

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3234-М3239, весна 2019 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Расставьте скобки:

$$(a) \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \neg\beta \vee \beta \ \& \ \neg\alpha \vee \neg\beta \rightarrow \alpha \ \& \ \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \vee \beta$$

2. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (в частности, если пользуетесь теоремой о дедукции — раскройте все преобразования):

$$(a) \alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg\alpha \ \& \ \neg\beta)$$

$$(b) \alpha \ \& \ \beta \vdash \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$$

$$(c) \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma$$

$$(d) \alpha \ \& \ \beta \rightarrow \gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma$$

$$(e) \alpha, \neg\alpha \vdash \beta$$

3. Покажите следующие утверждения, построив полный вывод (за полный ответ будет считаться доказательство пяти утверждений из списка):

$$(a) \gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$$

$$(b) \alpha, \beta \vdash \alpha \ \& \ \beta$$

$$(c) \neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(d) \alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(e) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \ \& \ \beta)$$

$$(f) \alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(g) \neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(h) \alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$$

$$(i) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$$

$$(j) \alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(k) \alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$$

$$(l) \neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(m) \neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$$

$$(n) \neg\alpha \vdash \neg\alpha$$

$$(o) \alpha \vdash \neg\neg\alpha$$

Домашнее задание №2: «исчисление высказываний»

1. (Теоремы о корректности и полноте) Пусть Γ — какой-то список высказываний и пусть α — высказывание.

$$(a) \text{ Покажите, что } \Gamma \vdash \alpha \text{ влечёт } \Gamma \models \alpha.$$

$$(b) \text{ Покажите, что } \Gamma \models \alpha \text{ влечёт } \Gamma \vdash \alpha.$$

2. (Теорема Гливленко) Рассмотрим исчисление высказываний, в котором 10 схема аксиом (аксиома снятия двойного отрицания)

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

заменена на следующую:

$$\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$$

Такой вариант исчисления высказываний назовём интуиционистским. Будем писать $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$, если существует вывод формулы α из гипотез Γ в интуиционистском исчислении высказываний. Если же вывод производится в классическом исчислении (изученном на 1 и 2 занятиях), будем указывать это как $\Gamma \vdash_{\text{к}} \alpha$.

- (a) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$.
- (b) Покажите, что если α — аксиома (1...9 схемы), то $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$.
- (c) Покажите, что $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$.
- (d) Покажите, что если $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ и $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta)$, то $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\beta$.
- (e) Покажите, что если $\vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, то $\vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$ (теорема Гливленко).
- (f) Покажите, что если $\Gamma \vdash_{\mathbf{K}} \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\mathbf{H}} \neg\neg\alpha$.
- (g) Назовём (классическое или интуиционистское) исчисление *противоречивым*, если для любой формулы α выполнено $\vdash \alpha$. Покажите, что формула α исчисления, такая, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$, существует тогда и только тогда, когда исчисление противоречно.
- (h) Покажите, что если классическое исчисление высказываний противоречно, то противоречно и интуиционистское исчисление высказываний.

Домашнее задание №3: «общая топология»

Назовём топологическим пространством упорядоченную пару $\langle X, \Omega \rangle$, где X — некоторое множество, а $\Omega \subseteq \mathcal{P}(X)$ — множество каких-то подмножеств X . Множество X мы назовём *носителем* топологии (также можем назвать его топологическим пространством), а Ω — *топологией*. Элементы множества Ω мы будем называть *открытыми* множествами. При этом пара должна удовлетворять следующим свойствам (*аксиомам топологического пространства*):

1. $\emptyset \in \Omega, X \in \Omega$ (пустое множество и всё пространство открыты);
2. Если $\{A_i\}, A_i \in \Omega$ — некоторое семейство элементов Ω , то $\bigcup_i A_i \in \Omega$ (объединение произвольного семейства открытых множеств открыто);
3. Если $A_1, A_2, \dots, A_n, A_i \in \Omega$ — конечное множество открытых множеств, то его пересечение также открыто: $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \Omega$

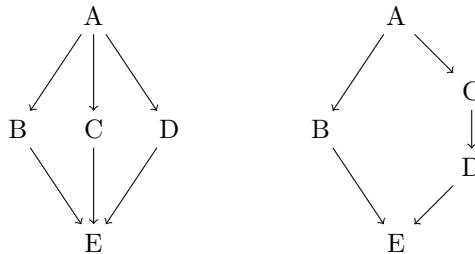
Решите следующие задачи:

