Теоретические («малые») домашние задания

Теория типов, ИТМО, M3235-M3239, весна 2020 года

Домашнее задание №1: «вводная лекция для ТТ и ФП»

1. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
T	$\lambda a.\lambda b.a$	истина
F	$\lambda a.\lambda b.b$	ложь
Not	$\lambda x.x\ F\ T$	отрицание
And	$\lambda x.\lambda y.x\ y\ F$	конъюнкция

   Проредуцируйте следующие выражения и найдите нормальную форму:

   (a) $T\ F$
   (b) $(T\ Not\ (\lambda t.t))\ F$
   (c) $And\ F\ T$
   (d) $And\ T\ T$

2. Постройте лямбда-выражения для следующих булевских выражений:

   (a) Дизъюнкция
   (b) Штрих Шеффера («и-не»)
   (c) Исключающее или

3. Напомним определения с лекций:

   $$f^{(n)}\ X ::= \begin{cases} X, & n = 0 \\ f^{(n-1)}\ (f\ X), & n > 0 \end{cases}$$

Обозначение	лямбда-терм	название
$\overline{n}$	$\lambda f.\lambda x.f^{(n)}\ x$	чёрчевский нумерал
$(+1)$	$\lambda n.\lambda f.\lambda x.n\ f\ (f\ x)$	прибавление 1
$IsZero$	$\lambda n.n\ (\lambda x.F)\ T$	проверка на 0

   Используя данные определения, постройте выражения для следующих операций над числами:

   (a) Сложение
   (b) Умножение на 2 ($Mul2$)
   (c) Умножение
   (d) Возведение в степень
   (e) Проверка на чётность
   (f) Деление на 3 (могут потребоваться пары и/или вычитания)
   (g) Сравнение двух чисел ($IsLess$) — истина, если первый аргумент меньше второго (могут потребоваться пары и/или вычитания)

4. Проредуцируйте выражение и найдите его нормальную форму:

   (a) $\overline{2}\ \overline{2}$
   (b) $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}$
   (c) $\overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}\ \overline{2}$

5. Напомним определения с лекций:

Обозначение	лямбда-терм	название
$MkPair$	$\lambda a.\lambda b.(\lambda x.x\ a\ b)$	создание пары
PrL	$\lambda p.p\ T$	левая проекция
PrR	$\lambda p.p\ F$	правая проекция
$Case$	$\lambda l.\lambda r.\lambda c.c\ l\ r$	case для алгебраического типа
InL	$\lambda l.(\lambda x.\lambda y.x\ l)$	левая инъекция
InR	$\lambda r.(\lambda x.\lambda y.y\ r)$	правая инъекция

(a) Убедитесь, что $PrL\ (MkPair\ a\ b) \twoheadrightarrow_\beta a$.

(b) Убедитесь, что $Case\ (\lambda x.T)\ (\lambda y.y)\ (InR\ p) \twoheadrightarrow_\beta p$.

(c) Постройте операцию вычитания 1 из числа

(d) Постройте операцию вычитания чисел

(e) Постройте опреацию деления чисел

6. Напомним определение Y-комбинатора: $\lambda f.(\lambda x.f\ (x\ x))\ (\lambda x.f\ (x\ x))$.

   (a) Покажите, что выражение $Y\ f$ не имеет нормальной формы;

   (b) Покажите, что выражение $Y\ (\lambda f.\overline{0})$ имеет нормальную форму.

   (c) Покажите, что выражение $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ (f\ Minus1\ x))\ 2$ имеет нормальную форму.

   (d) Какова нормальная форма выражения $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{0}\ ((+1)\ (f\ Minus1\ x)))\ \overline{n}$?

   (e) Какова нормальная форма выражения $Y\ (\lambda f.\lambda x.(IsZero\ x)\ \overline{1}\ (Mul2\ (f\ Minus1\ x)))\ \overline{n}$?

   (f) Определите с помощью Y-комбинатора функцию для вычисления n-го числа Фибоначчи.

7. Пусть $\eta = (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha)$. Покажите (т.е. постройте соответствующее доказательство в исчислении по Карри), что:

   (a) $\vdash \overline{2} : \eta$.

   (b) $\vdash (+1) : \eta \to \eta$.

   (c) $\vdash Plus : \eta \to \eta$.

   (d) $\vdash Mul : \eta \to \eta$ (не каждая реализация умножения будет удовлетворять этому свойству; вам требуется найти нужную)

8. Определим на языке Хаскель следующую функцию: `show_church n = show (n (+1) 0)` Убедитесь, что `show_church (\f -> \x -> f (f x))` вернёт 2. Пользуясь данным определением и его идеей, реализуйте следующие функции:

   (a) `int_to_church` — возвращает чёрчевский нумерал (т.е. функцию от двух аргументов) по целому числу. Каков точный тип результата этой функции?

   (b) сложение двух чёрчевских нумералов.

   (c) умножение двух чёрчевских нумералов.

   (d) можно ли определить вычитание 1 и вычитание? Что получается, а что — нет?

