Теоремы об исчислении высказываний.

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

Контекст, метаязык

Будем обозначать большими греческими буквами середины алфавита, возможно с индексами, (Γ, Δ_1, ...) списки формул. Будем использовать, где удобно:

$$\Gamma \vdash \alpha$$

Списки можно указывать через запятую:

$$\Gamma, \Delta, \zeta \vdash \alpha$$

это означает то же, что и

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m, \zeta \vdash \alpha$$

если

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}, \quad \Delta = \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m\}$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \alpha \rightarrow \beta$$

Теорема о дедукции

Theorem (О дедукции, Жак Эрбран, 1930)

$\Gamma, \alpha \vdash \beta$ *выполнено тогда и только тогда, когда выполнено* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство «в две стороны», сперва «справа налево». Пусть $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, покажем $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

То есть по условию существует вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Тогда следующая последовательность — тоже вывод:

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \alpha \to \beta, \alpha, \beta$$

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \rightarrow \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens n+1, n

Доказательство: $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ влечёт $\Gamma, \alpha \vdash \beta$

№ п/п	формула	пояснение
(1)	δ_1	в соответствии с исходным доказательством
	$\dots$	
$(n-1)$	δ_{n-1}	в соответствии с исходным доказательством
(n)	$\alpha \to \beta$	в соответствии с исходным доказательством
$(n+1)$	α	гипотеза
$(n+2)$	β	Modus Ponens n+1, n

Вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ предоставлен, первая часть теоремы доказана.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.
Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \ldots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.
Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma = \varnothing$, $\alpha = A$

$$A \to B \to A$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Пусть даны формулы вывода

$$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_{n-1}, \beta$$

Аналогично предыдущему пункту, перестроим вывод.
Построим «черновик» вывода, приписав α слева к каждой формуле:

$$\alpha \to \delta_1, \alpha \to \delta_2, \dots, \alpha \to \delta_{n-1}, \alpha \to \beta$$

Данная последовательность формул не обязательно вывод: $\Gamma = \varnothing$, $\alpha = A$

$$A \to B \to A$$

припишем A слева — вывод не получим:

$$A \to (A \to B \to A)$$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Утверждение: если данная последовательность n высказываний — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то его можно перестроить в $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

- База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \ldots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже перестроен вывод $\delta_1, \ldots, \delta_n$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$. Дострoим его. Рассмотрим 3 случая.
  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$ (выполнено без доказательства в новом выводе)

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Утверждение: если данная последовательность n высказываний — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то его можно перестроить в $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

- База ($n = 1$): частный случай перехода (без М.Р.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже перестроен вывод $\delta_1, \dots, \delta_n$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$. Достроим его. Рассмотрим 3 случая.
  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$ (выполнено без доказательства в новом выводе)
  2. δ_{n+1} — гипотеза α

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Доказательство.

(индукция по длине вывода). Утверждение: если данная последовательность n высказываний — вывод $\Gamma, \alpha \vdash \beta$, то его можно перестроить в $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

- База ($n = 1$): частный случай перехода (без M.P.).
- Переход. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_{n+1}$ — исходный вывод. И пусть (по индукционному предположению) уже перестроен вывод $\delta_1, \dots, \delta_n$ в вывод $\Gamma \vdash \alpha \to \delta_n$. Достроим его. Рассмотрим 3 случая.
  1. δ_{n+1} — аксиома или $\delta_{n+1} \in \Gamma$ (выполнено без доказательства в новом выводе)
  2. δ_{n+1} — гипотеза α
  3. δ_{n+1} — получено по правилу Modus Ponens из предыдущих формул δ_j и $\delta_k = \delta_j \to \delta_{n+1}$.

  В каждом из случаев можно дополнить черновик до полноценного вывода.

$\square$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	...	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	...	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	...	
(n)	$\alpha \to \delta_n$	
	$\alpha \to \delta_{n+1}$	δ_{n+1} — аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$, случай аксиомы

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\ldots$	
(1)	$\alpha \rightarrow \delta_1$	
	$\ldots$	
(2)	$\alpha \rightarrow \delta_2$	
	$\ldots$	
$(n+0.3)$	$\delta_{n+1} \rightarrow \alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	схема аксиом 1
$(n+0.6)$	δ_{n+1}	аксиома, либо $\delta_{n+1} \in \Gamma$
$(n+1)$	$\alpha \rightarrow \delta_{n+1}$	Modus Ponens $n+0.3$, $n+0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай $\delta_i = \alpha$

