Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2020 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$

   (b) $(A \to \neg B) \vee (B \to \neg C) \vee (C \to \neg A)$

   (c) $A \to B \vee A$

   (d) $A \to B \,\&\, B \to A$

   (e) $A \to B \to \neg B \to \neg A$.

2. Будем говорить, что высказывание α *следует* из высказываний $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и будем записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$), если при любой оценке, такой, что при всех i выполнено $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, также выполнено и $[\![\alpha]\!] = \text{И}$.

   Пусть даны высказывания α и β, причём $\alpha \models \beta$, но $\beta \not\models \alpha$. Придумайте «промежуточное» высказывание γ, такое, что $\alpha \models \gamma$, $\gamma \models \beta$, причём $\gamma \not\models \alpha$ и $\beta \not\models \gamma$.

3. Простые высказывания. Докажите высказывания, построив полный вывод:

   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta$

   (b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (c) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (d) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (e) $\gamma \vdash \alpha \to \gamma$

   (f) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

   (g) $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$

4. Ассоциативность и коммутативность.

   (a) Докажите или опровергните: $\models \alpha \to \beta$ влечёт $\models \beta \to \alpha$.

   (b) Докажите: $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

   (c) Докажите: $\vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta \,\&\, \alpha$

5. Контрапозиция. $\vdash (\alpha \to \beta) \to \neg\beta \to \neg\alpha$.

6. Докажите следующие высказывания, построив полный вывод:

   (a) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$

   (b) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$

   (c) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha\&\beta)$

   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

   (e) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$

   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$

   (g) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$

   (h) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Домашнее задание №2: «интуиционистское исчисление высказываний»

1. Долги по теореме о полноте ИВ. Докажите:

   (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

   (b) $\Gamma, \alpha \vdash \phi$ и $\Gamma, \neg\alpha \vdash \phi$ влечёт $\Gamma \vdash \phi$

2. Постройте дерево вывода для следующих высказываний интуиционистской логики (в данных примерах $\neg\alpha$ — сокращение для $\alpha \to \perp$):

   (a) $\vdash \alpha \to \alpha$

   (b) $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$

   (c) $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

   (d) $\vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta \,\&\, \alpha$

   (e) $\vdash \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$

3. Постройте примеры частично упорядоченных множеств:

   (a) определено $a + b$, но не $a \cdot b$;

   (b) определено $a \cdot b$, но не $a + b$;

   (c) является решёткой, но не является дистрибутивной решёткой;

   (d) является дистрибутивной, но не импликативной решёткой;

   (e) является импликативной, но не имеет нуля;

4. Решётки. Покажите, что следующие утверждения выполнены в любой решётке и при любых a, b и c:

   (a) Коммутативность: $a \cdot b = b \cdot a$ и $a + b = b + a$

   (b) Ассоциативность: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ и $a + (b + c) = (a + b) + c$

   (c) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$ и $a + (a \cdot b) = a$

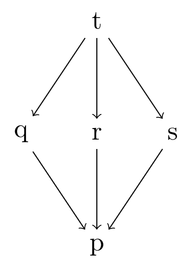
   (d) Верно ли, что если $a \sqsubseteq b$, то $a + c \sqsubseteq b + c$ и $a \cdot c \sqsubseteq b \cdot c$?

   (e) Верно ли, что если $a + c \sqsubseteq b + c$ или $a \cdot c \sqsubseteq b \cdot c$, то $a \sqsubseteq b$?

5. В любой дистрибутивной решётке

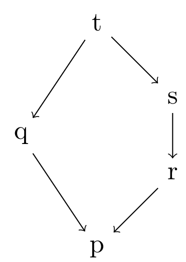
   (a) $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$.

   (b) Нет *диамантов*: таких пяти элементов p, q, r, s, t, что $p \sqsubseteq q, r, s \sqsubseteq t$, и при этом q, r и s — несравнимы.

   При этом, если на данной диаграмме выполнено какое-то вычисление (например, $q + r = t$), то оно должно быть выполнено и в исходной дистрибутивной решётке.

   (c) Нет *пентагонов*: таких пяти элементов p, q, r, s, t, что $p \sqsubseteq q, r, s \sqsubseteq t$, также $r \sqsubseteq s$, элемент же q не сравним с r и s.

При этом, если на данной диаграмме выполнено какое-то вычисление (например, $q + r = t$), то оно должно быть выполнено и в исходной дистрибутивной решётке.

