# Теоретические (“малые”) домашние задания

*Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2020 года*

## Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$

   (b) $(A \to \neg B) \vee (B \to \neg C) \vee (C \to \neg A)$

   (c) $A \to B \vee A$

   (d) $A \to B \,\&\, B \to A$

   (e) $A \to B \to \neg B \to \neg A$.

2. Будем говорить, что высказывание $\alpha$ *следует* из высказываний $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и будем записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$), если при любой оценке, такой, что при всех $i$ выполнено $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, также выполнено и $[\![\alpha]\!] = \text{И}$.

   Пусть даны высказывания $\alpha$ и $\beta$, причём $\alpha \models \beta$, но $\beta \not\models \alpha$. Придумайте «промежуточное» высказывание $\gamma$, такое, что $\alpha \models \gamma$, $\gamma \models \beta$, причём $\gamma \not\models \alpha$ и $\beta \not\models \gamma$.

3. Простые высказывания. Докажите высказывания, построив полный вывод:

   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta$

   (b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (c) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (d) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (e) $\gamma \vdash \alpha \to \gamma$

   (f) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

   (g) $\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$

4. Ассоциативность и коммутативность.

   (a) Докажите или опровергните: $\models \alpha \to \beta$ влечёт $\models \beta \to \alpha$.

   (b) Докажите: $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$

   (c) Докажите: $\vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta \,\&\, \alpha$

5. Контрапозиция. $\vdash (\alpha \to \beta) \to \neg\beta \to \neg\alpha$.

6. Докажите следующие высказывания, построив полный вывод:

   (a) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$

   (b) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$

   (c) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$

   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

   (e) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \to \beta)$

   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \to \beta$

   (g) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \to \beta$

   (h) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$