Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2020 года

Домашнее задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

1. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$

   (b) $(A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (C \rightarrow \neg A)$

   (c) $A \rightarrow B \vee A$

   (d) $A \rightarrow B \,\&\, B \rightarrow A$

   (e) $A \rightarrow B \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$.

2. Будем говорить, что высказывание α *следует* из высказываний $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ (и будем записывать это как $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \models \alpha$), если при любой оценке, такой, что при всех i выполнено $[\![\gamma_i]\!] = \text{И}$, также выполнено и $[\![\alpha]\!] = \text{И}$.

   Пусть даны высказывания α и β, причём $\alpha \models \beta$, но $\beta \not\models \alpha$. Придумайте «промежуточное» высказывание γ, такое, что $\alpha \models \gamma$, $\gamma \models \beta$, причём $\gamma \not\models \alpha$ и $\beta \not\models \gamma$.

3. Простые высказывания. Докажите высказывания, построив полный вывод:

   (a) $\alpha, \beta \vdash \alpha \,\&\, \beta$

   (b) $\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (c) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (d) $\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \vee \beta$

   (e) $\gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$

   (f) $\neg\alpha \vdash \neg\alpha$

   (g) $\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

4. Ассоциативность и коммутативность.

   (a) Докажите или опровергните: $\models \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\models \beta \rightarrow \alpha$.

   (b) Докажите: $\vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \beta \vee \alpha$

   (c) Докажите: $\vdash \alpha \,\&\, \beta \rightarrow \beta \,\&\, \alpha$

5. Контрапозиция. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$.

6. Докажите следующие высказывания, построив полный вывод:

   (a) $\neg\alpha, \beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$

   (b) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$

   (c) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \& \beta)$

   (d) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \vee \beta)$

   (e) $\alpha, \neg\beta \vdash \neg(\alpha \rightarrow \beta)$

   (f) $\neg\alpha, \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

   (g) $\neg\alpha, \neg\beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$

   (h) $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$

Домашнее задание №2: «интуиционистское исчисление высказываний»

1. Долги по теореме о полноте ИВ. Докажите:
   (a) $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$
   (b) $\Gamma, \alpha \vdash \phi$ и $\Gamma, \neg\alpha \vdash \phi$ влечёт $\Gamma \vdash \phi$
2. Постройте дерево вывода для следующих высказываний интуиционистской логики (в данных примерах $\neg\alpha$ — сокращение для $\alpha \to \bot$):
   (a) $\vdash \alpha \to \alpha$
   (b) $\alpha \to \beta \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$
   (c) $\vdash \alpha \vee \beta \to \beta \vee \alpha$
   (d) $\vdash \alpha \,\&\, \beta \to \beta \,\&\, \alpha$
   (e) $\vdash \neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$
3. Постройте примеры частично упорядоченных множеств:
   (a) определено $a + b$, но не $a \cdot b$;
   (b) определено $a \cdot b$, но не $a + b$;
   (c) является решёткой, но не является дистрибутивной решёткой;
   (d) является дистрибутивной, но не импликативной решёткой;
   (e) является импликативной, но не имеет нуля;
4. Решётки. Покажите, что следующие утверждения выполнены в любой решётке и при любых a, b и c:
   (a) Коммутативность: $a \cdot b = b \cdot a$ и $a + b = b + a$
   (b) Ассоциативность: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ и $a + (b + c) = (a + b) + c$
   (c) Законы поглощения: $a \cdot (a + b) = a$ и $a + (a \cdot b) = a$
   (d) Верно ли, что если $a \sqsubseteq b$, то $a + c \sqsubseteq b + c$ и $a \cdot c \sqsubseteq b \cdot c$?
   (e) Верно ли, что если $a + c \sqsubseteq b + c$ или $a \cdot c \sqsubseteq b \cdot c$, то $a \sqsubseteq b$?
5. В любой дистрибутивной решётке
   (a) $(a \cdot b) + c = (a + c) \cdot (b + c)$.
   (b) Нет *диамантов*: таких пяти элементов p, q, r, s, t, что $p \sqsubseteq q, r, s \sqsubseteq t$, и при этом q, r и s — несравнимы.

