

Лямбда-исчисление

История понятий, лёгших в основу лямбда-исчисления

- ▶ Карринг. Фреге, 1893. Все функции — одноместные. Сложение:
 $a + b = (+_a)(b)$, одноместная функция, возвращающая другую одноместную функцию:
 $(+5)(4) = 9$, $(+5)((+_3)7) = 15$
- ▶ Анонимные функции. Что такое, например, возведение в квадрат?
 - ▶ Возвведение в квадрат чего? $f(x) = x^2$.
 - ▶ А зачем тут f и почему x ?
 - ▶ Давайте напишем это как-то так: \hat{x}^2 (*Principia Mathematica*, 1910)
- ▶ Заметим, что от имени толк бывает: в Фортране переменные I..N — целые, остальные — плавающие.

Лямбда-исчисление, история возникновения

- ▶ Алонзо Чёрч, 1930+ — попытка построить исчисление для матлогики.
- ▶ Почему лямбда? Последовательное превращение записи:

$$\hat{x}.x^2 \quad \wedge x.x^2 \quad \lambda x.x^2$$

Точка — тоже из Principia Mathematica: $(\exists a).\varphi(a)$.

- ▶ Несколько статей — и несколько парадоксов, подход оказался не очень удачным.
- ▶ Тезис Чёрча сформулирован впервые про лямбда-исчисление
- ▶ 1936 — лямбда-исчисление в современном варианте (для программирования)
- ▶ 1940 — просто-типизированное лямбда-исчисление

Лямбда-исчисление, синтаксис

$$\Lambda ::= (\lambda x.\Lambda) | (\Lambda \Lambda) | x$$

Мета-язык:

- ▶ Мета-переменные:
 - ▶ $A \dots Z$ — мета-переменные для термов.
 - ▶ x, y, z — мета-переменные для переменных.
- ▶ Правила расстановки скобок аналогичны правилам для кванторов:
 - ▶ Лямбда-выражение есть всё до конца строки
 - ▶ Апликация левоассоциативна

Пример

- ▶ $a\ b\ c\ (\lambda d.e\ f\ \lambda g.h)\ i \equiv \left(\left((a\ b)\ c \right) \left(\lambda d.((e\ f)\ (\lambda g.h)) \right) \right) i$
- ▶ $0 := \lambda f. \lambda x. x; \quad (+1) := \lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x); \quad (+2) := \lambda x. (+1)\ ((+1)\ x)$

Альфа-эквивалентность

$$FV(A) = \begin{cases} \{x\}, & A \equiv x \\ FV(P) \cup FV(Q), & A \equiv P \ Q \\ FV(P) \setminus \{x\}, & A \equiv \lambda x.P \end{cases}$$

Примеры:

- ▶ $M := \lambda b. \lambda c. a \ c \ (b \ c)$; $FV(M) = \{a\}$
- ▶ $N := x \ (\lambda x. (x \ (\lambda y. x)))$; $FV(N) = \{x\}$

Определение

$A =_{\alpha} B$, если и только если выполнено одно из трёх:

1. $A \equiv x, B \equiv y, x \equiv y$;
2. $A \equiv P_a Q_a, B \equiv P_b Q_b$ и $P_a =_{\alpha} P_b, Q_a =_{\alpha} Q_b$;
3. $A \equiv (\lambda x. P), B \equiv (\lambda y. Q)$, $P[x := t] =_{\alpha} Q[y := t]$, где t не входит в A и B .

Определение

$L = \Lambda / =_{\alpha}$

Альфа-эквивалентность, пример

1. $A \equiv x, B \equiv y, x \equiv y;$
2. $A \equiv P_a Q_a, B \equiv P_b Q_b$ и $P_a =_{\alpha} P_b, Q_a =_{\alpha} Q_b;$
3. $A \equiv (\lambda x.P), B \equiv (\lambda y.Q), P[x := t] =_{\alpha} Q[y := t],$ где t не входит в A и $B.$

Лемма

$$\lambda a. \lambda b. a \ b =_{\alpha} \lambda b. \lambda a. b \ a$$

Доказательство.

t	$=_{\alpha}$	t	Правило 1
s	$=_{\alpha}$	s	Правило 1
$t \ s$	$=_{\alpha}$	$t \ s$	Правило 2
$\lambda b. (t \ b)$	$=_{\alpha}$	$\lambda a. (t \ a)$	Правило 3
$\lambda a. \lambda b. (a \ b)$	$=_{\alpha}$	$\lambda b. \lambda a. (b \ a)$	Правило 3



Бета-редукция

Интуиция: вызов функции.

