

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2020 года

## Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

- (a)  $\neg A \vee \neg \neg A$
- (b)  $(A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (C \rightarrow \neg A)$
- (c)  $A \rightarrow B \vee A$
- (d)  $A \rightarrow B \& B \rightarrow A$

2. Будем говорить, что высказывание  $\alpha$  *следует* из высказываний  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  (и будем записывать это как  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$ ), если при любой оценке, такой, что при всех  $i$  выполнено  $\llbracket \gamma_i \rrbracket = \text{И}$ , также выполнено и  $\llbracket \alpha \rrbracket = \text{И}$ .

Пусть даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\alpha \models \beta$ , но  $\beta \not\models \alpha$ . Придумайте «промежуточное» высказывание  $\gamma$ , такое, что  $\alpha \models \gamma$ ,  $\gamma \models \beta$ , причём  $\gamma \not\models \alpha$  и  $\beta \not\models \gamma$ .

3. Простые высказывания. Докажите высказывания, построив полный вывод:

- (a)  $\alpha, \beta \vdash \alpha \& \beta$
- (b)  $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
- (c)  $\neg \alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
- (d)  $\alpha, \neg \beta \vdash \alpha \vee \beta$
- (e)  $\gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
- (f)  $\neg \alpha \vdash \neg \alpha$
- (g)  $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

4. Ассоциативность и коммутативность.

- (a) Докажите или опровергните:  $\models \alpha \rightarrow \beta$  влечёт  $\models \beta \rightarrow \alpha$ .
- (b) Докажите:  $\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$
- (c) Докажите:  $\vdash \alpha \& \beta \rightarrow \beta \& \alpha$

5. Контрапозиция. Докажите, что  $\vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \neg(\beta \rightarrow \alpha)$

6. Докажите следующие высказывания, построив полный вывод:

- (a)  $\neg \alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
- (b)  $\alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
- (c)  $\neg \alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
- (d)  $\neg \alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
- (e)  $\alpha, \neg \beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
- (f)  $\neg \alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (g)  $\neg \alpha, \neg \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (h)  $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$