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
q \arrow[dr] & r \arrow[d] & s \arrow[dl] \\
 & p &
\end{tikzcd}$$

   При этом, если на данной диаграмме выполнено какое-то вычисление (например, $q + r = t$), то оно должно быть выполнено и в исходной дистрибутивной решётке.

   (c) Нет *пентагонов*: таких пяти элементов p, q, r, s, t, что $p \sqsubseteq q, r, s \sqsubseteq t$, также $r \sqsubseteq s$, элемент же q не сравним с r и s.

$$\begin{tikzcd}
 & t \arrow[ddl] \arrow[dr] & \\
 & & s \arrow[d] \\
q \arrow[dr] & & r \arrow[dl] \\
 & p &
\end{tikzcd}$$

При этом, если на данной диаграмме выполнено какое-то вычисление (например, $q + r = t$), то оно должно быть выполнено и в исходной дистрибутивной решётке.

6. Покажите, что в импликативной решётке
   (a) выполнена дистрибутивность;
   (b) Из $a \sqsubseteq b$ следует $b \to c \sqsubseteq a \to c$ и $c \to a \sqsubseteq c \to b$;
   (c) Из $a \sqsubseteq b \to c$ следует $a \cdot b \sqsubseteq c$;
   (d) $a \sqsubseteq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;
   (e) $b \sqsubseteq a \to b$;
   (f) $a \to b \sqsubseteq ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;
   (g) $a \sqsubseteq b \to a \cdot b$;
   (h) $a \to c \sqsubseteq (b \to c) \to (a + b \to c)$

7. Рассмотрим топологию $\langle X, \Omega \rangle$ (напомним, что здесь Ω — множество всех открытых подмножеств множества X). Рассмотрим множество Ω, частично упорядоченное отношением «быть подмножеством». Покажите, что получившаяся конструкция:
   (a) решётка;
   (b) дистрибутивная решётка;
   (c) импликативная решётка;
   (d) псевдобулева алгебра;
   (e) не является булевой алгеброй.

8. Покажите, что булева алгебра — булева алгебра.

9. Покажите, что подмножества некоторого множества, упорядоченнные отношением «быть подмножеством» — булева алгебра.

10. Покажите недоказуемость следующих высказываний интуиционистской логики, построив *конечные* псевдобулевы алгебры (т.е. частично упорядоченные множества с конечным количеством элементов), в которых следующие высказывания не истинны:
    (a) $A \vee \neg A$
    (b) $(((A \to B) \to A) \to A)$
    (c) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$
    (d) $\neg A \vee \neg\neg A$

11. Теорема о полноте алгебр Гейтинга как моделей для интуиционистского исчисления высказываний.

    Уточним определения, данные на лекции:
    (a) Будем писать $\alpha \sqsubseteq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$.
    (b) Будем писать $\alpha \approx \beta$, если имеет место $\alpha \sqsubseteq \beta$ и $\beta \sqsubseteq \alpha$.
    (c) Будем писать $[\alpha]$ для класса эквивалентности, порождённого по формуле α: $[\alpha] = \{\phi \mid \phi \approx \alpha\}$

    Интуиция здесь такая: высказывание тем ближе к 0 (к лжи), чем меньше ситуаций, в которых оно истинно. Поэтому если $\alpha \vdash \beta$, то α не больше β: возможно, β истинно ещё в каких-то ситуациях, в которых ложно α (но не наоборот).

    Тогда докажите следующие утверждения:
    (a) $(\approx)$ есть действительно отношение эквивалентности.
    (b) $[\alpha \,\&\, \beta]$ — наибольшая нижняя грань $[\alpha]$ и $[\beta]$ в алгебре Линденбаума. То есть, $\alpha \,\&\, \beta \sqsubseteq \alpha$, $\alpha \,\&\, \beta \sqsubseteq \beta$, и из $\tau \sqsubseteq \alpha$ и $\tau \sqsubseteq \beta$ следует $\tau \sqsubseteq \alpha \,\&\, \beta$. Также поясните, почему нам достаточно доказать эти утверждения для отдельных представителей, чтобы доказать свойства для классов эквивалентности.
    (c) $[\alpha \vee \beta]$ — наименьшая верхняя грань $[\alpha]$ и $[\beta]$.
    (d) $[\alpha \to \beta]$ — псевдополнение $[\alpha] \to [\beta]$.
    (e) $[\perp]$ — ноль.
    (f) $[\neg\alpha]$ — псевдодополнение до нуля $\sim [\alpha]$.

