Арифметизация логики

Общие замечания

- Рассматриваем функции $\mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$.
- Обозначим вектор $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$ как $\overrightarrow{x}$.

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*

$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$

2. *Примитив «Инкремент» (N)*

$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*
$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$
2. *Примитив «Инкремент» (N)*
$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$
3. *Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$*
$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0, \qquad U_n^k(\overrightarrow{x}) = x_k$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение (Примитивы Z, N, U, S)

1. *Примитив «Ноль» (Z)*
$$Z : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad Z(x_1) = 0$$
2. *Примитив «Инкремент» (N)*
$$N : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \qquad N(x_1) = x_1 + 1$$
3. *Примитив «Проекция» (U) — семейство функций; пусть* $k, n \in \mathbb{N}_0, k \leq n$
$$U_n^k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0, \qquad U_n^k(\overrightarrow{x}) = x_k$$
4. *Примитив «Подстановка» (S) — семейство функций; пусть*
$g : \mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0, \quad f_1, \dots, f_k : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$
$$S\langle g, f_1, f_2, \dots, f_k\rangle(\overrightarrow{x}) = g(f_1(\overrightarrow{x}), \dots, f_k(\overrightarrow{x}))$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) \quad = g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2))$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \end{aligned}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) \quad & = g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ & = g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \\ & = g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1)))) \end{aligned}$$

Примитивная рекурсия

Определение (примитив «примитивная рекурсия», R)

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *и* $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$. *Тогда* $R\langle f, g\rangle : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$, *причём*

$$R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y) = \begin{cases} f(\overrightarrow{x}), & y = 0 \\ g(\overrightarrow{x}, y-1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

Пояснение

```
res := f(x1...xn);
for yi = 0 to y-1 do
    res := g(x1...xn,yi,res);
```

Пример

$$\begin{aligned} R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 3) &= g(\overrightarrow{x}, 2, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 2)) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, R\langle f, g\rangle(\overrightarrow{x}, 1)))) \\ &= g(\overrightarrow{x}, 2, g(\overrightarrow{x}, 1, g(\overrightarrow{x}, 0, f(\overrightarrow{x})))) \end{aligned}$$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f *— примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов* Z, N, U, S *и* R.

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f *— примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов* Z, N, U, S *и* R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

$f, g = N$

Примитивно-рекурсивные функции

Определение

Функция f — примитивно-рекурсивна, если может быть выражена как композиция примитивов Z, N, U, S и R.

Теорема

$f(x) = x + 2$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = S\langle N, N\rangle$

$N(x) = x + 1$
$S\langle g, f\rangle(x) = g(f(x))$

$f, g = N$
$S\langle N, N\rangle(x) = N(N(x)) = (x + 1) + 1$ $\square$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y - 1, R\langle f, g\rangle(x, y - 1)), & y > 0 \end{cases}$$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, x + y) =$

Примитивно-рекурсивные функции: $x + y$

Лемма

$f(a, b) = a + b$ *примитивно-рекурсивна*

Доказательство.

$f = R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle$:

$$R\langle f, g\rangle(x, y) = \begin{cases} f(x), & y = 0 \\ g(x, y-1, R\langle f, g\rangle(x, y-1)), & y > 0 \end{cases}$$

- База. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, 0) = U_1^1(x) = x$
- Переход. $R\langle U_1^1, S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y+1) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, R\langle U_1^1(x), S\langle N, U_3^3\rangle\rangle(x, y)) =$
  $\ldots = S\langle N, U_3^3\rangle(x, y, x + y) =$
  $\ldots = N(x + y) = x + y + 1$

$\square$

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел

Какие функции примитивно-рекурсивные?

