

# ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

ВОПРОСЫ К ТРЕТЬЕМУ КОЛЛОКВИУМУ.

ИТМО, группы М3232–М3239, осень 2025 г.

1. Теория множеств. Определения равенства. Парадокс брадобрея. Аксиоматика Цермело-Френкеля. Конструктивные аксиомы (пустого, пары, объединения, множества подмножеств, выделения). Частичный, линейный, полный порядок. Ординальные числа, аксиома бесконечности.
2. Конечные ординалы, предельные ординалы, существование ординала  $\omega$ , операции над ординалами, факты об операциях над ординалами (сравнение  $a+b$  и  $b+a$ ,  $a\cdot b$  и  $b\cdot a$ ). Связь ординалов и упорядочений. Аксиомы фундирования и подстановки.
3. Кардинальные числа, мощность множеств, операции над кардинальными числами (сложение, умножение, возвведение в степень). Теорема Кантора-Бернштейна, теорема Кантора.
4. Мощность модели. Элементарные подмодели. Теорема Лёвенгейма-Скolemса, парадокс Скolemса.
5. Аксиома выбора, альтернативные формулировки (лемма Цорна, теорема Цермело, существование частичной обратной), доказательство переходов (кроме доказательства леммы Цорна).
6. Применение аксиомы выбора: эквивалентность определений пределов (по Коши и по Гейне). Теорема Диаконеску. Ослабленные варианты (счётный выбор и зависимый выбор), универсум фон Неймана. Аксиома конструктивности.
7. Индукция и полная индукция. Наследственные множества. Трансфинитная индукция (аналоги полного и обычного варианта математической индукции). Применение трансфинитной индукции. Система  $S_\infty$ , степень и порядок доказательства. Правило сечения, теорема об устраниении сечений. Доказательство непротиворечивости формальной арифметики.
8. Сколемизация. Эрбранов универсум, основные термы, эрбранова интерпретация, система дизъюнктов, основные примеры, система основных примеров, теорема Гёделя о компактности, теорема Эрбрана. Правило резолюции (для исчисления высказываний и для исчисления предикатов), задачи унификации, уравнения в алгебраических термах, наибольший общий унифициатор. Общая формулировка метода резолюции. SMT-решатели.