

Одинарные (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 .

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 . $1 + \omega = \omega$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 . $1 + \omega = \omega$.
- ▶ Добавить элемент после бесконечности $(+\infty)$.

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 . $1 + \omega = \omega$.
- ▶ Добавить элемент после бесконечности $(+\infty)$. $\omega + 1 \neq \omega$

Ординалы (порядковые числа) и порядок

Пример

- ▶ Добавить элемент перед бесконечностью: \mathbb{N} и \mathbb{N}_0 . $1 + \omega = \omega$.
- ▶ Добавить элемент после бесконечности $(+\infty)$. $\omega + 1 \neq \omega$

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2 .

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2 .

$$\langle 3, 5 \rangle < \langle 4, 3 \rangle \quad \omega \cdot 3 + 5 < \omega \cdot 4 + 3.$$

Пары и списки

Пример

Упорядоченные пары натуральных чисел имеют порядковый тип ω^2 .

$$\langle 3, 5 \rangle < \langle 4, 3 \rangle \quad \omega \cdot 3 + 5 < \omega \cdot 4 + 3.$$

Пример

Списки натуральных чисел — порядковый тип ω^ω .

$$\langle 3, 1, 4, 1, 5, 9 \rangle \quad \omega^5 \cdot 3 + \omega^4 \cdot 1 + \omega^3 \cdot 4 + \omega^2 \cdot 1 + \omega^1 \cdot 5 + 9$$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y. \forall z. (y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t. t \in y \ \& \ t \in z$$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y. \forall z. (y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t. t \in y \ \& \ t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

Дизъюнктные множества

Определение

Дизъюнктное (разделённое) множество — множество, элементы которого не пересекаются.

$$Dj(x) \equiv \forall y. \forall z. (y \in x \ \& \ z \in x \ \& \ \neg y = z) \rightarrow \neg \exists t. t \in y \ \& \ t \in z$$

Пример

Дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}\}$

Не дизъюнктное: $\{\{1, 2\}, \{\rightarrow\}, \{\alpha, \beta, \gamma, 1\}\}$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a — множество $\times a$ всех таких множеств b , что:

- ▶ b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе
- ▶ b содержит элементы только из $\cup a$.

$$\forall b. b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \ \& \ \forall y. y \in a \rightarrow \exists! x. x \in y \ \& \ x \in b)$$

Прямое произведение множеств

Определение

Прямое произведение дизъюнктного множества a — множество $\times a$ всех таких множеств b , что:

- ▶ b пересекается с каждым из элементов множества a в точности в одном элементе
- ▶ b содержит элементы только из $\cup a$.

$$\forall b. b \in \times a \leftrightarrow (b \subseteq \cup a \ \& \ \forall y. y \in a \rightarrow \exists! x. x \in y \ \& \ x \in b)$$

Пример

$$\times \{\{\Delta, \square\}, \{1, 2, 3\}\} = \{\{\Delta, 1\}, \{\Delta, 2\}, \{\Delta, 3\}, \{\square, 1\}, \{\square, 2\}, \{\square, 3\}\}$$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить,

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Аксиома выбора

Определение

Прямое произведение непустого дизъюнктного множества, не содержащего пустых элементов, непусто.

$$\forall t. Dj(t) \rightarrow (\forall x. x \in t \rightarrow \exists p. p \in x) \rightarrow (\exists p. p \in \times t)$$

Альтернативные варианты: любое множество можно вполне упорядочить, любая сюръективная функция имеет частичную обратную, и т.п.

Определение

Аксиоматика ZF + аксиома выбора = ZFC

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парadox Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносован двум своим копиям.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парadox Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парadox Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парadox Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Дискуссия вокруг аксиомы выбора

Пример

Парадокс Банаха-Тарского: трёхмерный шар равносоставен двум своим копиям.

Теорема

Теорема (Гёдель, 1938): аксиома выбора не добавляет противоречий в ZF.

Теорема

Теорема (Коэн, 1963): аксиома выбора не следует из других аксиом ZF.

Пример

Односторонние функции: Sha256 и т.п. У Sha256 есть обратная.

Теорема

Теорема Диаконеску: ZFC поверх интуиционистского исчисления предикатов содержит правило исключённого третьего.

Аксиома фундирования

Определение

Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.

$$\forall x. x = \emptyset \vee \exists y. y \in x \ \& \ \forall z. z \in x \rightarrow z \notin y$$

Иными словами, в каждом множестве есть элемент, минимальный по отношению (\in).

Идея Рассела: каждому множеству припишем *тип* (тип пустого 0, тип множеств 1, тип множеств множеств 2 и т.п.). Тогда конструкция невозможна: $\{x \mid x \in x\}$.

Аксиома фундирования позволяет определить функцию ранга:

$$rk(x) = \text{upb } \{rk(y) \mid y \in x\}$$

Схема аксиом подстановки

Определение

Схема аксиом подстановки. Пусть задана некоторая функция f , представимая в исчислении предикатов: то есть задана некоторая формула ϕ , такая, что $f(x) = y$ тогда и только тогда, когда $\phi(x, y) \& \exists!z.\phi(x, z)$. Тогда для любого множества S существует множество $f(S)$ — образ множества S при отображении f .

$$\forall s. (\forall x. \forall y_1. \forall y_2. x \in s \& \phi(x, y_1) \& \phi(x, y_2) \rightarrow y_1 = y_2) \rightarrow (\exists t. \forall y. y \in t \leftrightarrow \exists x. x \in s \& \phi(x, y))$$