Домашнее задание №3: «корректность и дизъюнктивность интуиционистского исчисления высказываний»

1. Теорема о корректности: если $\vdash \alpha$, то $\models \alpha$ в любой алгебре Гейтинга. Поскольу в принятом нами интуиционистском исчислении высказываний доказываются не высказывания, а некоторые сложные условные выражения (записи вида $\Gamma \vdash \alpha$), то и оценкой для данных выражений мы выберем неравенство. А именно, если $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $g_i = [\![\gamma_i]\!]$ и $a = [\![\alpha]\!]$, то выражению $\Gamma \vdash \alpha$ мы сопоставим неравенство

   $$g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n \sqsubseteq a$$

   и записывать его будем как $\Gamma \sqsubseteq a$. Также, на случай $G = \varnothing$ положим, что $\varnothing \sqsubseteq a$ означает $a = 1$ (это естественно предположить, поскольку к любому G всегда можно добавить некоторое $g_0 = 1$, при этом смысл выражения $g_0 \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \dots \cdot g_n \sqsubseteq a$ останется прежним).

   Отметим, что следующие утвержедения очевидны (или уже показаны ранее):

   - *Аксиома.* $G, a \sqsubseteq a$.
   - *Введение* (&). Если $G \sqsubseteq b$ и $G \sqsubseteq c$, то $G \sqsubseteq b \cdot c$.
   - *Удаление* (&). Если $G \sqsubseteq a \cdot b$, то $G \sqsubseteq a$ и $G \sqsubseteq b$.
   - *Введение* ($\vee$). Если $G \sqsubseteq b$, то $G \sqsubseteq b + c$ и $G \sqsubseteq c + b$.

   Теперь осталось заполнить промежутки и получить полноценное доказательство. А именно, покажите, что:

   (a) *Введение* ($\to$). Если $G, a \sqsubseteq b$, то $G \sqsubseteq a \to b$. Убедитесь, что если $a \sqsubseteq b$, то $\varnothing \sqsubseteq a \to b$.

   (b) *Удаление* ($\to$). Если $G \sqsubseteq a \to b$ и $G \sqsubseteq a$, то $G \sqsubseteq b$.

   (c) *Удаление* ($\vee$). Если $G, a \sqsubseteq c$, $G, b \sqsubseteq c$ и $G \sqsubseteq a + b$, то $G \sqsubseteq c$.

   (d) *Удаление лжи.* Если $G \sqsubseteq 0$, то $G \sqsubseteq b$ при любом b.

   (e) Основываясь на доказанных выше утверждениях, покажите теорему о корректности в целом.

2. Поясните, как соотносится $G \sqsubseteq a$ со следующими системой (подзадача a) и совокупностью (подзадача b) неравенств:

   (a)
   $$\begin{cases} g_1 \sqsubseteq a \\ g_2 \sqsubseteq a \\ \dots \\ g_n \sqsubseteq a \end{cases}$$

   (b)
   $$\left[\begin{array}{l} g_1 \sqsubseteq a \\ g_2 \sqsubseteq a \\ \dots \\ g_n \sqsubseteq a \end{array}\right.$$

   То есть, следует ли какое-нибудь утверждение из какого-нибудь другого, и если да, то докажите, если нет — предложите контрпример.

3. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга, если $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга.

4. Покажите или опровергните, что если $\Gamma(\mathcal{B})$ — алгебра Гейтинга, то и $\mathcal{B}$ — алгебра Гейтинга.

