Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2021 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

В рамках данного задания мы рассматриваем классическое исчисление высказываний с классическим множеством истинностных значений $\{И, Л\}$.

1. Будем говорить, что высказывание общезначимо, если выполнено при любой оценке. Высказывание выполнимо, если существует оценка, при которой оно истинно. Высказывание опровержимо, если существует оценка, при которой оно ложно. Высказывание невыполнимо, если нет оценки, при которой оно истинно. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$

   (b) $(A \to \neg B) \vee (B \to \neg C) \vee (C \to \neg A)$

   (c) $(((P \to Q) \to P) \to P)$

   (d) $\neg A \mathbin{\&} \neg\neg A$

   (e) $\neg(A \mathbin{\&} \neg A)$

   (f) A

   (g) $A \to A$

   (h) $A \to \neg A$

   (i) $(A \to B) \vee (B \to A)$

2. Простые доказательства. Рассмотрим доказательства в классическом исчислении высказываний, здесь используются следующие десять схем аксиом:

   (1) $\phi \to (\psi \to \phi)$
   (2) $(\phi \to \psi) \to (\phi \to \psi \to \pi) \to (\phi \to \pi)$
   (3) $\phi \to \psi \to \phi \mathbin{\&} \psi$
   (4) $\phi \mathbin{\&} \psi \to \phi$
   (5) $\phi \mathbin{\&} \psi \to \psi$
   (6) $\phi \to \phi \vee \psi$
   (7) $\psi \to \phi \vee \psi$
   (8) $(\phi \to \pi) \to (\psi \to \pi) \to (\phi \vee \psi \to \pi)$
   (9) $(\phi \to \psi) \to (\phi \to \neg\psi) \to \neg\phi$
   (10) $\neg\neg\phi \to \phi$

   Докажите:

   (a) $\vdash A \to A$

   (b) $\vdash (A \to A \to B) \to (A \to B)$

   (c) $\vdash \neg(A \mathbin{\&} \neg A)$

   (d) $\vdash A \mathbin{\&} B \to B \mathbin{\&} A$

   (e) $\vdash A \to \neg\neg A$

   (f) $A \mathbin{\&} \neg A \vdash B$

3. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Докажите с её использованием:

   (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$

   (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

   (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

   (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \to B)$

   (f) $\neg A, B \vdash A \to B$

   (g) $\neg A, \neg B \vdash A \to B$

(h) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$

(i) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$

(j) Закон контрапозиции: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

4. Докажите:

   (a) $\vdash A \vee \neg A$ *(правило исключённого третьего)*

   (b) $\vdash A \,\&\, B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$

   (c) $\vdash \neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$

   (d) $\vdash A \,\&\, B \to A \vee B$

   (e) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*

5. Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\alpha \not\equiv \beta$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\alpha \not\equiv \gamma$ и $\beta \not\equiv \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о полноте и корректности классической логики, интуиционистская логика.

1. Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.

2. Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.

3. *О законе исключённого третьего.* Покажите, что в интуиционистском исчислении высказываний доказуемо следующее:

   (a) $((A \to B) \to A) \to A \vdash \neg\neg A \to A$

   (b) $A \vee \neg A \vdash \neg\neg A \to A$

4. Предложим следующий способ оценки интуиционистских высказываний. Фиксируем некоторое топологическое пространство с носителем X и топологией (множеством всех открытых множеств) $\Omega \subseteq \wp(X)$. Множеством истинностных значений выберем Ω. Соответственно, функция оценок для переменных задаётся как $f_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \to \Omega$. Определим функции оценок для связок так:

$$\begin{array}{rcl} f_{\to}(a,b) & := & ((X \setminus a) \cup b)^{\circ} \\ f_{\&}(a,b) & := & a \cap b \\ f_{\vee}(a,b) & := & a \cup b \\ f_{\neg}(a) & := & (X \setminus a)^{\circ} \end{array}$$

   Будем считать высказывание истинным, если его оценка — всё пространство X. Например, при $X = \mathbb{R}$ и $A := (0,\infty), B := (-\infty, 1)$ высказывание $A \vee B$ истинно, но при $A := (0,\infty), B := (-\infty, 0)$ оно ложно.