1. Задачи на определение пространства:
 - (a) Покажите, что при $X = \{0, 1\}, \Omega = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}\}$ пара $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
 - (b) Покажите, что если X — непустое множество, то пара $\langle X, \{\emptyset, X\} \rangle$ является топологическим пространством.
 - (c) Предложите примеры как минимум двух множеств $\Omega \subseteq \mathcal{P}\{0, 1\}$, для которых $\langle \{0, 1\}, \Omega \rangle$ — не топологическое пространство.
 - (d) Для каждой аксиомы топологического пространства приведите примеры таких пар $\langle X, \Omega \rangle$, в которых бы аксиома не была выполнена.
 - (e) Для $X = \mathbb{R}^n$ и Ω , содержащего все открытые множества (в смысле метрического определения, данного на мат. анализе), покажите, что $\langle X, \Omega \rangle$ является топологическим пространством.
2. Про каждое определение ниже покажите, что оно действительно задаёт топологическое пространство.
 - (a) $X = \mathbb{R}, \Omega = \{(x, +\infty) | x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ (топология стрелки)
 - (b) $X \neq \emptyset, \Omega = \mathcal{P}(X)$ (дискретная топология)
 - (c) $X = \mathbb{R}, \Omega = \{A | A \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus A \text{ — конечно}\}$ — множество всех множеств, дополнение которых конечно (топология Зарисского)
 - (d) X — некоторое дерево, а открытыми множествами на нём назовём все множества, которые содержат узел вместе со всеми своими потомками: $A \in \Omega$ тогда и только тогда, когда если $a \in A$ и $a \geq b$, то $b \in A$.
3. *Замкнутым* множеством назовём множество, дополнение которого открыто.
 - (a) Покажите, что пересечение произвольного семейства замкнутых множеств — замкнуто.
 - (b) Пусть A — замкнутое, а B — открытое множество в некотором пространстве. Что вы можете сказать про замкнутость или открытость $B \setminus A$ и $A \setminus B$?

4. Определим операции «взятие внутренности» и «взятие замыкания», покажите корректность этих определений (т.е. что определяемый объект существует):
 - (а) Для множества A внутренностью A° назовём максимальное открытое множество, что $A^\circ \subseteq A$.
 - (б) Для множества A замыканием \bar{A} назовём минимальное замкнутое множество, содержащее A .
5. Найдите $[0, 1]^\circ$ и $\overline{[0, 1]}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя \mathbb{R})?
6. Найдите $\{0\}^\circ$ и $\overline{\{0\}}$ в первых трёх топологиях из п. 2 (если взять в качестве носителя \mathbb{R})?

Домашнее задание №4: «решётки, псевдобулевы и булевы алгебры»

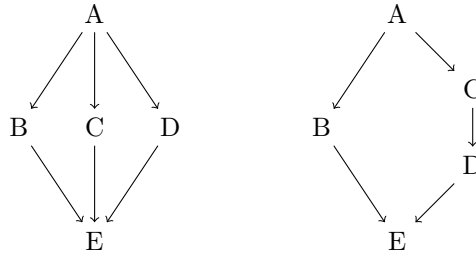
1. Пусть задана некоторая решётка, в которой задано псевдодополнение. Докажите, что эта решётка является дистрибутивной.
2. Пусть задана дистрибутивная решётка. Покажите, что в ней для любых элементов a, b, c выполнено $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. А будет ли выполнено $(a + b) \cdot c = a \cdot c \rightarrow b \cdot c$?
3. Покажите, что если в решётке есть *диамант* или *пентагон* (то есть, найдутся 5 элементов указанным образом упорядоченных, среди которых есть две или три пары несравнимых), то решётка не является дистрибутивной:



4. Предложите пример дистрибутивной, но не импликативной решётки.
5. Докажите, что в импликативной решётке при любых значениях a, b и c выполнены следующие утверждения:
 - (а) Из $a \sqsubseteq b$ следует $b \rightarrow c \sqsubseteq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \sqsubseteq c \rightarrow b$;
 - (б) Из $a \sqsubseteq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \sqsubseteq c$;
 - (с) $a \sqsubseteq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
 - (д) $b \sqsubseteq a \rightarrow b$;
 - (е) $a \rightarrow b \sqsubseteq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
 - (ф) $a \sqsubseteq b \rightarrow a \cdot b$;
 - (г) $a \rightarrow c \sqsubseteq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
6. Пусть заданы некоторая алгебра Гейтинга $\langle H, \sqsubseteq \rangle$ и переменные A, B, C со значениями a, b, c ($a, b, c \in H$). Покажите, что:
 - (а-і) Если ϕ — схема аксиом 1–9, то при подстановке переменных A, B, C вместо метаварiableных при любых a, b, c будет выполнено $\llbracket \phi \rrbracket = \mathbf{I}$;
 - (j) Аналогично, будет выполнено $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = \mathbf{I}$;
 - (к) Если заданная алгебра Гейтинга — булева, то тогда выполнено и $\llbracket \alpha \rightarrow \neg \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$ и $\llbracket \alpha \vee \neg \alpha \rrbracket = \mathbf{I}$.
 - (л) Пусть ϕ и $\phi \rightarrow \tau$ — некоторые истинные высказывания в указанной алгебре при указанных значениях переменных. Тогда τ — тоже истинное высказывание
7. На основании предыдущего пункта покажите, что алгебра Гейтинга корректна как модель ИИВ, и что булева алгебра корректна как модель ИВ.
8. Про следующие высказывания определите, являются ли они доказуемыми в ИИВ:
 - (а) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$ (закон Пирса);
 - (б) $(\neg P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q)$;
 - (с) $(P \rightarrow \neg Q) \rightarrow (Q \rightarrow \neg P)$;
 - (д) $P \rightarrow \neg \neg P$;
 - (е) $\neg \neg P \vee \neg \neg \neg P$;

Домашнее задание №5: «Гёделевы алгебры, модели Крипке»

- Ещё немного про решётки. Будем говорить, что решётка содержит *диамант* или *пентагон*, если найдутся 5 элементов указанным на диаграмме образом упорядоченных. При этом, если $p + q = r$ или $p \cdot q = r$ на данной диаграмме, то это же свойство выполнено и в исходной решётке.



