$，$9.6\,m^3/h$ ❽ 6 [提示：可求出当 $0<x<4$ 时，$y=2x$；当 $x\geqslant4$ 时，$y=\frac{32}{x}$。再由 $y\leqslant4$，得 $2\leqslant x\leqslant8$，所以持续时间长 6 小时。]

⑨ $-\frac{3}{2}$ [提示：易得 $y_1=-\frac{3}{2}$，$y_2=-\frac{1}{-\frac{3}{2}+1}=2$，$y_3=-\frac{1}{1+2}=-\frac{1}{3}$，$y_4=-\frac{1}{-\frac{1}{3}+1}=-\frac{3}{2}$，所以每 3 次计算为一个循环周期。因为 $2026=675\times3+1$，所以 $y_{2026}=y_1=-\frac{3}{2}$。]

❿ (1) $\frac{3}{4}(k-1)$ (2) 761 [提示：(1) 由题意可得 $A_1(1,1)$，$A_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$，$B_1(1,k)$，

华东师大版一课一练

$B_2\left(2,\ \frac{1}{2}k\right)$，所以 $A_1B_1=k-1$，$A_2B_2=\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$，所以 $S_1=\frac{1}{2}\times1\times\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2}+k-1\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}k-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}(k-1)$。 (2) 由(1)同理得 $A_n\left(n,\ \frac{1}{n}\right)$，$A_{n+1}\left(n+1,\ \frac{1}{n+1}\right)$，$B_n\left(n,\ \frac{k}{n}\right)$，$B_{n+1}\left(n+1,\ \frac{k}{n+1}\right)$，所以 $A_nB_n=\frac{k}{n}-\frac{1}{n}$，$A_{n+1}B_{n+1}=\frac{k}{n+1}-\frac{1}{n+1}$，所以 $S_n=\frac{1}{2}\times\frac{n+n+1}{n(n+1)}\times(k-1)$。因为 $S_{19}=39$，所以$\frac{1}{2}\times\frac{19+20}{19\times20}\times(k-1)=39$，解得 $k=761$。]

⑪ (1) 因为设花圃与墙平行的一边长 $AB=x$(m)，与墙垂直的一边长为 y(m)，面积为 $120\,\text{m}^2$，所以 $xy=120$，所以 $y=\frac{120}{x}$。因为可利用的最大长度为 100 m，所以 $0<x\leqslant100$，所以 y 关于 x 的函数表达式为 $y=\frac{120}{x}(0<x\leqslant100)$。 (2) 因为 AB 是 BC 的 7.5 倍，所以 $x=7.5y$，所以 $y=\frac{120}{7.5y}$，解得 $y=4$ 或 -4(舍去)，所以 $x=7.5y=30$，所以 $x+2y=30+2\times4=38$，所以花圃至少需要围栏 38 米。

⑫ (1) 设加热阶段函数表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$。把 $(0,\ 30)$，$(10,\ 60)$ 代入，得 $\begin{cases}b=30,\\10k+b=60,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}k=3,\\b=30。\end{cases}$ 所以函数的表达式为 $y=3x+30$。所以令 $y=3x+30=90$，则 $x=20$。所以材料加热到 90℃的时间为 20 分钟。 (2) 设降温时函数为 $y=\frac{m}{x}(m\neq0)$，又因为材料自然降温时图像过 $(20,\ 90)$，所以 $m=20\times90=1800$。所以所求函数为 $y=\frac{1800}{x}$。 (3) 对于恒温 60℃工作：由题意可知，加热时长为 10 分钟。恒温阶段 $8\times60-10=470$(分钟)，费用为 $10\times100+470\times60=29\,200$(元)。对于间歇加热工作：令 $y=60$，得 $x=30$。所以除第一次加热到 60℃ 需要 10 分钟，后续 60℃ 加热到 90℃，自然降温到 60℃ 一轮需要 20 分钟，一天 8 小时中，加热时间为 $10+23\times10+10=250$(分钟)。所以费用为 $250\times100=25\,000$(元)，$25\,000<29\,200$。所以仅从可工作时间和加热成本考虑，间歇加热工作更节约成本。

习题 26.3

① B ② D ③ B ④ $\rho=\frac{9.9}{V}$ ⑤ 80 ⑥ 10 ⑦ $y=\frac{12}{x}$ ⑧ -3

⑨ $4\sqrt{2}$ [提示：由题意可得 $A(1,\ 3)$，$B(3,\ 1)$，所以 $AB=BC=2\sqrt{2}$，菱形 BC 边上的高为 2，所以 $S_{菱形ABCD}=2\sqrt{2}\times2=4\sqrt{2}$。]