5. Покажите, что отображение $\varphi : \Gamma(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$, определённое как:

   $$\varphi(g) = \begin{cases} g, & \text{если } g \sqsubset \omega \\ 1_{\mathcal{A}}, & \text{если } g = \omega \text{ или } g = 1_{\Gamma(\mathcal{A})} \end{cases}$$

   действительно является гомоморфизмом.

6. Является ли требование на сохранение нуля в определении гомоморфизма алгебр Гейтинга обязательным?

   Если точнее, пусть $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — отображение алгебр Гейтинга, сохраняющее операции: $\varphi(a \star b) = \varphi(a) \star \varphi(b)$ и $\varphi(\neg a) = \neg\varphi(a)$. Всегда ли $\varphi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$ и φ — гомоморфизм.

7. Покажем, что если α доказано в интуиционистском исчислении высказываний в стиле Гильберта (с изменённой 10 аксиомой: $\alpha \to \neg\alpha \to \beta$), то оно может быть доказано и в интуиционистской.

   Для этого покажите, что:

(a) Все аксиомы 1-9 выполнены (подзадачи а.1 — а.9): если α — аксиома, то $\vdash_{\text{и}} \alpha$.
(b) $\vdash_{\text{и}} \alpha \to \neg\alpha \to \beta$.
(c) Покажите правило Modus Ponens: если $\vdash_{\text{и}} \alpha$ и $\vdash_{\text{и}} \alpha \to \beta$, то $\vdash_{\text{и}} \beta$.

8. Как доказать, что если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash_{\text{к}} \alpha$? Придумайте схему доказательства, для доказательства отдельных утверждений можно пользоваться теоремой о полноте К.И.В.

9. Как доказать, что если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash \alpha$ в интуиционистском исчислении высказываний в стиле Гильберта? Придумайте схему доказательства.

10. Покажем теорему Гливенко. Для этого покажем следующее:

    (a) Если $\vdash_{\text{и}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.
    (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$.
    (c) Вспользовавшись предыдущими пунктами и задачами, докажите теорему Гливенко.

Домашнее задание №4: «Исчисление предикатов»

1. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:

    (a) $\forall x.\phi \to \phi$
    (b) $(\forall x.\phi) \to (\exists x.\phi)$
    (c) $(\forall x.\forall x.\phi) \to (\forall x.\phi)$
    (d) $(\forall x.\phi) \to (\neg\exists x.\neg\phi)$
    (e) $(\exists x.\phi) \to (\neg\forall x.\neg\phi)$
    (f) $(\forall x.\neg\phi) \to (\neg\exists x.\phi)$
    (g) $(\exists x.\neg\phi) \to (\neg\forall x.\phi)$

2. Опровергните формулы $\phi \to \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \to (\forall x.\phi)$

3. Все правила и аксиомы с кванторами имеют дополнительные ограничения на свободу переменных (свободу для подстановки). Для каждого из правил и каждой из аксиом найдите по примеру, когда эти ограничения существенны (они запрещают доказательства, выводящие опровержимые формулы).

4. Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными x и y (мы предполагаем, что эти метапеременные соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких — и приведите соответствующие доказательства или опровержения:

    (a) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall y.\forall x.\alpha$
    (b) $\exists x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\exists x.\alpha$
    (c) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists x.\forall y.\alpha$, $\exists x.\exists y.\alpha$
    (d) $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\forall x.\alpha$

5. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

    (a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то
    $$\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \to (\forall x.\alpha \vee \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \vee \alpha) \to (\forall x.\beta \vee \alpha)$$
    (b) Покажите, что
    $$\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \to \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$$
    где p и q — свежие переменные, не входящие в формулу. Заметим, что в частном случае x может совпадать с y.
    (c) Докажите аналогичные утверждения для &.
    (d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\to$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

6. Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:

(a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

$$\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \rightarrow ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$$

(b) Покажите, что если p не входит свободно в β и q не входит свободно в α, то

$$\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\forall x.\alpha[p := x]) \vee (\forall y.\beta[q := y])$$

при условии, что x свободно для подстановки вместо p в α и y свободно для подстановки вместо q в β.

(c) Докажите аналогичные утверждения для &.

