

Невыразимость доказуемости

Определение

$$D_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \vdash_S \alpha\}; \quad I_S = \{\ulcorner \alpha \urcorner \mid \llbracket \alpha \rrbracket_S = I\}$$

Лемма

Пусть $D(\ulcorner \alpha \urcorner) = \ulcorner \alpha(\overline{\ulcorner \alpha \urcorner}) \urcorner$ для любой формулы $\alpha(x)$. Тогда D представима в формальной арифметике.

Теорема

Если расширение Ф.А. S непротиворечиво и D представима в нём, то D_S невыразимо в S

Доказательство.

Пусть $\delta(a, p)$ представляет D , и пусть $\sigma(x)$ выражает множество D_S (рассматриваемое как одноместное отношение).

Пусть $\alpha(x) := \forall p. \delta(x, p) \rightarrow \neg \sigma(p)$. Верно ли, что $\ulcorner \alpha \urcorner \in D_S$?



Неразрешимость формальной арифметики

Теорема

Если формальная арифметика непротиворечива, то формальная арифметика неразрешима

Доказательство.

Пусть формальная арифметика разрешима. Значит, есть рекурсивная функция $f(x)$: $f(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in \text{Дф.Д.}$. То есть, Дф.Д. выразимо в формальной арифметике.

По теореме о невыразимости доказуемости, Дф.Д. невыразимо в формальной арифметике. Противоречие.



Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in И_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $Д_{\mathcal{S}} = И_{\mathcal{S}} = И_{ФА}$. То есть $И_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = И$ при $x \in И$. Тогда $\vdash \varphi(\bar{x})$, если $x \in И$ и $\vdash \neg \varphi(\bar{x})$, если $x \notin И$.

Тогда $И$ выражимо в \mathcal{S} . Противоречие.



Теорема Тарского

Теорема (Тарского о невыразимости истины)

Не существует формулы $\varphi(x)$, что $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = И$ (в стандартной интерпретации) тогда и только тогда, когда $x \in И_{ФА}$.

Доказательство.

Пусть теория \mathcal{S} — формальная арифметика + аксиомы: все истинные в стандартной интерпретации формулы. Очевидно, что $D_{\mathcal{S}} = И_{\mathcal{S}} = И_{ФА}$. То есть $И_{ФА}$ невыразимо в \mathcal{S} .

Пусть φ таково, что $\llbracket \varphi(\bar{x}) \rrbracket = И$ при $x \in И$. Тогда $\vdash \varphi(\bar{x})$, если $x \in И$ и $\vdash \neg \varphi(\bar{x})$, если $x \notin И$.

Тогда $И$ выражимо в \mathcal{S} . Противоречие. □

Однако, если взять $D = \mathbb{R}$, истина становится выражима (алгоритм Тарского).

Теория множеств

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$;
 $X \in X$?

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

Теория множеств

1. Георг Кантор: 1877 год, «наивная теория множеств». Множество — это «объединение в одно целое объектов, хорошо различаемых нашей интуицией или нашей мыслью».
2. Неограниченный принцип абстракции $\{x \mid P(x)\}$
3. Парадокс Бурали-Форти (1895, Кантор). Парадокс Рассела: $X := \{x \mid x \notin x\}$; $X \in X$?
4. Вариант решения парадокса: а, может, запретить все «опасные» ситуации?
5. Аксиоматика Цермело — 1908 год, оставим только то, что используют математики.
6. Что такое множество? Неформально мы понимаем, формально:

Определение

Теория множеств — теория первого порядка, с дополнительным нелогическим двухместным функциональным символом \in , и следующими дополнительными нелогическими аксиомами и схемами аксиом.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A = B \equiv A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A$$

Аксиоматика ZF, равенство

Определение

Равенство «по Лейбницу»: объекты равны, если неразличимы.

Если нечто ходит как утка, выглядит как утка и крякает как утка, то это утка.

Определение

Принцип объёмности: объекты равны, если состоят из одинаковых частей

Определение

$$A \subseteq B \equiv \forall x. x \in A \rightarrow x \in B$$

$$A = B \equiv A \subseteq B \ \& \ B \subseteq A$$

Определение

Аксиома равенства: равные множества содержатся в одних и тех же множествах.

$$\forall x. \forall y. \forall z. x = y \ \& \ x \in z \rightarrow y \in z.$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество \emptyset .

$$\exists s. \forall t. \neg t \in s$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы

Определение

Аксиома пустого. Существует пустое множество \emptyset .

$$\exists s. \forall t. \neg t \in s$$

Определение

Аксиома пары. Существует $\{a, b\}$. Каковы бы ни были два множества a и b , существует множество, состоящее в точности из них.

$$\forall a. \forall b. \exists s. a \in s \ \& \ b \in s \ \& \ \forall c. c \in s \rightarrow c = a \vee c = b$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$. Для любого непустого множества x найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы x .

$$\forall x. (\exists y. y \in x) \rightarrow \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow \exists s. y \in s \ \& \ s \in x$$

Аксиоматика ZF, конструктивные аксиомы 2

Определение

Аксиома объединения: существует $\cup x$. Для любого непустого множества x найдется такое множество, состоящее в точности из тех элементов, из которых состоят элементы x .