⑩ $(4\sqrt{2026},\ 0)$ [提示：设点 $P_1(x,\ y)$，根据等腰直角三角形的性质可得 $x=y$。又因为 $y=\frac{4}{x}$，则 $x^2=4$，所以 $x=\pm2$(负值舍去)。再根据等腰三角形的三线合一，得 A_1 的坐标是

(4, 0)。设点P_2的坐标是$(4+y, y)$。又因为$y=\frac{4}{x}$,则$y(4+y)=4$,即$y^2+4y-4=0$,解得,$y_1=-2+2\sqrt{2}$, $y_2=-2-2\sqrt{2}$(舍)。再根据等腰三角形的三线合一,得A_2的坐标是$(4\sqrt{2}, 0)$。可以再进一步求得点A_3的坐标是$(4\sqrt{3}, 0)$,则A_n点的坐标是$(4\sqrt{n}, 0)$。所以A_{2026}的坐标为$(4\sqrt{2026}, 0)$。]

⑪ (1) $s=\frac{70}{a}$ (2) 当$a=0.08$时,$s=\frac{70}{0.08}=875$。所以该轿车可以行驶875千米。

⓬ (1) 当$x=30$时,$y=\frac{4}{15}\times30-6=2$,所以反比例函数过点(30, 2),所以当$10\leqslant x<30$时,$y=\frac{60}{x}$。

(2) 因为$y=\frac{60}{x}$,所以当$y=5$时,$x=12$。当$y=\frac{4}{15}x-6$, $y=5$时,$x=41\frac{1}{4}$,所以温度x取值范围是$12\leqslant x\leqslant 41\frac{1}{4}$时,电阻不超过5 kΩ。

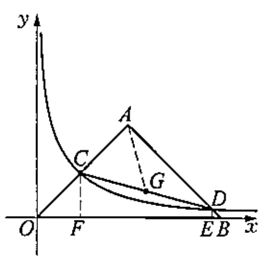
⑬ (1) 因为健身房AB的长为x米,BC的长为y米,面积为40平方米,所以$xy=40$,所以$y=\frac{40}{x}$。又因为所沿用的旧墙壁长度不得超过其长度的一半,所以$\begin{cases}\frac{40}{x}\leqslant 8,\\ x\leqslant 10,\end{cases}$所以$5\leqslant x\leqslant 10$。

(2) 由题意,可得$w=\left(x+\frac{40}{x}\right)\times3\times70+\left(x+\frac{40}{x}\right)\times3\times15=255\left(x+\frac{40}{x}\right)$。当$x=6$时,$w=255\times\left(6+\frac{40}{6}\right)=3230$(元)。

单元练习二十六

① D ❷ D ③ D ❹ D ⑤ B [提示:设$A\left(m, \frac{a}{m}\right)$,则$B\left(m, \frac{b}{m}\right)$,所以$AB=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}$,所以$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times m\times\left(\frac{a}{m}-\frac{b}{m}\right)=\frac{a-b}{2}$。]

❻ C [提示:如图,过点D作$DE\perp x$轴于点E,过C作$CF\perp x$轴于点F。设$OF=a$,则$OC=\sqrt{2}a$, $CF=a$,所以$AC=OA-OC=10-\sqrt{2}a$, $AD=\sqrt{3}AC=10\sqrt{3}-\sqrt{6}a$(取$CD$中点$G$,连接$AG$,易证$\triangle ACG$为等边三角形,$AC=\frac{1}{2}CD$, $AD=\sqrt{3}AC$), $BD=10-10\sqrt{3}+\sqrt{6}a$,所以$DE=EB=\frac{\sqrt{2}}{2}BD=5\sqrt{2}-5\sqrt{6}+\sqrt{3}a$, $OE=OB-EB=10\sqrt{2}-(5\sqrt{2}-5\sqrt{6}+\sqrt{3}a)=5\sqrt{2}+5\sqrt{6}-\sqrt{3}a$。所以$C(a, a)$, $D(5\sqrt{2}+$



