

КАТЕГОРНАЯ ЛОГИКА

0.1 Введение в теорию категорий

Задача 1. Покажите, что если множества, моноиды, и предпорядки рассматривать как категории, то функторы между ними это то же, что и гомоморфизмы.

Задача 2. Опишите инициальные и терминальные объекты в категориях: Cat , Top (категория всех топологических пространств), $Group$.

Задача 3. Рассмотрим множество X . Любое множество подмножеств $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ образует категорию (в которой объекты – подмножества и стрелка между двумя объектами X, Y есть в том случае, если $X \subseteq Y$).

Что значит, что в этой категории есть инициальный или терминальный объекты?

Определение 1 (Напоминание). Конкретной категорией называется такая категория, у которой каждый объект – множество, и каждая стрелка – теоретико-множественная функция.

Определение 2. Функтор $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ называется унивалентным (строгим), если для любой пары стрелок $f, g : X \rightrightarrows Y$, если $U(f) = U(g)$, то $f = g$. Другими словами, функтор унивалентен если он инъективен на $\text{Hom}(X, Y)$ для любых объектов X, Y в \mathcal{A} .

Задача 4. Докажите, что у каждой конкретной категории \mathcal{A} есть унивалентный функтор $\mathcal{A} \rightarrow Set$.

Задача 5. Покажите, что каждое действие моноида (группы) M на множество можно представить как функтор из M как категории в Set (действие моноида M на X – это гомоморфизм из M в моноид перестановок множества X).

Задача 6. Убедитесь, что следующие отображения дают примеры функторов:

1. $\mathcal{P} : Set \rightarrow Set$, которое множеству X сопоставляет множество его подмножеств $\mathcal{P}(X)$ и функции $f : X \rightarrow Y$ функцию $\mathcal{P}(f)(A) = f(A)$, $A \subseteq X$; и $\mathcal{P} : Set \rightarrow Set^{op}$, как предыдущее, только функции $f : X \rightarrow Y$ оно сопоставляет $\mathcal{P}(f)(B) = f^{-1}(B)$, $B \subseteq Y$.
2. $Ring \rightarrow Ring$, отображение кольца R кольцо многочленов $R[x]$; $Ring \rightarrow Ring$, отображение кольца R его кольцо квадратных матриц $M_{n,n}(R)$.
3. $F-Vect \rightarrow F-Vect^{op}$, отображение векторному пространству K его сопряженное K^* ($F-Vect$ – категория векторных пространств над полем F).

Задача 7. Как можно следующие объекты представить в виде функтора?

1. Стрелка $f : X \rightarrow Y$ в произвольной категории \mathcal{A}
2. Цепочка функций в $Sets$ $X_0 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} X_2 \dots \xrightarrow{f_n} X_n$.
3. Бесконечная цепочка вложенных подмножеств $\mathbb{R} X_0 \subset X_1 \subset X_2 \dots \subset X_n \subset \dots$;

Задача 8. Рассмотрим категорию \mathcal{C} и зафиксируем в ней объект X . Построим отображение на объектах $\text{Hom}(X, -) : \mathcal{C} \rightarrow Set$, которое каждому объекту сопоставляет множество $\text{Hom}(X, A)$. Теперь определим отображение на стрелках следующим образом: стрелке $f : A \rightarrow B$ сопоставим отображение между $\text{Hom}(X, A)$ и $\text{Hom}(X, B)$, отправляющее $g : X \rightarrow A$ в $fg : X \rightarrow B$.

Покажите, что эти отображения дают функтор.

0.2 Сопряженные функторы

Конспект.

Задача 1. Рассмотрим множества с предпорядком \mathcal{A} и \mathcal{B} и ковариантное соответствие Галуа (F, G) .

Доказать:

1. $a \leq GF(a)$
2. $GFGF(a) \leq GF(a)$
3. $a \leq a' \Rightarrow GF(a) \leq GF(a')$

Задача 2. Рассмотрим множества X, Y и бинарное отношение $R \subseteq X \times Y$.

Пусть $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(X), \subseteq)$, $\mathcal{B} = (\mathcal{P}(Y), \supseteq)$.

Функторы $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ определены так:

- $A \subseteq X$. $F(A) = \{y \in Y \mid \forall x \in A. (x, y) \in R\}$
- $B \subseteq Y$. $G(B) = \{x \in X \mid \forall y \in B. (x, y) \in R\}$

Доказать (или опровергнуть), что (F, G) – соответствие Галуа.