- Назовём решётку *модулярной*, если при всяких x и z , таких, что $z \sqsubseteq x$, выполнено $(x \cdot y) + z = x \cdot (y + z)$. Покажите, что решётка является модулярной тогда и только тогда, когда не содержит пентагонов.
 - Рассмотрим модулярную решётку: покажите, что она дистрибутивна тогда и только тогда, когда не содержит диамантов.
- Покажите, что (\approx) является отношением эквивалентности. На основании этого покажите, что определение $[\alpha]_{\approx} \sqsubseteq [\beta]_{\approx}$ корректно (не зависит от выбора конкретных представителей класса эквивалентности).
 - Пусть A — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(A)$ — тоже алгебра Гейтинга.
 - Пусть задана алгебра Гейтинга A :



Постройте $\Gamma(A)$.

- Можно ли для алгебры $\Gamma(\mathbb{R})$ построить топологию, порождающую данную алгебру? Вам нужно определить какой-то новый носитель и открытые множества для нём — или указать, что это невозможно.
- Могло сложиться впечатление, что \mathcal{L} и $\Gamma(\mathcal{L})$ почти ничем не отличаются. В связи с этим давайте немного изучим данный вопрос:
 - Мы выяснили, что алгебра Линденбаума — полная модель ИИВ. А справедливо ли это для $\Gamma(\mathcal{L})$ — существует ли формула α , общезначимая в $\Gamma(\mathcal{L})$, но недоказуемая?
 - Приведите пример неатомарной формулы α и такой оценки переменных, что $\llbracket \alpha \rrbracket_{\Gamma(\mathcal{L})} = \omega$.
 - Мы можем построить аналог алгебры Линденбаума для классического ИВ, а потом применить к ней операцию «гёделевизации». Но если так получится доказать свойство дизъюнктивности для классической логики, то мы найдём противоречие в логике. Какое противоречие мы получим и какой переход в наших рассуждениях не получится сделать по аналогии?
- Рассмотрим два множества, $a = (-\infty, 1)$ и $b = (0, \infty)$. Пусть $\llbracket A \rrbracket = a$ и $\llbracket B \rrbracket = b$. Понятно, что $\llbracket A \vee B \rrbracket_{\mathbb{R}} = 1$. Однако, ни A , ни B не истинны — не закралась ли где ошибка в теорему о дизъюнктивности ИИВ?
- Модели Крипке.** Рассмотрим некоторый ориентированный граф без циклов (без потери общности можем взять дерево вместо такого графа). Узлы назовём *мирами* и пронумеруем натуральными числами: $W = \{W_1, W_2, \dots, W_n\}$. Будем писать $W_i \preceq W_j$, если существует путь из W_i в W_j . Понятно, что $W_i \preceq W_i$.

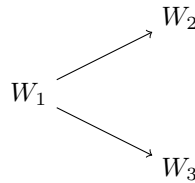
Каждому узлу сопоставим множество *вынужденных* переменных ИИВ и будем писать $W_i \Vdash A_k$, если переменная A_k вынуждена в мире W_i . При этом, если $W_i \preceq W_j$, то всегда должно быть выполнено и $W_j \Vdash A_k$ (знание, полученное нами, не исчезает в последующих мирах).

Обобщим отношение вынужденности на случай произвольной формулы:

- Если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \& \beta$;
- Если $W_i \Vdash \alpha$ или $W_i \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \vee \beta$;
- Если в любом мире $W_k : W_i \preceq W_k$ выполнено, что из $W_k \Vdash \alpha$ следует $W_k \Vdash \beta$, то $W_i \Vdash \alpha \rightarrow \beta$;
- Если ни в каком мире $W_k : W_i \preceq W_k$ не выполнено α , то $W_i \Vdash \neg \alpha$.

Так определённую упорядоченную тройку $\langle W, (\preceq), (\Vdash) \rangle$ — множество миров, отношение порядка на мирах и отношение вынужденности — назовём моделью Крипке. Будем говорить, что формула α вынуждается моделью (или является истинной в данной модели), если $W_i \Vdash \alpha$ в любом мире W_i . Будем записывать это как $\Vdash \alpha$.

- (а) Построим пример модели, опровергающей формулу $P \vee \neg P$ (деревья в моделях Крипке у нас будут расти вправо):



В данной модели переменная P вынуждена только в мире W_2 .

Укажите все узлы, в которых вынуждено P , $\neg P$, $P \vee \neg P$ и сделайте вывод о вынужденности закона исключённого третьего в данной модели.

- (b) Постройте модель, опровергающую формулу $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$.
- (c) Покажите, что любая модель Крипке обладает свойством: для любых W_i, W_j, α , если $W_i \preceq W_j$ и $W_i \Vdash \alpha$, то $W_j \Vdash \alpha$.
- (d) Покажите, что по любой модели Крипке K можно построить такую алгебру Гейтинга H , что $\Vdash_K \alpha$ тогда и только тогда, когда $\llbracket \alpha \rrbracket_H = 1_H$. Покажите из этого, что любая модель Крипке — действительно модель ИИВ.
- (e) Предложите формулу, глубина опровергающей модели для которой (если её рассматривать как дерево) не может быть меньше 2. Можете ли предложить соответствующую конструкцию для произвольной глубины n ?