第6题图

$5\sqrt{6}-\sqrt{3}a$，$5\sqrt{2}-5\sqrt{6}+\sqrt{3}a$）。因为点 C、D 都在双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 上（$k>0$，$x>0$），所以 $a\cdot a=(5\sqrt{2}+5\sqrt{6}-\sqrt{3}a)\cdot(5\sqrt{2}-5\sqrt{6}+\sqrt{3}a)$，解得 $a=5\sqrt{2}$ 或 $a=\frac{5}{2}\sqrt{2}$。当 $a=5\sqrt{2}$ 时，点 C、D 与点 A 重合，不符合题意，舍去。所以 $C\left(\frac{5}{2}\sqrt{2},\ \frac{5}{2}\sqrt{2}\right)$，所以 $k=\frac{5}{2}\sqrt{2}\times\frac{5}{2}\sqrt{2}=\frac{25}{2}$。]

7 0　8 $k<0$　9 $y=\frac{2}{x}(x>0)$，一　10 -5　11 $y_2<y_1<y_3$　12 3　13 4

14 3　15 -4

16 $(-1,-2)$ 或 $\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$　[提示：因为 $A(1,a)$ 和 $B(2,b)$ 两点在一次函数 $y=-x+3$ 的图像上，所以 $a=-1+3=2$，$b=-2+3=1$，所以 $A(1,2)$，$B(2,1)$。因为 $A(1,2)$，$B(2,1)$ 在反比例函数图像上，所以 $k=2$，所以反比例函数表达式为 $y=\frac{2}{x}$。设 $Q\left(x,\ \frac{2}{x}\right)$，$P(0,m)$，因为 $A(1,2)$，$B(2,1)$，所以当四边形 $ABPQ$ 是平行四边形时，由 $AB=PQ$ 且 $AB/\!/PQ$，可得 $2-1=0-x$，即 $x=-1$，此时 $Q(-1,-2)$，$P(0,-3)$，符合题意；当四边形 $APBQ$ 是平行四边形时，由 $AP=BQ$ 且 $AP/\!/BQ$，可得 $0-1=2-x$，即 $x=3$，此时 $Q\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$，$P\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$，符合题意。综上所述，当以 A、B、P、Q 为顶点的四边形是平行四边形时，Q 坐标为 $(-1,-2)$ 或 $\left(3,\ \frac{2}{3}\right)$。]

17 (1) $b=2$，$k=-3$　(2) 当 $x=4$ 时，$y=-x+2=-2$，$y=-\frac{3}{x}=-\frac{3}{4}$，所以向下平移的距离为 $-\frac{3}{4}-(-2)=\frac{5}{4}$。

18 (1) 由勾股定理，可得菱形 $ABCD$ 的边长为 $AD=\sqrt{AO^2+OD^2}=5$，所以 $C(3,-5)$，所以反比例函数为 $y=-\frac{15}{x}$。　(2) 因为 $AB=AD=5$，所以 $OB=AB-AO=1$，所以 $S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}OB\cdot|x_C|=\frac{1}{2}\times1\times3=\frac{3}{2}$，所以 $S_{\triangle POA}=2S_{\triangle COB}=3$。设 $P\left(m,\ -\frac{15}{m}\right)$，则 $S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}AO\cdot|x_P|=3$，所以 $|x_P|=\frac{3}{2}$，所以 $x_P=\pm\frac{3}{2}$，所以 $P\left(\frac{3}{2},\ -10\right)$ 或 $\left(-\frac{3}{2},\ 10\right)$。

19 (1) 因为开机加热时每分钟上升 10℃，所以从 20℃ 到 100℃ 需要 8 分钟，所以 $a=8$，设一次函数的表达式为 $y=mx+n(m\neq0)$，把 $(0,20)$，$(8,100)$ 代入表达式得 $\begin{cases}n=20,\\8m+n=100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}n=20,\\m=10,\end{cases}$ 所以一次函数的表达式为 $y=10x+20$。设反比例函数表达式为 $y=\frac{k}{x}(k\neq0)$，将

(8, 100)代入，得 $k=800$，所以反比例函数的表达式为 $y=\frac{800}{x}$，当 $y=20$ 时，$x=\frac{800}{20}=40$。综上所述，y 关于 x 的函数表达式为 $y=\begin{cases}10x+20(0\leqslant x\leqslant 8),\\ \frac{800}{x}(8<x\leqslant 40)。\end{cases}$

