

# Вопросы к экзамену по курсу «Теория типов»

ИТМО, группы М3334..М3339

Осенний семестр 2020 г.

1. Бестиповое лямбда-исчисление. Общие определения (альфа-эквивалентность, бета-редукция, бета-эквивалентность). Параллельная бета-редукция. Теорема Чёрча-Россера.
2. Нормальный и аппликативный порядок редукций, мемоизация.  $Y$ -комбинатор. Нетипизируемость  $Y$ -комбинатора. Слабая и сильная нормализация. Парадокс Карри, парадокс при интерпретации бестипового лямбда-исчисления как логики.
3. Импликационный фрагмент ИИВ. Теорема о замкнутости И.Ф. относительно доказуемости. Комбинаторы, базис SKI, его аналог в логике.
4. Просто типизированное лямбда-исчисление. Исчисление по Чёрчу и по Карри. Изоморфизм Карри-Ховарда. Конъюнкция, дизъюнкция, ложь и соответствующие им конструкции в лямбда-исчислении. Алгебраические типы. Чёрчевские нумералы. Теорема о выразительной силе просто типизированного лямбда-исчисления (формулировка).
5. Алгебраические термы. Задача унификации в алгебраических термах. Алгоритм унификации. Наиболее общее решение задачи унификации.
6. Задачи проверки типа, реконструкции (вывода) типа, обитаемости типа в просто типизированном лямбда-исчислении. Их аналоги в интуиционистском исчислении высказываний. Алгоритм нахождения типа в просто типизированном лямбда-исчислении. Наиболее общий тип, наиболее общая пара.
7. Логика второго порядка. Выразимость связок через импликацию и квантор всеобщности в интуиционистской логике 2-го порядка (конъюнкция, дизъюнкция, ложь, отрицание, квантор существования). Простая модель для логики второго порядка. Система  $F$ . Изоморфизм Карри-Ховарда для системы  $F$ : квантор всеобщности, упорядоченные пары, алгебраические типы.
8. Экзистенциальные типы. Конструкции `pack` и `abstype`. Абстрактные типы данных. Изоморфизм Карри-Ховарда для квантора существования и экзистенциальных типов.
9. Ранг типа. Частный случай типа. Типы и типовые схемы. Типовая система Хиндли-Милнера. Алгоритм  $W$ . Типизация  $Y$ -комбинатора. Экви- и изорекурсивные типы,  $\mu$ -оператор, `roll` и `unroll`. Примеры конструкций и операторов в языках программирования.
10. Обобщённые типовые системы. Типы, рода, сорта. Лямбда-куб.  $\Sigma$  и  $\Pi$  типы. Зависимые типы. Функция `printf`, её типизация.
11. Теория множеств. Необходимость формализации (парадокс Рассела). Равенство. Аксиомы теории множеств (равенства, пустого, пары, объединения, степени) и схемы аксиом (выделения, подстановки). Дизъюнктивное объединение множеств. Аксиома выбора и её аналоги (существование частично-обратной к сюръективной функции, существование трансверсали к семейству непустых множеств). Неконструктивность аксиомы выбора.
12. Частичный, линейный, полный порядок. Порядковые числа (ординалы). Аксиома бесконечности. Существование ординала  $\omega$ . «Арифметические» операции на ординалах. Доказательство  $\omega + 1 \neq 1 + \omega$ . Аналогия между ординалами и упорядоченными алгебраическими типами.
13. Мощность множеств. Кардиналы. Теорема Кантора-Бернштейна.
14. Диагональный метод и теорема Кантора. Неформальное изложение и изложение на языке аксиом теории множеств.

15. Теорема Лёвенгейма-Сколема. Парадокс Сколема.
16. Интенциональное и экстенциональное равенства, достоинства и недостатки подходов. Равенство как путь в топологическом пространстве. Язык Аренд. Индуктивные типы и равенство. Интервальный тип. Стандартные функции: `coe`, `transport`, `rewrite`, `path`, `pmar`. Функциональная экстенциональность, её доказуемость в Аренде.  $\Sigma$  и  $\Pi$  типы в языке Аренд. Примеры использования.
17. Типы, универсумы, пропы, множества. Импредикативность. Сетоиды. Теорема Диаконеску.
18. Линейная логика. Уникальные типы. Комбинаторный базис  $BSKW$ . Полиморфизм (параметрический и наследственный). Система  $F_{<}$ : Ядерное и полное правила.
19. Парадокс Бурали-Форте. Парадоксальные универсумы, доказательство существования парадокса Бурали-Форте при существовании парадоксального универсума. Общая идея построения парадокса Жирара в системе  $U$ .