9. Теорема о нетабличности интуиционистской логики.

- (a) Рассмотрим следующее утверждение $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$: покажите, что это утверждение верно в классической логике, но недоказуемо в интуиционистской. Интуитивно недоказуемость в интуиционистской логике очевидна: пусть A — сегодня дождь, B — сегодня мороз -30° по Цельсию, C — сегодня понедельник. У нас нет никаких конструктивных способов показать из одного утверждения другое.
- (b) Обозначим за ρ_n следующее утверждение:

$$\bigvee_{i \neq j; 0 \leq i, j \leq n} (A_i \rightarrow A_j)$$

Покажите, что для любой табличной модели ИИВ T найдётся такое n , что $\llbracket \rho_n \rrbracket_T = \text{И}$.

- (c) Покажите, что $\not\Vdash \rho_n$ в ИИВ ни при каком $n > 1$. Как из этого показать, что никакая табличная модель ИИВ не является полной?

Домашнее задание №6: «Исчисление предикатов»

1. Новые аксиомы и правила вывода для исчисления предикатов имеют ограничения (требования свободы для подстановки и отсутствия свободных вхождений). Если эти требования будут нарушены, исчисление станет некорректным. Данный факт можно показать, построив соответствующие опровергающие оценки для каких-то доказуемых формул. Постройте соответствующие формулы, доказательства и оценки.

2. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:

- (a) $\forall x.\phi \rightarrow \phi$
- (b) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$
- (c) $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$
- (d) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg\exists x.\neg\phi)$
- (e) $(\exists x.\phi) \rightarrow (\neg\forall x.\neg\phi)$
- (f) $(\forall x.\neg\phi) \rightarrow (\neg\exists x.\phi)$
- (g) $(\exists x.\neg\phi) \rightarrow (\neg\forall x.\phi)$

3. Опровергните формулы $\phi \rightarrow \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$

4. Докажите теорему о дедукции для исчисления предикатов:

- (a) Если $\Gamma, \alpha \vdash \beta \rightarrow \forall x.\gamma$, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \forall x.\gamma$ (если x не входит свободно в α).
- (b) Если $\Gamma, \alpha \vdash (\exists x.\gamma) \rightarrow \beta$, то $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow (\exists x.\gamma) \rightarrow \beta$ (если x не входит свободно в α).
- (c) Сведите всё вместе и постройте общее доказательство теоремы.

5. Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными x и y (мы предполагаем, что эти метаварьирующие соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких:

- (a) $\forall x.\forall y.\alpha, \forall y.\forall x.\alpha$
- (b) $\exists x.\exists y.\alpha, \exists y.\exists x.\alpha$
- (c) $\forall x.\forall y.\alpha, \forall x.\exists y.\alpha, \exists x.\forall y.\alpha, \exists x.\exists y.\alpha$
- (d) $\forall x.\exists y.\alpha, \exists y.\forall x.\alpha$

Домашнее задание №7: «Исчисление предикатов»

1. Пусть дано непротиворечивое множество замкнутых формул Γ , и пусть дана формула α . Покажите, что как минимум либо $\Gamma \cup \{\alpha\}$, либо $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ непротиворечиво.
2. Пусть D — предметное множество, и оно состоит из строк. Пусть Γ — некоторое полное непротиворечивое множество замкнутых бескванторных формул. Пусть

$$\llbracket f_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \rrbracket = \langle f_i(\rangle ++ \llbracket \theta_1 \rrbracket ++ \llbracket \theta_2 \rrbracket ++ \dots ++ \llbracket \theta_k \rrbracket ++ \rangle \rangle$$

Пусть

$$P_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) = \begin{cases} \text{И}, & \text{если } P_i(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \in \Gamma \\ \text{Л}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Покажите тогда, что $\psi \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\llbracket \psi \rrbracket = \text{И}$. Для этого:

- (a) покажите, что $\alpha \& \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Gamma$;
- (b) покажите, что $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Gamma$, либо $\beta \in \Gamma$, либо выполнено оба утверждения;
- (c) покажите, что $\alpha \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $\neg\alpha \notin \Gamma$.
- (d) покажите, что $\alpha \rightarrow \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда либо $\neg\alpha \in \Gamma$, либо одновременно $\alpha \in \Gamma$ и $\beta \in \Gamma$.
- (e) при помощи сформулированных выше вспомогательных утверждений докажите требуемое утверждение.

3. Формализация понятий свободных переменных, свободы для подстановки, замены переменных.