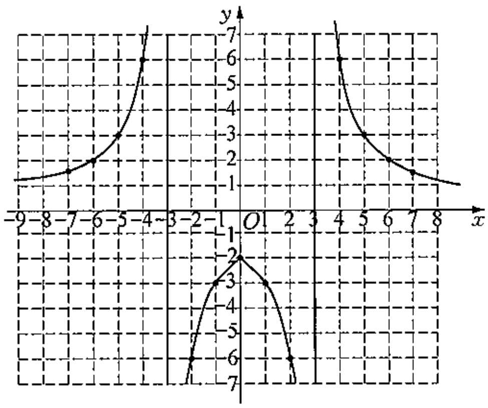
(2) 在 $y=10x+20(0\leqslant x\leqslant 8)$ 中，令 $y=50$，解得 $x=3$。在 $y=\frac{800}{x}$ 中，令 $y=50$，解得 $x=16$，因为 $16-3=13$(分钟)，所以在一次加热到降温的过程中，饮水机有 13 分钟能使水温保持在 50℃ 及以上。

20 (1) 把 $A(1, 2)$ 代入 $y_1=\frac{k}{x}$，得 $k=2$，所以 $y_1=\frac{2}{x}$；把 $A(1, 2)$ 代入 $y_2=x+b$，得 $2=1+b$，$b=1$，所以 $y_2=x+1$。(2) 联立 $\begin{cases}y=\frac{2}{x},\\ y=x+1,\end{cases}$ 可得 $B(-2, -1)$。因为 $A(1, 2)$，$B(-2, -1)$，由函数图像可得当 $y_1<y_2$ 时，$-2<x<0$ 或 $x>1$。 (3) 因为一次函数的图像与 y 轴交于点 C，所以 $C(0, 1)$，所以 $OC=1$，因为 $S_{\triangle OCP}=6$，所以 $\frac{1}{2}\times 1\times|x_P|=6$，所以 $|x_P|=12$。当 $x_P=12$ 时，$y_P=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$；当 $x_P=-12$ 时，$y_P=\frac{2}{-12}=-\frac{1}{6}$，所以 $P\left(12, \frac{1}{6}\right)$ 或 $P\left(-12, -\frac{1}{6}\right)$。

21 (1) 反比例函数的表达式为 $y=\frac{4}{x}$，$\triangle OCD$ 的面积为 3。 (2) $-2<x<-1$ 或 $x>0$

(3) 设 $M(0, a)$，$N\left(b, \frac{4}{b}\right)$。因为 $D(-1, -4)$，$C(-2, -2)$，以 C、D、M、N 为顶点的四边形为平行四边形，则有当 MD 是平行四边形的对角线时，由 $MN=CD$ 且 $MN/\!/CD$，得 $\begin{cases}b-0=-1+2,\\ \frac{4}{b}-a=-4-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=1,\\ a=10,\end{cases}$ 即点 $N(1, 4)$；当 CM 是对角线时，同理可得 $\begin{cases}b+2=1,\\ \frac{4}{b}+2=a+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-1,\\ a=-6,\end{cases}$ 即点 $N(-1, -4)$(不合题意舍去)；当 MN 是对角线时，同理可得：$\begin{cases}b+2=-1,\\ -\frac{4}{b}-2=a+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-3,\\ a=-\frac{14}{3},\end{cases}$ 所以点 $N\left(-3, -\frac{4}{3}\right)$。综上所述，$N\left(-3, -\frac{4}{3}\right)$ 或 $N(1, 4)$。

22 (1) 因为 $|x|-3\neq 0$，所以 $x\neq\pm 3$。 (2) 图像如图所示。



第 22 题图

(3) 函数 $y=\dfrac{6}{|x|-3}$的图像关于 y 轴对称，而点 $A(a,c)$，$B(b,c)$为该函数图像上两对称点，所以 $a+b=0$。(4) 由图像可知，$\dfrac{6}{|x|-3}\geqslant -2$ 时，x 的取值范围为 $x<-3$ 或 $x=0$ 或 $x>3$。

期中练习

1 B　2 C　3 B　4 C　5 C　6 C　7 6　8 4　9 $\sqrt{6}$　10 9

11 $2\sqrt{10}$　12 $(-6,0)$　13 ①②④ [提示：对于④，设 $EQ=DQ=x$，$CB=CD=6m$，则 $CQ=6m-x$，$EP=BP=CP=3m$，所以 $PQ=x+3m$。由勾股定理，得$(3m)^2+(6m-x)^2=(x+3m)^2$，解得 $x=2m$，则 $DQ=2m$，$CQ=4m$，所以 $CQ=2DQ$，可判断④正确。]