   Известно, что интуиционистское исчисление высказываний корректно и полно при таком способе оценки — в частности это значит, что если формула α недоказуема, то найдётся такое топологическое пространство X и такие оценки для пропозициональных переменных, что $[\![\alpha]\!] \neq X$. Это позволяет показывать недоказуемость высказываний. Например, $\nvdash A \vee \neg A$: возьмём $X = \mathbb{R}$ и $A := (0,\infty)$. Тогда $[\![\neg A]\!] = (-\infty, 0)$ и $[\![A \vee \neg A]\!] = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}$.

   Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:

   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$

   (b) $(((A \to B) \to A) \to A)$

   (c) $\neg\neg A \to A$

   (d) $(A \to (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \to (B \vee \neg B))$

   (e) $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$

5. Можно ли, имея $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$, доказать закон исключённого третьего в интуиционистской логике?

6. Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$, ведь $\alpha \to \beta \vdash \neg(\alpha \mathbin{\&} \neg\beta)$ и $\neg(\alpha \mathbin{\&} \neg\beta) \vdash \alpha \to \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:

   (a) конъюнкцию?

   (b) дизъюнкцию?

   (c) импликацию?

   (d) отрицание?

   Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это.

7. Назовём теорию *противоречивой*, если в ней найдётся такое α, что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$. Покажите, что исчисления высказываний (классическое и интуиционистское) противоречивы тогда и только тогда, когда в них доказуема любая формула.

8. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α, если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

   (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.

   (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \to \alpha)$

   (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \to \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$

   (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

Задание №3. Интуиционистская логика и натуральный вывод.

1. Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как $\vdash_{\text{и}}$, а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\text{e}}$.

   Заметим, что хоть языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв $\perp \Rightarrow A \mathbin{\&} \neg A$ и $\neg\alpha \Rightarrow (\alpha \to \perp)$. Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами: $\alpha', \beta', \dots$.

   (a) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{e}} \alpha'$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.

   (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{e}} \alpha'$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$.

2. Рассмотрим $\mathbb{N}_0$ (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$ и $(\cdot)$ в данной решётке, есть ли в ней псевдодополнение, определены ли 0 или 1? Приведите несколько свойств традиционных определений $(+)$ и $(\cdot)$, которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и несколько свойств, которые перестанут выполняться.

3. Постройте следующие примеры:

   (a) непустого частично-упорядоченного множества, не имеющего операций $(+)$ и $(\cdot)$ ни для каких элементов; имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего $(\cdot)$ для некоторых; имеющего опреацию $(\cdot)$ для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.

   (b) решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой; дистрибутивной, но не импликативной решётки; импликативной решётки без 0.

4. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

   (a) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

   (b) монотонность: пусть $a \le b$ и $c \le d$, тогда $a + c \le b + d$ и $a \cdot c \le b \cdot d$;

   (c) *Законы поглощения:* $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;

(d) $a \le b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \to b = 1$;

(e) из $a \le b$ следует $b \to c \le a \to c$ и $c \to a \le c \to b$;

(f) из $a \le b \to c$ следует $a \cdot b \le c$;

(g) $b \le a \to b$ и $a \to (b \to a) = 1$;

(h) $a \to b \le ((a \to (b \to c)) \to (a \to c))$;

(i) $a \le b \to a \cdot b$ и $a \to (b \to (a \cdot b)) = 1$

(j) $a \to c \le (b \to c) \to (a + b \to c)$

5. Покажите, что импликативная решётка дистрибутивна.

6. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$) также выполнено и $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.

7. Рассмотрим топологическое пространство $\langle X, \Omega\rangle$, упорядочим его топологию Ω отношением $\subseteq$. Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество X открыто), то булевой алгеброй.

8. Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:
$$\begin{array}{ccc} [\![\alpha \,\&\, \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \cdot [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \vee \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] + [\![\beta]\!] \\ [\![\alpha \to \beta]\!] & = & [\![\alpha]\!] \to [\![\beta]\!] \\ [\![\neg\alpha]\!] & = & [\![\alpha]\!] \to 0 \\ [\![\perp]\!] & = & 0 \end{array}$$

9. Пусть задано отношение *предпорядка* R (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве A. Напомним несколько определений:

   - определим отношение $R^= := \{\langle x, y\rangle \mid xRy \text{ и } yRx\}$;
   - $[a]_{R^=} := \{x \mid aR^=x\}$ — класс эквивалентности, порождённый элементом a;
   - фактор-множество $A/R^= := \{[a]_{R^=} \mid a \in A\}$;
   - на $A/R^=$ можно перенести отношение $R^* := \{\langle [a], [b]\rangle \mid aRb\}$.