λ -выражение	Python
$\lambda f. \lambda x. f\ x$	<code>def one(f, x): return f(x)</code>
$(\lambda x. x\ x)\ (\lambda x. x\ x)$	<code>(lambda x: x x) (lambda x: x x)</code> <code>def omega(x): return x(x); omega(omega)</code>

Бета-редукция

Интуиция: вызов функции.

λ -выражение	Python
$\lambda f. \lambda x. f x$	<code>def one(f, x): return f(x)</code>
$(\lambda x. x) (\lambda x. x)$	<code>(lambda x: x x) (lambda x: x x)</code> <code>def omega(x): return x(x); omega(omega)</code>

Определение

Терм вида $(\lambda x. P) Q$ – бета-редекс.

Определение

$A \rightarrow_{\beta} B$, если:

1. $A \equiv (\lambda x. P) Q$, $B \equiv P [x := Q]$, при условии свободы для подстановки;
2. $A \equiv (P Q)$, $B \equiv (P' Q')$, при этом $P \rightarrow_{\beta} P'$ и $Q = Q'$, либо $P = P'$ и $Q \rightarrow_{\beta} Q'$;
3. $A \equiv (\lambda x. P)$, $B \equiv (\lambda x. P')$, и $P \rightarrow_{\beta} P'$.

Бета-редукция, пример

Пример

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda n.n) \rightarrow_{\beta} (\lambda n.n)\ (\lambda n.n) \rightarrow_{\beta} \lambda n.n$$

Пример

$$(\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.x\ x)\ (\lambda x.x\ x)$$

Нормальная форма

Определение

Лямбда-терм N находится в нормальной форме, если нет $Q: N \rightarrow_{\beta} Q$.

Пример

В нормальной форме:

$\lambda f. \lambda x. x (f (f \lambda g. x))$

Нормальная форма

Определение

Лямбда-терм N находится в нормальной форме, если нет $Q: N \rightarrow_{\beta} Q$.

Пример

В нормальной форме:

$$\lambda f. \lambda x. x (f (f \lambda g. x))$$

Пример

Не в нормальной форме (редексы подчёркнуты):

$$\lambda f. \lambda x. (\underline{\lambda g. x}) (f (f \underline{x})) \\ ((\underline{\lambda x. x}) (\lambda x. x)) ((\underline{\lambda x. x}) (\lambda x. x))$$

Определение

(\rightarrow_{β}) — транзитивное и рефлексивное замыкание (\rightarrow_{β}) .

Булевские значения

$$T := \lambda x. \lambda y. x \quad F := \lambda x. \lambda y. y$$

Тогда: $Or := \lambda a. \lambda b. a \quad T \quad b$:

$$\begin{aligned} Or \ F \ T &= \frac{((\lambda a. \lambda b. a \ T \ b) \ F)}{(\lambda y. y)} \ T \rightarrow_{\beta} (\lambda b. F \ T \ b) \ T \rightarrow_{\beta} F \ T \ T = \\ &= (\lambda x. \lambda y. y) \ T \ T \rightarrow_{\beta} (\lambda y. y) \ T \rightarrow_{\beta} T \end{aligned}$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^{(n)}(x)$

Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент: $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x)$

$$(\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ \bar{0} = (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta}$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^{(n)}(x)$

Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент: $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x)$

$$(\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ \bar{0} = (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x')\ f\ (f\ x) \rightarrow_{\beta}$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^{(n)}(x)$

Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент: $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x)$

$$\begin{aligned} (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ \bar{0} &= (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x')\ f\ (f\ x) \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. (\lambda x'. x')\ (f\ x) \rightarrow_{\beta} \end{aligned}$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^{(n)}(x)$

Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент: $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x)$

$$\begin{aligned} (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ \bar{0} &= (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x')\ f\ (f\ x) \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. (\lambda x'. x')\ (f\ x) \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. f\ x = \bar{1} \end{aligned}$$

Чёрчевские нумералы

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} x, & n = 0 \\ f(f^{(n-1)}(x)), & n > 0 \end{cases}$$