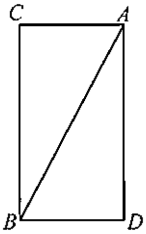
14 $\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$ [提示：连接 EF、DF，过点 F 作 $FH\perp DE$ 于点 H。由勾股定理，可得 $DE=2\sqrt{10}$，$EF=\sqrt{13}$，$DF=5$。$S_{\triangle DEF}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle ADE}-S_{\triangle BEF}-S_{\triangle CDF}=9$，所以$\dfrac{1}{2}\cdot DE\cdot FH=9$，所以 $FH=\dfrac{9\sqrt{10}}{10}$，所以 $FG=\sqrt{2}FH=\dfrac{9\sqrt{5}}{5}$。]

15 $\sqrt{29}$ [提示：连接 BD，根据正方形的性质得到 BD 经过点 O，且 $AC\perp BD$，$OD=OC=\dfrac{1}{2}AC=10$，所以 $OE=4$，$DE=\sqrt{OE^2+OD^2}=2\sqrt{29}$，所以 $OF=\dfrac{1}{2}DE=\sqrt{29}$。]

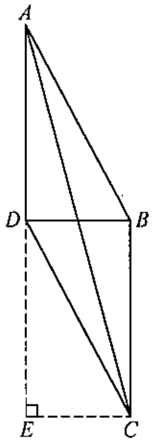
16 $3+\sqrt{3}$ [提示：连接 AC、BD，交于点 O。易证 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以 $AO=\dfrac{1}{2}AC=\dfrac{1}{2}AB=1$，$BO=\sqrt{3}$。在 $\mathrm{Rt}\triangle AOB$ 中，由等面积可得 $AO\cdot BO=AB\cdot OE$，所以 $OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。在四边形 $AEOH$ 中，$\angle OEA=\angle OHA=90°$，$\angle A=120°$，所以 $\angle EOH=360°-90°-90°-120°=60°$，所以易证 $\triangle OEH$ 是等边三角形，所以 $EH=OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。易得 $EF=\dfrac{3}{2}$，所以四边形

EFGH 的周长为 $2\times\frac{3}{2}+2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3+\sqrt{3}$。]

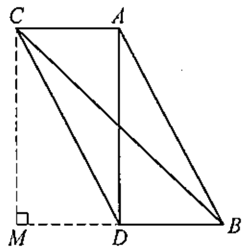
⑰ $\sqrt{13}$ [提示:在等边 $\triangle ABC$ 中,AD 为边 BC 的中线,$AB=2$,所以 $BD=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AB=1$,$AD=\sqrt{3}$。① 如图①,此时对角线 $AB=2$。② 如图②,延长 AD,过点 C 作 $CE\perp AD$,交 AD 的延长线于点 E,则四边形 $DECB$ 是矩形,所以 $CE=BD=1$,$DE=BC=AD=\sqrt{3}$。在 $Rt\triangle AEC$ 中,$AC=\sqrt{AE^2+CE^2}=\sqrt{13}$。③ 如图③,延长 BD,过点 C 作 $CM\perp BD$,交 BD 的延长线于点 M,则四边形 $ACMD$ 是矩形。所以 $AC=MD=1$,$CM=AD=\sqrt{3}$。在 $Rt\triangle BCM$ 中,$BC=\sqrt{CM^2+BM^2}=\sqrt{7}$。综上,在所有能拼成的平行四边形中,对角线长度的最大值是 $\sqrt{13}$。]



第 17 题图①

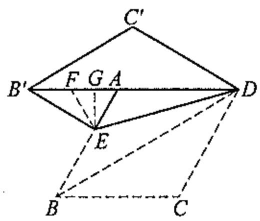


第 17 题图②



第 17 题图③

⑱ $\sqrt{6}$ [提示:如图,连接 BD,过点 E 作 $EG\perp B'D$ 于点 G。在菱形 $ABCD$ 中,$\angle C=120°$,所以 $\angle ABC=60°=\angle GAE$,$\angle ABD=\angle CBD=30°$。由翻折可知,$\angle AB'E=\angle EBD=30°$,$BE=B'E$,所以 $\angle AEB'=90°$。设 $AE=x$,则 $B'E=BE=2-x$,取 AB' 的中点 F,连接 AF,易证 $\triangle AFE$ 是等边三角形,所以 $AB'=2AF=2AE=2x$。在 $Rt\triangle AB'E$ 中,$AE^2+B'E^2=AB'^2$,所以 $x=\sqrt{3}-1$,所以 $AE=\sqrt{3}-1$。



