

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2021 года

Задание №1. Знакомство с исчислением высказываний.

В рамках данного задания мы рассматриваем классическое исчисление высказываний с классическим множеством истинностных значений $\{И, Л\}$.

1. Будем говорить, что высказывание общезначимо, если выполнено при любой оценке. Высказывание выполнимо, если существует оценка, при которой оно истинно. Высказывание опровержимо, если существует оценка, при которой оно ложно. Высказывание невыполнимо, если нет оценки, при которой оно истинно. Укажите про каждое из следующих высказываний, общезначимо, выполнимо, опровержимо или невыполнимо ли оно:

- (a) $\neg A \vee \neg \neg A$
- (b) $(A \rightarrow \neg B) \vee (B \rightarrow \neg C) \vee (C \rightarrow \neg A)$
- (c) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
- (d) $\neg A \& \neg \neg A$
- (e) $\neg(A \& \neg A)$
- (f) A
- (g) $A \rightarrow A$
- (h) $A \rightarrow \neg A$
- (i) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

2. Простые доказательства. Рассмотрим доказательства в классическом исчислении высказываний, здесь используются следующие десять схем аксиом:

- (1) $\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$
- (2) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \rightarrow \pi)$
- (3) $\phi \rightarrow \psi \rightarrow \phi \& \psi$
- (4) $\phi \& \psi \rightarrow \phi$
- (5) $\phi \& \psi \rightarrow \psi$
- (6) $\phi \rightarrow \phi \vee \psi$
- (7) $\psi \rightarrow \phi \vee \psi$
- (8) $(\phi \rightarrow \pi) \rightarrow (\psi \rightarrow \pi) \rightarrow (\phi \vee \psi \rightarrow \pi)$
- (9) $(\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow \neg \phi$
- (10) $\neg \neg \phi \rightarrow \phi$

Докажите:

- (a) $\vdash A \rightarrow A$
- (b) $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- (c) $\vdash \neg(A \& \neg A)$
- (d) $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
- (e) $\vdash A \rightarrow \neg \neg A$
- (f) $A \& \neg A \vdash B$

3. Известна теорема о дедукции: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ тогда и только тогда, когда $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Докажите с её использованием:

- (a) $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
- (b) $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
- (c) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
- (d) $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
- (e) $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
- (f) $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
- (g) $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$

- (h) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
 (i) $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (C \rightarrow A)$
 (j) Закон контрапозиции: $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
4. Докажите:
- (a) $\vdash A \vee \neg A$ (*правило исключённого третьего*)
 (b) $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$
 (c) $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$
 (d) $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
 (e) $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$ (*закон Пирса*)
5. Даны высказывания α и β , причём $\vdash \alpha \rightarrow \beta$ и $\alpha \not\equiv \beta$. Укажите способ построения высказывания γ , такого, что $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$ и $\vdash \gamma \rightarrow \beta$, причём $\alpha \not\equiv \gamma$ и $\beta \not\equiv \gamma$.
6. Покажите, что если $\alpha \vdash \beta$ и $\neg \alpha \vdash \beta$, то $\vdash \beta$.

Задание №2. Теоремы о полноте и корректности классической логики, интуиционистская логика.

1. Покажите, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \models \alpha$.
2. Покажите, что если $\Gamma \models \alpha$, то $\Gamma \vdash \alpha$.
3. О законе исключённого третьего. Покажите, что в интуиционистском исчислении высказываний доказуемо следующее:
- (a) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$
 (b) $A \vee \neg A \vdash \neg \neg A \rightarrow A$
4. Предложим следующий способ оценки интуиционистских высказываний. Фиксируем некоторое топологическое пространство с носителем X и топологией (множеством всех открытых множеств) $\Omega \subseteq \wp(X)$. Множеством истинностных значений выберем Ω . Соответственно, функция оценок для переменных задаётся как $f_P : \mathcal{P} \rightarrow \Omega$. Определим функции оценок для связок так:

$$\begin{aligned} f_{\rightarrow}(a, b) &:= ((X \setminus a) \cup b)^\circ \\ f_{\&}(a, b) &:= a \cap b \\ f_{\vee}(a, b) &:= a \cup b \\ f_{\neg}(a) &:= (X \setminus a)^\circ \end{aligned}$$

Будем считать высказывание истинным, если его оценка — всё пространство X . Например, при $X = \mathbb{R}$ и $A := (0, \infty)$, $B := (-\infty, 1)$ высказывание $A \vee B$ истинно, но при $A := (0, \infty)$, $B := (-\infty, 0)$ оно ложно.