   Покажите, что: отношение $R^=$ — отношение эквивалентности; если $x \in [a]_{R^=}$, $y \in [b]_{R^=}$ и aRb, то xRy; отношение R^* — отношение порядка на $A/R^=$.

10. Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:

   (a) Покажите, что отношение $(\approx)$ — отношение эквивалентности (напомним, что $\alpha \le \beta$, если $\alpha \vdash \beta$, а $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.

   (b) Покажите, что $[\alpha]_\approx \cdot [\beta]_\approx = [\alpha \,\&\, \beta]_\approx$. Для этого, например, можно показать:
   - $\alpha \,\&\, \beta \le \alpha$;
   - если $\gamma \le \alpha$ и $\gamma \le \beta$, то $\gamma \le \alpha \,\&\, \beta$;
   - операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.

   (c) Покажите, что $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$.

   (d) Покажите, что $[\alpha] \to [\beta] = [\alpha \to \beta]$.

   (e) Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.

Задание №4. Модели Крипке, нетабличность и дизъюнктивность ИИВ.

1. Рассмотрим табличную модель $\mathfrak{V}$ с n истинностными значениями, и с выделенным значением T для истины. Покажите, что
$$\models \bigvee_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n+1} (P_i \to P_j) \,\&\, (P_j \to P_i)$$
В частности, покажите, что в любой корректной модели если $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$, то $[\![\alpha \to \beta]\!] = T$; если $[\![\gamma]\!] = [\![\delta]\!] = T$, то $[\![\gamma \,\&\, \delta]\!] = T$; если $[\![\gamma]\!] = T$, то $[\![\gamma \vee \eta]\!] = [\![\eta \vee \gamma]\!] = T$.

2. Покажите, что какая бы ни была формула α и модель Крипке, если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.
3. Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.
   (a) $P \vee \neg P$;
   (b) $\neg\neg P \to P$;
   (c) $P \vee \neg P \vee \neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$;
   (d) $((P \to Q) \to P) \to P$;
   (e) $(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$;
   (f) $\neg(\neg A \,\&\, \neg B) \to A \vee B$;
   (g) $(\neg A \vee B) \to (A \to B)$;
   (h) $(A \to B) \to (\neg A \vee B)$;
   (i) $\neg\bot$.
4. Рассмотрим некоторую модель Крипке $\langle \mathfrak{W}, \preceq, \Vdash \rangle$. Пусть $\Omega = \{\mathcal{W} \subseteq \mathfrak{W} \mid \text{если } W_i \in \mathcal{W} \text{ и } W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in \mathcal{W}\}$. Пусть $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha\}$ (множество миров, где вынуждена формула α).
   (a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство. Докажите её.
   (b) Пусть $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$ и $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$ через $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ и покажите, что они также открыты.
   (c) Пусть $\mathcal{W}_\alpha$ и $\mathcal{W}_\beta$ — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \to \beta}$ через них и покажите, что оно также открыто.
   (d) Покажите, что Ω — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы α множество миров $\mathcal{W}_\alpha$, где она вынуждена, всегда открыто ($\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для $Q \in \Omega$ существует формула α, что $\mathcal{W}_\alpha = Q$).
5. Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание $\neg\neg P \to P$. Постройте соответствующую ему табличную модель.
6. Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров $\mathfrak{W}$ упорядочено как дерево: (a) существует наименьший мир W_0; (b) для любого $W_i \neq W_0$ существует единственный предшествующий мир $W_k : W_k \prec W_i$.
   (a) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
   (b) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
   (c) Покажите, что для любого натурального n найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с n мирами.
7. Будем говорить, что топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$ *связно*, если нет таких открытых множеств A и B, что $X = A \cup B$, но $A \cap B = \varnothing$. Пусть задана некоторая модель Крипке. Докажите, что соответствующее модели Крипке топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда её граф миров связен в смысле теории графов.
8. Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в КИВ высказывания).
9. Пусть заданы алгебры Гейтинга $\mathcal{A}, \mathcal{B}$, гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ и согласованные оценки $[\![]\!]_\mathcal{A}$ и $[\![]\!]_\mathcal{B}$: $\varphi([\![\alpha]\!]_\mathcal{A}) = [\![\alpha]\!]_\mathcal{B}$.
   (a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если $a_1 \preceq a_2$, то $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$.
   (b) Покажите, что если $[\![\alpha]\!]_\mathcal{A} = 1_\mathcal{A}$, то $[\![\alpha]\!]_\mathcal{B} = 1_\mathcal{B}$.
10. Пусть заданы алгебры Гейтинга $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Всегда ли можно построить гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$?
11. Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.
12. Пусть $\mathcal{A}$ — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что) $\Gamma(\mathcal{A})$ будет булевой алгеброй?