Рассмотрим множество FV (свободных переменных) для формул:

$$FV(\psi) = \begin{cases} \bigcup_i FV(\theta_i), & \text{если } \psi \equiv P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \\ FV(\alpha) \cup FV(\beta), & \text{если } \psi \equiv \alpha \star \beta \\ FV(\alpha), & \text{если } \psi \equiv \neg\alpha \\ FV(\varphi) \setminus \{x\}, & \text{если } \alpha \text{ имеет вид } \forall x.\varphi \text{ или } \exists x.\varphi \end{cases}$$

и для термов:

$$FV(\theta) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } \theta \equiv x \\ \bigcup_i FV(\theta_i), & \text{если } \theta \equiv f(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \end{cases}$$

Рассмотрим операцию замены переменных, определим её для формул:

$$\alpha[x := \theta] = \begin{cases} \alpha, & \text{если } x \notin FV(\alpha) \\ P(\theta_1[x := \theta], \theta_2[x := \theta], \dots, \theta_k[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv P(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k) \\ (\psi[x := \theta]) \star (\varphi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \psi \star \varphi \\ \neg(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \neg\psi \\ \forall y.(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \forall y.\psi \\ \exists y.(\psi[x := \theta]), & \text{если } \alpha \equiv \exists y.\psi \end{cases}$$

и для термов:

$$\rho[x := \theta] = \begin{cases} \rho, & \text{если } x \notin FV(\rho) \\ \theta, & \text{если } \rho \equiv x \\ f(\rho_1[x := \theta], \rho_2[x := \theta], \dots, \rho_k[x := \theta]), & \text{если } \rho \equiv f(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k) \end{cases}$$

Контекстом подстановки $\alpha[x := \theta]$ назовем следующую функцию от формулы и заменяемой переменной:

$$CX(\alpha, x) = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } x \notin FV(\alpha) \\ CX(\psi, x) \cup CX(\varphi, x), & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и } \alpha \equiv \psi \star \varphi \\ CX(\psi, x), & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и } \alpha \equiv \neg\psi \\ CX(\psi, x) \cup \{y\}, & \text{если } x \in FV(\alpha) \text{ и либо } \alpha \equiv \forall y.\psi, \text{ либо } \alpha \equiv \exists y.\psi \end{cases}$$

- Покажите, что $x \in FV(\alpha)$ тогда и только тогда, когда x входит свободно в α (подсказка: доказательство ведётся индукцией по длине формулы α);
- Покажите, что $CX(\alpha, x) \cap FV(\theta) = \emptyset$ тогда и только тогда, когда θ свободна для подстановки вместо x в α ;
- Покажите на основании данных определений, что если $x \notin FV(\alpha)$, то при любом множестве D и любых оценках символов и переменных из $\llbracket \beta \rightarrow \alpha \rrbracket = \text{И}$ следует $\llbracket (\exists x.\beta) \rightarrow \alpha \rrbracket = \text{И}$;
- Покажите на основании данных определений, что если $CX(\alpha, x) \cap FV(\theta) = \emptyset$, то при любом множестве D и любых оценках символов и переменных $\llbracket \alpha[x := \theta] \rightarrow \exists x.\alpha \rrbracket = \text{И}$.

Домашнее задание №8: «Предварённая форма»

В силу значительного объёма данного задания, часть пунктов задания не будет раскрыта (будет сформулирована по аналогии) — эти пункты при ответе могут раскрываться на большое количество отдельных подпунктов, каждый из которых оценивается независимо.

1. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

- Покажите, что если x не входит свободно в α , то

$$\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \vee \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \vee \alpha) \rightarrow (\forall x.\beta \vee \alpha)$$

- Покажите, что

$$\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$$

где p и q — свежие переменные, не входящие в формулу. Заметим, что в частном случае x может совпадать с y .

- Докажите аналогичные утверждения для $\&$.
- Как будут сформулированы аналогичные утверждения для \rightarrow и \neg ? Сформулируйте и докажете их.

2. Научимся вносить квантор всеобщности «внутри»:

- Покажите, что если x не входит свободно в α , то

$$\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \rightarrow ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$$

- (b) Покажите, что если p не входит свободно в β и q не входит свободно в α , то

$$\vdash (\forall p. \forall q. \alpha \vee \beta) \rightarrow (\forall x. \alpha[p := x]) \vee (\forall y. \beta[q := y])$$

при условии, что x свободно для подстановки вместо p в α и y свободно для подстановки вместо q в β .

- (c) Докажите аналогичные утверждения для $\&$.
- (d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для \rightarrow и \neg ? Сформулируйте и докажите их.
3. Сформулируйте и докажите аналогичные предыдущим пунктам утверждения для квантора существования.
4. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, тогда:
- (a) Докажите:
- $$\vdash \psi \vee \alpha \rightarrow \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \& \alpha \rightarrow \psi \& \beta \quad \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$$
- (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.
- (c) Докажите $\vdash (\forall x. \alpha) \rightarrow (\forall x. \beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?
- (d) Докажите $\vdash (\exists x. \alpha) \rightarrow (\exists x. \beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?
5. Опираясь на доказанные выше леммы, докажите, что если α — формула, то для неё найдётся такая формула β с поверхностными кванторами, что:
- (a) $\vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (b) $\vdash \beta \rightarrow \alpha$

Домашнее задание №9: «Машина Тьюринга, неразрешимость исчисления предикатов»

