

Аксиома выбора

Аксиома выбора

Аксиома (выбора)

*Из любого семейства дизъюнктивных непустых множеств \mathcal{A} можно выбрать непустую трансверсаль — множество S , что $|S \cap A| = 1$ для каждого $A \in \mathcal{A}$.
Иначе, $S \in \times \mathcal{A}$.*

Теорема (функциональный вариант аксиомы выбора)

Пусть \mathcal{A} — семейство непустых множеств. Тогда существует $f : \mathcal{A} \rightarrow \cup \mathcal{A}$, причём $\forall a. a \in \mathcal{A} \rightarrow f(a) \in a$

Доказательство.

Пусть $X(A) = \{\langle A, a \rangle \mid a \in A\}$, по семейству \mathcal{A} рассмотрим $\{X(A) \mid A \in \mathcal{A}\}$

- ▶ непустых: если $A \in \mathcal{A}$, $A \neq \emptyset$, то $X(A) \neq \emptyset$;
- ▶ дизъюнктное: если $A_0, A_1 \in \mathcal{A}$, $A_0 \neq A_1$, то $X(A_0) \cap X(A_1) = \emptyset$

тогда по аксиоме выбора $\exists f. f \in \times \mathcal{A}$.



Обратное утверждение также легко показать.

Аксиома выбора: альтернативные формулировки

Теорема (Лемма Цорна)

Если задано $\langle M, (\preceq) \rangle$ и для всякого линейно упорядоченного $S \subseteq M$ выполнено $\text{prb}_M S \neq \emptyset$, то в M существует максимальный элемент.

Теорема (Теорема Цермело)

На любом множестве можно задать полный порядок.

Теорема

У любой сюръективной функции существует частичная обратная.

Теорема

Аксиома выбора \Rightarrow лемма Цорна: без доказательства

Начальный отрезок

Определение

Назовём (для данного раздела) упорядоченным множеством пару $\langle S, (\prec_S) \rangle$. Отношение порядка (\prec_S) может быть как строгим, так и нестрогим. Будем говорить, что $\langle S, (\prec_S) \rangle$ — начальный отрезок $\langle T, (\prec_T) \rangle$, если:

- ▶ $S \subseteq T$;
- ▶ если $a, b \in S$, то $a \prec_S b$ тогда и только тогда, когда $a \prec_T b$;
- ▶ если $a \in S, b \in T \setminus S$, то $a \prec_T b$.

Будем обозначать это как $\langle S, (\prec_S) \rangle \sqsubseteq \langle T, (\prec_T) \rangle$ или как $S \sqsubseteq T$, если порядок на множествах понятен из контекста.

Теорема

Отношение «быть начальным отрезком» является отношением нестрогого порядка.

Верхняя грань семейства упорядоченных множеств

Теорема (о верхней грани)

Если семейство упорядоченных множеств X линейно упорядочено отношением «быть начальным отрезком», то у него есть верхняя грань.

Доказательство.

Пусть $M = \cup \{T \mid \langle T, (\prec) \rangle \in X\}$ и $(\prec)_M = \cup \{(\prec) \mid \langle T, (\prec) \rangle \in X\}$.

Покажем, что если $\langle A, (\prec_A) \rangle \in X$, то $A \subseteq M$. Рассмотрим определение:

- ▶ $A \subseteq M$ — выполнено по построению M ;
- ▶ если $a, b \in A$, то $a \prec_A b$ влечёт $a \prec_M b$ (по построению M). Если же $a \prec_M b$, но $a \not\prec_A b$, то существует A' , что $a, b \in A'$ и $a \prec_{A'} b$. Тогда $A \not\subseteq A'$ и $A' \not\subseteq A$, что невозможно по линейности порядка;
- ▶ если $a \in A$, $b \in M \setminus A$, то найдётся B , что $b \in B$, отчего $a \prec_B b$ (так как $A \subseteq B$) и $a \prec_M b$ (по построению M).

Тогда $\langle M, (\prec_M) \rangle$ — требуемая верхняя грань.



Лемма Цорна \Rightarrow теорема Цермело

Пусть выполнена лемма Цорна и дано некоторое X . Покажем, что на нём можно ввести полный порядок.