Задание №5.

1. *Алгебраические типы* — это семейство составных типов, позволяющих строить «алгебраические» выражения на типах:

название	обозначение	алгебраический смысл
тип-сумма, «алгебраический»	$\alpha \vee \beta$	$\alpha + \beta$
тип-произведение, пара	$\alpha \,\&\, \beta$	$\alpha \times \beta$
тип-степень, функция	$\alpha \rightarrow \beta$	β^{α}

   Название «алгебраический» закрепилось в первую очередь за типом-суммой (видимо потому, что остальные типы имеют устоявшиеся названия), однако, может быть отнесено и к другим типам.

   Поясните «типовый» (программистский) смысл следующих алгебраических тождеств — и постройте программы, их доказывающие: $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$, $\gamma^{\alpha \times \beta} = (\gamma^{\alpha})^{\beta}$ (*карринг*), $\gamma^{\alpha+\beta} = \gamma^{\alpha} \times \gamma^{\beta}$.

2. Докажите следующие формулы в исчислении предикатов:

   (a) $\forall x.\phi \rightarrow \phi$

   (b) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\exists x.\phi)$

   (c) $(\forall x.\forall x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$

   (d) $(\forall x.\phi) \rightarrow (\neg\exists x.\neg\phi)$

   (e) $(\exists x.\phi) \rightarrow (\neg\forall x.\neg\phi)$

   (f) $(\forall x.\neg\phi) \rightarrow (\neg\exists x.\phi)$

   (g) $(\exists x.\neg\phi) \rightarrow (\neg\forall x.\phi)$

3. Опровергните формулы $\phi \rightarrow \forall x.\phi$ и $(\exists x.\phi) \rightarrow (\forall x.\phi)$

4. Рассмотрим формулу α с двумя свободными переменными x и y (мы предполагаем, что эти метапеременные соответствуют разным переменным). Определите, какие из сочетаний кванторов выводятся из каких — и приведите соответствующие доказательства или опровержения:

   (a) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall y.\forall x.\alpha$

   (b) $\exists x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\exists x.\alpha$

   (c) $\forall x.\forall y.\alpha$, $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists x.\forall y.\alpha$, $\exists x.\exists y.\alpha$

   (d) $\forall x.\exists y.\alpha$, $\exists y.\forall x.\alpha$

5. Научимся выносить квантор всеобщности «наружу»:

   (a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

   $$\vdash (\alpha \vee \forall x.\beta) \rightarrow (\forall x.\alpha \vee \beta) \quad \text{и} \quad \vdash ((\forall x.\beta) \vee \alpha) \rightarrow (\forall x.\beta \vee \alpha)$$

   (b) Покажите, что

   $$\vdash ((\forall x.\alpha) \vee (\forall y.\beta)) \rightarrow \forall p.\forall q.\alpha[x := p] \vee \beta[y := q]$$

   где p и q — свежие переменные, не входящие в формулу. Заметим, что в частном случае x может совпадать с y. Нужно ли наложить какие-нибудь ещё ограничения на переменные?

   (c) Докажите аналогичные утверждения для $\&$.

   (d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\rightarrow$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

6. Научимся вносить квантор всеобщности «внутрь»:

   (a) Покажите, что если x не входит свободно в α, то

   $$\vdash (\forall x.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \forall x.\beta) \quad \text{и} \quad \vdash (\forall x.\beta \vee \alpha) \rightarrow ((\forall x.\beta) \vee \alpha)$$

   (b) Покажите, что если p не входит свободно в β и q не входит свободно в α, то

   $$\vdash (\forall p.\forall q.\alpha \vee \beta) \rightarrow (\forall x.\alpha[p := x]) \vee (\forall y.\beta[q := y])$$

   при условии, что x свободно для подстановки вместо p в α и y свободно для подстановки вместо q в β. Нужно ли наложить какие-нибудь ещё ограничения на переменные?