1. Давайте договоримся, что указывая внешний алфавит, мы не будем упоминать «пустой» символ ε , будем считать, что он всегда есть в алфавите. Постройте машины Тьюринга, вычисляющие следующие функции:
- (a) заменяющую ведущие нули числа в двоичной системе счисления на ε (в алфавите $A = \{0, 1\}$);
- (b) в числе из алфавита $\{0, 1, 2\}$ вырезающую все нули, заполняя образующиеся пустоты сдвигая число влево: например, из числа 20001010232 должно получиться 211232;
- (c) разворачивающую строку в алфавите $\{a, b\}$ в обратном порядке: из строки aaabababa должна получиться строка abababaaa.
2. Рассмотрим алфавит A , множество всех слов в этом алфавите A^* и некоторый язык $L \subseteq A^*$. Напомним, что мы будем называть машину Тьюринга разрешающей язык L , если на каждом слове $w \in A^*$ машина заканчивает работу в допускающем (s_A) или отвергающем (S_D) состоянии, причём машина переходит в допускающее состояние s_A тогда и только тогда, когда $w \in L$. Постройте машины Тьюринга, разрешающие следующие языки:
- (a) язык всех ненулевых двоичных чисел ($A = \{0, 1\}$);
- (b) язык всех чётных четверичных чисел ($A = \{0, 1, 2, 3\}$);
- (c) язык всех десятичных чисел, делящихся на 3 ($A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$);
- (d) язык всех правильных скобочных последовательностей ($A = \{(\, , \,)\}$);
- (e) язык всех корректно заданных машин Тьюринга (придумайте сами представление для машины Тьюринга);
- (f) язык всех машин Тьюринга, имеющих не меньше трёх состояний;
- (g) язык всех машин Тьюринга, завершающих работу не более чем за пять переходов.
3. Постройте логические формулы, кодирующие машины Тьюринга из первых двух подпунктов предыдущей задачи в исчислении предикатов.
4. Формализуйте доказательство того, что если машина Тьюринга достигает состояния P_x при наличии на ленте последовательности $\langle s, w \rangle$ (напомним, что данная запись означает, что головка находится на первом символе строки w , а слева от неё — строка s , записанная в обратном порядке), то тогда $\vdash P_x(s, w)$.

Домашнее задание №10: «Аксиоматика Пеано, рекурсивные функции»

1. Возьмём следующие определения сложения и умножения, применяемые в аксиоматике Пеано. **Важно:** в отличие от определений с лекции, мы будем проводить разбор второго аргумента.

$$a + b = \begin{cases} a, & b = 0 \\ (a + x)', & b = x' \end{cases}$$

$$a \cdot b = \begin{cases} 0, & b = 0 \\ a + (a \cdot x), & b = x' \end{cases}$$

$$a^b = \begin{cases} 1, & b = 0 \\ a \cdot (a^x), & b = x' \end{cases}$$

Также определим следующую запись для натуральных чисел: $1 = 0'$, $2 = 0''$, и т.д.

Также определим отношение порядка: пусть $a \leq b$ означает, что найдётся такой c , что $a + c = b$. Естественным образом можно далее определить $a < b$ (когда $a \leq b$ и $a \neq b$), $b > a$ (когда $a < b$) и $b \geq a$ (когда $a \leq b$).

Докажите следующие утверждения:

- (a) $a + b = b + a$
 - (b) $a + (b + c) = (a + b) + c$
 - (c) $a \cdot 1 = a$
 - (d) $a \cdot b = b \cdot a$
 - (e) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
 - (f) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
 - (g) $2 \cdot a = a + a$
 - (h) Покажите, что если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$
 - (i) Покажите, что если $a \leq b$ и $c \leq d$, то $a + c \leq b + d$
 - (j) Покажите, что $a^b \neq b^a$
 - (k) Покажите, что $a^{b^c} \neq (a^b)^c$
 - (l) При каких a и b выполнено $a \cdot b > a + b$? Докажите полученное утверждение.
2. Докажите следующие утверждения в формальной арифметике:

- (a) $\vdash p = p$
- (b) $\vdash 0 + a = a$
- (c) $\vdash 2 + 2 = 4$
- (d) $\vdash 2 \cdot 2 = 4$
- (e) $\vdash a = b \rightarrow b = a$
- (f) $\vdash a = b \rightarrow a + 1 = b + 1$
- (g) $\vdash a = b \rightarrow a + c = b + c$

3. Определим новое обозначение: будем писать $x \leq y$ вместо $\exists a. x + a = y$ (и воспринимать это новое обозначение как своего рода макроподстановку). Также, введём обозначение для записи натуральных чисел в формальной арифметике:

$$\bar{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\overline{n-1})', & n > 0 \end{cases}$$

Естественно, данные обозначения целиком принадлежат мета-языку. Покажите следующие утверждения:

- (a) $\vdash 1 \leq 2$
- (b) $\vdash a = b \rightarrow a \leq b$
- (c) $\vdash a \leq b \rightarrow a' \leq b'$

- (d) $\vdash a \leq b \rightarrow \forall c. a + c \leq b + c$
- (e) $\vdash a \leq b \vee b \leq a$
- (f) Обозначим за $\phi_n(x)$ формулу $x = 0 \vee x = 0' \vee x = 0'' \vee \dots \vee x = \bar{n}$. Покажите тогда, что при любом натуральном n выполнено $\vdash a \leq \bar{n} \rightarrow \phi_n(a)$
- (g) При любом натуральном n выполнено $\vdash \phi_n(a) \rightarrow a \leq \bar{n}$
4. Покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:
- (a) $x + y$
- (b) $2x$
- (c) x^2
- (d) $x \cdot y$
- (e) x^y
5. Введём операцию «ограниченное вычитание»:

$$a \dot{-} b = \begin{cases} 0, & b > a \\ a - b, & \text{иначе} \end{cases}$$

Также определим деление с остатком: пусть даны натуральные числа a и b ($b > 0$). Известно, что найдутся два числа k и x ($0 \leq x < b$), такие, что $a = k \cdot b + x$. Будем называть k частным от деления (и обозначать как a/b), а x — остатком ($a \% b$).

