

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ**  
*Математическая логика, ИТМО, М3235-М3239, весна 2022 года*

**Задание №1. Знакомство с классическим исчислением высказываний.**

1. Будем говорить, что высказывание  $\alpha$  выводится из гипотез  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  (и записывать это как  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \vdash \alpha$ ), если существует такой вывод  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , что  $\alpha \equiv \delta_n$ , и каждый из  $\delta_i$  есть либо гипотеза, либо аксиома, либо получается из каких-то предыдущих высказываний по правилу Modus Ponens. Несколько гипотез мы можем обозначить какой-нибудь большой буквой середины греческого алфавита ( $\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma, \Xi$ ): например,  $\Gamma, \alpha, \beta \vdash \sigma$ ; здесь  $\Gamma$  обозначает какое-то множество гипотез.

Докажите:

- (a)  $\vdash (A \rightarrow A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
  - (b)  $\vdash A \& B \rightarrow B \& A$
  - (c)  $\vdash A \& B \rightarrow A \vee B$
  - (d)  $\vdash A \rightarrow \neg\neg A$
  - (e)  $A \& \neg A \vdash B$
  - (f)  $\vdash \neg(A \& \neg A)$
2. Известна теорема о дедукции:  $\Gamma, \alpha \vdash \beta$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Теорема доказывается конструктивно, то есть она даёт метод для перестроения одного вывода в другой. В рамках данного задания разрешается результат её применения вписать как часть другого вывода как «чёрный ящик» (как макроподстановку). Докажите с её использованием:
- (a)  $\neg A, B \vdash \neg(A \& B)$
  - (b)  $A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
  - (c)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \& B)$
  - (d)  $\neg A, \neg B \vdash \neg(A \vee B)$
  - (e)  $A, \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$
  - (f)  $\neg A, B \vdash A \rightarrow B$
  - (g)  $\neg A, \neg B \vdash A \rightarrow B$
  - (h)  $\vdash A \& (B \& B) \rightarrow A \& B$
  - (i)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)$
  - (j)  $\vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  (закон контрапозиции)
  - (k)  $\vdash A \& B \rightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$  (правило де Моргана)
  - (l)  $\vdash \neg(\neg A \& \neg B) \rightarrow A \vee B$  (правило де Моргана)
  - (m)  $\vdash A \& (B \vee C) \rightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$  (дистрибутивность 1)
  - (n)  $\vdash A \vee (B \& C) \rightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$  (дистрибутивность 2)
3. Существует несколько аналогов схемы аксиом 10 (аксиомы снятия двойного отрицания). Докажите при любых высказываниях  $\alpha$  и  $\beta$ :
- (a)  $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$  (правило исключённого третьего)
  - (b)  $\vdash ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  (закон Пирса)
  - (c) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом:  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$  и  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ . В этих условиях покажите  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ .
  - (d) Предположим, 10 схема аксиом заменена на две другие схемы аксиом:  $\alpha \vee \neg\alpha$  и  $\alpha \rightarrow \neg\alpha \rightarrow \beta$ . В этих условиях покажите  $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ .
4. Докажите следующие «странные» формулы:
- (a)  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$ . В самом деле, получается, что из любых двух наугад взятых фактов либо первый следует из второго, либо второй из первого. Например «выполнено как минимум одно из утверждений: (а) если сегодня пасмурно, то курс матлогики все сдадут на А; (б) наоборот, если все сдадут курс матлогики на А, то сегодня пасмурно».

- (b) Обобщение предыдущего пункта: при любом  $n \geq 1$  и любых  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  выполнено  $\vdash (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \vee (\alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \vee \dots \vee (\alpha_{n-1} \rightarrow \alpha_n) \vee (\alpha_n \rightarrow \alpha_1)$
5. В рамках данного задания неравными высказываниями будем называть высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , у которых нет такого переименования переменных, чтобы их таблицы истинности совпали. Например,  $A$  и  $B \& B$  — равные высказывания, ведь высказывания  $E$  и  $E \& E$  имеют одну и ту же таблицу истинности:

$E$	$E \& E$
И	И
Л	Л

Однако, высказывания  $A$  и  $A \rightarrow A$  не равны.