(c) Докажите аналогичные утверждения для &.

(d) Как будут сформулированы аналогичные утверждения для $\rightarrow$ и $\neg$? Сформулируйте и докажите их.

7. Научимся работать со спрятанными глубоко кванторами. Пусть $\vdash \alpha \rightarrow \beta$, тогда:

   (a) Докажите:

$$\vdash \psi \vee \alpha \rightarrow \psi \vee \beta \quad \vdash \psi \,\&\, \alpha \rightarrow \psi \,\&\, \beta \quad \vdash (\psi \rightarrow \alpha) \rightarrow (\psi \rightarrow \beta) \quad \vdash (\beta \rightarrow \psi) \rightarrow (\alpha \rightarrow \psi)$$

   (b) Сформулируйте и докажите аналогичное свойство для отрицания.

   (c) Докажите $\vdash (\forall x.\alpha) \rightarrow (\forall x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

   (d) Докажите $\vdash (\exists x.\alpha) \rightarrow (\exists x.\beta)$. Надо ли наложить на формулы α и β какие-либо ограничения?

Задание №6.

1. Простые задачи. Каждый пункт — на 1 балл. Имеется ли свобода для подстановки в следующих примерах?

   (a) $\forall x.P(x,y) \rightarrow Q(y,x)$ $[x := y]$

   (b) $\forall x.P(x,y)$ $[z := x]$

   (c) $\forall z.(\forall y.P(z)) \rightarrow P(z)$ $[z := y]$

   (d) $(\forall y.(\forall x.P(z))) \vee P(z)$ $[z := y]$

   (e) $(\forall y.P(a)) \vee P(b)$ $[a := y]$

2. Пусть выполняется замена x на θ в формуле α.

   (a) Докажите, что если свобода для подстановки есть, то $[\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} = [\![\alpha[x := \theta]]\!]$.

   (b) Постройте пример, когда $[\![\alpha]\!]^{x:=[\![\theta]\!]} \neq [\![\alpha[x := \theta]]\!]$.

3. Будем говорить, что формула α *следует* из контекста Γ, если при любой оценке, такой, что при всех $\gamma \in \Gamma$ выполнено $[\![\gamma]\!] =$ И, также выполнено и $[\![\alpha]\!] =$ И.

   Возможно показать, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$, при условии, что в выводе отсутствуют применения правил для кванторов по свободным переменным из контекста. Доказательство аналогично таковому для исчисления высказываний, однако, требуется разобрать два новых случая:

   (a) Покажите, что формулы, полученные из 11 и 12 схем аксиом, всегда общезначимы.

   (b) Покажите, что формулы, полученные применением правил для кванторов из общезначимых утверждений, также окажутся общезначимыми.

   Заметим, что если в выводе присутствуют запрещённые выше применения правил, то получившееся выражение может оказаться некорректным:

   (1) $x = 0 \vdash x = 0$
   (2) $x = 0 \vdash A \rightarrow A \rightarrow A$
   (3) $x = 0 \vdash (x = 0) \rightarrow (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (x = 0)$
   (4) $x = 0 \vdash (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (x = 0)$
   (5) $x = 0 \vdash (A \rightarrow A \rightarrow A) \rightarrow (\forall x.x = 0)$ запрещённое применение правила для $\forall$
   (6) $x = 0 \vdash \forall x.x = 0$

   При этом $x = 0 \models x = 0$, но $x = 0 \not\models \forall x.x = 0$.

   Почему мы вводим сложные ограничения, а не запретим, например, незамкнутые гипотезы с самого начала? Мы не хотим чрезмерно ограничивать язык.

4. Пусть некоторая формула выполнена на всех оценках с двухэлементным предметным множеством D. Верно ли, что эта формула общезначима?

5. Пусть формула выполнена на всех оценках с конечным предметным множеством D. Верно ли, что эта формула общезначима?

Задание №7.

1. Покажите, что связанную переменную под квантором можно переименовывать: $(\forall x.\varphi) \to \forall y.(\varphi[x := y])$ и $(\exists x.\varphi) \to \exists y.(\varphi[x := y])$, если y свободен для подстановки вместо x в φ.

2. Для следующих формул найдите эквивалентные им формулы с поверхностными кванторами и наметьте план доказательства эквивалентности (укажите, какие и в каком порядке применять леммы из предыдущего задания).