Тогда покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

- (a) $x \dot{-} y$
- (b) x/y
- (c) $x \% y$
- (d) $\max(x, y)$
- (e) «частичный логарифм»: $\text{plog}_x(a) = \max\{t : a \% (x^t) = 0\}$
- (f) Функция, вычисляющая n -е простое число

Домашнее задание №11: «Представимость рекурсивных функций»

1. Пусть $R \subseteq \mathbb{N}^n$ — некоторое отношение. Покажите, что R выразим в формальной арифметике тогда и только тогда, когда его характеристическая функция C_R представима в формальной арифметике.
2. Представимость примитива Z . Напомним, что мы представляем его формулой $\zeta := x_1 = x_1 \& 0 = x_2$.
- (a) Покажите, что при любом натуральном k доказуемо $\vdash \bar{k} = \bar{k} \& 0 = 0$;
- (b) Покажите, что при любом натуральном k доказуемо $\vdash \exists! p. \bar{k} = \bar{k} \& 0 = p$.
3. Представимость примитива N . Напомним, что мы представляем его формулой $\nu := x'_1 = x_2$.
- (a) Покажите, что при любом натуральном k доказуемо $\vdash \nu(\bar{k}, \overline{k+1})$;
- (b) Покажите, что при любом натуральном k доказуемо $\vdash \exists! p. \nu(\bar{k}, p)$.
4. Представимость примитива $S(g, f_1, \dots, f_m)$ при условии представимости функций f и g (пусть их представляют формулы ϕ и γ). Напомним, что мы представляем примитив формулой

$$\sigma_{\gamma, \phi_1, \dots, \phi_m} := \exists f_1. \exists f_2. \dots \exists f_m. \phi(x_1, \dots, x_n, f_1) \& \dots \& \phi(x_1, \dots, x_n, f_m) \& \gamma(f_1, \dots, f_m, x_{n+1})$$

- (a) Покажите, что при любом $x \in \mathbb{N}$ и при $f_1, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ доказуемо $\vdash \exists r. \sigma_{\gamma, \phi_1}(\bar{x}, r)$;
- (b) Покажите, что в тех же условиях доказуемо $\vdash \exists! r. \sigma_{\gamma, \phi_1}(\bar{x}, r)$;
5. Покажите, что отношение «меньше» ($<$) выразимо в формальной арифметике.
- (a) Предложите формулу λ , выражающую отношение, и покажите $\vdash \lambda(0, 0'')$;
- (b) Покажите, что $\vdash \lambda(a, a')$;
- (c) Покажите, что $\vdash \lambda(a, b) \rightarrow \lambda(a', b')$;

- (d) Покажите, что $\vdash \lambda(0, a')$;
 - (e) Покажите, что если $a < b$, то $\vdash \lambda(a, b)$;
 - (f) Покажите, что $\vdash \neg \lambda(a, a)$;
 - (g) Покажите, что $\vdash \neg \lambda(a, 0)$;
 - (h) Покажите, что $\vdash \neg \lambda(a, b) \rightarrow \neg \lambda(a', b')$;
 - (i) Покажите, что если $a \geq b$, то $\vdash \neg \lambda(a, b)$.
6. Покажите, что функция «остаток от деления» (%) выразима в формальной арифметике (укажите схему доказательства, часть технических лемм может быть только сформулирована).
7. Представимость минимизации. Напомним, что примитив минимизации

$$M\langle f \rangle := \min\{y : f(x_1, \dots, x_n, y) = 0\}$$

представляется в формальной арифметике с помощью формулы

$$\mu_\phi := \phi(x_1, \dots, x_{n+1}, 0) \ \& \ \forall y. y < x_{n+1} \rightarrow \neg \phi(x_1, \dots, x_n, y, 0)$$

- (a) покажите, что $M\langle Z \rangle = 0$, то есть $\vdash \mu_Z(0)$;
- (b) покажите, что $\vdash \neg \mu_Z(0')$;
- (c) А теперь более общий случай, $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Покажите, что если $\vdash \exists x_1. \phi$, то $\vdash \exists y. \mu_\phi(y)$ (ϕ представляет f в формальной арифметике).
- (d) Покажите, что $\vdash \forall p. \forall q. p < q \vee p > q \vee p = q$
- (e) В условиях предыдущего пункта, покажите, что $\vdash \forall p. \forall q. \mu_\phi(p) \ \& \ \mu_\phi(q) \rightarrow p = q$

Контрольная работа 29 мая 2019 года

1. Покажите, что при любых предикатах P , Q и R выполнено $\vdash \forall x. (P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (Q(x) \rightarrow R(x)) \vee (R(x) \rightarrow P(x))$
2. Покажите, что при любых предикатах P и Q выполнено $\vdash \forall x. ((P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(x)) \rightarrow P(x)$
3. Покажите в аксиоматике Пеано, что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Считайте леммы про ассоциативность и коммутативность сложения и умножения доказанными.
4. Покажите в аксиоматике Пеано, что $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Считайте леммы про ассоциативность и коммутативность сложения и умножения доказанными.
5. Покажите, что $\vdash \exists x. 0 + x = x + 0$ (приведите полное доказательство).
6. Покажите, что $\vdash \exists x. 0 \cdot x = x \cdot 0$ (приведите полное доказательство).
7. Покажите, что $\vdash \forall x. \exists y. \neg 3 \cdot x = 4 \cdot y$
8. Покажите, что $\vdash \forall x. \exists y. \neg x + y = 3 \cdot x$
9. Постройте примитивно-рекурсивную функцию $len(s)$, вычисляющую длину строки s в Гёделевой нумерации. Функции для сложения, умножения, ограниченного вычитания и деления с остатком считайте заданными.
10. Постройте функцию, возвращающую символ, стоящий в позиции n в строке s , заданной в Гёделевой нумерации. Функции для сложения, умножения, ограниченного вычитания и деления с остатком считайте заданными.
11. (*Лемма об автоссылках*) Покажите, что для любой формулы $\beta(x)$ найдётся такая формула α , что $\vdash \alpha \rightarrow \beta(\alpha)$ и $\vdash \beta(\alpha) \rightarrow \alpha$. Указание: используйте формулу $\forall a. \sigma(b, b, a) \rightarrow \beta(a)$, где $\sigma(p, q, r)$ доказуема тогда и только тогда, когда r — результат замены всех свободных вхождений переменной x в формуле p на формулу q : $\rho = \pi[x := \psi]$, где $\ulcorner \rho \urcorner = r$, $\ulcorner \pi \urcorner = p$, $\ulcorner \psi \urcorner = q$.
12. Приведите пример ω -противоречивой, но непротиворечивой теории.

Домашнее задание №12: «Теоремы Гёделя о неполноте арифметики»

1. Найдите гёделев номер для формулы $\forall x.\forall y.\forall z.x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
2. Покажите, что операция @ конкатенации двух строк в гёделевой нумерации рекурсивна:

$$2^{a_0}.3^{a_1}\dots(p(n))^{a_{n-1}} @ 2^{b_0}.3^{b_1}\dots(p(m))^{b_{m-1}} = 2^{a_0}.3^{a_1}\dots(p(n))^{a_{n-1}}.(p(n+1))^{b_0}.(p(n+2))^{b_1}\dots(p(n+m))^{b_{m-1}}$$

3. Пусть дана рекурсивная функция $\text{Proof}(p, x)$, возвращающая 0, если x — гёделев номер функции ξ , а p — гёделев номер доказательства ξ . Тогда, используя её, выпишите (без пропусков) рекурсивную функцию, вычисляющую значение любой представимой в формальной арифметике функции f по формуле ϕ , её представляющей.

В данном выражении можно использовать функции, про которые доказана их рекурсивность в предыдущих домашних заданиях.

4. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Рассмотрим формулы:

- $\pi(p, x)$, выражающую рекурсивное отношение « p — гёделев номер доказательства формулы x »;
- формулу $\pi_r(x) := \exists p.\pi(p, x)$;
- формулу $\text{Consis} := \neg\pi_r(\overline{\Gamma 0 = 1})$

С использованием этих определений, леммы об автоссылках и условий выводимости Гильберта-Бернайса-Лёфа, покажите, что:

- (a) Существует формула ξ , такая, что $\vdash \xi \rightarrow \neg\pi_r(\overline{\Gamma \xi})$ и $\vdash \neg\pi_r(\overline{\Gamma \xi}) \rightarrow \xi$. Есть ли связь между данными формулами (или их составными частями) и формулой $\sigma(\overline{\Gamma \sigma})$ из доказательства первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики?
- (b) Если $\vdash \pi_r(\overline{\Gamma \xi}) \rightarrow \pi_r(\overline{\Gamma 0 = 1})$, то $\vdash \text{Consis} \rightarrow \xi$.
- (c) $\pi_r(\overline{\Gamma \xi}) \vdash \pi_r(\overline{\Gamma \pi_r(\overline{\Gamma \xi})})$.
- (d) $\vdash \pi_r(\overline{\Gamma \pi_r(\overline{\Gamma \xi})} \rightarrow \neg \xi)$.
- (e) $\vdash \pi_r(\overline{\Gamma \pi_r(\overline{\Gamma \xi})}) \rightarrow \pi_r(\overline{\Gamma \pi_r(\overline{\Gamma \xi})} \rightarrow \neg \xi) \rightarrow \pi_r(\overline{\Gamma \neg \xi})$.
- (f) Показав $\vdash \pi_r(\overline{\Gamma \xi}) \rightarrow \pi_r(\overline{\Gamma 0 = 1})$, завершите доказательство второй теоремы Гёделя о неполноте арифметики.