Теоремы Гёделя о неполноте арифметики

Самоприменимость

Определение

Пусть ξ *— формула с единственной свободной переменной* x_1*. Тогда:*
$\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in W_1$*, если* $\vdash \xi(\overline{\ulcorner \xi \urcorner})$ *и* p *— номер доказательства.*

Определение

Отношение W_1 *рекурсивно, поэтому выражено в Ф.А. формулой* ω_1 *со свободными переменными* x_1 *и* x_2*, причём:*

1. $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$*, если* p *— гёделев номер доказательства самоприменения* φ*;*
2. $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner \varphi \urcorner}, \overline{p})$ *иначе.*

Определение

Определим формулу $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$*.*

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Определение

Если для любой формулы $\phi(x)$ *из* $\vdash \phi(0), \vdash \phi(\overline{1}), \vdash \phi(\overline{2}), \dots$ *выполнено* $\nvdash \exists x.\neg\phi(x)$*, то теория омега-непротиворечива.*

Теорема

Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики

- *Если формальная арифметика непротиворечива, то* $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.
- *Если формальная арифметика* ω*-непротиворечива, то* $\nvdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner \sigma \urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$?

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{1})$, ...

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{1})$, ... По ω-непротиворечивости $\not\vdash \exists p.\neg\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{1})$, ... По ω-непротиворечивости $\nvdash \exists p.\neg\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

  Значит, найдётся натуральное p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{1})$, $\dots$ По ω-непротиворечивости $\not\vdash \exists p.\neg\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

  Значит, найдётся натуральное p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. То есть, $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{1})$, ... По ω-непротиворечивости $\not\vdash \exists p.\neg\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

  Значит, найдётся натуральное p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. То есть, $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения W_1: $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Доказательство теоремы Гёделя

Напомним: $\sigma(x_1) := \forall p.\neg\omega_1(x_1, p)$. $W_1(\ulcorner\xi\urcorner, p)$ — p есть доказательство самоприменения ξ.

Доказательство.

- Пусть $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Значит, p — номер доказательства. Тогда $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. Тогда $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. Тогда $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.
- Пусть $\vdash \neg\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть $\vdash \exists p.\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.
  - Но найдётся ли натуральное число p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$? Пусть нет. То есть $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{0})$, $\vdash \neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{1})$, ... По ω-непротиворечивости $\not\vdash \exists p.\neg\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

  Значит, найдётся натуральное p, что $\vdash \omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, \overline{p})$. То есть, $\langle\ulcorner\sigma\urcorner, p\rangle \in W_1$. То есть, p — доказательство самоприменения W_1: $\vdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Противоречие.

$\square$

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Рассмотрим Ф.А. с классической моделью.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема.
Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема. Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \equiv \forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$: нет числа p, что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема. Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \equiv \forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$: нет числа p, что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, $[\![\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}), p)]\!] = И$.

Почему теорема о неполноте?

Теорема

Формальная арифметика с классической моделью — неполна

Доказательство.

Полная теория — теория, в которой любая общезначимая формула доказуема. Рассмотрим Ф.А. с классической моделью. Из теоремы Гёделя имеем $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Рассмотрим $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}) \equiv \forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$: нет числа p, что p — номер доказательства $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, $[\![\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}), p)]\!] =$ И. То есть, $\models \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. □

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$\theta_1 \le \theta_2 \equiv \exists p.p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \le \theta_2 \,\&\, \neg \theta_1 = \theta_2$

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$\theta_1 \le \theta_2 \equiv \exists p.p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \le \theta_2 \,\&\, \neg\theta_1 = \theta_2$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner\xi\urcorner, p\rangle \in W_2$, *если* $\vdash \neg\xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$. *Пусть* ω_2 *выражает* W_2 *в формальной арифметике*

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$\theta_1 \le \theta_2 \equiv \exists p.p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \le \theta_2 \mathbin{\&} \neg\theta_1 = \theta_2$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner\xi\urcorner, p\rangle \in W_2$, *если* $\vdash \neg\xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$. *Пусть* ω_2 *выражает* W_2 *в формальной арифметике*

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p.\omega_1(x_1, p) \to \exists q.q \le p \mathbin{\&} \omega_2(x_2, q)$.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$\theta_1 \le \theta_2 \equiv \exists p.p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \le \theta_2 \,\&\, \neg\theta_1 = \theta_2$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner\xi\urcorner, p\rangle \in W_2$, *если* $\vdash \neg\xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$. *Пусть* ω_2 *выражает* W_2 *в формальной арифметике*

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p.\omega_1(x_1, p) \to \exists q.q \le p \,\&\, \omega_2(x_2, q)$. *Тогда* $\nvdash \rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$ *и* $\nvdash \neg\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$.