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
$(n + 0.2)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 1
$(n + 0.4)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha)) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	Сх. акс. 2
$(n + 0.6)$	$(\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$	M.P. $n + 0.2$, $n + 0.4$
$(n + 0.8)$	$\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	Сх. акс. 1
$(n + 1)$	$\alpha \to \alpha$	M.P. $n + 0.8$, $n + 0.6$

Доказательство: $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ влечёт $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, случай Modus Ponens

№ п/п	новый вывод	пояснение
	$\dots$	
(1)	$\alpha \to \delta_1$	
	$\dots$	
(2)	$\alpha \to \delta_2$	
	$\dots$	
(j)	$\alpha \to \delta_j$	
	$\dots$	
(k)	$\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}$	
	$\dots$	
$(n+0.3)$	$(\alpha \to \delta_j) \to (\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	Сх. акс. 2
$(n+0.6)$	$(\alpha \to \delta_j \to \delta_{n+1}) \to (\alpha \to \delta_{n+1})$	M.P. j, $n+0.3$
$(n+1)$	$\alpha \to \delta_{n+1}$	Modus Ponens $n+0.6$, k

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α *и* β, *справедливо, что* $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Некоторые полезные правила

Лемма (Правило контрапозиции)

Каковы бы ни были формулы α и β, справедливо, что $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$

Лемма (правило исключённого третьего)

Какова бы ни была формула α, $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$

Лемма (об исключении допущения)

Пусть справедливо $\Gamma, \rho \vdash \alpha$ *и* $\Gamma, \neg\rho \vdash \alpha$. *Тогда также справедливо* $\Gamma \vdash \alpha$.

Доказательство.

Доказывается с использованием лемм, указанных выше. □

Теорема о полноте исчисления высказываний

Теорема

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

Специальное обозначение

Определение (условное отрицание)

Зададим некоторую оценку переменных, такую, что $[\![\alpha]\!] = x$.
Тогда условным отрицанием формулы α *назовём следующую формулу* $(\!|\alpha|\!)$*:*

$$(\!|\alpha|\!) = \begin{cases} \alpha, & x = \text{И} \\ \neg\alpha, & x = \text{Л} \end{cases}$$

Аналогично записи для оценок, будем указывать оценку переменных, если это потребуется / будет неочевидно из контекста:

$$(\!|\neg X|\!)^{X:=\text{Л}} = \neg\neg X \qquad (\!|\neg X|\!)^{X:=\text{И}} = \neg X$$

Также, если $\Gamma = \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$, то за $(\!|\Gamma|\!)$ обозначим $(\!|\gamma_1|\!), (\!|\gamma_2|\!), \dots (\!|\gamma_n|\!)$.

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$[\![A]\!]$	$[\![B]\!]$	$[\![A \to B]\!]$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \to B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \to B$
И	Л	Л	$\neg A, B \vdash \neg(A \to B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \to B$

Таблицы истинности и высказывания

Рассмотрим связку «импликация» и её таблицу истинности:

$[\![A]\!]$	$[\![B]\!]$	$[\![A \to B]\!]$	формула
Л	Л	И	$\neg A, \neg B \vdash A \to B$
Л	И	И	$\neg A, B \vdash A \to B$
И	Л	Л	$\neg A, B \vdash \neg(A \to B)$
И	И	И	$A, B \vdash A \to B$

Заметим, что с помощью условного отрицания данную таблицу можно записать в одну строку:

$$(\!|A|\!), (\!|B|\!) \vdash (\!|A \to B|\!)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:
$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$
2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:
$$(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$$

Полнота исчисления высказываний

Теорема (О полноте исчисления высказываний)

Если $\models \alpha$, *то* $\vdash \alpha$

1. Построим таблицы истинности для каждой связки $(\star)$ и докажем в них каждую строку:
$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$
2. Построим таблицу истинности для α и докажем в ней каждую строку:
$$(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$$
3. Если формула общезначима, то в ней все строки будут иметь вид $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, потому от гипотез мы сможем избавиться и получить требуемое $\vdash \alpha$.

Шаг 1. Лемма о связках

Запись

$$(\!|\varphi|\!), (\!|\psi|\!) \vdash (\!|\varphi \star \psi|\!)$$

сводится к 14 утверждениям:

$$\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \,\&\, \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \,\&\, \psi) \\
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \vee \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \vee \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \vee \psi)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
\neg\varphi, \neg\psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\neg\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi, \neg\psi & \vdash & \neg(\varphi \to \psi) \\
\varphi, \psi & \vdash & (\varphi \to \psi) \\
\varphi & \vdash & \neg\neg\varphi \\
\neg\varphi & \vdash & \neg\varphi
\end{array}$$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi = X_1, \ldots, X_n$ *— все переменные, которые используются в формуле* α. *И пусть задана некоторая оценка переменных.*
Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi = X_1, \dots, X_n$ *— все переменные, которые используются в формуле* α. *И пусть задана некоторая оценка переменных.*
Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α.

