

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, весна 2020 года

## Домашнее задание №1: «вводная лекция для ТТ и ФП»

1. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$T$	$\lambda a. \lambda b. a$	истина
$F$	$\lambda a. \lambda b. b$	ложь
$Not$	$\lambda x. x \ F \ T$	отрицание
$And$	$\lambda x. \lambda y. x \ y \ F$	конъюнкция

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- (a)  $T \ F$
  - (b)  $(T \ Not \ (\lambda t. t)) \ F$
  - (c)  $And \ F \ T$
  - (d)  $And \ T \ T$
2. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:
- (a) Дизъюнкция
  - (b) Штрих Шеффера («и-не»)
  - (c) Исключающее или
3. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} \ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} \ (f \ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\bar{n}$	$\lambda f. \lambda x. f^{(n)} \ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$	прибавление 1
$IsZero$	$\lambda n. n \ (\lambda x. F) \ T$	проверка на 0

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (a) Сложение
  - (b) Умножение на 2 ( $Mul2$ )
  - (c) Умножение
  - (d) Возведение в степень
  - (e) Проверка на чётность
  - (f) Деление на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)
  - (g) Сравнение двух чисел ( $IsLess$ ) — истина, если первый аргумент меньше второго (могут потребоваться пары и/или вычитания)
4. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:
- (a)  $\bar{2} \ \bar{2}$
  - (b)  $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$
  - (c)  $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$
5. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a. \lambda b. (\lambda x. x \ a \ b)$	создание пары
$PrL$	$\lambda p. p \ T$	левая проекция
$PrR$	$\lambda p. p \ F$	правая проекция
$Case$	$\lambda l. \lambda r. \lambda c. c \ l \ r$	case для алгебраического типа
$InL$	$\lambda l. (\lambda x. \lambda y. x \ l)$	левая инъекция
$InR$	$\lambda r. (\lambda x. \lambda y. y \ r)$	правая инъекция

- (a) Убедитесь, что  $PrL (MkPair a b) \rightarrow_{\beta} a$ .
  - (b) Убедитесь, что  $Case (\lambda x.T) (\lambda y.y) (InR p) \rightarrow_{\beta} p$ .
  - (c) Постройте операцию вычитания 1 из числа
  - (d) Постройте операцию вычитания чисел
  - (e) Постройте операцию деления чисел
6. Напомним определение Y-комбинатора:  $\lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x))$ .
- (a) Покажите, что выражение  $Y f$  не имеет нормальной формы;
  - (b) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f.\bar{0})$  имеет нормальную форму.
  - (c) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} (f Minus1 x)) 2$  имеет нормальную форму.
  - (d) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} ((+1) (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?
  - (e) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{1} (Mul2 (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?
  - (f) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления  $n$ -го числа Фибоначчи.
7. Пусть  $\eta = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ . Покажите (т.е. постройте соответствующее доказательство в исчислении по Карри), что:
- (a)  $\vdash \bar{2} : \eta$ .
  - (b)  $\vdash (+1) : \eta \rightarrow \eta$ .
  - (c)  $\vdash Plus : \eta \rightarrow \eta$ .
  - (d)  $\vdash Mul : \eta \rightarrow \eta$  (не каждая реализация умножения будет удовлетворять этому свойству; вам требуется найти нужную)
8. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
  - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
  - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
  - (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что — нет?
9. Типы для конъюнкции и дизъюнкции на Хаскеле. Списки.
- Заметим, что список (например, целых чисел) — это алгебраический тип:
- ```
List = Nil | Cons Integer List.
```
- Можно сконструировать значение данного типа: `Cons 3 (Cons 5 Nil)`. Можно, например, вычислить его длину:
- ```
length Nil = 0
length (Cons _ tail) = length tail + 1
```
- Определим  $Nil = InL 0$ , а  $Cons a b = InR (MkPair a b)$ . Заметим, что теперь списки могут быть напрямую перенесены в лямбда выражения. Тогда, используя данную идею, реализуйте в Хаскеле:
- (a) определите конструкции `mkpair`, `prl`, `prg` на Хаскеле — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом конъюнкции с лекции.
  - (b) определите конструкции `case`, `inl`, `inr` — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом дизъюнкции с лекции.
  - (c) постройте список целых чисел из данных конструкций.
  - (d) определите функцию вычисления длины списка целых чисел с помощью данных конструкций (к сожалению, скомпилировать это выражение на Хаскеле не получится — поэтому достаточно написать исходный код).

## Домашнее задание №2: «формализация лямбда-исчисления»

1. На лекции было использовано понятие свободы для подстановки.

- (a) Найдите лямбда-выражение, которое при однократной редукции требует переименования связанных переменных (редукция невозможна без переименования).
- (b) Заметим, что даже если мы запретим использовать одни и те же переменные в разных лямбда-абстракциях, это не будет решением проблемы переименований. Предложите лямбда-выражение, в котором (a) все лямбда-абстракции указаны по разным переменным; но (б) через некоторое количество редукций потребуется переименование связанных переменных.

2. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

Также напомним определение:

$$S := \lambda x. \lambda y. \lambda z. x \ z \ (y \ z)$$

$$K := \lambda x. \lambda y. x$$

$$I := \lambda x. x$$

Известна теорема о том, что для любого комбинатора  $X$  можно найти выражение  $P$  (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов  $S$  и  $K$ ), что  $X =_{\beta} P$ . Будем говорить, что комбинатор  $P$  *выражает* комбинатор  $X$  в базисе  $SK$ .

Выразите в базисе  $SK$ :

- (a)  $F = \lambda x. \lambda y. y$
- (b)  $\bar{1}$
- (c)  $Not$
- (d)  $Xor$
- (e)  $InL$
- (f)  $\bar{n}$

3. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$L := \lambda abcdefghijklmnopqrstuvwxyzr. r(thisisafixedpointcombinator)$$

$$R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL$$

В данном определении терм  $R$  является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм  $F$ , выполнено  $R \ F =_{\beta} F \ (R \ F)$ .

- (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.
  - (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме  $L$ ; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.
4. Пусть задано  $n \in \mathbb{N}$ . Постройте лямбда-выражение, которое преобразуется в нормальную форму в  $n$  раз медленнее с помощью нормального порядка редукции, чем с помощью какого-то другого (самого быстрого) порядка редукции.
5. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.
- (a) Предложите «двоичные нумералы» — способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).
  - (b) Предложите реализацию функции  $(+1)$  в данном представлении.
  - (c) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.
  - (d) Предложите реализацию функции сложения в данном представлении.
  - (e) Предложите реализацию функции вычитания в данном представлении.
  - (f) Какова вычислительная сложность арифметопераций с двоичными нумералами?
6. Предложим альтернативные аксиомы для конъюнкции:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta} \text{ Введ. } \& \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \ \& \ \beta \quad \Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma} \text{ Удал. } \&$$

- (а) Предложите лямбда-выражения, соответствующие данным аксиомам; поясните, как данные выражения абстрагируют понятие «упорядоченной пары».
- (б) Выразите изложенные в лекции аксиомы конъюнкции через приведённые в условии.
- (с) Выразите приведённые в условии аксиомы конъюнкции через изложенные в лекции.

7. Как мы уже разбирали,  $\not\vdash x : \tau$  в силу дополнительных ограничений аксиомы

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

Найдите лямбда-выражение  $N$ , что  $\not\vdash N : \tau$  в силу ограничения аксиомы

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \sigma \rightarrow \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. N : \tau} \quad x \notin FV(\Gamma)$$

### Домашнее задание №3: «вывод типов; алгоритм унификации»

1. *Вполне упорядоченным* множеством назовём такое линейно-упорядоченное отношение ( $<$ ) множество  $S$  (и такой порядок назовём *полным*), что какое бы ни было множество  $U \subseteq S$ , в  $U$  найдётся наименьший элемент.
  - (а) Покажите, что неотрицательные вещественные числа  $[0, +\infty)$  — не вполне упорядоченное множество. Существуют ли конечные и счётные не вполне упорядоченные множества?
  - (б) Определим лексикографический порядок на  $\mathbb{N}^n$ : положим, что  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle < \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ , если найдётся такой  $k$ , что  $a_1 = b_1, \dots, a_{k-1} = b_{k-1}$ , но  $a_k < b_k$ . Покажите, что такой порядок — полный.
  - (с) Пусть  $S$  вполне упорядочено отношением ( $<$ ), определим  $a > b := b < a$ . Пусть  $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$  — строго монотонно убывающая последовательность значений из  $S$ . Покажите, что данная последовательность всегда имеет конечную длину.
2. Рассмотрим полное интуиционистское исчисление высказываний. Дополните алгоритм вывода типов дополнительными функциональными символами для связок  $\&$ ,  $\vee$  и  $\perp$  (а также сделайте дополнительные необходимые исправления в нём) и продемонстрируйте вывод типов для выражения, использующего хотя бы две из данных трёх конструкций.
3. Поясним название «алгебраические типы» — это семейство составных типов, позволяющих строить «алгебраические» выражения на типах:

название	обозначение	алгебраический смысл
тип-сумма, «алгебраический»	$\alpha \vee \beta$	$\alpha + \beta$
тип-произведение, пара	$\alpha \& \beta$	$\alpha \times \beta$
тип-степень, функция	$\alpha \rightarrow \beta$	$\beta^\alpha$

Название «алгебраический» закрепилось в первую очередь за типом-суммой (видимо потому, что остальные типы имеют устоявшиеся названия), однако, может быть отнесено и к другим типам.

Поясните «типовый» (программистский) смысл следующих алгебраических тождеств — и постройте программы, их доказывающие:

- (а)  $\gamma \times (\alpha + \beta) = \gamma \times \alpha + \gamma \times \beta$ .
- (б)  $\gamma^{\alpha \times \beta} = \gamma^{\alpha^\beta}$ . Как называется данное тождество?
- (с)  $\gamma^{\alpha + \beta} = \gamma^\alpha \times \gamma^\beta$ .

4. Найдите лямбда-выражения, доказывающие:

- (а) Формулу де-Моргана  $\neg(\alpha \vee \beta) \rightarrow \neg\alpha \& \neg\beta$ .
- (б) Контрапозицию  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$ .
- (с) Закон исключённого третьего после применения теоремы Гливленко  $\neg\neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ .