

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$:

j — гёделев номер названия научного журнала (книги);

y — год издания;

n — номер;

p — страница;

r — строка;

c — позиция

Как пересчитать вещественные числа (неформально)?

1. Номер вещественного числа — первое упоминание в литературе, т.е.

$\langle j, y, n, p, r, c \rangle$:

j — гёделев номер названия научного журнала (книги);

y — год издания;

n — номер;

p — страница;

r — строка;

c — позиция

2. Попробуете предъявить число x , не имеющее номера? Это рассуждение сразу даст номер.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D .

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D .

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n . Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Мощность модели и аксиоматизации

Определение

Пусть задана модель $\langle D, F_n, P_n \rangle$ для некоторой теории первого порядка. Её мощностью будем считать мощность D .

Определение

Пусть задана формальная теория с аксиомами α_n . Её мощность — мощность множества $\{\alpha_n\}$.

Пример

Формальная арифметика, исчисление предикатов, исчисление высказываний — счётно-аксиоматизируемые.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$,

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение \mathcal{M} не является элементарной подмоделью?

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение \mathcal{M} не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$. Истинно в \mathbb{N} .

Элементарная подмодель

Определение

$\mathcal{M}' = \langle D', F'_n, P'_n \rangle$ — элементарная подмодель $\mathcal{M} = \langle D, F_n, P_n \rangle$, если:

1. $D' \subseteq D$, F'_n, P'_n — сужение F_n, P_n (замкнутое на D').
2. $\mathcal{M} \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M}' \models \varphi(x_1, \dots, x_n)$ при $x_i \in D'$.

Пример

Когда сужение \mathcal{M} не является элементарной подмоделью?

$\forall x. \exists y. x \neq y$. Истинно в \mathbb{N} . Но пусть $D' = \{\square\}$.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель \mathcal{M} . Тогда найдётся элементарная подмодель \mathcal{M}' , причём $|\mathcal{M}'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель M . Тогда найдётся элементарная подмодель M' , причём $|M'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.

Теорема Лёвенгейма-Сколема

Теорема

Пусть T — множество всех формул теории первого порядка. Пусть теория имеет некоторую модель M . Тогда найдётся элементарная подмодель M' , причём $|M'| = \max(\aleph_0, |T|)$.

Доказательство.

(Схема доказательства)

1. Построим D_0 — множество всех значений, которые упомянуты в языке теории.
2. Будем последовательно пополнять D_i : $D_0 \subseteq D_1 \subseteq D_2 \dots$, следя за мощностью. $D' = \bigcup D_i$.
3. Покажем, что $\langle D', F_n, P_n \rangle$ — требуемая подмодель.



Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D .

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D .

Начальный D_0

Пусть $\{f_k^0\}$ — все 0-местные функциональные символы теории.

1. $D_0 = \{\llbracket f_k^0 \rrbracket\}$, если есть хотя бы один f_k^0 .
2. Если таких f_k^0 нет, возьмём какое-нибудь одно значение из D .

Очевидно, $|D_0| \leq |T|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории.
Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} .

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} . Вместе добавим всевозможные $\llbracket \theta(y') \rrbracket$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} . Вместе добавим всевозможные $\llbracket \theta(y') \rrbracket$.

Всего добавили не больше $|T| \cdot |D_k|$.

Пополнение D

Фиксируем некоторый D_k . Напомним, T — множество всех формул теории. Рассмотрим $\varphi \in T$.

1. φ не имеет свободных переменных — пропустим.
2. φ имеет хотя бы одну свободную переменную y .
 - 2.1 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ бывает истинным и ложным — ничего не меняем
 - 2.2 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y \in D$ и $x_i \in D_k$ либо всегда истинен, либо всегда ложен — ничего не меняем
 - 2.3 $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ при $y, x_i \in D_k$ тождественно истинен или ложен, но при $y' \in D \setminus D_k$ отличается — добавим y' к D_{k+1} . Вместе добавим всевозможные $\llbracket \theta(y') \rrbracket$.

Всего добавили не больше $|T| \cdot |D_k| \cdot |\cup D_i| \leq |T| \cdot |D_k| \cdot |\aleph_0| = \max(|T|, |\aleph_0|)$

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t .

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall y. \varphi(y, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(y, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $y_t, y_f \in D$, то $y_t, y_f \in D_{t+1}$ (по построению).

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $u_t, u_f \in D$, то $u_t, u_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $u_t, u_f \in D$, то $u_t, u_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от u , то тем более $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

\mathcal{M}' — элементарная подмодель

Индукцией по структуре формул $\tau \in T$ покажем, что все формулы можно вычислить, и что $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.

1. База, 0 связок. $\tau \equiv P(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))$. Если $x_i \in D'$, то значит, добавлены на некоторых шагах (максимальный пусть t). Поэтому в D_{t+1} можно вычислить формулу, и её значение сохранилось.
2. Переход. Пусть формулы из k связок сохраняют значения. Рассмотрим τ с $k + 1$ связкой.
 - 2.1 $\tau \equiv \rho \star \sigma$ — очевидно.
 - 2.2 $\tau \equiv \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Каждый x_i добавлен на каком-то шаге — максимум t . Если $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ бывает истинен и ложен при $u_t, u_f \in D$, то $u_t, u_f \in D_{t+1}$ (по построению). Поэтому, если $\mathcal{M} \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$, то и $\mathcal{M}' \not\models \forall u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$. Если же $\varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ не меняется от u , то тем более $\llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}'} = \llbracket \varphi \rrbracket_{\mathcal{M}}$.
 - 2.3 $\tau \equiv \exists u. \varphi(u, x_1, \dots, x_n)$ — аналогично.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке.

«Парадокс» Сколема

1. Как известно, $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| > |\mathbb{N}| = \aleph_0$. Однако, ZFC — счётно-аксиоматизируемая теория. Значит, существует счётная модель ZFC, то есть $|\mathbb{R}| = \aleph_0$. В чём ошибка?
2. У равенств разный смысл, первое — в предметном языке, второе — в метаязыке. Внутри теории не выразить все способы нумерации, которые возможны.