6. Покажите, что в импликативной решётке
   (a) выполнена дистрибутивность;
   (b) Из $a \sqsubseteq b$ следует $b \to c \sqsubseteq a \to c$ и $c \to a \sqsubseteq c \to b$;
   (c) Из $a \sqsubseteq b \to c$ следует $a \cdot b \sqsubseteq c$;
   (d) $a \sqsubseteq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;
   (e) $b \sqsubseteq a \to b$;
   (f) $a \to b \sqsubseteq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;
   (g) $a \sqsubseteq b \to a \cdot b$;
   (h) $a \to c \sqsubseteq (b \to c) \to (a + b \to c)$
7. Рассмотрим топологию $\langle X, \Omega \rangle$ (напомним, что здесь Ω — множество всех открытых подмножеств множества X). Рассмотрим множество Ω, частично упорядоченное отношением «быть подмножеством». Покажите, что получившаяся конструкция:
   (a) решётка;
   (b) дистрибутивная решётка;
   (c) импликативная решётка;
   (d) псевдобулева алгебра;
   (e) не является булевой алгеброй.
8. Покажите, что булева алгебра — булева алгебра.
9. Покажите, что подмножества некоторого множества, упорядоченнные отношением «быть подмножеством» — булева алгебра.
10. Покажите недоказуемость следующих высказываний интуиционистской логики, построив *конечные* псевдобулевы алгебры (т.е. частично упорядоченные множества с конечным количеством элементов), в которых следующие высказывания не истинны:
    (a) $A \vee \neg A$
    (b) $(((A \to B) \to A) \to A)$
    (c) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$
    (d) $\neg A \vee \neg\neg A$
11. Теорема о полноте алгебр Гейтинга как моделей для интуиционистского исчисления высказываний.

    Уточним определения, данные на лекции:
    (a) Будем писать $\alpha \sqsubseteq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.
    (b) Будем писать $\alpha \approx \beta$, если имеет место $\alpha \sqsubseteq \beta$ и $\beta \sqsubseteq \alpha$.
    (c) Будем писать $[\alpha]$ для класса эквивалентности, порождённого по формуле α: $[\alpha] = \{\phi \mid \phi \approx \alpha\}$

    Интуиция здесь такая: высказывание тем ближе к 0 (к лжи), чем меньше ситуаций, в которых оно истинно. Поэтому если $\alpha \vdash \beta$, то α не больше β: возможно, β истинно ещё в каких-то ситуациях, в которых ложно α (но не наоборот).

    Тогда докажите следующие утверждения:
    (a) $(\approx)$ есть действительно отношение эквивалентности.
    (b) $[\alpha \,\&\, \beta]$ — наибольшая нижняя грань $[\alpha]$ и $[\beta]$ в алгебре Линденбаума. То есть, $\alpha \,\&\, \beta \sqsubseteq \alpha$, $\alpha \,\&\, \beta \sqsubseteq \beta$, и из $\tau \sqsubseteq \alpha$ и $\tau \sqsubseteq \beta$ следует $\tau \sqsubseteq \alpha \,\&\, \beta$. Также поясните, почему нам достаточно доказать эти утверждения для отдельных представителей, чтобы доказать свойства для классов эквивалентности.
    (c) $[\alpha \vee \beta]$ — наименьшая верхняя грань $[\alpha]$ и $[\beta]$.
    (d) $[\alpha \to \beta]$ — псевдополнение $[\alpha] \to [\beta]$.
    (e) $[\perp]$ — ноль.
    (f) $[\neg\alpha]$ — псевдодополнение до нуля $\sim [\alpha]$.

Домашнее задание №3: «корректность и дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний»

1. Теорема о корректности: если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$ в любой алгебре Гейтинга. Поскольу в принятом нами интуиционистском исчислении высказываний доказываются не высказывания, а некоторые сложные условные выражения (записи вида $\Gamma \vdash \alpha$), то и оценкой для данных выражений мы выберем неравенство. А именно, если $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $g_i = [\![\gamma_i]\!]$ и $a = [\![\alpha]\!]$, то выражению $\Gamma \vdash \alpha$ мы сопоставим неравенство
$$g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n \sqsubseteq a$$
и записывать его будем как $\Gamma \sqsubseteq a$. Также, на случай $G = \varnothing$ положим, что $\varnothing \sqsubseteq a$ означает $a = 1$ (это естественно предположить, поскольку к любому G всегда можно добавить некоторое $g_0 = 1$, при этом смысл выражения $g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n \sqsubseteq a$ останется прежним).