Определение

Чёрчевский нумерал $\bar{n} = \lambda f. \lambda x. f^{(n)}(x)$

Пример

$$\bar{3} = \lambda f. \lambda x. f(f(f(x)))$$

Инкремент: $Inc = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x)$

$$\begin{aligned} (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ \bar{0} &= (\lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ f\ (f\ x))\ (\lambda f'. \lambda x'. x') \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. (\lambda f'. \lambda x'. x')\ f\ (f\ x) \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. (\lambda x'. x')\ (f\ x) \rightarrow_{\beta} \\ &\dots \lambda f. \lambda x. f\ x = \bar{1} \end{aligned}$$

Декремент: $Dec = \lambda n. \lambda f. \lambda x. n\ (\lambda g. \lambda h. h\ (g\ f))\ (\lambda u. x)\ (\lambda u. u)$

Упорядоченная пара и алгебраический тип

Определение

$$\text{Pair}(a, b) := \lambda s.s\ a\ b$$

$$\text{Fst} := \lambda p.p\ T$$

$$\text{Snd} := \lambda p.p\ F$$

Пример

$$\text{Fst}(\text{Pair}(a, b)) = (\lambda p.p\ T)\ \lambda s.s\ a\ b \rightarrow_{\beta} (\lambda s.s\ a\ b)\ T \rightarrow_{\beta} a$$

Определение

$$\text{InL } L := \lambda p.\lambda q.p\ L$$

$$\text{InR } R := \lambda p.\lambda q.q\ R$$

$$\text{Case } t\ f\ g := t\ f\ g$$

Теорема Чёрча-Россера

Теорема (Чёрча-Россера)

Для любых термов N, P, Q , если $N \rightarrow_{\beta} P$, $N \rightarrow_{\beta} Q$, и $P \neq Q$, то найдётся T :
 $P \rightarrow_{\beta} T$ и $Q \rightarrow_{\beta} T$.

Теорема

Если у терма N существует нормальная форма, то она единственна

Доказательство.

Пусть не так и $N \rightarrow_{\beta} P$ вместе с $N \rightarrow_{\beta} Q$, $P \neq Q$. Тогда по теореме Чёрча-Россера существует T : $P \rightarrow_{\beta} T$ и $Q \rightarrow_{\beta} T$, причём $T \neq P$ или $T \neq Q$ в силу транзитивности (\rightarrow_{β})



Бета-эквивалентность, неподвижная точка

Пример

$\Omega = (\lambda x. x\ x) (\lambda x. x\ x)$ не имеет нормальной формы: $\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega$

Определение

$(=_{\beta})$ — транзитивное, рефлексивное и симметричное замыкание (\rightarrow_{β}) .

Теорема

Для любого терма N найдётся такой терм R , что $R =_{\beta} N\ R$.

Доказательство.

Пусть $Y = \lambda f. (\lambda x. f\ (x\ x)) (\lambda x. f\ (x\ x))$. Тогда $R := Y\ N$:

$$Y\ N =_{\beta} (\lambda x. N\ (\textcolor{red}{x}\ \textcolor{blue}{x})) (\lambda x. N\ (x\ x)) =_{\beta} N\ ((\lambda x. N\ (x\ x)) (\lambda x. N\ (x\ x)))$$



Интуиционистское И.В. (натуралистич. естественный вывод)

- ▶ Формулы языка (секвенции) имеют вид: $\Gamma \vdash \alpha$. Правила вывода:
 - ▶ Аксиома:
$$\frac{\text{посылка } 1 \quad \text{посылка } 2 \quad \dots}{\text{заключение}} \text{ (аннотация)}$$

$\frac{}{\Gamma, \alpha \vdash \alpha}$ (akk.)

- #### ► Правила введения связок:

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}, \frac{\Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}$$

- #### ► Правила удаления связок:

$$\begin{array}{c}
 \frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma \quad \Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \vee \beta}{\Gamma \vdash \gamma} \\
 \hline
 \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha \& \beta}{\Gamma \vdash \beta} \quad \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \alpha}
 \end{array}$$

- ## ► Пример доказательства:

$$\frac{\frac{A \& B \vdash A \& B}{A \& B \vdash B} \text{ (удал\&)} \quad \frac{A \& B \vdash A \& B}{A \& B \vdash A} \text{ (удал\&)}}{A \& B \vdash B \& A} \text{ (введ\&)}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение

Импликационный фрагмент интуиционистской логики:

$$\frac{}{\Gamma, \varphi \vdash_{\rightarrow} \varphi} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash_{\rightarrow} \psi}{\Gamma \vdash_{\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash_{\rightarrow} \varphi \quad \Gamma \vdash_{\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash_{\rightarrow} \psi}$$

Теорема

Если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \alpha$.

