# Теоретические («малые») домашние задания

*Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2020 года*

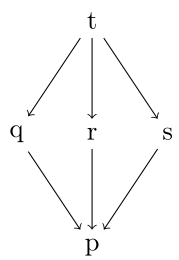
## Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:
   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$
   (b) $(A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (C \rightarrow \neg A)$
   (c) $A \rightarrow B \vee A$
   (d) $A \rightarrow B \,\&\, B \rightarrow A$
   (e) $A \rightarrow B \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$.
2. Будем говорить, что высказывание $\alpha$ *следует* из высказываний $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ (и будем записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \models \alpha$), если при любой оценке, такой, что при всех $i$ выполнено $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, также выполнено и $[\![\alpha]\!] = \text{И}$.

   Пусть даны высказывания $\alpha$ и $\beta$, причём $\alpha \models \beta$, но $\beta \not\models \alpha$. Придумайте «промежуточное» высказывание $\gamma$, такое, что $\alpha \models \gamma$, $\gamma \models \beta$, причём $\gamma \not\models \alpha$ и $\beta \not\models \gamma$.
3. Простые высказывания. Докажите высказывания, построив полный вывод:
   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta$
   (b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (c) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (d) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$
   (e) $\gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
   (f) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$
   (g) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
4. Ассоциативность и коммутативность.
   (a) Докажите или опровергните: $\models \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\models \beta \rightarrow \alpha$.
   (b) Докажите: $\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$
   (c) Докажите: $\vdash \alpha \,\&\, \beta \rightarrow \beta \,\&\, \alpha$
5. Контрапозиция. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$.
6. Докажите следующие высказывания, построив полный вывод:
   (a) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (b) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (c) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$
   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$
   (e) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$
   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (g) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
   (h) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

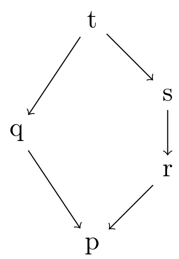
# Домашнее задание №2: «интуиционистское исчисление высказываний»

1. Долги по теореме о полноте ИВ. Докажите:
   (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
   (b) $\Gamma, \alpha \vdash \phi$ и $\Gamma, \neg\alpha \vdash \phi$ влечёт $\Gamma \vdash \phi$
2. Постройте дерево вывода для следующих высказываний интуиционистской логики (в данных примерах $\neg\alpha$ — сокращение для $\alpha \to \perp$):
   (a) $\vdash \alpha \to \alpha$
   (b) $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$
   (c) $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$
   (d) $\vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta \,\&\, \alpha$
   (e) $\vdash \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$
3. Постройте примеры частично упорядоченных множеств:
   (a) определено $a + b$, но не $a \cdot b$;
   (b) определено $a \cdot b$, но не $a + b$;
   (c) является решёткой, но не является дистрибутивной решёткой;
   (d) является дистрибутивной, но не импликативной решёткой;
   (e) является импликативной, но не имеет нуля;
4. Решётки. Покажите, что следующие утверждения выполнены в любой решётке и при любых $a$, $b$ и $c$:
   (a) Коммутативность: $a \cdot b = b \cdot a$ и $a + b = b + a$
   (b) Ассоциативность: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ и $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (c) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$ и $a + (a \cdot b) = a$
   (d) Верно ли, что если $a \sqsubseteq b$, то $a + c \sqsubseteq b + c$ и $a \cdot c \sqsubseteq b \cdot c$?
   (e) Верно ли, что если $a + c \sqsubseteq b + c$ или $a \cdot c \sqsubseteq b \cdot c$, то $a \sqsubseteq b$?
5. В любой дистрибутивной решётке
   (a) $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$.
   (b) Нет *диамантов*: таких пяти элементов $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, что $p \sqsubseteq q, r, s \sqsubseteq t$, и при этом $q$, $r$ и $s$ — несравнимы.




   При этом, если на данной диаграмме выполнено какое-то вычисление (например, $q + r = t$), то оно должно быть выполнено и в исходной дистрибутивной решётке.

   (c) Нет *пентагонов*: таких пяти элементов $p$, $q$, $r$, $s$, $t$, что $p \sqsubseteq q, r, s \sqsubseteq t$, также $r \sqsubseteq s$, элемент же $q$ не сравним с $r$ и $s$.



При этом, если на данной диаграмме выполнено какое-то вычисление (например, $q + r = t$), то оно должно быть выполнено и в исходной дистрибутивной решётке.