- ▶ Пусть $S = \{\langle P, (\prec) \rangle \mid P \subseteq X, (\prec) \text{ — полный порядок}\}$. Например, для $X = \{0, 1\}$ множество $S = \{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{0\}, \emptyset \rangle, \langle \{1\}, \emptyset \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle, \langle X, 1 \prec 0 \rangle\}$
- ▶ Введём порядок на S как (\sqsubseteq) . Заметим, что это — частичный, но не линейный порядок. Например, $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$ несравним с $\langle X, 1 \prec 0 \rangle$.
- ▶ По теореме о верхней грани любое линейно упорядоченное подмножество $\langle T, (\sqsubseteq) \rangle$ (где $T \subseteq S$) имеет верхнюю грань. Например, для $\{\langle \emptyset, \emptyset \rangle, \langle \{0\}, \emptyset \rangle, \langle X, 0 \prec 1 \rangle\}$ это $\langle X, 0 \prec 1 \rangle$.
- ▶ По лемме Цорна тогда есть $\langle R, (\sqsubseteq_R) \rangle = \max S$. Заметим, что $R = X$, потому что иначе пусть $a \in X \setminus R$. Тогда положив $M = \langle R \cup \{a\}, (\sqsubseteq_R) \cup \{x \prec a \mid x \in R\} \rangle$ получим, что M тоже вполне упорядоченное (и потому $M \in S$), значит, R не максимальное.

Теорема Цермело \Rightarrow существование обратной \Rightarrow аксиома выбора

Теорема

Теорема Цермело \Rightarrow у сюръективных функций существует частичная обратная.

Доказательство.

Рассмотрим сюръективную $f : A \rightarrow B$. Рассмотрим семейство

$R_b = \{a \in A \mid f(a) = b\}$. Построим полный порядок на каждом из R_b . Тогда $f^{-1}(b) = \min R_b$. □

Теорема

Существует частичная обратная у сюръективных функций \Rightarrow существует трансверсаль у семейства непустых дизъюнктивных множеств.

Доказательство.

Пусть дано семейство непустых дизъюнктивных множеств \mathcal{A} . Рассмотрим $f : \cup \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, что $f(a) = \cup \{A \in \mathcal{A} \mid a \in A\}$. Поскольку элементы \mathcal{A} дизъюнктивны, $f(a) \in \mathcal{A}$ при всех a . Тогда существует $f^{-1} : \mathcal{A} \rightarrow \cup \mathcal{A}$. Тогда $\{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}\} \in \times \mathcal{A}$. □

Зачем нужна аксиома выбора?

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Коши называется такой y , что

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+. \exists \delta \in \mathbb{R}^+. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$$

Определение

Пределом функции f в точке x_0 по Гейне называется такой y , что для любой $x_n \rightarrow x_0$ выполнено $f(x_n) \rightarrow y$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, то $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, то $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n : то есть $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, то $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n : то есть $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

... Фиксируем ε и рассмотрим $X_\delta = \{x \mid |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - y| \geq \varepsilon\}$. Отрицание предела по Коши означает, что $X_\delta \neq \emptyset$ при любом $\delta > 0$.

Предел по Гейне влечёт предел по Коши

Теорема

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ по Гейне, то $\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0. \forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon$.

Доказательство.

Пусть не так: $\exists \varepsilon > 0. \forall \delta > 0. \exists x_\delta. |x_\delta - x_0| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - y| \geq \varepsilon$. Фиксируем ε и возьмём $\delta_n = \frac{1}{n}$ и $p_n = x_{\delta_n}$. $p_n \rightarrow x_0$, так как $|x_{\frac{1}{n}} - x_0| < \frac{1}{n}$, по определению предела по Гейне $f(p_n) \rightarrow y$, но по предположению $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$. □

Пояснение

Для применения предела по Гейне нужна p_n : то есть $p: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.

... Фиксируем ε и рассмотрим $X_\delta = \{x \mid |x - x_0| < \delta \ \& \ |f(x) - y| \geq \varepsilon\}$. Отрицание предела по Коши означает, что $X_\delta \neq \emptyset$ при любом $\delta > 0$.

... То есть, по семейству $Q := \{X_1, X_{\frac{1}{2}}, X_{\frac{1}{4}}, \dots\}$ по аксиоме выбора построим $q: Q \rightarrow \cup Q$, что $q(X_{\frac{1}{n}}) \in X_{\frac{1}{n}}$. Далее, взяв композицию $p_n := q(X_{\delta_n})$, получаем $p_n \rightarrow x_0$, что $\forall n \in \mathbb{N}. |f(p_n) - y| \geq \varepsilon$.

Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ и дана $x_n \rightarrow x_0$. Тогда $f(x_n) \rightarrow y$.

