

ПРОГРАММА КУРСА «МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА»

ВОПРОСЫ КО ВТОРОМУ КОЛЛОКВИУМУ.

ИТМО, группы М3232–М3239, осень 2025 г.

1. Категорические силлогизмы. Фигуры, модусы (сильные, слабые, неправильные), ограничения, контр-примеры на ограничения.
2. Исчисление предикатов. Теория моделей исчисления предикатов (что такое оценка). Общезначимость, следование. Вхождения, свободные вхождения, подстановка, свобода для подстановки. Теория доказательств, выводимость. Теорема о дедукции в исчислении предикатов. Отличия от исчисления высказываний. Лемма о перестановке подстановки и оценки. Теорема о корректности исчисления предикатов.
3. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Непротиворечивые множества формул (с кванторами и бескванторами). Пополнение множества формул. Существование моделей у непротиворечивых множеств формул в бескванторном исчислении предикатов. Поверхностные кванторы (предварённая форма). Эквивалентность формул формулам с поверхностными кванторами. Сколемизация. Теорема Гёделя о полноте исчисления предикатов. Полнота исчисления предикатов. Теорема Гёделя о компактности.
4. Машина Тьюринга. Разрешимость теории, примеры. Задача об останове, её неразрешимость. Неразрешимость исчисления предикатов.
5. Представление чисел через натуральные (целые, рациональные, вещественные). Аксиоматика Пеано. Арифметические операции (сложение, умножение) в аксиоматике Пеано.
6. Порядок теории $(0, 1, 2)$. Теории первого порядка. Формальная арифметика.
7. Арифметизация математики, формализация категорических силлогизмов, предложенная Лейбницем.
8. Прimitивно-рекурсивные и рекурсивные функции. Функции вычисления простых чисел. Частичный логарифм. Выразимость отношений и представимость функций в формальной арифметике. Характеристические функции. Функция Аккермана.
9. Бета-функция Гёделя. Гёделева нумерация. Рекурсивность представимых в формальной арифметике функций.
10. Непротиворечивость (эквивалентные определения), ω -непротиворечивость. Первая теорема Гёделя о неполноте арифметики. Формулировка первой теоремы Гёделя о неполноте арифметики в форме Россера. Синтаксическая и семантическая неполнота арифметики. Неполнота расширений формальной арифметики. Ослабленные варианты: арифметика Пресбургера, система Робинсона.
11. Вторая теорема Гёделя о неполноте арифметики, *Consis*. Лемма об автоссылках. Условия Гильберта-Бернайса-Лёба. Неразрешимость формальной арифметики. Теорема Тарского о невыразимости истины.