   (a) $((\forall x.P(x)) \to P(x)) \to P(x)$

   (b) $((\forall x.P(x)) \to (\forall x.Q(x))) \to (\forall x.R(x))$

   (c) $(\neg\forall x.P(x)) \vee (\exists y.\forall x.Q(x, y))$

3. Рассмотрим полное непротиворечивое множество формул исчисления предикатов Γ. Рассмотрим оценку формул, определённую на лекции (D — множество всех строк, составленных из функциональных символов, $[\![P(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)]\!] =$ И тогда и только тогда, когда $P(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in \Gamma$ и т.п.). Пусть для любой формулы α с не более чем n связками выполнено, что $[\![\alpha]\!] =$ И тогда и только тогда, когда $\alpha \in \Gamma$. Тогда покажите:

   (a) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\alpha \,\&\, \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\alpha \,\&\, \beta]\!] =$ И

   (b) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\alpha \vee \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\alpha \vee \beta]\!] =$ И

   (c) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\alpha \to \beta \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\alpha \to \beta]\!] =$ И

   (d) Пусть α и β имеют не более n связок. Тогда $\neg\alpha \in \Gamma$ тогда и только тогда, когда $[\![\neg\alpha]\!] =$ И

Задание №8.

1. *Теорией первого порядка* назовём исчисление предикатов с расширенным языком (добавлены новые функциональные и предикатные символы) и набором аксиом. Добавленные символы и аксиомы мы назовём *нелогическими* или *математическими*, в противоположность *логическим* аксиомам и символам из исчисления высказываний.

   Введём теорию первого порядка для теории групп, добавив к исчислению предикатов двуместный функциональный символ $(\cdot)$, одноместный функциональный символ $(^{-1})$, константу (нульместный функциональный символ) 1, двуместный предикатный символ $(=)$ и следующие нелогические схемы аксиом:

   - Схемы аксиом равенства: $x = y \,\&\, x = z \to y = z$ (транзитивность); $x = y \to x \cdot z = y \cdot z$; $x = y \to z \cdot x = z \cdot y$ (правое и левое домножение).
   - Схема аксиом ассоциативности: $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
   - Схемы аксиом обратного элемента: $x^{-1} \cdot x = 1$; $x \cdot x^{-1} = 1$.
   - Схемы аксиом нейтрального элемента: $1 \cdot x = x$; $x \cdot 1 = x$.

   Докажите следующее:

   (a) $\vdash 1 = 1$

   (b) $\vdash \forall a.a = a$

   (c) $\vdash \forall a.\forall b.a = b \to b = a$

   (d) $\vdash 1^{-1} = 1$

   (e) $\vdash \forall a.(a^{-1})^{-1} = a$

   (f) $\vdash \forall a.\forall b.a \cdot b = 1 \to b = a^{-1}$

   (g) $\vdash \forall a.\forall b.\forall c.c \cdot a = c \cdot b \to a = b$

   (h) $a \cdot p = b, a \cdot q = b \vdash p = q$

2. Назовём *структурой* теории первого порядка такую модель исчисления предикатов, что для всех нелогических функциональных и предикатных символов теории в ней задана оценка. Назовём *моделью* теории первого порядка такую структуру, что все нелогические аксиомы данной теории в ней истинны.

   Постройте модель теории групп и структуру теории групп, не являющуюся моделью теории групп.

3. Рассмотрим теорию групп с добавленной аксиомой $\forall a.\forall b.a \cdot b = 1$. Докажите, что $\vdash \forall a.\forall b.a = b$. Верно ли, что предметное множество данной модели также одноэлементное? Что можно сказать про его мощность, если это не так?

4. Определите теорию первого порядка, формализующую решётки. Докажите в ней закон поглощения: $\forall a.\forall b.a + a \cdot b = a$.

Задание №9. Арифметика.

1. Постройте множества N, удовлетворяющие следующим изменённым аксиоматикам Пеано:
   (a) не выполняется аксиома индукции — покажите, что остальные аксиомы выполняются;
   (b) без инъективности операции $(')$ — покажите, что остальные аксиомы выполняются; обязательно ли в таком множестве 0 единственен?
   (c) с выделенным элементом 0, не имеющим свойства отсуствия предшественников (т.е. существует $x : x' = 0$) — покажите, что остальные аксиомы выполняются.