Задача 3. Понять, как соотносятся сопряжение для множеств с предпорядками и сопряжение для категорий. Сопряжение для категорий можно взять в смысле четверки (F, U, η, ϵ) .

Задача 4. Доказать утверждение.

Сопряжение (F, U, η, ϵ) в категориях \mathcal{A}, \mathcal{B} взаимно однозначно соответствует решению $(F, \eta, *)$ для функтора $U : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

План доказательства и само утверждение можно найти в книжке на странице 14.

Задача 5. Пусть (F, G) – соответствие Галуа между посетами (частично упорядоченными) \mathcal{A} и \mathcal{B} . показать, что F сохраняет супремумы, а G сохраняет инфимумы. Доказать, что если \mathcal{A} имеет, а F сохраняет супремумы, то правое сопряжение $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ может быть вычислено формулой $G(b) = \sup\{a \in \mathcal{A} \mid F(a) \leq b\}$.

Задача 6. Понять, объяснить, и доказать утверждение 3.4 на странице 15.

Задача 7. Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} – пред упорядоченные множества формул пропозиционального исчисления, где порядок – следование. Для фиксированной формулы C показать, что $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, определенные как $F(A) = C \wedge A$ и $G(B) = C \Rightarrow B$, являются парой сопряженных функторов. Что есть "единство противоположностей" в таком случае?

Задача 8. Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathbf{Sets}$, C – фиксированное множество, $F(A) = C \times A$, $U(B) = B^C$ для всех A и B . Расширить U и F до функторов и показать, что U право-сопряжен к F .

0.3 Пределы

Задача 1. Найдите хотя бы два уравнителя функций $\text{id} :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$ и $\text{abs} :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$ в категории \mathbf{Hask} .

Объясните, почему следующие функции не являются уравнителями:

1. $\text{id} :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$
2. $\backslash n \rightarrow -n :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$
3. $\backslash n \rightarrow 0 :: \text{Int} \rightarrow \text{Int}$

Задача 2. Найдите хотя бы один уравнитель функций $\text{fst} :: (\text{Int}, \text{Int}) \rightarrow \text{Int}$ и $\text{snd} :: (\text{Int}, \text{Int}) \rightarrow \text{Int}$ в категории \mathbf{Hask} .

Задача 3. Найдите хотя бы один уравнитель функций fst' и snd' , где:

```
data IntOrChar = I Int | C Char

fst' :: (Int, Char) -> IntOrChar
fst' = I . fst

snd' :: (Int, Char) -> IntOrChar
snd' = C . snd
```

в категории `Hask`.

Задача 4. Найдите хотя бы два коуравнителя функций `id :: Int -> Int` и `abs :: Int -> Int` в категории `Hask`.

Задача 5. Найдите хотя бы один pullback функций `length :: [Int] -> Int` и `length :: [Char] -> Int` в категории `Hask`.

Задача 6. Найдите хотя бы один pullback функций `id :: Int -> Int` и `(const 0) :: () -> Int` в категории `Hask`.

Задача 7. Найдите хотя бы один pullback функций `(const ()) :: Int -> ()` и `(const ()) :: Char -> ()` в категории `Hask`.

Задача 8. Опишите построение pullback'a из задачи 5 через двоичные произведения и уравниватели.

Задача 9. Докажите, что любой предел можно построить через произведения и уравниватели.

Задача 10. Найдите предел функтора `Identity`.

Задача 11. Найдите предел функтора `Maybe`.

0.4 Декартово замкнутые категории

Задача 1. Доказать, что `Grp` не является декартово замкнутой.

Задача 2. Доказать биективность $\hat{}$ (преобразующей g в \hat{g})

Задача 3. A и B конечные множества из категории `Sets`. Какова мощность A^B ?