1. Сложение, вычитание
2. Умножение, деление
3. Вычисление простых чисел
4. Неформально: все функции, вычисляемые конечным числом вложенных циклов `for`:

```
for (int i1 = 0; i_1 < g1(x1...xn); i1++) {
    for (int i2 = 0; i_2 < g2(x1...xn,i1); i2++) {
        ...
           for (int ik = 0; ik < gk(x1...xn,i1,i2...); ik++) {
               // выражение без циклов
           }
        ...
    }
}
```

Общерекурсивные функции

Определение

Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов Z, N, U, S, R и примитива минимизации:

$$M\langle f\rangle(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) > 0$ при любом y, результат неопределён.

Общерекурсивные функции

Определение

Функция — общерекурсивная, если может быть построена при помощи примитивов Z, N, U, S, R и примитива минимизации:

$$M\langle f\rangle(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \min\{y : f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = 0\}$$

Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) > 0$ при любом y, результат неопределён.

Пример:
Пусть $f(x, y) = x - y^2$, тогда $\lceil\sqrt{x}\rceil = M\langle f\rangle(x)$

```
int sqrt(int x) {
    int y = 0;
    while (x-y*y > 0) y++;
    return y;
}
```

Выразительная сила

Определение

Функция Аккермана:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & m = 0 \\ A(m-1,1), & m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Теорема

Функция Аккермана — общерекурсивная, но не примитивно-рекурсивная.

Выразительная сила

Определение

Функция Аккермана:

$$A(m,n) = \begin{cases} n+1, & m = 0 \\ A(m-1,1), & m > 0, n = 0 \\ A(m-1, A(m, n-1)), & m > 0, n > 0 \end{cases}$$

Теорема

Функция Аккермана — общерекурсивная, но не примитивно-рекурсивная.

Определение

Тезис Чёрча для общерекурсивных функций: любая эффективно-вычислимая функция $\mathbb{N}_0^k \to \mathbb{N}_0$ является общерекурсивной.

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \ldots, x_n := \theta_n]$

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \ldots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \ldots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \textit{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \textit{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \textit{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \textit{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$.

Новые обозначения

Определение

Запись вида $\psi(\theta_1, \dots, \theta_n)$ *означает* $\psi[x_1 := \theta_1, \dots, x_n := \theta_n]$

Определение (Литерал числа)

$$\overline{a} = \begin{cases} 0, & \textit{если } a = 0 \\ (\overline{b})', & \textit{если } a = b + 1 \end{cases}$$

Пример: пусть $\psi := x_1 = 0$. Тогда $\psi(\overline{3})$ соответствует формуле $0''' = 0$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ, что:

1. *если* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ, что:

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* ρ, *что:*

1. *если* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$.

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* ρ*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$:

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ *выразимо в ФА, если существует формула* ρ*, что:*

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ, что:

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$*, то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$*, то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.

Выразимость отношений в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что отношение $R \subseteq \mathbb{N}_0^n$ выразимо в ФА, если существует формула ρ, что:

1. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in R$, *то* $\vdash \rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$
2. *если* $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \notin R$, *то* $\vdash \neg\rho(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n})$

Теорема

отношение «равно» выразимо в Ф.А.: $R = \{\langle x, x \rangle \mid x \in \mathbb{N}_0\}$

Доказательство.

Пусть $\rho := x_1 = x_2$. Тогда:

- $\vdash p = p$ при $p := \overline{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}_0$: $\vdash 0 = 0$, $\vdash 0' = 0'$, $\vdash 0'' = 0''$, ...
- $\vdash \neg p = q$ при $p := \overline{k}$, $q := \overline{s}$ при всех $k, s \in \mathbb{N}_0$ и $k \neq s$.
  $\vdash \neg 0 = 0'$, $\vdash \neg 0 = 0''$, $\vdash \neg 0''' = 0'$, ...

$\square$

Представимость функций в Ф.А.