$$\forall x. (\exists y. y \in x) \rightarrow \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow \exists s. y \in s \ \& \ s \in x$$

Определение

Аксиома степени: существует $\mathcal{P}(x)$. Каково бы ни было множество x , существует множество, содержащее в точности все возможные подмножества множества x .

$$\forall x. \exists p. \forall y. y \in p \leftrightarrow y \subseteq x$$

Аксиоматика ZF. Схема аксиом выделения

Определение

Схема аксиом выделения: существует $\{t \in x \mid \varphi(t)\}$. Для любого множества x и любой формулы от одного аргумента $\varphi(y)$ (b не входит свободно в φ), найдется b , в которое входят те и только те элементы из множества x , что $\varphi(y)$ истинно.

$$\forall x. \exists b. \forall y. y \in b \leftrightarrow (y \in x \ \& \ \varphi(y))$$

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X .

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X .

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$



Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X .

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$



Теорема

Пустое множество единственно.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X .

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$



Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p. \neg p \in s$ и $\forall p. \neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$.



Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X .

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$



Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p. \neg p \in s$ и $\forall p. \neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$.



Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Немного теорем

Теорема

Для любого множества X существует множество $\{X\}$, содержащее в точности X .

Доказательство.

Воспользуемся аксиомой пары: $\{X, X\}$



Теорема

Пустое множество единственно.

Доказательство.

Пусть $\forall p. \neg p \in s$ и $\forall p. \neg p \in t$. Тогда $s \subseteq t$ и $t \subseteq s$.



Теорема

Для двух множеств s и t существует множество, являющееся их пересечением.

Доказательство.

$$s \cap t = \{x \in s \mid x \in t\}$$



Упорядоченная пара

Определение

Упорядоченная пара. Упорядоченной парой двух множеств a и b назовём $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, или $\langle a, b \rangle$

Теорема

Упорядоченную пару можно построить для любых множеств.

Доказательство.

Применить аксиому пары, теорему о существовании $\{X\}$, аксиому пары. □

Теорема

$\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида \emptyset

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\emptyset, \{\emptyset\}$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$
...

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$
...

(неформально) $\omega = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots\}$.

Аксиома бесконечности

Определение

Инкремент: $x' \equiv x \cup \{x\}$

Определение

Аксиома бесконечности. Существует $N : \emptyset \in N \ \& \ \forall x. x \in N \rightarrow x' \in N$

В N есть всевозможные множества вида $\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\},$
...

(неформально) $\omega = \{\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots\}$. Тогда $N_1 = \omega \cup \{\omega, \omega', \omega'', \dots\}$ подходит.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

\mathbb{Z} не вполне упорядочено: в \mathbb{Z} нет наименьшего.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

\mathbb{Z} не вполне упорядочено: в \mathbb{Z} нет наименьшего.

Пример

Отрезок $[0, 1]$ не вполне упорядочен: $(0, 1)$ не имеет наименьшего.

Полный порядок (вполне упорядоченные множества)

Определение (отношения нестрогого порядка)

1. Частичный: рефлексивность ($a \preceq a$), антисимметричность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq a \rightarrow a = b$), транзитивность ($a \preceq b \rightarrow b \preceq c \rightarrow a \preceq c$).
2. Линейный: частичный + $\forall a. \forall b. a \preceq b \vee b \preceq a$.
3. Полный: линейный + в любом непустом подмножестве есть наименьший элемент.

Пример

\mathbb{Z} не вполне упорядочено: в \mathbb{Z} нет наименьшего.

Пример

Отрезок $[0, 1]$ не вполне упорядочен: $(0, 1)$ не имеет наименьшего.

Пример

\mathbb{N} вполне упорядочено.

Отношения строгого и нестрогого порядка

Для отношения строгого (нестрогого) порядка легко найти парное отношение нестрогого (строгого) порядка.

Строгий порядок	Нестрогий порядок
$a \prec b$	$a \prec b \vee a = b$
$a \preceq b \ \& \ a \neq b$	$a \preceq b$
$A \in B$	$A \in B \vee A = B$

Определение (полный строгий порядок)

A вполне упорядочено отношением (\prec) , если:

1. при всех $a, b \in A$ выполнено либо $a \prec b$, либо $b \prec a$, либо $a = b$;
2. в любом $S \subseteq A$ и $S \neq \emptyset$ найдётся $n \in S$, что $\forall x. x \in S \rightarrow n = x \vee n \prec x$.

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением (\in) транзитивное множество.

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением (\in) транзитивное множество.

Пример

Ординалы: \emptyset ,

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением (\in) транзитивное множество.

Пример

Ординалы: \emptyset, \emptyset' ,

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением (\in) транзитивное множество.

Пример

Ординалы: $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением (\in) транзитивное множество.

Пример

Ординалы: $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

Определение

Предельный ординал: такой x , что $x \neq \emptyset$ и нет $y : y' = x$

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением (\in) транзитивное множество.

Пример

Ординалы: $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

Определение

Предельный ординал: такой x , что $x \neq \emptyset$ и нет $y : y' = x$

Определение

Ординал x конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.