Доказательство.

Определим модель Кripке:

- ▶ миры — замкнутые множества формул: $\alpha \in \Gamma$ т.и.т.т. $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \alpha$,
- ▶ порядок — (\subseteq),
- ▶ $\Gamma \Vdash X$ т.и.т.т. $X \in \Gamma$.

Из корректности моделей Кripке следует, что если $\Gamma \vdash \alpha$, то $\Gamma \Vdash \alpha$. Требуемое следует из того, что $\Gamma \Vdash \alpha$ влечёт $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \alpha$. □

$$\Gamma \Vdash \alpha \text{ т.и.т.т. } \Gamma \vdash_{\rightarrow} \alpha$$

Индукция по структуре α .

- ▶ $\alpha \equiv X$. Утверждение следует из определения;
- ▶ $\alpha \equiv \varphi \rightarrow \psi$.
 - ▶ Пусть $\Gamma \Vdash \varphi \rightarrow \psi$. То есть, $\Gamma \subseteq \Delta$ и $\Delta \Vdash \varphi$ влечёт $\Delta \Vdash \psi$. Возьмём Δ как замыкание $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Значит, $\Delta \vdash_{\rightarrow} \varphi$ и, по индукционному предположению, $\Delta \Vdash \varphi$. Тогда $\Delta \Vdash \psi$. По индукционному предположению, $\Delta \vdash_{\rightarrow} \psi$. То есть, $\Gamma, \varphi \vdash_{\rightarrow} \psi$, откуда

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}$$

- ▶ Пусть $\Gamma \vdash_{\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi$. Проверим $\Gamma \Vdash \varphi \rightarrow \psi$. Пусть $\Gamma \subseteq \Delta$ и пусть $\Delta \Vdash \varphi$. По индукционному предположению, $\varphi \in \Delta$. То есть, $\Delta \vdash_{\rightarrow} \varphi$ и $\Delta \vdash_{\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi$. Тогда

$$\frac{\Delta \vdash_{\rightarrow} \varphi \quad \Delta \vdash_{\rightarrow} \varphi \rightarrow \psi}{\Delta \vdash_{\rightarrow} \psi}$$

По индукционному предположению, $\Delta \Vdash \psi$, отчего $\Gamma \Vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление (по Карри).

Просто-типизированное лямбда-исчисление

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление (по Карри). Типы: $\tau ::= \alpha | (\tau \rightarrow \tau)$.

Просто-типовированное лямбда-исчисление

Определение

Просто-типовированное лямбда-исчисление (по Карри). Типы: $\tau ::= \alpha | (\tau \rightarrow \tau)$.

Язык: $\Gamma \vdash A : \varphi$

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma$$

$$\frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример: тип чёрчевских нумералов

Пусть $\Gamma = f : \alpha \rightarrow \alpha, x : \alpha$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash x : \alpha \quad Ax}{\Gamma \vdash f x : \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \alpha \rightarrow \alpha \quad Ax}{App}}{f : \alpha \rightarrow \alpha \vdash \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha)} \lambda}{\vdash \lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)} \lambda$$
$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash x : \alpha \quad Ax}{\Gamma \vdash f x : \alpha} \quad \frac{\Gamma \vdash f : \alpha \rightarrow \alpha \quad Ax}{App}}{f : \alpha \rightarrow \alpha \vdash \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha)} \lambda}{\vdash \lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)} \lambda$$

Изоморфизм Карри-Ховарда

λ -исчисление	исчисление высказываний
Выражение	доказательство
Тип выражения	высказывание
Тип функции	импликация
Упорядоченная пара	конъюнкция
Алгебраический тип	дизъюнкция
Обитаемость	доказуемость
Необитаемый тип	ложь

Изоморфизм Карри-Ховарда: отрицание

Определение

Ложь (\perp) — необитаемый тип; $failwith/raise/throw : \alpha \rightarrow \perp$; $\neg\varphi \equiv \varphi \rightarrow \perp$

