

# ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ (“МАЛЫЕ”) ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Теория типов, ИТМО, М3235-М3239, весна 2020 года

## Домашнее задание №1: «вводная лекция для ТТ и ФП»

1. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$T$	$\lambda a. \lambda b. a$	истина
$F$	$\lambda a. \lambda b. b$	ложь
$Not$	$\lambda x. x \ F \ T$	отрицание
$And$	$\lambda x. \lambda y. x \ y \ F$	конъюнкция

Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

- (a)  $T \ F$   
 (b)  $(T \ Not \ (\lambda t. t)) \ F$   
 (c)  $And \ F \ T$   
 (d)  $And \ T \ T$
2. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:
- (a) Дизъюнкция  
 (b) Штрих Шеффера («и-не»)  
 (c) Исключающее или
3. Напомним определения с лекций:

$$f^{(n)} \ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)} \ (f \ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\bar{n}$	$\lambda f. \lambda x. f^{(n)} \ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n. \lambda f. \lambda x. n \ f \ (f \ x)$	прибавление 1
$IsZero$	$\lambda n. n \ (\lambda x. F) \ T$	проверка на 0

Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

- (a) Сложение  
 (b) Умножение на 2 ( $Mul2$ )  
 (c) Умножение  
 (d) Возведение в степень  
 (e) Проверка на чётность  
 (f) Деление на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)  
 (g) Сравнение двух чисел ( $IsLess$ ) — истина, если первый аргумент меньше второго (могут потребоваться пары и/или вычитания)
4. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:
- (a)  $\bar{2} \ \bar{2}$   
 (b)  $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$   
 (c)  $\bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2} \ \bar{2}$
5. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a. \lambda b. (\lambda x. x \ a \ b)$	создание пары
$PrL$	$\lambda p. p \ T$	левая проекция
$PrR$	$\lambda p. p \ F$	правая проекция
$Case$	$\lambda l. \lambda r. \lambda c. c \ l \ r$	case для алгебраического типа
$InL$	$\lambda l. (\lambda x. \lambda y. x \ l)$	левая инъекция
$InR$	$\lambda r. (\lambda x. \lambda y. y \ r)$	правая инъекция

- (a) Убедитесь, что  $PrL (MkPair a b) \rightarrow_{\beta} a$ .
  - (b) Убедитесь, что  $Case (\lambda x.T) (\lambda y.y) (InR p) \rightarrow_{\beta} p$ .
  - (c) Постройте операцию вычитания 1 из числа
  - (d) Постройте операцию вычитания чисел
  - (e) Постройте операцию деления чисел
6. Напомним определение Y-комбинатора:  $\lambda f.(\lambda x.f (x x)) (\lambda x.f (x x))$ .
- (a) Покажите, что выражение  $Y f$  не имеет нормальной формы;
  - (b) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f.\bar{0})$  имеет нормальную форму.
  - (c) Покажите, что выражение  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} (f Minus1 x)) 2$  имеет нормальную форму.
  - (d) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{0} ((+1) (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?
  - (e) Какова нормальная форма выражения  $Y (\lambda f.\lambda x.(IsZero x) \bar{1} (Mul2 (f Minus1 x))) \bar{n}$ ?
  - (f) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления  $n$ -го числа Фибоначчи.
7. Пусть  $\eta = (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha)$ . Покажите (т.е. постройте соответствующее доказательство в исчислении по Карри), что:
- (a)  $\vdash \bar{2} : \eta$ .
  - (b)  $\vdash (+1) : \eta \rightarrow \eta$ .
  - (c)  $\vdash Plus : \eta \rightarrow \eta$ .
  - (d)  $\vdash Mul : \eta \rightarrow \eta$  (не каждая реализация умножения будет удовлетворять этому свойству; вам требуется найти нужную)
8. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:
- (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?
  - (b) сложение двух чёрчевских нумералов.
  - (c) умножение двух чёрчевских нумералов.
  - (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что — нет?
9. Типы для конъюнкции и дизъюнкции на Хаскеле. Списки.
- Заметим, что список (например, целых чисел) — это алгебраический тип:
- ```
List = Nil | Cons Integer List.
```
- Можно сконструировать значение данного типа: `Cons 3 (Cons 5 Nil)`. Можно, например, вычислить его длину:
- ```
length Nil = 0
length (Cons _ tail) = length tail + 1
```
- Определим  $Nil = InL 0$ , а  $Cons a b = InR (MkPair a b)$ . Заметим, что теперь списки могут быть напрямую перенесены в лямбда выражения. Тогда, используя данную идею, реализуйте в Хаскеле:
- (a) определите конструкции `mkrpair`, `prl`, `prg` на Хаскеле — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом конъюнкции с лекции.
  - (b) определите конструкции `case`, `inl`, `inr` — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом дизъюнкции с лекции.
  - (c) постройте список целых чисел из данных конструкций.
  - (d) определите функцию вычисления длины списка целых чисел с помощью данных конструкций (к сожалению, скомпилировать это выражение на Хаскеле не получится — поэтому достаточно написать исходный код).