Известно, что интуиционистское исчисление высказываний корректно и полно при таком способе оценки — в частности это значит, что если формула α недоказуема, то найдётся такое топологическое пространство X и такие оценки для пропозициональных переменных, что $\llbracket \alpha \rrbracket \neq X$. Это позволяет показывать недоказуемость высказываний. Например, $\not\vdash A \vee \neg A$: возьмём $X = \mathbb{R}$ и $A := (0, \infty)$. Тогда $\llbracket \neg A \rrbracket = (-\infty, 0)$ и $\llbracket A \vee \neg A \rrbracket = \mathbb{R} \setminus \{0\} \neq \mathbb{R}$.

Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:

- (a) $\neg A \vee \neg \neg A$
 (b) $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
 (c) $\neg \neg A \rightarrow A$
 (d) $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$
 (e) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
5. Можно ли, имея $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$, доказать закон исключённого третьего в интуиционистской логике?

6. Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять $\neg(\alpha \& \neg\beta)$, ведь $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg\beta)$ и $\neg(\alpha \& \neg\beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:

- (a) конъюнкцию?
- (b) дизъюнкцию?
- (c) импликацию?
- (d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — доказите это.

7. Назовём теорию *противоречивой*, если в ней найдётся такое α , что $\vdash \alpha$ и $\vdash \neg\alpha$. Покажите, что исчисления высказываний (классическое и интуиционистское) противоречивы тогда и только тогда, когда в них доказуема любая формула.

8. *Теорема Гливенко*. Обозначим доказуемость высказывания α в классической логике как $\vdash_{\text{к}} \alpha$, а в интуиционистской — как $\vdash_{\text{и}} \alpha$. Оказывается возможным показать, что какое бы ни было α , если $\vdash_{\text{к}} \alpha$, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$. А именно, покажите, что:

- (a) Если α — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$.
- (b) $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
- (c) $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$
- (d) Докажите утверждение теоремы ($\vdash_{\text{к}} \alpha$ влечёт $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

Задание №3. Интуиционистская логика и натуральный вывод.

1. Обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как $\vdash_{\text{и}}$, а выводимость в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как $\vdash_{\text{е}}$.

Заметим, что хоть языки этих исчислений и отличаются, мы можем построить преобразование высказываний этих исчислений друг в друга: приняв $\perp \Rightarrow A \& \neg A$ и $\neg\alpha \Rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$. Будем обозначать высказывания в гильбертовском ИИВ обычными греческими буквами, а соответствующие им высказывания в ИИВ натурального вывода — буквами с апострофами: α', β', \dots

- (a) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$: предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для одного случая базы и одного случая перехода индукции.
 - (b) Пусть $\Gamma \vdash_{\text{е}} \alpha'$. Покажите, что $\Gamma \vdash_{\text{и}} \alpha$.
2. Рассмотрим \mathbb{N}_0 (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций $(+)$ и (\cdot) в данной решётке, есть ли в ней псевдодополнение, определены ли 0 или 1? Приведите несколько свойств традиционных определений $(+)$ и (\cdot) , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и несколько свойств, которые перестанут выполняться.

3. Постройте следующие примеры:

- (a) непустого частично-упорядоченного множества, не имеющего операций $(+)$ и (\cdot) ни для каких элементов; имеющего операцию $(+)$ для всех элементов, но не имеющего (\cdot) для некоторых; имеющего операцию (\cdot) для всех элементов, но не имеющего $(+)$ для некоторых.
- (b) решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой; дистрибутивной, но не импликативной решётки; импликативной решётки без 0.

4. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:

- (a) ассоциативность: $a + (b + c) = (a + b) + c$ и $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;
- (b) монотонность: пусть $a \preceq b$ и $c \preceq d$, тогда $a + c \preceq b + d$ и $a \cdot c \preceq b \cdot d$;
- (c) *Законы поглощения*: $a \cdot (a + b) = a$; $a + (a \cdot b) = a$;

- (d) $a \preceq b$ выполнено тогда и только тогда, когда $a \rightarrow b = 1$;
- (e) из $a \preceq b$ следует $b \rightarrow c \preceq a \rightarrow c$ и $c \rightarrow a \preceq c \rightarrow b$;
- (f) из $a \preceq b \rightarrow c$ следует $a \cdot b \preceq c$;
- (g) $b \preceq a \rightarrow b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$;
- (h) $a \rightarrow b \preceq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$;
- (i) $a \preceq b \rightarrow a \cdot b$ и $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$;
- (j) $a \rightarrow c \preceq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$
5. Покажите, что импликативная решётка дистрибутивна.
6. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$) также выполнено и $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$.
7. Рассмотрим топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$, упорядочим его топологию Ω отношением \subseteq . Покажите, что такая конструкция является псевдобулевой алгеброй, а если топология — дискретная (любое подмножество X открыто), то булевой алгеброй.
8. Докажите, что ИИВ корректно, если в качестве модели выбрать псевдобулеву алгебру, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \& \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\ \llbracket \perp \rrbracket &= 0 \end{aligned}$$

9. Пусть задано отношение *предпорядка* R (транзитивное и рефлексивное, но необязательно антисимметричное) на множестве A . Напомним несколько определений:

- определим отношение $R^= := \{ \langle x, y \rangle \mid xRy \text{ и } yRx \}$;
- $[a]_{R^=} := \{ x \mid aR^=x \}$ — класс эквивалентности, порождённый элементом a ;
- фактор-множество $A/R^= := \{ [a]_{R^=} \mid a \in A \}$;
- на $A/R^=$ можно перенести отношение $R^* := \{ \langle [a], [b] \rangle \mid aRb \}$.

Покажите, что: отношение $R^=$ — отношение эквивалентности; если $x \in [a]_{R^=}$, $y \in [b]_{R^=}$ и aRb , то xRy ; отношение R^* — отношение порядка на $A/R^=$.

10. Покажем, что конструкция из определения алгебры Линденбаума действительно является решёткой:
- (a) Покажите, что отношение (\approx) — отношение эквивалентности (напомним, что $\alpha \preceq \beta$, если $\alpha \vdash \beta$, а $\alpha \approx \beta$, если $\alpha \vdash \beta$ и $\beta \vdash \alpha$). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.
- (b) Покажите, что $[\alpha]_{\approx} \cdot [\beta]_{\approx} = [\alpha \& \beta]_{\approx}$. Для этого, например, можно показать:
- $\alpha \& \beta \preceq \alpha$;
 - если $\gamma \preceq \alpha$ и $\gamma \preceq \beta$, то $\gamma \preceq \alpha \& \beta$;
 - операция однозначно определена для всех элементов решётки (то есть определена для всех классов эквивалентности и не зависит от выбора представителей). *Подсказка:* воспользуйтесь предыдущим заданием.
- (c) Покажите, что $[\alpha] + [\beta] = [\alpha \vee \beta]$.
- (d) Покажите, что $[\alpha] \rightarrow [\beta] = [\alpha \rightarrow \beta]$.
- (e) Найдите классы эквивалентности для 0 и 1.

Задание №4. Модели Крипке, нетабличность и дизъюнктивность ИИВ.

1. Рассмотрим табличную модель \mathfrak{M} с n истинностными значениями, и с выделенным значением T для истины. Покажите, что

$$\models \bigvee_{1 \leq i \neq j \leq n+1} (P_i \rightarrow P_j) \& (P_j \rightarrow P_i)$$

В частности, покажите, что в любой корректной модели если $\llbracket \alpha \rrbracket = \llbracket \beta \rrbracket$, то $\llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket = T$; если $\llbracket \gamma \rrbracket = \llbracket \delta \rrbracket = T$, то $\llbracket \gamma \& \delta \rrbracket = T$; если $\llbracket \gamma \rrbracket = T$, то $\llbracket \gamma \vee \eta \rrbracket = \llbracket \eta \vee \gamma \rrbracket = T$.