Например, контрапозиция: $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$

$$\frac{\frac{\frac{\Phi \vdash a : \alpha \quad A x}{\Phi \vdash f : \alpha \rightarrow \beta \quad A x} \quad App \quad \frac{\Phi \vdash n : \beta \rightarrow \perp \quad A x}{\Phi \vdash n (f a) : \perp \quad App}}{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp, a : \alpha \vdash n (f a) : \perp} \lambda \quad \frac{f : \alpha \rightarrow \beta, n : \beta \rightarrow \perp \vdash \lambda a^\alpha. n (f a) : \neg\alpha \quad \lambda}{f : \alpha \rightarrow \beta \vdash \lambda n^{\beta \rightarrow \perp}. \lambda a^\alpha. n (f a) : \neg\beta \rightarrow \neg\alpha} \lambda}{\lambda f^{\alpha \rightarrow \beta}. \lambda n^{\beta \rightarrow \perp}. \lambda a^\alpha. n (f a) : (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)} \lambda$$

Почему рассматриваем интуиционистскую логику

- ▶ $M : \alpha \vee \neg\alpha$ предполагает наличие атомарной конструкции (поскольку $\alpha \vee \neg\alpha$ недоказуемо в ИИВ).
- ▶ Какая у M могла бы быть семантика? $\alpha \vee \neg\alpha$ — это алгебраический тип вида

$$\tau = \text{Left } \alpha \mid \text{Right } \alpha \rightarrow \perp$$

- ▶ Доказать $E : \tau$ можно только, предложив либо $L : \alpha$, либо $R : \alpha \rightarrow \perp$ (и мы должны знать, что именно — вспомним ВНК-интерпретацию).
- ▶ Если прочесть это буквально — требуется «универсальный конструктор», создающий значение данного типа, если тип вообще обитаем. Как это можно сделать для сложных типов?
- ▶ Однако, конструкции подобного сорта возможны. Например «вычисление с текущим продолжением»:

$$\text{callcc} : \forall\alpha.\forall\beta.((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

Исчисление по Чёрчу и по Карри

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^\varphi. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Исчисление по Чёрчу и по Карри

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^\varphi. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример

По Карри

$$\lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

По Чёрчу

$$\lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}. \lambda x^\alpha. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$$

Исчисление по Чёрчу и по Карри

Определение

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Карри.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Просто-типизированное лямбда-исчисление по Чёрчу.

$$\frac{}{\Gamma, x : \varphi \vdash x : \varphi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma, x : \varphi \vdash A : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^\varphi. A : \varphi \rightarrow \psi} x \notin \Gamma \quad \frac{\Gamma \vdash A : \varphi \quad \Gamma \vdash B : \varphi \rightarrow \psi}{\Gamma \vdash BA : \psi}$$

Пример

По Карри

$$\begin{array}{l} \lambda f. \lambda x. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \\ \lambda f. \lambda x. f (f x) : (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta) \end{array}$$

По Чёрчу

$$\begin{array}{l} \lambda f^{\alpha \rightarrow \alpha}. \lambda x^\alpha. f (f x) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \\ \lambda f^{\beta \rightarrow \beta}. \lambda x^\beta. f (f x) : (\beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \beta) \end{array}$$

Комбинаторы S,K

Определение

Комбинатор — лямбда-терм без свободных переменных

Определение (исходная идея Моисея Шейнфинкеля, 1924)

$S := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z (y z)$, $K := \lambda x. \lambda y. x$, $I := \lambda x. x$

(*verSchmelzung, Konstanz* — исходно «C» у Шейнфинкеля, *Identität*)

Теорема

Пусть N — некоторый замкнутый лямбда-терм. Тогда найдётся выражение M , состоящее из комбинаторов S, K , что $N =_{\beta} M$

Комбинаторы S,K

Определение

Комбинатор — лямбда-терм без свободных переменных

Определение (исходная идея Моисея Шейнфинкеля, 1924)

$$S := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x z (y z), K := \lambda x. \lambda y. x, I := \lambda x. x$$

(verSchmelzung, Konstanz — исходно «C» у Шейнфинкеля, Identität)

Теорема

Пусть N — некоторый замкнутый лямбда-терм. Тогда найдётся выражение M , состоящее из комбинаторов S, K , что $N =_{\beta} M$

Пример

$$I =_{\beta} S K K$$

$$K := \lambda x^{\alpha}. \lambda y^{\beta}. x \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$$

$$S := \lambda x^{\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma}. \lambda y^{\alpha \rightarrow \beta}. \lambda z^{\alpha}. x z (y z) \quad (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$$

Изоморфизм Карри-Ховарда: вывод в гильбертовом стиле — комбинаторное представление.