Даны высказывания  $\alpha$  и  $\beta$ , причём  $\vdash \alpha \rightarrow \beta$  и  $\alpha \neq \beta$ . Укажите способ построения высказывания  $\gamma$ , такого, что  $\vdash \alpha \rightarrow \gamma$  и  $\vdash \gamma \rightarrow \beta$ , причём  $\alpha \neq \gamma$  и  $\beta \neq \gamma$ .

6. Покажите, что если  $\alpha \vdash \beta$  и  $\neg \alpha \vdash \beta$ , то  $\vdash \beta$ .

## Задание №2. Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний. Интуиционистская логика.

- Теоремы о корректности и полноте классического исчисления высказываний.
  - Заполните пробел в доказательстве корректности исчисления высказываний: покажите, что если  $\vdash \alpha$  и в доказательстве высказывание  $\delta_n$  получено с помощью Modus Ponens из  $\delta_j$  и  $\delta_k \equiv \delta_j \rightarrow \delta_n$ , то  $\models \delta_n$ .
  - Покажите, что если  $\Gamma \vdash \alpha$ , то  $\Gamma \models \alpha$ .
  - Покажите, что если  $\Gamma \models \alpha$ , то  $\Gamma \vdash \alpha$ .
- Предложите топологические пространства и оценку для пропозициональных переменных, опровергающие следующие высказывания:
  - $A \vee \neg A$  (на лекции приводился пример в  $\mathbb{R}$ ; в данном же задании предложите оценку в каком-то другом пространстве, например в  $\mathbb{R}^2$ )
  - $((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$
  - $\neg \neg A \rightarrow A$
  - $(A \rightarrow (B \vee \neg B)) \vee (\neg A \rightarrow (B \vee \neg B))$
  - $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow C) \vee (C \rightarrow A)$
  - $\bigvee_{i=1,n} ((A_i \rightarrow A_{(i \bmod n)+1}) \& (A_{(i \bmod n)+1} \rightarrow A_i))$
- Доказуемы ли следующие высказывания в интуиционистской логике?
  - $\neg \neg \neg \neg A \rightarrow \neg \neg A$
  - $\neg A \vee \neg \neg A \vee \neg \neg \neg A$
  - $A \vee B \rightarrow \neg(\neg A \& \neg B)$
  - $\neg(\neg A \vee \neg B) \rightarrow A \& B$
  - $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \vee B)$
  - $(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$
- Известно, что в классической логике любая связка может быть *выражена* как композиция конъюнкций и отрицаний: существует схема высказываний, использующая только конъюнкции и отрицания, задающая высказывание, логически эквивалентное исходной связке. Например, для импликации можно взять  $\neg(\alpha \& \neg \beta)$ , ведь  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg(\alpha \& \neg \beta)$  и  $\neg(\alpha \& \neg \beta) \vdash \alpha \rightarrow \beta$ . Возможно ли в интуиционистской логике выразить через остальные связки:
  - конъюнкцию?
  - дизъюнкцию?
  - импликацию?

(d) отрицание?

Если да, предложите формулу и два вывода. Если нет — докажите это (например, предложив соответствующую модель).

5. *Теорема Гливенко.* Обозначим доказуемость высказывания  $\alpha$  в классической логике как  $\vdash_{\text{к}} \alpha$ , а в интуиционистской — как  $\vdash_{\text{и}} \alpha$ . Оказывается возможным показать, что какое бы ни было  $\alpha$ , если  $\vdash_{\text{к}} \alpha$ , то  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ . А именно, покажите, что:

- (a) Если  $\alpha$  — аксиома, полученная из схем 1–9 исчисления высказываний, то  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ .
- (b)  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg(\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha)$
- (c)  $\neg\neg\alpha, \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{\text{и}} \neg\neg\beta$
- (d) Докажите утверждение теоремы ( $\vdash_{\text{к}} \alpha$  влечёт  $\vdash_{\text{и}} \neg\neg\alpha$ ), опираясь на предыдущие пункты, и покажите, что классическое исчисление высказываний противоречиво тогда и только тогда, когда противоречиво интуиционистское.