- База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha = X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$ и $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- Переход: $\alpha = \varphi \star \psi$, причём $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\psi|\!)$

Шаг 2. Обобщение на любую формулу

Лемма (Условное отрицание формул)

Пусть пропозициональные переменные $\Xi = X_1, \dots, X_n$ *— все переменные, которые используются в формуле* α*. И пусть задана некоторая оценка переменных.*
Тогда, $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\alpha|\!)$

Доказательство.

Индукция по длине формулы α.

- База: формула α — атомарная, т.е. $\alpha = X_i$. Тогда при любом Ξ выполнено $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{И}} \vdash X_i$ и $(\!|\Xi|\!)^{X_i:=\text{Л}} \vdash \neg X_i$.
- Переход: $\alpha = \varphi \star \psi$, причём $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\Xi|\!) \vdash (\!|\psi|\!)$
  Тогда построим вывод:

$(1)\dots(n)$	$(\!|\varphi|\!)$	индукционное предположение
$(n+1)\dots(k)$	$(\!|\psi|\!)$	индукционное предположение
$(k+1)\dots(l)$	$(\!|\varphi \star \psi|\!)$	лемма о связках: $(\!|\varphi|\!)$ и $(\!|\psi|\!)$ доказаны выше, значит, их можно использовать как гипотезы

$\square$

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, *тогда* $\vdash \alpha$.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, *тогда* $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n.

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.

Шаг 3. Избавляемся от гипотез

Лемма

Пусть при всех оценках переменных $(\!|\Xi|\!) \vdash \alpha$, *тогда* $\vdash \alpha$.

Доказательство.

Индукция по количеству переменных n.

- База: $n = 0$. Тогда $\vdash \alpha$ есть из условия.
- Переход: пусть $(\!|X_1, X_2, \dots X_{n+1}|\!) \vdash \alpha$. Рассмотрим 2^n пар выводов:

$$\frac{(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), \neg X_{n+1} \vdash \alpha \qquad (\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!), X_{n+1} \vdash \alpha}{(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha}$$

При этом, $(\!|X_1, X_2, \dots X_n|\!) \vdash \alpha$ при всех оценках переменных $X_1, \dots X_n$. Значит, $\vdash \alpha$ по индукционному предположению. $\square$

Заключительные замечания

Теорема о полноте — конструктивна. Получающийся вывод — экспоненциальный по длине.

Несложно по изложенному доказательству разработать программу, строящую вывод.

Вывод для формулы с 3 переменными — порядка 3 тысяч строк.

Интуиционистская логика

Критика доказательств чистого существования

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a *и* b*, такая, что* a^b *— рационально.*

Критика доказательств чистого существования

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

- 2^5, 3^3, 7^{10}, $\sqrt{2}^2$ — рациональны;
- $2^{\sqrt{2}}$, e^{π} — иррациональны;
- задача выглядит довольно сложно.

Критика доказательств чистого существования

Теорема

Существует пара иррациональных чисел a и b, такая, что a^b — рационально.

Доказательство.

Рассмотрим $a = b = \sqrt{2}$ и рассмотрим a^b. Возможны два варианта:

1. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — рационально;
2. $a^b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ — иррационально; отлично, тогда возьмём $a_1 = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и получим

$$a_1^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

$\square$

Интуиционизм

“Over de Grondslagen der Wiskunde” (Брауэр, 1907 г.)
Основные положения:

1. Математика не формальна.
2. Математика независима от окружающего мира.
3. Математика не зависит от логики — это логика зависит от математики.

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β

ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно

ВНК-интерпретация логических связок

ВНК — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения

BHK-интерпретация логических связок

BHK — это сокращение трёх фамилий: Брауэр, Гейтинг, Колмогоров.

Пусть α, β — некоторые конструкции, тогда:

- $\alpha \mathbin{\&} \beta$ построено, если построены α и β
- $\alpha \vee \beta$ построено, если построено α или β, и мы знаем, что именно
- $\alpha \to \beta$ построено, если есть способ перестроения α в β
- $\perp$ — конструкция, не имеющая построения
- $\neg\alpha$ построено, если построено $\alpha \to \perp$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Дизъюнкция

Конструкция $\alpha \vee \neg\alpha$ не имеет построения в общем случае. Что может быть построено: α или $\neg\alpha$?

Возьмём за α нерешённую проблему, например, $P = NP$

Авторам в данный момент не известно, выполнено $P = NP$ или же $P \neq NP$.