(d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\rightarrow$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

7. Сформулируйте и докажите аналогичные предыдущим пунктам утверждения для квантора существования.

8. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, тогда:

   (a) Докажите:

$$\vdash \psi \vee \alpha \rightarrow \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \,\&\, \alpha \rightarrow \psi \,\&\, \beta \quad \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$$

   (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.

   (c) Докажите $\vdash (\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

   (d) Докажите $\vdash (\exists x.\alpha) \rightarrow (\exists x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

9. Формулой исчисления предикатов с *поверхностными* кванторами (формулой в предварённой форме) назовём формулу, соответствующую нетерминалу ψ в грамматике

$$\psi ::= \forall x.\psi | \exists x.\psi | \sigma$$

   где σ — это формула, не содержащая кванторов. Иными словами, это формула, в которой все кванторы снаружи — квантор не может быть указан внутри конъюнкции, дизъюнкции, импликации или отрицания.

   Опираясь на доказанные выше леммы, докажите, что если α — формула, то для неё найдётся такая формула β с поверхностными кванторами, что:

   (a) $\vdash \alpha \rightarrow \beta$

   (b) $\vdash \beta \rightarrow \alpha$

Домашнее задание №5: арифметика

1. Докажите следующие утверждения в Аксиоматике Пеано:

   (a) $a + (b + c) = (a + b) + c$

   (b) $a \cdot b = b \cdot a$

   (c) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

   (d) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

2. Будем считать, что $a \leq b$ если либо $a = 0$, либо $p \leq q$ при $p' = a$ и $q' = b$.

   (a) Покажите, что если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$.

   (b) Покажите, что если $a \leq b$ и $c \leq d$, то $a \cdot c \leq b \cdot d$.

   (c) Покажите, что при любых a и b выполнено $a \leq b$ или $b \leq a$.

   (d) Покажите, что если $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$.

3. Докажите следующие утверждения в формальной арифметике:

   (a) $\vdash 0 + a = a + 0$

(b) $\vdash a = b \to a + 0' = b + 0'$

(c) $\vdash a = b \to a + c = b + c$

4. Определим новое обозначение: будем писать $x \le y$ вместо $\exists a.x+a = y$ (и воспринимать это новое обозначение как своего рода макроподстановку). Также, введём обозначение для записи натуральных чисел в формальной арифметике:

$$\overline{n} = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ (\overline{n-1})', & n > 0 \end{cases}$$

Естественно, данные обозначения целиком принадлежат мета-языку. Покажите в формальной арифметике следующие утверждения:

(a) $\vdash a = b \to a \le b$

(b) $\vdash a \le b \to a' \le b'$

(c) $\vdash a \le b \to \forall c.a + c \le b + c$

(d) $\vdash a \le b \vee b \le a$

(e) Обозначим за $\phi_n(x)$ формулу $x = 0 \vee x = 0' \vee x = 0'' \vee \dots \vee x = \overline{n}$. Покажите тогда, что при любом натуральном n выполнено $\vdash a \le \overline{n} \to \phi_n(a)$

(f) При любом натуральном n выполнено $\vdash \phi_n(a) \to a \le \overline{n}$

Домашнее задание №6: выразимость и представимость в арифметике

Введем обозначение. Если в тексте вводится некоторая формула $\alpha(x_1, \dots x_n)$, то по умолчанию считается, что эта формула имеет n свободных переменных с именами $x_1, \dots x_n$

Внутри же выражения запись $\alpha(y_1, \dots y_n)$ мы будем трактовать, как $\alpha[x_1 := y_1, ...x_n := y_n]$, при этом мы подразумеваем, что $y_1, \dots y_n$ свободны для подстановки вместо $x_1, \dots x_n$ в α.

Также, запись $B(x_1, \dots x_n) \equiv \alpha(x_1, \dots x_n)$ будет означать, что мы определяем новую формулу с именем B и n свободными переменными $x_1, \dots x_n$. Данная формула должна восприниматься только как сокращение записи, макроподстановка.