6. Покажите, что в импликативной решётке
   (a) выполнена дистрибутивность;
   (b) Из $a \sqsubseteq b$ следует $b \to c \sqsubseteq a \to c$ и $c \to a \sqsubseteq c \to b$;
   (c) Из $a \sqsubseteq b \to c$ следует $a \cdot b \sqsubseteq c$;
   (d) $a \sqsubseteq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;
   (e) $b \sqsubseteq a \to b$;
   (f) $a \to b \sqsubseteq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;
   (g) $a \sqsubseteq b \to a \cdot b$;
   (h) $a \to c \sqsubseteq (b \to c) \to (a + b \to c)$

7. Рассмотрим топологию $\langle X, \Omega \rangle$ (напомним, что здесь $\Omega$ — множество всех открытых подмножеств множества $X$). Рассмотрим множество $\Omega$, частично упорядоченное отношением «быть подмножеством». Покажите, что получившаяся конструкция:
   (a) решётка;
   (b) дистрибутивная решётка;
   (c) импликативная решётка;
   (d) псевдобулева алгебра;
   (e) не является булевой алгеброй.

8. Покажите, что булева алгебра — булева алгебра.

9. Покажите, что подмножества некоторого множества, упорядоченнные отношением «быть подмножеством» — булева алгебра.

10. Покажите недоказуемость следующих высказываний интуиционистской логики, построив *конечные* псевдобулевы алгебры (т.е. частично упорядоченные множества с конечным количеством элементов), в которых следующие высказывания не истинны:
    (a) $A \vee \neg A$
    (b) $(((A \to B) \to A) \to A)$
    (c) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$
    (d) $\neg A \vee \neg\neg A$

11. Теорема о полноте алгебр Гейтинга как моделей для интуиционистского исчисления высказываний.

    Уточним определения, данные на лекции:
    (a) Будем писать $\alpha \sqsubseteq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.
    (b) Будем писать $\alpha \approx \beta$, если имеет место $\alpha \sqsubseteq \beta$ и $\beta \sqsubseteq \alpha$.
    (c) Будем писать $[\alpha]$ для класса эквивалентности, порождённого по формуле $\alpha$: $[\alpha] = \{\phi \mid \phi \approx \alpha\}$

    Интуиция здесь такая: высказывание тем ближе к 0 (к лжи), чем меньше ситуаций, в которых оно истинно. Поэтому если $\alpha \vdash \beta$, то $\alpha$ не больше $\beta$: возможно, $\beta$ истинно ещё в каких-то ситуациях, в которых ложно $\alpha$ (но не наоборот).

    Тогда докажите следующие утверждения:
    (a) $(\approx)$ есть действительно отношение эквивалентности.
    (b) $[\alpha \,\&\, \beta]$ — наибольшая нижняя грань $[\alpha]$ и $[\beta]$ в алгебре Линденбаума. То есть, $\alpha \,\&\, \beta \sqsubseteq \alpha$, $\alpha \,\&\, \beta \sqsubseteq \beta$, и из $\tau \sqsubseteq \alpha$ и $\tau \sqsubseteq \beta$ следует $\tau \sqsubseteq \alpha \,\&\, \beta$. Также поясните, почему нам достаточно доказать эти утверждения для отдельных представителей, чтобы доказать свойства для классов эквивалентности.
    (c) $[\alpha \vee \beta]$ — наименьшая верхняя грань $[\alpha]$ и $[\beta]$.
    (d) $[\alpha \to \beta]$ — псевдополнение $[\alpha] \to [\beta]$.
    (e) $[\perp]$ — ноль.
    (f) $[\neg\alpha]$ — псевдодополнение до нуля $\sim [\alpha]$.

## Домашнее задание №3: «корректность и дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний»

1. Теорема о корректности: если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$ в любой алгебре Гейтинга. Поскольу в принятом нами интуиционистском исчислении высказываний доказываются не высказывания, а некоторые сложные условные выражения (записи вида $\Gamma \vdash \alpha$), то и оценкой для данных выражений мы выберем неравенство. А именно, если $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $g_i = [\![\gamma_i]\!]$ и $a = [\![\alpha]\!]$, то выражению $\Gamma \vdash \alpha$ мы сопоставим неравенство
$$g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n \sqsubseteq a$$
и записывать его будем как $\Gamma \sqsubseteq a$. Также, на случай $G = \varnothing$ положим, что $\varnothing \sqsubseteq a$ означает $a = 1$ (это естественно предположить, поскольку к любому $G$ всегда можно добавить некоторое $g_0 = 1$, при этом смысл выражения $g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n \sqsubseteq a$ останется прежним).

   Отметим, что следующие утвеждения очевидны (или уже показаны ранее):

   - *Аксиома.* $G, a \sqsubseteq a$.
   - *Введение* (&). Если $G \sqsubseteq b$ и $G \sqsubseteq c$, то $G \sqsubseteq b \cdot c$.
   - *Удаление* (&). Если $G \sqsubseteq a \cdot b$, то $G \sqsubseteq a$ и $G \sqsubseteq b$.
   - *Введение* ($\vee$). Если $G \sqsubseteq b$, то $G \sqsubseteq b + c$ и $G \sqsubseteq c + b$.