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в BHK-интерпретации:

$$(A \to B) \lor (B \to C) \lor (C \to A)$$

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — идёт дождь
- B — светит солнце
- C — в прошлом году я получил пятёрку по матанализу

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \vee (B \to C) \vee (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — идёт дождь
- B — светит солнце
- C — в прошлом году я получил пятёрку по матанализу

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- Материальная импликация $A \to B$ для автора в данный момент выполнена, поскольку дождя за окном не идёт.

Импликация

Высказывание общезначимо в И.В. и не выполнено в ВНК-интерпретации:

$$(A \to B) \lor (B \to C) \lor (C \to A)$$

Давайте дадим следующий смысл пропозициональным переменным:

- A — идёт дождь
- B — светит солнце
- C — в прошлом году я получил пятёрку по матанализу

Импликацию можно понимать как «формальную» и как «материальную».

- Материальная импликация $A \to B$ для автора в данный момент выполнена, поскольку дождя за окном не идёт.
- Формальная импликация $A \to B$ места не имеет.

Формализация

Формализация интуиционистской логики возможна, но интуитивное понимание — основное.

Определение

Аксиоматика интуиционистского исчисления высказываний в гильбертовском стиле: аксиоматика КИВ, в которой 10 схема аксиом

$$\textit{(10)} \quad \neg\neg\alpha \to \alpha$$

заменена на

$$\textit{(10и)} \quad \alpha \to \neg\alpha \to \beta$$

Теория моделей: битовые шкалы и множества как модели для КИВ

Оценка: размер шкалы n (множество X) и функция $f : P \to 2^n - 1$ ($f : P \to \mathcal{X}$).

КИВ	Битовые шкалы	Множества
V	$0 \dots 2^n - 1$	$\mathcal{P}(X)$
истина	`1 shl n - 1`	X
$[\![\alpha \mathbin{\&} \beta]\!]$	$[\![\alpha]\!]$ `and` $[\![\beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$
$[\![\alpha \vee \beta]\!]$	$[\![\alpha]\!]$ `or` $[\![\beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$
$[\![\alpha \to \beta]\!]$	`(not` $[\![\alpha]\!]$`) and` $[\![\beta]\!]$	$(X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!]$
$[\![\neg\alpha]\!]$	`(not` $[\![\alpha]\!]$`) and (1 shl n - 1)`	$X \setminus [\![\alpha]\!]$

Пример

Пусть $X = \{\square, \star, \circ\}$, $A = \{\square\}$, $B = \{\circ\}$, *тогда*

$$
\begin{aligned}
[\![A \to A \vee B]\!] &= (X \setminus \{\square\}) \cup (\{\square\} \cup \{\circ\}) = \{\star, \circ\} \cup \{\square, \circ\} = X \\
[\![A \to B]\!] &= (X \setminus \{\square\}) \cup \{\circ\} = \{\star, \circ\} \neq X
\end{aligned}
$$

Теория моделей ИИВ: топологическая модель

Оценка задаётся пространством $\langle X, \Omega \rangle$ и функцией $f : P \to \Omega$.

И.В.	Множества (КИВ)	Топология (ИИВ)
V	$\mathcal{P}(X)$	Ω
истина	X	X
$[\![\alpha \,\&\, \beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \cap [\![\beta]\!]$
$[\![\alpha \vee \beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$	$[\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]$
$[\![\alpha \to \beta]\!]$	$(X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!]$	$((X \setminus [\![\alpha]\!]) \cup [\![\beta]\!])^\circ$
$[\![\neg\alpha]\!]$	$X \setminus [\![\alpha]\!]$	$(X \setminus [\![\alpha]\!])^\circ$

Определение

$\models \alpha$, *если* $[\![\alpha]\!]$ *истинно во всех пространствах при всех функциях оценки.*

Теорема

ИИВ с топологической интерпретацией корректна и полна.

Закон исключённого третьего не выполнен в ИИВ

Несколько схожих формулировок (упорядочены по убыванию силы): $\alpha \to \neg\neg\alpha$, $\alpha \vee \neg\alpha$, $((\alpha \to \beta) \to \alpha) \to \alpha$.

Теорема

$\nvdash A \vee \neg A$ в интуиционистском исчислении высказываний.

Доказательство.

$X = \mathbb{R}$, $A = (0,1)$,

$[\![A \vee \neg A]\!] = (0,1) \cup ((-\infty, 0] \cup [1, \infty))^\circ = (-\infty, 0) \cup (0,1) \cup (1, \infty) \neq \mathbb{R}$ $\square$