

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

ИТМО, группы М3234–М3239, весна 2019 г.

Вариант I

1. Покажите, что при любых предикатах P , Q и R выполнено $\vdash \forall x.(P(x) \rightarrow Q(x)) \vee (Q(x) \rightarrow R(x)) \vee (R(x) \rightarrow P(x))$
2. Покажите в аксиоматике Пеано, что $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Считайте леммы про ассоциативность и коммутативность сложения и умножения доказанными.
3. Покажите, что $\vdash \exists x.0 + x = x + 0$ (приведите полное доказательство).
4. Покажите, что $\vdash \forall x.\exists y.\neg 3 \cdot x = 4 \cdot y$
5. Постройте примитивно-рекурсивную функцию $len(s)$, вычисляющую длину строки s в Гёделевой нумерации. Функции для сложения, умножения, ограниченного вычитания и деления с остатком считайте заданными.
6. Покажите, что для любой формулы $\beta(x)$ найдётся такая формула α , что $\vdash \alpha \rightarrow \beta(\alpha)$. Указание: используйте формулу $\forall a.\sigma(b, b, a) \rightarrow \beta(a)$, где $\sigma(p, q, r)$ доказуема тогда и только тогда, когда r — результат замены всех свободных вхождений переменной x в формуле p на формулу q : $\rho = \pi[x := \psi]$, где $\ulcorner \rho \urcorner = r$, $\ulcorner \pi \urcorner = p$, $\ulcorner \psi \urcorner = q$.
7. Приведите пример ω -противоречивой, но непротиворечивой теории.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

ИТМО, группы М3234–М3239, весна 2019 г.

Вариант II

1. Покажите, что при любых предикатах P и Q выполнено $\vdash \forall x.((P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow P(x)) \rightarrow P(x)$
2. Покажите в аксиоматике Пеано, что $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Считайте леммы про ассоциативность и коммутативность сложения и умножения доказанными.
3. Покажите, что $\vdash \exists x.0 \cdot x = x \cdot 0$ (приведите полное доказательство).
4. Покажите, что $\vdash \forall x.\exists y.\neg x + y = 3 \cdot x$
5. Постройте функцию, возвращающую символ, стоящий в позиции n в строке s , заданной в Гёделевой нумерации. Функции для сложения, умножения, ограниченного вычитания и деления с остатком считайте заданными.
6. Покажите, что для любой формулы $\beta(x)$ найдётся такая формула α , что $\vdash \beta(\alpha) \rightarrow \alpha$. Указание: используйте формулу $\forall a.\sigma(b, b, a) \rightarrow \beta(a)$, где $\sigma(p, q, r)$ доказуема тогда и только тогда, когда r — результат замены всех свободных вхождений переменной x в формуле p на формулу q : $\rho = \pi[x := \psi]$, где $\ulcorner \rho \urcorner = r$, $\ulcorner \pi \urcorner = p$, $\ulcorner \psi \urcorner = q$.
7. Приведите пример ω -противоречивой, но непротиворечивой теории.