

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ («МАЛЫЕ») ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, весна 2020 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция для ТТ и ФП»

1. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
Not	$\lambda x.x \ F \ T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x \ y \ F$	конъюнкция

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- (a) $T \ F$
 - (b) $(T \ Not \ (\lambda t.t)) \ F$
 - (c) $And \ F \ T$
 - (d) $And \ T \ T$
2. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:
- (a) Дизъюнкция
 - (b) Штрих Шеффера («и-не»)
 - (c) Исключающее или
3. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} \ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} \ (f \ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
\bar{n}	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)} \ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n \ f \ (f \ x)$	прибавление 1
$IsZero$	$\lambda n.n \ (\lambda x.F) \ T$	проверка на 0

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (a) Сложение
 - (b) Умножение на 2 ($Mul2$)
 - (c) Умножение
 - (d) Возведение в степень
 - (e) Проверка на чётность
 - (f) Деление на 3
 - (g) Сравнение двух чисел ($IsLess$) — истина, если первый аргумент меньше второго
4. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:
- (a) $\bar{2} \ \bar{2}$
 - (b) $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$
 - (c) $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$
5. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x \ a \ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p.p \ T$	левая проекция
PrR	$\lambda p.p \ F$	правая проекция
$Case$	$\lambda l.\lambda r.\lambda c.c \ l \ r$	case для алгебраического типа
InL	$\lambda l.(\lambda x.\lambda y.l \ x \ y)$	левая инъекция
InR	$\lambda r.(\lambda x.\lambda y.r \ x \ y)$	правая инъекция

- (a) Убедитесь, что $PrL (MkPair a b) \rightarrow_{\beta} a$.
 - (b) Убедитесь, что $Case (\lambda x.T) (\lambda y.y) (InR p) \rightarrow_{\beta} p$.
 - (c) Постройте операцию вычитания 1 из числа
 - (d) Постройте операцию вычитания чисел
 - (e) Постройте операцию деления чисел
6. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x))$.
- (a) Покажите, что выражение $Y f$ не имеет нормальной формы;
 - (b) Покажите, что выражение $Y (\lambda f.\bar{0})$ имеет нормальную форму.
 - (c) Покажите, что выражение $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} (f Minus1 x)) 2$ имеет нормальную форму.
 - (d) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} ((+1) (f Minus1 x))) \bar{n}$?
 - (e) Какова нормальная форма выражения $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{1} (Mul2 (f Minus1 x))) \bar{n}$?
 - (f) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления n -го числа Фибоначчи.
7. Пусть $\eta = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$. Покажите (т.е. постройте соответствующее доказательство в исчислении по Карри), что:
- (a) $\vdash \bar{2} : \eta$.
 - (b) $\vdash (+1) : \eta \rightarrow \eta$.
 - (c) $\vdash Plus : \eta \rightarrow \eta$.
 - (d) $\vdash Mul : \eta \rightarrow \eta$ (не каждая реализация умножения будет удовлетворять этому свойству; вам требуется найти нужную)
8. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
 - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
 - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
 - (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что — нет?
9. Типы для конъюнкции и дизъюнкции на Хаскеле. Списки.
- Заметим, что список (например, целых чисел) — это алгебраический тип:
- ```
List = Nil | Cons Integer List.
```
- Можно сконструировать значение данного типа: `Cons 3 (Cons 5 Nil)`. Можно, например, вычислить его длину:
- ```
length Nil = 0
length (Cons _ tail) = length tail + 1
```
- Определим $Nil = InL 0$, а $Cons a b = InR (MkPair a b)$. Заметим, что теперь списки могут быть напрямую перенесены в лямбда выражения. Тогда, используя данную идею, реализуйте в Хаскеле:
- (a) определите конструкции `mkpair`, `prl`, `prg` на Хаскеле — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом конъюнкции с лекции.
 - (b) определите конструкции `case`, `inl`, `inr` — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом дизъюнкции с лекции.
 - (c) постройте список целых чисел из данных конструкций.
 - (d) определите функцию вычисления длины списка целых чисел с помощью данных конструкций.