   Отметим, что следующие утвержедения очевидны (или уже показаны ранее):

   - *Аксиома.* $G, a \sqsubseteq a$.
   - *Введение* (&). Если $G \sqsubseteq b$ и $G \sqsubseteq c$, то $G \sqsubseteq b \cdot c$.
   - *Удаление* (&). Если $G \sqsubseteq a \cdot b$, то $G \sqsubseteq a$ и $G \sqsubseteq b$.
   - *Введение* ($\vee$). Если $G \sqsubseteq b$, то $G \sqsubseteq b + c$ и $G \sqsubseteq c + b$.

   Теперь осталось заполнить промежутки и получить полноценное доказательство. А именно, покажите, что:

   (a) *Введение* ($\rightarrow$). Если $G, a \sqsubseteq b$, то $G \sqsubseteq a \rightarrow b$. Убедитесь, что если $a \sqsubseteq b$, то $\varnothing \sqsubseteq a \rightarrow b$.

   (b) *Удаление* ($\rightarrow$). Если $G \sqsubseteq a \rightarrow b$ и $G \sqsubseteq a$, то $G \sqsubseteq b$.

   (c) *Удаление* ($\vee$). Если $G, a \sqsubseteq c$, $G, b \sqsubseteq c$ и $G \sqsubseteq a + b$, то $G \sqsubseteq c$.

   (d) *Удаление лжи.* Если $G \sqsubseteq 0$, то $G \sqsubseteq b$ при любом b.

   (e) Основываясь на доказанных выше утверждениях, покажите теорему о корректности в целом.

2. Поясните, как соотносится $G \sqsubseteq a$ со следующими системой (подзадача a) и совокупностью (подзадача b) неравенств:

   (a)
$$\begin{cases} g_1 \sqsubseteq a \\ g_2 \sqsubseteq a \\ \dots \\ g_n \sqsubseteq a \end{cases}$$

   (b)
$$\left[\begin{array}{l} g_1 \sqsubseteq a \\ g_2 \sqsubseteq a \\ \dots \\ g_n \sqsubseteq a \end{array}\right.$$

   То есть, следует ли какое-нибудь утверждение из какого-нибудь другого, и если да, то докажите, если нет — предложите контрпример.

3. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга, если $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга.

4. Покажите или опровергните, что если $\Gamma(\mathcal{B})$ — алгебра Гейтинга, то и $\mathcal{B}$ — алгебра Гейтинга.

5. Покажите, что отображение $\varphi : \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, определённое как:
$$\varphi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } g \sqsubset \omega \\ 1_{\mathcal{A}}, & \text{если } g = \omega \text{ или } g = 1_{\Gamma(\mathcal{A})} \end{cases}$$
   действительно является гомоморфизмом.

6. Является ли требование на сохранение нуля в определении гомоморфизма алгебр Гейтинга обязательным?

   Если точнее, пусть $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — отображение алгебр Гейтинга, сохраняющее операции: $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$ и $\varphi(\neg a) = \neg\varphi(a)$. Всегда ли $\varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$ и φ — гомоморфизм.

7. Покажем, что если α доказано в интуиционистском исчислении высказываний в стиле Гильберта (с изменённой 10 аксиомой: $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$), то оно может быть доказано и в интуиционистской.

   Для этого покажите, что:

(a) Все аксиомы 1-9 выполнены (подзадачи а.1 — а.9): если α — аксиома, то $\vdash_{\text{и}} \alpha$.

(b) $\vdash_{\text{и}} \alpha \to \neg\alpha \to \beta$.

(c) Покажите правило Modus Ponens: если $\vdash_{\text{и}} \alpha$ и $\vdash_{\text{и}} \alpha \to \beta$, то $\vdash_{\text{и}} \beta$.

8. Как доказать, что если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash_{\text{к}} \alpha$? Придумайте схему доказательства, для доказательства отдельных утверждений можно пользоваться теоремой о полноте К.И.В.

9. Как доказать, что если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash \alpha$ в интуиционистском исчислении высказываний в стиле Гильберта? Придумайте схему доказательства.

10. Покажем теорему Гливенко. Для этого покажем следующее:

    (a) Если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

    (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha \to \alpha$.

    (c) Вспользовавшись предыдущими пунктами и задачами, докажите теорему Гливенко.