Первая теорема Гёделя о неполноте в форме Россера

Определение

$\theta_1 \le \theta_2 \equiv \exists p.p + \theta_1 = \theta_2 \qquad \theta_1 < \theta_2 \equiv \theta_1 \le \theta_2 \,\&\, \neg\theta_1 = \theta_2$

Определение

Пусть $\langle \ulcorner\xi\urcorner, p\rangle \in W_2$, *если* $\vdash \neg\xi(\overline{\ulcorner\xi\urcorner})$. *Пусть* ω_2 *выражает* W_2 *в формальной арифметике*

Теорема

Рассмотрим $\rho(x_1) = \forall p.\omega_1(x_1, p) \to \exists q.q \le p \,\&\, \omega_2(x_2, q)$. *Тогда* $\nvdash \rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$ *и* $\nvdash \neg\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$. $\rho(\overline{\ulcorner\rho\urcorner})$: *«Меня легче опровергнуть, чем доказать»*

Формальное доказательство

Неполнота варианта теории, изложенной выше, формально доказана на Coq, Russell O'Connor, 2005:

"My proof, excluding standard libraries and the library for Pocklington's criterion, consists of 46 source files, 7 036 lines of specifications, 37 906 lines of proof, and 1 267 747 total characters. The size of the gzipped tarball (gzip -9) of all the source files is 146 008 bytes, which is an estimate of the information content of my proof."

```
Theorem Incompleteness : forall T : System,
  Included Formula NN T ->
  RepresentsInSelf T ->
  DecidableSet Formula T ->
  exists f : Formula,
  Sentence f/\(SysPrf T f \/ SysPrf T (notH f) -> Inconsistent LNN T).
```

Consis

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in$ *Proof, если p — гёделев номер доказательства* ξ*.*

Consis

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in$ *Proof, если p — гёделев номер доказательства* ξ*.*
Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p.\psi(x, p)$

Consis

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$*, если* p *— гёделев номер доказательства* ξ*.*
Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p.\psi(x, p)$

Определение

Формулой Consis назовём формулу $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Consis

Определение

Обозначим за $\psi(x, p)$ *формулу, выражающую в формальной арифметике рекурсивное отношение Proof:* $\langle \ulcorner \xi \urcorner, p \rangle \in Proof$*, если* p *— гёделев номер доказательства* ξ*.*
Обозначим $\pi(x) \equiv \exists p.\psi(x, p)$

Определение

Формулой Consis назовём формулу $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$

Неформальный смысл: «формальная арифметика непротиворечива»

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально)

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$».

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$.

Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики

Теорема

Если Consis доказуем, то формальная арифметика противоречива.

Доказательство.

(неформально) Формулировка 1 теоремы Гёделя о неполноте арифметики: «если Ф.А. непротиворечива, то недоказуемо $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$». То есть, $\forall p.\neg\omega_1(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner}, p)$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. То есть, если Consis, то $\sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$, — и это можно доказать, то есть $\vdash \text{Consis} \rightarrow \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. Однако если формальная арифметика непротиворечива, то $\nvdash \sigma(\overline{\ulcorner\sigma\urcorner})$. □

Условия выводимости Гильберта-Бернайса-Лёфа

Определение

Будем говорить, что формула ψ, выражающая отношение Proof, формула π и формула Consis соответствуют условиям Гильберта-Бернайса-Лёфа, если следующие условия выполнены для любой формулы α:

1. $\vdash \alpha$ *влечет* $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner})$
2. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner})$
3. $\vdash \pi(\overline{\ulcorner \alpha \rightarrow \beta \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \rightarrow \pi(\overline{\ulcorner \beta \urcorner})$

Первая теорема Гёделя о неполноте ещё раз

Лемма

Лемма об автоссылках. Для любой формулы $\phi(x_1)$ можно построить такую замкнутую формулу α (не использующую неаксиоматических предикатных и функциональных символов), что $\vdash \phi(\overline{\ulcorner\alpha\urcorner}) \leftrightarrow \alpha$.

Теорема

Существует такая замкнутая формула γ, что если Ф.А. непротиворечива, то $\nvdash \gamma$, а если Ф.А. ω-непротиворечива, то и $\nvdash \neg\gamma$.

Доказательство.

Рассмотрим $\phi(x_1) \equiv \neg\pi(x_1)$. Тогда по лемме об автоссылках существует γ, что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$.

- Предположим, что $\vdash \gamma$. Тогда $\vdash \gamma \rightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$, то есть $\nvdash \gamma$
- Предположим, что $\vdash \neg\gamma$. Тогда $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$, то есть $\vdash \exists p.\psi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}, p)$. Тогда по ω-непротиворечивости найдётся p, что $\vdash \psi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}, \overline{p})$, то есть $\vdash \gamma$.

$\square$

Доказательство второй теоремы Гёделя

1. Пусть γ таково, что $\vdash \gamma \leftrightarrow \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$.
2. Покажем $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$.
   2.1 По условию 2, $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \to \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner})$. По теореме о дедукции $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner})$;
   2.2 Так как $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \to \neg\gamma$, то по условию 1 $\vdash \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \to \neg\gamma\urcorner})$;
   2.3 По условию 3, $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})\urcorner}) \to \pi(\overline{\ulcorner\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \to \neg\gamma\urcorner}) \to \pi(\overline{\ulcorner\neg\gamma\urcorner})$;
   2.4 Таким образом, $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner\neg\gamma\urcorner})$;
   2.5 Однако, $\vdash \gamma \to \neg\gamma \to 1 = 0$. Условие 3 (применить два раза) даст $\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner}) \vdash \pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner})$.
3. $\neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}) \to \neg\pi(\overline{\ulcorner\gamma\urcorner})$ (т. о дедукции, контрапозиция).
4. $\vdash \neg\pi(\overline{\ulcorner 1 = 0 \urcorner}) \to \gamma$ (определение γ).