第 18 题图

因为 $\angle AEG=90°-60°=30°$,同理可得 $AG=\frac{1}{2}AE=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$,$GE=\sqrt{3}AG=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$,所以 $GD=\frac{\sqrt{3}-1}{2}+2=\frac{\sqrt{3}+3}{2}$,所以 $DE=\sqrt{DG^2+GE^2}=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)^2+\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$。]

⑲ 由矩形的性质可得 $AB/\!/CD$,$\angle ABC=90°$,可证 $\angle FCE=\angle BAC$,进而可证 $\triangle CFE\cong\triangle ABC$,所以 $EF=CB$。

⑳ (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形,所以 $AB/\!/CD$,所以 $\angle FBE=\angle BEC$。因为 BE 平分 $\angle ABC$,所以 $\angle FBE=\angle EBC$,所以 $\angle EBC=\angle BEC$,所以 $BC=CE$。因为 $BF=BC$,所以

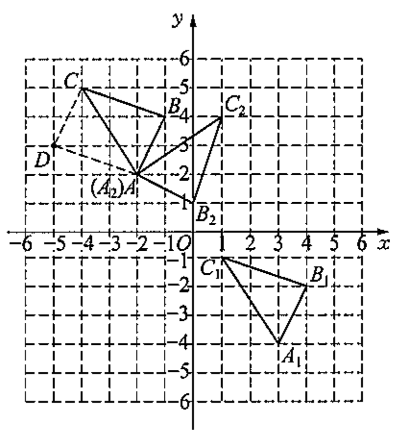
$BF=CE$，所以四边形 $BCEF$ 是平行四边形。再由 $BF=BC$，可得四边形 $BCEF$ 是菱形。

(2) 由 $AD=2$，可得 $EF=BF=AD=2$。所以 $AE^2+AF^2=3+1=4=EF^2$，所以$\angle EAB=90°$。所以 $BE=\sqrt{AE^2+AB^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+3^2}=2\sqrt{3}$。

21 因为四边形 $ABCD$ 是正方形，所以 $\angle ADC=90°$，$AD=CD$，$\angle BDC=45°$。因为$\triangle CDE$ 是等边三角形，所以$\angle CDE=60°$，$CD=DE$，所以$\angle ADE=150°$，$AD=DE$，所以$\angle DAE=15°$。在$\triangle ADF$ 和$\triangle CDF$ 中，因为$\begin{cases}AD=CD,\\ \angle ADF=\angle CDF,\\ DF=DF,\end{cases}$所以$\triangle ADF\cong\triangle CDF$ (SAS)，所以$\angle DCF=\angle DAE=15°$，所以$\angle BFC=\angle BDC+\angle DCF=60°$。

22 (1) 因为 $B(-10, 0)$，$C(5, 0)$，所以 $BC=5-(-10)=15$。因为 $D(0, 5)$，所以 $DO=5$，且 $DO\perp BC$，所以 $S_{\square ABCD}=BC\cdot OD=15\times5=75$。 (2) 设 $E(m, 0)$，则 $BE=|m+10|$，所以 $S_{\triangle AEB}=\frac{1}{2}BE\cdot OD=\frac{1}{2}\times|m+10|\times5=\frac{5}{2}|m+10|$。因为 $AD=BC=15$，所以 $S_{\triangle AED}=\frac{1}{2}AD\cdot OD=\frac{1}{2}\times15\times5=\frac{75}{2}$，因为 $S_{\triangle AED}=2S_{\triangle AEB}$，所以$\frac{75}{2}=2\times\frac{5}{2}\times|m+10|$，解得 $m=-2.5$ 或-17.5，所以点 E 的坐标为$(-2.5, 0)$ 或$(-17.5, 0)$。

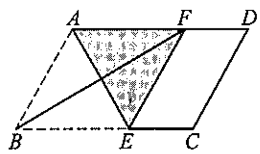
23 (1) 由 $C(-4, 5)$，$C_1(1, -1)$，可知$\triangle ABC$ 经过向右平移 5 个单位长度，向下平移 6 个单位长度后得到$\triangle A_1B_1C_1$，图中 $\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求。(2) 图中 $\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求。(3) 结合平行四边形的性质可知，D 的坐标为$(-5, 3)$。