Определение 1. *Отношение R называется выразимым (в формальной арифметике), если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_n)$ с n свободными переменными, что для любых натуральных чисел k_1 ... k_n*

1. *если $(k_1, \dots k_n) \in R$, то доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$*
2. *если $(k_1, \dots k_n) \notin R$, то доказуемо $\neg\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n})$.*

Определение 2. *Введем следующее сокращение записи: пусть $\exists! y.\phi(y)$ означает*

$$(\exists y.\phi(y))\ \&\ \forall a.\forall b.\phi(a)\ \&\ \phi(b) \to a = b$$

Здесь a и b — некоторые переменные, не входящие в формулу ϕ свободно.

Определение 3. *Функция f от n аргументов называется представимой в формальной арифметике, если существует такая формула $\alpha(x_1, \dots x_{n+1})$ с $n + 1$ свободными пременными, что для любых натуральных чисел k_1 ... k_{n+1}*

1. *$f(k_1, \dots k_n) = k_{n+1}$ тогда и только тогда, когда доказуемо $\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_{n+1}})$.*
2. *Доказуемо $\exists! b.\alpha(\overline{k_1}, \dots \overline{k_n}, b)$*

Задания:

1. Покажите, что пустое отношение (без единой пары) представимо в формальной арифметике.

2. Покажите, что функция $f(x) = 0$ представима в формальной арифметике.

3. Покажите, что отношение равенства представима в формальной арифметике формулой $x_1 = x_2$. А именно:

   (a) Покажите, что если $x_1 = x_2$, то $\vdash \overline{x_1} = \overline{x_2}$;

(b) Покажите, что если $x_1 \neq x_2$, то $\vdash \neg\overline{x_1} = \overline{x_2}$.

4. Покажите, что функция $f(x) = x+1$ представима в формальной арифметике формулой $x_2 = x_1 + 1$. А именно:

   (a) Покажите, что $\vdash \overline{x+1} = \overline{x} + 1$;

   (b) Покажите, что $\exists! x_2 . x_2 = x_1 + 1$.

   (c) Покажите, что если $y \neq x+1$, то $\vdash \neg\overline{y} = \overline{x} + 1$.

5. Назовём характеристическим отношением для функции f отношение

$$C_f = \{x_1, \ldots, x_n, y | f(x_1, \ldots, x_n) = y\}$$

   Покажите, что:

   (a) Если функция f представима в формальной арифметике, то C_f выразимо в формальной арифметике;

   (b) Если характеристическое отношение C_f некоторой функции f выразимо в формальной арифметике, то функция f представима в формальной арифметике.

6. Какую формулу выбрать для выражения отношения «два числа имеют одинаковую чётность» в формальной арифметике? Наметьте план доказательства выразимости.

7. Какую формулу выбрать для представления функции «деление с остатком»? Наметьте план доказательства представимости.

8. Какую формулу выбрать для представления функции «факториал»? Наметьте план доказательства представимости.

Домашнее задание №7: рекурсивные функции

Определение 4. *Рассмотрим следующие примитивы.*

1. $Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ Z(x) = 0$

2. $N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0,\ N(x) = x'$

3. *Проекция.* $U_i^n : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0,\ U_i^n(x_1, ...x_n) = x_i$

4. *Подстановка. Если* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g_1, ...g_n : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$*, то* $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle : \mathbb{N}_0^m \to \mathbb{N}_0$*. При этом* $S\langle f, g_1, ...g_n\rangle(x_1, ...x_m) = f(g_1(x_1, ...x_m), ...g_n(x_1, ...x_m))$

5. *Примитивная рекурсия. Если* $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$*, то* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$*, при этом*

$$R\langle f, g\rangle(x_1, ...x_n, y) = \begin{cases} f(x_1, ...x_n) & , y = 0 \\ g(x_1, ...x_n, y-1, R\langle f, g\rangle(x_1, ...x_n, y-1)) & , y > 0 \end{cases}$$

6. *Минимизация. Если* $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$*, то* $\mu\langle f\rangle : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$*, при этом* $\mu\langle f\rangle(x_1, ...x_n)$ *— такое минимальное число* y*, что* $f(x_1, ...x_n, y) = 0$*. Если такого* y *нет, результат данного примитива неопределен.*

Первые три из них — обычные функции на натуральных числах. Оставшиеся три подобны шаблонам в C++ или функциям высшего порядка в Хаскеле/Окамле.