Определение

Будем говорить, что функция $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ *представима в ФА, если существует формула* φ, *что:*

1. *если* $f(a_1, \dots, a_n) = u$, *то* $\vdash \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
2. *если* $f(a_1, \dots, a_n) \neq u$, *то* $\vdash \neg\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, \overline{u})$
3. *для всех* $a_i \in \mathbb{N}_0$ *выполнено*
   $\vdash (\exists x.\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, x)) \mathbin{\&} (\forall p.\forall q.\varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, p) \mathbin{\&} \varphi(\overline{a_1}, \dots, \overline{a_n}, q) \to p = q)$

Соответствие рекурсивных и представимых функций

Теорема

Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.

Соответствие рекурсивных и представимых функций

Теорема

Любая рекурсивная функция представима в Ф.А.

Теорема

Любая представимая в Ф.А. функция рекурсивна.

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$,

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \;\&\; x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$
- $\upsilon(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$

Примитивы Z, N, U представимы в Ф.А.

Теорема

Примитивы Z, N и U_n^k представимы в Ф.А.

Доказательство.

- $\zeta(x_1, x_2) := x_2 = 0$, формальнее: $\zeta(x_1, x_2) := x_1 = x_1 \,\&\, x_2 = 0$
- $\nu(x_1, x_2) := x_2 = x_1'$
- $\upsilon(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := x_k = x_{n+1}$
  формальнее: $\upsilon(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) := (\underset{i \neq k, n+1}{\&} x_i = x_i) \,\&\, x_k = x_{n+1}$

$\square$

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.

Доказательство.

Пусть f, g_1, ..., g_k представляются формулами φ, γ_1, ..., γ_k.

Примитив S представим в Ф.А.

$$S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_k(x_1, \ldots, x_n))$$

Теорема

Пусть функции $f, g_1, \ldots, g_k$ представимы в Ф.А. Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ представима в Ф.А.

Доказательство.

Пусть f, g_1, ..., g_k представляются формулами φ, γ_1, ..., γ_k.
Тогда $S\langle f, g_1, \ldots, g_k\rangle$ будет представлена формулой

$$\exists g_1. \ldots. \exists g_k. \varphi(g_1, \ldots, g_k, x_{n+1}) \mathbin{\&} \gamma_1(x_1, \ldots, x_n, g_1) \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \gamma_k(x_1, \ldots, x_n, g_k)$$

$\square$

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

Теорема

β-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

Теорема

β-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \leq d < x$.

β-функция Гёделя

Задача: закодировать последовательность натуральных чисел произвольной длины.

Определение

β-функция Гёделя: $\beta(b, c, i) := b\%(1 + (i + 1) \cdot c)$
Здесь (%) — остаток от деления.

Теорема

β-функция Гёделя представима в Ф.А. формулой

$$\hat{\beta}(b, c, i, d) := \exists q.(b = q \cdot (1 + c \cdot (i + 1)) + d)\&(d < 1 + c \cdot (i + 1))$$

Деление b на x с остатком: найдутся частное (q) и остаток (d), что $b = q \cdot x + d$ и $0 \le d < x$.

Теорема

Если $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{N}_0$, то найдутся такие $b, c \in \mathbb{N}_0$, что $a_i = \beta(b, c, i)$

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ *— попарно взаимно-просты, и* $0 \leq a_i < u_i$, *то существует такой* b, *что* $a_i = b \% u_i$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \neq j$.

  Пусть p — простое, $u_i \mathrel{\vdots} p$ и $u_j \mathrel{\vdots} p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \mathrel{\vdots} p$ или $(j - i) \mathrel{\vdots} p$. Так как $j - i \le n$, то $c \mathrel{\vdots} (j - i)$, потому если и $(j - i) \mathrel{\vdots} p$, всё равно $c \mathrel{\vdots} p$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \dots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b \% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \dots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \,\vdots\, p$ и $u_j \,\vdots\, p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \,\vdots\, p$ или $(j - i) \,\vdots\, p$. Так как $j - i \le n$, то $c \,\vdots\, (j - i)$, потому если и $(j - i) \,\vdots\, p$, всё равно $c \,\vdots\, p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \,\vdots\, p$, отсюда $1 \,\vdots\, p$ — что невозможно.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\%u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$. Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.
- $0 \le a_i < u_i$.