   Теперь осталось заполнить промежутки и получить полноценное доказательство. А именно, покажите, что:

   (a) *Введение* ($\rightarrow$). Если $G, a \sqsubseteq b$, то $G \sqsubseteq a \rightarrow b$. Убедитесь, что если $a \sqsubseteq b$, то $\varnothing \sqsubseteq a \rightarrow b$.

   (b) *Удаление* ($\rightarrow$). Если $G \sqsubseteq a \rightarrow b$ и $G \sqsubseteq a$, то $G \sqsubseteq b$.

   (c) *Удаление* ($\vee$). Если $G, a \sqsubseteq c$, $G, b \sqsubseteq c$ и $G \sqsubseteq a + b$, то $G \sqsubseteq c$.

   (d) *Удаление лжи.* Если $G \sqsubseteq 0$, то $G \sqsubseteq b$ при любом $b$.

   (e) Основываясь на доказанных выше утверждениях, покажите теорему о корректности в целом.

2. Поясните, как соотносится $G \sqsubseteq a$ со следующими системой (подзадача a) и совокупностью (подзадача b) неравенств:

   (a)
$$\begin{cases} g_1 \sqsubseteq a \\ g_2 \sqsubseteq a \\ \dots \\ g_n \sqsubseteq a \end{cases}$$

   (b)
$$\left[\begin{array}{l} g_1 \sqsubseteq a \\ g_2 \sqsubseteq a \\ \dots \\ g_n \sqsubseteq a \end{array}\right.$$

   То есть, следует ли какое-нибудь утверждение из какого-нибудь другого, и если да, то докажите, если нет — предложите контрпример.

3. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга, если $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга.

4. Покажите или опровергните, что если $\Gamma(\mathcal{B})$ — алгебра Гейтинга, то и $\mathcal{B}$ — алгебра Гейтинга.

5. Покажите, что отображение $\varphi : \Gamma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$, определённое как:
$$\varphi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } g \sqsubset \omega \\ 1_{\mathcal{A}}, & \text{если } g = \omega \text{ или } g = 1_{\Gamma(\mathcal{A})} \end{cases}$$
   действительно является гомоморфизмом.

6. Является ли требование на сохранение нуля в определении гомоморфизма алгебр Гейтинга обязательным?

   Если точнее, пусть $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ — отображение алгебр Гейтинга, сохраняющее операции: $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$ и $\varphi(\neg a) = \neg\varphi(a)$. Всегда ли $\varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$ и $\varphi$ — гомоморфизм.

7. Покажем, что если $\alpha$ доказано в интуиционистском исчислении высказываний в стиле Гильберта (с изменённой 10 аксиомой: $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$), то оно может быть доказано и в интуиционистской.

   Для этого покажите, что:

(a) Все аксиомы 1-9 выполнены (подзадачи a.1 — a.9): если $\alpha$ — аксиома, то $\vdash_{\text{и}} \alpha$.

(b) $\vdash_{\text{и}} \alpha \to \neg\alpha \to \beta$.

(c) Покажите правило Modus Ponens: если $\vdash_{\text{и}} \alpha$ и $\vdash_{\text{и}} \alpha \to \beta$, то $\vdash_{\text{и}} \beta$.

8. Как доказать, что если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash_{\text{к}} \alpha$? Придумайте схему доказательства, для доказательства отдельных утверждений можно пользоваться теоремой о полноте К.И.В.

9. Как доказать, что если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash \alpha$ в интуиционистском исчислении высказываний в стиле Гильберта? Придумайте схему доказательства.

10. Покажем теорему Гливенко. Для этого покажем следующее:

    (a) Если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

    (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$.

    (c) Вспользовавшись предыдущими пунктами и задачами, докажите теорему Гливенко.

## Домашнее задание №4: «Исчисление предикатов»

1. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:

    (a) $\forall x.\phi \to \phi$

    (b) $(\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$

    (c) $(\forall x.\forall x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

    (d) $(\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$

    (e) $(\exists x.\phi) \to (\neg\forall x.\neg\phi)$

    (f) $(\forall x.\neg\phi) \to (\neg\exists x.\phi)$

    (g) $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$

2. Опровергните формулы $\phi \to \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

3. Все правила и аксиомы с кванторами имеют дополнительные ограничения на свободу переменных (свободу для подстановки). Для каждого из правил и каждой из аксиом найдите по примеру, когда эти ограничения существенны (они запрещают доказательства, выводящие опровержимые формулы).