2. Покажите в аксиоматике Пеано:
   (a) ассоциативность сложения;
   (b) коммутативность умножения;
   (c) дистрибутивность $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

3. Рассмотрим аксиоматику Пеано. Определим отношение «меньше или равно» так: $0 \leqslant a$ и $a' \leqslant b'$, если $a \leqslant b$. Покажите, что:
   (a) $x \leqslant x + y$;
   (b) $a'' + b'' \leqslant (a'') \cdot (b'')$;
   (c) Если существует n, что $x + n = y$, то $x \leqslant y$.
   (d) Будем говорить, что a делится на b с остатком, если существуют такие p и q, что $a = b \cdot p + q$ и $0 \leqslant q < b$. Покажите, что p и q всегда существуют и единственны, если $b > 0$.

4. Докажите в формальной арифметике:
   (a) $\vdash \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{4}$ (теперь вы знаете правду);
   (b) $\vdash \forall p.(\exists q.q' = p) \vee p = 0$ (единственность нуля — нужна ли здесь аксиома A6?);
   (c) $\vdash p \cdot q = 0 \rightarrow p = 0 \vee q = 0$ (отсутствие делителей нуля);

5. Выразите (представьте) в формальной арифметике:
   (a) «полное» отношение $R = \mathbb{N}^2$;
   (b) отношение $(=)$;
   (c) функцию $f(x) = 0$;
   (d) функцию $f(x) = x + 1$;

Задание №10. Рекурсивные функции.

1. Покажите, что следующие функции примитивно-рекурсивны. Ответ предполагает написание интерпретатора для рекурсивных функций и демонстрацию реализации функции как программы для данного интерпретатора. В качестве интерпретатора подойдёт, например, библиотека примитивов для C++, реализованная с использованием шаблонов.
   (a) Умножение.
   (b) Ограниченное вычитание 1:
   $$x \dot{-} 1 = \begin{cases} x - 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$
   (c) Ограниченное вычитание: $x \dot{-} y$ (аналогично, 0 при $x < y$).
   (d) Деление нацело.

(e) Остаток от деления нацело.

(f) Частичный логарифм: $\mathrm{plog}_a b = \max\{x \in \mathbb{N}_0 : b \vdots a^x\}$

(g) Проверка числа на простоту.

(h) Вычисление p_n (n-го простого числа). Подсказка: используйте постулат Бертрана (для любого натурального $n \geqslant 2$ найдётся простое число p в интервале $n < p < 2n$).

(i) Длина списка, представленного в гёделевой нумерации: по $p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ вернуть n.

(j) Элемент списка с номером k.

(k) Операция cons: $\mathrm{cons}(k_0, p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}) = p_1^{k_0} \cdot p_2^{k_1} \cdot \dots \cdot p_{n+1}^{k_n}$.

2. Покажите (аналогично предыдущему заданию), что функция Аккермана — рекурсивная.

3. Положим, что *гёделев номер* открывающейся скобки равен трём: $\ulcorner(\urcorner = 3$, а закрывающейся — пяти: $\ulcorner)\urcorner = 5$. Аналогично, *гёделевым номером* строки назовём гёделево представление списка гёделевых номеров символов этой строки: $\ulcorner()(\urcorner = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^3 = 243\,000$. Покажите, что функция проверки скобочной записи на корректность (на вход функции поступает гёделев номер строки) — примитивно-рекурсивная.

4. Назовём *характериситческим отношением* C_f для функции $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ такое отношение $C_f \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$, что $\langle k_1, k_2, \dots, k_{n+1}\rangle \in C_f$ тогда и только тогда, когда $f(k_1, k_2, \dots, k_n) = k_{n+1}$. Покажите, что если функция представима в формальной арифметике, то её характеристическое отношение выразимо в формальной арифметике.

Задание 11. Теоремы о неполноте формальной арифметики

1. Пусть $\mathcal{S}$ — теория первого порядка, расширяющая формальную арифметику (помимо аксиом формальной арифметики добавлены ещё какие-то нелогические аксиомы). Покажите, что в ней также выполнен аналог Первой теоремы Гёделя о неполноте формальной арифметики.

2. Поясните, почему Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера также влечёт неполноту стандартной интерпретации формальной арифметики.

3. Добавим к формальной арифметике аксиому $\neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Будет ли получившаяся теория ω-непротиворечивой?

4. Покажите, что формальная арифметика противоречива тогда и только тогда, когда $\vdash \overline{1} = 0$.