Доказательство свойства β-функции

Теорема

Китайская теорема об остатках (вариант формулировки): если $u_0, \ldots, u_n$ — попарно взаимно-просты, и $0 \le a_i < u_i$, то существует такой b, что $a_i = b\% u_i$.

Положим $c = \max(a_0, \ldots, a_n, n)!$ и $u_i = 1 + c \cdot (i + 1)$.

- НОД$(u_i, u_j) = 1$, если $i \ne j$.

  Пусть p — простое, $u_i \vdots p$ и $u_j \vdots p$ $(i < j)$. Заметим, что $u_j - u_i = c \cdot (j - i)$.

  Значит, $c \vdots p$ или $(j - i) \vdots p$. Так как $j - i \le n$, то $c \vdots (j - i)$, потому если и $(j - i) \vdots p$, всё равно $c \vdots p$. Но и $(1 + c \cdot (i + 1)) \vdots p$, отсюда $1 \vdots p$ — что невозможно.
- $0 \le a_i < u_i$.

Условия китайской теоремы об остатках выполнены и найдётся b, что

$$a_i = b\%(1 + c \cdot (i + 1)) = \beta(b, c, i)$$

$\square$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$
$\dots$		
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$	a_y	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{a_0})$
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, 1) = g(x_1, \dots, x_n, 0, a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, 0, \overline{a_1})$
$\dots$		
$R\langle f, g\rangle(x_1, \dots, x_n, y) = g(x_1, \dots, x_n, y-1, a_{y-1})$	a_y	$\vdash \gamma(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y-1}, \overline{a_y})$

По свойству β-функции, найдутся b и c, что $\beta(b, c, i) = a_i$ для $0 \le i \le y$.

Примитив «примитивная рекурсия» представим в Ф.А.

Пусть $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$ и $g : \mathbb{N}_0^{n+2} \to \mathbb{N}_0$ представлены формулами φ и γ.
Зафиксируем $x_1, \dots, x_n, y \in \mathbb{N}_0$.

Шаг вычисления	Об.	Утверждение в Ф.А.
$R\langle f,g\rangle(x_1,\dots,x_n,0) = f(x_1,\dots,x_n)$	a_0	$\vdash \varphi(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n},\overline{a_0})$
$R\langle f,g\rangle(x_1,\dots,x_n,1) = g(x_1,\dots,x_n,0,a_0)$	a_1	$\vdash \gamma(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n},0,\overline{a_1})$
$\dots$		
$R\langle f,g\rangle(x_1,\dots,x_n,y) = g(x_1,\dots,x_n,y-1,a_{y-1})$	a_y	$\vdash \gamma(\overline{x_1},\dots,\overline{x_n},\overline{y-1},\overline{a_y})$

По свойству β-функции, найдутся b и c, что $\beta(b,c,i) = a_i$ для $0 \le i \le y$.

Теорема

Примитив $R\langle f,g\rangle$ представим в Ф.А. формулой $\rho(x_1,\dots,x_n,y,a)$:

$$\begin{array}{ll} & \exists b.\exists c.(\exists a_0.\hat\beta(b,c,0,a_0)\&\varphi(x_1,...x_n,a_0)) \\ \& & \forall k.k<y \to \exists d.\exists e.\hat\beta(b,c,k,d)\&\hat\beta(b,c,k',e)\&\gamma(x_1,..x_n,k,d,e) \\ \& & \hat\beta(b,c,y,a) \end{array}$$

Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

Теорема

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$*.*
Тогда примитив $M\langle f \rangle$ *представим в Ф.А. формулой*

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \,\&\, \forall u. u < y \to \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

Представимость рекурсивных функций в Ф.А.