6. Возможно ли предложить такой набор множеств  $S$  из  $\mathbb{R}$  (формально:  $S \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ), чтобы при выборе его в качестве истинностного множества  $\mathbb{V}$ , при сохранении правил вычисления значений связок для интуиционистской логики, получилась бы полная и корректная модель для классического исчисления высказываний?

7. Пусть  $S$  — некоторое множество. Рассмотрим  $\mathbb{V} = \mathcal{P}(S)$ , определим связки так:

$$\begin{aligned} \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cap \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \cup \llbracket \beta \rrbracket \\ \llbracket \neg\alpha \rrbracket &= S \setminus \llbracket \alpha \rrbracket \end{aligned}$$

Также, будем считать, что  $\models \alpha$ , если  $\llbracket \alpha \rrbracket = S$ .

Покажите, что получившееся:

- (a) корректная модель классического исчисления высказываний. Для уменьшения рутинной работы достаточно показать выполнение схем аксиом 5,9,10 и правила Modus Ponens.
- (b) полная модель классического исчисления высказываний.

### Задание №3. Интуиционистская логика и натуральный вывод.

1. Напомним определения: *замкнутое* множество — такое, дополнение которого открыто. *Внутренностью* множества  $A^\circ$  назовём наибольшее открытое множество, содержащееся в  $A$ . *Замыканием* множества  $\bar{A}$  назовём наименьшее замкнутое множество, содержащее  $A$ . Назовём *окрестностью* точки  $x$  такое открытое множество  $V$ , что  $x \in V$ . Будем говорить, что точка  $x \in A$  *внутренняя*, если существует окрестность  $V$ , что  $V \subseteq A$ . Точка  $x \in A$  — *граничная*, если любая её окрестность  $V$  пересекается как с  $A$ , так и с его дополнением.
  - (a) Покажите, что  $A$  открыто тогда и только тогда, когда все точки  $A$  — внутренние. Также покажите, что  $A^\circ = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя точка}\}$ .
  - (b) Покажите, что  $A$  замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои граничные точки. Также покажите, что  $\bar{A} = \{x | x \in A \text{ \& } x \text{ — внутренняя или граничная точка}\}$ . Верно ли, что  $\bar{A} = X \setminus ((X \setminus A)^\circ)$ ?
  - (c) Покажите, что внутренность и замыкание корректно определены (что существуют соответствующие наибольшее и наименьшее множества).
  - (d) Введём топологию на деревьях способом, рассмотренным на лекции. Рассмотрим некоторое множество вершин  $V$ . Опишите множества  $V^\circ$  и  $\bar{V}$ . Какие вершины будут являться граничными для  $V$ ?
  - (e) Пусть  $A \subseteq B$ . Как связаны  $A^\circ$  и  $B^\circ$ , а также  $\bar{A}$  и  $\bar{B}$ ?
  - (f) Верно ли  $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$  и  $(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ$ ?
  - (g) Покажите, что  $\overline{(A^\circ)}^\circ = A^\circ$ .