2. Покажите, что какая бы ни была формула α и модель Крипке, если $W_i \Vdash \alpha$ и $W_i \preceq W_j$, то $W_j \Vdash \alpha$.
3. Общезначимы ли следующие высказывания в ИИВ? Опровергните, построив модель Крипке, или докажите, построив натуральный вывод.
 - (a) $P \vee \neg P$;
 - (b) $\neg\neg P \rightarrow P$;
 - (c) $P \vee \neg P \vee \neg\neg P \vee \neg\neg\neg P$;
 - (d) $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$;
 - (e) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$;
 - (f) $\neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$;
 - (g) $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$;
 - (h) $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$;
 - (i) $\neg\perp$.
4. Рассмотрим некоторую модель Крипке $\langle \mathfrak{W}, \preceq, \Vdash \rangle$. Пусть $\Omega = \{W \subseteq \mathfrak{W} \mid \text{если } W_i \in W \text{ и } W_i \preceq W_j, \text{ то } W_j \in W\}$. Пусть $\mathcal{W}_\alpha := \{W_i \in \mathfrak{W} \mid W_i \Vdash \alpha\}$ (множество миров, где вынуждена формула α).
 - (a) На лекции формулировалась теорема без доказательства, что пара $\langle \mathfrak{W}, \Omega \rangle$ — топологическое пространство. Докажите её.
 - (b) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \& \beta}$ и $\mathcal{W}_{\alpha \vee \beta}$ через \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β и покажите, что они также открыты.
 - (c) Пусть \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β — открытые множества. Выразите $\mathcal{W}_{\alpha \rightarrow \beta}$ через них и покажите, что оно также открыто.
 - (d) Покажите, что Ω — в точности множество всех множеств миров, на которых может быть вынуждена какая-либо формула. А именно, покажите, что для любой формулы α множество миров \mathcal{W}_α , где она вынуждена, всегда открыто ($\mathcal{W}_\alpha \in \Omega$) — и что для любого открытого множества найдётся формула, которая вынуждена ровно на нём (для $Q \in \Omega$ существует формула α , что $\mathcal{W}_\alpha = Q$).
5. Постройте топологическое пространство, соответствующее (в смысле предыдущего задания) модели Крипке, опровергающей высказывание $\neg\neg P \rightarrow P$. Постройте соответствующую ему табличную модель.
6. Назовём *древовидной* моделью Крипке модель, в которой множество миров \mathfrak{W} упорядочено как дерево: (a) существует наименьший мир W_0 ; (b) для любого $W_i \neq W_0$ существует единственный предшествующий мир $W_k : W_k \prec W_i$.
 - (a) Докажите, что любое высказывание, опровергаемое моделью Крипке, может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке.
 - (b) Найдите высказывание, которое не может быть опровергнуто древовидной моделью Крипке высотой менее 2.
 - (c) Покажите, что для любого натурального n найдётся опровержимое в моделях Крипке высказывание, неопровергаемое никакой моделью с n мирами.
7. Будем говорить, что топологическое пространство $\langle X, \Omega \rangle$ *связно*, если нет таких открытых множеств A и B , что $X = A \cup B$, но $A \cap B = \emptyset$. Пусть задана некоторая модель Крипке. Докажите, что соответствующее модели Крипке топологическое пространство связно тогда и только тогда, когда её граф миров связан в смысле теории графов.
8. Покажите, что модель Крипке с единственным миром задаёт классическую модель (в ней выполнены все доказуемые в ИИВ высказывания).
9. Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} , гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ и согласованные оценки $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{A}}$ и $\llbracket \cdot \rrbracket_{\mathcal{B}}$: $\varphi(\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}}) = \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}}$.
 - (a) Покажите, что гомоморфизм сохраняет порядок: если $a_1 \preceq a_2$, то $\varphi(a_1) \preceq \varphi(a_2)$.
 - (b) Покажите, что если $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{A}} = 1_{\mathcal{A}}$, то $\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathcal{B}} = 1_{\mathcal{B}}$.
10. Пусть заданы алгебры Гейтинга \mathcal{A}, \mathcal{B} . Всегда ли можно построить гомоморфизм $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$?
11. Пусть \mathcal{A} — алгебра Гейтинга. Покажите, что $\Gamma(\mathcal{A})$ — алгебра Гейтинга и гёделева алгебра.
12. Пусть \mathcal{A} — булева алгебра. Всегда ли (возможно ли, что) $\Gamma(\mathcal{A})$ будет булевой алгеброй?