Задача 4. Узнать связь между \Leftarrow и \rightarrow в полурешетке Гейтинга

0.5 Декартово замкнутые категории в уравнениях и графах

Задача 1. Показать, что в любой декартовой категории:

1. $A \times 1 \cong A$
2. $A \times B \cong B \times A$
3. $(A \times B) \times C \cong A \times (B \times C)$

Задача 2. Показать, что в любой декартово замкнутой категории:

1. $A^1 \cong A$
2. $1^A \cong 1$
3. $(A \times B)^C \cong A^C \times B^C$
4. $A^{B \times C} \cong (A^C)^B$

Задача 3. Записать эквивалентное определение декартово замкнутой категории через

$$\begin{aligned} U_B &= (\cdot)^B, \quad F_B = (\cdot) \times B : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ \varepsilon_B(A) &= \varepsilon_{A,B}; \quad \varepsilon_B : F_B U_B \rightarrow 1_{\mathcal{A}} \\ \eta_B(C) &= \eta_{C,B} : C \rightarrow (C \times B)^B, \end{aligned}$$

где $U_B(f) = f^B \equiv f \Leftarrow 1_B = (f\varepsilon_{A,B})^*$ для всех $f : A \rightarrow A'$ (см. предыдущую лекцию).

Задача 4. Доказать, что

$$\ulcorner f^{\neg} \urcorner = f, \quad \ulcorner g^{\neg} \urcorner = g,$$

где $\ulcorner f^{\neg} \urcorner \equiv (f\pi'_{1,A})^*$, $f : A \rightarrow B$ и $g^{\neg} \equiv \varepsilon_{B,A}(g \circ_A 1_A)$, $g : 1 \rightarrow B^A$.

Задача 5. Показать, что дедуктивная система $\mathcal{L}(x)$ с прошлой лекции — это $\mathcal{D}(\mathcal{L}_x)$, где \mathcal{L}_x — граф, полученный из \mathcal{L} добавлением нового ребра x между старыми вершинами T и A .

0.6 Топосы

Задача 1. Топосы функторов. Покажите, что следующие категории можно представить как топос (указать классификатор подобъектов, доказать замкнутость):

1. Set^2
2. Set^{\rightarrow}
3. Set^M — категория действий моноида (группы).

Задача 2. Докажите теорему: для любого топоса \mathcal{C} и любого его объекта a категория стрелок над ним $\mathcal{C} \downarrow a$ является топосом.

Задача 3. Докажите, что в топосе $\mathcal{T} f : A \rightarrow B$

1. мономорфизм тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} \models \forall_{x \in A} \forall_{x' \in A} (fx = fx') \Rightarrow x = x'$
2. эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\mathcal{T} \models \forall_{y \in B} \exists_{x \in A} fx = y$

Определение 3. Топос называется булевым, если он удовлетворяет формуле $\forall_{t \in \Omega} (t \vee \neg t)$.

Задача 4. Докажите, что топос является булевым тогда и только тогда, когда $1 \xrightarrow{T} \Omega \xleftarrow{\perp} 1$ это диаграмма копроизведения.

0.7 САМ

Задача 1. Константы Id , Fst , Snd , App — а также одноместная операция Λ и двуместные \circ и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — имеют естественный смысл, задаваемый уравнениями ниже. Также заметим, что их можно понимать как некоторые стрелки в категории между объектами, понятными из контекста. Соответственно, операции — это стрелки, строящиеся по другим стрелкам. Поясните, что следующие уравнения эквиваленты уравнениям, задающим декартово-замкнутые категории (за исключением указаний объектов у констант и операторов и отсутствия уравнений для терминального объекта):

$$\begin{aligned} (\text{Ass}) \quad & (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) \\ (\text{IdL}) \quad & \text{Id} \circ x = x \\ (\text{IdR}) \quad & x \circ \text{Id} = x \\ (\text{Fst}) \quad & \text{Fst} \circ \langle x, y \rangle = x \\ (\text{Snd}) \quad & \text{Snd} \circ \langle x, y \rangle = y \\ (\text{SPair}) \quad & \langle \text{Fst} \circ x, \text{Snd} \circ x \rangle = x \\ (\text{App}) \quad & \text{App} \circ \langle \Lambda(x) \circ \text{Fst}, \text{Snd} \rangle = x \\ (\text{S}\Lambda) \quad & \Lambda(\text{App} \circ \langle x \circ \text{Fst}, \text{Snd} \rangle) = x \end{aligned}$$