4. Рассмотрим формулу $\alpha$ с двумя свободными переменными $x$ и $y$ (мы предполагаем, что эти метапеременные соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких — и приведите соответствующие доказательства или опровержения:

    (a) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall y.\forall x.\alpha$

    (b) $\exists x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\exists x.\alpha$

    (c) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists x.\forall y.\alpha$, $\exists x.\exists y.\alpha$

    (d) $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\forall x.\alpha$

5. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

    (a) Покажите, что если $x$ не входит свободно в $\alpha$, то

    $$\vdash (\alpha \lor \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \lor \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \lor \alpha) \to (\forall x.\beta \lor \alpha)$$

    (b) Покажите, что

    $$\vdash ((\forall x.\alpha) \lor (\forall y.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \lor \beta[y := q]$$

    где $p$ и $q$ — свежие переменные, не входящие в формулу. Заметим, что в частном случае $x$ может совпадать с $y$.

    (c) Докажите аналогичные утверждения для &.

    (d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\to$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

6. Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:

(a) Покажите, что если $x$ не входит свободно в $\alpha$, то

$$\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \rightarrow ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$$

(b) Покажите, что если $p$ не входит свободно в $\beta$ и $q$ не входит свободно в $\alpha$, то

$$\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\forall x.\alpha[p := x]) \vee (\forall y.\beta[q := y])$$

при условии, что $x$ свободно для подстановки вместо $p$ в $\alpha$ и $y$ свободно для подстановки вместо $q$ в $\beta$.

(c) Докажите аналогичные утверждения для &.

(d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\rightarrow$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

7. Сформулируйте и докажите аналогичные предыдущим пунктам утверждения для квантора существования.

8. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, тогда:

   (a) Докажите:

$$\vdash \psi \vee \alpha \rightarrow \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \,\&\, \alpha \rightarrow \psi \,\&\, \beta \quad \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$$

   (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.

   (c) Докажите $\vdash (\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы $\alpha$ и $\beta$ какие-либо ограничения?

   (d) Докажите $\vdash (\exists x.\alpha) \rightarrow (\exists x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы $\alpha$ и $\beta$ какие-либо ограничения?

9. Формулой исчисления предикатов с *поверхностными* кванторами (формулой в предварённой форме) назовём формулу, соответствующую нетерминалу $\psi$ в грамматике

$$\psi ::= \forall x.\psi | \exists x.\psi | \sigma$$

   где $\sigma$ — это формула, не содержащая кванторов. Иными словами, это формула, в которой все кванторы снаружи — квантор не может быть указан внутри конъюнкции, дизъюнкции, импликации или отрицания.

   Опираясь на доказанные выше леммы, докажите, что если $\alpha$ — формула, то для неё найдётся такая формула $\beta$ с поверхностными кванторами, что:

   (a) $\vdash \alpha \rightarrow \beta$

   (b) $\vdash \beta \rightarrow \alpha$

## Домашнее задание №5: арифметика

1. Докажите следующие утверждения в Аксиоматике Пеано:

   (a) $a + (b + c) = (a + b) + c$

   (b) $a \cdot b = b \cdot a$

   (c) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

   (d) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2. Будем считать, что $a \leq b$ если либо $a = 0$, либо $p \leq q$ при $p' = a$ и $q' = b$.

   (a) Покажите, что если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$.

   (b) Покажите, что если $a \leq b$ и $c \leq d$, то $a \cdot c \leq b \cdot d$.

   (c) Покажите, что при любых $a$ и $b$ выполнено $a \leq b$ или $b \leq a$.

   (d) Покажите, что если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

3. Докажите следующие утверждения в формальной арифметике:

   (a) $\vdash 0 + a = a + 0$

(b) $\vdash a = b \rightarrow a + 0' = b + 0'$

(c) $\vdash a = b \rightarrow a + c = b + c$

4. Определим новое обозначение: будем писать $x \le y$ вместо $\exists a.x+a = y$ (и воспринимать это новое обозначение как своего рода макроподстановку). Также, введём обозначение для записи натуральных чисел в формальной арифметике:

$$\overline{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \overline{(n-1)}', & n > 0 \end{cases}$$

Естественно, данные обозначения целиком принадлежат мета-языку. Покажите в формальной арифметике следующие утверждения:

(a) $\vdash a = b \rightarrow a \le b$

(b) $\vdash a \le b \rightarrow a' \le b'$

(c) $\vdash a \le b \rightarrow \forall c.a + c \le b + c$

(d) $\vdash a \le b \vee b \le a$

(e) Обозначим за $\phi_n(x)$ формулу $x = 0 \vee x = 0' \vee x = 0'' \vee \cdots \vee x = \overline{n}$. Покажите тогда, что при любом натуральном $n$ выполнено $\vdash a \le \overline{n} \rightarrow \phi_n(a)$

(f) При любом натуральном $n$ выполнено $\vdash \phi_n(a) \rightarrow a \le \overline{n}$