第 23 题图

24 (1) 因为四边形 $ABCD$ 是矩形，所以 $\angle B=\angle BAD=90°$。由折叠，可得 $AB=AF$，$\angle B=\angle AFE=90°$，所以四边形 $ABEF$ 是矩形。再由 $AB=AF$，可得四边形 $ABEF$ 是正方形。

(2) ① 证明：因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD/\!/BC$，所以$\angle FAE=\angle BEA$。由折叠的性质得 $AF=AB$，$\angle BAE=\angle FAE$，所以$\angle BEA=\angle BAE$，所以 $AB=BE$，所以 $AF=BE$，所以四边形 $ABEF$ 是平行四边形。又因为 $AF=AB$，所以平行四边形 $ABEF$ 是菱形。②如图，因为四边形 $ABEF$ 是菱形，$AE=5$，$BF=10$，所以 $S_{\text{菱形}ABEF}=\frac{1}{2}AE\cdot BF=\frac{1}{2}\times5\times10=25$。



第 24 题图

期末练习

1 B 2 A 3 D 4 A 5 D 6 D ［提示：令 $AB=m$，则 $AO=\sqrt{3}m$，所以 $m^2+(\sqrt{3}m)^2=2^2$，解得 $m=1$ 或-1(舍负)，则 $AO=\sqrt{3}$，所以点 A 坐标为$(0, \sqrt{3})$。因为

$\triangle A_1B_1B$ 由$\triangle ABO$ 沿射线OB 方向平移2个单位长度得到，所以点 A_1 的坐标为$(1, 2\sqrt{3})$，同理可得，点 A_2 的坐标为$(2, 3\sqrt{3})$，点 A_3 的坐标为$(3, 4\sqrt{3})$，…，所以点 A_n 的坐标可表示为$(n, (n+1)\sqrt{3})$。当 $n=2025$ 时，点 A_{2025} 的坐标为$(2025, 2026\sqrt{3})$。]

⑦ 4　❽ $x\geqslant4$　⑨ 4　❿ $(2, 6)$　⑪ ①④　⓬ 10　⑬ $y=\frac{18}{x}$

⓮ $16\sqrt{2}-8$　⑮ $\frac{33}{5}k$　⓰ 1

⑰ $(0, 5)$，$y=\frac{3}{4}x+5$　[提示：由翻折可知 $AO=AE=10$，$DE=OD$。在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$AE=10$，$AB=8$，由勾股定理，得 $BE=\sqrt{AE^2-AB^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，$CE=BC-BE=10-6=4$。在 $\mathrm{Rt}\triangle DCE$ 中，由勾股定理，得 $DC^2+CE^2=DE^2$。因为 $DE=OD$，$CD=8-OD$，所以$(8-OD)^2+4^2=OD^2$，解得 $OD=5$，所以 $D(0, 5)$。设直线 DE 的表达式为 $y=kx+b$ $(k\neq0)$，将 $D(0, 5)$，$E(4, 8)$代入，得$\begin{cases}4k+b=8,\\0+b=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}k=\frac{3}{4},\\b=5,\end{cases}$所以直线 DE 的表达式为 $y=\frac{3}{4}x+5$。]

⓲ $\pm\frac{1}{2}$　[提示：正比例函数 $y=kx$ 平行于AB 或AD，由题意可求得直线 AB：$y=\frac{1}{2}x+2$，直线 AD：$y=-\frac{1}{2}x+2$，所以 $k=\pm\frac{1}{2}$。]

⑲ (1) y 与 x 之间的函数表达式为 $y=-x+2$。　(2) $y_1>y_2$

⓴ (1) 这两个函数的表达式分别为 $y_1=2x-1$ 和 $y_2=x-3$。　(2) $S_{\triangle ABP}=\frac{25}{4}$

(3) 由函数图像可知，当 $x<-2$ 时，$2x+b<ax-3$。

㉑ (1) 因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $DF/\!/EB$，$AB=CD$。因为 $CF=AE$，所以 $AB-AE=CD-CF$，即 $BE=DF$。因为 $DF/\!/EB$，所以四边形 $BFDE$ 是平行四边形。因为 $DE\perp AB$，所以$\angle DEB=90°$，所以四边形 $BFDE$ 是矩形。　(2) 因为 AF 平分 $\angle DAB$，$DC/\!/AB$，所以$\angle DAF=\angle FAB$，$\angle DFA=\angle FAB$，所以$\angle DAF=\angle DFA$，所以 $AD=FD=13$。因为 $AE=CF=5$，$DE\perp AB$，所以在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中，$DE=\sqrt{AD^2-AE^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，所以矩形 $BFDE$ 的面积是 $DF\cdot DE=13\times12=156$。