9. Типы для конъюнкции и дизъюнкции на Хаскеле. Списки.

   Заметим, что список (например, целых чисел) — это алгебраический тип:

   `List = Nil | Cons Integer List`.

   Можно сконструировать значение данного типа: `Cons 3 (Cons 5 Nil)`. Можно, например, вычислить его длину:

```
length Nil = 0
length (Cons _ tail) = length tail + 1
```

   Определим $Nil = InL\ 0$, а $Cons\ a\ b = InR\ (MkPair\ a\ b)$. Заметим, что теперь списки могут быть впрямую перенесены в лямбда выражения. Тогда, используя данную идею, реализуйте в Хаскеле:

   (a) определите конструкции mkpair, prl, prr на Хаскеле — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом конъюнкции с лекции.

   (b) определите конструкции case, inl, inr — какой тип у данных конструкций? Сравните его с типом дизъюнкции с лекции.

   (c) постройте список целых чисел из данных конструкий.

   (d) определите функцию вычисления длины списка целых чисел с помощью данных конструкций (к сожалению, скомпилировать это выражение на Хаскеле не получится — поэтому достаточно написать исходный код).

Домашнее задание №2: «формализация лямбда-исчисления»

1. На лекции было использовано понятие свободы для подстановки.

   (a) Найдите лямбда-выражение, которое при однократной редукции требует переименования связанных переменных (редукция невозможна без переименования).

   (b) Заметим, что даже если мы запретим использовать одни и те же переменные в разных лямбда-абстракциях, это не будет решением проблемы переименований. Предложите лямбда-выражение, в котором (а) все лямбда-абстракции указаны по разным переменным; но (б) через некоторое количество редукций потребуется переименование связанных переменных.

2. Дадим определение: комбинатор — лямбда-выражение без свободных переменных.

   Также напомним определение:

$$\begin{aligned} &S := \lambda x.\lambda y.\lambda z.x\ z\ (y\ z) \\ &K := \lambda x.\lambda y.x \\ &I := \lambda x.x \end{aligned}$$

   Известна теорема о том, что для любого комбинатора X можно найти выражение P (состоящее только из скобок, пробелов и комбинаторов S и K), что $X =_\beta P$. Будем говорить, что комбинатор P *выражает* комбинатор X в базисе SK.

   Выразите в базисе SK:

   (a) $F = \lambda x.\lambda y.y$
   (b) $\overline{1}$
   (c) Not
   (d) Xor
   (e) InL
   (f) $\overline{n}$

3. Бесконечное количество комбинаторов неподвижной точки. Дадим следующие определения

$$\begin{aligned} &L := \lambda abcdefghijklmnopqstuvwxyzr.r(thisisthefixedpointcombinator) \\ &R := LLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLLL \end{aligned}$$

   В данном определении терм R является комбинатором неподвижной точки: каков бы ни был терм F, выполнено $R\ F =_\beta F\ (R\ F)$.

   (a) Докажите, что данный комбинатор — действительно комбинатор неподвижной точки.

   (b) Пусть в качестве имён переменных разрешены русские буквы. Постройте аналогичное выражение по-русски: с 33 параметрами и осмысленной русской фразой в терме L; покажите, что оно является комбинатором неподвижной точки.

4. Пусть задано $n \in \mathbb{N}$. Постройте лямбда-выражение, которое преобразуется в нормальную форму в n раз медленнее с помощью нормального порядка редукции, чем с помощью какого-то другого (самого быстрого) порядка редукции.

5. Чёрчевские нумералы соответствуют натуральным числам в аксиоматике Пеано.

   (a) Предложите «двоичные нумералы» — способ кодирования чисел, аналогичный двоичной системе (такой, при котором длина записи числа соответствует логарифму числового значения).

   (b) Предложите реализацию функции $(+1)$ в данном представлении.

   (c) Предложите реализацию лямбда-выражения преобразования числа из двоичного нумерала в чёрчевский.

   (d) Предложите реализацию функции сложения в данном представлении.

   (e) Предложите реализацию функции вычитания в данном представлении.

   (f) Какова вычислительная сложность арифметопераций с двоичными нумералами?

6. Предложим альтернативные аксиомы для конъюнкции:

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \quad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta}\ \text{Введ. \&} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta \quad \Gamma, \alpha, \beta \vdash \gamma}{\Gamma \vdash \gamma}\ \text{Удал. \&}$$

(a) Предложите лямбда-выражения, соответствующие данным аксиомам; поясните, как данные выражения абстрагируют понятие «упорядоченной пары».

(b) Выразите изложенные в лекции аксиомы конъюнкции через приведённые в условии.

(c) Выразите приведённые в условии аксиомы конъюнкции через изложенные в лекции.

7. Как мы уже разбирали, $\nvdash x\ x : \tau$ в силу дополнительных ограничений аксиомы

$$\frac{}{\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$

Найдите лямбда-выражение N, что $\nvdash N : \tau$ в силу ограничения аксиомы

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash N : \sigma \to \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.N : \tau}\ x \notin FV(\Gamma)$$