Ординалы (порядковые числа)

Определение

Транзитивное множество X : $\forall x. \forall y. x \in y \ \& \ y \in X \rightarrow x \in X$.

Определение

Ординал (порядковое число) — вполне упорядоченное отношением (\in) транзитивное множество.

Пример

Ординалы: $\emptyset, \emptyset', \emptyset'', \dots$

Определение

Предельный ординал: такой x , что $x \neq \emptyset$ и нет $y : y' = x$

Определение

Ординал x конечный, если он сам не предельный и нет предельного, меньшего его.

Теорема

Если x, y — ординалы, то $x = y$, или $x \in y$, или $y \in x$.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Тогда:

- ▶ меньше ω предельных нет: если θ таков, что $\theta \in \omega$, тогда θ конечен.

Предельные ординалы, ω

Определение

ω — наименьший предельный ординал.

Теорема

ω существует.

Доказательство.

Пусть $\omega = \{x \in N \mid x \text{ конечен}\}$. Тогда:

- ▶ меньше ω предельных нет: если θ таков, что $\theta \in \omega$, тогда θ конечен.
- ▶ ω предельный: Пусть θ таков, что $\theta' = \omega$. Тогда θ конечен и θ' тоже конечен.



Пример

ω' — тоже ординал.

Порядковый тип

Определение (неформальное определение)

Порядковый тип множества — некоторое свойство, общее для всех множеств, изоморфных относительно биективных отображений, сохраняющих порядок.

Определение

Порядковый тип вполне упорядоченного множества $\langle S, (\preceq) \rangle$ — ординал A , для которого есть биективное отображение $f : S \rightarrow A$, сохраняющее порядок: $a \preceq b$ тогда и только тогда, когда $f(a) \leq f(b)$

Пример

Множество \mathbb{Z} не имеет порядкового типа (в смысле определения через ординалы): оно не вполне упорядочено.

Операции над ординалами

Определение

$a + b$ — порядковый тип $a \uplus b$ (отмеченного объединения), причём $x_a < y_b$ при любых $x \in a$ и $y \in b$

Определение

$a \cdot b$ — порядковый тип $a \times b$, произведение упорядочено лексикографически: $\langle x_1, y_1 \rangle < \langle x_2, y_2 \rangle$, если $x_1 < x_2$ или $x_1 = x_2$ и $y_1 < y_2$.

Пример

$\bar{3} + \bar{4}$: порядковый тип множества $\{0_a, 1_a, 2_a, 0_b, 1_b, 2_b, 3_b\}$, то есть $\bar{7}$

$\omega \cdot \omega$: порядковый тип всех натуральных точек плоскости,
 $\{\langle 0, 0 \rangle, \dots, \langle 0, 100 \rangle, \dots, \langle 100, 0 \rangle, \dots\}$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

ирб x — верхняя грань множества ординалов, *ирб* $x = \bigcup_{a \in x} a$.

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$$\begin{aligned} upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ &= \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \end{aligned}$$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$$\begin{aligned} upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &= \emptyset''' \end{aligned}$$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

урб x — верхняя грань множества ординалов, *урб* $x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$$\begin{aligned} \text{урб } \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} &= \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} &= \emptyset''' \end{aligned}$$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ \text{урб } \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\};$$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$$upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \emptyset'''$$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}; \quad 1 + \omega = upb\ \{1 + \emptyset, 1 + 1, 1 + 2, \dots\}$$

Операции над ординалами — как вычислять

Определение

upb x — верхняя грань множества ординалов, $upb\ x = \bigcup_{a \in x} a$.

Пример

$$upb\ \{\emptyset', \emptyset'', \emptyset'''\} = \emptyset' \cup \emptyset'' \cup \emptyset''' = \\ \{\emptyset\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \emptyset'''$$

Теорема

$$a + b \equiv \begin{cases} a, & b \equiv \emptyset \\ (a + c)', & b \equiv c' \\ upb\ \{a + c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}; \quad 1 + \omega = upb\ \{1 + \emptyset, 1 + 1, 1 + 2, \dots\} = \omega$$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \emptyset \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Ещё операции над ординалами

Теорема

$$a \cdot b \equiv \begin{cases} 0, & b \equiv \emptyset \\ (a \cdot c) + a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a \cdot c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Определение

$$a^b \equiv \begin{cases} 1, & b \equiv \emptyset \\ (a^c) \cdot a, & b \equiv c' \\ \text{upb } \{a^c \mid c \prec b\}, & b \text{ — предельный ординал} \end{cases}$$

Пример

$$\omega \cdot \omega = \text{upb } \{\omega \cdot 0, \omega \cdot 1, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\} = \text{upb } \{0, \omega, \omega \cdot 2, \omega \cdot 3, \dots\}$$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 .*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 . $1 + \omega = \omega$.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 . $1 + \omega = \omega$.*
- ▶ *Добавить элемент после бесконечности $(+\infty)$.*

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ *Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 . $1 + \omega = \omega$.*
- ▶ *Добавить элемент после бесконечности $(+\infty)$. $\omega + 1 \neq \omega$*