Теоретические (“малые”) домашние задания

Математическая логика, ИТМО, M3235-M3239, весна 2021 года

Задание №1: «знакомство с исчислением высказываний»

В рамках данного задания мы рассматриваем классическое исчисление высказываний с классическим множеством истинностных значений $\{И, Л\}$.

1. Будем говорить, что высказывание общезначимо, если выполнено при любой оценке. Высказывание выполнимо, если существует оценка, при которой оно истинно. Высказывание опровержимо, если существует оценка, при которой оно ложно. Высказывание невыполнимо, если нет оценки, при которой оно истинно. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

   (a) $\neg A \vee \neg\neg A$

   (b) $(A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (C \rightarrow \neg A)$

   (c) $(((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P)$

   (d) $\neg A \,\&\, \neg\neg A$

   (e) $\neg(A \,\&\, \neg A)$

   (f) A

   (g) $A \rightarrow A$

   (h) $A \rightarrow \neg A$

   (i) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

2. Простые доказательства. Рассмотрим доказательства в классическом исчислении высказываний, здесь используются следующие десять схем аксиом:

(1)	$\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
(2)	$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \rightarrow \pi)$
(3)	$\phi \rightarrow \psi \rightarrow \phi \,\&\, \psi$
(4)	$\phi \,\&\, \psi \rightarrow \phi$
(5)	$\phi \,\&\, \psi \rightarrow \psi$
(6)	$\phi \rightarrow \phi \vee \psi$
(7)	$\psi \rightarrow \phi \vee \psi$
(8)	$(\phi \rightarrow \pi) \rightarrow (\psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \pi)$
(9)	$(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow \neg\phi$
(10)	$\neg\neg\phi \rightarrow \phi$

   Докажите:

   (a) $\vdash A \rightarrow A$

   (b) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

   (c) $\vdash \neg(A \,\&\, \neg A)$

   (d) $\vdash A \,\&\, B \rightarrow B \,\&\, A$

   (e) $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$

   (f) $A \,\&\, \neg A \vdash B$

3. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Докажите с её использованием:

   (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$

   (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

   (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$

   (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$

   (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

   (f) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$

   (g) $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$

(h) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (A \to C)$

(i) $\vdash (A \to B) \to (B \to C) \to (C \to A)$

(j) Закон контрапозиции: $\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

4. Докажите:

   (a) $\vdash A \vee \neg A$ *(правило исключённого третьего)*

   (b) $\vdash A \mathbin{\&} B \to \neg(\neg A \vee \neg B)$

   (c) $\vdash \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B) \to A \vee B$

   (d) $\vdash A \mathbin{\&} B \to A \vee B$

   (e) $\vdash ((A \to B) \to A) \to A$ *(закон Пирса)*

5. Даны высказывания α и β, причём $\vdash \alpha \to \beta$ и $\alpha \not\equiv \beta$. Укажите способ построения высказывания γ, такого, что $\vdash \alpha \to \gamma$ и $\vdash \gamma \to \beta$, причём $\alpha \not\equiv \gamma$ и $\beta \not\equiv \gamma$.

6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg\alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.