- (h) *Задача Куратовского.* Будем применять операции взятия внутреннейности и замыкания к некоторому множеству всевозможными способами. Сколько различных множеств может всего получиться?
2. Примеры топологий. Для каждого из примеров ниже покажите, что в нём задано топологическое пространство, и ответьте следующие вопросы: каковы окрестности точек в данной топологии; каковы будут внутренность и замыкание для данного множества (определите это прямо); каковы замкнутые множества в данной топологии; является ли данная топология моделью для классической логики; связно ли данное пространство.
- (a) Топология Зарисского на  $\mathbb{R}$ :  $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ конечно}\}$ , то есть пустое множество и все множества с конечным дополнением.
- (b) Топология стрелки на  $\mathbb{R}$ :  $\Omega = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ , то есть пустое, всё пространство и все открытые лучи.
- (c) Множество всех бесконечных подмножеств  $\mathbb{R}$ :  $\Omega = \{\emptyset\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid X \text{ бесконечно}\}$
- (d) Множество всевозможных объединений арифметических прогрессий:  $A(a) = \{a \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ ;  $X \in \Omega$ , если  $X = \emptyset$  или  $X = \bigcup_i A(a_i)$  (все  $a_i > 0$ ). Будет ли это топологическим пространством, если мы будем рассматривать арифметические прогрессии в полной форме, в виде  $a \cdot x + b$ ?
3. Связность.
- (a) Связны ли  $\mathbb{Q}$  и  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  как топологические подпространства  $\mathbb{R}$ ?
- (b) Связно ли множество  $\{0, 1\}$  в топологии стрелки и в топологии Зарисского?
- (c) Покажите, что дерево с отмеченным корнем (с рассмотренной на лекции топологией) связно.
- (d) Покажите, что если лес связан в топологическом смысле, то он состоит из одного дерева.
4. Натуральный вывод был описан на лекции, но примеров доказательств не приводилось. Приведём такой пример:

$$\frac{\frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \beta} \quad \frac{\alpha \& \beta \vdash \alpha \& \beta}{\alpha \& \beta \vdash \alpha}}{\alpha \& \beta \vdash \beta \& \alpha}$$

Постройте следующие доказательства в натуральном выводе:

- (a)  $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$
- (b)  $\neg \alpha \vee \beta \vdash \alpha \rightarrow \beta$
- (c)  $\alpha \rightarrow \beta \vdash \neg \beta \rightarrow \neg \alpha$
- (d)  $\alpha \vee \beta \vdash \neg(\neg \alpha \& \neg \beta)$
5. Чтобы избежать путаницы, обозначим выводимость в ИИВ «гильбертовского стиля» как  $\vdash_{\Gamma}$ , а знак  $\vdash$  в ИИВ «системы натурального (естественного) вывода» как  $\vdash_{\mathbf{n}}$ .

Напомним, что языки гильбертовского и натурального выводов отличаются (обозначим эти языки как  $\mathcal{L}_{\Gamma}$  и  $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}$  соответственно).

Определим функции, отображающие языки друг в друга:  $|\cdot|_{\mathbf{n}} : \mathcal{L}_{\Gamma} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{n}}$  и  $|\cdot|_{\Gamma} : \mathcal{L}_{\mathbf{n}} \rightarrow \mathcal{L}_{\Gamma}$ . Они сохраняют почти все значения, кроме лжи ( $\perp$ ) и отрицания ( $\neg$ ):

$$|\sigma|_{\mathbf{n}} = \begin{cases} |\alpha|_{\mathbf{n}} \rightarrow \perp, & \sigma \equiv \neg \alpha \\ |\alpha|_{\mathbf{n}} \star |\beta|_{\mathbf{n}}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases} \quad |\sigma|_{\Gamma} = \begin{cases} A \& \neg A, & \sigma \equiv \perp \\ |\alpha|_{\Gamma} \star |\beta|_{\Gamma}, & \sigma \equiv \alpha \star \beta \\ X, & \sigma \equiv X \end{cases}$$

Естественным образом расширим эти операции на контексты:  $|\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n| = |\gamma_1|, |\gamma_2|, \dots, |\gamma_n|$ .

- (a) Пусть  $\Gamma \vdash_{\Gamma} \alpha$ . Покажите, что  $|\Gamma|_{\mathbf{n}} \vdash_{\mathbf{n}} |\alpha|_{\mathbf{n}}$ : предложите общую схему перестроения доказательства, постройте доказательства для трёх случаев базы (схема аксиом 2, схема аксиом 5, схема аксиом 9) и одного случая перехода индукции.
- (b) Пусть  $\Gamma \vdash_{\mathbf{n}} \alpha$ . Покажите, что  $|\Gamma|_{\Gamma} \vdash_{\Gamma} |\alpha|_{\Gamma}$  (постройте схему доказательства, и покажите один случай базы и три случая перехода индукции).
- (c) Покажите аналог теоремы о дедукции:  $\Gamma \vdash_{\mathbf{n}} \alpha \rightarrow \beta$  тогда и только тогда, когда  $\Gamma, \alpha \vdash_{\mathbf{n}} \beta$ .