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- ▶ $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. (\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \ \& \ (\forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |x_n - x_0| < \delta)$
- ▶ $(\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \rightarrow (|x_n - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon)$ (сх. 11).
- ▶ $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$.
- ▶ Поскольку δ не используется в формуле, $\exists \delta > 0$ можно устранить.
- ▶ Отсюда $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$



Предел по Коши влечёт предел по Гейне

Теорема

Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ и дана $x_n \rightarrow x_0$. Тогда $f(x_n) \rightarrow y$.

Доказательство.

Фиксируем $\varepsilon > 0$.

- ▶ $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. (\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \ \& \ (\forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |x_n - x_0| < \delta)$
- ▶ $(\forall x. |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - y| < \varepsilon) \rightarrow (|x_n - x_0| < \delta \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon)$ (сх. 11).
- ▶ $\exists \delta > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$.
- ▶ Поскольку δ не используется в формуле, $\exists \delta > 0$ можно устранить.
- ▶ Отсюда $\exists N \in \mathbb{N}. \forall n \in \mathbb{N}. n > N \rightarrow |f(x_n) - y| < \varepsilon$



Почему здесь не потребовалась аксиома выбора? Потому что нам нужен единственный δ , а для него — единственный N

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ и $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. Верно ли, что $A_0 = A_1$?

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ и $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. Верно ли, что $A_0 = A_1$?

Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$.

Равенство и функции

Пример

Пусть $A_0 = \{0, 1, 3, 5\}$ и $A_1 = \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$. Верно ли, что $A_0 = A_1$?

Да, так как $\forall x. x \in \{0, 1, 3, 5\} \leftrightarrow x \in \{3, 5, 1, 0, 0, 5, 3\}$.

Теорема (конгруэнтность)

Если $f : A \rightarrow B$, также $a, b \in A$ и $a = b$, то $f(a) = f(b)$.

Доказательство.

Пусть $F \subseteq A \times B$ — график функции f .

По определению функции, $\forall x. \forall y_1. \forall y_2. \langle x, y_1 \rangle \in F \ \& \ \langle x, y_2 \rangle \in F \rightarrow y_1 = y_2$.

Также, если $f(a) = y_1$, $f(b) = y_2$, то $\langle a, y_1 \rangle \in F$ и $\langle b, y_2 \rangle \in F$.

Тогда: $\langle a, y_1 \rangle = \langle b, y_1 \rangle = \langle b, y_2 \rangle = \langle a, y_2 \rangle$, то есть $f(a) = y_2 = f(b)$.



Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 1 \vee P\}$.

$\{A_0, A_1\}$ — семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует

$f : \{A_0, A_1\} \rightarrow \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P , то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{B\}$).

$$\vdash f(A_0) \in A_0 \ \& \ f(A_1) \in A_1$$

а.выбора: $f(A_i) \in A_i$

$$\vdash f(A_0) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_0) = 0 \vee P) \ \& \ f(A_1) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_1) = 1 \vee P)$$

а.выделения

$$\vdash (f(A_0) = 0 \ \& \ f(A_1) = 1) \vee P$$

Удал. (&) + дистр.

$$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$$

$0 \neq 1$ и транз.

Теорема Диаконеску

Теорема

Если рассмотреть ИИП с ZFC, то для любого P выполнено $\vdash P \vee \neg P$.

Доказательство.

Рассмотрим $\mathcal{B} = \{0, 1\}$, $A_0 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 0 \vee P\}$ и $A_1 = \{x \in \mathcal{B} \mid x = 1 \vee P\}$.

$\{A_0, A_1\}$ — семейство непустых множеств, и по акс. выбора существует

$f : \{A_0, A_1\} \rightarrow \cup A_i$, что $f(A_i) \in A_i$. (Если P , то $A_0 = A_1$ и $\{A_0, A_1\} = \{B\}$).

$$\vdash f(A_0) \in A_0 \ \& \ f(A_1) \in A_1$$

а.выбора: $f(A_i) \in A_i$

$$\vdash f(A_0) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_0) = 0 \vee P) \ \& \ f(A_1) \in \mathcal{B} \ \& \ (f(A_1) = 1 \vee P)$$

а.выделения

$$\vdash (f(A_0) = 0 \ \& \ f(A_1) = 1) \vee P$$

Удал. (&) + дистр.

$$\vdash P \vee f(A_0) \neq f(A_1)$$

$0 \neq 1$ и транз.

$$\vdash P \rightarrow A_0 = A_1$$

Определение A_i

$$\vdash A_0 = A_1 \rightarrow f(A_0) = f(A_1)$$

Конгруэнтность

$$\vdash f(A_0) \neq f(A_1) \rightarrow \neg P$$

Контрапозиция

$$\vdash P \vee \neg P$$

Подставили



Слабые варианты аксиомы выбора

Теорема (конечного выбора)

Если $X_1 \neq \emptyset, \dots, X_n \neq \emptyset, X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\times\{X_1, \dots, X_n\} \neq \emptyset$.