Например, функция $f(x) = x+2$ может быть выражена через данные примитивы так: $f(x) = S\langle N, N\rangle(x)$.

Определение 5. *Функция называется примитивно-рекурсивной, если возможно построить выражение только из первых пяти примитивов, такое, что оно при всех аргументах возвращает значение, равное значению требуемой функции.*

Если функция может быть выражена с помощью всех шести примитивов, она называется рекурсивной.

Данное задание в целом сводится к демонстрации того, что различные функции являются примитивно-рекурсивными (рекурсивными). В отличие от предыдущих заданий, в данном задании это необходимо показывать при помощи демонстрации соответствующей программы на языке примитивно-рекурсивных (рекурсивных) функций. Данный язык, например, легко эмулируется языком шаблонов C++ (как подсказывает синтаксис рекурсивных выражений), также возможно использовать любой другой интерпретатор.

1. Покажите, что следующие функции — примитивно-рекурсивные:

   (a) сложение;

   (b) умножение;

   (c) ограниченное вычитание 1 (0 для 0, для остальных натуральных чисел совпадает с обычным вычитанием 1);

   (d) ограниченное вычитание (0, если $a < b$, и $a - b$, если $a \geq b$);

   (e) меньше: $m(a, b) = 1$, если $a < b$.

   (f) побитовая конъюнкция (операция `&` в языке Си);

   (g) побитовое «исключающее или»;

   (h) конструкция $\text{first}\langle f \rangle(x_1, \ldots, x_k, n)$: возвращает минимальный $t < n$, что $f(x_1, \ldots, x_k, t) \neq 0$, либо n, если функция равна 0 при всех $t \in 0 \ldots n - 1$;

   (i) деление нацело (деление с округлением вниз);

   (j) остаток от деления нацело;

   (k) возведение в степень;

   (l) *ограниченный логарифм* $\text{plog}_k(n)$ — максимальное p, что k^p делится на n. Например, $\text{plog}_6(72) = 2$;

   (m) факториал;

   (n) упорядоченную пару, т.е. набор из трёх функций (одно задание, на подпункты не делится):

      i. левая проекция: $\pi_l(\langle a, b \rangle) = a$;

      ii. правая проекция: $\pi_r(\langle a, b \rangle) = a$;

      iii. построение пары: $\langle\rangle(a, b) = \langle a, b \rangle$;

   (o) проверку числа на простоту;

   (p) простое число номер k.

2. Будем называть гёделевой нумерацией списка следующую конструкцию. Пусть $a_0, \ldots, a_{n-1}$ — некоторый список натуральных чисел. Пусть p_i — это простое число номер i (естественно, $p_0 = 2$). Тогда гёделева нумерация этого списка $\ulcorner a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \urcorner = 2^a \cdot 3^a \cdot \cdots \cdot p_{n-1}^{a_{n-1}}$.

   Покажите, что следующие функции являются примитивно-рекурсивными:

   (a) nil: гёделев номер пустого списка;

   (b) $\text{cons}(\ulcorner a_0, \ldots, a_{n-1} \urcorner, x) = \ulcorner x, a_0, \ldots, a_{n-1} \urcorner$;

   (c) head: функция, возвращающая голову списка;

   (d) tail: функция, возвращающая хвост списка;

   (e) получение элемента списка с номером k: $(\ulcorner a_0, \ldots, a_{n-1} \urcorner)_k = a_k$

   (f) len: длина списка;

   (g) (@): конкатенация списков;

3. Назовём функцией Аккермана следующую функцию:

   Определение 6. *Функцией* Аккермана *мы назовем так определенную функцию:*

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1, & \textit{если } m = 0 \\ A(m - 1, 1), & \textit{если } m > 0, n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)), & \textit{если } m > 0, n > 0 \end{cases}$$

   Покажите, что функция Аккермана — рекурсивная (8 баллов). К сожалению, примитивно-рекурсивной данная функция не является.