6. Покажите, что открытые множества топологического пространства с отношением порядка ( $\subseteq$ ) образуют импликативную решётку с нулём.
7. Напомним, что линейным порядком называется такой порядок  $\langle X, \leq \rangle$ , что для любых  $x, y \in X$  выполнено  $x \leq y$  или  $y \leq x$ . Задаёт ли линейный порядок решётку? Дистрибутивна, импликативна ли она, есть ли в ней 0 и 1?
8. Рассмотрим  $\mathbb{N}_0$  (натуральные числа с нулём) с традиционным отношением порядка как решётку. Каков будет смысл операций  $(+)$ ,  $(\cdot)$  и  $(\rightarrow)$  в данной решётке, определены ли 0 или 1? Верно ли, что  $2 \cdot 2 = 4$  или  $2 + 2 = 4$ ? Приведите какие-нибудь три свойства традиционных определений  $(+)$  и  $(\cdot)$ , которые будут всё равно выполнены при таком переопределении, и три свойства, которые перестанут выполняться.
9. Постройте следующие примеры:
  - (а) непустого частично-упорядоченного множества, имеющего операцию  $(+)$  для всех элементов, но не имеющего  $(\cdot)$  для некоторых; имеющего операцию  $(\cdot)$  для всех элементов, но не имеющего  $(+)$  для некоторых.
  - (б) решётки, не являющейся дистрибутивной решёткой; импликативной решётки без 0.
  - (в) дистрибутивной, но не импликативной решётки (эта решётка не может быть конечной).
10. Покажите, что в дистрибутивной решётке (всегда  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ ) также выполнено и  $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ .
11. Покажите следующие тождества и свойства для импликативных решёток:
  - (а) ассоциативность:  $a + (b + c) = (a + b) + c$  и  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ ;
  - (б) монотонность: пусть  $a \leq b$  и  $c \leq d$ , тогда  $a + c \leq b + d$  и  $a \cdot c \leq b \cdot d$ ;
  - (в) *Законы поглощения*:  $a \cdot (a + b) = a$ ;  $a + (a \cdot b) = a$ ;
  - (г)  $a \leq b$  выполнено тогда и только тогда, когда  $a \rightarrow b = 1$ ;
  - (д) из  $a \leq b$  следует  $b \rightarrow c \leq a \rightarrow c$  и  $c \rightarrow a \leq c \rightarrow b$ ;
  - (е) из  $a \leq b \rightarrow c$  следует  $a \cdot b \leq c$ ;
  - (ж)  $b \leq a \rightarrow b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow a) = 1$ ;
  - (з)  $a \rightarrow b \leq ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (a \rightarrow c))$ ;
  - (и)  $a \leq b \rightarrow a \cdot b$  и  $a \rightarrow (b \rightarrow (a \cdot b)) = 1$ ;
  - (к)  $a \rightarrow c \leq (b \rightarrow c) \rightarrow (a + b \rightarrow c)$ ;
  - (л) импликативная решётка дистрибутивна:  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
12. Докажите, основываясь на формулах предыдущих заданий, что ИИВ (вариант натурального вывода) корректно, если в качестве модели выбрать импликативную решётку с 0, а функции оценок определить так:

$$\begin{aligned}
 \llbracket \alpha \&\beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \cdot \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \alpha \vee \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket + \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \alpha \rightarrow \beta \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow \llbracket \beta \rrbracket \\
 \llbracket \neg \alpha \rrbracket &= \llbracket \alpha \rrbracket \rightarrow 0 \\
 \llbracket \perp \rrbracket &= 0
 \end{aligned}$$

Оценка турникета определяется через импликацию:  $\llbracket \gamma_1, \dots, \gamma_n \vdash \alpha \rrbracket = \llbracket \gamma_1 \rightarrow \dots \gamma_n \rightarrow \alpha \rrbracket$ .