㉒ (1) 当 $x>2$ 时，$y_{甲}=50x$，$y_{乙}=55\times2+0.8\times55(x-2)=44x+22$，所以当 $x>2$ 时，$y_{甲}$ 关于 x 的函数表达式为 $y_{甲}=50x(x>2)$，$y_{乙}$关于 x 的函数表达式为 $y_{乙}=44x+22(x>2)$。

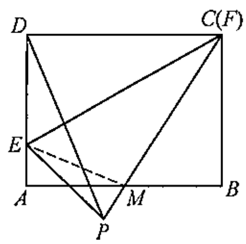
(2) 当 $y_{甲}=330$ 时，得 $50x=330$，解得 $x=6.6$。当 $0\leqslant x\leqslant2$ 时，$y_{乙}=55x$，当 $55x=330$ 时，解得 $x=6$(舍去)；当 $x>2$ 时，$y_{乙}=44x+22$，所以当 $44x+22=330$ 时，解得 $x=7$。因为 $6.6<7$，所以选择在乙水果店购买樱桃礼盒更划算。

㉓ (1) $\frac{3}{2}$ (2) 甲的速度为 $25\div\frac{5}{2}=10(\text{km/h})$，则 $y=10x$，所以甲行驶的路程 y 与时间 x 之间的函数表达式为 $y=10x$。乙的速度为 $25\div\left(\frac{17}{8}-\frac{3}{2}\right)=40(\text{km/h})$，则 $y=40\left(x-\frac{3}{2}\right)=40x-60$，所以乙行驶的路程 y 与时间 x 之间的函数表达式为 $y=40x-60$。 (3) 乙出发前，当两车之间的距离为 6 km 时，得 $10x=6$，解得 $x=0.6$。乙出发后至相遇，当两车之间的距离为 6 km 时，$10x-(40x-60)=6$，解得 $x=1.8$。所以甲行驶的时间为 0.6 h 或 1.8 h。

㉔ (1) 令 $x=0$，则 $y=4$，所以 $B(0,4)$，所以 $OB=4$；令 $y=0$，则 $x=8$，所以 $A(8,0)$，所以 $OA=8$。所以 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\times4\times8=16$。 (2) 由折叠的性质可知 $AC=BC$。在 $\text{Rt}\triangle BCO$ 中，$BC^2=OC^2+BO^2$，所以 $(8-OC)^2=OC^2+4^2$，所以 $OC=3$。 (3) 设 $P(x,y)$，$y>0$，因为 $OC=3$，所以 $C(3,0)$。① 当 $AP/\!/BC$，$AC/\!/BP$ 时，$AC=BP=5$，所以 $P(5,4)$。② 当 $AC/\!/BP$，$CP/\!/AB$ 时，$AC=BP=5$，$P(-5,4)$。③ 当 $BC/\!/AP$，$AB/\!/CP$ 时，点 P 在 x 轴下方，不符合题意，所以 $P(-5,4)$ 或 $P(5,4)$。

㉕ (1) ① 90°，45° ② 由折叠可知 $DF=PF$，$DE=PE$。因为 $DF/\!/EP$，所以 $\angle DFE=\angle FEP$。因为 $\angle DFE=\angle PFE$，所以 $\angle PFE=\angle PEF$，所以 $PF=PE$，所以 $DE=DF=PE=PF$，所以四边形 $DEPF$ 为菱形。当 $AP=3.5$ 时，设 $AE=x$，则 $PE=DE=3.5-x$，则 $3^2+x^2=(3.5-x)^2$，解得 $x=\frac{13}{28}$，所以 $AP=3.5-\frac{13}{28}=\frac{85}{28}$，所以菱形边长为 $\frac{85}{28}$。

(2) 如图，连接 EM。因为 $DE=EP=AM$，$\angle A=\angle EPM=90°$，$EM=ME$，所以 $\triangle EAM\cong\triangle MPE$，所以 $AE=PM$，设 $AE=x$，则 $AM=DE=3-x$，则 $BM=x+1$。因为 $MP=EA=x$，$CP=CD=4$，所以 $MC=4-x$。在 $\text{Rt}\triangle CBM$ 中，$MB^2+BC^2=MC^2$，所以 $(x+1)^2+3^2=(4-x)^2$，所以 $x=\frac{3}{5}$，所以 $AE=\frac{3}{5}$。



第 25 题图