

ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ ПО КУРСУ «ТЕОРИЯ ТИПОВ»

весна 2016 г.

1. На вход вашей программе дается файл `task1.in`, содержащий лямбда-выражение в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}\langle \text{Выражение} \rangle &::= [\langle \text{Применение} \rangle] \backslash \langle \text{Переменная} \rangle \cdot \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \langle \text{Применение} \rangle \\ \langle \text{Применение} \rangle &::= \langle \text{Применение} \rangle \langle \text{Атом} \rangle | \langle \text{Атом} \rangle \\ \langle \text{Атом} \rangle &::= '(' \langle \text{Выражение} \rangle ')' | \langle \text{Переменная} \rangle \\ \langle \text{Переменная} \rangle &::= ('a' \dots 'z') \{ 'a' \dots 'z' | '0' \dots '9' | ' ' \}^*\end{aligned}$$

Аргументы-переменные в применении должны разделяться пробелом. В остальных случаях пробелы могут отсутствовать. Любые пробелы между нетерминальными символами (кроме пробела, разделяющего аргументы в применении) — а также начальные и конечные пробелы в строке — должны игнорироваться. Символы табуляции, возврата каретки и перевода строки должны трактоваться как пробелы.

Требуется нормализовать его и результат записать в файл `task2.out`. Вы можете рассчитывать, что лямбда-выражение имеет нормальную форму.

2. Просто типизированное лямбда-исчисление. На вход в файле `task2.in` задано лямбда-выражение. Выведите в файл `task2.out` какой-нибудь наиболее общий тип для этого выражения в просто типизированном лямбда-исчислении (если этот тип существует), или укажите, что выражение типа не имеет.

Результат должен соответствовать следующей грамматике:

$$\begin{aligned}\langle \text{Ответ} \rangle &::= \langle \text{Тип} \rangle \backslash n \langle \text{Контекст} \rangle | \text{Лямбда-выражение не имеет типа.} \\ \langle \text{Контекст} \rangle &::= \{ \langle \text{Переменная} \rangle : \langle \text{Тип} \rangle \backslash n \}^* \\ \langle \text{Тип} \rangle &::= \langle \text{Типовой-терм} \rangle | \langle \text{Типовой-терм} \rangle \rightarrow \langle \text{Тип} \rangle \\ \langle \text{Типовой-терм} \rangle &::= \langle \text{Имя-типа} \rangle | '(' \langle \text{Тип} \rangle ')' \\ \langle \text{Имя-типа} \rangle &::= ' ' ('a' \dots 'z') \{ 'a' \dots 'z' | '0' \dots '9' \}^*\end{aligned}$$

3. Алгоритм W . На вход программе передается файл `task3.in`, содержащий расширенное лямбда-выражение.

$$\begin{aligned}\langle \text{Выражение} \rangle &::= \text{'let'} \langle \text{Переменная} \rangle = \langle \text{Выражение} \rangle \text{'in'} \langle \text{Выражение} \rangle \\ &\quad | \langle \text{Абстракция} \rangle \\ \langle \text{Абстракция} \rangle &::= [\langle \text{Применение} \rangle] \backslash \langle \text{Переменная} \rangle \cdot \langle \text{Абстракция} \rangle \\ &\quad | \langle \text{Применение} \rangle \\ \langle \text{Применение} \rangle &::= \langle \text{Применение} \rangle \langle \text{Терм} \rangle | \langle \text{Терм} \rangle \\ \langle \text{Терм} \rangle &::= '(' \langle \text{Выражение} \rangle ')' \\ &\quad | \langle \text{Переменная} \rangle \\ \langle \text{Переменная} \rangle &::= ('a' \dots 'z') \{ 'a' \dots 'z' | '0' \dots '9' \}^*\end{aligned}$$

Требуется применить алгоритм W и выдать в выходной файл `task3.out` результирующий тип и контекст в следующей грамматике:

$$\begin{aligned}
\langle \text{Ответ} \rangle &::= \langle \text{Тип} \rangle ' \backslash n ' \langle \text{Контекст} \rangle \mid \text{‘Лямбда-выражение не имеет типа.’} \\
\langle \text{Контекст} \rangle &::= \{ \langle \text{Переменная} \rangle ' : ' \langle \text{Тип} \rangle ' \backslash n ' \}^* \\
\langle \text{Тип} \rangle &::= \langle \text{Атом} \rangle ' -> ' \langle \text{Тип} \rangle \mid \langle \text{Атом} \rangle \\
\langle \text{Атом} \rangle &::= \langle \text{Переменная} \rangle \mid ' (' \langle \text{Тип} \rangle ') ' \\
\langle \text{Переменная} \rangle &::= ' ' (' a ' \dots ' z ') \{ ' a ' \dots ' z ' \mid ' 0 ' \dots ' 9 ' \}^*
\end{aligned}$$

4. Вывод типа в НМ — построение ограничений. На вход программе передается файл task4.in, содержащий лямбда-выражение. Требуется построить набор ограничений для типизации данного выражения, и записать его в выходной файл в соответствии со следующей грамматикой (имена переменных должны совпадать с соответствующими именами из исходного лямбда-выражения).

$$\begin{aligned}
\langle \text{Ограничение} \rangle &::= \langle \text{Отношение} \rangle \mid \langle \text{Конъюнкция} \rangle \mid \langle \text{Существование} \rangle \mid \langle \text{def} \rangle \\
\langle \text{Отношение} \rangle &::= \langle \text{Переменная} \rangle ' < ' \langle \text{Тип} \rangle \mid \langle \text{Тип} \rangle = \langle \text{Тип} \rangle \\
\langle \text{Конъюнкция} \rangle &::= ' (' \langle \text{Ограничение} \rangle ' \& ' \langle \text{Ограничение} \rangle ') ' \\
\langle \text{Существование} \rangle &::= ' (' ? ' \langle \text{Типовая переменная} \rangle . \langle \text{Ограничение} \rangle ') ' \\
\langle \text{def} \rangle &::= ' (' \text{‘def’} \langle \text{Переменная} \rangle ' : ' \langle \text{sigma} \rangle \text{‘in’} \langle \text{Ограничение} \rangle ') ' \\
\langle \text{sigma} \rangle &::= '@' \{ \langle \text{Типовая переменная} \rangle \}^+ [' \langle \text{Ограничение} \rangle '] ' . ' \langle \text{Тип} \rangle \\
\langle \text{Переменная} \rangle &::= (' a ' \dots ' z ') \{ ' a ' \dots ' z ' \mid ' 0 ' \dots ' 9 ' \}^* \\
\langle \text{Типовая переменная} \rangle &::= ' ' ' \langle \text{Переменная} \rangle \\
\langle \text{Тип} \rangle &::= \langle \text{Атом} \rangle ' -> ' \langle \text{Тип} \rangle \mid \langle \text{Атом} \rangle \\
\langle \text{Атом} \rangle &::= \langle \text{Типовая переменная} \rangle \mid ' (' \langle \text{Тип} \rangle ') '
\end{aligned}$$

5. Вывод типа в НМ — разрешение ограничений и вывод типа (для групп 38-39). На вход программе передаётся файл task5.in, содержащий набор ограничений — результат работы программы из задачи 4. Требуется по данным ограничениям вывести тип выражения и выдать его в файл task5.out в формате вывода для задачи 3.
6. Постройте доказательство на языке Идрис для одного из следующих утверждений (на выбор):

- Докажите корректность алгоритма Эвклида.
- Определите сетоид для рациональных чисел и функции для четырёх арифметических операций, докажите для них аксиомы поля.