Доказательство.

► База: $n = 1$. Тогда $\exists x_1. x_1 \in X_1$, поэтому $\exists x_1. \{x_1\} \in \times\{X_1\}$.

► Переход:

$$\exists v. v \in \times\{X_{1,n}\} \rightarrow \exists x_{n+1}. x_{n+1} \in X_{n+1} \rightarrow v \cup \{x_{n+1}\} \in \times(X_{1,n} \cup \{X_{n+1}\})$$



Аксиома (счётного выбора)

Для счётного семейства непустых множеств существует функция, каждому из которых сопоставляющая один из своих элементов

Аксиома (зависимого выбора)

если $\forall x \in E. \exists y \in E. xRy$, то существует последовательность $x_n : \forall n. x_n R x_{n+1}$

Теорема Диаконеску и конечный выбор

Заметим, что семейство $\{A_0, A_1\}$ из теоремы Диаконеску в ИИП не является конечным (равно как и бесконечным).

Определение

Конечное множество — равномощное некоторому конечному кардинальному числу.

- ▶ Какова мощность семейства?
- ▶ 1, если P , и 2, если $\neg P$.
- ▶ Но поскольку $P \vee \neg P$ не выполнено в ИИП, мы не можем доказать, что мощность семейства 1 или 2.
- ▶ Поэтому мы не можем воспользоваться теоремой конечного выбора.

Наследственные фундированные множества

Определение

Наследственным свойством множества назовём такое свойство, которым обладает как само множество, так и все его подмножества.

Определение

Фундированным множеством назовём такое, которое не пересекается хотя бы с одним своим элементом.

Определение

Аксиома фундирования. В каждом непустом множестве найдется элемент, не пересекающийся с исходным множеством.

$$\forall x. x = \emptyset \vee \exists y. y \in x \ \& \ \forall z. z \in x \rightarrow z \notin y$$

Иными словами, в каждом множестве есть элемент, минимальный по отношению (\in) .

Каковы возможные модели для теории множеств?

Определение

Универсум фон Неймана V — все наследственные фундированные множества.

При наличии аксиомы фундирования можно показать, что $V = \bigcup_a V_a$, где:

$$V_a = \begin{cases} \emptyset, & a = 0 \\ \mathcal{P}(V_b), & a = b' \\ \bigcup_{b < a} (V_b), & a \text{ — предельный} \end{cases}$$

Определение

Конструктивный универсум $L = \bigcup_a L_a$, где:

$$L_a = \begin{cases} \emptyset, & a = 0 \\ \{\{x \in L_b \mid \varphi(x, t_1, \dots, t_k)\} \mid \varphi \text{ — формула}, t_i \in L_b\}, & a = b' \\ \bigcup_{b < a} (L_b), & a \text{ — пред.} \end{cases}$$

Усиление аксиомы выбора

Определение

Аксиома конструктивности: $V = L$, то есть допустимы только те фундированные множества, которые задаются формулами.

Теорема

Аксиома выбора и континуум-гипотеза следуют из аксиомы конструктивности
Для некоторых теорий аксиома слишком сильна.

Заключительный обзор

Конструктивность теории — насколько легко строить сложные объекты в ней:

1. Неконструктивные теории допускают доказательства чистого существования произвольных по сложности объектов.
2. Конструктивные теории: требуют процесс построения (желательно конечный или хотя бы счётный), состоящий из интуитивно понятных шагов.

Аксиома выбора и её рассмотренные варианты влияют на её конструктивность:

1. КИП + ЦФ + Акс. выбора: менее конструктивна. Например, возможно показать существование разбиения шара на 5 частей, из которых можно составить два шара, равных исходному (теорема Банаха-Тарского).
Интуитивно нарушается аддитивность объёма (формального парадокса нет).
2. КИП + ЦФ
3. ИИП + ЦФ: более конструктивна. Она проще формализуется с помощью компьютера, но мат. анализ в ней сложнее и довольно сильно отличается от классического.