Задача 2. Покажите, что уравнения из предыдущего задания эквивалентны уравнениям $\text{Ass} + \text{IdL} + \text{IdR} + \text{Fst} + \text{Snd} + \text{DPair} + \text{Beta} + \text{DL} + \text{AI} + \text{FSI}$, где:

$$\begin{aligned} (\text{DPair}) \quad & \langle x \circ y \rangle \circ z = \langle x \circ z, y \circ z \rangle \\ (\text{Beta}) \quad & \text{App} \circ \langle \Lambda(x), y \rangle = x \circ \langle \text{Id}, y \rangle \\ (\text{DL}) \quad & \Lambda(x) \circ y = \Lambda(x \circ \langle y \circ \text{Fst}, \text{Snd} \rangle) \\ (\text{AI}) \quad & \Lambda(\text{App}) = \text{Id} \\ (\text{FSI}) \quad & \langle \text{Fst}, \text{Snd} \rangle = \text{Id} \end{aligned}$$

Задача 3. Поясните, что делают операции, определяемые следующим образом:

$$\begin{aligned} A^> &:= \Lambda(A \circ \text{Snd}) \\ A^< &:= \text{App} \circ \langle A, \text{Id} \rangle \\ A \cdot B &:= (A \circ B^>)^< \\ (A, B) &:= \langle A^>, B^> \rangle^< \end{aligned}$$

0.8 Переписывание графов при помощи частичных морфизмов

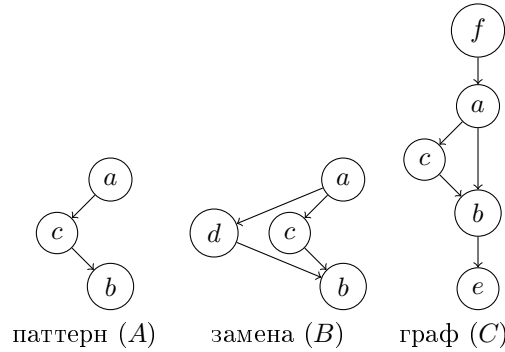
Задача 1. Оказывается, утверждение 5 статьи не подходит для переписывания графов выражений. Найти ошибку в примере с семинара при переписывании $a * 1$ в a в выражении $f(a * 1 + 3)$.

Задача 2. В другой статье приводится уточнение условий утверждения 5 вместе с контр-примером (пример 3.17). При этом, кажется, g не является частичным морфизмом в определениях из оригинальной статьи. Возможно ли исправить контрпример?

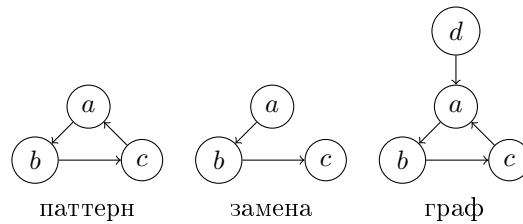
Задача 3. Попробовать применить утверждение 5 для переписывания графов. Обозначим множество вершин графа V , а множество рёбер — E . Предлагается представить такой граф в определениях статьи следующим образом: $G = E + V$ — множество-носитель;

$$\begin{aligned} \text{succ}(s) &= \varepsilon, \text{ если } s \in V, \\ \text{succ}(e) &= st, \text{ если } e \in E \text{ с началом } s \text{ и концом } t. \end{aligned}$$

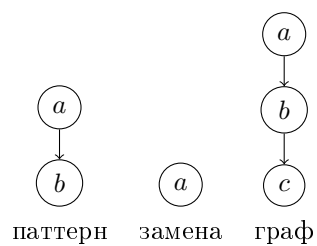
Произвести переписывание графа (перевести графы в новое представление, предложить частичные морфизмы f и g , множества A' и D и функции lab и succ в D):



Задача 4. Переписать следующий паттерн:



Задача 5. Что произойдёт при попытке переписать граф следующим образом:



0.9 Формализация переписывания графов

Вопросы по статье Graph Rewritings with Partial Functions, Yoshihiro Mizoguchi.

1. Рисунки морфизмов 2 и 3 (стр. 273) — являются ли они морфизмами в формализме статьи?
2. Является ли преобразование, делающее из лямбда-терма альфа-эквивалентный ему морфизмом?
3. Покажите, что в категории \mathbf{Pfn} есть произведения и уравниватели.
4. Покажите, что в категории \mathbf{Pfn} есть копроизведения, коуравниватели и пушауты.
5. Покажите теорему 3.10 из статьи.