Теорема

Пусть функция $f : \mathbb{N}_0^{n+1} \to \mathbb{N}_0$ *представима в Ф.А. формулой* $\varphi(x_1, \dots, x_n, y, r)$. *Тогда примитив* $M\langle f \rangle$ *представим в Ф.А. формулой*

$$\mu(x_1, \dots, x_n, y) := \neg\varphi(x_1, \dots, x_n, y, 0) \,\&\, \forall u.u < y \to \varphi(x_1, \dots, x_n, u, 0)$$

Теорема

Если f *— рекурсивная функция, то она представима в Ф.А.*

Доказательство.

Индукция по структуре f. $\square$

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.

Рекурсивность представимых функций в Ф.А.

Фиксируем f и $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. По представимости нам известна φ, что $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$. Давайте просто переберём все результаты и доказательства!

1. Закодируем доказательства натуральными числами.
2. Напишем рекурсивную функцию, проверяющую доказательства на корректность.
3. Параллельный перебор значений и доказательств: $s = 2^y \cdot 3^p$. Переберём все s, по s получим y и p. Проверим, что p — код доказательства $\vdash \varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(	17	$\&$	0	$0, 0$	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	$(')$	$0, 1$	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	$(+)$	$0, 2$	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	$(\cdot)$	$1, 2$	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	x_k	$(=)$	$0, 2$	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	(	17	&	0	$0, 0$	$27 + 6$
5	)	19	$\forall$	$(')$	$0, 1$	$27 + 6 \cdot 3$
7	,	21	$\exists$	$(+)$	$0, 2$	$27 + 6 \cdot 9$
9	.	23	$\vdash$	$(\cdot)$	$1, 2$	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	x_k	$(=)$	$0, 2$	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\to$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.

Гёделева нумерация

1. Отдельный символ.

Номер	Символ	Номер	Символ	Имя	k, n	Гёделев номер
3	$($	17	$\&$	0	$0, 0$	$27 + 6$
5	$)$	19	$\forall$	$(')$	$0, 1$	$27 + 6 \cdot 3$
7	$,$	21	$\exists$	$(+)$	$0, 2$	$27 + 6 \cdot 9$
9	$.$	23	$\vdash$	$(\cdot)$	$1, 2$	$27 + 6 \cdot 2 \cdot 9$
11	$\neg$	$25 + 6 \cdot k$	x_k	$(=)$	$0, 2$	$29 + 6 \cdot 9$
13	$\rightarrow$	$27 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	f_k^n			
15	$\vee$	$29 + 6 \cdot 2^k \cdot 3^n$	P_k^n			

2. Формула. $\phi \equiv s_0 s_1 \ldots s_{n-1}$. Гёделев номер: $\ulcorner \phi \urcorner = 2^{\ulcorner s_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner s_1 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_{n-1}^{\ulcorner s_{n-1} \urcorner}$.
3. Доказательство. $\Pi = \delta_0 \delta_1 \ldots \delta_{k-1}$, его гёделев номер: $\ulcorner \Pi \urcorner = 2^{\ulcorner \delta_0 \urcorner} \cdot 3^{\ulcorner \delta_1 \urcorner} \cdot \ldots \cdot p_{k-1}^{\ulcorner \delta_{k-1} \urcorner}$

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$proof(f, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — \textit{гёделев номер вывода}}, f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$proof(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \text{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — гёделев номер вывода}, f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.

Проверка доказательства на корректность

Теорема

Следующая функция рекурсивна:

$$proof(f, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \vdash \phi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y}), \\ & p \text{ — \textit{гёделев номер вывода}}, f = \ulcorner \phi \urcorner \\ 0, & \textit{иначе} \end{cases}$$

Идея доказательства.

1. Проверка доказательства вычислима.
2. Согласно тезису Чёрча, любая вычислимая функция вычислима с помощью рекурсивных функций.

$\square$

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \rightarrow \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ищем $\langle y, p \rangle$, что $\mathrm{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \ldots, x_n, y, p) = 1$,

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ищем $\langle y, p\rangle$, что $\mathrm{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p = \ulcorner\Pi\urcorner$, Π — доказательство $\varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

Перебор доказательств

Лемма

Следующие функции рекурсивны:

1. *Функции* $plog_k(n) = \max\{p : n \vdots k^p\}$, $fst(x) = plog_2(x)$ *и* $snd(x) = plog_3(x)$.
2. *Числовые литералы:* $\overline{k} : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, $\overline{k}(x) = k$.

Теорема

Если $f : \mathbb{N}_0^n \to \mathbb{N}_0$, *и* f *представима в Ф.А. формулой* φ, *то* f *— рекурсивна.*

Доказательство.

Пусть заданы $x_1, x_2, \dots, x_n$. Ищем $\langle y, p\rangle$, что $\mathrm{proof}(\ulcorner\varphi\urcorner, x_1, x_2, \dots, x_n, y, p) = 1$, напомним: $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $p = \ulcorner\Pi\urcorner$, Π — доказательство $\varphi(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \dots, \overline{x_n}, \overline{y})$.

$$f = S\langle \mathrm{fst}, M\langle S\langle \mathrm{proof}, \overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, U^1_{n+1}, U^2_{n+1}, \dots, U^n_{n+1}, S\langle \mathrm{fst}, U^{n+1}_{n+1}\rangle, S\langle \mathrm{snd}, U^{n+1}_{n+1}\rangle\rangle\rangle\rangle$$

$\square$

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Парадокс лжеца

Предложение, указанное в центре данного слайда — ложное.

Проблема останова

Теорема

Невозможно разработать программу (функцию) `bool p (string source, string arg)`*, возвращающую* `true`*, если программа с исходным кодом* `source` *имеет один аргумент типа* `string` *и оканчивает работу, если ей передать на вход значение* `arg`*.*

Доказательство.

- Определим программу

```
bool s (std::string arg) {
      if (s (arg)) { while (true); }
      return true;
}
```

- Пусть её полный исходный код — в переменной `source`.
- Что вернёт `p (source, source)`?

□

Самоприменимость

Определение

Определим функцию W_1*:* $W_1(x, p) = 1$*, если* $x = \ulcorner\xi\urcorner$*, где* ξ *— формула с единственной свободной переменной* x_1*, а* p *— доказательство самоприменения* ξ*:*

$$\vdash \xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$$

$W_1(x, p) = 0$*, если это не так.*

Теорема Гёделя, вспомогательные определения

Теорема

Существует формула ω_1 со свободными переменными x_1 и x_2 такая, что:

1. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p})$, *если p — гёделев номер доказательства самоприменения φ;*
2. $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\varphi\urcorner}, \overline{p})$ *иначе.*

Доказательство.

Опираясь на рекурсивность функции proof, легко показать рекурсивность W_1. Значит, эта функция представима в формальной арифметике некоторой формулой τ_1. Возьмём $\omega_1(x_1, x_2) := \tau_1(x_1, x_2, \overline{1})$. $\square$

Определение

Определим формулу $\sigma(x) := \forall p.\neg\omega(x, p)$

Омега-непротиворечивость

Определение

Если для любой формулы $\phi(x)$ из $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\overline{1}), \vdash \phi(\overline{2})$, ... выполнено $\nvdash \exists x.\neg\phi(x)$, то теория омега-непротиворечива.

Теорема

Омега-непротиворечивость влечёт непротиворечивость

Доказательство.

Пусть $\phi(x) \equiv (x = x) \rightarrow (x = x) \rightarrow (x = x)$. Тогда $\vdash \phi(x)$ при всех x. Тогда $\nvdash \exists x.\neg\phi(x)$ — то есть существует недоказуемая формула, т.е. теория непротиворечива. $\square$

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- *Если формальная арифметика непротиворечива, то* $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.
- *Если формальная арифметика* ω*-непротиворечива, то* $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.